

ДЕРЖАВНА СЛУЖБА УКРАЇНИ З НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ
ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

На правах рукопису

ПАЗЕН ОЛЕГ ЮРІЙОВИЧ

УДК 614.841.12:539.377

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В
БАГАТОШАРОВИХ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦІЯХ ЗА УМОВ ПОЖЕЖІ

21.06.02 – пожежна безпека

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Науковий керівник –
Тацій Роман Мар'янович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Львів – 2015

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. ОСОБЛИВОСТІ ОЦІНКИ ВОГНЕСТІЙКОСТІ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ	11
1.1 Сучасна система нормування вогнестійкості будівельних конструкцій та оцінка їх відповідності вимогам норм щодо вогнестійкості	12
1.1.1 Статистичні дані щодо наслідків впливу пожежі на будівельні конструкції	14
1.1.2 Нормативні вимоги щодо вогнестійкості несучих та огороджувальних конструкцій	17
1.2 Основні підходи щодо оцінки вогнестійкості будівельних конструкцій	19
1.2.1 Метод вогневих випробовувань будівельних конструкцій на вогнестійкість	20
1.2.2 Розрахункові методи оцінки вогнестійкості будівельних конструкцій	23
1.3 Теплотехнічна задача для оцінки вогнестійкості будівельних конструкцій	24
1.3.1 Модель теплопровідності. Загальні положення теорії теплопровідності	25
1.3.2 Основні методи розв'язування крайових задач теплопереносу	27
1.3.3 Порівняння прямих та операційних методів	29
1.3.4 Мета і задачі дослідження	30
1.4 Висновки до розділу.....	31
РОЗДІЛ 2. ПРЯМИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В БАГАТОШАРОВИХ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦІЯХ	32
2.1 Постановка задачі теплопровідності та її математична модель.....	32
2.2. Вибір функції $u(x, \tau)$ та мішана задача для $v(x, \tau)$	34
2.3 Розв'язування крайової задачі (2.5)-(2.6).....	35

2.4	Метод Фур'є та задача на власні значення.....	36
2.4.1	Розвинення за власними функціями.....	36
2.4.2	Конструктивна побудова власних функцій.....	39
2.5	Побудова розв'язку ν x, τ мішаної задачі (2.8)-(2.10).....	43
2.6	Частинний випадок кусково-сталих теплофізичних характеристик багат шарової конструкції. Конкретизація крайових умов.....	46
2.6.1	Крайові умови першого роду.....	47
2.6.2	Крайові умови третього роду.....	48
2.6.3	Мішані крайові умови.....	49
2.7	Висновки до розділу.....	51
РОЗДІЛ 3. ОБГРУНТУВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ РОЗРОБЛЕНОГО ПРЯМОГО МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У БАГАТОШАРОВИХ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦІЯХ		
3.1	Числовий експеримент.....	52
3.2	Експериментальне дослідження вогнезахисної здатності вогнезахисного покриття на бетонній плиті.....	61
3.2.1	Теоретичне дослідження вогнезахисної здатності бетонної плити без вогнезахисного покриття.....	65
3.2.2	Теоретичне дослідження вогнезахисної здатності вогнезахисного покриття Фенікс СТВ на бетонній плиті з ґрунтовкою Фенікс Контакт.....	68
3.3	Загальна методика розрахунку втрати теплоізолювальної здатності багат шарової плоскої конструкції за умов пожежі	70
3.4	Дослідження теплоізолювальної здатності багат шарової плоскій конструкції з урахуванням руйнування довільного шару за умов пожежі	74
3.5	Висновки до розділу	77
РОЗДІЛ 4. РЕЗУЛЬТАТИ АНАЛІТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БАГАТОШАРОВИХ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЯХ ЗА УМОВ ПОЖЕЖІ		
4.1	Дослідження вогнезахисних властивостей спучуючих покриттів в залежності від їх товщини та зміни теплофізичних характеристик.....	79

4.2 Дослідження температурних полів сталевих несучих конструкцій...	82
4.2.1 Дослідження температурних полів незахищених сталевих несучих конструкцій	82
4.2.2 Дослідження температурних полів захищених сталевих несучих конструкцій.....	87
4.3 Дослідження впливу внутрішніх джерел тепла на розподіл температурного поля в багатошаровій плоскій конструкції.....	93
4.4 Дослідження теплообміну в багатошаровій плоскій конструкції при різних температурних режимах пожежі.....	101
4.4.1 Стандартний температурний режим.....	104
4.4.2 Температурний режим зовнішньої пожежі.....	107
4.4.3 Температурний режим вуглеводневої пожежі.....	108
4.5 Висновки до розділу.....	112
ВИСНОВКИ.....	113
Список використаних джерел.....	115
Додаток А.....	128
Додаток Б.....	160
Додаток В.....	162
Додаток Г.....	165

ВСТУП

Актуальність теми. За даними звітів «Про пожежі та їх наслідки» [13-16, 79], за останні 5 років в Україні виникло 322 тисячі 30 пожеж, унаслідок яких загинуло 13 тисяч 76 людей та знищено або пошкоджено 119 тисяч 213 будівель та споруд. Прямі збитки від пожеж склали близько 5 млрд. грн.

Аналіз наслідків цих пожеж свідчить про те, що в більшості випадків не була забезпечена вогнестійкість будівельних конструкцій через недостатню обґрунтованість прийнятих у розрахунках температурних режимів пожеж. Температурні режими пожеж визначають у середовищі навколо конструкції, а в середині конструкції, за умов пожежі, визначають нестационарні температурні поля. Отже задачі про дослідження нестационарних температурних полів у будівельних конструкціях є актуальними і сьогодні. Багатошаровими конструкціями у будівельній галузі є несучі стіни та стіни сходових кліток, самонесучі, зовнішні не несучі, внутрішні не несучі стіни, колони, міжповерхові перекриття, елементи суміщених перекриттів (плити, настили, прогони, балки, ферми, арки, рами) [35]. Часткове або повне пошкодження несучих стін або колон може призвести до руйнування будівлі. Пошкодження або руйнування внутрішніх перегородок, стін сходових кліток, елементів міжповерхового перекриття призводить до поширення пожежі на інші приміщення (поверхи), загородження шляхів евакуації. Обвал елементів конструкції може спричинити тілесні ушкодження чи загибель людей, які перебувають у приміщенні. Тому, відповідно до вимог будівельних норм України, актуальним є забезпечення вогнестійкості багатошарових конструкцій.

Під дією високих температур у багатошарових конструкціях виникають великі температурні напруження. Відомо, що виявлення таких напружень можливе лише після розв'язку відповідних задач теплопровідності, яким присвячено ряд робіт [12, 24, 38, 49, 52, 59, 86, 87]. У таких елементах будівельних конструкцій, як несучі стіни та стіни сходових кліток, самонесучі, зовнішні не несучі, внутрішні не несучі стіни, колони, міжповерхові

перекриття, за умов пожежі можливою є поява внутрішніх джерел та стоків тепла. Це пов'язане з такими фізико-хімічними процесами як випаровування вологи при нагрівання бетонних та залізобетонних конструкцій, проходження електричного струму, хімічної реакції, реакції ядерного розпаду тощо [55, 59]. Неврахування цих особливостей може призвести до помилкового визначення межі вогнестійкості, що вносить додатковий ризик непередбачуваної поведінки конструкцій в умовах пожежі. Тому розробка математичного апарату, що уможлиблює врахування зазначених особливостей, є суттєвим кроком у підвищенні пожежної безпеки під час експлуатації будівельних конструкцій із багатошаровими елементами.

Більшість відомих досліджень проводилась без урахування джерел тепла з використанням методів інтегральних перетворень [22, 40, 51, 53, 111, 112]. У разі збільшення кількості шарів до трьох і більше, обсяг обчислень цими методами стрімко зростає. При розв'язуванні задачі в образах відбувається процес диференціювання коефіцієнтів квазидиференціальних рівнянь, що неминуче призводить до проблеми множення узагальнених функцій [17, 27, 54, 61]. Однак така процедура не є обов'язковою. Її можна легко оминати шляхом використання концепції квазіпохідних [26, 85, 89, 105]. Тому математичне моделювання процесів теплопереносу в багатошарових плоских конструкціях за умов пожежі є актуальною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась на кафедрі прикладної математики і механіки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності відповідно до «Державної цільової соціальної програми забезпечення пожежної безпеки на 2012-2015 роки», затвердженої Постановою Кабінету міністрів України №590 від 27.06.2012 року, згідно плану науково-дослідної роботи «Експериментально-аналітичні методи дослідження теплопередачі в кусково-неоднорідних структурах» (номер державної реєстрації 0114U005370) та згідно плану науково-дослідної роботи «Аналіз пожежної небезпеки машинного залу за умови викиду водню з корпусу турбоагрегату енергоблоку №1 ВП ЗАЕС»

(номер державної реєстрації 0115U001926).

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка математичного апарату для розрахунку температурних полів у елементах будівельних конструкцій з багатошаровою структурою та змінною товщиною шарів, як наукового підґрунтя для розрахункової оцінки межі вогнестійкості будівельних конструкцій за граничним станом втрати теплоізолювальної здатності.

Для досягнення поставленої мети досліджень у роботі сформульовано такі задачі:

- створити наукове підґрунтя для розробки нового методу розв'язку стаціонарних та нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових плоских стінок, заснованого на модифікації методу Фур'є з ефективним застосуванням концепції квазіпохідних;

- розробити алгоритми чисельної реалізації прямого методу розв'язку стаціонарних та нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових плоских конструкцій;

- виконати тестові розрахунки за запропонованим методом та порівняти їх результати з відомими аналітичними результатами розв'язку тестових задач;

- провести верифікацію результатів, отриманих за запропонованим методом, при їх порівнянні з відповідними експериментальними даними щодо температурних розподілів у багатошарових елементах будівельних конструкцій під впливом пожежі;

- провести чисельні дослідження багатошарових структур зі змінною товщиною шарів на прикладі елементів будівельних конструкцій з вогнезахисними системами на основі покриттів, що вспучуються;

- вдосконалити методику розрахунку межі вогнестійкості багатошарових стін та плит за граничним станом втрати теплоізолювальної здатності.

Об'єкт дослідження – нестаціонарні теплові процеси в елементах будівельних конструкцій із багатошаровою структурою за умов пожежі.

Предмет дослідження – теоретичні методи розв'язку задачі

теплопровідності плоских багатошарових елементів зі змінною товщиною шарів як розрахункової бази оцінки вогнестійкості будівельних конструкцій за граничним станом втрати теплоізолювальної здатності.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети і вирішення завдань теоретичних і експериментальних досліджень використано методи математичного моделювання, основні положення теорії теплопровідності, рівнянь математичної фізики, нестационарної теплопровідності, узагальнених квазідиференціальних рівнянь.

Аналітичні дослідження проводились шляхом використання методу редукції, концепції квазіпохідних, сучасної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, методу Фур'є та модифікованого методу власних функцій з активним застосуванням комп'ютерних математичних середовищ. Для розв'язування узагальнених стаціонарних задач ефективно використані експериментально-аналітичні методи, що передбачають, перед розв'язуванням відповідної крайової задачі, визначати температуру та густину теплового потоку за допомогою відповідних приладів. Для чисельної реалізації алгоритму розробленого методу застосоване комп'ютерне середовище Maple 13.

Наукова новизна отриманих результатів:

1. Вперше отримано розв'язок нестационарної задачі теплопровідності на основі концепції квазіпохідних для елемента з багатошаровою структурою в умовах теплового впливу пожежі з різними температурними режимами, рекомендованими чинною нормативною базою.

2. Вперше, із використанням розробленого прямого методу, щодо розв'язку задачі нестационарної теплопровідності, досліджено розподіл температурного поля в багатошарових елементах зі змінною товщиною шару на прикладі будівельних конструкцій з вогнезахисними системами на основі покриттів, що вспучуються.

3. Удосконалено математичний апарат оцінки вогнестійкості за граничним станом втрати теплоізолювальної здатності багатошарових елементів будівельних конструкцій зі змінними параметрами шарів.

4. Отримала подальший розвиток розрахункова база оцінки вогнестійкості огорожувальних елементів будівельних конструкцій за граничним станом втрати теплоізолювальної здатності шаруватих будівельних конструкцій з оздоблювальними, фасадними, вогнезахисними системами та іншими конструктивними особливостями на основі покриттів та штукатурок.

Практичне значення отриманих результатів. Прямий метод розрахунку температурних полів у багатошарових плоских конструкціях можна використати для дослідження нестационарних теплових процесів без застосування наближених та операційних методів. Упровадження результатів дисертаційного дослідження дозволило значно зменшити час та обсяг проведення обчислень при визначенні температурного розподілу в багатошарових конструкціях, а також підвищити точність розрахунку в порівнянні з наближеними методами. Схема запропонованого методу може бути поширеною на багатошарові циліндричні та сферичні конструкції.

Результати дисертаційної роботи впроваджені на Запорізькій атомній електростанції, філії МН «Дружба» ПАТ «Укртранснафта», ТзОВ «Левадія-Проект», що підтверджується відповідними актами впровадження.

Особистий внесок здобувача. Результати дисертаційної роботи, які лягли в основу досліджень стаціонарних та нестационарних задач теорії теплопереносу, отримані здобувачем самостійно.

Створення нової схеми дослідження мішаних задач для рівняння теплопровідності проводилось групою науковців. Адаптація цієї схеми для випадку конвекційного теплообміну з навколишнім середовищем виконана здобувачем як сукупність самостійних досліджень. Здобувач є автором алгоритму графічно-числової реалізації явних виразів для температури та густини теплового потоку, що виникають в багатошарових плоских конструкціях при різних температурних режимах пожеж.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались:

- на семінарах Львівського державного університету безпеки

життєдіяльності (2013-2015 рр.);

➤ на XI Міжнародній науково-практичній конференції «ПОЖЕЖНА БЕЗПЕКА - 2013» (м. Київ, 2013 р.);

➤ на міжнародній науково-практичній конференції «Математика в сучасному університеті» (м. Київ, 2013 р.);

➤ на VI Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання прогнозування і оптимізації» (м. Кам'янець-Подільський, 2014 р.);

➤ на XV Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (м. Київ, 2014 р.);

➤ на міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, 2015 р.);

➤ на конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2015» (м. Львів, 2015 р.);

➤ на V Міжнародній науково-практичній конференції "Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія" (м. Івано-Франківськ, 2015 р.)

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 13 наукових працях, з яких 6 – опубліковано у фахових наукових виданнях, 7 – у збірниках матеріалів науково-технічних конференцій, симпозіумів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 117 найменувань на 13 стор.; 4 додатків на 41 стор. Основна частина дисертації займає 114 стор. та містить 55 рисунків і 25 таблиць. Загальний обсяг роботи – 168 стор.

РОЗДІЛ 1. ОСОБЛИВОСТІ ОЦІНКИ ВОГНЕСТІЙКОСТІ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Для забезпечення пожежної безпеки на тому чи іншому об'єкті необхідно, з точки зору наукових досліджень, пізнати закономірності виникнення та розвитку пожежі, та її впливи на різного роду конструкції. Щоб проаналізувати явища, які відбуваються в будівельних конструкціях під час нагрівання, необхідно використовувати методи теплофізики, математики, хімії, термодинаміки тощо. За допомогою комплексу цих дисциплін можна вивчити і описати процеси, які там відбуваються.

З плином часу задачі теорії теплопровідності ускладнюються і наступають моменти, коли математичний апарат потребує удосконалення. Такі удосконалення у вигляді математичних моделей реальних проблем в області теплопередачі вимагають створення сучасних, а іноді й новітніх методів їх реалізації.

При дослідженні вогнестійкості елементів багат шарових будівельних конструкцій за втратою теплоізолювальної здатності виникають крайові задачі та їх численні узагальнення, що приводять до проблеми розв'язування диференціального рівняння теплопровідності. Традиційні методи дослідження аналогічних задач таких рівнянь не спроможні розв'язати сучасні проблеми. В цих методах обмежується розгляд шаруватих структур (збільшення кількості шарів веде до стрімкого збільшення об'єму необхідних розрахунків). Крім цього традиційні методи не дають можливості досліджувати температурні поля багат шарових конструкцій, які мають змінні параметри шарів (системи вогнезахисного покриття що вспучуються), а також не враховуються внутрішні джерела (стоки) тепла, що є суттєвим фактором, який впливає на вогнестійкість будівельних конструкцій. У зв'язку з цим поставлено задачу зведення нових задач теплопровідності до нових моделей, що ґрунтується на новітніх сучасних теоріях.

Для дослідження математичних моделей процесів теплопередачі в

елементах будівельних конструкцій використовують математичний апарат теорії узагальнених функцій, теорії коректних систем диференціальних рівнянь з мірами, а також концепції квазіпохідних. Здебільшого при математичному моделюванні вище вказаних процесів приходять до квазидиференціальних рівнянь. Однак дослідження в цьому напрямку тривалий час мали частковий характер, оскільки стосувалися рівнянь конкретних видів. Побудова точних аналітичних розв'язків квазидиференціальних рівнянь, а також розробка методів наближеного їх розв'язання залишається актуальним завданням. Тому узагальнення та обґрунтування методу побудови точних аналітичних та наближених розв'язків таких задач із урахуванням зосереджених факторів та розробка математичних і комп'ютерних моделей процесів теплопередачі в елементах будівельних конструкцій є важливим та актуальним науково-практичним завданням.

1.1 Сучасна система нормування вогнестійкості будівельних конструкцій та оцінка їх відповідності вимогам норм щодо вогнестійкості

Директива Євросоюзу 89/106/ЕЕС встановлює основні вимоги для обмеження пожежних ризиків. Будівлі та споруди проектують і зводять так, щоб у разі виникнення пожежі:

- забезпечувалася несуча здатність конструктивної системи протягом певного проміжку часу;
- обмежувалося виникнення та поширення вогню і диму в будівлях;
- обмежувалося поширення вогню на сусідні будівлі;
- мешканці могли самостійно залишити будівлі або врятуватися іншими способами;
- враховувалася безпека пожежно-рятувальних підрозділів.

Повна аналітична методика розрахунку на вогнестійкість [6, 7] має враховувати роботу конструктивної системи за підвищених температур, можливий вплив тепла та сприятливі дії активних і пасивних систем

вогнезахисту, а також невизначеності, що пов'язані з цими трьома властивостями, та відповідальність конструктивної системи (наслідки руйнування). На даний час можливо застосовувати методику для встановлення дійсної роботи конструкції, що включає деякі, якщо не всі, з цих параметрів, та довести, що конструктивна система або її частини відтворюватиме дійсну роботу при реальній пожежі у будинку. Однак, якщо методика ґрунтується на номінальному (стандартному) температурному режимі, то класифікація, що передбачає визначені межі вогнестійкості, враховує (приблизно) вищевказані властивості та невизначеності.

Визначений підхід використовує номінальний температурний режим для відтворення теплових впливів. Підхід, що заснований на роботі конструкції, використовуючи техніку пожежної безпеки, звертається до теплових впливів, що ґрунтуються на фізичних та хімічних параметрах.

Подібні нормативні документи існують у інших країнах [5]:

- НПБ 233-96 “Здания и фрагменты зданий. Метод натурных огневых испытаний. Общие требования” (Росія),
- BS 476-32:1989 “Fire tests on building materials and structures. Guide to full scale fire tests within buildings” (Великобританія),
- ASTM E119-“Standard Test Methods for Fire Tests of Buildings Constructions and Materials”, UL 263-“ Fire Test of Building Construction and Materials” (США),
- AS-1530 “Methods for fire tests on building materials, components and structures” (Австралія),
- EN 1363-1:2012 “Fire resistance tests. General requirements” (країни Євросоюзу) і т.д.

1.1.1 Статистичні дані щодо наслідків впливу пожежі на будівельні конструкції

Щорічно в Україні більше 50% всіх пожеж виникає в будівлях та спорудах різного призначення. В 2014 році таких пожеж зареєстровано 36742, що складає 53,3% від загальної кількості пожеж. Унаслідок пожеж у будівлях та спорудах загинула 2141 особа, що складає 95,3% від загальної кількості загиблих унаслідок пожеж; травмовано 1266 осіб, що складає 87,3% від загальної кількості травмованих на пожежах.

Також, протягом 2014 року 4272 пожежі (6,2% від загальної кількості пожеж) виникло на транспорті; 24757 пожеж або 36,0% припадає на місця відкритого зберігання матеріалів, відкриті території та зовнішні установки; 3108 (4,5%) – на інші об'єкти, що не ввійшли до переліку (рис. 1.1).

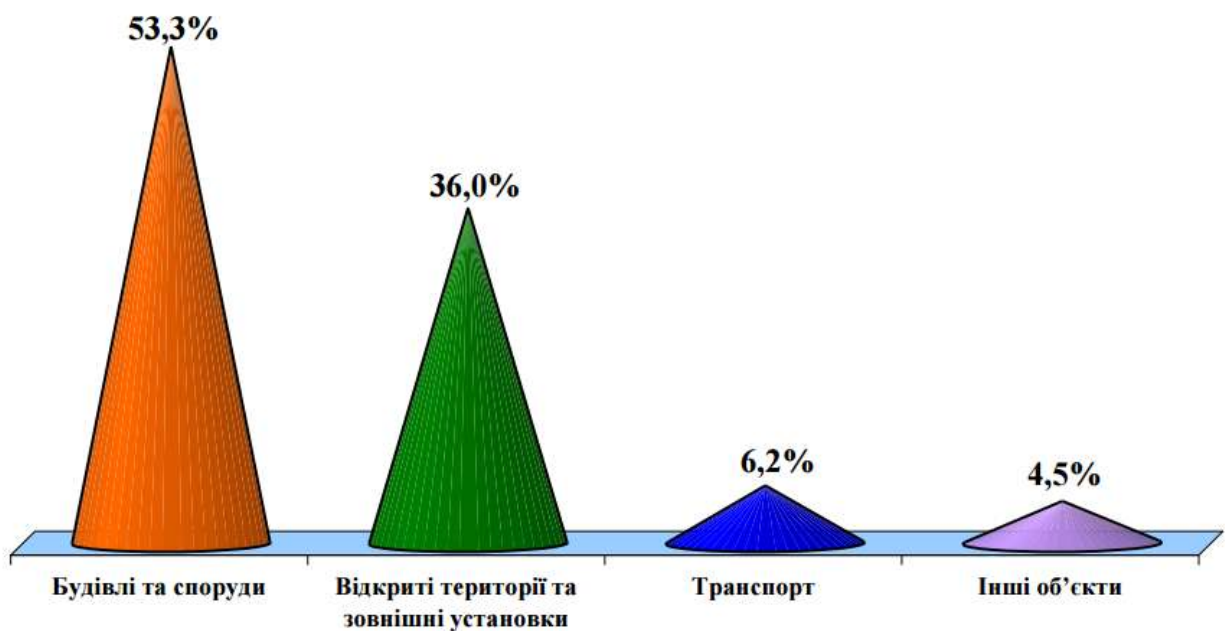


Рисунок 1.1 – Розподіл пожеж за об'єктами їх виникнення

Питома вага пожеж у будівлях та спорудах перевищує середній показник по Україні (53,3%) у 15 областях. Найвищий відсоток пожеж у будівлях та спорудах від загальної кількості пожеж зафіксовано в Хмельницькій (78,0%), Волинській (77,6%), Чернівецькій (76,7%), Черкаській

(75,0%), Київській (72,9%) та Рівненській (70,4%) областях. Збільшення кількості пожеж у будівлях та спорудах зареєстровано практично у всіх областях України, окрім Херсонської (-0,6%) та Луганської (-26,4%) областей.

77% пожеж у будівлях і спорудах (28274) виникло в одноповерхових будинках, причому з цього числа 41,9% (а саме 11840 пожеж) припадає на будинки та споруди житлового сектору. Питому вагу пожеж за ступенями вогнестійкості будівель і споруд наведено на рис. 1.2.

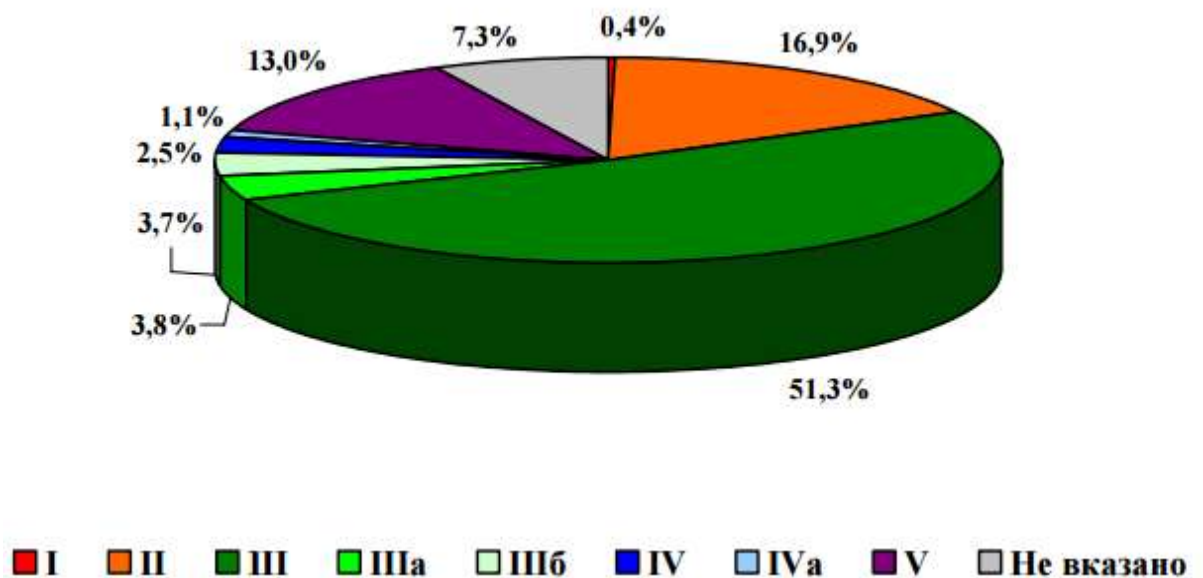


Рисунок 1.2 – Питома вага пожеж за ступенями вогнестійкості

Більшість споруд, де виникали пожежі, мали III ступінь вогнестійкості (18900 або 51,4% від пожеж у будівлях). У 6214 випадках (16,9%) будівлі мали II ступінь вогнестійкості.

Найбільше пожеж з особливо великими збитками виникло у житлових будинках та спорудах, на транспортних засобах, торговельно-складських спорудах та спорудах виробничого призначення.

В 2014 році одна з найбільших за збитками пожеж виникла 5 жовтня у готельному комплексі «Київська Русь-Буковель» (рис. 1.3), розташованому в селі Поляниця Івано-Франківської області. Будівля готельного комплексу складалася з дворівневих одноповерхових готельних номерів та

трьохповерхової адміністративної частини. Даний комплекс розрахований на 150 відпочиваючих та 35 чол. обслуговуючого персоналу. Будівля була обладнана автоматичною пожежною сигналізацією без виводу на пульт централізованого спостереження, забезпечена первинними засобами пожежогасіння згідно вимог, системи автоматичного пожежогасіння та димовидалення відсутні. Гасіння пожежі та евакуація майна до прибуття пожежно-рятувальних підрозділів проводилась черговим персоналом об'єкту. Всього було евакуйовані 24 особи. В якості первинних засобів пожежогасіння використовувались порошкові вогнегасники марки ВП-5(з), проте враховуючи фактор швидкого розповсюдження вогню та сильного задимлення, який унеможливило роботу персоналу без відповідних засобів індивідуального захисту, ефективність їх використання є незначною.



а)



б)

Рисунок 1.3 – Готельний комплекс «Київська Русь-Буковель»

а) до пожежі; б) після пожежі.

Швидкому розповсюдженню вогню сприяли конструктивні елементи будівлі (дерев'яні стіни та перекриття 5-ї ступені вогнестійкості, пізній час повідомлення про пожежу (через 20 хвили), віддаленість об'єкту від державних пожежних підрозділів, незадовільний стан доріг. На момент прибуття до місця події першого рятувального підрозділу спостерігалось горіння будівлі готельного комплексу по всій площі (близько 500 м²). Вогнем повністю

знищено будівлю готельного комплексу. Дослідженнями, проведеними дослідно-випробувальною лабораторією за двома можливими версіями, встановлено, що причиною пожежі став навмисний підпал. Прямий збиток від пожежі склав 50 млн. гривень.

1.1.2 Нормативні вимоги щодо вогнестійкості несучих та огорожувальних конструкцій

Згідно [35, 57] основним показником вогнестійкості несучих стін є їхні межі вогнестійкості, що визначається часом (в хвилинах) від початку пожежі до настання втрати несучої здатності (R), теплоізолювальної здатності (I) та цілісності (E), оскільки стіни виконують і несучі і огорожувальні функції у будівлях.

Граничним станом R є обвалення зразка або виникнення в ньому граничних деформацій. Допускається здійснювати оцінку цього граничного стану за даними вимірювань температур прогріву несучої арматури й перерізу зразка.

Граничним станом E є поява полум'я на поверхні зразка конструкції, що не обігривається, який випробовується, протягом часу не менше ніж 10 с, або утворення в ньому наскрізних отворів певного розміру.

Втрата теплоізолювальної здатності визначається за підвищенням температури у приміщенні, суміжному приміщенню із пожежею. Ознакою настання втрати теплоізолювальної здатності є досягнення поверхнею стіни, що не обігривається середнього підвищення температури на 140 °C, або підвищення температури в будь-якій точці поверхні стіни, що не обігривається на 180 °C. Для металевих конструкцій з вогнезахисними покриттями ознакою втрати несучої здатності слід приймати перевищення середньої температури металевого елемента конструкції над його початковою температурою на 480 °C - для сталевих конструкцій, і на 230 °C - для конструкцій з алюмінієвих сплавів.

Вимоги до вогнестійкості елементів будівельних конструкцій можуть бути визначені згідно з умовними класами будівель та споруд які називаються

ступенями вогнестійкості [35]. У свою чергу ступені вогнестійкості визначаються мірою відповідальності та типом використаних будівельних конструкцій.

Ступінь вогнестійкості будинку визначається межами вогнестійкості його будівельних конструкцій і межами поширення вогню по цих конструкціях відповідно до табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Межі вогнестійкості конструкцій та поширення вогню по них залежно від ступеня вогнестійкості будівель

Ступінь вогнестійкості будинків	Мінімальні межі вогнестійкості будівельних конструкцій (у хвиликах)								
	стіни				колони	сходові площадки, косоури, сходи, балки, марші сходових кліток	перекрыття міжповерхові (у т. ч. горіщні та над підвалами)	елементи суміщених покриттів	
	несучі та сходових кліток	само-несучі	зовнішні ненесучі	внутрішні ненесучі (перегородки)				плити, настили, прогони	балки, ферми, арки, рами
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	REI 150 M0	REI 75 M0	E 30 M0	EI 30 M0	R 150 M0	R 60 M0	REI 60 M0	RE 30 M0	R 30 M0
II	REI 120 M0	REI 60 M0	E15 M0	EI 15 M0	R 120 M0	R 60 M0	REI 45 M0	RE 15 M0	R 30 M0
III	REI 120 M0	REI 60 M0	E15, M0 E30, M1	EI 15 M1	R 120 M0	R 60 M0	REI 45 M1	Не нормуються	
IIIa	REI 60 M0	REI 30 M0	E15 M1	EI 15 M1	R 15 M0	R 60 M0	REI 15 M0	RE 15 M1	R 15 M0
IIIб	REI 60 M1	REI 30 M1	E15, M0 E30, M1	EI 15 M1	R 60 M1	R 45 M0	REI 45 M1	RE 15, M0 RE 30, M1	R 45 M1
IV	REI 30 M1	REI 15 M1	E15 M1	EI 15 M1	R 30 M1	R 15 M1	REI 15 M1	Не нормуються	
IVa	REI 30 M1	REI 15 M1	E15 M2	EI 15 M1	R 15 M0	R 15 M0	REI 15 M0	RE 15 M2	R 15 M0
V	Не нормуються								

В даний час в Україні мінімальні межі вогнестійкості встановлюються з урахуванням призначення будівель, поверховості, місткості, категорії виробництва щодо вибухопожежної небезпеки, наявності автоматичних установок пожежогасіння і інших чинників.

1.2 Основні підходи щодо оцінки вогнестійкості будівельних конструкцій

Одним із важливих аспектів забезпечення пожежної безпеки будинків і споруд у наш час є застосування будівельних конструкцій із чітко визначеними показниками вогнестійкості та поширення вогню в будівлях і спорудах різного ступеня вогнестійкості.

Як уже говорилося, основним класифікаційним показником, із точки зору пожежної безпеки, є ступінь вогнестійкості будинку. Залежно від цього показника згідно з [35] нормуються його поверховість, площа забудови та відстані до інших будинків і споруд. Ступінь вогнестійкості будинку визначається межами вогнестійкості його будівельних конструкцій та межами поширення вогню цими конструкціями. Тому значення меж вогнестійкості будівельних конструкцій, із яких складається будинок, істотно впливають на його архітектурне рішення й параметри забудови в цілому.

Основного поширення під час будівництва житлових, громадських і промислових будинків набули бетонні та залізобетонні конструкції, цегляні кладки, елементи каркасів покриття, які складаються з металевих конструкцій. Згідно з [35] нормативні значення меж вогнестійкості цих конструкцій можуть досягати 150 хв., а для несучих конструкцій висотних будинків — навіть 180 хв.

Виходячи з цього, врахування підходів до забезпечення нормованих меж вогнестійкості конструкції та особливостей їх поведінки під високотемпературним (вогневим) впливом є досить актуальним.

Основним стандартом, який регламентує загальні підходи до визначення вогнестійкості будівельних конструкцій, є [20].

На теперішній час в Україні введено низку стандартів, що регламентують методи випробувань на вогнестійкість окремих видів конструкцій. Згідно [6] існують альтернативні методики розрахунку, які зображені на рис. 1.4.

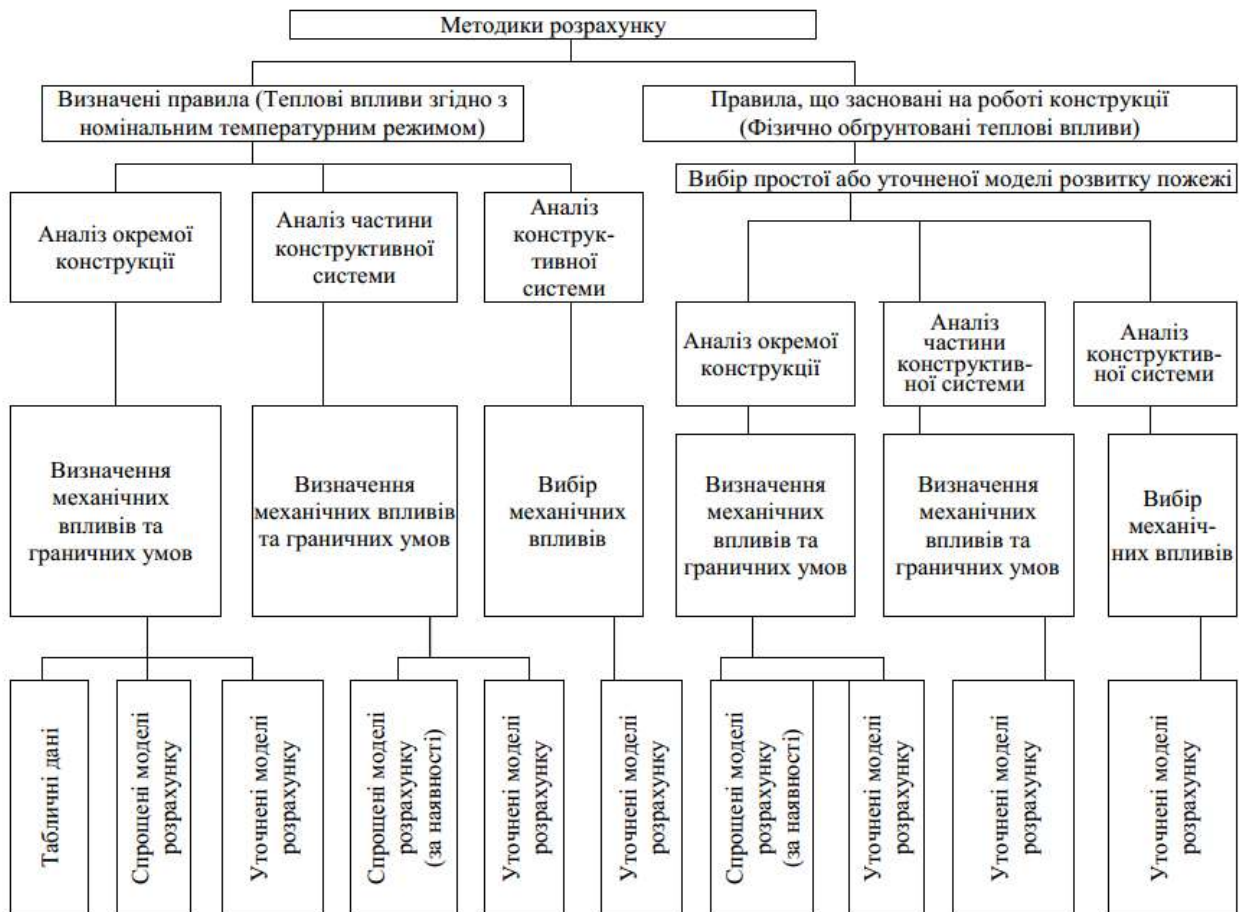


Рисунок 1.4 – Альтернативні методики розрахунку

Більшість досліджень цих конструкцій базується на двох способах визначення межі вогнестійкості – експериментальному та аналітичному.

Перший полягає у визначенні межі вогнестійкості на основі експериментальних досліджень, а другий базується на методах аналітичних або розрахунково-експериментальних дослідженнях. У більшості країн експериментальне визначення вогнестійкості будівельних конструкцій проводять за допомогою вогневих випробувань. Проте експериментальні дослідження потребують значних фінансових затрат та високої точності проведення вогневих випробувань.

1.2.1 Метод вогневих випробувань будівельних конструкцій на вогнестійкість

При використанні методу натурних вогневих випробувань будівельних

конструкцій на вогнестійкість використовують реальний будівельний об'єкт, який відповідає проектній документації, або його фрагмент. Цей метод потребує використання вартісного обладнання і значних трудових ресурсів.

Сутність методу натурних вогневих випробувань полягає у визначенні проміжку часу від моменту запалювання модельного вогнища пожежі до настання одного з трьох граничних станів втрати вогнестійкості, нормованих для будівельних конструкцій.

Натурні вогневі випробування вимагають потужних випробувальних лабораторій, які зможуть забезпечити необхідний рівень вимог, що ставляться при проведенні експериментальних досліджень. Основними світовими центрами з відповідним чином сертифікованими лабораторіями є:

- у США – Underwriters Laboratories Inc; Armstrong World Industries; Southwest Research Institute; Factory Mutual Research Corporation; SGS/US Testing Laboratory – LA; Omega Point Laboratories; US Forest Product Laboratory; Western Fire Center; NGL Testing Services; Commercial Testing, і інші;
- у Канаді – Underwriters Laboratories of Canada; National Research Council, і інші;
- у Великобританії – Lorient; BRE; Warrington, і інші;
- у Китаї – Tianjin Fire Research Institute; China Nat. Center for QC & Testing of Bldg; Sichuan Fire Research Institute, і інші;
- у Японії – Building Res. Institute; Res. Institute of Marine Engineering; Gen Building Res. Corp; Japan Testing Center for Building Const, і інші;
- у Польщі - Institute of Building Technology.

В Україні розвиток повномасштабних вогневих випробувань, стримується складною економічною ситуацією, недосконалою нормативною базою та необхідністю значних капіталовкладень у функціонування випробувальних

лабораторій. Одними із найбільшими лабораторіями є:

- випробувальний центр «ТЕСТ» (м. Бровари Київської обл.);
- НВЦ "Євростандарт" (сmt. Черляни Львівської обл.);
- ТОВ "Донстройтест" (м. Донецьк).

У загальному випадку вогнестійкість будівельних конструкцій визначають шляхом дослідження вогнестійкість окремих елементів. Під час пожежі у більшості випадків руйнівного впливу зазнає не вся конструкція, а лише окремі її елементи.

Частковим варіантом вирішенням непростої ситуації, яка склалася, є проведення натурних випробувань моделей конструктивних систем (рис. 1.5), що є певним компромісом між дрібномасштабними випробуваннями окремих конструкцій та повномасштабними випробуваннями фрагментів будівель. Такі випробування не вирішують ситуацію комплексно, проте вони є основою для апробації чисельних методів та визначення їх адекватності до реальної роботи. На сьогоднішній день ці експерименти є здебільшого науковими, але попри певні неточності і відмінності викликані масштабним фактором, отримують позитивні результати.



а)

б)

в)

Рисунок 1.5 – Випробування фрагмента

а) залізобетонної несучої стіни; б) залізобетонного монолітного перекриття; в) залізобетонної колони

При дослідженні межі вогнестійкості експериментальним методом використовують досвід попередніх випробувань. Систематизація отриманих результатів по визначенню межі вогнестійкості будівельних конструкції дала можливість створити цілі масиви експериментальних результатів для типових конструкцій. Однак, при проектуванні конструкцій із використанням нових матеріалів і нетипових конструктивних схем доводиться проводити нові дослідження, що в свою чергу призводить до використання вартісного обладнання, наймання кваліфікованого персоналу і значних затрат часу. Крім того використання даного методу не дає змоги швидко знайти оптимальні рішення стосовно визначення межі вогнестійкості проектованої конструкції, оскільки випробовування проводяться на вже готовій конструкції. А як тільки ми вносимо зміну у проектовані елементи виникає необхідність знову виготовляти дослідний зразок.

Перелічені недоліки вогневих випробувань вказують на доцільність використання їх тільки для вибіркової перевірки з метою порівняння з теоретичними даними або для дослідження поведінки конструкцій, що виготовлені з нових матеріалів.

Методи експериментального та аналітичного дослідження вогнестійкості будівельних конструкцій широко представлені у роботах В.П. Бушева, М.М. Гивлюда, А.М. Домініка, С.В. Зотова, Ю.А. Кошмарова, П.Г. Круковського, А.Ф. Милованова, И.С. Молчатського, О.В. Некори, С.В. Новака, В.М. Остапенка, С.В. Поздєєва, В.М. Ройтмана, М.М. Семерака, А.І. Суботи, А.М. Шевлякова, Т.М. Шналя, О.І. Яковлева, J. Argiris, T. Lie, T. Harmathy, H. Hartl і інших [9-11, 31, 62, 66-68, 115, 117].

1.2.2 Розрахункові методи оцінки вогнестійкості будівельних конструкцій

Альтернативою методам оцінки вогнестійкості несучих стін на основі

стандартних вогневих випробувань є розрахункові методи, що застосовуються для проектування вогнестійких будівельних конструкцій [55-58]. Розрахункові методи застосовують як феноменологічні, так і теоретичні засади, щодо поведінки конструктивних елементів в умовах термосилового впливу пожежі. При застосуванні таких методів не існує обмежень на геометрію, граничні умови та силові фактори даних елементів, які у багатьох випадках з'являються при здійсненні вогневих випробувань.

Особливістю розрахункових методів є необхідність на початковому етапі оцінювати розподіл температурного поля у початковий момент часу в поперечних перерізах конструкцій з огляду на стандартний температурний режим пожежі. У спрощених методах такий розподіл визначається за спеціальними номограмами, в уточнених методах вирішується задача теплопровідності у той чи іншій постановці. Нижче подані короткі характеристики методів, що застосовуються для розв'язку теплотехнічної задачі теплопровідності.

1.3 Теплотехнічна задача для оцінки вогнестійкості будівельних конструкцій

Для розв'язку теплотехнічної задачі найбільш поширеним є підхід, коли теплофізичні характеристики матеріалів елементів конструкції є температурними залежностями і комплексно описують всі складні фізико-хімічні процеси, що відбуваються у даних матеріалах при їх нагріванні. Матеріали елементів конструкції в основному мають пористий каркас із певним вмістом вологи [49, 56]. Сам пористий каркас має гідрокристалічну будову. Тому процес нагріву супроводжується випаровуванням, конденсацією та фільтрацією вологи у рідкому та газоподібному стані. В такому разі теплофізичні характеристики не мають прямого фізичного змісту і називаються ефективними. Але такий підхід дає достатньо точні результати і набув

широкого поширення.

1.3.1 Модель теплопровідності. Загальні положення теорії теплопровідності

Передачу тепла від однієї частини тіла до іншої або ж від одного тіла до іншого, які є дотичними, називають теплопровідністю. Аналітична теорія теплопровідності ігнорує молекулярну будову речовини, вона розглядає цю речовину не як сукупність окремих частинок, а як суцільне середовище. Таке модельне представлення речовини може бути прийнятим при розв'язуванні задач передачі тепла, якщо розміри диференціальних об'ємів досить великі у порівнянні з розмірами молекул і відстанями між ними [38, 49].

Кожне фізичне явище, у тому числі і процес теплопередачі, проходить в просторі і часі. Тому аналітичне дослідження теплопровідності зводиться до дослідження просторово-часової зміни основної величини t – температури, тобто до знаходження рівняння

$$t = f(x, y, z, \tau), \quad (1.1)$$

де x, y, z , – просторові координати в декартовій системі, а τ – час.

Рівняння (1.1) представляє математичний вираз температурного поля. Таким чином, температурне поле це сукупність значень температури у всіх точках досліджуваного простору в кожен момент часу.

Розрізняють стаціонарне та нестаціонарне температурне поле [24].

Стаціонарним температурним полем називають таке поле, температура якого в будь-якій його точці не змінюється в часі.

Нестаціонарним температурним полем називають поле, температура якого змінюється не лише в просторі, а й з плином часу.

Для знаходження розподілу нестаціонарного температурного поля в багат шаровій плоскій конструкції необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності Фур'є [49]

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + q_v, \quad (1.2)$$

де c – питома теплоємність, ρ – густина, λ – коефіцієнт теплопровідності, q_v – внутрішнє джерело тепла.

Диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є (1.2) описує явище теплопровідності в загальному вигляді. Для повного формулювання задачі теплопровідності необхідно вказати рівняння теплопровідності, початкову та граничні умови для температурного поля.

Початкова умова вказує на розподіл температурного поля в початковий момент часу, коли $\tau=0$.

$$t_{x,0} = \varphi(x). \quad (1.3)$$

Для стаціонарного температурного поля початкова умова не потрібна.

Граничні умови можуть задаватись декількома способами:

а) Граничні умови першого роду полягають в заданні закону розподілу температури по поверхні тіла залежно від часу

$$t_{\text{ПОВ}} = t_{x,\tau}. \quad (1.4)$$

б) Граничні умови другого роду полягають в заданні закону розподілу густини теплового потоку по поверхні тіла залежно від часу

$$q_n(\tau) = f(\tau). \quad (1.5)$$

в) Граничні умови третього. Вказується температура навколишнього середовища і коефіцієнт теплообміну, який характеризує інтенсивність теплообміну між тілом та речовиною, яка омиває тіло

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha (t_p - t_m) . \quad (1.6)$$

де t_p – температура рідини або середовища, яке омиває тіло, t_m – температура поверхні тіла, α – коефіцієнт теплообміну.

Граничні умови також можуть задаватись у вигляді комбінацій граничних умов першого, другого та третього роду.

1.3.2 Основні методи розв'язування крайових задач теплопереносу

Дослідженню і методам розв'язування задач теплопереносу присвячено ряд робіт. Основні з цих методів, наведені наприклад в [49].

Метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Класичний метод розв'язування диференціальних рівнянь теплопровідності полягає в тому, що знаходиться сукупність частинних розв'язків t_n , які задовольняють рівнянню та крайовим умовам, а тоді згідно з принципом суперпозиції складається ряд цих розв'язків [8, 38, 49, 103].

$$t = C_1 t_1 + C_2 t_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n t_n . \quad (1.7)$$

Коефіцієнти C_n знаходяться з початкової умови.

Метод джерел (метод функції Гріна). Фізична суть методу джерел полягає в тому, що будь-який процес поширення тепла в тілі теплопровідністю можна представити як сукупність процесів вирівнювання температури від багатьох елементарних джерел тепла, розподілених як і в просторі, так і в часі. Вирішення задач теплопровідності цим методом, в основному зводиться до правильного вибору джерел і їх розподілу.

Так, наприклад, розв'язок рівняння теплопровідності (1.2) при початковій умові (1.3) та за нульових крайових умов (1.4)-(1.6) має вигляд [25,

48, 49].

$$t(x, \tau) = \int_0^l G(x, \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi. \quad (1.8)$$

Вираз $G(x, \xi, \tau)$ називається функцією джерела (або функцією Гріна) відповідної мішаної задачі з нульовими крайовими умовами. Методи її побудови та властивості добре описані в спеціальній математичній літературі [48, 103].

Метод інтегральних перетворень (операційний метод). Такі методи ґрунтуються на тому, що вивчається не сама невідома функція (оригінал), а певна її видозміна (зображення). Так, наприклад, перетворення Лапласа виконується за допомогою множення на експоненціальну функцію та інтегрування її в певних границях. Тому перетворення Лапласа є інтегральним перетворенням [17, 49, 51].

Інтегральне перетворення $f_L(s)$ функції $f(\tau)$ зображується формулою

$$f_L(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = L[f(\tau)], \quad (1.9)$$

де $f(\tau)$ – оригінал функції, а $f_L(s)$ – її зображення, яке позначається у вигляді $L[f(\tau)]$. Тут s може бути і комплексним числом, причому вважається, що його дійсна частина буде додатною. Для того, щоб зображення існувало, необхідно щоб інтеграл (1.9) був збіжним. Це накладає деякі обмеження на функцію $f(\tau)$.

Якщо задача вирішена в зображеннях, то знаходження оригінала по зображенню (обернене перетворення) в загальному випадку виконується за наступною формулою

$$f(\tau) = L^{-1}[f_L(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_L(s) e^{s\tau} ds. \quad (1.10)$$

Методи Фур'є та функцій Гріна ще прийнято називати *класичними* або *прямими*. Поряд з методами інтегральних перетворень вони відносяться до групи *точних* методів розв'язування задач математичної фізики. Група наближених (числових, графічних, експериментально-аналітичних, тощо) методів тут не розглядається.

1.3.3 Порівняння прямих та операційних методів

Прямим та операційним методам присвячено численні наукові монографії, підручники, посібники та публікації в наукових виданнях [18, 38, 49, 103]. На основі аналізу тематики та змісту згаданих джерел можна зробити такі висновки:

1. Прямі методи були розроблені виключно для дослідження процесів теплопереносу в одношарових структурах. Вони відзначаються завершеністю та досконалістю. Усі, без винятку, їх модифікації дають можливість отримувати вирази для температури у замкненій формі, взагалі кажучи, у вигляді рядів. Це, в свою чергу, дало можливість ефективно будувати таблиці та графіки розподілу температурного поля. Однак, для випадку багат шарових структур, прямі методи *не розроблені*.

2. В класичних монографіях (див. напр. [38, 49]) задачі теплопереносу для одношарових структур з методичної точки зору розв'язуються, для порівняння, прямим та операційним методами. Це дає можливість констатувати, що операційні методи принаймні «удвічі» громіздкіші, оскільки передбачають розв'язання двох задач – прямої та оберненої. Крім того, пряма задача має бути розв'язана в явному аналітичному вигляді, щоб можна було застосувати метод оберненого перетворення.

В монографії [49], вперше продемонстровано метод перетворення Лапласа для задачі про розподіл температурного поля по товщині системи двох

необмежених пластин, де задача в зображеннях розв'язувалась методом спряження (див. також [24]). При такому підході збільшення кількості шарів призводить до стрімко-наростаючого обсягу аналітичної роботи.

Інший підхід, що дає можливість розглядати математичні моделі процесів теплопереносу для багатошарових структур одночасно по всій їх товщині, традиційно для виразу $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda x \frac{\partial t}{\partial x} \right)$ пропонує виконувати формальну операцію диференціювання. Така операція неминуче, навіть для випадку кусково-сталого коефіцієнта теплопровідності λx , приводить до проблеми множення узагальнених функцій.

1.3.4 Мета і задачі дослідження

На основі вище наведеного аналізу, можна зробити висновок, що в загальному випадку доцільно розробити прямий метод дослідження мішаних задач для рівняння теплопровідності в багатошарових структурах. При цьому слід почати з рівняння теплопровідності (1.2) в декартовій системі координат, що разом з певними крайовими умовами є математичною моделлю процесу теплопереносу в багатошаровій конструкції з кусково-змінним коефіцієнтом теплопровідності та функцією внутрішніх джерел аналогічної структури. Така загальна постановка задачі породжує план наукових досліджень в рамках виконання даної дисертаційної роботи.

1. Вибрати схему реалізації модифікованого методу Фур'є, що описаний, наприклад в [18, 103].

2. При реалізації методу редукції використати відомі результати, що стосуються розв'язування узагальнених систем диференціальних рівнянь першого порядку [105].

3. В основу розв'язування відповідних узагальнених квазідиференціальних рівнянь покласти концепцію квазіпохідних [26, 105], що дасть можливість оминати проблему множення узагальнених функцій.

4. При реалізації методу власних функцій слід отримати нові формули для коефіцієнтів Фур'є розвинень кусково-неперервних функцій в ряди Фур'є за власними функціями відповідних задач на власні значення.

5. В кінцевому результаті необхідно отримати вирази для температури та густини теплового потоку в кожному з шарів, що легко алгоритмізуються для реалізації на обчислювальній техніці.

6. Застосувати отримані результати для дослідження процесів теплопереносу в елементах будівельних конструкцій з багат шаровою структурою за умов пожежі, створивши при цьому алгоритм розрахунку у відповідному програмному забезпеченні.

7. Проілюструвати отримані результати при розв'язуванні конкретних актуальних прикладних задач в галузі пожежної безпеки.

1.4 Висновки до розділу

1. На основі аналізу літературних джерел визначені основні сучасні підходи, щодо оцінки вогнестійкості будівельних конструкцій.

2. Сформульовано загальні положення теорії теплопровідності, що окреслює загальне коло проблем, які виникають при дослідженні процесів теплопереносу.

3. Здійснено порівняльний аналіз методів розв'язку задачі теплопровідності. При порівнянні цих методів встановлено, що більш ефективними є так звані прямі точні методи, що не застосовують апарату інтегральних перетворень.

4. Встановлено, що прямі точні методи не розроблені для випадку багат шарових структур.

5. Сформульовано план наукових досліджень в рамках виконання даної дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2. ПРЯМИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В БАГАТОШАРОВИХ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦІЯХ

В даному розділі запропоновано і обґрунтовано конструктивну схему побудови розв'язку мішаної задачі для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами та стаціонарною неоднорідністю, які залежать від координати на скінченному інтервалі. В основу схеми покладено метод редукції [18, 103], концепцію квазіпохідних [105], сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь [105], метод Фур'є [8, 49, 104] та модифікований метод власних функцій [50].

2.1 Постановка задачі теплопровідності та її математична модель

У прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ розглянута багатошарова плоска конструкція товщиною l , область, що обмежена площинами $x = x_0 = 0$ і $x = x_n = l$. Ця область поділена площинами $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}$, на n шарів різної товщини. Кожен шар має: λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); c – питому теплоємність, Дж/(кг·К); ρ – густину, кг/м³. Крім цього, в шарах передбачається наявність q_v – внутрішніх джерел тепла, Вт/м³. Між шарами закладені умови ідеального теплового контакту. Прийmemo, що температура в конструкції поширюється лише в напрямку осі Ox , тобто задача про дослідження теплообміну є одновимірною. Таку задачу зводимо до розв'язування на відріжку $0, l$ диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + q_v(x) \quad (2.1)$$

з крайовими умовами [98]

$$\begin{cases} p_{11}t(x_0, \tau) + p_{12}\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_0, \tau) + q_{11}t(x_n, \tau) + q_{12}\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_n, \tau) = \psi_0(\tau), \\ p_{21}t(x_0, \tau) + p_{22}\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_0, \tau) + q_{21}t(x_n, \tau) + q_{22}\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_n, \tau) = \psi_n(\tau), \end{cases} \quad (2.2)$$

або в матричному вигляді

$$P\bar{T} x_0 + Q\bar{T} x_n = \bar{G}, \quad (2.2)'$$

при початковій умові

$$t(x, 0) = \varphi(x). \quad (2.3)$$

де t – температура, $^{\circ}\text{C}$; τ – час, с; p, q – деякі дійсні числа, $\psi_0(\tau)$ та $\psi_n(\tau)$ – закон и зміни температури, $\varphi(x)$ – початковий розподіл температурного поля.

Надалі використовуватимемо наступні позначення [98]: θ_i – характеристична функція напіввідкритого проміжку x_i, x_{i+1} , тобто,

$$\theta_k = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in x_i, x_{i+1} \\ 0, \text{ якщо } x \notin x_i, x_{i+1} \end{cases}, \quad \lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x) \theta_i, \quad r(x) = c(x) \cdot \rho(x) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(x) \theta_i,$$

$$\lambda_i, r_i > 0 \in R, \quad q_v(x) = \sum_{i=0}^{n-1} q_{vi} \theta_i, \quad -\infty < q_{vi} < +\infty, \quad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Розв'язок задачі (2.1)-(2.3) шукатимемо у вигляді суми двох функцій (метод редукції) [18, 103]

$$t(x, \tau) = u(x, \tau) + v(x, \tau). \quad (2.4)$$

Будь-яку з функцій u чи v можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

2.2 Вибір функції $u(x, \tau)$ та мішана задача для $v(x, \tau)$

Визначимо функцію $u(x, \tau)$ як розв'язок (квазістаціонарної) крайової задачі

$$\lambda u' + q_v(x) = 0 \quad (2.5)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} p_{11}u(x_0, \tau) + p_{12}u^{[1]}(x_0, \tau) + q_{11}u(x_n, \tau) + q_{12}u^{[1]}(x_n, \tau) = \psi_0(\tau), \\ p_{21}u(x_0, \tau) + p_{22}u^{[1]}(x_0, \tau) + q_{21}u(x_n, \tau) + q_{22}u^{[1]}(x_n, \tau) = \psi_n(\tau). \end{cases} \quad (2.6)$$

Тут позначено $u^{[1]}(x) \stackrel{df}{=} \lambda u'(x)$ – квазіпохідна, $q = -u^{[1]}$ – густина теплового потоку. Зауважимо, що крайові умови (2.6) повинні бути лінійно-незалежними, а τ вважаємо параметром.

На основі зображення (2.4) перепишемо рівняння (2.1) у вигляді

$$r \frac{\partial u}{\partial \tau} + r \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) + q_v(x). \quad (2.7)$$

Якщо взяти до уваги, що $u(x, \tau)$ є розв'язком задачі (2.5)-(2.6), то в (2.7) слід покласти $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q_v(x) \equiv 0$. Тоді з (2.7) прийдемо до неоднорідного диференціального рівняння для функції $v(x, \tau)$

$$r \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) - r \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (2.8)$$

Зауважимо, що функцію $-r \frac{\partial u}{\partial \tau}$ у правій частині (2.8) вважатимемо

відомою, бо відомою вважатимемо функцію $u(x, \tau)$, яку знайдемо, як розв'язок задачі (2.5)-(2.6) далі. Оскільки функція $u(x, \tau)$ справджує крайові умови (2.6), то з урахуванням виразу (2.4) впливають крайові умови для функції $v(x, \tau)$:

$$\begin{cases} p_{11}v(x_0, \tau) + p_{12}v^{[1]}(x_0, \tau) + q_{11}v(x_n, \tau) + q_{12}v^{[1]}(x_n, \tau) = 0, \\ p_{21}v(x_0, \tau) + p_{22}v^{[1]}(x_0, \tau) + q_{21}v(x_n, \tau) + q_{22}v^{[1]}(x_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

а початкова умова набуває вигляду

$$v(x, 0) = f(x) = \varphi(x) - u(x, 0). \quad (2.10)$$

Отже, за умови, що розв'язок $u(x, \tau)$ задачі (2.5)-(2.6) – відомий, функція $v(x, \tau)$ є розв'язком мішаної задачі (2.8)-(2.10).

2.3 Розв'язування крайової задачі (2.5)-(2.6)

Метод розв'язування крайової задачі (2.5)-(2.6) вичерпно вивчено та детально описано в додатку А (підрозділ А.2.). За умов відсутності зосереджених джерел тепла ($s_i = 0, \forall i = \overline{1, n-1}$), розв'язок крайової задачі (2.5), (2.6) та його квазіпохідна є першою та другою координатою вектор-функції $\overline{U}(x, \tau)$ відповідно, де

$$\begin{aligned} \overline{U}(x, \tau) &= \sum_{i=0}^{n-1} \overline{U}_i(x, \tau) \theta_i = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[B_i(x, x_i) B(x_i, 0) \cdot P_0 - B_i(x, x_i) \cdot \sum_{k=0}^i B(x_i, x_k) \cdot \overline{Z}_k - \int_{x_i}^x B_i(x, s) \cdot \overline{R}_i(s) ds \right] \theta_i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тут позначено

$$\bar{P}_0 = \left[P + Q \cdot B_{x_n, x_0} \right]^{-1} \cdot \left[\bar{\Gamma} - Q \cdot \sum_{i=1}^n B_{x_n, x_i} \cdot \bar{Z}_i \right], \quad B_{x, x_i} = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b_i(x, s) = \int_s^x \frac{dz}{\lambda_i z}, \quad B_{x_i, x_k} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=k}^{i-1} b_j(x_{j+1}, x_j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \psi_0 & \tau \\ \psi_n & \tau \end{pmatrix}, \quad \bar{Z}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i, s) \bar{R}_{i-1}(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\int_{x_i}^x B_i(x, s) \bar{R}_i(s) ds = \int_{x_i}^x \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r_i(s) \end{pmatrix} ds = \int_{x_i}^x \begin{pmatrix} b_i(x, s) \cdot -r_i(s) \\ -r_i(s) \end{pmatrix} ds.$$

2.4 Метод Фур'є та задача на власні значення

2.4.1 Розвинення за власними функціями

Шукатимемо нетривіальні частинні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$r \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.12)$$

що справджує крайові умови (2.9), у вигляді [18]

$$v(x, \tau) = e^{-\omega \tau} \cdot X(x), \quad (2.13)$$

де ω – параметр, а $X(x)$ – наразі, поки що невідома функція.

Підставляючи праву частину (2.13) в (2.12) приходимо до квазідиференціального рівняння

$$\lambda X'' + \omega r X = 0, \quad (2.14)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} p_{11}X(x_0) + p_{12}X^{[1]}(x_0) + q_{11}X(x_n) + q_{12}X^{[1]}(x_n) = 0, \\ p_{21}X(x_0) + p_{22}X^{[1]}(x_0) + q_{21}X(x_n) + q_{22}X^{[1]}(x_n) = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Задача (2.14)-(2.15) – класична задача на власні значення, властивості власних значень ω_k та власних функцій $X_k(x, \omega_k)$ якої вичерпно вивчені і детально описані, наприклад, в [18].

Так, зокрема, розвинення функції $g(x)$ з «певного класу» в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x, \omega_k)$ задачі (2.14)-(2.15) має вигляд

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot X_k(x, \omega_k), \quad (2.16)$$

де коефіцієнти Фур'є g_k обчислюють за формулами

$$g_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \int_{x_0}^{x_n} g(x) \cdot X_k(x, \omega_k) \cdot r(x) dx. \quad (2.17)$$

Зауважимо, що $\|X_k\|^2$ – квадрат норми власної функції X_k

$$\|X_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} X_k^2(x, \omega_k) r(x) dx. \quad (2.18)$$

Уточнимо, які ж функції $g(x)$ належать до «певного класу».

Вважатимемо, що $g(x)$ – кусково-неперервна функція, яка має різні аналітичні вирази на кожному з проміжків x_i, x_{i+1} , тобто допускає зображення

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i \theta_i \quad (2.19)$$

на проміжку x_0, x_n .

Функції вигляду (2.19) додаються, множаться та інтегруються наступним чином [80, 81]:

якщо, $g_1(x) = \sum_{i=1}^n g_{1i} \theta_i$, $g_2(x) = \sum_{i=1}^n g_{2i} \theta_i$, то

$$g_1 \pm g_2 = \sum_{i=1}^n (g_{1i} \pm g_{2i}) \theta_i, \quad g_1 \cdot g_2 = \sum_{i=1}^n g_{1i} \cdot g_{2i} \theta_i, \quad (2.20)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot r(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_n} g_{1i}(x) \cdot g_{2i}(x) \cdot r_i(x) dx, \quad (2.21)$$

$$\|g_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} g_k^2(x) r(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_n} g_{ki}^2(x) r_i(x) dx, \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (2.22)$$

Вирази (2.21)-(2.22) можна інтерпретувати як скалярний добуток функцій $g_1(x)$ і $g_2(x)$ та квадрат норми функції $g_k(x)$ відповідно з вагою $r(x)$.

Покладемо

$$X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x, \omega_k) \theta_i. \quad (2.23)$$

Тоді для коефіцієнтів Фур'є g_k з розвинення (2.16) та для квадратів норми функцій $X_k(x)$ з формул (2.17) і (2.18) отримаємо

$$g_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x) \cdot X_{ki}(x, \omega_k) \cdot r_i(x) dx, \quad (2.24)$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x, \omega_k) \cdot r_i(x) dx. \quad (2.25)$$

2.4.2 Конструктивна побудова власних функцій

Ввівши квазіпохідну $X' = \lambda X'$, вектор $\bar{X} = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$ та

матрицю $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda(x)} \\ -\omega r(x) & 0 \end{pmatrix}$, зведемо квазидиференціальне рівняння (2.14)

до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\bar{X}' = A\bar{X}. \quad (2.26)$$

Під розв'язком системи (2.26) розуміємо абсолютно-неперервну вектор-функцію $\bar{X}(x, \tau)$, що справджує цю систему майже всюди.

Відповідну систему на проміжку x_i, x_{i+1} запишемо у вигляді

$$\bar{X}'_i = A_i \cdot \bar{X}_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (2.27)$$

де, матриці A_i вигляду

$$A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ -\omega r_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Матрицю Коші системи (2.27) позначимо $B_i(x, s, \omega)$. Аналогічно, як і в формулі (2.9), запишемо

$$B(x_i, x_0, \omega) \stackrel{df}{=} \prod_{j=0}^i B_{i-j}(x_{i-j+1}, x_{i-j}, \omega). \quad (2.29)$$

Позначимо також

$$B(x, x_0, \omega) \stackrel{df}{=} \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x, x_i, \omega) \cdot B(x_i, x_0, \omega) \cdot \theta_i, \quad (2.30)$$

$$\left[P + Q \cdot B(x_n, x_0, \omega) \right] \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} b_{11} \omega & b_{12} \omega \\ b_{21} \omega & b_{22} \omega \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$B(x_n, x_0, \omega) \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} \omega & \tilde{b}_{12} \omega \\ \tilde{b}_{21} \omega & \tilde{b}_{22} \omega \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Нетривіальний розв'язок $\bar{X}(x, \omega)$ системи (2.26) шукаємо у вигляді

$$\bar{X}(x, \omega) = B(x, x_0, \omega) \cdot \bar{C}, \quad (2.33)$$

де $\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – деякий ненульовий вектор.

Застосувавши до двох частин рівності (2.33) крайові умови у формі (2.15), при $\bar{\Gamma} \tau \equiv 0$ отримаємо:

$$P \cdot \bar{X}(x_0, \omega) + Q \cdot \bar{X}(x_n, \omega) = \left[P \cdot B(x_0, x_0, \omega) + Q \cdot B(x_n, x_0, \omega) \right] \cdot \bar{C} = \bar{0},$$

або, зауваживши, що $B(x_0, x_0, \omega) = E$, де E – одинична матриця, прийдемо до рівності

$$\left[P + Q \cdot B(x_n, x_0, \omega) \right] \cdot \bar{C} = \bar{0}. \quad (2.34)$$

Для існування ненульового вектора \bar{C} в (2.34) необхідно і достатньо виконання умови

$$\det \left[P + Q \cdot B \ x_n, x_0, \omega \right] = 0. \quad (2.35)$$

Таким чином ми отримали наступний результат [98]:

Твердження 2.1 Характеристичне рівняння задачі на власні значення (2.14)-(2.15) має вигляд (2.35)

$$\det \left[P + Q \cdot B \ x_n, x_0, \omega \right] = 0 \quad \blacksquare.$$

Надалі припускатимемо, що всі корені характеристичного рівняння (2.34) (власні значення задачі (2.14)-(2.15)) дійсні, що очевидно, не завжди виконується. Зауважмо, що достатні умови для виконання цієї вимоги викладені в [18, 50].

Для знаходження ненульового вектора $\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, покладемо в рівність (2.34) ω_k замість ω . Тоді, використавши позначення (2.31), прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix} b_{11} \ \omega_k & b_{12} \ \omega_k \\ b_{21} \ \omega_k & b_{22} \ \omega_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

еквівалентної системі рівнянь

$$\begin{cases} b_{11} \ \omega_k \cdot C_1 + b_{12} \ \omega_k \cdot C_2 = 0, \\ b_{21} \ \omega_k \cdot C_1 + b_{22} \ \omega_k \cdot C_2 = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Оскільки визначник цієї системи рівний нулеві, то одне з рівнянь (2.37) (наприклад друге) можна відкинути, тобто отримуємо рівняння

$$b_{11} \omega_k \cdot C_1 + b_{12} \omega_k \cdot C_2 = 0. \quad (2.38)$$

Вважаючи, наприклад, $b_{12} \omega_k \neq 0$, із (2.38) отримуємо $C_1 = -\frac{C_2 b_{12}(\omega_k)}{b_{11}(\omega_k)}$.

Вважаючи, наприклад, $C_2 = 1$, отримуємо, що нетривіальний вектор \bar{C} може бути вибраним, наприклад, так:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} -\frac{b_{12}(\omega_k)}{b_{11}(\omega_k)} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Випадок, коли $b_{12} \omega_k = 0$, $b_{11} \omega_k \neq 0$ розглядається аналогічно.

Знайшовши нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k , через $\bar{X}_k(x, \omega_k)$, отримуємо:

Твердження 2.2 Власні вектори системи диференціальних рівнянь (2.26) з крайовими умовами (2.15), та при $\bar{\Gamma} \tau \equiv 0$ мають наступну структуру:

$$\bar{X}_k(x, \omega_k) = \tilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \blacksquare. \quad (2.40)$$

Наслідок 1 твердження 2.2 Власні функції $X_k(x, \omega_k)$, як перші координати власних векторів $\bar{X}_k(x, \omega_k)$, можна записати у вигляді:

$$X_k(x, \omega_k) = 1, 0 \cdot B(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.41)$$

Зокрема, оскільки $X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x, \omega_k) \theta_i$, то з (2.40) випливає, що

$$X_{ki} x, \omega_k = 1, 0 \cdot B_i x, x_i, \omega_k \cdot B x_i, x_0, \omega_k \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (2.42)$$

Наслідок 2 твердження 2.2 Власні квазіпохідні $X_k^{[1]} x, \omega_k$, як другі координати власних векторів $\bar{X}_k x, \omega_k$, можна записати у вигляді:

$$X_k^{[1]} x, \omega_k = 0, 2 \cdot B x, x_0, \omega_k \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.43)$$

$$X_{ki}^{[1]} x, \omega_k = 0, 1 \cdot B_i x, x_i, \omega_k \cdot B x_i, x_0, \omega_k \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (2.44)$$

2.5 Побудова розв'язку $v x, \tau$ мішаної задачі (2.8)-(2.10)

Для розв'язання задачі (2.8)-(2.10) застосуємо метод власних функцій [103], який полягає в тому, що розв'язок задачі (2.8)-(2.10) та його квазіпохідну шукаємо у вигляді вектор-функції

$$v x, \tau = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \tau \cdot X_k x, \omega_k, \quad (2.45)$$

де $T_k \tau$ – невідомі функції, які визначимо далі.

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ входить в праву частину рівняння (2.8), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями (2.50) крайової задачі (2.14), (2.15)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tau \cdot X_k x, \omega_k, \quad (2.46)$$

причому змінна τ грає роль параметра.

Підставивши (2.45) у (2.8) з урахуванням розвинення (2.46), отримаємо рівність

$$\begin{aligned} r x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k' \tau \cdot X_k(x, \omega_k) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k \tau \cdot \lambda X_k'(x, \omega_k)' - r x \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tau \cdot X_k(x, \omega_k). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Враховуючи тотожність $\lambda X_k'(x, \omega_k)' + \omega_k r x X_k \equiv 0$, прийдемо до рівності

$$r x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k' \tau \cdot X_k(x, \omega_k) = -r x \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k T_k X_k - r x \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tau X_k, \quad (2.48)$$

яка після скорочення на $r x \neq 0$ набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k' \tau + \omega_k T_k \tau + u_k \tau \right] \cdot X_k(x, \omega_k) = 0. \quad (2.48)$$

Прирівнюючи коефіцієнти Фур'є ряду (2.48) до нуля, прийдемо до диференціальних рівнянь

$$T_k' \tau + \omega_k T_k \tau + u_k \tau = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.49)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.49) при кожному k має вигляд

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-\omega_k t} - \int_0^t e^{-\omega_k(t-s)} \cdot u_k(s) ds, \quad (2.50)$$

де C_k – невідомі сталі.

Для їх визначення зауважимо, що функцію $f(x)$ з початкової умови (2.10) також можна розвинути в ряд Фур'є за власними функціями (2.41) крайової задачі (2.14), (2.15). Тобто

$$v(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x, \omega_k), \quad (2.51)$$

де f_k – відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (2.50) випливає, що

$$T_k(0) = C_k, \quad (2.52)$$

а на основі зображення (2.45) маємо

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \cdot X_k. \quad (2.53)$$

Порівнюючи (2.51), (2.52) і (2.53), приходимо до висновку, що $C_k = f_k$.

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (2.8)-(2.10) та його квазіпохідну, що є відповідно першою та другою координатою вектор-функції у вигляді ряду

$$\bar{V}(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot \bar{X}_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{V}_i(x, \tau) \cdot \theta_i, \quad (2.54)$$

де

$$\bar{V}_i(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot \bar{X}_{ki}(x, \omega_k), \quad (2.55)$$

а функції $X_{ki}(x, \omega_k)$ визначені формулами (2.51).

На основі зображення (2.4), отримаємо розв'язок задачі (2.1)-(2.3)

$$t(x, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} [u_i(x, \tau) + v_i(x, \tau)] \cdot \theta_i, \quad (2.56)$$

в якому функції $u_i(x, \tau)$ та $v_i(x, \tau)$ є першими координатами формул (2.11) і (2.55) відповідно.

2.6 Частинний випадок кусково-сталих теплофізичних характеристик багатощарової конструкції. Конкретизація крайових умов

При розв'язування конкретних прикладних задач, коефіцієнти r_i та λ_i зазвичай являються сталими, внаслідок чого $r(x)$ і $\lambda(x)$ в рівнянні (2.12) є кусково-сталими функціями з розривами першого роду в точках x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . З урахуванням цього, формули (2.24), (2.25), (2.28) відповідно набудуть конкретного вигляду

$$g_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} r_i \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x) \cdot X_{ki}(x, \omega_k) dx, \quad (2.57)$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x, \omega_k) dx, \quad (2.58)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ -\omega r_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Крім цього, необхідно конкретизувати матрицю Коші $B_i(x, s, \omega)$ системи (2.27) (підрозділу 2.4.2.). Безпосередньою перевіркою переконуємось, що

$$B_i(x, s, \omega) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i(x-s) & \frac{\sin \alpha_i(x-s)}{\lambda_i \alpha_i} \\ -\lambda_i \alpha_i \sin \alpha_i(x-s) & \cos \alpha_i(x-s) \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

де позначено $\alpha_i = \sqrt{\frac{r_i \omega}{\lambda_i}}$.

2.6.1 Крайові умови першого роду

Розглянемо крайові умови першого роду, які полягають в заданні закону розподілу температури по поверхні тіла в залежності від часу [91]:

$$\begin{cases} t|_{x_0} = \psi_0 \tau, \\ t|_{x_n} = \psi_n \tau. \end{cases} \quad (2.61)$$

При зведенні до систем диференціальних рівнянь першого порядку запишемо ці крайові умови у вигляді (2.2)'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t|_{x_0} \\ t^{[1]}|_{x_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t|_{x_n} \\ t^{[1]}|_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \tau \\ \psi_n \tau \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Звідси випливає, що $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{F} = \begin{pmatrix} \psi_0 \tau \\ \psi_n \tau \end{pmatrix}$.

Для знаходження нетривіального вектора \bar{C} використаємо (2.36)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} \omega_k & \tilde{b}_{12} \omega_k \\ \tilde{b}_{21} \omega_k & \tilde{b}_{22} \omega_k \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{b}_{11} \omega_k & \tilde{b}_{12} \omega_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь (2.37)

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ \tilde{b}_{11} \omega_k C_1 + \tilde{b}_{12} \omega_k C_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що при довільному C_2 , $C_1 = 0$. Зокрема, при $C_2 = 1$, з точністю до довільного сталого множника

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

2.6.2 Крайові умови третього роду

При дослідженні процесів тепло-масообміну найбільш наближеними до реальних процесів є граничні умови третього роду, які характеризують конвективний теплообмін і можуть бути застосовані в більш складних випадках теплообміну, коли тепло на поверхні тіла передається шляхом конвекції.

Таким чином крайові умови третього роду, набувають вигляду [24, 44, 102]:

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial t_{x_0, \tau}}{\partial x} = \alpha_0 \psi_0 \tau - t_{x_0, \tau} \quad , \\ \lambda \frac{\partial t_{x_n, \tau}}{\partial x} = \alpha_n t_{x_n, \tau} - \psi_n \tau \quad . \end{cases} \quad (2.64)$$

При зведенні до систем диференціальних рівнянь першого порядку запишемо ці крайові умови у вигляді (2.2)'

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{x_0} \\ t^{[1]}_{x_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{x_n} \\ t^{[1]}_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0 \tau \\ \alpha_n \psi_n \tau \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

$$\text{Звідси випливає, що } P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \bar{G} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0 \tau \\ \alpha_n \psi_n \tau \end{pmatrix}.$$

Для знаходження нетривіального вектора \bar{C} використаємо (2.36)

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} \omega_k & \tilde{b}_{12} \omega_k \\ \tilde{b}_{21} \omega_k & \tilde{b}_{22} \omega_k \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ \alpha_n \tilde{b}_{11} \omega_k & -\tilde{b}_{21} \omega_k & \alpha_n \tilde{b}_{12} \omega_k & -\tilde{b}_{22} \omega_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь (2.37)

$$\begin{cases} \alpha_0 C_1 - C_2 = 0, \\ \left[\alpha_n \tilde{b}_{11} \omega_k & -\tilde{b}_{21} \omega_k \right] C_1 + \left[\alpha_n \tilde{b}_{12} \omega_k & -\tilde{b}_{22} \omega_k \right] C_2 = 0. \end{cases}$$

Відкидаючи друге з цих рівнянь, отримаємо рівняння $\alpha_0 C_1 - C_2 = 0$.

Припускаючи, наприклад, $C_2 = 1$, отримуємо, що $C_1 = \frac{1}{\alpha_0}$. Звідси випливає, що

(з точністю до довільного сталого множника)

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha_0} \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

2.6.3 Мішані крайові умови

Розглянемо також мішані крайові умови, які полягають в тому, що на одній із зовнішніх поверхонь конструкції задається крайова умова першого роду, на іншій – третього або навпаки [24, 74].

Мішані крайові умови запишемо наступним чином:

$$\begin{cases} t x_0 = \psi_0 \tau, \\ \lambda \frac{\partial t x_n, \tau}{\partial x} = \alpha_n t x_n, \tau - \psi_n \tau. \end{cases} \quad (2.67)$$

При зведенні до систем диференціальних рівнянь першого порядку запишемо ці крайові умови у вигляді (2.2)'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & x_0 \\ t^{[1]} & x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & x_n \\ t^{[1]} & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \tau \\ \alpha_n \gamma_2 & \tau \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Звідси випливає, що $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{G} = \begin{pmatrix} \psi_0 & \tau \\ \alpha_n \psi_n & \tau \end{pmatrix}$.

Для знаходження нетривіального вектора \bar{C} використаємо (2.36)

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} \omega_k & \tilde{b}_{12} \omega_k \\ \tilde{b}_{21} \omega_k & \tilde{b}_{22} \omega_k \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_n \tilde{b}_{11} \omega_k - \tilde{b}_{21} \omega_k & \alpha_n \tilde{b}_{12} \omega_k - \tilde{b}_{22} \omega_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

яка еквівалентна системі рівнянь (2.37)

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ \left[\alpha_n \tilde{b}_{11} \omega_k - \tilde{b}_{21} \omega_k \right] C_1 + \left[\alpha_n \tilde{b}_{12} \omega_k - \tilde{b}_{22} \omega_k \right] C_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що при довільному C_2 , $C_1 = 0$. Зокрема, при $C_2 = 1$, з точністю до довільного сталого множника

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

У випадку, коли мішані крайові умови мають вигляд

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial t}{\partial x} x_0, \tau = \alpha_0 \psi_0 \tau - t x_0, \tau, \\ t x_n = \psi_n \tau. \end{cases} \quad (2.70)$$

Матриці P і Q матимуть вигляд $P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

а вектори \bar{G} і \bar{C} , $\bar{G} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0 & \tau \\ \psi_n & \tau \end{pmatrix}$, $\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha_0} \end{pmatrix}$.

Випадки, коли задаються інші крайові умови розглядаються аналогічно.

2.7 Висновки до розділу

Результати досліджень, описаних у цьому розділі, дозволяють зробити такі висновки:

1. Запропоновано та обґрунтовано прямий метод розв'язування мішаної задачі для рівняння теплопровідності за умов ідеального теплового контакту між шарами, наявності внутрішніх джерел тепла та найбільш загальних крайових умовах. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних, що дозволяє «обійти» проблему множення узагальнених функцій.

2. Теорема про розвинення за власними функціями уточнена і адаптована для випадку рівнянь з кусково-неперервними (за просторовою змінною) коефіцієнтами.

3. Отримано явні формули для обчислення температури, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву 1-го роду згаданих вище коефіцієнтів.

РОЗДІЛ 3. ОБГРУНТУВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ РОЗРОБЛЕНОГО ПРЯМОГО МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У БАГАТОШАРОВИХ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦІЯХ

3.1 Числовий експеримент

Розглядається двошарова плоска стінка [24], яка складається з цегляної кладки та пінопласту. Рівняння теплопровідності для шарів має вигляд:

$$c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right), \quad (3.1)$$

де, x , м – координата; τ , с – час; t , °С – температура; c , $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ – питома теплоємність матеріалу; ρ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – густина матеріалу; λ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу.

В початковий момент часу ($\tau=0$) розподіл температурного поля по товщині двошарової стінки відомий, тобто

$$t(x,0) = f(x), \quad (3.2)$$

де $f(x)$ – відома функція.

Вважається, що на зовнішніх поверхнях двошарової стінки існує конвекційний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються умови

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial x} = \alpha(t_p - t_m) \quad \text{на } x, \tau, \quad (3.3)$$

де $\frac{\partial t}{\partial x}$ – градієнт температури на поверхні тіла, t_p – температура рідини

(газу), яка омиває поверхню тіла, за межами приповерхневого теплового шару, t_m, x, τ – температура поверхні тіла, $\alpha, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ – коефіцієнт тепловіддачі (теплообміну) від зовнішніх поверхонь стінок.

Між шарами існує ідеальний тепловий контакт, тобто виконуються умови

$$t_{i-1} x_i = t_i x_i, \quad (3.5)$$

$$\lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1} x_i, \tau}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial t_i x_i, \tau}{\partial x}, \quad (3.6)$$

Необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля в двошаровій плоскій стінці.

Вихідні дані для розрахунку нестационарного температурного поля двошарової плоскої стінки наведено в табл. 3.1 [24].

Таблиця 3.1

Вихідні дані розрахунку нестационарного температурного поля двошарової плоскої стінки

Параметр	Цегляна кладка	Пінопласт
Товщина Δ , м	0,25	0,05
Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	0,455	0,041
Питома теплоємність $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	840	1340
Густина $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	1580	100
Початкова умова (розподіл температурного поля) $\varphi x, ^\circ\text{C}$	10	10
Закони зміни температур	$\psi_0 \tau = 80 + 0,01\tau, \psi_n \tau = 30.$	
Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $\alpha, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$	$\alpha_0 = 24, \alpha_n = 16$	

Розв'язок задачі (3.1)-(3.6) шукатимемо у вигляді (2.4) суми двох функцій

$$t_{x,\tau} = u_{x,\tau} + v_{x,\tau} . \quad (3.7)$$

Визначимо функцію $u_{x,\tau}$ як розв'язок (квазістаціонарної) крайової задачі

$$\lambda u' = 0, \quad (3.8)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 u(x_0, \tau) - u^{[1]}(x_0, \tau) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n u(x_n, \tau) + u^{[1]}(x_n, \tau) = \alpha_n \psi_n(\tau). \end{cases} \quad (3.9)$$

Використовуючи формулу (A.19) та опускаючи проміжні обчислення, розв'язок задачі (3.8), (3.9) на кожному з проміжків отримуємо у вигляді вектор-функції

$$\bar{U}_0_{x,\tau} = \begin{pmatrix} 78,89 + 0,0098\tau - 58,67x - 0,0117x\tau \\ -26,69 - 0,0053\tau \end{pmatrix}, \quad x \in x_0, x_1 . \quad (3.10)$$

$$\bar{U}_1_{x,\tau} = \begin{pmatrix} 226,98 + 0,039\tau - 651,05x - 0,13x\tau \\ -26,69 - 0,0053\tau \end{pmatrix}, \quad x \in x_1, x_2 . \quad (3.11)$$

Далі шукатимемо розв'язок диференціального рівняння

$$r \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) - r \frac{\partial u}{\partial \tau} . \quad (3.12)$$

Зауважимо, що функцію $-r \frac{\partial u}{\partial \tau}$ в правій частині (3.12) вважатимемо відомою, бо відомою вважатимемо функцію $u(x, \tau)$, яку знайдено, як розв'язок задачі (3.8), (3.9). Оскільки функція $u(x, \tau)$ справджує крайові умови (3.3), то із зображення (2.4) випливають крайові умови для функції $v(x, \tau)$:

$$\begin{cases} \alpha_0 v(x_0, \tau) - v^{[1]}(x_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n v(x_n, \tau) + v^{[1]}(x_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

а початкова умова набуває вигляду

$$v(x, 0) = f(x) = \varphi(x) - u(x, 0). \quad (3.14)$$

Використовуючи позначення (2.60) та (2.65), знайдемо корені характеристичного рівняння (2.35), рис. 3.1.

$$\det \left[P + Q \cdot B(x_n, x_0, \omega) \right] = 0 \quad (3.15)$$

$$\det \left[\begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \cos \alpha_i (x_{i+1} - x_i) & \frac{\sin \alpha_i (x_{i+1} - x_i)}{\lambda_i \alpha_i} \\ -\lambda_i \alpha_i \cdot \sin \alpha_i (x_{i+1} - x_i) & \cos \alpha_i (x_{i+1} - x_i) \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} \left(0,49 \cos 90,39\sqrt{\omega} \sin 426,98\sqrt{\omega} + 5,18 \sin 90,39\sqrt{\omega} \cos 426,98\sqrt{\omega} - \right.$$

$$\left. -170,04 \sin 90,39\sqrt{\omega} \sin 426,98\sqrt{\omega} \sqrt{\omega} + 40 \cos 90,39\sqrt{\omega} \cos 426,98\sqrt{\omega} \sqrt{\omega} - \right.$$

$$\left. -74,12 \omega \sin 90,39\sqrt{\omega} \cos 426,98\sqrt{\omega} - 777,1 \cos 90,39\sqrt{\omega} \omega \sin 426,98\sqrt{\omega} \right) = 0$$

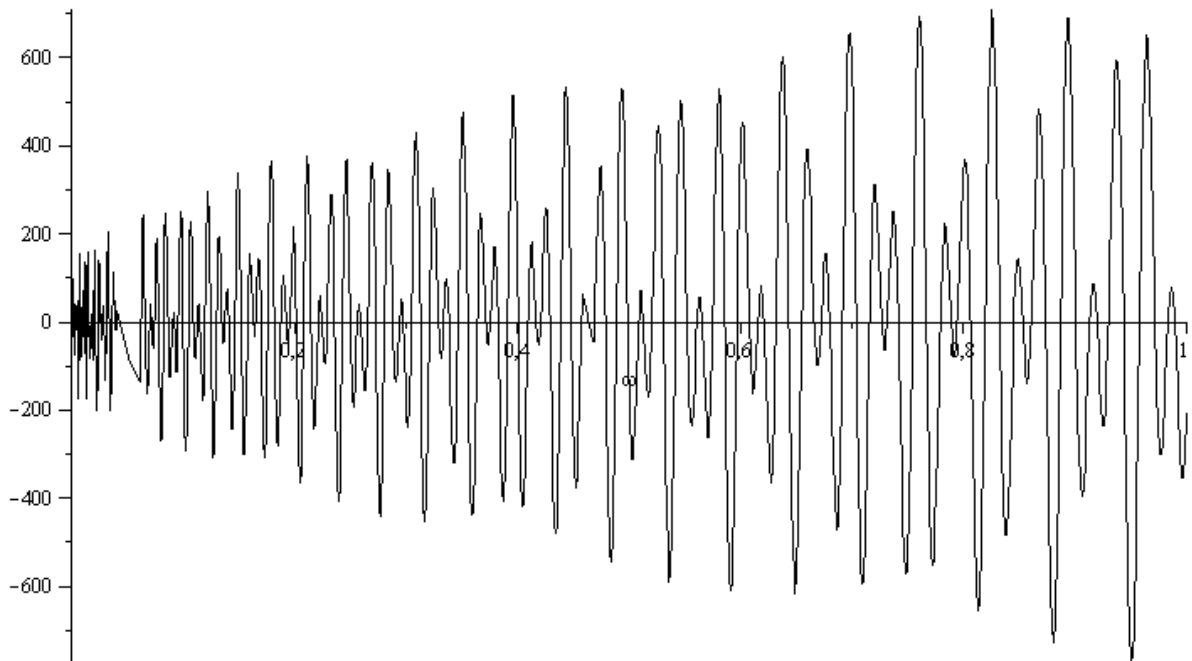


Рисунок 3.1 – Графік лівої частини характеристичного рівняння

Числові значення коренів характеристичного рівняння наведено в додатку Б.

З формули (2.63) ненульовий вектор $\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ має вигляд

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Позначивши нетривіальний власний вектор $\bar{X}_k(x, \omega_k)$, що відповідає власному значенню ω_k , з (2.49) отримуємо

$$\bar{X}_k(x, \omega_k) = \tilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

На кожному з проміжків власні вектор-функції мають вигляд

$$\begin{aligned}
& \overline{X}_{k0} x, \omega_k = \\
& = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 x - x_0 & \frac{\sin \alpha_0 x - x_0}{\lambda_0 \alpha_0} \\ -\lambda_0 \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 x - x_0 & \cos \alpha_0 x - x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} \cos 1707,9 \sqrt{\omega_k} x + \frac{0,00128684 \sin 1707,9 \sqrt{\omega_k} x}{\sqrt{\omega_k}} \\ -32,379 \sqrt{\omega_k} \sin 1707,9 \sqrt{\omega_k} x + \cos 1707,9 \sqrt{\omega_k} x \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
& \overline{X}_{k1} x, \omega_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 x - x_1 & \frac{\sin \alpha_1 x - x_1}{\lambda_1 \alpha_1} \\ -\lambda_1 \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1 x - x_1 & \cos \alpha_1 x - x_1 \end{pmatrix} \times \\
& \times \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 x_1 - x_0 & \frac{\sin \alpha_0 x_1 - x_0}{\lambda_0 \alpha_0} \\ -\lambda_0 \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 x_1 - x_0 & \cos \alpha_0 x_1 - x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \cos 90,39 \sqrt{\omega_k} \cos(426,98 \sqrt{\omega_k}) - \\ -0,436838 \sin 90,39 \sqrt{\omega_k} \sin 426,98 \sqrt{\omega_k} + \\ + \frac{0,00126884 \cos(0,39 \sqrt{\omega_k} \sin 26,98 \sqrt{\omega_k})}{\sqrt{\omega_k}} + \\ + \frac{0,0134914 \sin(0,39 \sqrt{\omega_k} \cos 26,98 \sqrt{\omega_k})}{\sqrt{\omega_k}} \\ -74,12 \sqrt{\omega_k} \sin(0,39 \sqrt{\omega_k} \cos 26,98 \sqrt{\omega_k}) - \\ -32,38 \cos(0,39 \sqrt{\omega_k} \sqrt{\omega_k}) \sin 26,98 \sqrt{\omega_k} - \\ -0,0953825 \sin(0,39 \sqrt{\omega_k} \sin 26,98 \sqrt{\omega_k}) + \\ + \cos(0,39 \sqrt{\omega_k} \cos 26,98 \sqrt{\omega_k}) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Коефіцієнти Фур'є розкладу $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ отримуємо з (2.24) (додаток В).

$$\begin{aligned}
u_k &= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^1 r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u_i(x, \tau)}{\partial \tau} \cdot X_{ki}(x, \omega_k) dx = \\
&= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \left(r_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u_0(x, \tau)}{\partial \tau} \cdot X_{k0}(x, \omega_k) dx \right) \cdot \left(r_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u_1(x, \tau)}{\partial \tau} \cdot X_{k1}(x, \omega_k) dx \right),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

де,

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^1 r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x, \omega_k) dx. \tag{3.21}$$

Також з формули (2.24) знаходимо коефіцієнти Фур'є розкладу початкової умови $f(x)$ (додаток В)

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^1 r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x) \cdot X_{ki}(x, \omega_k) dx = \\
&= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \left(r_0 \int_{x_0}^{x_1} f_0(x) \cdot X_{k0}(x, \omega_k) dx \right) \cdot \left(r_1 \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) \cdot X_{k1}(x, \omega_k) dx \right).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

На основі (2.55) отримуємо розв'язок задачі (3.12)-(3.14) та його квазіпохідну, що є першою та другою координатою вектор-функції у вигляді ряду

$$\bar{V}_0(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot \bar{X}_{k0}(x, \omega_k), \tag{3.23}$$

$$\bar{V}_1(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot \bar{X}_{k1}(x, \omega_k). \tag{3.24}$$

З урахуванням (3.10), (3.11) і (3.23), (3.24) та на основі (3.7) розв'язок вихідної задачі (3.1)-(3.6) та його квазіпохідна на кожному з проміжків має вигляд:

$$T_0(x, \tau) = U_0(x, \tau) + V_0(x, \tau) =$$

$$\left(\begin{array}{c} 78,89 + 0,0098\tau - 58,67x - 0,0117x\tau \\ -26,69 - 0,0053\tau \end{array} \right) \times \quad x \in x_0, x_1, \quad (3.25)$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot \bar{X}_{k0}(x, \omega_k),$$

$$T_1(x, \tau) = U_1(x, \tau) + V_1(x, \tau) =$$

$$\left(\begin{array}{c} 226,98 + 0,039\tau - 651,05x - 0,13x\tau \\ -26,69 - 0,0053\tau \end{array} \right) \times \quad x \in x_1, x_2. \quad (3.26)$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot \bar{X}_{k1}(x, \omega_k),$$

Підставляючи відповідні значення x та τ отримуємо розподіл температурного поля та густини теплового потоку у вигляді табл. 3.2. і табл. 3.3. та графіків 3.2. і 3.3. відповідно.

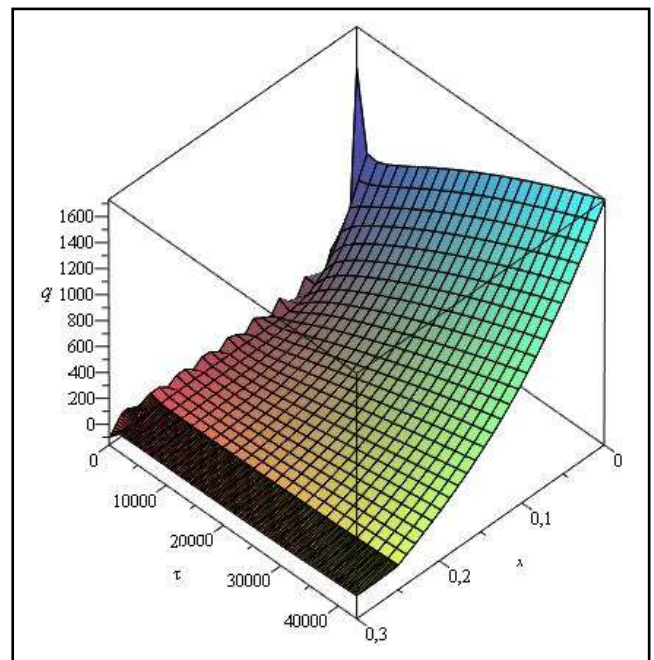
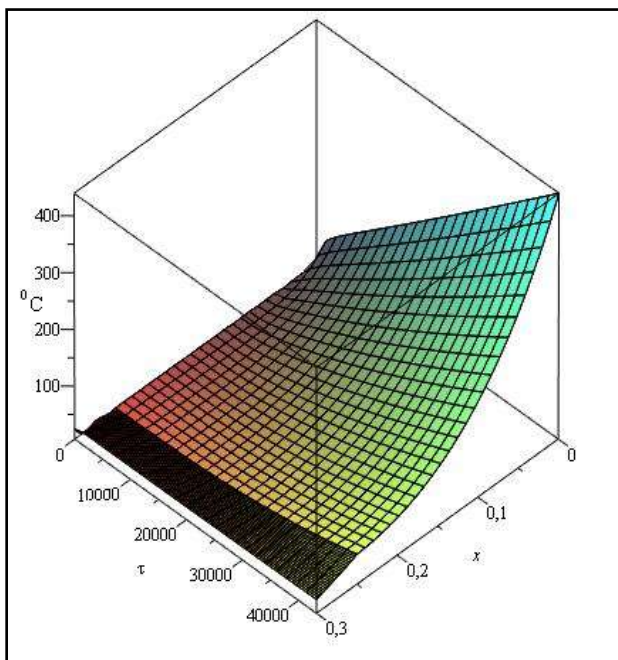
Таблиця 3.2

Розподіл нестационарного температурного поля по товщині двошарової
плоскої стінки

час, с	координати шару, м									
	середовище	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,275	0,3	середовище
0		10	10	10	10	10	10	10	10	
600	86	47	10,3	10	10	10	10	10,3	26,5	30
1200	92	56,9	12,3	10	10	10	10	11,7	27,5	30
1800	98	64,4	15,5	10,1	10	10	10	13,2	27,9	30
2400	104	70,9	19,1	10,4	10	10	10,1	14,5	28,2	30
3000	110	76,9	22,6	11	10	10	10,2	15,5	28,4	30
3600	116	82,7	26,2	11,8	10,1	10	10,3	16,3	28,5	30
2×3600	152	115	46,8	19,4	11,7	10,4	11	18,9	28,9	30
4×3600	224	179	88,5	41,8	21,2	14,1	13,2	20,6	29,1	30
8×3600	368	308	180	101	56,7	34,7	27,7	26,6	29,6	30
12×3600	512	440	281	175	108	71,6	57,6	40,6	30,8	30

Розподіл густини теплового потоку по товщині двошарової плоскої стінки

час, с	координати шару, м							
	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,275	0,3
0	0	0	0	0	0	0	0	0
600	937,4	17,2	0	0	0	0	-12,1	-33,5
1200	843,1	88,3	0	0	0	0	-14,8	-24,1
1800	807,5	152	5,11	0	0	0	-15	-19,9
2400	795,1	200,6	14,6	0	0	-124	-15	-17,8
3000	794,7	238,9	27,4	0	0	-13,3	-15	-16,6
3600	799,6	269,7	41,5	2,2	-2,5	-13,7	-14,8	-15,8
2×3600	882,9	400,2	131,3	27,6	-1,7	-14	-14,5	-14,6
4×3600	1084	593,8	281,6	109,8	28	-11,6	-12,7	-13,3
8×3600	1437	916,6	540,7	287	119,9	2,7	-1,3	-2,9
12×3600	1731	1186	766	451,6	216,2	29	22,2	19,7

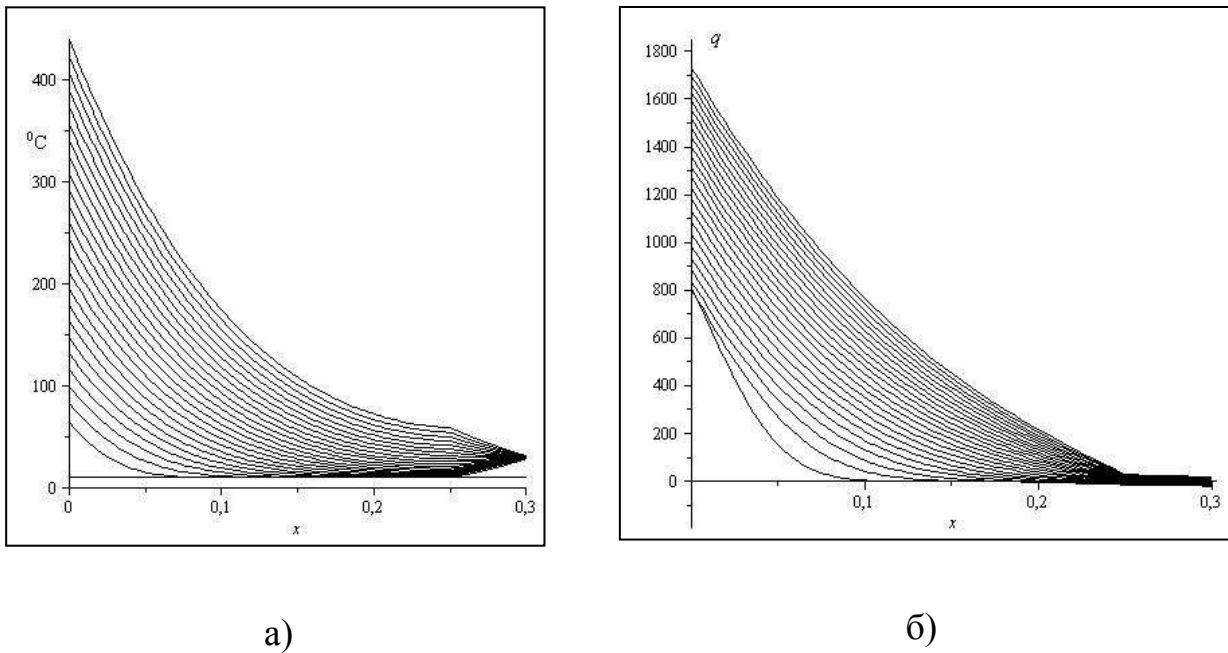


а)

б)

Рисунок 3.2 – Об'ємний графік розподілу

а) температурного поля б) густини теплового потоку



а)

б)

Рисунок 3.3 – Графік розподілу

а) температурного поля б) густини теплового потоку

*Примітка. В часовому вимірі «відстань» між сусідніми кривими рівна 1800 с.**(нижня крива відповідає часу $\tau=0$)*

Порівнюючи отриманий результат, з тим, який наведений в літературі [24] (сторінка 395, II випадок), отримуємо повне збігання результатів.

3.2 Експериментальне дослідження вогнезахисної здатності вогнезахисного покриття на бетонній плиті

Метою експериментальних досліджень є перевірка адекватності отриманих аналітичних моделей з експериментальними дослідженнями часу настання граничної межі вогнестійкості бетонних плит, захищених та не захищених вогнезахисним покриттям, що вспучується. За основу взято дані експерименту, що проводився в центрі вогневих випробувань «Тест» [41]. Метою даного експерименту було визначення вогнезахисної здатності вогнезахисного покриття що вспучується, яке було нанесене на бетонну плиту, при температурному режимі, близькому до стандартного температурного режиму [6, 30].

Для визначення вогнезахисної здатності покриття Фенікс СТВ

виробництва фірми «А+В Україна» нанесеному на бетонну плиту, при режимі, близькому до стандартного температурного режиму, було сплановано і проведено серію вогневих випробувань бетонних плит товщиною 60 мм.

Випробовуванням піддавались два зразки бетонних плит, розмірами 600х600х60 мм. (рис.3.4).

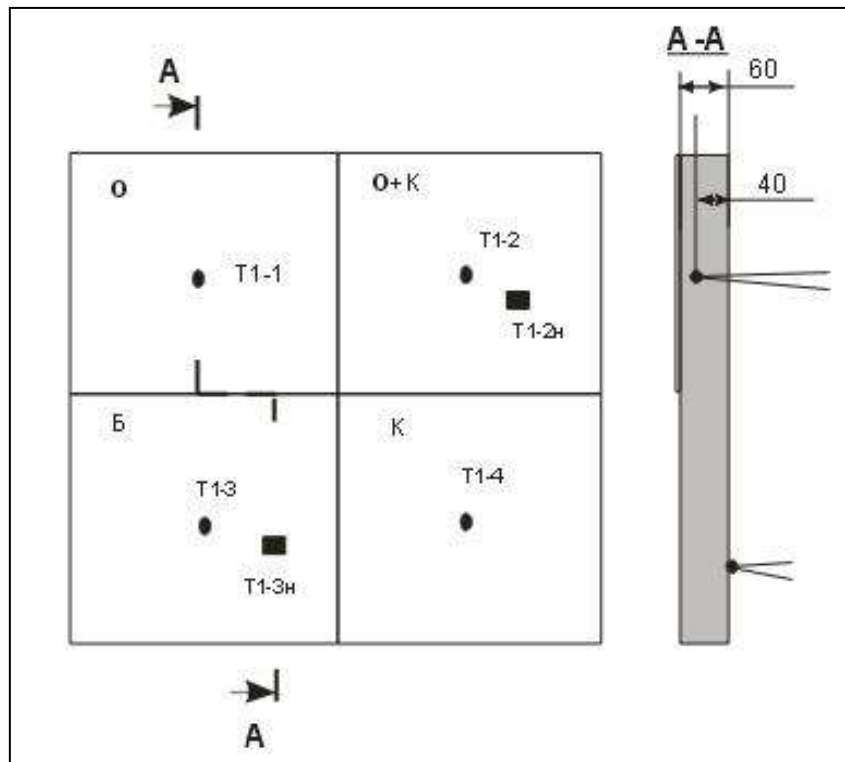


Рисунок 3.4 – Схема розподілу термопар на зразках:
О – вогнезахисне покриття; К – ґрунтовка; Б – бетон.

На поверхні, що обігривається зразка № 1 перед випробовуванням було нанесено:

- вогнезахисне покриття Фенікс СТВ товщиною 1,5 мм (чверть зразка, позначена буквою О);
- вогнезахисне покриття Фенікс СТВ, товщиною 1,5 мм по ґрунтовці Фенікс Контакт (чверть зразка, позначена буквою О+К);
- ґрунтовка Фенікс Контакт без покриття (чверть зразка, позначена буквою К);

➤ а на одну чверть ґрунтовка і покриття не наносились (чверть зразка, позначена буквою Б).

На поверхні, що обігривається зразка № 2 перед випробовуванням було нанесено:

➤ вогнезахисне покриття Фенікс СТВ товщиною 1,5 мм (чверть зразка, позначена буквою О);

➤ вогнезахисне покриття Фенікс СТВ, товщиною 1,5 мм по ґрунтовці з рідкого скла (чверть зразка, позначена буквою О+С);

➤ ґрунтовка з рідкого скла без покриття (чверть зразка, позначена буквою К);

➤ а на одну чверть ґрунтовка і покриття не наносились (чверть зразка, позначена буквою Б).

Кожен зразок препарували хромель-алюмелевими термопарами (ТХА) по центру чвертей на глибині 20 мм від поверхні, що обігривається (очікуване місце знаходження несучої арматури в залізобетонних конструкціях). Додатково на кожному з взірців з поверхні, що не обігривається встановлювали по дві термопары ТХА на чвертях з покриттям і ґрунтовкою і без ґрунтовки і покриття (рис. 3.5, та рис. 3.6).

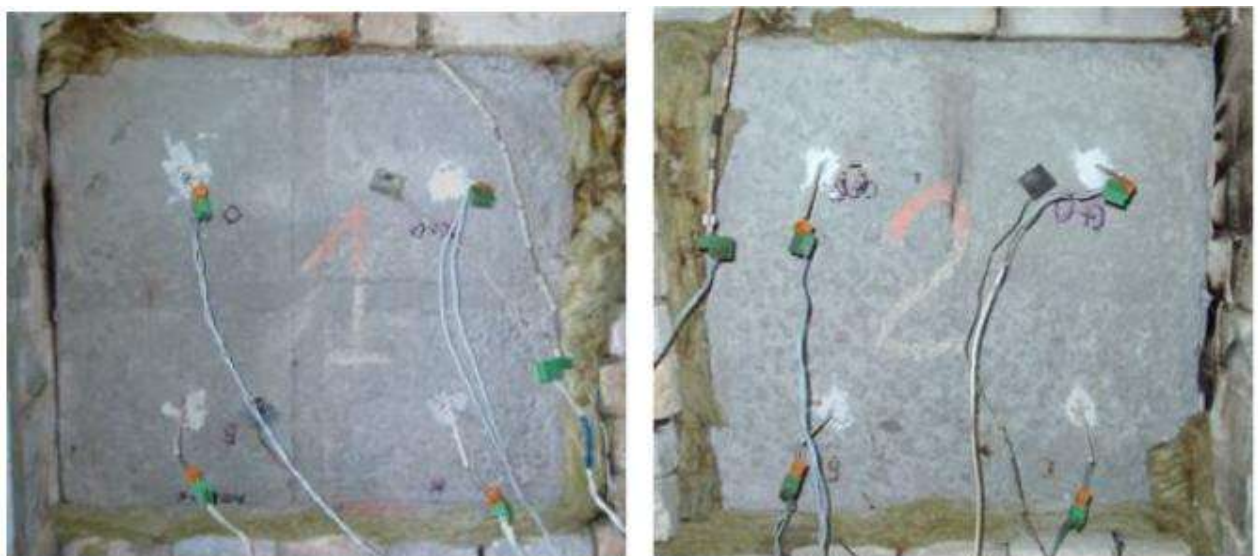


Рисунок 3.5 – Вигляд зразків № 1 та № 2 перед вогневим випробовуванням зі сторони поверхні, що не обігривається



Рисунок 3.6 – Вигляд зразків № 1 та № 2 перед вогневим випробовуванням зі сторони поверхні, що обігрівається

Зразки встановлювались вертикально в отворах вогневої печі.

Випробовування проводилось при температурі навколишнього середовища 25°C і відносній вологості 65%.

Для випробовування використовувалась спеціальна піч (атестат № 24-2/0330) і засоби вимірювальної техніки.

Випробовування зразків проводилось в умовах, близькому до стандартного температурного режиму, протягом 122 хвилин.

На рис. 3.7 представлені графіки зміни температури від часу вогневого випробовування в чвертях поверхні, що обігрівається на глибині 20 мм.

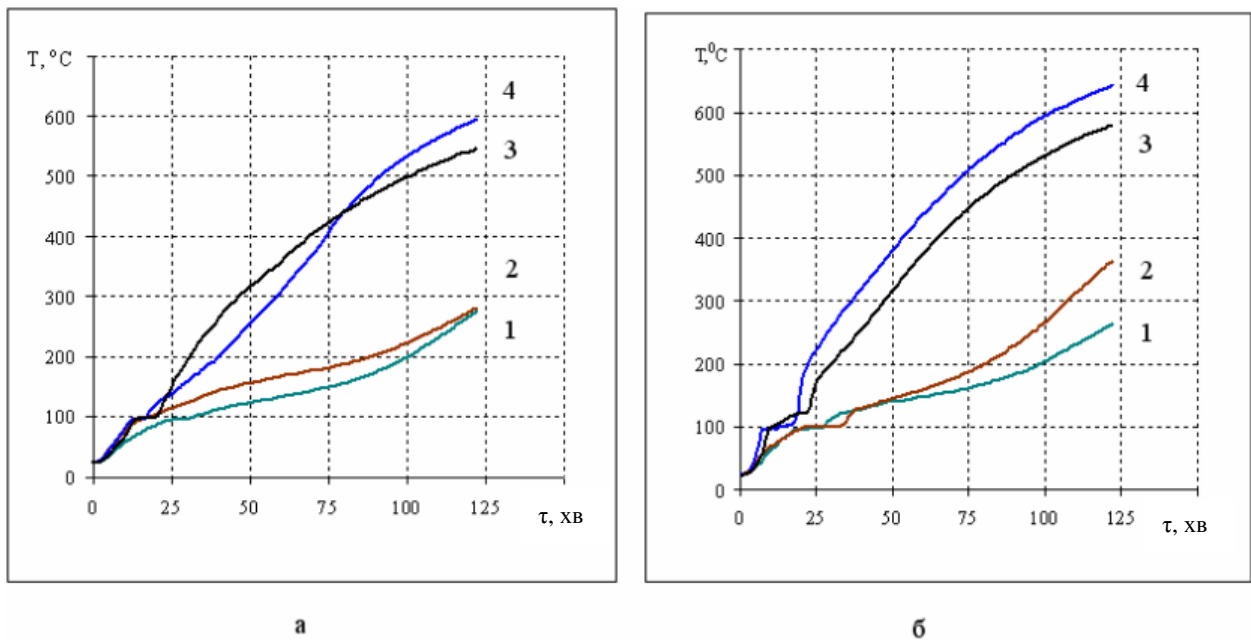


Рисунок 3.7 – Графік зміни температури від часу вогневого випробування в чвертях поверхні, що обігривається на глибині 20 мм

- 1 – чверть зразка, з нанесеним вогнезахисним покриттям Фенікс СТВ;
 2 – чверть зразка, з нанесеним вогнезахисним покриттям Фенікс СТВ та ґрунтовкою Фенікс Контакт (а) та ґрунтовкою з рідкого скла (б);
 3 – чверть зразка, на яку не наносилось вогнезахисне покриття та ґрунтовка; 4 – чверть зразка, з нанесеною ґрунтовкою Фенікс Контакт (а), та ґрунтовкою з рідкого скла (б)

3.2.1 Теоретичне дослідження вогнезахисної здатності бетонної плити без вогнезахисного покриття

Для перевірки адекватності запропонованої автором дисертаційного дослідження математичної моделі порівняємо результати теоретичних та експериментальних досліджень.

Розглядається плоска одношарова бетонна конструкція. Необхідно визначити межу вогнестійкості (втрату теплоізолювальної здатності), а також знайти розподіл нестационарного температурного поля по товщині бетонної плоскої конструкції за умови стандартного температурного режиму пожежі.

Вихідні дані для розрахунку нестационарного температурного поля бетонної плити наведено в табл. 3.4 [43].

Таблиця 3.4

Вихідні дані для розрахунку нестационарного температурного поля
одношарової бетонної плити

Параметр	Бетонна плита
Товщина Δ , м	0,06
Коефіцієнт теплопровідності λ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	1,92
Питома теплоємність c , $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	840
Густина ρ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	2500
Початковий розподіл температури φ x	25
Закони зміни температур	$\psi_0 \tau = 3451g \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 25$ $\psi_n \tau = 25$
Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях α , $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$	$\alpha_0 = 25$ $\alpha_n = 4$

Для визначення температурного поля по товщині конструкції використаємо запропонований прямий метод, який алгоритмізовано в комп'ютерному середовищі Maple 13 [4, 52].

Результати аналітичного розрахунку даної задачі отримуємо у вигляді табл. 3.5. та рис. 3.8.

Таблиця 3.5

Розподіл нестационарного температурного поля бетонної плити за умови стандартного температурного режиму пожежі

час, хв.	Координати шару, м				
	середовище	0	0,02	0,06	середовище
0	25	25	25	25	25
25	819	299	188	99.6	25
50	923	440	333	237	25

75	983	553	456	361	25
100	1026	644	557	465	25
122	1056	711	632	542	25

На рис. 3.8 представлено порівняння результатів експериментального та теоретичного досліджень поширення нестационарного температурного поля в бетонній плиті на глибині 20 мм.

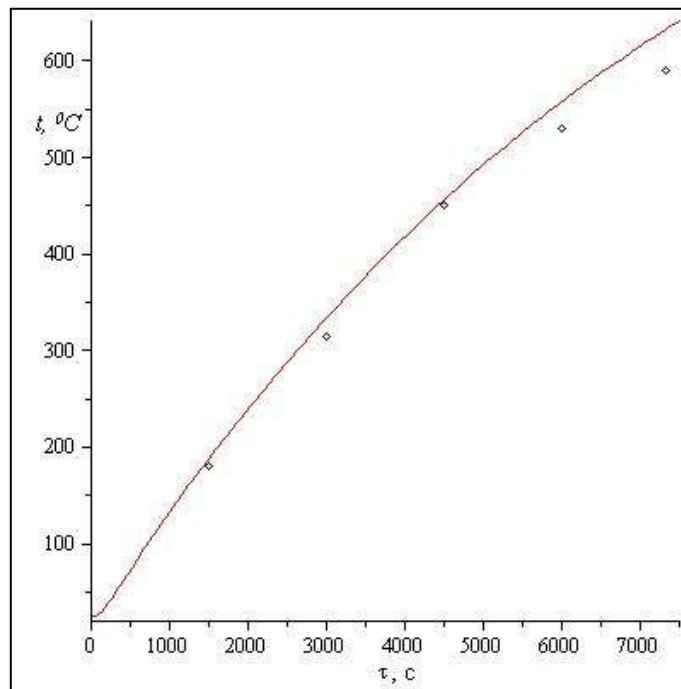


Рисунок 3.8 – Графік зміни температури від часу вогневого випробування без вогнезахисного покриття на глибині 20 мм

(— – результати теоретичних досліджень; \diamond – результати експерименту)

Аналіз графічної залежності (рис. 3.8) показує, що результати розрахунку поширення нестационарного температурного поля по товщині бетонної плити, отримані за допомогою математичних моделей, є якісно і кількісно збіжними з результатами, отриманими експериментальним шляхом. Розбіжність між теоретичними та експериментальними даними становить 4%.

3.2.2 Теоретичне дослідження вогнезахисної здатності вогнезахисного покриття Фенікс СТВ на бетонній плиті з ґрунтовкою Фенікс Контакт

Розглядається тришарова плоска конструкція [41], яка складається з нанесеного вогнезахисного покриття Фенікс СТВ, виробництва фірми «А+В Україна» по ґрунтовці Фенікс Контакт на бетонну плиту.

Необхідно визначити межу вогнестійкості (втрату теплоізолювальної здатності), а також знайти розподіл нестационарного температурного поля по товщині тришарової плоскої конструкції за умови стандартного температурного режиму пожежі.

Вихідні дані для розрахунку нестационарного температурного поля тришарової конструкції наведено в табл. 3.6 [43, 83].

Таблиця 3.6

Вихідні дані для розрахунку нестационарного температурного поля тришарової плоскої конструкції

Параметр	Фенікс СТВ	Ґрунтовка Фенікс Контакт	Бетонна плита
Товщина Δ , м	0,0015 – до спучення 0,0105 – після спучення	0,001	0,06
Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	0,5	0,5	1,92
Питома теплоємність $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	1100	1100	840
Густина $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	1340	1340	2500
Початковий розподіл температури φ x	25	25	25
Закони зміни температури на поверхнях	$\psi_0 \tau = 345 \lg \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 25$ $\psi_n \tau = 25$		

продовження таблиці 3.6

Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $\alpha, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$	$\alpha_0 = 25$ $\alpha_n = 4$
---	-----------------------------------

Для визначення температурного поля по товщині конструкції використаємо запропонований прямий метод, який алгоритмізовано в комп'ютерному середовищі Maple 13.

Розв'язок даної задачі отримуємо у вигляді табл. 3.7 та рис. 3.9.

Таблиця 3.7

Розподіл нестационарного температурного поля бетонної плити за умови стандартного температурного режиму пожежі

час, хв.	координата, м							середовище
	середовище	-0,009	0	0,0015	0,0025	0,0225	0,0625	
0	25	25	25	25	25	25	25	25
25	819	668	200	123	116	85	58	25
50	923	760	254	170	163	128	98	25
75	983	818	301	216	208	172	138	25
100	1026	861	344	258	250	214	178	25
122	1056	892	379	294	286	250	212	25

На графіку (рис. 3.9) представлено порівняння результатів експериментального та теоретичного досліджень поширення нестационарного температурного поля в тришаровій плиті на глибині 20 мм в бетонній плиті.

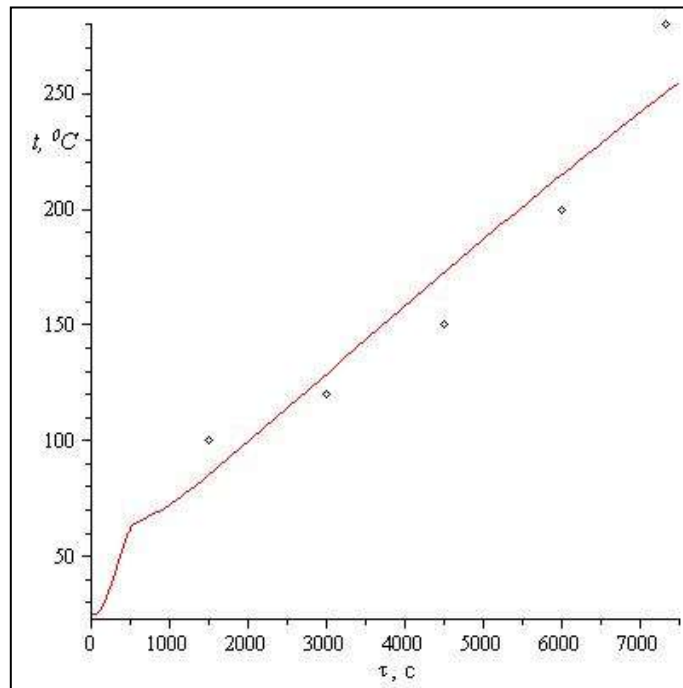


Рисунок 3.9 – Графік зміни температури від часу вогневого випробування з вогнезахисним покриттям Фенікс СТВ:

(— – результати теоретичних досліджень; \diamond – результати експерименту)

З рис. 3.9 очевидно, що вогнезахисне покриття спучується вже за перші 7 хв. від початку випробування.

Аналіз графічної залежності (рис. 3.9) показує, що результати розрахунку поширення нестационарного температурного поля по товщині бетонної плити, захищеної вогнезахисним покриттям Фенікс СТВ з ґрунтовкою Фенікс Контакт, отримані за допомогою математичних моделей, є якісно і кількісно збіжними з результатами, отриманими експериментальним шляхом.

Розбіжність між теоретичними та експериментальними даними не перевищує 10%.

3.3 Загальна методика розрахунку втрати теплоізолювальної здатності багат шарової плоскої конструкції за умов пожежі

З огляду на проведені дослідження був розроблений алгоритм визначення часу втрати теплоізолювальної здатності багат шарової будівельної конструкції з можливістю руйнування довільного шару конструкції. В основу

даного алгоритму входить прямий метод розрахунку поширення нестационарного температурного поля по товщині багатошарової плоскої конструкції.

Даний алгоритм зrealізований за допомогою програмного середовища Maple 13 блок-схема якого подана на рис. 3.10.

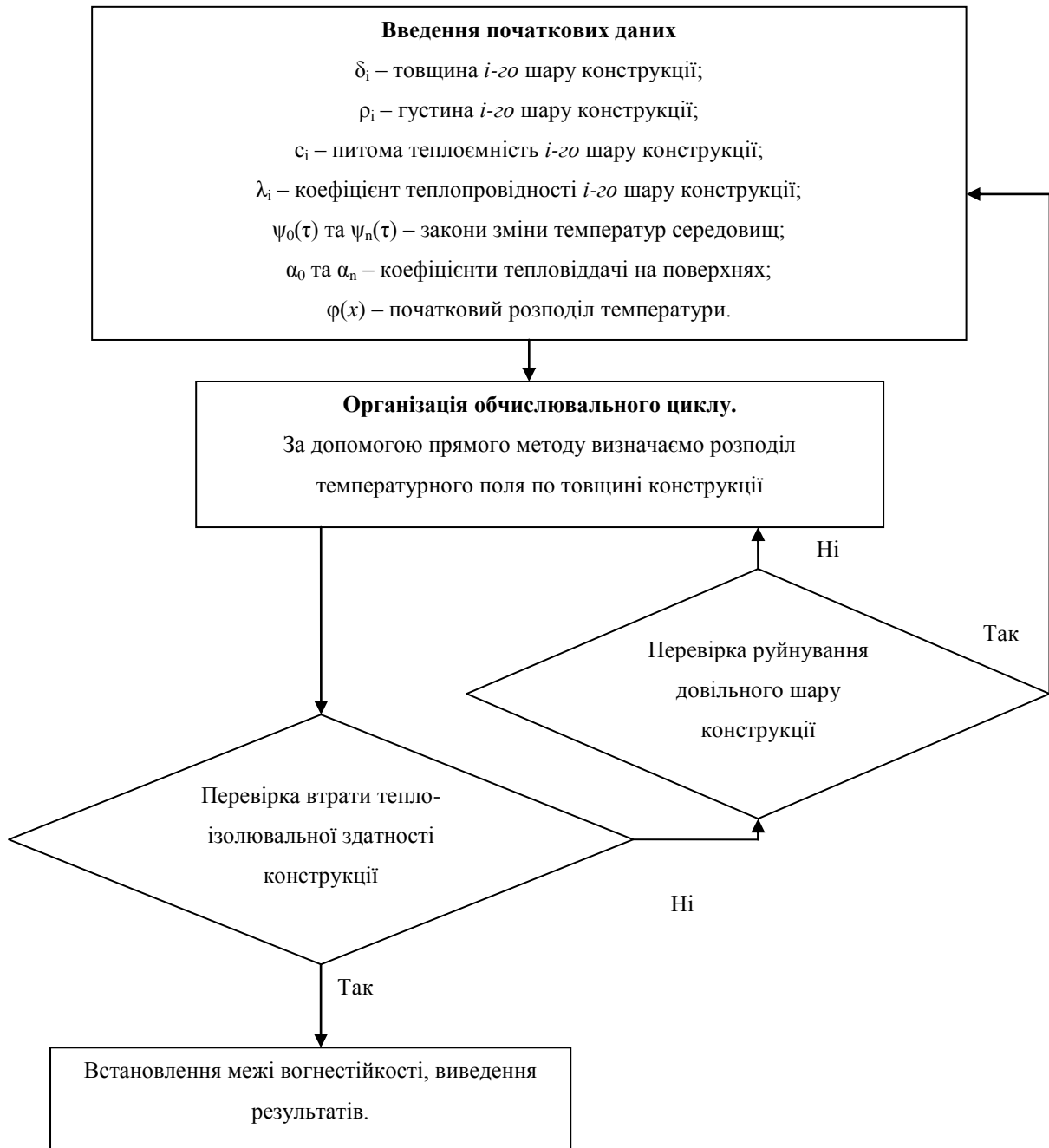


Рисунок 3.10 – Алгоритм обчислення втрати теплоізолювальної здатності з урахуванням руйнування довільного шару

1. Першим етапом даної методики є введення початкових даних. На рис. 3.11 подано сторінку введення початкових даних.

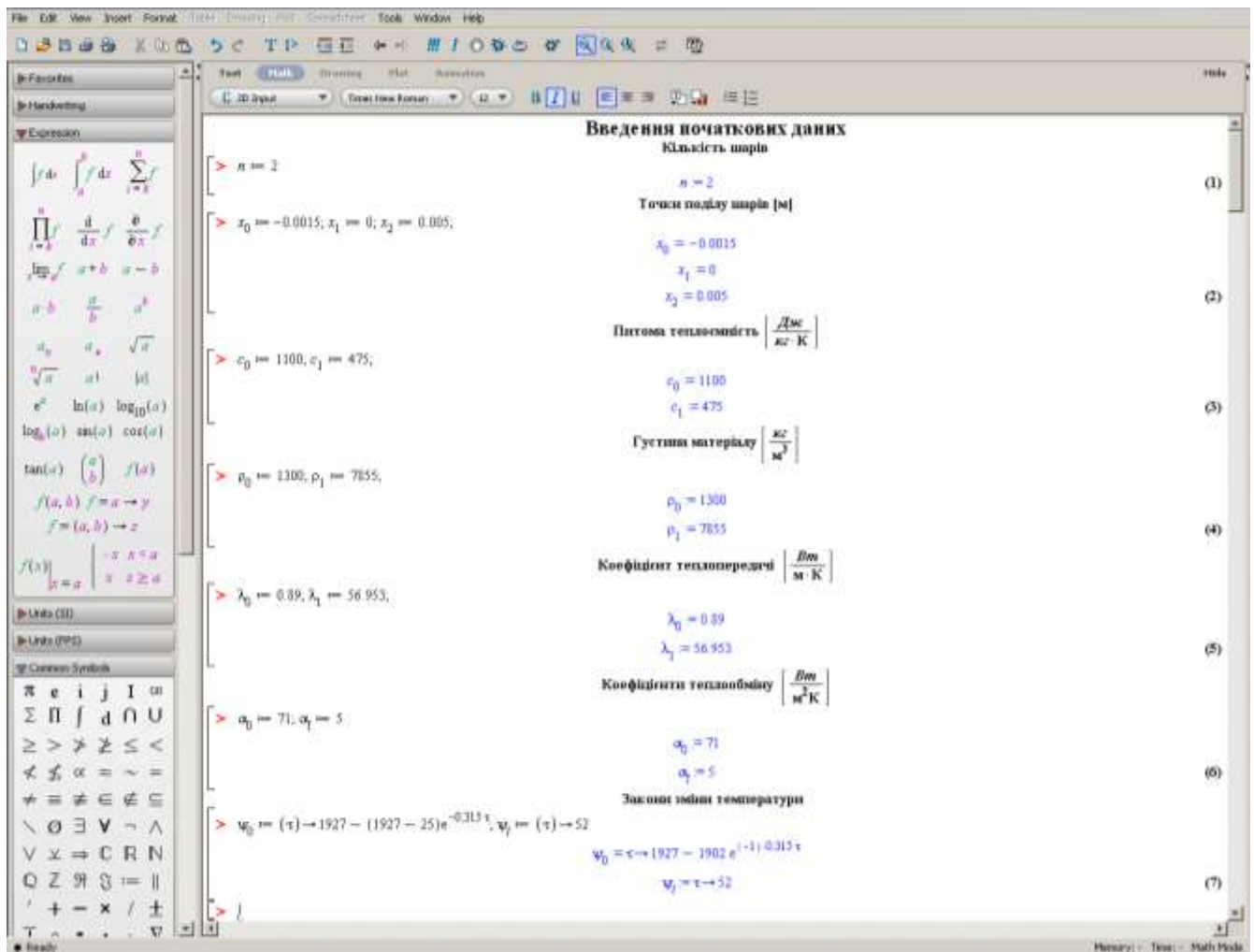


Рисунок 3.11 – Сторінка введення початкових даних

2. Наступним кроком є розрахунок поширення нестационарного температурного поля багатшарової плоскої конструкції за допомогою ЕОМ, який подано у вигляді формули

$$t_{x,\tau} = \frac{\alpha_0 \alpha_n}{\Delta} \left(\psi_0 \tau \sigma_n + \frac{\psi_n \tau}{\alpha_0} + \frac{\psi_0 \tau}{\alpha_n} + (\psi_n \tau - \psi_0 \tau) \left(\frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i \right) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k (\tau-s)} u_k s ds \right] \cdot X_k(x, \omega_k) \quad (3.27)$$

3. З заданим інтервалом часу, наприклад 1 хв., оператор перевіряє два основних показника розподілу нестационарного температурного поля по товщині багат шарової конструкції, а саме:

- втрата теплоізолювальної здатності конструкції;
- руйнування довільного шару конструкції;

Така процедура відбувається до появи одного з вище наведених показників.

4.1. Якщо конструкція не втратила своєї теплоізолювальної здатності, а вплив температури призвів до руйнування довільного шару конструкції, розрахунки припиняються, та фіксується час τ_0 . Далі ставиться нова задача розрахунку розподілу нестационарного температурного поля багат шарової конструкції без врахування зруйнованого шару (групи шарів). Вводяться початкові дані, до закону зміни температури середовища ($\psi_0(\tau)$ та $\psi_n(\tau)$) додається час τ_0 . Початковий розподіл температурного поля задається у вигляді функції розподілу температурного поля який існував у момент часу τ_0 . Знову відбувається розрахунок і оператор знову перевіряє показники втрати теплоізолювальної здатності та руйнування довільного шару конструкції. Якщо ж вплив температури знову призвів до руйнування довільного шару (групи шарів) конструкції, то розрахунки припиняються та фіксується час τ_1 . Така процедура продовжується до втрати теплоізолювальної здатності конструкції. Загальним часом втрати теплоізолювальної здатності є сума всіх фіксованих значень часу, тобто $\tau = \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_n$, де τ_n час втрати теплоізолювальної здатності.

4.2. Якщо ж відбувається втрата теплоізолювальної здатності багат шарової конструкції без руйнування довільного шару (групи шарів), розрахунок припиняється.

5. Результати розрахунку виводяться у вигляді явних формул розподілу нестационарного температурного поля для кожного з шарів конструкції. За допомогою даних формул результат можна вивести у вигляді табличних даних, графічних залежностей (об'ємних графіків, анімацій, тощо) зміни температури

по товщині конструкції в залежності від часу.

3.4 Дослідження теплоізолювальної здатності багатошарової плоскій конструкції з урахуванням руйнування довільного шару за умов пожежі

Розглядається багатошарова плоска стінка, яка складається з 4-х шарів, вапняної штукатурки товщиною 3см, пінопласту товщиною 5см, цегляної кладки товщиною 6,5см, і вапняної штукатурки товщиною 3см.

Теплофізичні характеристики матеріалів: вапняна штукатурка – коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, питома теплоємність – $c = 837 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, густина – $\rho = 1600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; цегляна кладка – коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,455 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, питома теплоємність – $c = 840 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, густина – $\rho = 1580 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; пінопласт – коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,041 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, питома теплоємність – $c = 1340 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, густина – $\rho = 100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

В початковий момент часу $\tau = 0$ температура стінки постійна і дорівнює $t_0 = 25^\circ \text{C}$.

Одна з зовнішніх поверхонь нагрівається шляхом конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого змінюється за законом стандартного температурного режиму [6]

$$t_c \tau = 345 \lg 8\tau + 1 + 25 \quad (3.28)$$

Коефіцієнт теплообміну між стінкою і навколишнім середовищем при стандартному температурному режимі становить $\alpha_0 = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}$ [6].

На протилежній поверхні температура навколишнього середовища постійна, і становить $t_n \tau = 25^\circ \text{C}$. Коефіцієнт теплообміну між стінкою і навколишнім середовищем становить $\alpha_0 = 4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}$ [6].

Необхідно визначити розподіл нестационарного температурного поля по товщині цієї стінки і знайти час, за який температура поверхні, що не обігрівається досягне 180°C (критична температура втрати теплоізолювальної здатності) [35].

Оскільки другий шар стінки складається з пінопласту, то існує загроза його руйнації, коли температура на межі першого і другого шару підніметься близько 100°C . Тому проведемо два різні розрахунки розподілу нестационарного температурного поля (без урахування руйнування шару пінопласту та з урахуванням руйнування шару пінопласту і як наслідок шару штукатурки).

Використавши запропонований прямий метод розподілу нестационарного температурного поля по товщині конструкції без урахування руйнування шару пінопласту, отримаємо рішення даної задачі у вигляді графіків, що представлені на рис. 3.12 та рис. 3.13.

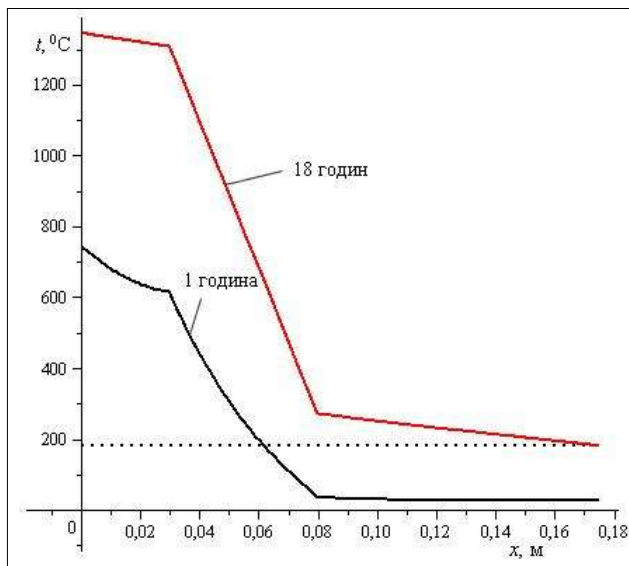


Рисунок 3.12 – Розподіл температурного поля по товщині чотиришарової плоскої конструкції (без врахування руйнування шару пінопласту)

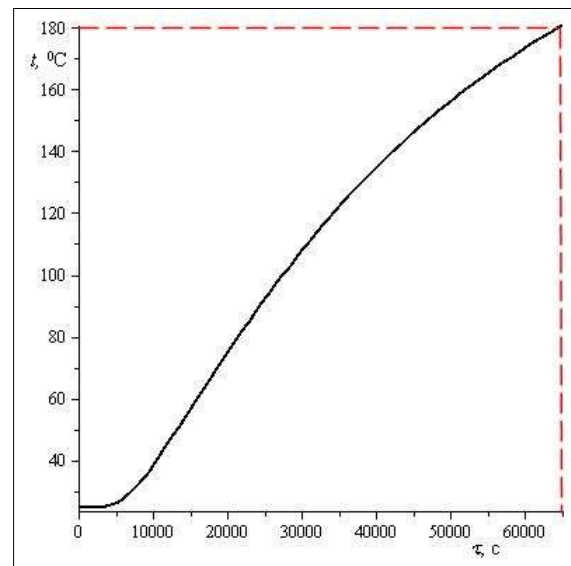


Рисунок 3.13 – Графік зміни температури зі сторони поверхні, що не обігрівається (без врахування руйнування шару пінопласту)

Як видно з рис. 3.12 і рис. 3.13 чотиришарова конструкція прогріється до критичної температури 180°C за 18 годин.

Дослідимо тепер поширення нестационарного температурного поля по товщині конструкції з урахуванням руйнування другого шару.

Проводячи відповідні розрахунок зміни температури між першим і другим шаром конструкції (точка $x=0,03$) отримаємо залежність зміни температури від часу рис. 3.14.

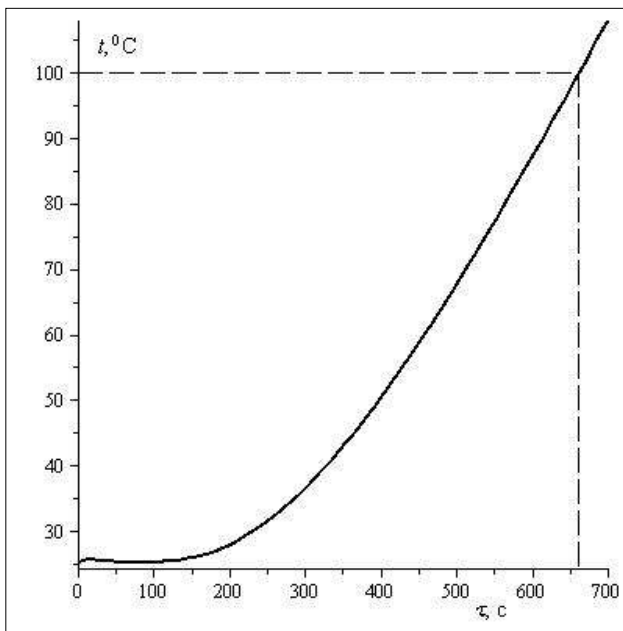


Рисунок 3.14 – Графік зміни температури на границі першого і другого шару

З рис. 3.14 очевидно, що другий шар (пінопласту), руйнується через 11 хвилин після початку горіння внаслідок його плавлення. Оскільки руйнується другий шар, то і шар штукатурки, яка тримається на пінопласті, теж руйнується. Далі продовжуємо розрахунок при наявності двошарової стінки, для якої необхідно знайти час втрати теплоізолювальної здатності (температура на поверхні, що не обігривається повинна досягти 180°C). При цьому початковий розподіл температури уздовж двошарової стінки матиме вигляд (рис. 3.15).

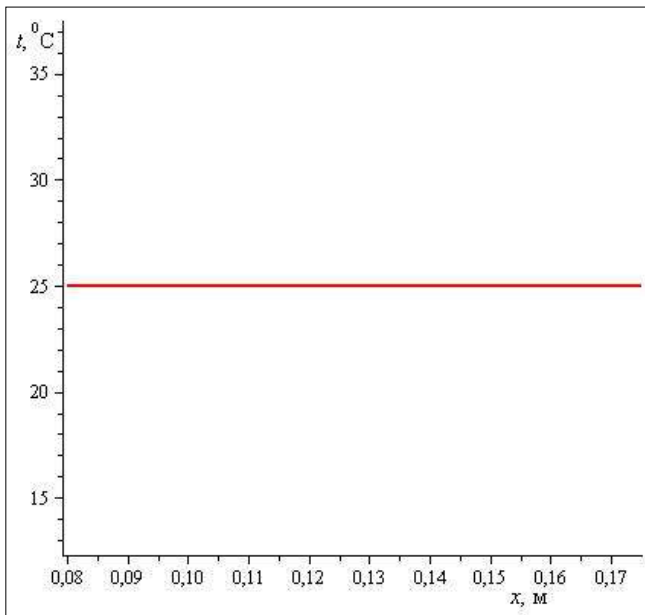


Рисунок 3.15 – Розподіл температурного поля після руйнування шару пінопласту

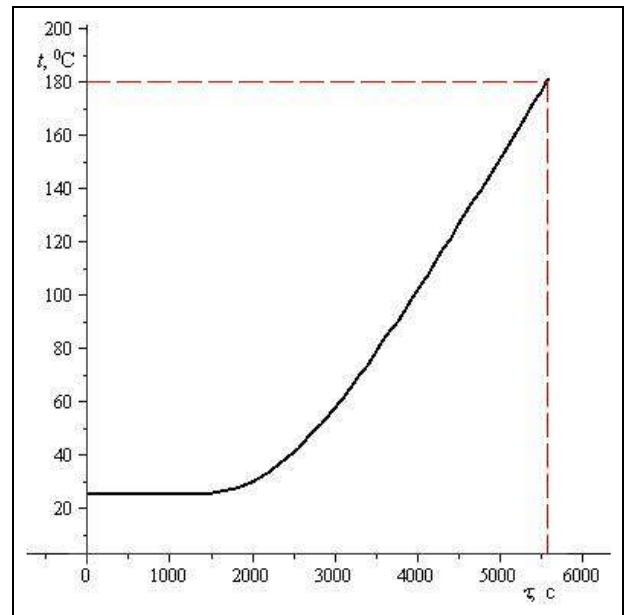


Рисунок 3.16 – Графік зміни температури зі сторони поверхні, що не обігривається (з урахуванням руйнування шару пінопласту)

Закон зміни температури між навколишнім середовищем і стінкою набуде вигляду

$$t_c \tau = 345 \lg (8\tau + 11) + 1 + 25 \quad (3.29)$$

Рішення задачі після руйнування шару пінопласту з урахуванням часу до руйнування відобразимо у вигляді графічної залежності рис. 3.16.

Аналізуючи рис. 3.13 і рис. 3.16 можна зробити висновок, що врахування того фактора, як можливість руйнування одного з шарів, дуже важливий. Реальний час втрати теплоізолювальної здатності з 18 годин знижується до 94 хвилин.

3.5 Висновки до розділу

1. На основі мови програмування Maple 13 побудовано алгоритм знаходження розподілу температури та густини теплового потоку в

багатошарових плоских конструкціях у вигляді явних аналітичних виразів, таблиць, об'ємних графіків та анімацій. Апробація методу проводилась шляхом порівняння числових результатів з відомими, але отриманими іншим (операційним) методом.

2. В даному розділі, налагодження алгоритму (числовий експеримент) проілюстровано шляхом розв'язування модельної задачі про визначення розподілу нестационарного температурного поля двошарової плоскої стінки з різними геометричними та теплофізичними характеристиками шарів. Така задача вже була розв'язана методом інтегрального перетворення Лапласа.

3. Застосування нового методу дало наступні результати:

– числові значення температури по товщині конструкції в залежності від часу, з заданою точністю, співпали з відомими результатами (всього 80 значень);

– аналітичні вирази для визначення температури у кожному з шарів (з точністю до тотожних перетворень) ідентичні.

4. Крім цього, можливості запропонованого алгоритму проілюстровано наступним чином:

– побудована таблиця значень густини теплового потоку;

– побудовані об'ємні графіки розподілів температурного поля та густини теплового потоку;

– побудовано анімації температури та густини теплового потоку.

5. Викладені матеріали дають можливість стверджувати, що запропонований алгоритм є відлагодженим, та може використовуватись як альтернативний, для розв'язування прикладних задач.

РОЗДІЛ 4. РЕЗУЛЬТАТИ АНАЛІТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БАГАТОШАРОВИХ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЯХ ЗА УМОВ ПОЖЕЖІ

4.1 Дослідження вогнезахисних властивостей спучуючих покриттів в залежності від їх товщини та зміни теплофізичних характеристик

Для дослідження впливу теплофізичних та геометричних (товщина сухого шару) характеристик вогнезахисних покриттів на вогнестійкість бетонних конструкцій розглянемо бетонну плиту, захищену вогнезахисним покриттям, що вспучується [41].

Для дослідження розподілу температурного поля по товщині бетонної плити (на глибині 20 мм – очікуване місце знаходження несучої арматури в залізобетонних плитах), захищеної вогнезахисним покриттям Polylack-A виробництва угорської фірми “Dunamenti Tűzvédelem Zrt”, змодельємо її у вигляді двошарової конструкції з товщинами вогнезахисного покриття 1 мм, 1,5 мм та 2 мм. Температура на правому кінці стінки змінюється по стандартному температурному режимі пожежі. Розглянемо дві стадії процесу нагріву бетонної конструкції з вогнезахистом: до спучення і після спучення вогнезахисного покриття [83].

Вихідні дані для дослідження двошарової бетонної конструкції наведено в табл. 4.1 [43, 83].

Таблиця 4.1

Вихідні дані для дослідження двошарової бетонної конструкції

Параметр	Вогнезахисна фарба Polylack-A	Бетонна плита
Товщина Δ , м	0,0015	0,06
Коефіцієнт теплопровідності λ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	0,5	1,92

продовження таблиці 4.1

Питома теплоємність $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	1100	840
Густина $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	1340	2500
Початковий розподіл температури φx	25	25
Закони зміни температур	$\psi_0 \tau = 3451g \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 25$ $\psi_n \tau = 25$	
Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $\alpha, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$	$\alpha_0 = 25$ $\alpha_n = 4$	

У працях [23, 108] зазначено, що при інтенсивному нагріванні вогнезахисне покриття спучується в інтервалі 250...500 °С внаслідок чого його теплофізичні характеристики і геометричні розміри змінюються. Зокрема, товщина покриття під час спучення збільшується в 10-15 разів, а теплопровідність і густина зменшуються в декілька разів. Це призводить до зменшення інтенсивності нагрівання конструкції.

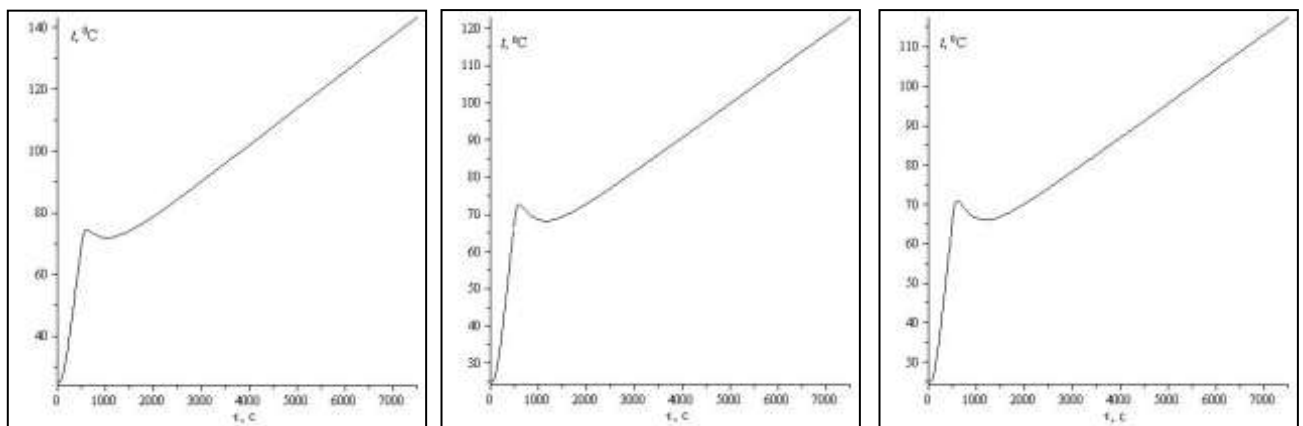
Стадія до спучення. Для дослідження розподілу нестационарного температурного поля по товщині двошарової конструкції використаємо запропонований прямий метод. Провівши відповідні розрахунки в програмному забезпеченні Maple 13 встановлено, що час спучення вогнезахисного покриття PolyLack-A становить 8 хв.

Стадія після спучення. Під час другої стадії теплофізичні характеристики і геометричні розміри покриття приймалися сталими. Товщини покриття після спучування представлені в табл. 4.2.

Геометричні розміри вогнезахисних покриттів до і після спучення

№з/п	Назва вогнезахисного покриття		Коефіцієнт спучення
	“Polylack-A”, мм		
	до спучення	після спучення	
1.	1	15	×15
2.	1,5	21	×14
3.	2	25	×12,5

Провівши відповідні дослідження, отримуємо графік зміни температури в бетонній конструкції в залежності від часу нагрівання на глибині 20 мм (рис. 4.1).



а)

б)

в)

Рисунок 4.1 – Графік зміни температури в залежності від часу з нанесеним вогнезахисним покриттям Polylack-A товщиною:

а) – 1 мм; б) – 1,5 мм; в) – 2 мм

Аналіз графічної залежностей, що представлена на рис. 4.1 показує, що за 125 хв. бетонна конструкція прогрівається, при товщині вогнезахисного покриття 1 мм «Polylack-A» до 141 °С; 1,5 мм «Polylack-A» до 121 °С, 2 мм «Polylack-A» до 115 °С.

4.2 Дослідження температурних полів сталевих несучих конструкцій

4.2.1 Дослідження температурних полів незахищених сталевих несучих конструкцій

Розглянемо сталеву несучу конструкцію на яку діє температура факела полум'я горіння воднево-оливної суміші, яка коливається в межах від 1527°C [78] залежно від концентрації водню в повітрі (як приклад, розглядається можливий сценарій розвитку пожежі в машинному залі електростанції). Тривалість аварійного витікання (горіння) струменя водню приймемо 3 хв.[77], після чого настає аварійне витікання турбінної оливи і температурний режим коливатиметься в межах 1027°C . Враховуючи, що температура факела полум'я дорівнює 1527°C і досягається за 15-20 с, температурний режим горіння водню математично змодельовано у вигляді [82, 83]

$$\begin{aligned} t_{\text{пож.}}(\tau) &= 1527 - (1527 - t_0)e^{-0,315\tau}, \tau = 0..180 \\ t_{\text{пож.}}(\tau) &= 1027, \tau > 180 \end{aligned} \quad (4.1)$$

де τ – тривалість пожежі, с; t_0 – початкова температура середовища, $^{\circ}\text{C}$.

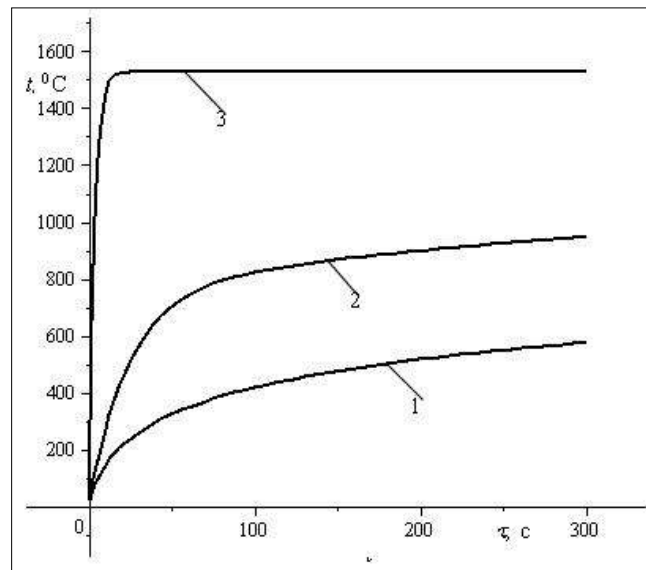


Рисунок 4.2 – Температурні режими пожежі:

- 1 – “стандартний температурний режим пожежі”; 2 – “температурний режим вуглеводневої пожежі”; 3 – “температурний режим водневої пожежі”

На рис. 4.2 зіставлені стандартизовані температурні режими пожежі з температурним режимом горіння водню.

З рис. 4.2 видно, що стандартизовані температурні режими (криві 1-2), які використовують при дослідженні вогнестійкості будівельних конструкцій, мають значно менші максимальні температури і значно менший градієнт зростання температури від можливих реальних пожеж у машинних залах електростанцій (крива 3) [44, 66].

Знаючи закон зміни температури за умов температурного режиму пожежі, дослідимо розподіл температурного поля по товщині плоскої сталевій конструкції, яку при аналітичних дослідженнях змодельюємо пластиною [103].

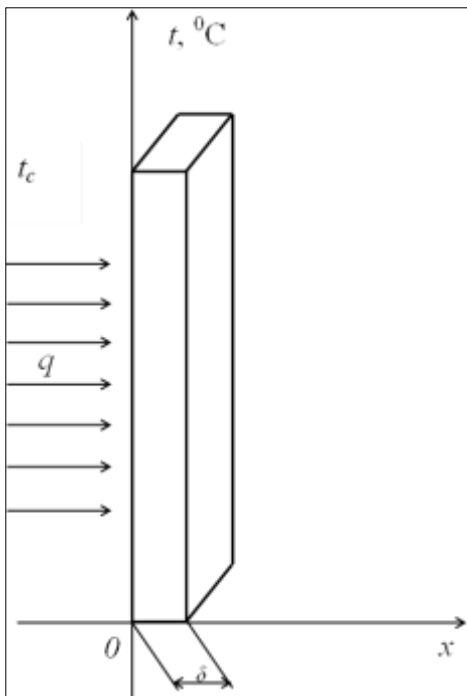


Рисунок 4.3 – Схематичне зображення плоскої конструкції

Початкова температура конструкції дорівнює t_0 . З деякого часу, який приймемо за початок відліку $\tau = 0$, конструкція міститься у середовищі, температура якого змінюється за законом (4.1). Необхідно визначити розподіл температури по товщині пластини в будь-який момент часу.

Початок координат системи xOt розмістимо на лівій стінці пластини. Вісь x лежить у площині перерізу пластини і перпендикулярна до площини стінки конструкції (рис. 4.3).

Для визначення температурного поля по товщині конструкції маємо диференціальне рівняння теплопровідності [24, 38, 49] та умови теплообміну між пожежею та поверхнею конструкції, що змінюються за законом Ньютона-Ріхмана [37, 69]

$$c\rho \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (\tau > 0), \quad (4.2)$$

початкова умова

$$t(x, 0) = t_0 = \text{const}; \quad (4.3)$$

граничні умови

$$\begin{cases} \alpha_0 t(0, \tau) - \lambda \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = \alpha_0 \psi_0 \tau, \\ \alpha_n t(x_n, \tau) - \lambda \frac{\partial t(x_n, \tau)}{\partial x} = \alpha_n \psi_n \tau, \end{cases} \quad (4.4)$$

де, α_0, α_n – коефіцієнт теплообміну, Вт/(м²·К); τ – час, с; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); $\psi_0(\tau), \psi_n(\tau)$ – закон зміни температури на поверхнях пластини

$$\begin{aligned} \psi_0(\tau) = \psi_n(\tau) &= 1527 - (1527 - t_0)e^{-0.315\tau}, \tau = 0..180, \\ \psi_0(\tau) &= 1027, \tau > 180. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Коефіцієнт теплообміну α_0 та α_n визначається формулою [6]

$$\alpha_0 = \alpha_n = \alpha_{\text{конв.}} + \alpha_{\text{пром.}}, \quad (4.6)$$

$\alpha_{\text{конв.}} = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$, а $\alpha_{\text{пром.}}$ визначається формулою

$$\alpha_{\text{пром.}} = \frac{q_{\text{пром.}}}{t_{\text{сер.}} - t_m}, \quad (4.7)$$

тут, $t_{\text{сер.}}$ – температура середовища; t_m – температура поверхні тіла; $q_{\text{пром.}}$ – густина теплових потоків за умов променевого теплообміну. $\alpha_{\text{пром.}}$ коливається

в межах $31 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$ (при температурі тіла 25°C) до $45 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$ (при температурі тіла 500°C).

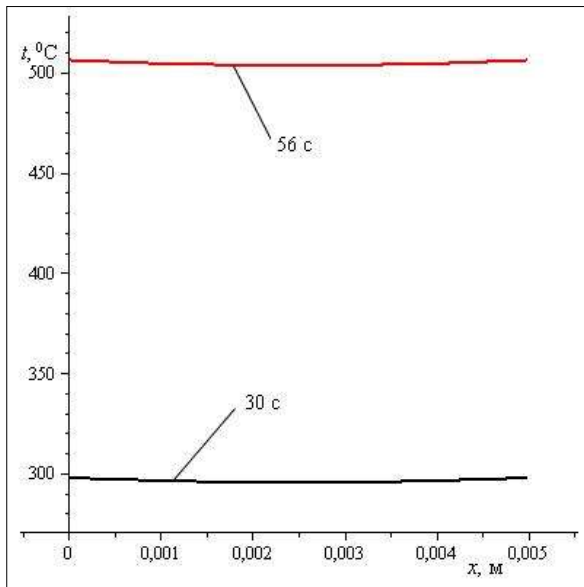
Застосувавши прямий метод розрахунку нестационарного температурного поля у вигляді формули (2.56) одержимо рішення задачі у вигляді

$$t_{x,\tau} = \frac{\alpha_0 \alpha_n}{\Delta} \left(\psi_0 \tau \sigma_n + \frac{\psi_n \tau}{\alpha_0} + \frac{\psi_0 \tau}{\alpha_n} + (\psi_n \tau - \psi_0 \tau) \left(\frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i \right) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k \tau - s} u_k s ds \right] \cdot X_k(x, \omega_k). \quad (4.8)$$

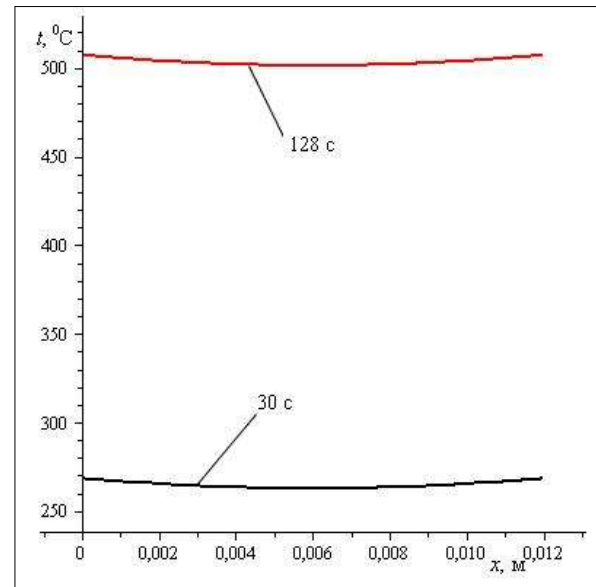
При дослідженні дії високих температур факела пожежі на несучі сталеві конструкції розглянемо окремо деякі несучі сталеві конструкції машинних залів електростанцій.

Сталеві несучі колони та кроквяні ферми перекриття машинних залів електростанцій можуть бути виконаними у формі двотаврів, кутників або балок. Приведені товщини відповідних елементів до пластини можуть мати товщину 5 мм, 9 мм 20 мм та 32 мм (для прикладу розглянуто елементи сталевих несучі колони та кроквяних ферм машинного залу №1 Запорізької атомної електростанції):

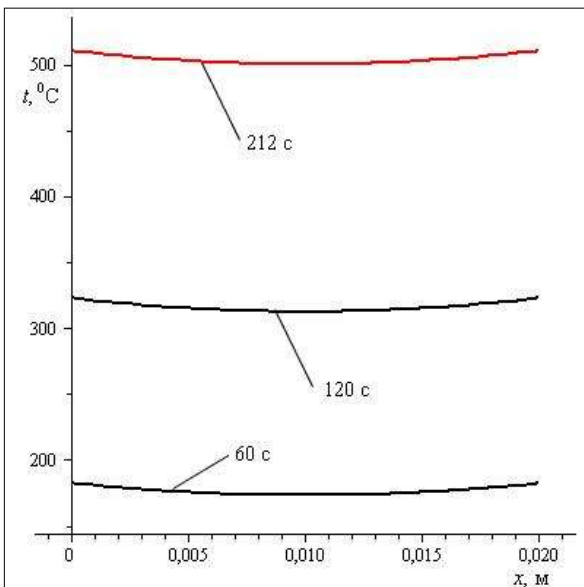
За формулою (4.8) проведені дослідження температурного поля по товщині сталевій пластини. Початкова температура конструкції прийнята $t_0 = 25^\circ\text{C}$. Дослідження проводились для температури середовища, яка змінюється за законом (4.5) з інтенсивним теплообміном між факелом полум'я та конструкцією в межах від $71 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$, до $84 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$. Результати чисельного експерименту зображені графічно на рис. 4.4.



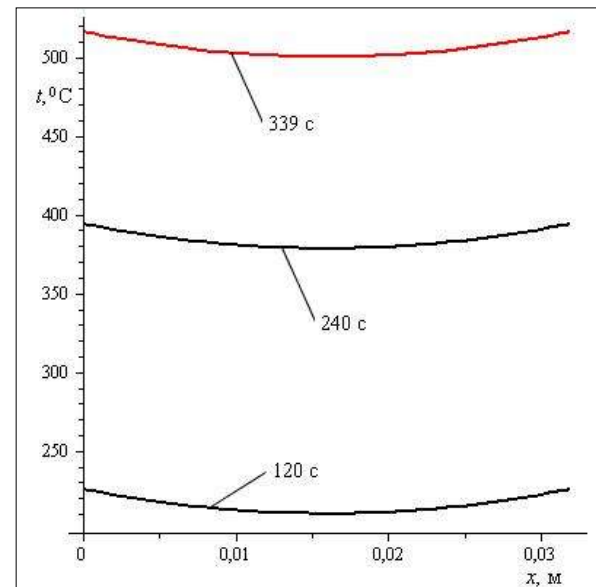
а)



б)



в)



г)

Рисунок 4.4 – Розподіл температурного поля по товщині незахищеної сталевій пластини:

а) 10,5 мм; б) 16 мм; в) 20 мм; г) 32 мм.

Аналіз рис. 4.4 показує, що елементи незахищених сталевих несучих конструкцій різної товщини (від 5 мм до 32 мм) прогріються до критичної температури 500⁰С за:

- сталева пластина товщиною 5 мм – 56 с;
- сталева пластина товщиною 16 мм – 128 с;

- сталевая пластина товщиною 20 мм – 212 с;
- сталевая пластина товщиною 32 мм – 339 с.

4.2.2 Дослідження температурних полів захищених сталевих несучих конструкцій

З досліджень розподілу температурного поля по товщині сталевих конструкцій машинних залів електростанцій видно, що вогнестійкість конструкцій за умов пожежі (горіння воднево-оливної суміші та турбінної оливи) втрачається за 1-6 хв. залежно від величини аварійного отвору, умов теплообміну та виду горючого середовища (водень, олива). Для підвищення вогнестійкості цих конструкцій їх необхідно покривати вогнезахисними покриттями, що спучуються.

За інформацією виробників вогнезахисних покриттів протягом останніх 20 років на АЕС України для вогнезахисту несучих сталевих конструкцій машинних залів були застосовані поліфосфатні речовини “Фламмопласт” і “Унітерм” (Німеччина), “Протермстіл” (Росія), засіб на сольвентній основі “Polylack-A” (Угорщина), “Interchar 963” (Швеція), який було випробувано у Великобританії в умовах вуглеводневої пожежі, та засіб на основі графіту “Ендотерм ХТ-150” (Україна). Всі ці засоби використовувалися на підставі даних сертифікаційних випробувань в умовах стандартного температурного режиму пожежі (максимальна температура – 1247 °С) . Оскільки час вільного витікання водню з корпусу турбогенератора під час аварійної ситуації може становити близько 3 хв. і температура полум'я факела сягає 1527 °С, то ефективність проведених вогнезахисних заходів викликає сумніви [28, 29].

Тобто необхідно дослідити вплив теплофізичних та геометричних характеристик цих покриттів за умов горіння воднево-оливної суміші та турбінної оливи.

Для дослідження впливу теплофізичних та геометричних (товщина сухого шару) характеристик вогнезахисних покриттів на вогнестійкість несучих сталевих конструкцій розглянемо сталеву конструкцію (несучу

колону та елементи кроквяних ферм перекриття), захищену вогнезахисним покриттям, що спучується “Pyro-Safe Flammoplast SP-A2” (виробництва “Svt. Brandschutz”, Німеччина).

Для дослідження розподілу температурного поля по товщині сталевій конструкції, захищеної вогнезахисним покриттям, змодельємо її у вигляді двошарової конструкції з товщиною вогнезахисного покриття 0,8-1,5 мм. На конструкцію діє тепловий потік факела полум'я. Розглянемо дві стадії процесу нагріву сталевій конструкції з вогнезахистом: до спучення (рис. 4.5 а) і після спучення (рис. 4.5 б) вогнезахисного покриття. Відомо, що при інтенсивному нагріванні ($T=1527\text{ }^{\circ}\text{C}$) покриття спучується в інтервалі $250\dots500\text{ }^{\circ}\text{C}$ внаслідок чого його ТФХ і геометричні розміри змінюються. Зокрема, товщина покриття під час спучення збільшується в 10-15 разів, а теплопровідність і густина зменшуються в декілька разів. Це призводить до зменшення інтенсивності нагрівання СК. Врахуємо також цей факт, що час аварійного горіння водню складає 3 хв., після чого відбувається горіння турбінної оливи і температура факелу полум'я знижується з $1527\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $1027\text{ }^{\circ}\text{C}$.

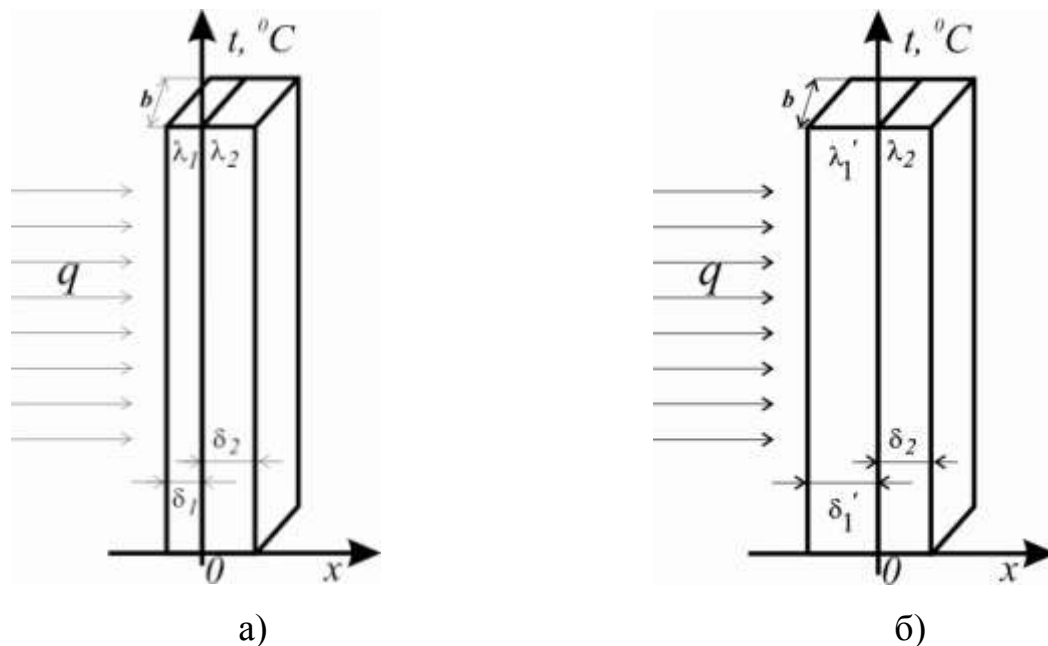


Рисунок 4.5 – Схематичне зображення СК з вогнезахистом:

а) до спучення вогнезахисної фарби; б) після спучення вогнезахисної фарби

Для дослідження розподілу нестационарного температурного поля по товщині двошарової конструкції використаємо диференціальне рівняння теплопровідності (4.2) з початковою та граничними умовами

$$c\rho \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (\tau > 0), \quad (4.9)$$

початкова умова

$$t(x, 0) = t_0 = const, \quad (4.10)$$

граничні умови

$$\begin{cases} \alpha_0 t(0, \tau) - \lambda \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = \alpha_0 \psi_0 \tau, \\ \alpha_n t(x_n, \tau) - \lambda \frac{\partial t(x_n, \tau)}{\partial x} = \alpha_n \psi_n \tau, \end{cases} \quad (4.11)$$

Застосувавши прямий метод розрахунку нестационарного температурного поля одержимо рішення задачі у вигляді (4.6).

$$t(x, \tau) = \frac{\alpha_0 \alpha_n}{\Delta} \left(\psi_0 \tau \sigma_n + \frac{\psi_n \tau}{\alpha_0} + \frac{\psi_0 \tau}{\alpha_n} + (\psi_n \tau - \psi_0 \tau) \left(\frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i \right) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k (\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot X_k(x, \omega_k) \quad (4.12)$$

Одержаний вираз дає можливість дослідити вогнестійкість сталеві конструкції, захищеної вогнезахисним покриттям, враховуючи зміну теплофізичних характеристик та геометричних розмірів, оцінити ефективність вогнезахисної фарби “Pyro-Safe Flammoplast SP-A2”, яка

нанесена за елементах сталевих конструкцій.

Оскільки товщина вогнезахисного покриття після спучення значно збільшується, а теплофізичні характеристики (теплопровідність і густина) зменшуються, то інтенсивність нагрівання сталеві конструкції зменшується [109-114]. Тому дослідження проводились у дві стадії:

- 1) система «конструкція-покриття» до вспучення (рис. 4.5 а);
- 2) система «конструкція-покриття» після вспучення (рис. 4.5 б);

Дослідження проводились для сталеві конструкції, захищеної вогнезахисними покриттями “Pyro-Safe Flammoplast SP-A2” товщиною 5 мм, 9 мм, 20 мм, та 32 мм

Технічні та фізико-хімічні характеристики вогнезахисного покриття “Pyro-Safe Flammoplast SP-A2”:

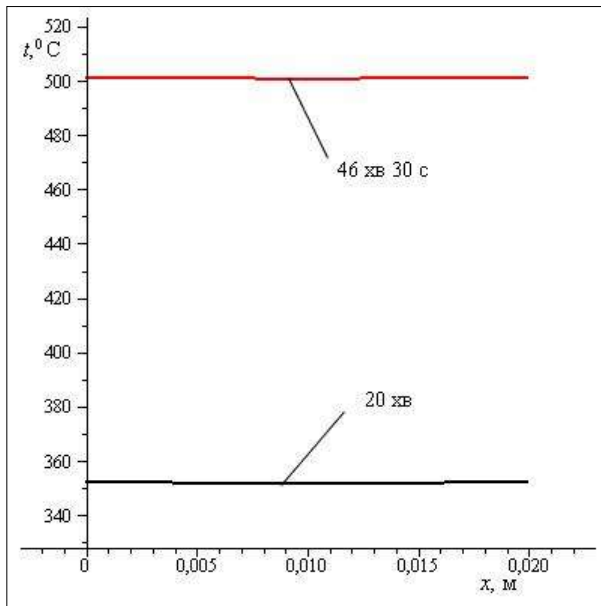
- водяниста дисперсія органічних та неорганічних наповнювачів, не містить розчинників;
- колір – сірий;
- густина 1,2...1,3 г/см³, при температурі +20⁰С;
- в'язкість 4000...9000 МПа, при температурі +20⁰С;
- водневий показник (рН) – 8,0...8,6;
- запах – в вологому стані – практично без запаху, в сухому - без запаху;
- токсичність – матеріал не токсичний, вміщає незначну кількість фосфатів;
- термін повного висихання матеріалу при +23⁰С та відносній вологості повітря 60% ± 3%:
 - ✓ пил не липне після 5 годин;
 - ✓ придатність до нанесення чергового шару матеріалу – після 8 годин;
 - ✓ придатність до нанесення захисного лаку – через 5 діб після нанесення останнього шару матеріалу;
- розчинення матеріалу – питною водою;

- температура при нанесенні та висиханні матеріалу в приміщенні та на захищає мій поверхні повинна бути не нижче $+5^{\circ}\text{C}$, та відносні вологості повітря нижче 85%;
- вплив оточуючого середовища – після висихання покриття не гігроскопічне, може застосовуватись без додаткового захисного покриття;
- точка займання – відсутня, так як матеріал – водна дисперсія;
- температура спучування покриття – більше 250°C ;
- продукти термодеструкції покриття – вода, вуглекислий газ, незначна кількість аміаку;
- коефіцієнт спучування покриття – 15.

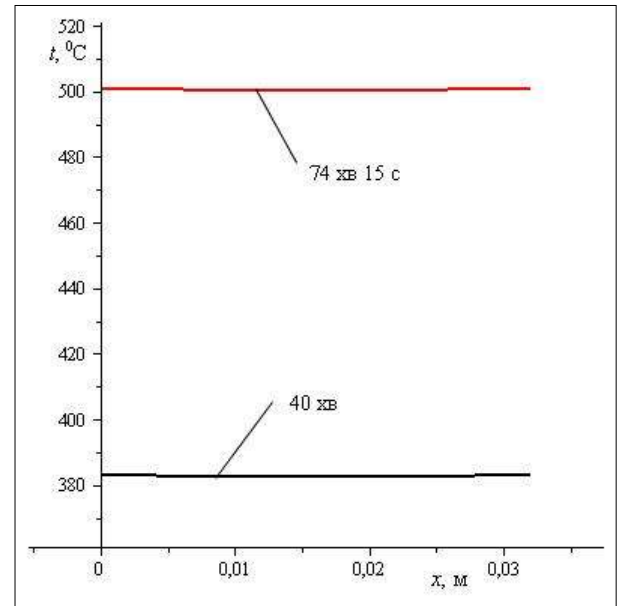
Під час першої стадії при інтенсивному нагріванні (температура факела – 1527°C) покриття спучується в інтервалі 25-100 с, внаслідок чого його ТФХ і геометричні розміри за цей час змінюються. Так, при спученні товщина покриття збільшується в 10-15 разів.

За формулою (4.12) проведені дослідження розподілу температурного поля по товщині сталевій конструкції, захищеної вогнезахисним покриттям, що спучується.

Результати чисельного експерименту дослідження розподілу нестационарного температурного поля по товщині конструкції, захищеної вогнезахисним покриттям для сталевій конструкції зображені графічно на рис. 4.6 та рис. 4.7



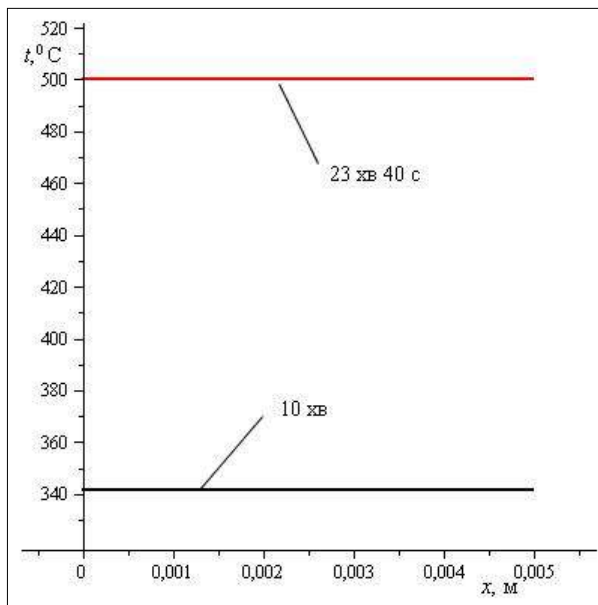
а)



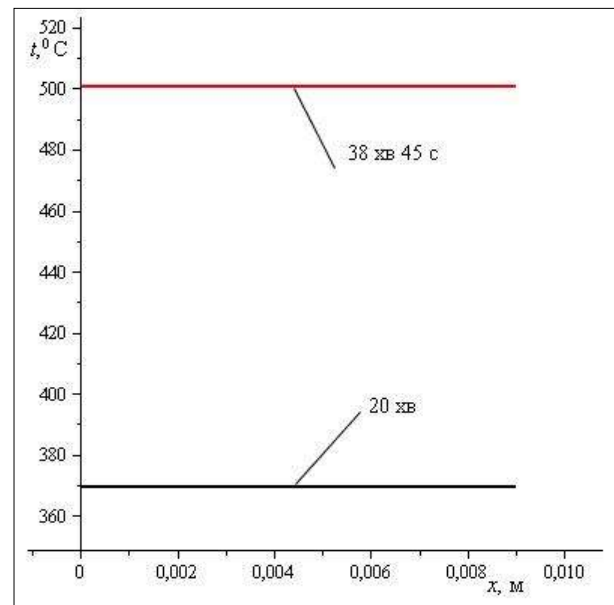
б)

Рисунок 4.6 – Розподіл температурного поля по товщині сталевій колони, захищеної вогнезахисним покриттям товщиною 0,8 мм:

а) 20 мм; б) 32 мм;



а)



б)

Рисунок 4.7 – Розподіл температурного поля по товщині кроквяної ферми, захищеної вогнезахисним покриттям товщиною 1,5 мм:

а) 5 мм; б) 9 мм;

Аналіз графічних залежностей представлених на рис. 4.6 та рис. 4.7 показує, що сталева конструкція захищена вогнезахисним покриттям “Pyro-Safe Flammoplast SP-A2” товщиною 0,8 мм прогрівається до критичної температури 500 °С:

- товщиною 20 мм за час 46 хв. 30 с;
- товщиною 32 мм за час 74 хв. 15 с.

Сталева конструкція захищена вогнезахисним покриттям “Pyro-Safe Flammoplast SP-A2” товщиною 1,5 мм прогрівається до критичної температури 500 °С:

- товщиною 5 мм за час 23 хв. 40 с;
- товщиною 9 мм за час 38 хв. 45 с.

На основі вищенаведених досліджень розподілу температурного поля по товщині сталевих конструкцій можна зробити наступні висновки:

Елементи сталевих конструкцій товщиною 20 мм та 32 мм, покриті вогнезахисним покриттям “Pyro-Safe Flammoplast SP-A2” товщиною 0,8 мм нагріваються до критичної температури 500 °С за 46 хв. 30 с та 74 хв. 15 с відповідно, що є більше нормованого часу 45 хв.

Елементи сталевих конструкцій товщиною 5 мм та 9 мм, покриті вогнезахисним покриттям “Pyro-Safe Flammoplast SP-A2” товщиною 1,5 мм нагріваються до критичної температури 500 °С за 23 хв. 40 с та 38 хв. 45 с відповідно.

4.3 Дослідження впливу внутрішніх джерел тепла на розподіл температурного поля в багатошаровій плоскій конструкції

Розглядається п'ятишарова плоска стінка «стеля-підлога» [99], яка складається з вапняно-піщаного розчину, залізобетонної плити перекриття, ніздрюватого бетону, цементно-піщаної стяжки з підігрівом та керамічної плитки. Рівняння теплопровідності для шарів має вигляд

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + q_v(x). \quad (4.12)$$

В початковий момент часу ($\tau=0$) розподіл температурного поля по товщині п'ятишарової стінки $f(x)$, відомий.

Вважається, що на зовнішніх поверхнях стінки існує конвекційний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються умови (4.4)

Необхідно знайти нестационарний розподіл температурного поля п'ятишарової плоскої стінки за умов: **I випадок** – з урахуванням джерела тепла в цементно-піщаній стяжці, **II випадок** – без урахування джерела тепла в цементно-піщаній стяжці, **III випадок** – з урахуванням джерела тепла та вологості бетону за масою $w = 3\%$ [43].

Вихідні дані для розрахунку нестационарного температурного поля п'ятишарової плоскої стінки наведено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Вихідні дані для розрахунку нестационарного температурного поля п'ятишарової плоскої стінки

Параметр	Вапняно-піщаний розчин	Залізо-бетонна плита перекриття	Ніздрюватий бетон	Цементно-піщана стяжка (з підігрівом)	Керамічна плитка
Товщина Δ , м	0,05	0,2	0,03	0,06	0,01
Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	0,76	I, II випадок $\lambda=1,92$ III випадок $\lambda=2,04$	0,09	0,7	0,96
Питома теплоємність $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	840	840	840	840	880
Густина $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	1800	2500	300	1600	1800

продовження таблиці 4.3

Внутрішнє джерело тепла $q_v, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$	0	0	0	I випадок $q_{v3}=0,$ II, III випадок $q_{v3}=200$	0
Закони зміни температур	$\psi_0 \tau = 345 \lg \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 10,$ $\psi_n \tau = 20.$				
Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $\alpha, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$	$\alpha_0 = 100, \alpha_n = 10$				

Розв'язок**I випадок**

Знайдемо початковий розподіл температурного поля по товщині стінки $f(x)$, за умов, що у початковий момент часу $\tau=0$, температура на лівій стороні становить 10°C , а на правій 20°C (рис. 4.8).

II випадок

Знайдемо тепер розподіл нестационарного температурного поля, без урахування внутрішнього джерела тепла. Початковий розподіл температурного поля по товщині стінки $f(x)$, за умов, що у початковий момент часу $\tau=0$, температура на лівій стороні становить 10°C , а на правій 20°C . (рис. 4.9).

III випадок

Знайдемо початковий розподіл температурного поля по товщині стінки $f(x)$, за умов, що у початковий момент часу $\tau=0$, температура на лівій стороні становить 10°C , а на правій 20°C . (рис. 4.10).

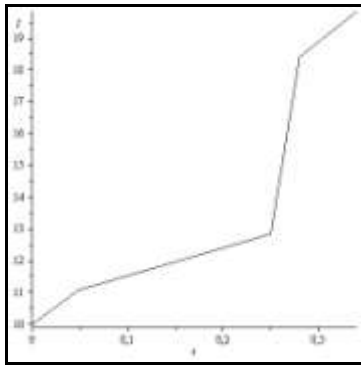


Рисунок 4.8 – Початковий розподіл температурного поля (випадок I)

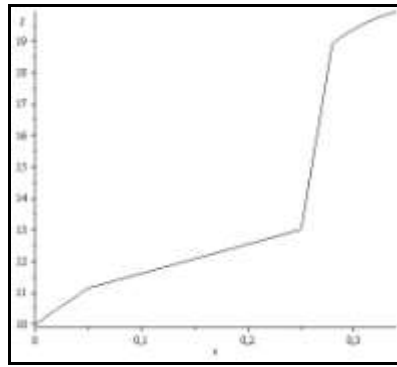


Рисунок 4.9 – Початковий розподіл температурного поля (випадок II)

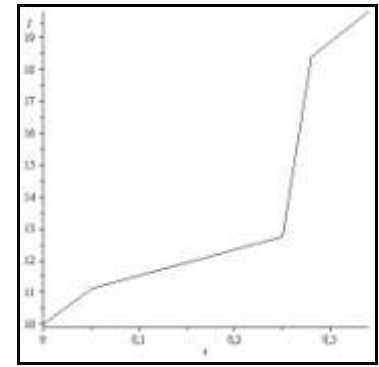


Рисунок 4.10 – Початковий розподіл температурного поля (випадок III)

Отримавши всі вихідні дані, та використавши комп'ютерне середовище Maple 13 отримуємо розв'язок даної задачі у вигляді табл. 4.4, 4.5 та графіків (рис. 4.11 – рис. 4.14). Для дослідження впливу внутрішніх джерел тепла на розподіл температурного поля багатошарової плоскої стінки проведемо порівняння результатів для I, II та III випадків.

Таблиця 4.4

Розподіл нестационарного температурного поля п'ятишарової плоскої стінки

(Примітка: t – I випадок, \underline{t} – II випадок, \mathbf{t} – III випадок)

час, хв.	координати шару, м									
	середовище	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	середовище
0	10	10	11.1	11.5	11.9	12.4	12.8	18.8	19.9	20
	<u>10</u>	<u>10</u>	<u>11.1</u>	<u>11.6</u>	<u>12</u>	<u>12.5</u>	<u>13</u>	<u>19.3</u>	<u>19.9</u>	<u>20</u>
	10	10	11.1	11.6	12	12.4	12.9	19.3	19.9	20
10	668	259	13.7	11.5	11.9	12.4	12.8	18.8	19.6	20
	<u>668</u>	<u>259</u>	<u>13.8</u>	<u>11.6</u>	<u>12</u>	<u>12.5</u>	<u>12.9</u>	<u>19.3</u>	<u>19.9</u>	<u>20</u>
	668	259	13.8	11.6	12	12.5	12.9	19.3	19.8	20
20	771	370	30.7	12.5	11.9	12.4	12.8	18.8	19.5	20
	<u>771</u>	<u>370</u>	<u>30.7</u>	<u>12.6</u>	<u>12.1</u>	<u>12.5</u>	<u>13</u>	<u>19.3</u>	<u>19.8</u>	<u>20</u>
	771	370	30.4	12.7	12	12.5	12.9	19.3	19.8	20
30	831	445	55.2	16.8	12.3	12.4	12.8	18.7	19.4	20
	<u>831</u>	<u>445</u>	<u>55.3</u>	<u>16.9</u>	<u>12.4</u>	<u>12.5</u>	<u>13</u>	<u>19.3</u>	<u>19.8</u>	<u>20</u>
	831	445	54.4	17.2	12.4	12.5	12.9	19.3	19.8	20

продовження таблиці 4.4

40	874	500	81.3	24.5	13.4	12.5	12.8	18.6	19.3	20
	<u>874</u>	<u>500</u>	<u>81.4</u>	<u>24.6</u>	<u>13.6</u>	<u>12.6</u>	<u>13</u>	<u>19.3</u>	<u>19.7</u>	<u>20</u>
	874	500	80	25.1	13.7	12.6	12.9	19.3	19.7	20
50	908	544	106	34.7	15.8	12.8	12.8	18.6	19.3	20
	<u>908</u>	<u>544</u>	<u>106</u>	<u>34.8</u>	<u>15.9</u>	<u>12.9</u>	<u>13</u>	<u>19.2</u>	<u>19.7</u>	<u>20</u>
	908	544	105	35.5	16.3	13	13	19.2	19.7	20
60	935	579	130	46.5	19.4	13.5	13	18.5	19.2	20
	<u>935</u>	<u>579</u>	<u>131</u>	<u>46.6</u>	<u>19.6</u>	<u>13.7</u>	<u>13.2</u>	<u>19.2</u>	<u>19.7</u>	<u>20</u>
	935	579	128	47.3	20.2	13.8	13.2	19.2	19.7	20
70	958	609	153	59.1	24.2	14.8	13.4	18.5	19.2	20
	<u>958</u>	<u>609</u>	<u>153</u>	<u>59.2</u>	<u>24.3</u>	<u>14.9</u>	<u>13.6</u>	<u>19.2</u>	<u>19.7</u>	<u>20</u>
	958	609	150	60	25.2	15.3	13.7	19.2	19.7	20
80	978	635	174	72.2	29.9	16.6	14.2	18.4	19.2	20
	<u>978</u>	<u>635</u>	<u>174</u>	<u>72.3</u>	<u>30</u>	<u>16.8</u>	<u>14.4</u>	<u>19.2</u>	<u>19.7</u>	<u>20</u>
	978	634	171	73.1	31.1	17.3	14.6	19.2	19.7	20
90	995	658	194	85.4	36.3	19.1	15.4	18.4	19.1	20
	<u>995</u>	<u>658</u>	<u>194</u>	<u>85.5</u>	<u>36.5</u>	<u>19.2</u>	<u>15.6</u>	<u>19.2</u>	<u>19.7</u>	<u>20</u>
	995	657	190	86.2	37.7	20	16	19.2	19.7	20
100	1011	678	212	98.5	43.4	22.1	17	18.4	19.1	20
	<u>1011</u>	<u>678</u>	<u>212</u>	<u>98.6</u>	<u>43.5</u>	<u>22.3</u>	<u>17.2</u>	<u>19.3</u>	<u>19.7</u>	<u>20</u>
	1011	677	209	99.3	45	23.3	17.9	19.3	19.7	20
110	1026	696	230	111	50.8	25.7	19.2	18.5	19.1	20
	<u>1026</u>	<u>696</u>	<u>230</u>	<u>111</u>	<u>51</u>	<u>25.9</u>	<u>19.4</u>	<u>19.3</u>	<u>19.7</u>	<u>20</u>
	1026	695	226	112	52.6	27.2	20.3	19.4	19.7	20
120	1039	713	246	124	58.7	29.9	21.9	18.6	19.1	20
	<u>1039</u>	<u>713</u>	<u>246</u>	<u>124</u>	<u>58.8</u>	<u>30</u>	<u>22.1</u>	<u>19.4</u>	<u>19.7</u>	<u>20</u>
	1039	711	242	124	60.6	31.6	23.3	19.5	19.7	20

Таблиця 4.5

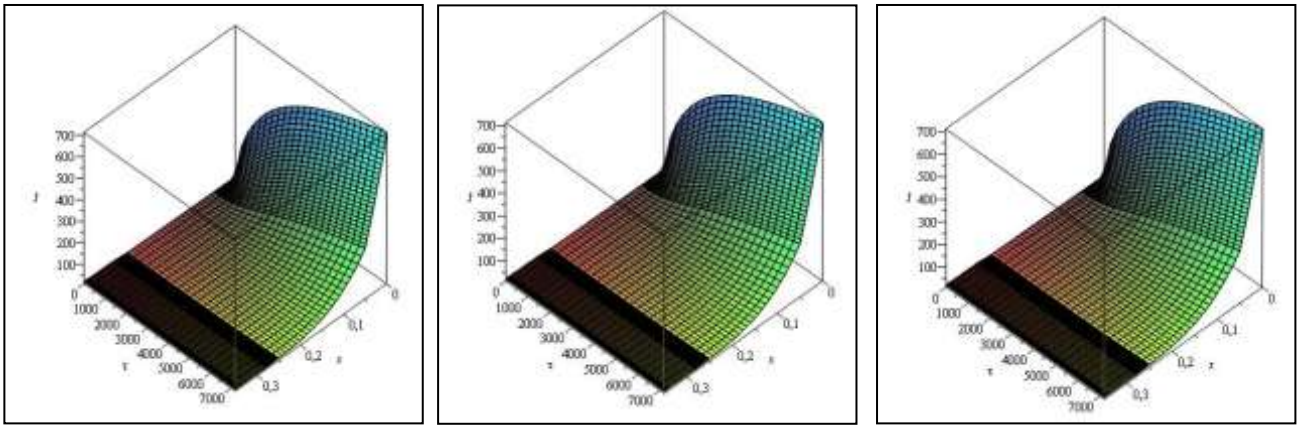
Розподіл густини теплового потоку п'ятишарової плоскої стінки

(Примітка: q – I випадок, q – II випадок, q – III випадок)

час, хв.	координати шару, м							
	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
0	-1.4	-16.17	-16.2	-17.3	-16.1	-16.7	-17.3	-0.6
	<u>-1.5</u>	<u>-17.2</u>	<u>-17.3</u>	<u>-18.4</u>	<u>-17.2</u>	<u>-17.7</u>	<u>-13.8</u>	<u>-.22</u>
	-1.5	-17.1	-17.6	-18.5	-17.4	-17.8	-13.9	-0.1

продовження таблиці 4.5

10	10230	426	-6.1	-25.5	-6.8	-15	-12.9	-10.9
	<u>10230</u>	<u>424</u>	<u>-5.8</u>	<u>-26</u>	<u>-6.5</u>	<u>-17.2</u>	<u>-9.6</u>	<u>-9.8</u>
	10240	430	-10.2	-27.9	-14.9	-21.6	-6.9	4.4
20	10020	1843	123	-18	-12	-15	-11.5	-10
	<u>10020</u>	<u>1841</u>	<u>123</u>	<u>-20.5</u>	<u>-11.5</u>	<u>-18.5</u>	<u>-9</u>	<u>-6.5</u>
	10020	1860	137	-15.9	-16.9	-23.9	-9	2.1
30	9664	3049	481	19	-9	-19	-11	-11
	<u>9661</u>	<u>3049</u>	<u>483</u>	<u>21</u>	<u>-10</u>	<u>-21</u>	<u>-10</u>	<u>-8</u>
	9666	3079	518	30	-12	-22	-11	0
40	9351	3916	942	116	-1	-18	-9.6	-11
	<u>9352</u>	<u>3915</u>	<u>943</u>	<u>117</u>	<u>-1.6</u>	<u>-18.6</u>	<u>-9</u>	<u>-6.6</u>
	9351	3957	1004	140	-1.8	-22.8	-14	-0.8
50	9093	4529	1411	273	26	-17	-13	-11
	<u>9091</u>	<u>4529</u>	<u>1410</u>	<u>274</u>	<u>24</u>	<u>-18</u>	<u>-12</u>	<u>-7</u>
	9100	4574	1487	314	32	-22	-11	-2
60	8884	4969	1843	469	76	-16	-10.7	-13
	<u>8884</u>	<u>4968</u>	<u>1841</u>	<u>467</u>	<u>75.3</u>	<u>-18.7</u>	<u>-13</u>	<u>-6.7</u>
	8894	5021	1925	522	89.7	-19.3	-11	-3.3
70	8713	5290	2220	684	148	-15	-11.2	-13
	<u>8713</u>	<u>5291</u>	<u>2221</u>	<u>683</u>	<u>146</u>	<u>-17.2</u>	<u>-11</u>	<u>-7.2</u>
	8729	5343	2311	745	167	-15.3	-12	-1.3
80	8569	5528	2550	903	232	-10	-14	-11
	<u>8567</u>	<u>5527</u>	<u>2547</u>	<u>899</u>	<u>229</u>	<u>-11</u>	<u>-11</u>	<u>-6</u>
	8590	5585	2647	974	262	-12	-12	-3
90	8445	5707	2836	1114	328	-4	-11.6	-12
	<u>8444</u>	<u>5706</u>	<u>2836</u>	<u>1113</u>	<u>327</u>	<u>-5.6</u>	<u>-10</u>	<u>-5.6</u>
	8468	5769	2940	1198	367	-4.5	-12	-3.5
100	8335	5843	3084	1319	430	5	-9.2	-13
	<u>8332</u>	<u>5842</u>	<u>3084</u>	<u>1315</u>	<u>429</u>	<u>1.8</u>	<u>-8</u>	<u>-8.2</u>
	8363	5905	3187	1407	475	3.2	-10	-3.8
110	8237	5949	3301	1510	531	12	-7	-12
	<u>8237</u>	<u>5946</u>	<u>3300</u>	<u>1507</u>	<u>530</u>	<u>11</u>	<u>-6</u>	<u>-7</u>
	8267	6010	3402	1603	583	13	-7	-4
120	8147	6028	3486	1683	631	20	-5	-13
	<u>8146</u>	<u>6025</u>	<u>3486</u>	<u>1680</u>	<u>630</u>	<u>20</u>	<u>-3</u>	<u>-8</u>
	8183	6095	3586	1781	687	24	-3	-3



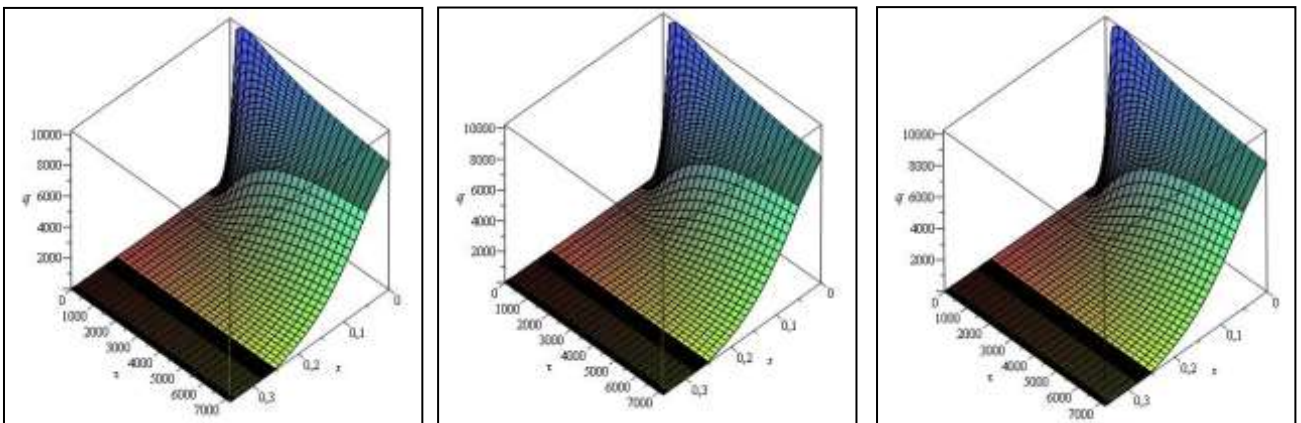
а)

б)

в)

Рисунок 4.11 – Об'ємний графік розподілу температурного поля п'ятишарової плоскої стінки

а) I випадок б) II випадок в) III випадок



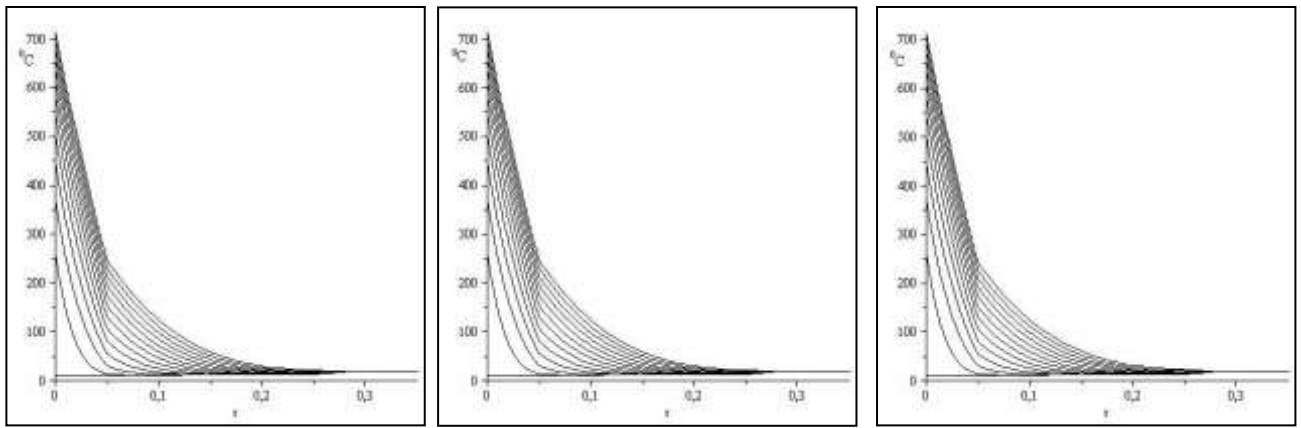
а)

б)

в)

Рисунок 4.12 – Об'ємний графік розподілу густини теплового потоку п'ятишарової плоскої стінки

а) I випадок б) II випадок в) III випадок



а)

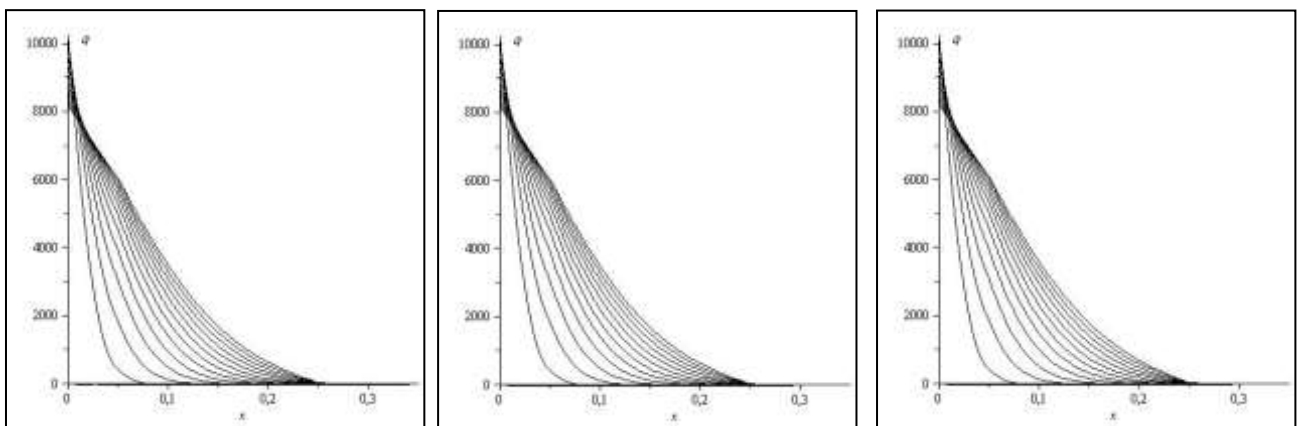
б)

в)

Рисунок 4.13 – Графік розподілу температурного поля п'ятишарової плоскої стінки

а) I випадок б) II випадок в) III випадок

Примітка. В часовому вимірі «відстань» між сусідніми кривими рівна 10 хв. (нижня крива відповідає часу $\tau=0$)



а)

б)

в)

Рисунок 4.14 – Графік розподілу густини теплового потоку п'ятишарової плоскої стінки

а) I випадок б) II випадок в) III випадок

Примітка. В часовому вимірі «відстань» між сусідніми кривими рівна 10 хв. (нижня крива відповідає часу $\tau=0$)

Порівнюючи результати, приходимо до висновку, що задані вологість та

інтенсивності внутрішніх джерел тепла суттєво не впливають на розподіл температурного поля багат шарової плоскої конструкції.

4.4 Дослідження теплообміну в багат шаровій плоскій конструкції при різних температурних режимах пожежі

Розглядається чотиришарова плоска конструкція, яка складається з вапняної штукатурки, цегляної кладки, пінопласту та вапняної штукатурки. Рівняння теплопровідності для шарів має вигляд (4.1)

Необхідно визначити межу вогнестійкості (втрату теплоізолювальної здатності), а також знайти розподіл нестационарного температурного поля по товщині чотиришарової плоскої конструкції за умов пожежі.

Вважатимемо, що на внутрішній (лівій) стороні конструкції відбувається пожежа, температура якої змінюється за законами (рис. 4.15) [6]:

I випадок – $\psi_0 \tau = 3451g \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 20$ (стандартний температурний режим);

II випадок – $\psi_0 \tau = 660 \left(1 - 0,687e^{-\frac{0,32\tau}{60}} - 0,313e^{-\frac{3,8\tau}{60}} \right) + 20$
(температурний режим зовнішньої пожежі);

III випадок – $\psi_0 \tau = 1080 \left(1 - 0,325e^{-\frac{0,167\tau}{60}} - 0,675e^{-\frac{2,5\tau}{60}} \right) + 20$
(температурний режим вуглеводневої пожежі).

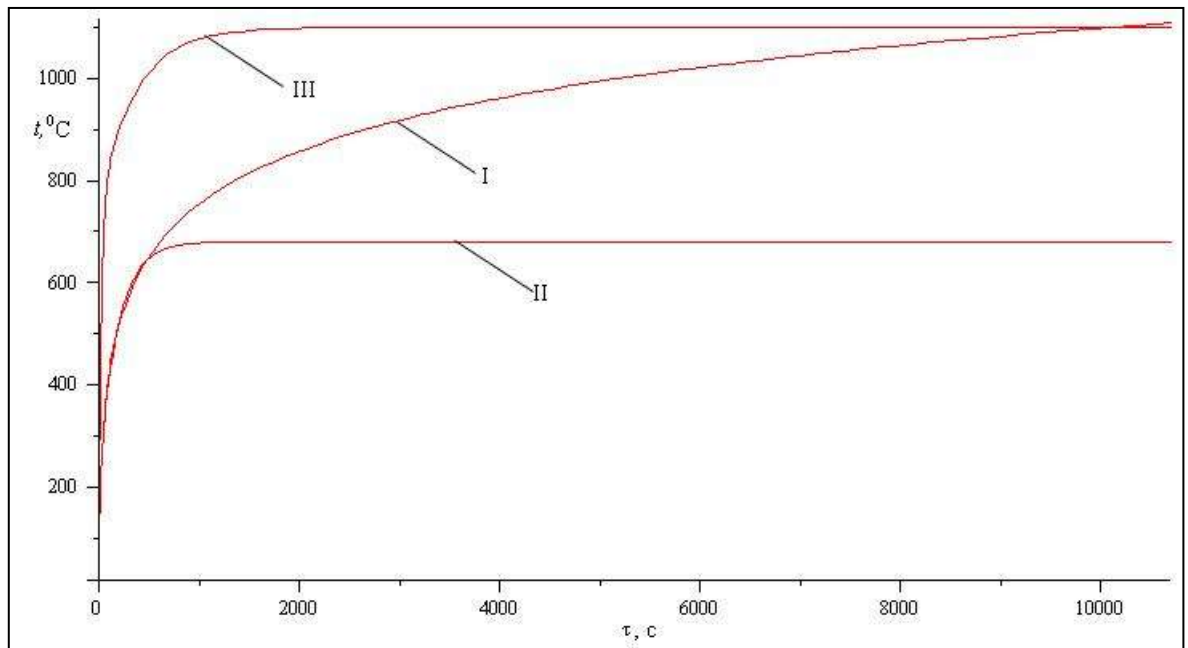


Рисунок 4.15 – Температурні режими пожежі:

I – «стандартний температурний режим пожежі»

II – «температурний режим зовнішньої пожежі»

III – «температурний режим вуглеводневої пожежі»

На зовнішніх поверхнях конструкції існує конвекційний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються умови (4.3).

Коефіцієнт теплообміну між продуктами згорання і внутрішньою стороною конструкції відповідно дорівнюють [6]:

за умов стандартного температурного режиму пожежі – $\alpha_0 = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$;

за умов температурного режиму зовнішньої пожежі – $\alpha_0 = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$;

за умов температурного режиму вуглеводневої пожежі – $\alpha_0 = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$.

Коефіцієнт теплообміну між зовнішньою (правою) стороною конструкції та навколишнім середовищем приймемо рівним $\alpha_n = 4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$.

В початковий момент часу ($\tau=0$) розподіл температурного поля по товщині чотиришарової плоскої конструкції $f(x)$ (4.2), відомий.

Вихідні дані для розрахунку нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої конструкції наведено в табл. 4.6 [43].

Таблиця 4.6

Вихідні дані для розрахунку нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої конструкції

Параметр	Вапняна штукатурка	Цегляна кладка	Пінопласт	Вапняна штукатурка
Товщина $\Delta, \text{м}$	0,05	0,25	0,1	0,03
Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	0,7	0,455	0,041	0,7
Питома теплоємність $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	837	840	1340	837
Густина $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	1600	1580	100	1600
Початковий розподіл температури φx	20	20	20	20
Закони зміни температур	<p>I випадок – $\psi_0 \tau = 345 \lg \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 20,$</p> <p>II випадок – $\psi_0 \tau = 660 \left(1 - 0,687 e^{-\frac{0,32\tau}{60}} - 0,313 e^{-\frac{3,8\tau}{60}} \right) + 20$</p> <p>III випадок – $\psi_0 \tau = 1080 \left(1 - 0,325 e^{-\frac{0,167\tau}{60}} - 0,675 e^{-\frac{2,5\tau}{60}} \right) + 20$</p> <p>$\psi_n \tau = 20.$</p>			
Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $\alpha = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \right]$	<p>I випадок – $\alpha_0 = 25,$ II випадок – $\alpha_0 = 25,$ III випадок – $\alpha_0 = 50,$ $\alpha_n = 4$</p>			

4.4.1 Стандартний температурний режим

Розглянемо перший випадок, коли температура пожежі змінюється за стандартним температурним режимом.

Для визначення температурного поля по товщині конструкції використаємо запропонований прямий метод, який алгоритмізовано в програмному забезпечення Maple 13.

Розв'язок даної задачі отримуємо у вигляді табл. 4.7, рис. 4.16, та рис. 4.17.

Таблиця 4.7

Розподіл нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов стандартного температурного режиму пожежі (етап 1)

час, хв.	координати шару, м											
	<i>середовище</i>	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,43	<i>середовище</i>
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
10	678	520	35.1	20.5	20	20	20	20	20	20	20	20
20	781	646	91.2	20.6	20	20	20	20	20	20	20	20
30	841	721	159	23.9	20	20	20	20	20	20	20	20
40	884	775	223	32.1	20	20	20	20	20	20	20	20
50	918	816	281	44.7	20.6	20	20	20	20	20	20	20
60	945	850	332	60.8	22.1	20	20	20	20	20	20	20
70	968	879	377	79	24.5	20	20	20	20	20	20	20
73	974	886	390	84.8	25.5	20.1	20	20	20	20	20	20

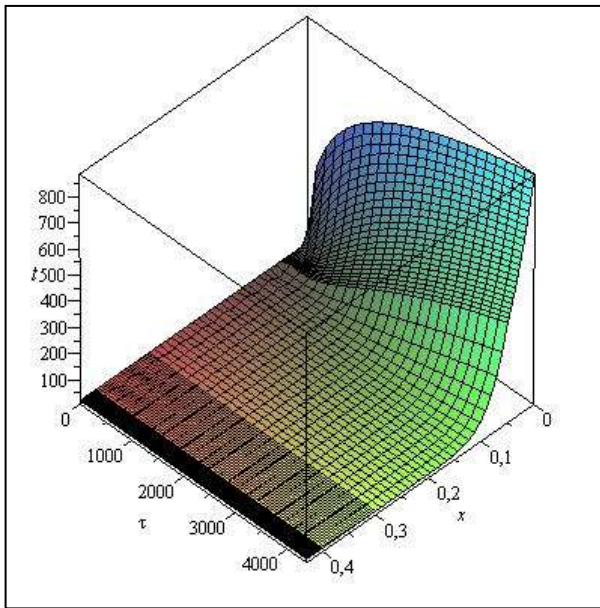


Рисунок – 4.16 Об'ємний графік розподілу температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов стандартного температурного режиму пожежі (етап 1)

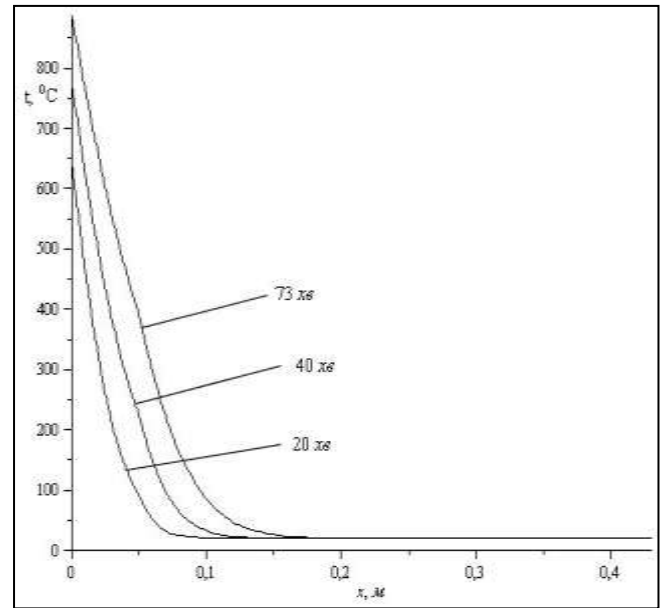


Рисунок 4.17 – Графік розподілу температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов стандартного температурного режиму пожежі (етап 1)

Відомо, що під час нагрівання звичайного бетону вище від температури 500–600 °С на поверхні утворюються дрібні тріщини, що призводять до подальшого його руйнування [110].

Аналіз табл. 4.7 та графічних залежностей (рис. 4.16, рис 4.17) показує, що на 73 хвилині пожежі перший шар (вапняна штукатурка) повністю руйнується, а другий шар (цегляна кладка) не втратив своєї теплоізолювальної здатності (температура поверхні, що не обігривається не досягла 180 °С) [35, 57].

З урахуванням цього факту, необхідно продовжити розрахунок розподілу температурного поля даної конструкції, але без урахування першого шару.

Результат розрахунку показано в табл. 4.8, та на графічних залежностях (рис. 4.18, рис. 4.19).

Таблиця 4.8

Розподіл нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов стандартного температурного режиму пожежі (етап 2)

час, хв.	координати шару, м										
	середовище	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,43	середовище
80	988	837	99.2	28.2	20.5	20	20	20	20	20	20
90	1005	893	140	32.9	20.9	20	20	20	20	20	20
100	1021	925	193	39.4	21.6	20	20	20	20	20	20
110	1036	949	243	49	22.7	20.1	20	20	20	20	20
120	1049	969	288	61.5	24.4	20.3	20	20	20	20	20
130	1061	985	328	76.2	26.7	20.5	20.1	20	20	20	20
140	1072	1002	363	92.3	29.8	20.9	20.1	20	20	20	20
150	1082	1014	395	109	33.8	21.5	20.2	20	20	20	20

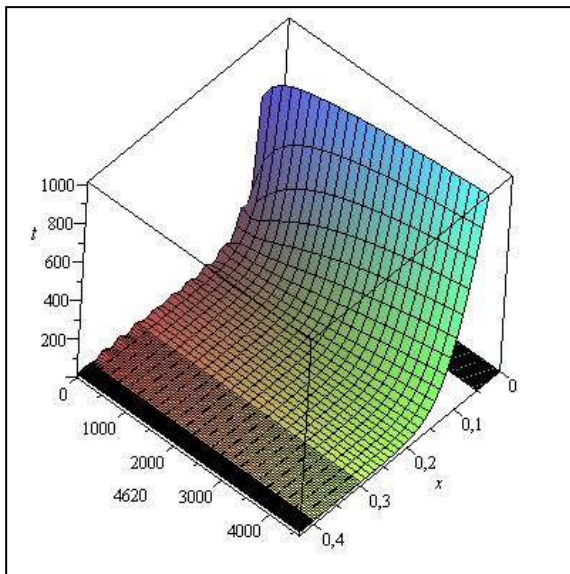


Рисунок 4.18 – Об'ємний графік розподілу температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов стандартного температурного режиму пожежі (етап 2)

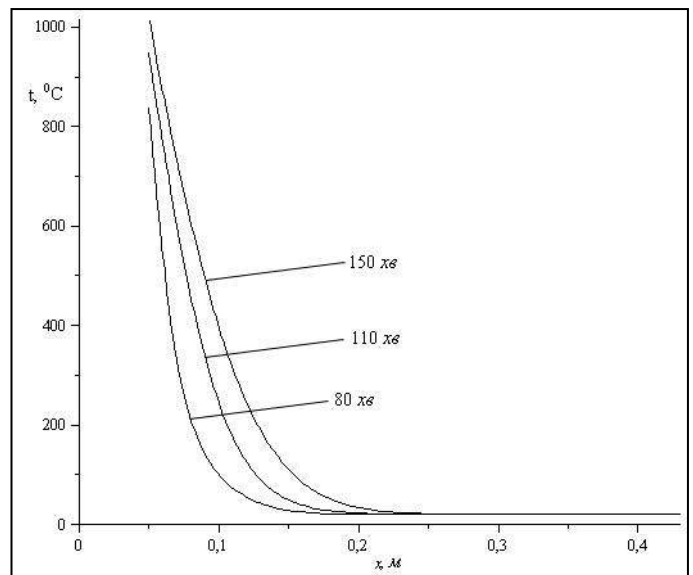


Рисунок 4.19 – Графік розподілу температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов стандартного температурного режиму пожежі (етап 2)

Аналіз табл. 4.8 та графічних залежностей (рис. 4.18, рис. 4.19) показує чітку зміну температурного поля по товщині конструкції протягом часу. Це дає можливість встановити, що протягом всього часу нагрівання (150 хв.) не відбувається прогріву чотиришарової конструкції, тобто дана конструкція не втрачає своєї теплоізолювальної здатності [35].

4.4.2 Температурний режим зовнішньої пожежі

Розглянемо випадок, коли температура пожежі змінюється за температурним режимом зовнішньої пожежі [6].

Як і в попередньому розрахунку, для визначення температурного поля по товщині конструкції використаємо запропонований прямий метод, який алгоритмізовано в програмному забезпечення Maple 13.

Розв'язок даної задачі отримуємо у вигляді табл. 4.9 та графічних залежностей (рис. 4.20, рис. 4.21).

Таблиця 4.9

Розподіл нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов температурного режиму зовнішньої пожежі

час, хв.	координати шару, м											
	середовище	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,43	середовище
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
10	661	421	30.3	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	679	498	74.9	20.3	20	20	20	20	20	20	20	20
30	679	531	127	22.9	20	20	20	20	20	20	20	20
40	679	551	174	29.3	20.1	20	20	20	20	20	20	20
50	680	565	212	39	20.6	20	20	20	20	20	20	20
60	680	584	272	64.1	23.6	20.1	20	20	20	20	20	20
70	680	591	295	77.7	26.2	20.3	20	20	20	20	20	20
80	680	597	315	91.4	29.6	20.7	20	20	20	20	20	20
90	680	601	332	104	33.6	21.2	20	20	20	20	20	20
100	680	606	348	118	38.2	22	20.1	20	20	20	20	20
110	680	609	362	130	43.3	23.1	20.2	20	20	20	20	20

продовження таблиці 4.9

120	680	612	374	142	48.6	24.4	20.4	20	20	20	20	20
130	680	612	374	142	48.6	24.4	20.4	20	20	20	20	20
140	680	615	385	154	54.3	25.9	20.6	20	20	20	20	20
150	680	618	395	165	60.1	27.7	21	20.1	20	20	20	20

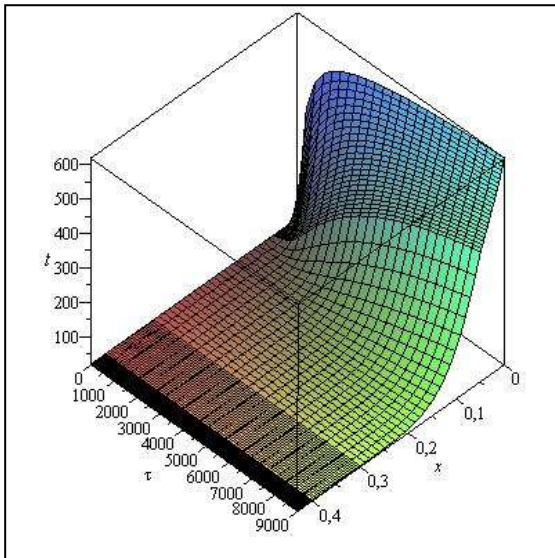


Рисунок 4.20 – Об’ємний графік розподілу нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов температурного режиму зовнішньої пожежі

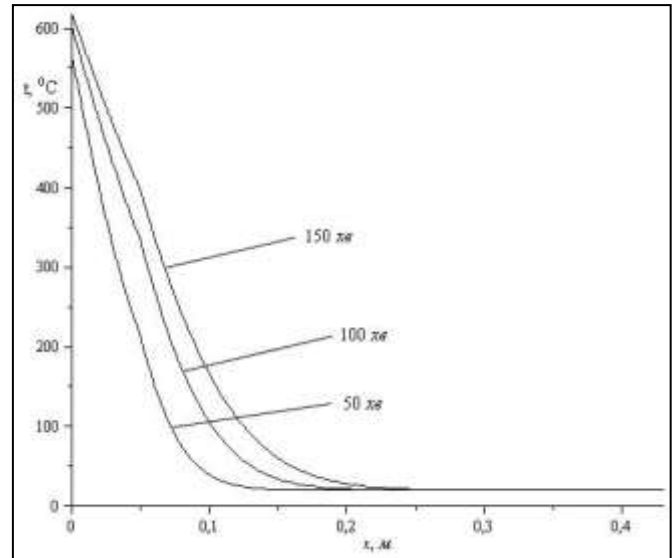


Рисунок 4.21 – Графік розподілу нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов температурного режиму зовнішньої пожежі

Результати досліджень показують, що протягом всього часу нагрівання (150хв), чотиришарова конструкція не втрачає своєї теплоізолювальної здатності [35].

4.4.3 Температурний режим вуглеводневої пожежі

Розглянемо випадок, коли температура пожежі змінюється за температурним режимом вуглеводневої пожежі.

Аналогічно, як і в попередніх розрахунках, для визначення температурного поля по товщині конструкції використаємо запропонований

прямий метод, який алгоритмізовано в програмному забезпечення Maple 13.

Розв'язок даної задачі отримуємо у вигляді таблиці 4.10 і графіків (рис. 4.22, рис. 4.23).

Таблиця 4.10

Розподіл нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов температурного режиму вуглеводневої пожежі (етап 1)

час, хв.	координати шару, м											
	середовище	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,43	середовище
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
10	103	869	49.1	20.5	20	20	20	20	20	20	20	20
20	108	964	147	20.9	20	20	20	20	20	20	20	20
30	109	998	248	27.2	20	20	20	20	20	20	20	20
38	1099	1013	317	37.8	20.2	20	20	20	20	20	20	20

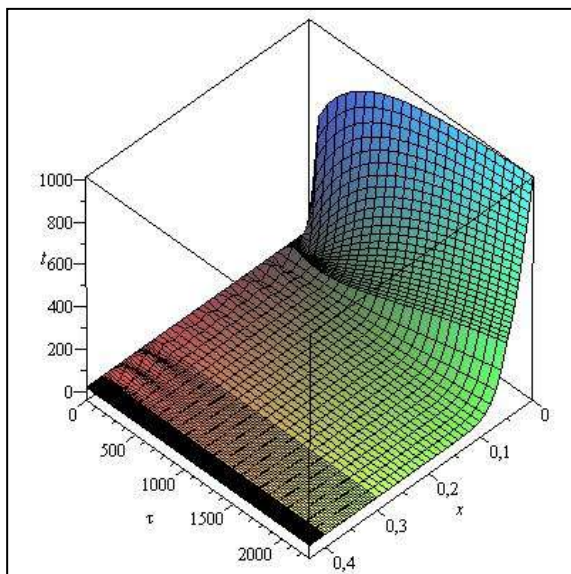


Рисунок 4.22 – Об'ємний графік розподілу нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов температурного режиму вуглеводневої пожежі (етап 1)

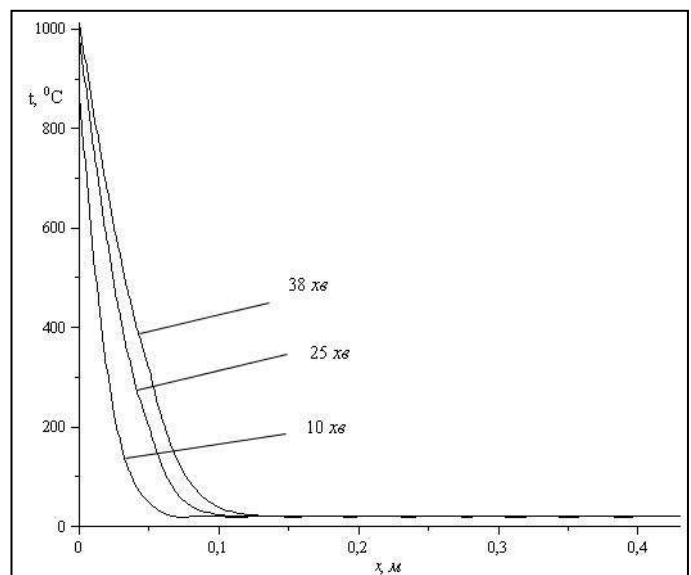


Рисунок 4.23 – Графік розподілу нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов температурного режиму вуглеводневої пожежі (етап 1)

Аналіз таблиці 4.10 та графіків (рис. 4.22, рис. 4.23) показує, що при температурному режимі вуглеводневої пожежі перший шар (вапняна штукатурка) повністю руйнується на 38 хвилині, а другий шар (цегляна кладка) не втратив своєї теплоізолювальної здатності (температура поверхні, що не обігрівається не досягла 180 °С) [35].

З урахуванням цього факту, необхідно продовжити розрахунок розподілу температурного поля даної конструкції, але без урахування першого шару.

Результат розрахунку наведено в табл. 4.11. та графічними залежностями (рис. 4.24, рис. 4.25).

Таблиця 4.11

Розподіл нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов температурного режиму вуглеводневої пожежі (етап 2)

час, хв.	координати шару, м										
	середовище	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,43	середовище
40	1099	881	42.3	20.5	20	20	20	20	20	20	20
50	1099	992	73.7	21.4	20	20	20	20	20	20	20
60	1099	1017	139	24.3	20	20	20	20	20	20	20
70	1100	1030	205	31	20.3	20	20	20	20	20	20
80	1100	1038	263	42.2	20.9	20	20	20	20	20	20
90	1100	1044	313	57.1	22.1	20	20	20	20	20	20
100	1100	1048	355	74.4	24.3	20.1	20	20	20	20	20
110	1100	1051	392	93	27.5	20.4	20	20	20	20	20
120	1100	1054	424	112	31.8	20.8	20	20	20	20	20
130	1100	1057	452	131	37.1	21.5	20.1	20	20	20	20
140	1100	1059	476	150	43.1	22.5	20.3	20	20	20	20
150	1100	1061	499	168	49.9	23.8	20.5	20	20	20	20

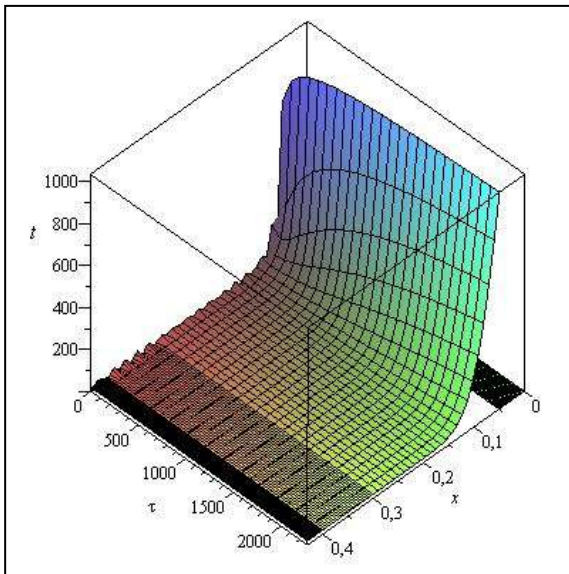


Рисунок 4.24 – Об’ємний графік розподілу нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов температурного режиму вуглеводневої пожежі (етап 2)

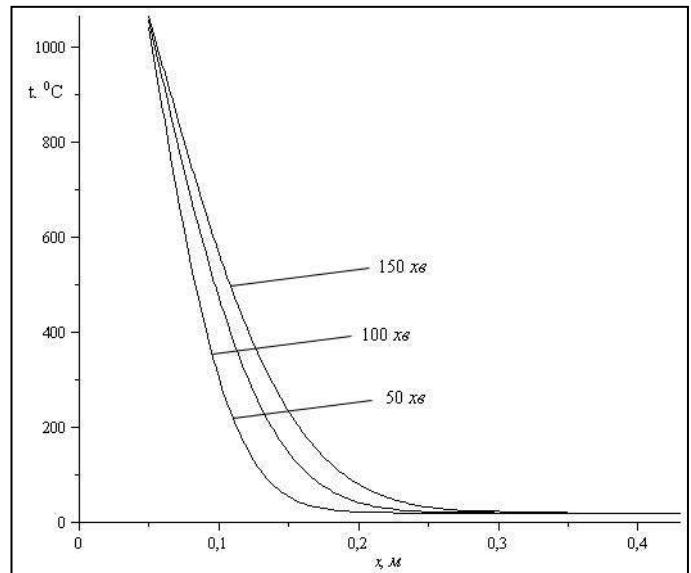


Рисунок 4.25 – Графік розподілу нестационарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов температурного режиму вуглеводневої пожежі (етап 2)

Аналіз табл. 4.11 та графічних залежностей (рис. 4.24 та рис. 4.25) показує чітку зміну температурного поля по товщині конструкції протягом часу. Це дає можливість встановити, що протягом всього часу нагрівання (150 хв.) не відбувається прогріву чотиришарової конструкції, тобто дана конструкція не втрачає своєї теплоізолювальної здатності.

На основі результатів досліджень розподілу нестационарного температурного поля по товщині чотиришарової плоскої конструкції можна зробити наступні висновки:

- у випадках, коли температура змінюється за законами стандартної температурної кривої, зовнішньої пожежі та вуглеводневої пожежі, захисний шар вапняної штукатурки, товщиною 0,05 м забезпечує максимальну (першу) ступінь вогнестійкості за критерієм втрати теплоізолювальної здатності.

- при дослідженні розподілу нестационарного температурного поля по

товщині чотиришарової конструкції, за умов стандартного температурного режиму пожежі встановлено, що захисний шар вапняної штукатурки руйнується на 73 хв.

– при дослідженні розподілу нестационарного температурного поля по товщині чотиришарової конструкції, за умов температурного режиму вуглеводневої пожежі встановлено, що захисний шар вапняної штукатурки руйнується на 38 хв.

4.5 Висновки до розділу

1. Досліджено процеси теплопереносу в багатошарових плоских конструкціях з різними геометричними та теплофізичними характеристиками при різних режимах пожежі. Аналіз цих даних показує чітку зміну температур по товщині конструкцій зі зміною часу, що дає можливість визначити межу їх вогнестійкості за умов пожежі.

2. Досліджено теплоізолювальну здатність вогнезахисного покриття “Pyro-Safe Flammoplast SP-A2” під час нагрівання зі зміною геометричних розмірів та теплофізичних характеристик покриття.

3. Досліджено вплив внутрішнього джерела тепла на розподіл нестационарного температурного поля в п'ятишаровій плиті перекриття.

4. Досліджено вплив різних температурних режимів пожежі на теплоізолювальну здатність чотиришарової плоскої конструкції.

ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеною науково-дослідною працею у галузі пожежної безпеки, в якій на основі створеного нового методу розв'язування нестационарних задач теорії теплопереносу вирішено актуальне науково-технічне завдання методами математичного моделювання теплових процесів. На підставі теоретичних досліджень, науково обґрунтовані в роботі результати дають змогу досліджувати нестационарні теплові процеси в багатошарових плоских конструкціях при довільних режимах пожежі, а також оцінювати межі вогнестійкості будівельних конструкцій за граничним станом втрати теплоізолювальної здатності, та сформулювати наступні висновки:

1. Одержано розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для елемента конструкції з багатошаровою структурою при загальних крайових умовах теплообміну, що дало можливість дослідити вогнестійкість будівельних конструкцій за граничним станом втрати теплоізолювальної здатності в умовах теплового впливу пожежі з різними температурними режимами, що рекомендовані чинною нормативною базою.

2. На основі модифікації методу Фур'є з ефективним застосуванням концепції квазіпохідних створено новий прямий метод дослідження стаціонарних та нестационарних задач теплопровідності для багатошарових плоских стінок.

3. Розроблено алгоритм чисельної реалізації прямого методу дослідження стаціонарних та нестационарних задач теплопровідності для багатошарових плоских конструкцій. Запропонований алгоритм дозволяє значно швидше знайти розв'язок нестационарної задачі теплопровідності. При цьому збільшення кількості шарів конструкції практично не впливає на обсяг проведених обчислень у порівнянні з іншими методами.

4. Прямий метод розв'язування нестационарних задач теплопровідності адаптовано до дослідження процесів теплопереносу в елементах будівельних конструкцій з багатошаровою структурою за наявності внутрішніх джерел тепла в умовах теплового впливу пожежі з різними температурними режимами.

Проведено тестові розрахунки запропонованим методом та порівняно їх з відомими аналітичними результатами розв'язку тестових задач. Спостерігається повне (100%) збігання результатів. Виконано верифікацію результатів у порівнянні з відповідними експериментальними даними. Розбіжність між розрахунковими та експериментальними даними не перевищує 10%.

5. Проведено чисельні дослідження конкретних актуальних задач теплопереносу в багатошарових конструкціях зі змінною товщиною шарів на прикладі елементів будівельних конструкції із вогнезахисними системами на основі покриттів, що вспучуються. Аналітичні дослідження процесу нагрівання сталевих конструкцій за умов горіння воднево-повітряної суміші з подальшим горінням оливи показали, що межа вогнестійкості сталевій конструкції (пластини товщиною 20 мм) становить 3,5 хв. без вогнезахисту, а з вогнезахисним покриттям "Pyro-Safe Flammoplast SP-A2" товщиною 0,8 мм підвищується до 46 хв.

6. Вдосконалено методику розрахунку межі вогнестійкості багатошарових конструкцій за граничним станом втрати теплоізолювальної здатності з урахуванням можливості руйнування довільного шару. Проведені теоретичні дослідження у вигляді модельної задачі чотиришарової конструкції (штукатурка – пінопласт – цегляна кладка – штукатурка) показали, що неврахування фактору руйнування довільного шару може призвести до помилкового визначення межі вогнестійкості. Теплоізолювальна здатність такої конструкції без урахування руйнації шару пінопласту становить 18 годин, а з урахуванням руйнування – 94 хв.

7. З використанням комп'ютерного середовища Maple 13 побудовано та відлагоджено алгоритм розрахунку розподілу температурного поля та густини теплового потоку в багатошарових плоских конструкціях у вигляді явних аналітичних виразів, таблиць результатів та графічних залежностей. Це дозволило досліджувати зміну температури та густини теплового потоку по товщині конструкцій зі зміною часу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abell M. L. *Maple by Example* / M. L. Abell, J. P. Braselton. – Elsevier Academic Press, 2005. – 550 p.
2. Adams P. *Introduction to Mathematics with Maple* / P. Adams, K. Smith, R. Vyborny. – World Scientific Publishing Company, 2004. – 544 p.
3. Atkinson F. V. *Discrete and Continuous Boundary Problems* / F. V. Atkinson. – New York London: Academic Press, 1964. – 570 p.
4. Borwein J. M. *An Introduction to Modern Mathematical Computing: With Maple* / J. M. Borwein, M. P. Skerritt. – Springer Science+Business Media, 2011. – 216 p.
5. EN 13501-1:2002 “Fire classification of construction products and building elements” – Part 1.2. European Committee for Standardization, Brussels, 2002.
6. EN 1991-1-2 (2002) (English): Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-2: General actions – Actions on structures exposed to fire [Authority: The European Union Per Regulation 305/2011, Directive 98/34/EC, Directive 2004/18/EC.
7. EN 1992-1-2:2005 Eurocode 2: Design of concrete structures Part 1-2: General rules - Structural fire design, Brussels, 2004.
8. Fourier I. B. J. *Theorie analytique de la chaleur* / I. B. J. Fourier. – Paris: 1882.
9. Harmathy T.Z. Fire resistance versus flame spread resistance. – *Fire Technol.*, 1976, v. 12, N 4. – P. 290-302.
10. Lie T. T. A Procedure to Calculate Fire Resistance of Structural Members. *International Seminar on Three Decades of Structural Fire Safety*, 22/23, February 1983/pp. 139–153.
11. Lie T.T. Characteristic temperature curves for various fire severities.

"Fire Technol", 1974, 10, № 4. – P. 315–326.

12. Алексеев Г. Н. Общая теплотехника / Г. Н. Алексеев. – М: Высшая школа, 1980. – 552 с.

13. Аналіз масиву карток обліку пожеж (POG_STAT) за 12 місяців 2010 року [Електронний ресурс] / ВДтаСП УкрНДІПБ МНС України. – Режим доступу до ресурсу: http://www.undicz.mns.gov.ua/files/2011/1/1/stat_fire_2010.pdf.

14. Аналіз масиву карток обліку пожеж (POG_STAT) за 12 місяців 2012 року [Електронний ресурс] / ВДтаСПіНС УкрНДІЦЗ. – Режим доступу до ресурсу: http://www.undicz.mns.gov.ua/files/2012/12/31/AD_12_12_1.pdf.

15. Аналіз масиву карток обліку пожеж (POG_STAT) за 12 місяців 2013 року [Електронний ресурс] / ВДіСП УкрНДІЦЗ. – Режим доступу до ресурсу: http://www.undicz.mns.gov.ua/files/2014/1/20/AD_12_13_NTI.pdf

16. Аналітична довідка про стан із пожежами та наслідками від них в Україні за 12 місяців 2014 року [Електронний ресурс] / ВДіСП УкрНДІЦЗ. – Режим доступу до ресурсу: http://www.undicz.mns.gov.ua/files/2015/2/17/AD_12_2014.pdf

17. Антосик П. Теория обобщенных функций: Пер. с англ. / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. // – М: Мир, 1968. – 311 с.

18. Арсенин В. Я. Методы математической физики / В. Я. Арсенин. – М: Наука, 1974. – 432 с.

19. Боголюбов А.Н. и др. Функция Грина оператора Лапласа Учебное пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2012. — 130 с.

20. Будівельні конструкції. Методи випробувань на вогнестійкість. Загальні вимоги. Пожежна безпека. (ISO 834: 1975) ДСТУ Б В. 1.1-4-98. [Чинний ід 1998-10-28.] – К.: Укрархбудінформ, 2005. – 20 с. – (Національний стандарт країни).

21. Вайцлер К.Д. Бетон при температурах от 100 до 750 °С / Вайцлер

- К.Д. ; пер. нем. П.С. Дорштадта. – М.: Высшая техническая школа, 1968. – 112с.
22. Ван дер Поль Б. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа / Б. Ван дер Поль, Х. Бреммер. – М: Изд-во. иностр. лит., 1954. – 507с.
23. Вахитова Л. Н. Огнезащита стальных конструкций / Л. Н. Вахитова, К. В. Калафат. – К: ООО "НПП Интерсервис", 2014. – 150 с.
24. Величко Л. Д. Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі / Л. Д. Величко, Р. Я. Лозинський, М. М. Семерак. – Л: "Соплом", 2011. – 497 с.
25. Веселівський Р. Б. Обґрунтування умов застосування вертикальних багатопарових огорожувальних конструкцій будівель і споруд з урахуванням їх вогнестійкості : автореф. дис. канд. техн. наук / Р. Б. Веселівський . – Львів, 2012. – 23 с.
26. Власій О. О. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами / О. О. Власій, М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій // Вісник НУ "Львівська політехніка", фіз.-мат. науки. – Л:, 2009. – №660. – С. 34–38.
27. Гельфанд И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М: Физмалит, 1959. – 470 с.
28. Голованов В. И. Новые огнезащитные облицовки для несущих стальных конструкций / В. И. Голованов, В. В. Павлов, А. В. Пехотиков // Исторические и современные аспекты решения проблем горения, тушения и обеспечения безопасности людей при пожарах: Материалы XX международной научно-практической конференции. – М. : ФГУ ВНИИПО, 2007. – С. 227-229.
29. Голованов В. И. Расчет огнестойкости конструкций из стали с повышенными показателями огнестойкости для объектов нефтегазовой промышленности / В. И. Голованов, А. В. Пехотиков, В. В. Павлов // Территория нефтегаз. – 2007. – № 4. – С. 72–77.
30. Григорян Б. Б. Метод приведения реального температурного режима к стандартному для определения огнестойкости железобетонных

конструкций / Григорян Б.Б. // Проблемы пожарной безопасности : Сб. науч. труд. – Х.: «Фолио», 2000. – С.53–56.

31. Демчина Б. Г. Вогнестійкість одно- і багат шарових просторових конструкцій житлових та громадських будівель: дис. Доктора техн. наук: 05.23.01 / Демчина Богдан Григорович – К., 2002. – 367 с.

32. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Дейч. – М: Наука, 1965. – 287 с.

33. Диткин В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М: Физмалит, 1961.

34. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М: Высшая школа, 1965. – 507 с.

35. Захист від пожежі. Пожежна безпека об'єктів будівництва: ДБН В.1.1.7-2002. – [Чинний від 2003-05-01]. – К.: Держбуд України, 2003. – 87 с. (Державні будівельні норми України).

36. Зенков Н.И. Строительные материалы и поведение их в условиях пожара. учебн. для слуш-лей вузов. / Н. И. Зенков. – М.: ВИПТШ, 1974. – 176 с.

37. Исаков Г. Н. Моделирование тепло- и массопереноса в многослойных тепло- и огнезащитных покрытиях при взаимодействии с потоком высокотемпературного газа / Г. Н. Исаков, А. Я. Кузин // Физика горения и взрыва. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 82-89.

38. Исаченко В. П. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М: Энергия, 1975. – 488 с.

39. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел. / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487с.

40. Карслоу Х. Операционные методы в прикладной математике / Х. Карслоу, Д. Егер. – М: Изд-во иностр. лит., 1948. – 291 с.

41. Ковалев А. И. Экспериментальное исследование огнезащитной способности вспучивающегося огнезащитного покрытия на бетонной плите / А.

И. Ковалев, П. Г. Круковский, Е. В. Качкар, А. А. Абрамов. // Збірник наукових праць ЛДУ БЖД «Пожежна безпека». – 2010. – №17. – С.172–179.

42. Коздоба Л.А. Решение нелинейных задач теплопроводности / Л.А. Коздоба. – К.: Наукова думка, 1976. – 136 с.

43. Конструкції будинків і споруд. Теплова ізоляція будівель: ДБН В.2.6-31:2006. – [Чинний від 2006-09-09.] – К.: Мінбуд України, 2006. – 44 с.

44. Кошмаров Ю. А. Термодинамика и теплопередача в пожарном деле / Ю. А. Кошмаров, М. П. Башкирцев. – М. : ВИПТШ МВД СССР, 1987. – 444 с.

45. Кошмаров Ю.А. Теплотехника: Учебник для вузов. / Ю. А. Кошмаров. – М: ИКЦ «Академкнига», 2006. – 501с.

46. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. – М. : Атомиздат, 1979. – 416 с.

47. Лимонов В. Г. Основы пожарной теплофизики: Задания и методические указания для выполнения контрольной работы. / В. Г. Лимоном. – М: Учебно-методический кабинет, 1979. – 116 с.

48. Луценко А. В. Функция Грина и ее применение / А. В. Луценко, В. А. Скорик. – Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2002. – 26 с.

49. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М: Высшая школа, 1967. – 559 с.

50. Мазуренко В. В. Про зведення дискретно-неперервної крайової задачі до загальної схеми Аткинсона / В. В. Мазуренко // Доповіді НАН України. – 2001. – №8. – С. 19–22.

51. Мартыненко В. С. Операционное исчисление / В. С. Мартиненко. – К: Высшая школа, 1990. – 359 с.

52. Махней О. В. Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень: Навчальний посібник / О. В. Махней, Т. П. Гой. – Івано-Франківськ: Сімик, 2013. – 304 с.

53. Микусинский Я. Операторное исчисление / Я. Микусинский. – М:

Изд-во иностр. лит., 1956. – 366 с.

54. Микусинский Я. Элементарная теория обобщенных функций / Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М: Изд-во иностр. лит., 1959. – 78 с.

55. Милованов А. Ф. Огнесохранность железобетонных конструкций после пожара / А. Ф. Милованов. – М.: Стройиздат, 2005. – 120 с.

56. Милованов А. Ф. Огнестойкость железобетонных конструкций / А. Ф. Милованов. – М.: Стройиздат, 1986. – 224 с.

57. Милованов А. Ф. Расчет жаростойких железобетонных конструкций / А. Ф. Милованов. – М.: Стройиздат, 1975. - 128 с.

58. Милованов А. Ф. Стойкость железобетонных конструкций при пожаре / А. Ф. Милованов. – М.: Стройиздат, 1998. – 304 с.

59. Михеев М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – Изд. 2-е. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.

60. Моделирование пожаров и взрывов / Под общ. ред. Н. Н. Брушлинского и А. Я. Корольченко. – М.: «Пожнаука», 2000. – 482 с.

61. Никифоров А. Ф. Теория специальных функций / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М.: Высшая школа, 1974. – 457 с.

62. Огнестойкость зданий / Бушев В. П., Пчелинцев В. А., Федоренко В. С., Яковлев А. И. / Под общ. ред. В.А. Пчелинцева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1970. – 262 с.

63. Основы пожарной теплофизики: Учебник для пожарно-тех. училищ / М. П. Башкирцев, Н. Ф. Бубырь, Н. А. Минаев, Д. Н. Онучкова. – М: Стройиздат, 1984. – 200с.

64. Пазен О. Ю. Аналіз поширення температурних полів в багатосарових тілах під час пожежі: магістерська робота / Пазен Олег Юрійович – Л., 2012. – 76 с.

65. Пазен О. Ю. Загальна мішана задача теплопровідності в багатосаровій плоскій стінці з урахуванням внутрішніх джерел тепла

[Електронний ресурс] // О. Ю. Пазен // Підстригачівські читання – 2015 : матер. конф. (26-28 травня). – Львів, 2015. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.iarpm.lviv.ua/chyt2015>.

66. Пат. 85695 Україна, МПК(2009) G01 N 33/38. Спосіб визначення несучої здатності стиснутих елементів залізобетонних конструкцій в умовах пожежі / Поздеев С. В., Некора О. В., Вітько М. М., Поздеев А. В., заявник і патентовласник Поздеев С. В. – №а200607816 ; заявл. 12.07.06 ; опубл. 25.02.09, Бюл. №4, 2009 р.

67. Поздеев С. В. Численное исследование огнестойкости железобетонной балки при помощи метода конечных элементов / Поздеев С. В., Григорян Б. Б. // Матеріали IV Міжнародної наук.-практ. конф. «Природничі науки та їх застосування в діяльності служби цивільного захисту». – Черкаси: АПБ, 2010. – С.42–45.

68. Поздеев С. В. Дослідження ефективності математичних моделей теплопередачі для розв'язку теплотехнічної задачі при визначенні вогнестійкості залізобетонних конструкцій / Поздеев С.В., Тищенко О.М. // Черкаси: Збірник наукових праць. Пожежна безпека: теорія і практика. Академія пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля. – 2010. – № 5. – С. 122–129.

69. Пузач В. Г. Расчет трения и теплообмена при течении газа в каналах и внешнем обтекании тел / В. Г. Пузач, С. В. Пузач // Известия РАН. Энергетика. – 1996. – № 2. – С. 44–54.

70. Романенко П. Н. Теплопередача в пожарном деле. / П.Н. Романенко, Н. Ф. Бубырь, М. П. Башкирцев. – М.: ВШ МВД СССР, 1969. – 425с.

71. Рябова І. Б. Термодинаміка і теплопередача в пожежній справі / І. Б. Рябова, І. В. Сайчук, А. Я. Шаршанов. – Харків: АПБУ, 2002. – 352 с.

72. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К: Вища школа, 1987. –

288 с.

73. Семерак М. М. Температурне поле масивних конструкцій при їх інтенсивному нагріві / М. М. Семерак, І. С. Юнашов, В. М. Байтала, В. В. Чернецький / Пожежна безпека: Зб. наук. праць. – 2012. – № 21. – С.154–159.

74. Семерак М. М. Теплові потоки, зумовлені випромінюванням факела пожежі / М. М. Семерак, А. М. Домінік, А. В. Субота // Пожежна безпека: Зб. наук. праць. – Львів: ЛДУ БЖД, 2011. – №19. – С.131–136.

75. Семерак М. М. Теплоизолирующая способность многослойных строительных конструкций с учётом разрушения произвольного слоя / М. М. Семерак, Р. М. Таций, О. Ю. Пазен // Вестник Кокшетауского технического института Министерства по чрезвычайным ситуациям республики Казахстан : Сб. науч. тр. – Кокшетау : КТИ КЧС МВД РК, 2015. – № 4 (20). – С. 8–17.

76. Семерак М. М. Математичне моделювання та дослідження величини теплового потоку факела пожежі / М. М. Семерак, А. М. Домінік, К. І. Мигаленко, Д. В. Руденко / Вісник ЛДУБЖД: Зб. наук. праць. – Львів: ЛДУ БЖД, 2013. – №. 7, С. 225–230.

77. Семерак М. М. Моделювання термогазодинамічних параметрів струменя водню у разі розгерметизації корпусу турбогенератора електричної станції / М. М. Семерак, А. В. Субота, В. І. Желяк // Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності : зб. наук. пр. – Львів : ЛДУБЖД, 2013. – № 7. – С. 225–229.

78. Семичаєвський С. В. Щодо підвищення рівня пожежної безпеки машинних залів енергетичних підприємств / С. В. Семичаєвський, О. М. Тимошенко // Науковий вісник УкрНДІПБ. – К., 2012. – № 1(25). – С. 46–50.

79. Стан із пожежами та їх наслідками в Україні за 2011 рік [Електронний ресурс] / ВДтаСПіНС УкрНДІЦЗ МНС України. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.undicz.mns.gov.ua/content/amkop.html>.

80. Стасюк М. Ф. Построение функции Коши для

квазидиференціального уравнения 2-го порядка с кусочно-переменными коэффициентами / М. Ф. Стасюк. // Вестник Львовского политехнического института. – 1983. – №172. – С. 122–124.

81. Стасюк М. Ф. Структура розв'язків звичайних диференціальних і квазидиференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами / М. Ф. Стасюк. // Доповіді АН УРСР, Серія А. – 1982. – №12. – С. 33–36.

82. Субота А. В. Визначення та дослідження температурного поля в елементах металевих конструкцій за умов температурного режиму горіння водню / А. В. Субота, М. М. Семерак, О. В. Стокалюк // Пожежна безпека : зб. наук. пр. – Львів : ЛДУБЖД, 2014. – № 24. – С. 120-123.

83. Субота А. В. Вогнестійкість несучих сталевих конструкцій машинних залів атомних електростанцій за умов аварійного горіння водню: дис. кандидата техн. наук: 21.06.02 / Субота Андрій Вікторович – Львів, 2014. – 168 с.

84. Тацій Р. М. Расчет стационарного температурного поля в многослойной плите с учетом внутренних источников тепла при условии неидеального теплового контакта между слоями / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Safety & Fire Technique (безопасность и пожарная техника). – Polska, Jozefov: CNOBP-PIB, ВіТР 2015. – Vol. 40, issue 4. – P. 51-59.

85. Тацій Р. М. Визначення теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті за нестандартних двоточкових умов / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Вісник Харківського національного університету: – Харків : ХНУ, 2013. – № 1089. – С. 121–133. (серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління").

86. Тацій Р. М. Визначення теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом джерел тепла / Р. М. Тацій, М. І. Кусій, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека : Зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2012. – № 20. – С. 20-26.

87. Тацій Р. М. Визначення теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті при початкових умовах на границі розділу суміжних шарів / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Вісник ЛДУ БЖД : Зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2013. – № 8. – С. 16–23.

88. Тацій Р. М. Двоточкові задачі, що виникають при визначенні теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен. // Вісник ЛДУ БЖД. – 2014. – №10. – С. 191–200.

89. Тацій Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для найпростіших квазідиференціальних рівнянь другого порядку / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. О. Власій. // Вісник НУ "Львівська політехніка", фізико-математичні науки. – 2011. – №718. – С. 61–69.

90. Тацій Р. М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтам / Р. М. Тацій, О. О. Власій, М. Ф. Стасюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. – 2014. – № 804. – С. 64–69.

91. Тацій Р. М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. О. Власій. // Вісник НУ "Львівська політехніка", фізико-математичні науки. – 2014. – №804. – С. 64–69.

92. Тацій Р. М. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла / Р. М. Тацій, Т. І. Ушак, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека: Зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2015. – № 27. – С. 120-126.

93. Тацій Р. М. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами та стаціонарною неоднорідністю / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. Ю. Пазен // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія : матер. V Міжнар. наук. конф. (27-29 травня). – Івано-Франківськ – Вінниця, 2015. – С. 201–202.

94. Тацій Р. М. Математичне моделювання процесу теплопровідності в багатоступінчатому стрижні / Р. М. Тацій, Б. С. Воробець, О. Ю. Пазен // XV Міжнар. наук. конф. ім. акад. Михайла Кравчука : матер. конф. (15-17 травня). – Київ, 2014. – С. 303–304.

95. Тацій Р. М. Моделювання процесу теплообміну в багат шаровій стінці системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : Зб. тез доп. VI Міжнар. наук. конф. (4-5 квітня). – Кам'янець-Подільський, 2014. – С. 162–164.

96. Тацій Р. М. Нестандартні крайові задачі теплопровідності у багат шарових структурах за наявності внутрішніх джерел тепла / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека – 2013 : Зб. тез доп. XI Міжнар. наук.-практ. конф. (25–26 вересня). – Київ, 2013. – С. 308–312.

97. Тацій Р. М. Нестандартні крайові умови в задачах теплопровідності у багат шарових структурах / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Математика в сучасному технічному університеті : матер. міжн. наук.-практ. конф. (19-20 квітня). – Київ, 2013. – С. 168-171.

98. Тацій Р. М. Прямий метод розрахунку нестационарного температурного поля за умов пожежі / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека : Зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2015. – № 26. – С. 135-141.

99. Тацій Р.М. Загальна крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О.Ю. Пазен / Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів», Рівне, 19-22 лютого 2015, С. 158.

100. Тацій Р.М. Конструкція розв'язків лінійних імпульсних диференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами / Р. М. Тацій., М. Ф. Стасюк, О. О. Власій. // Вісник НУ "Львівська політехніка", фізико-математичні науки. – 2013. – №768. – С. 40–45.

101. Теплотехніка / І. В. Швець, В. І. Тулубінський, М. Ф. Кіраковська, І. О. Недужий, І. М. Шелудько. – К: Вища школа, 1969. – 588 с.
102. Термогазодинамика пожаров в помещениях/ В. М. Астапенко, Ю.А. Кошмаров, И. С. Молчадский, А. Н. Шевляков. – М.: Стройиздат, 1988.– 448 с.
103. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М: Наука, 1977. – 735 с.
104. Толстов Г. П. Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – М: Физмалит, 1960. – 390 с.
105. Узагальнені квазидиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. В. Мазуренко, О. О. Власій. – Дрогобич: "Коло", 2011. – 301 с.
106. Функция Грина оператора Лапласа: Учебное пособие. / А. Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова, И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова, Н.Е. Шапкина. – М: Физический факультет МГУ, 2012. – 130 с.
107. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М: "Мир", 1971. – 309 с.
108. Цвіркун С. В. Удосконалення методу визначення вогнезахисної здатності покриттів металевих конструкцій : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 21.06.02 «Пожежна безпека» / С. В. Цвіркун. – К., 2006. – 20 с.
109. Цвіркун С. В. Удосконалення методу визначення вогнезахисної здатності покриттів металевих конструкцій : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 21.06.02 «Пожежна безпека» / С. В. Цвіркун. – К., 2006. – 20 с.
110. Шналь Т. М. Вплив вологості на крихке руйнування бетону в умовах пожежі / Т. М. Шналь, М. І. Стасюк // Вісн. Нац. ун-ту "Львів. політехніка". – 2007. – № 602. – С. 200–204.
111. Штокало И. З. операционное исчисление / И. З. Штокало. – К: Наук. Думка, 1972. – 303 с.

112. Эфрос А.М. Операционное исчисление и конгатурные интегралы / А.М. Эфрос, А.М. Данилевский. – Х.: ДНТВУ, 1937. – 383 с.

113. Яковлев А. И. Расчет критической температуры при определении предела огнестойкости сжатых стальных конструкций / А. И. Яковлев, В. И. Голованов // Огнестойкость строительных конструкций : сб. научн. тр. – М. : ВНИИПО. – 1984. – С. 5–12.

114. Яковлев А. И. Расчет огнестойкости строительных конструкций / А. И. Яковлев. – М. : Стройиздат, 1988. – 143 с.

115. Яковлев А.И. Огнестойкость железобетонных конструкций / Яковлев А.И. // Пожарная профилактика и тушение пожаров: информац. сб. ВНИИПО. – М.: Стройиздат, 1970. – № 6. – С. 18–26.

116. Яковлев А.И. Расчет огнестойкости строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1988. – 144 с.

117. Яковлев А. И. Расчетная оценка поведения железобетонных колонн при режимах пожара, отличных от «стандартного» / Яковлев А. И., Григорян Б. Б. // Тепло- и массообмен в технологических процессах производства и при пожарах: сб. науч. тр. – М.: ВИПТШ МВД СССР, 1983. – С. 147–153.

ДОДАТОК А

Стационарні задачі теорії теплопровідності

Багатошарові елементи конструкцій застосовуються, наприклад, у будівельній промисловості. При дії високих температур, зокрема при пожежі, виникає загроза їх руйнування. У зв'язку з цим задача дослідження температурного поля в будівельних конструкціях є актуальною. Визначенню температурного поля в багатошарових конструкціях при кусково-сталому коефіцієнті теплопровідності присвячено ряд робіт [49, 70].

В даному додатку, в замкненій формі розв'язана стаціонарна задача про поширення температури в n -шаровій нескінченній плиті для довільного n з урахуванням впливу розподілених та точкових (міжшарових) внутрішніх джерел тепла і найбільш загальних крайових умовах.

Результати цього додатку нерозривно пов'язані з дослідженням нестационарних процесів теплопереносу, де вони використовуються при визначенні початкових умов і, крім цього, без таких результатів неможливо зреалізувати метод редукції [18, 103].

А.1 Постановка задачі та її математична модель

Розглядається задача про визначення стаціонарного одновимірного температурного поля в плоскій багатошаровій конструкції (стінці) товщиною ℓ (рис. А.1) за наявності внутрішніх розподілених та точкових джерел тепла [86].

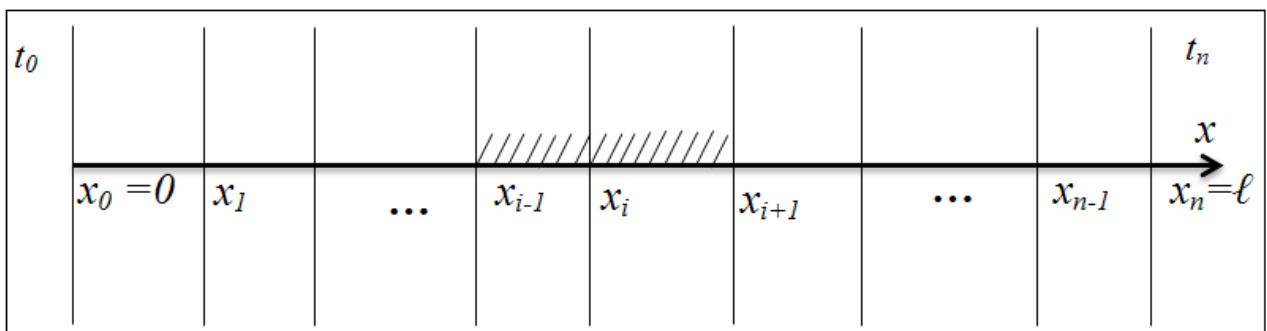


Рисунок А.1 – Плоска багатошарова стінка

Нехай область конструкції обмежена площинами $x = x_0 = 0$ і $x = x_n = l$. Ця область поділена площинами $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}$ на n шарів, взагалі

кажучи, різної товщини. Припускається, що кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності λ_i та внутрішнім неперервним джерелом тепла r_i . Крім цього, закладається наявність зосереджених джерел тепла s_i на границях шарів. Будемо вважати, що температура в плиті поширюється лише в напрямку осі Ox , тобто задача про дослідження теплообміну є одновимірною. В загальному випадку [49] така задача зводиться до розв'язування на відрізку $0, l$ (квазі)диференціального рівняння

$$\lambda t' = -q_v, \quad (\text{A.1})$$

при певних крайових умовах.

Тут $t(x)$ – температура, $\lambda(x)$ – коефіцієнт теплопровідності, $q_v(x)$ – функція розподілу внутрішніх джерел тепла, а точки $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ – сліди перетину відповідних площин з віссю Ox .

Надалі використовуватимемо такі позначення: θ_i – характеристична функція напіввідкритого проміжку x_i, x_{i+1} , тобто, $\theta_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in x_i, x_{i+1} \\ 0, & \text{якщо } x \notin x_i, x_{i+1} \end{cases}$, $\lambda_i(x) > 0$ – коефіцієнт теплопровідності на проміжку x_i, x_{i+1} , $r_i(x)$ – функція розподілу внутрішніх джерел тепла на x_i, x_{i+1} , $\delta_i(x - x_i)$ – δ -функція Дірака з носієм в точці $x = x_i$, s_i – інтенсивність точкових джерел тепла в точці $x = x_i$ [86].

Функції $\lambda_i(x)$ і $r_i(x)$ на відповідних проміжках вважатимемо неперервними.

$$\text{Покладемо } \lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x) \theta_i, \quad q_v(x) = - \sum_{i=0}^{n-1} r_i(x) \theta_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i \delta(x - x_i).$$

Тоді рівняння (A.1) набуде вигляду

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x) \theta_i \cdot t' \right)' = - \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i \delta(x - x_i). \quad (\text{A.2})$$

Позначимо ще $t^1 = \lambda t' = -q$ – квазіпохідна (густина теплового потоку зі

знаком «мінус»).

До рівняння (A.2) додаємо систему двох лінійно-незалежних крайових умов, які в загальному випадку є нелокальними

$$\begin{cases} p_{11} \cdot t x_0 + p_{12} \cdot t^1 x_0 + q_{11} \cdot t x_n + q_{12} \cdot t^1 x_n = \gamma_1, \\ p_{21} \cdot t x_0 + p_{22} \cdot t^1 x_0 + q_{21} \cdot t x_n + q_{22} \cdot t^1 x_n = \gamma_2. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Тут p_{ij} , q_{ij} , γ_i – відомі дійсні числа, $t x_0$, $t^1 x_0$, $t x_n$, $t^1 x_n$ – значення температури та густини теплового потоку в точках $x = x_0$ і $x = x_n$ відповідно.

Зауважимо, що відомі крайові умови всеможливих типів, які описані в [49], є частинними випадками умов (A.3).

Крайова задача (A.2)-(A.3) є математичною моделлю розподілу стаціонарного температурного поля в багат шаровій нескінченній конструкції при найбільш загальних крайових умовах та припущеннях відносно характеру внутрішніх джерел тепла.

Таку математичну модель називатимемо *класичною* в тому сенсі, що крайові умови (A.3) задаються в двох точках [85] (двоточкова задача), тобто виключно на зовнішніх поверхнях конструкції.

A.2 Розв'язування вихідної задачі шляхом зведення до відповідної системи диференціальних рівнянь першого порядку (концепція квазіпохідних)

Введемо вектори $\bar{T} = \begin{pmatrix} t \\ t^1 \end{pmatrix}$, $\bar{R}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_i \end{pmatrix}$, $\bar{S}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -s_i \end{pmatrix}$ та матрицю

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді (квазі)диференціальне рівняння (A.2) зводиться до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\bar{T}' = \left(\sum_{i=0}^{n-1} A_i \theta_i \right) \cdot \bar{T} + \sum_{i=0}^{n-1} R_i \theta_i + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{S}_i \cdot \delta x - x_i, \quad (\text{A.4})$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} t \\ t^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \theta_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} s_i \delta x - x_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4}')$$

Запишемо крайові умови (A.3) також в матричному вигляді [26]

$$P \cdot \bar{T} x_0 + Q \cdot \bar{T} x_n = \bar{\Gamma}, \quad (\text{A.5})$$

де позначено $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, $\bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n \end{pmatrix}$.

Двоточкова задача (A.4)-(A.5) еквівалентна вихідній задачі (A.1-A.3).

На кожному з проміжків x_i, x_{i+1} система (A.4) має вигляд

$$\bar{T}_i' = A_i \cdot \bar{T}_i + \bar{R}_i + \bar{S}_i \cdot \delta x - x_i, \quad (\text{A.6})$$

де слід покласти $\bar{S}_0 = \bar{0}$, $S_n = \bar{0}$.

Для відповідної однорідної системи

$$\bar{T}_i' = A_i \cdot \bar{T}_i \quad (\text{A.7})$$

побудуємо матрицю

$$B_i x, s = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

де позначено $b_i x, s = \int_s^x \frac{d\tau}{\lambda_i \tau}$.

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що так введена матриця $B_i x, s$ володіє наступними властивостями [26]:

- За змінною x вона справджує матричне рівняння $B_i' x, s = A_i B_i x, s$;
- $B_i s, s = E$, де E – одинична матриця;
- для будь-яких $x_1, x_2, x_3 \in x_i, x_{i+1}$, $B_i x_3, x_2 \cdot B_i x_2, x_1 = B_i x_3, x_1$.

Як відомо (див. напр. [26, 86, 88]) така матриця-функція двох змінних x ,

s називається матрицею Коші однорідної системи (A.7) і суттєво використовується при подальшому розв'язуванні вихідної задачі.

Для будь-яких $k > i \geq 0$ додатково позначимо

$$\begin{aligned} B_{x_k, x_i} &\stackrel{df}{=} B_{k-1}(x_k, x_{k-1}) \cdot B_{k-2}(x_{k-1}, x_{k-2}) \cdots B_i(x_{i+1}, x_i) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=i}^{k-1} b_j(x_{j+1}, x_j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

при цьому прийmemo $B_{x_k, x_k} = E$.

Тоді

$$B_{x, x_k} \cdot B_{x_k, x_i} = \begin{pmatrix} 1 & \left(b_k(x, x_k) + \sum_{j=i}^{k-1} b_j(x_{j+1}, x_j) \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Розв'язок векторного рівняння (A.4) на проміжку x_i, x_{i+1} шукаємо у вигляді

$$\bar{T}_i = B_i(x, x_i) \cdot \bar{P}_i + \int_{x_i}^x B_i(x, s) \cdot \bar{R}_i(s) ds, \quad (\text{A.11})$$

де \bar{P}_i поки що невідомий вектор.

Аналогічно, на x_{i-1}, x_i ,

$$\bar{T}_{i-1} = B_{i-1}(x, x_{i-1}) \cdot \bar{P}_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^x B_{i-1}(x, s) \bar{R}_{i-1}(s) ds. \quad (\text{A.12})$$

В точці $x = x_i$ повинна виконуватися умова спряження [26] $\bar{T}_i(x_i) = \bar{T}_{i-1}(x_i) + \bar{S}_i$, що згідно з формулами (A.11) і (A.12) приводить до рекурентного співвідношення

$$\bar{P}_i = B_{i-1}(x_i, x_{i-1}) \bar{P}_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i, s) \bar{R}_{i-1}(s) ds + \bar{S}_i. \quad (\text{A.13})$$

Покладаючи $\bar{P}_0 = \bar{T}_0$, методом математичної індукції з (A.13) отримуємо, що

$$\bar{P}_i = B(x_i, x_0) \cdot \bar{T}^0 + \sum_{j=0}^i B(x_i, x_j) \cdot \bar{Z}_j, \quad (\text{A.14})$$

де позначено [86]

$$\bar{Z}_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_j, s) \bar{R}_{j-1}(s) ds + \bar{S}_j, \quad j=1, 2, \dots, n-1, \quad (\text{A.15})$$

$$\bar{T}^0 = [P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} \cdot \left(\bar{\Gamma} - Q \cdot \sum_{j=1}^n B(x_n, x_j) \cdot \bar{Z}_j \right) \quad (\text{A.16})$$

причому слід покласти $\bar{Z}_0 = \bar{0}$, $\bar{S}_n = \bar{0}$.

Обчислимо ще

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^x B_i(x, s) \bar{R}_i(s) ds &= \int_{x_i}^x \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r_i(s) \end{pmatrix} ds = \\ &= \int_{x_i}^x \begin{pmatrix} b_i(x, s) \cdot -r_i(s) \\ -r_i(s) \end{pmatrix} ds \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} I_i(x) \\ I_i^1(x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

де позначено $I_i(x) = -\int_{x_i}^x b_i(x, s) \cdot r_i(s) ds$, $I_i^1(x) = -\int_{x_i}^x r_i(s) ds$.

В цих позначеннях, згідно з (A.15)

$$\bar{Z}_j = \begin{pmatrix} I_{j-1}(x_j) \\ I_{j-1}^1(x_j + s_j) \end{pmatrix}, \quad \bar{Z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Z}_n = \begin{pmatrix} I_{n-1}(x_n) \\ I_{n-1}^1(x_n) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Таким чином ми отримали наступний результат, який сформулюємо у вигляді:

Твердження А.2.1 За умови $\det[P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} \neq 0$ на кожному з проміжків x_i, x_{i+1} задача (A.4)-(A.5) має єдиний розв'язок, що зображується у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{T}_i(x) &= B_i(x, x_i) \cdot B(x_i, x_0) \cdot \bar{T}^0 + \\ &+ B_i(x, x_i) \cdot \sum_{j=0}^i B(x_i, x_j) \cdot \bar{Z}_j + \int_{x_i}^x B_i(x, s) \bar{R}_i(s) ds, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

($i=0, 1, 2, \dots, n-1$) і є абсолютно-неперервною вектор-функцією, де матриці

В x_i, x_j та вектори \bar{Z}_j обчислюються за формулами (А.9), (А.15) відповідно, причому, $B_{x_i, x_i} = E$ ■.

Наслідок А.2.1 На всьому проміжку $0, \ell = x_0, x_n$ розв'язок задачі (А.4)-(А.5) можна зобразити у вигляді

$$\bar{T}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{T}_i(x) \theta_i, \quad (\text{А.20})$$

при цьому стрибок розв'язку в точці $x = x_i$

$$\Delta \bar{T}_{x_i} = \frac{d}{dx} \bar{T}_{x_i} - \bar{T}_{x_i} - 0 = \bar{S}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{А.21})$$

Наслідок А.2.2 За відсутності внутрішніх зосереджених джерел тепла ($\bar{S}_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, n-1}$) розв'язок задачі (А.4)-(А.5) є абсолютно-неперервною на $0, \ell$ вектор-функцією, що відповідає умовам ідеального теплового контакту між шарами (рівність температур та густин теплових потоків на границях шарів).

Зауваження А.2.1 Наявність зосереджених джерел тепла призводить до порушення умов ідеального теплового контакту між шарами (в тому сенсі, що відбувається стрибок густин теплових потоків при неперервності температур).

А.2.1 Спеціальний випадок

Розглянемо частковий, але важливий випадок, коли коефіцієнт теплопровідності $\lambda(x)$ та функція $r(x)$ є кусково-сталими на x_0, x_n : $\lambda_i = const$, $r_i = const \quad \forall i = \overline{0, n-1}$ [86].

Тоді формули (А.8), (А.9), (А.10), (А.17) та (А.18) набувають вигляду:

$$B_{x, s} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{А.22})$$

$$B_{x_k, x_i} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=i}^{k-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{А.23})$$

$$B_k(x, x_k) \cdot B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \left[\frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum_{j=i}^{k-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

$$\int_{x_i}^x B_i(x, s) ds \cdot \bar{R}_i = \begin{pmatrix} \frac{-r_i}{2\lambda_i} (x - x_i)^2 \\ -r_i (x - x_i) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

$$z_i = -\frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} (x_i - x_{i-1})^2, \quad z_i^1 = -r_{i-1} (x_i - x_{i-1}), \quad z_0 = z_0^1 = 0, \quad s_0 = s_n = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\bar{Z}_0 = \bar{0}, \quad \bar{Z}_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_n^1 \end{pmatrix}.$$

В (A.26) для скорочення позначено $I_{i-1}(x_i) = z_i$, $I_{i-1}^1(x_i) = z_i^1$.

В цих позначеннях, очевидно, що

$$\bar{Z}_i = \begin{pmatrix} z_i \\ z_i^1 + s_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

A.2.2 Розрахунок стаціонарного температурного поля

Розв'яжімо задачу. На проміжку необхідно x_i, x_{i+1} знайти розподіл температурного поля $t(x)$ та густини теплового потоку $q(x)$ багат шарової плоскої конструкції, якщо на її зовнішніх поверхнях задано значення температури [86]:

$$\begin{cases} t(x_0) = t_0 \\ t(x_n) = t_n \end{cases}$$

Діятимемо так:

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що крайові умови можна записати у вигляді (A.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(x_0) \\ t^1(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(x_n) \\ t^1(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_n \end{pmatrix}.$$

На основі (A.16) отримуємо:

$$\bar{T}^0 = \begin{pmatrix} t^0 \\ t^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_n - t_0 - \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ z_i + z_i^1 + s_i \cdot \sum_{j=i}^{n-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right\}}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j}} \end{pmatrix}.$$

Підставляючи тепер знайдений вектор \bar{T}^0 , остаточно отримуємо, що

$$\begin{aligned} t_i x &= t_0 + \frac{t_n - t_0 - \sum_{j=1}^n \left\{ z_j + z_j^1 + s_j \cdot \sum_{k=j}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{\lambda_k} \right\}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{\lambda_k}} \times \left[\frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{\lambda_k} \right] - \\ &\quad - \sum_{j=0}^i \left\{ z_j + z_j^1 + s_j \cdot \left[\frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sum_{k=j}^{i-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{\lambda_k} \right] \right\} - \frac{r_i}{2\lambda_i} (x - x_i)^2, \\ t_i^1 x &= \frac{t_n - t_0 - \sum_{j=1}^n \left\{ z_j + z_j^1 + s_j \cdot \sum_{k=j}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{\lambda_k} \right\}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{\lambda_k}} - \sum_{j=0}^i z_j + z_j^1 + s_j - r_i (x - x_i). \end{aligned}$$

Зауважимо, що $q_i x = -t_i^1 x$.

Вирази для температури $t_i x$ і густини теплового потоку $q_i x$ отримані на довільному проміжку x_i, x_{i+1} . За допомогою характеристичних функцій θ_i температура $t x$ і тепловий потік $q x$ можуть бути записані єдиними аналітичними виразами для всієї конструкції

$$t x = \sum_{i=0}^{n-1} t_i x \theta_i, \quad q x = \sum_{i=0}^{n-1} q_i x \theta_i.$$

А.3 Дослідження теплообміну в багат шарових плоских конструкціях за умов на границях розділу суміжних шарів

Як зазначено в попередньому підрозділі, в класичних задачах теплопереносу (див. напр. [18, 38, 49]) до рівняння (А.2)

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x \theta_i \cdot t' \right)' = - \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i \delta x - x_i$$

додається система двох лінійно-незалежних крайових умов в точках $x = x_0$ і $x = x_n$. В даному підрозділі вважатимемо, що в довільній точці x_k , $k=0,1,\dots,n$ задається значення температури та густини теплового потоку (рис. А.2), тобто розглядаються умови

$$\begin{cases} t_k(x_k) = t^k, \\ t_k^{[1]}(x_k) = t^{[1]k}. \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

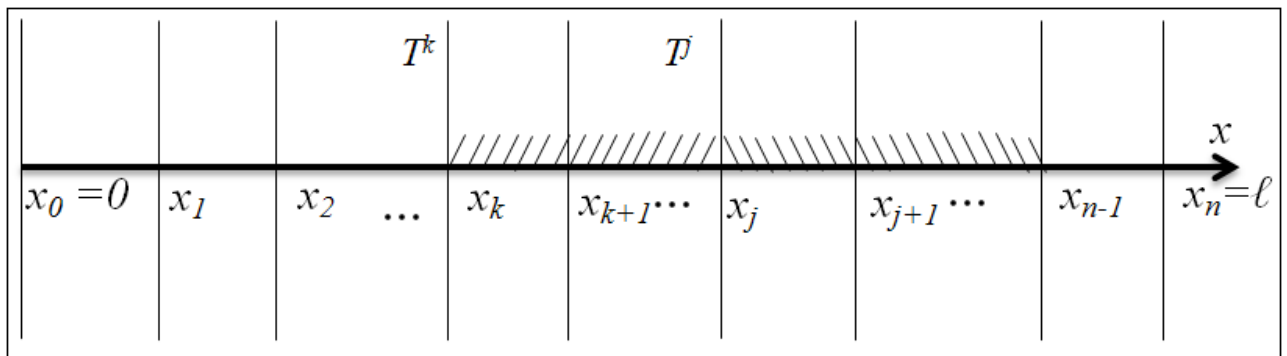


Рисунок А.2 – Умови на границі розділу шарів

Задача (А.2), (А.28) (задача Коші) є математичною моделлю розподілу температурного поля в багатошаровій плиті при найбільш загальних припущеннях відносно характеру внутрішніх джерел тепла при заданій температурі та тепловому потоці на границях розподілу довільних двох суміжних шарів, включаючи одну із зовнішніх поверхонь [87] (нагадаємо, що $t^{[1]}(x_k) = -q(x_k)$, де $q(x_k)$ – значення густини теплового потоку в точці $x = x_k$).

Розв'язування цієї задачі проводитимемо, як і раніше, методом зведення до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку (А.4)

$$\bar{T}' = \left(\sum_{i=0}^{n-1} A_i \theta_i \right) \cdot \bar{T} + \sum_{i=0}^{n-1} R_i \theta_i + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{S}_i \cdot \delta x - x_i,$$

з умовою Коші в точці $x = x_k$

$$\bar{T}(x_k) = \bar{T}^k. \quad (\text{A.29})$$

Розв'язування задачі (А.4) з умовою (А.29) проводимо аналогічно як і задачі (А.4)-(А.5). При цьому вектор \bar{T}^k грає роль початкового вектора \bar{T}^0 з цією відмінністю, що він не визначається як \bar{T}^0 з використанням формули (А.16) та умови (А.5), а вважається відомим.

Отриманий результат сформулюємо у вигляді [86, 89]:

Твердження А.3.1. На кожному з проміжків $[x_j, x_{j+1}]$ задача Коші (А.4), (А.29) має єдиний розв'язок $\bar{T}_j x$, що зображується у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{T}_j x = & B_j(x, x_j) B(x_j, x_k) \bar{T}^k + \\ & + B_j(x, x_j) \sum_{i=k}^j B(x_j, x_i) \bar{Z}_i + \int_{x_j}^x B_j(x, s) \bar{R}_j(s) ds, \end{aligned} \quad (\text{А.30})$$

$$j = k, k+1, \dots, n-1,$$

де матриці $B_j(x, x_j)$, $B(x_j, x_k)$, та вектор \bar{Z}_i визначені формулами (А.8), (А.9) та (А.15) відповідно ■.

Припустимо тепер, що в формулі (А.30) вектор \bar{T}^k невідомий, натомість відомий вектор \bar{T}^j . Тоді підставляючи в (А.30) $x = x_j$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \bar{T}_j(x_j) = & B_j(x_j, x_j) B(x_j, x_k) \bar{T}^k + B_j(x_j, x_j) \sum_{i=k}^j B(x_j, x_i) \bar{Z}_i + \int_{x_j}^{x_j} B_j(x_j, s) \bar{R}_j(s) ds, \\ & j = k, k+1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Звідси

$$\bar{T}^j = B(x_j, x_k) \bar{T}^k + \sum_{i=k}^j B(x_j, x_i) \bar{Z}_i. \quad (\text{А.31})$$

Домножуючи обидві частини (А.31) зліва на $B^{-1}(x_j, x_k)$, остаточно отримуємо, що

$$\bar{T}^k = B^{-1}(x_j, x_k) \left[\bar{T}^j - \sum_{i=k}^j B(x_j, x_i) \bar{Z}_i \right]. \quad (\text{А.32})$$

Зауваження А.3.1. Для знаходження розв'язку можна користуватись рекурентними співвідношеннями

$$\bar{T}_j(x_j) = B_{j-1}(x_j, x_{j-1})\bar{T}_{j-1}(x_{j-1}) + \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_j, s)\bar{R}_{j-1}(s)ds + \bar{S}_j, \quad (\text{A.33})$$

$$\bar{T}_{j-1}(x_{j-1}) = B_{j-1}(x_{j-1}, x_j)\left[\bar{T}_j(x_j) - \bar{S}_j\right] + \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_j, s)\bar{R}_{j-1}(s)ds, \quad (\text{A.34})$$

при продовженні розв'язків праворуч та ліворуч відповідно.

Зауваження А.3.2. Слід відзначити той частинний випадок, коли вдається «виміряти» вектор $\bar{T}_{n-1}(x_n) \stackrel{df}{=} \bar{T}^n$. Тоді на кожному з проміжків $[x_k, x_{k+1})$, $k = \overline{0, n-1}$ вектор \bar{T}^k визначається шляхом застосування рекурентної формули (А.34) для продовження ліворуч, або використання явної формули (А.32), де слід прийняти $j = n$.

А.3.1 Розрахунок стаціонарного температурного поля за умов на границі розділу суміжних шарів

Восьмишарова плоска стінка складається з вапняної штукатурки, червоної цегли, силікатної цегли, пінобетону, сухого піску, гіпсоплити, шлакобетону, та вапняної штукатурки [87]. В шарах стінки існують внутрішні розподілені (r_k) , а між шарами точкові (s_k) джерела тепла. На зовнішніх поверхнях стінки підтримується деяка (невідома поки що) стала температура. Необхідно знайти розподіл температурного поля та розподіл густини теплового потоку восьмишарової плоскої стінки за умов, коли відомо значення температури та густини теплового потоку на правій стінці плити, в точці $x = x_8$

$$\bar{T}_7(x_8) = \left(\begin{array}{l} t_7(x_8) = 35,93^\circ\text{C} \\ q_7(x_8) = 715,86 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{array} \right).$$

Вихідні дані для розрахунку стаціонарного температурного поля восьмишарової плоскої стінки наведено в табл. А.1 [24].

Вихідні дані для розрахунку стаціонарного температурного поля за умов на границях розділу суміжних шарів

Склад стінки	Товщина Δ , м	Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right]$	Внутрішнє розподілене джерело тепла $r, \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3} \right]$	Точкове джерело тепла між шарами $s, \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$
<i>Вапняна штукатурка</i>	0,03	0,7	-80	50
<i>Червона цегла</i>	0,24	0,455	40	
<i>Силікатна цегла</i>	0,12	0,79	-120	-30
<i>Пінобетон</i>	0,18	0,14	-130	70
<i>Сухий пісок</i>	0,1	0,35	-140	-60
<i>Гіпсоплита</i>	0,2	0,35	-120	-80
<i>Шлакобетон</i>	0,1	0,58	-130	-90
<i>Вапняна штукатурка</i>	0,03	0,7	-130	-110

Розв'язок

Для знаходження значення вектора $\bar{T}_7(x_7)$, ліворуч від точки $x = x_8$, використовуємо рекурентне співвідношення (А.34), зауваживши, що:

$$\bar{T}_8(x_8) = \bar{T}_7(x_8) = \begin{pmatrix} t_8(x_8) = 35,93^\circ\text{C} \\ t_8^{[1]}(x_8) = -715,86 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_7(x_7) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_7 - x_8}{\lambda_7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_8(x_8) & 0 \\ t_8^{[1]}(x_8) & s_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_7 \cdot (x_8 - x_7)^2}{2 \cdot \lambda_7} \\ r_7 \cdot (x_8 - x_7) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,97 - 1}{0,7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 35,93 & 0 \\ -715,86 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-130 \cdot (1 - 0,97)^2}{2 \cdot 0,7} \\ -130 \cdot (1 - 0,97) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66,53^\circ \text{C} \\ -711,96 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для знаходження розподілу температурного поля на проміжку $[x_7, x_8)$ використовуємо формулу (А.30):

$$\begin{aligned} \bar{T}_7(x) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_7}{\lambda_7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_7(x_7) \\ t_7^{[1]}(x_7) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_7 \cdot (x - x_7)^2}{2 \cdot \lambda_7} \\ r_7 \cdot (x - x_7) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - 0,97}{0,7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 66,53 \\ -711,96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-130 \cdot (x - 0,97)^2}{2 \cdot 0,7} \\ -130 \cdot (x - 0,97) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -92,86x^2 - 836,94x + 965,73 \\ -130x - 585,86 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Проводячи аналогічні розрахунки отримуємо значення вектор-функції (функції температури та густини теплового потоку) на кожному з проміжків (табл. А.2).

Таблиця А.2

Функції температури та густини теплового потоку

Проміжок	Функція	Значення
x_0, x_1	$t \ x$	$-57,14x^2 - 543,37x + 1200$
	$q \ x$	$80x + 380,86$
x_1, x_2	$t \ x$	$43,96x^2 - 733,98x + 1205,63$
	$q \ x$	$-40x + 333,96$
x_2, x_3	$t \ x$	$-75,95x^2 - 406,03x + 1125,82$
	$q \ x$	$120x + 320,76$
x_3, x_4	$t \ x$	$-464,29x^2 - 1763,29x + 1714,22$

продовження таблиці А.2

	$q \ x$	$130x + 246,86$
x_4, x_5	$t \ x$	$-200x^2 - 860,46x + 1113,74$
	$q \ x$	$140x + 301,16$
x_5, x_6	$t \ x$	$-171,43x^2 - 1127,31x + 1279,71$
	$q \ x$	$120x + 394,56$
x_6, x_7	$t \ x$	$-112,07x^2 - 820,45x + 967,81$
	$q \ x$	$130x + 475,86$
x_7, x_8	$t \ x$	$-92,86x^2 - 836,94x + 965,73$
	$q \ x$	$130x + 585,86$

Графік розподілу температурного поля та густини теплового потоку восьмишарової плоскої стінки зображено на рис. А.3 та А.4 відповідно.

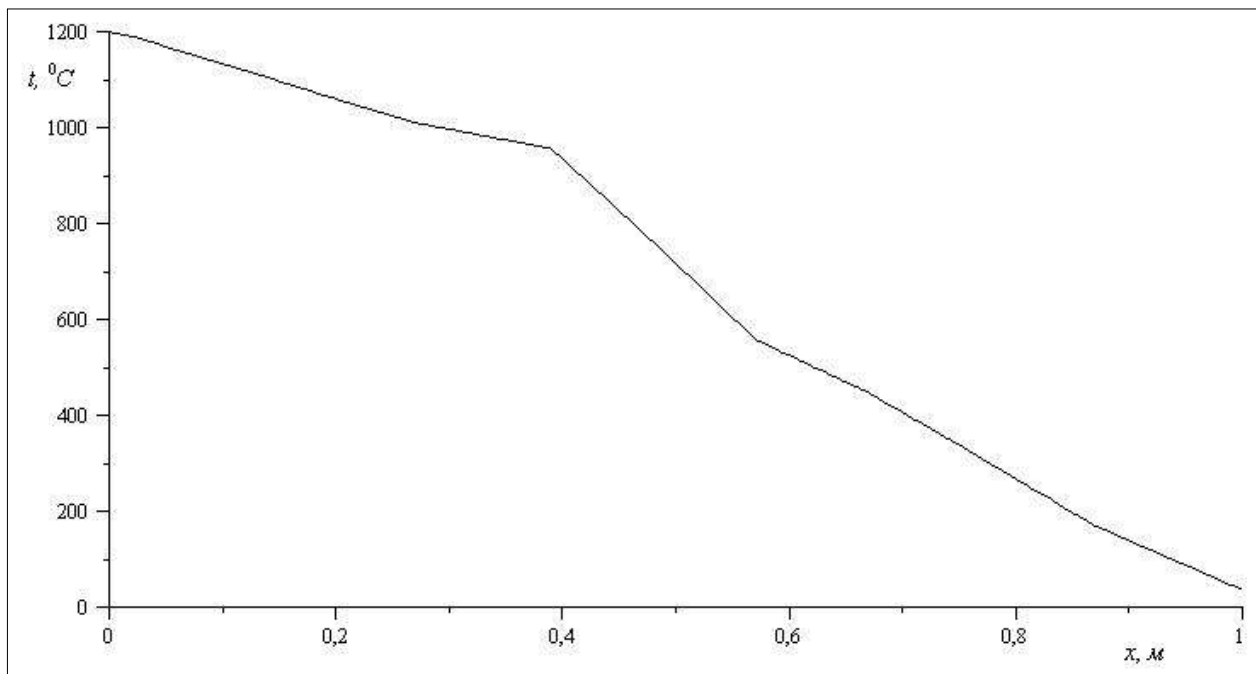


Рисунок А.3 – Розподіл стаціонарного температурного поля восьмишарової плоскої стінки

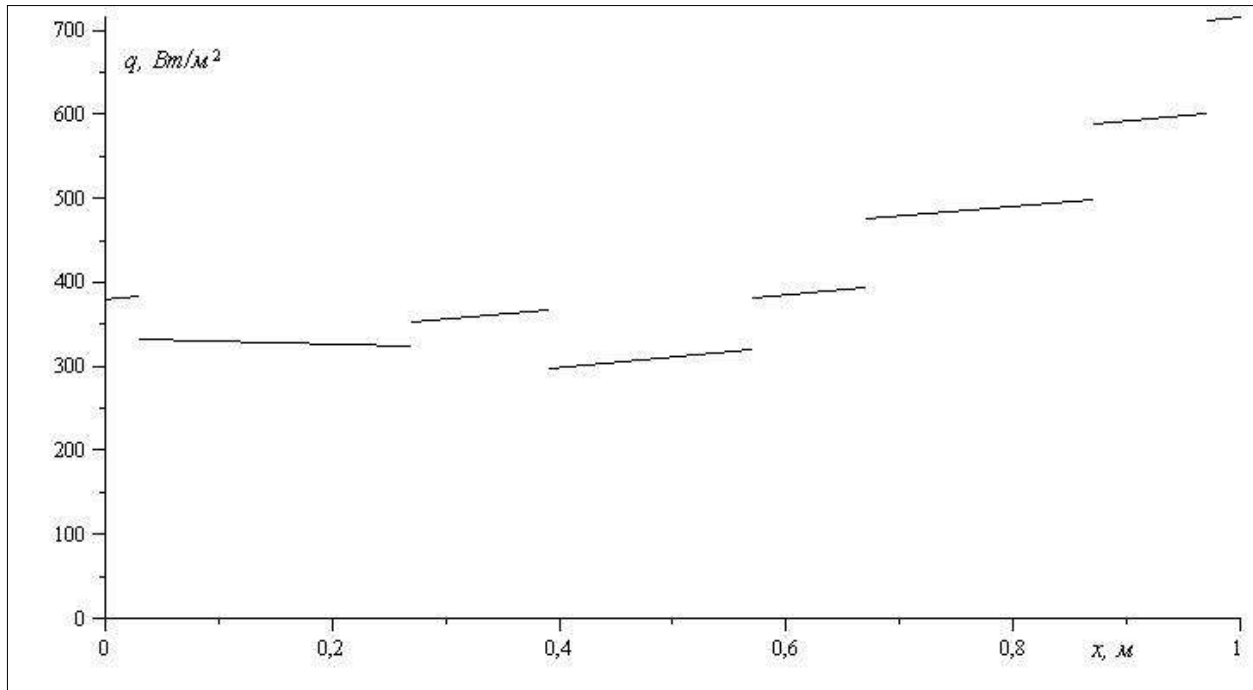


Рисунок А.4 – Розподіл густини теплового потоку восьмишарової плоскої стінки

А.4 Нестандартні двоточкові умови

При дослідженні процесів теплопереносу в багатошарових тілах традиційно задаються крайові умови, тобто умови в початковій та кінцевих точках [24].

В даному розділі припускається, що такі точки можуть виявитись «недосяжними» і пропонується задавати умови в будь-яких інших, взагалі кажучи, внутрішніх точках [85].

Запропонований метод зведення доточкової задачі до задачі Коші дозволяє тут в повний мірі використати результати попереднього підрозділу.

Розглянемо знову (квазі)диференціальне рівняння (А.2.)

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x \theta_i \cdot t' \right)' = - \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i \delta x - x_i .$$

Припустатимемо, що задається система лінійно-незалежних двоточкових умов в будь-яких двох точках $x = x_k$ та $x = x_m \in x_0, x_n$:

$$\begin{cases} p_{11} \cdot t_{x_k} + p_{12} \cdot t_{x_k}^1 + q_{11} \cdot t_{x_m} + q_{12} \cdot t_{x_m}^1 = \gamma_1, \\ p_{21} \cdot t_{x_k} + p_{22} \cdot t_{x_k}^1 + q_{21} \cdot t_{x_m} + q_{22} \cdot t_{x_m}^1 = \gamma_2. \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

Тут p_{ij} , q_{ij} , γ_i – відомі дійсні числа, t_{x_k} , $t_{x_k}^1$, t_{x_m} , $t_{x_m}^1$ – значення температури та теплового потоку в точках $x = x_k$ і $x = x_m$ відповідно (рис. А.5).

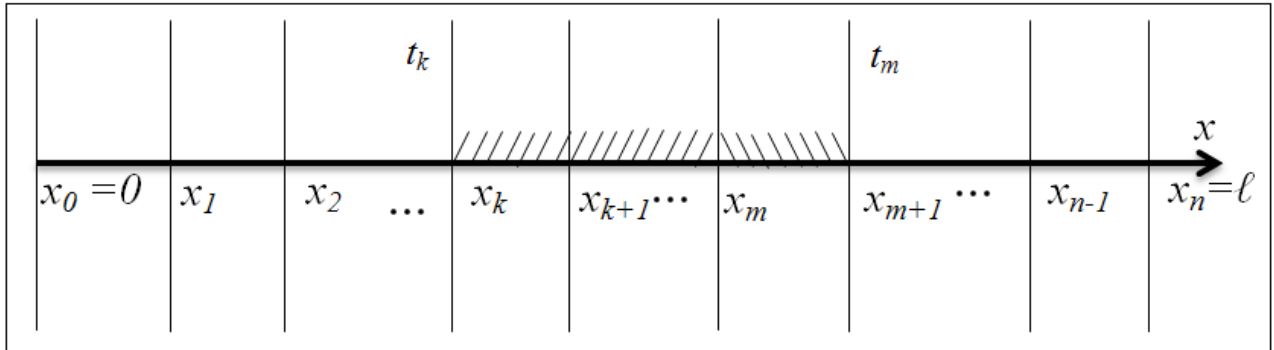


Рисунок А.5 – Нестандартні двоточкові умови

Легко переконатися, що кількість можливих двоточкових умов типу (А.35) для n шарів дорівнює $\frac{n(n+1)}{2}$. Очевидно, що класична крайова задача є частинним випадком задачі (А.2), (А.35) при $k = 0$, $m = n$.

Задача (А.2), (А.35) є математичною моделлю розподілу температурного поля в багат шаровій плиті при найбільш загальних (двоточкових) умовах та припущеннях відносно характеру внутрішніх джерел тепла.

Використаємо тепер традиційний метод зведення задачі (А.2), (А.35) до еквівалентної задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку (А.4)

$$\bar{T}' = \left(\sum_{i=0}^{n-1} A_i \theta_i \right) \cdot \bar{T} + \sum_{i=0}^{n-1} R_i \theta_i + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{S}_i \cdot \delta(x - x_i),$$

з умовою Коші в точці $x = x_k$

$$\bar{T}_{x_k} = \bar{T}^k, \quad (\text{A.36})$$

де вектор \bar{T}^k грає роль вектора \bar{T}^0 в формулі (А.16), причому роль матриць

B_{x_n, x_0} , B_{x_n, x_i} , грають матриці B_{x_m, x_k} , B_{x_m, x_i} відповідно, тобто

$$\bar{T}^k = P + Q \cdot B_{x_m, x_k}^{-1} \cdot \left(\bar{\Gamma} - Q \cdot \sum_{i=k}^m B_{x_m, x_i} \cdot \bar{Z}_i \right) \quad (\text{A.37})$$

Таким чином отримуємо результат, що цілком аналогічний твердженню (A.3.1) [85].

Твердження А.4.1. На кожному з проміжків $[x_j, x_{j+1}]$ задача Коші (A.4), (A.36) має єдиний розв'язок, що зображується у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{T}_j(x) = & B_j(x, x_j) B_{x_j, x_k} \bar{T}^k + B_j(x, x_j) \sum_{i=k}^j B_{x_j, x_i} \bar{Z}_i + \\ & + \int_{x_j}^x B_j(x, s) \bar{R}_j(s) ds, \quad j = k, k+1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

де матриці B_{x_j, x_i} і вектори \bar{Z}_i обчислюються за формулами (A.9) і (A.15) відповідно ■.

Підкреслимо, що цей розв'язок існує та єдиний тоді і тільки тоді, якщо

$$\det P + Q \cdot B_{x_m, x_k}^{-1} \neq 0.$$

Продовження цього розв'язку праворуч та ліворуч від точки x_k проводиться способами, що описані в підрозділі (A.3.) (див. формули (A.30), (A.32) та (A.33), (A.34)).

А.4.1 Розрахунок стаціонарного температурного поля за нестандартних крайових умов

Чотиришарова плоска стінка складається з важкого бетону на гранітному наповнювачі, глини, червоної цегли і пінопласту. В шарах стінки існують внутрішні розподілені (r_k), а між шарами точкові (s_k) джерела тепла. На зовнішніх поверхнях стінки підтримується деяка (невідомо поки що) стала температура. Необхідно знайти розподіл температурного поля та розподіл густини теплового потоку чотиришарової плоскої стінки за умов, коли відомо значення температур в точках $x = x_1$ та $x = x_3$ [85].

$$t_1(x_1) = 732,77^{\circ}\text{C},$$

$$t_2(x_3) = 558,93^{\circ}\text{C}.$$

Вихідні дані для розрахунку стаціонарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки за умов неідеального теплового контакту між шарами наведено в табл. А.3 [24].

Таблиця А.3

Вихідні дані для розрахунку стаціонарного температурного поля при нестандартних крайових умовах

Склад стінки	Товщина Δ , м	Коефіцієнт теплопровідності λ , $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}\right]$	Внутрішнє розподілене джерело тепла r , $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}\right]$	Точкове джерело тепла між шарами s , $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right]$
<i>Важкий бетон на гранітному наповнювачі</i>	0,2	1,2	-230	200
<i>Глина</i>	0,1	1,4	330	
<i>Червона цегла</i>	0,25	0,455	-290	-300
<i>Пінопласт</i>	0,05	0,04	280	120

Розв'язок

Необхідно знайти розподіл температурного поля у випадку, коли відома («виміряна») температура в точках x_1 та x_3 .

$$\begin{cases} t(x_1) = t_1 = 732,77^{\circ}\text{C}, \\ t(x_3) = t_2 = 558,93^{\circ}\text{C}. \end{cases}$$

Запишемо крайові умови (А.35) у матричному вигляді (А.5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(x_1) \\ t^{[1]}(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(x_3) \\ t^{[1]}(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ t_2(x_3) \end{pmatrix}.$$

Для знаходження початкового вектора \vec{T}^{-1} слід скористатись формулою

(A.37)

$$\begin{aligned}
\bar{T}^1 = \bar{T}_1 \quad x_1 &= [P + Q \cdot B \quad x_3, x_1]^{-1} \cdot [\bar{\Gamma} - Q \cdot \sum_{i=1}^{k=3} B \quad x_3, x_i \cdot \bar{Z}_i] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_3 - x_1}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \times \\
&\times \left[\begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ t_2(x_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sum_{i=2}^{k=3} \left[\begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=2}^{k-1=2} \frac{x_{i+1} - x_j}{\lambda_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} (x_i - x_{i-1})^2 \\ r_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + s_i \end{pmatrix} \right] \right] = \\
&= \left(\frac{\begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ t_2(x_3) - t_1(x_1) + \sum_{i=2}^3 \left\{ \left(\frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} (x_i - x_{i-1})^2 \right) + (x_i - x_{i-1}) + s_i \cdot \sum_{j=i}^{3-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right\} \end{pmatrix}}{\sum_{j=1}^{3-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j}} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} t_1(x_1) = 732,77^\circ\text{C} \\ t_1^{[1]}(x_1) = -376,36 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Для одержання значення вектора $T_0(x_0)$ використаємо рекурентне співвідношення (A.34):

$$\begin{aligned}
T_0(x_0) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_0 - x_1}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ t_1^{[1]}(x_1) - s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_0 \cdot (x_1 - x_0)^2}{2 \cdot \lambda_0} \\ r_0 \cdot (x_1 - x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0 - 0,2}{1,2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 732,77 & 0 \\ -376,36 & 50 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{-230 \cdot (0,2 - 0)^2}{2 \cdot 1,2} \\ -230 \cdot (0,2 - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800^\circ\text{C} \\ -380,36 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Для визначення розподілу температурного поля на проміжку $[x_0, x_1]$ використовуємо (A.38):

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_0}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_0(x_0) \\ t_0^{[1]}(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_0 \cdot (x - x_0)^2}{2 \cdot \lambda_0} \\ r_0 \cdot (x - x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - 0}{1,2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ -380,36 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{-230 \cdot (x - 0)^2}{2 \cdot 1,2} \\ -230 \cdot (x - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -95,83x^2 - 316,97x + 800 \\ -230x - 380,36 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Проводячи аналогічні розрахунки отримуємо значення вектор-функції (функції температури та густини теплового потоку) на кожному з проміжків

(табл. А.4).

Таблиця А.4

Функції температури та густини теплового потоку

Проміжок	Функція	Значення
x_0, x_1	$t \ x$	$-95,83x^2 - 316,97x + 800$
	$q \ x$	$230x + 380,36$
x_1, x_2	$t \ x$	$117,86x^2 - 315,97x + 791,25$
	$q \ x$	$-330x + 442,36$
x_2, x_3	$t \ x$	$-318,86x^2 - 321,67x + 832,25$
	$q \ x$	$290x + 146,36$
x_3, x_4	$t \ x$	$3500x^2 - 14746,5x + 7610,76$
	$q \ x$	$-280x + 589,86$

Графік розподілу температурного поля та густини теплового потоку восьмишарової плоскої стінки зображено на рис. А.6 та рис. А.7 відповідно.

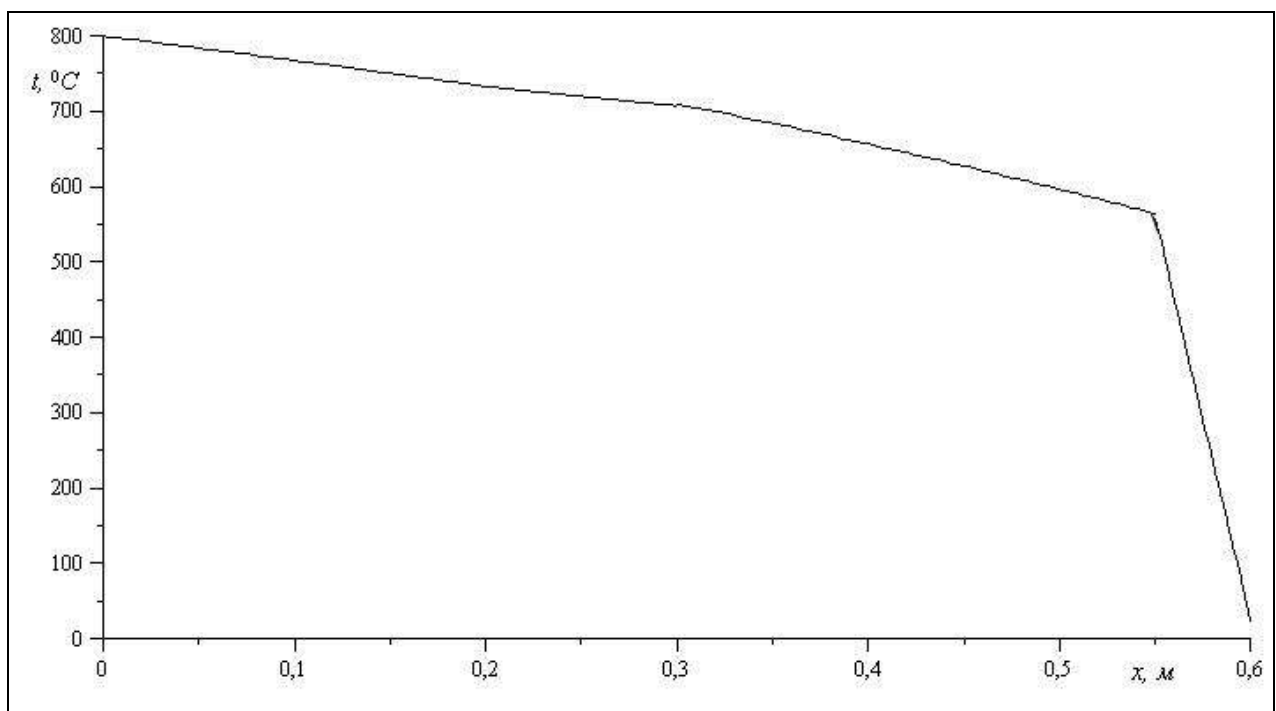


Рисунок А.6 – Розподіл стаціонарного температурного поля чотирьох шарів плоскої стінки.

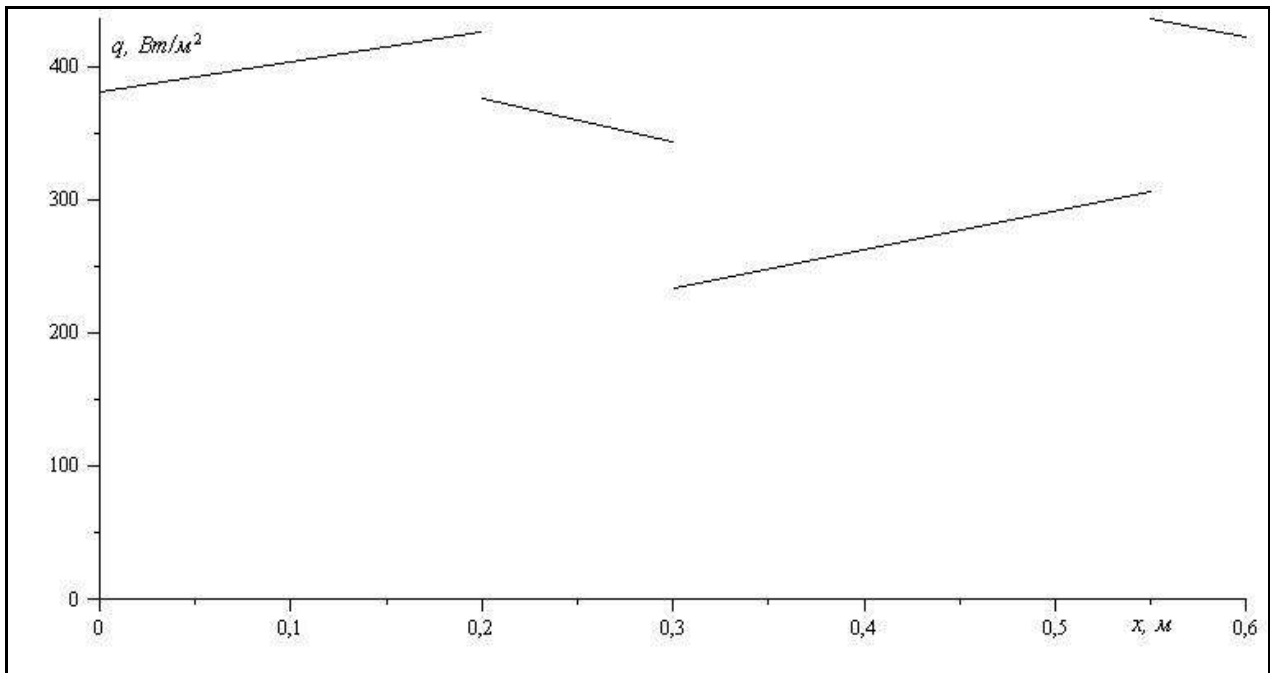


Рисунок А.7 – Розподіл густини теплового потоку чотиришарової плоскої стінки.

А.5 Неідеальний тепловий контакт між шарами та системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

Розглядається задача про розподіл одновимірного стаціонарного поля в багатошаровій плоскій конструкції, яка поділена на n шарів різної товщини площинами $x = x_i$, $i = \overline{0, n}$, причому $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$. Припускається, що кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності λ_i та внутрішнім неперервним джерелом тепла r_i . На границях шарів (окрім зовнішніх) закладається наявність точкових джерел тепла s_i та умов неідеального теплового контакту. Вважатимемо також, що в деякій точці $x = x_m$, ($0 \leq m \leq n$) відомі «виміряні» значення температури t_{x_m} та густини теплового потоку q_{x_m} .

В роботах [26, 95, 105, 107], поставлена задача зводиться до розв'язування (квазі)диференціального рівняння

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot x \cdot \theta_i \cdot t' \right)' = - \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i \quad (\text{A.39})$$

за умов спряження

$$\begin{cases} t_i x_i - t_{i-1} x_i = \frac{1}{\alpha_i} t_{i-1}^1 x_i, \\ t_i^1 x_i - t_{i-1}^1 x_i = s_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

та умови Коші

$$\begin{cases} t x_m = t^m, \\ t^{[1]} x_m = t^{[1]m}. \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

Тут на проміжку x_{i-1}, x_i позначено $t_{i-1} x$ – температура, $t_{i-1}^{[1]} x = \lambda_{i-1} t'_{i-1} = -q_{i-1} x$ – квазіпохідна (густина теплового потоку зі знаком «мінус» [85, 86]), $\lambda_{i-1} > 0$, $r_{i-1}, s_i \in \mathbb{R}$, α_i – коефіцієнт теплообміну між $i-1$ та i шарами.

Зауваження А.5.1. У випадку коли точкові джерела тепла відсутні ($s_i = 0 \quad \forall i$), умови (A.40) набувають «класичного» вигляду умов неідеального теплового контакту [64].

А.5.1 Зведення до системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

Введемо вектори $\bar{T} = \begin{pmatrix} t \\ t^1 \end{pmatrix}$, $\bar{T}_i = \begin{pmatrix} t_i \\ t_i^{[1]} \end{pmatrix}$, $\bar{P}_m = \bar{T}_m = \begin{pmatrix} t_m \\ t_m^{[1]} \end{pmatrix}$, $\bar{R}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_i \end{pmatrix}$,

$\bar{S}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -s_i \end{pmatrix}$ та матриці $A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді задача (A.39), (A.40), (A.41), зводиться до еквівалентної їйому системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією [72, 100]:

$$\bar{T}' = \left(\sum_{i=0}^{n-1} A_i \theta_i \right) \cdot \bar{T} + \bar{R}_i, \quad (\text{A.42})$$

$$\bar{T}_i x_i - \bar{T}_{i-1} x_i = C_i \cdot \bar{T}_{i-1} x_i + \bar{S}_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (\text{A.43})$$

з умовою Коші

$$\bar{T} x_m = \bar{P}_m. \quad (\text{A.44})$$

Під розв'язком системи (A.42), (A.43) розуміємо кусково-абсолютну неперервну праворуч вектор-функцію $\bar{T} x$, що справджує цю систему майже всюди, а в точках x_i , $i = \overline{0, n-1}$ умови спряження (A.43).

A.5.2 Структура розв'язку задачі (A.42), (A.43), (A.44)

$$\text{Введемо вектори } \bar{T} = \begin{pmatrix} t \\ t^1 \end{pmatrix}, \bar{T}_i = \begin{pmatrix} t_i \\ t_i^{[1]} \end{pmatrix}, \bar{P}_m = \bar{T}_m = \begin{pmatrix} t_m \\ t_m^{[1]} \end{pmatrix}, \bar{R}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_i \end{pmatrix}.$$

На проміжку x_i, x_{i+1} , $m \leq i \leq n-1$, розглянемо систему

$$\bar{Y}'_i = A_i \cdot \bar{Y}_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (\text{A.45})$$

яку називатимемо визначальною.

Вважатимемо відомою матрицю-функцію Коші $B_i x, s$ системи (A.45), яка володіє наступними властивостями [105]:

- $B_i x, s$ за змінною x справджує матричне рівняння $\frac{\partial B_i x, s}{\partial x} = A_i B_i x, s$;
- $B_i x, x = E$, де E – одинична матриця;
- $\forall x_1, x_2, x_3 \in x_i, x_{i+1}$ виконується рівність $B x_3, x_2 \cdot B x_2, x_1 = B x_3, x_1$;
- $B_i^{-1} x, s = B_i s, x$.

Розв'язок $\bar{T}_i x$ відповідної неоднорідної системи на проміжку x_i, x_{i+1}

$$\bar{T}'_i = A_i \cdot \bar{T}_i + \bar{R}_i, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (\text{A.46})$$

шукатимемо у вигляді

$$\bar{T}_i x = B_i x, x_i \cdot \bar{P}_i + \int_{x_i}^x B_i x, s \cdot \bar{R}_i s ds, \quad (\text{A.47})$$

де, \bar{P}_i – невідомий вектор. Підставляючи (A.47) $x = x_i$, отримуємо, що

$$\bar{P}_i = \bar{T}_i x_i = \bar{T}^i. \quad (\text{A.48})$$

Зокрема, $\bar{P}_m = \bar{T}^m$, де \bar{T}^m визначений умовою Коші (A.44).

Аналогічно, на проміжку x_{i+1}, x_{i+2} отримуємо

$$\bar{T}_{i+1} x = B_{i+1} x, x_{i+1} \cdot \bar{P}_{i+1} + \int_{x_{i+1}}^x B_{i+1} x, s \cdot \bar{R}_{i+1} s ds. \quad (\text{A.49})$$

В точці $x = x_{i+1}$ повинна виконуватись умова спряження (A.43), тобто

$$\bar{T}_{i+1} x_{i+1} - \bar{T}_i x_{i+1} = C_{i+1} \cdot \bar{T}_i x_{i+1} + \bar{S}_{i+1}. \quad (\text{A.50})$$

Застосування умови (A.50) до рівностей (A.47) и (A.48) приводить до рекурентного співвідношення

$$\bar{P}_{i+1} = E + C_{i+1} \left[B_i x_{i+1}, x_i \cdot \bar{P}_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} B_i x_{i+1}, s \bar{R}_i s ds \right] + \bar{S}_{i+1}. \quad (\text{A.51})$$

Введемо наступні позначення:

$$C_i \stackrel{df}{=} E + C_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$B x_p, x_q \stackrel{df}{=} C_p \cdot B_{p-1} x_p, x_{p-1} \cdot C_{p-1} \cdot B_{p-2} x_{p-1}, x_{p-2} \cdots C_q \cdot B_{q-1} x_q, x_{q-1}, \quad (\text{A.52})$$

$$B x_p, x_p \stackrel{df}{=} E;$$

$$\bar{Z}_j \stackrel{df}{=} C_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1} x_j, s \bar{R}_{j-1} s ds + \bar{S}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \bar{S}_n = 0, \quad \bar{Z}_0 \stackrel{df}{=} 0. \quad (\text{A.53})$$

На основі співвідношення (A.51) і позначень (A.52), (A.53) для довільного $k > 0$ методом математичної індукції по індексу k отримуємо співвідношення

$$\bar{P}_{m+k} = B x_{m+k}, x_m \cdot \bar{P}^m + \sum_{i=1}^k B x_{m+k}, x_{m+i} \cdot \bar{Z}_{m+i}, \quad (\text{A.54})$$

яке дозволяє знайти початковий вектор \bar{P}_{m+k} праворуч від $x = x_m$.

Вважаючи відомим вектор \bar{P}_{m+k} , з (A.54) знаходимо

$$\bar{P}_m = B^{-1} x_{m+k}, x_m \left[\bar{P}_{m+k} - \sum_{i=1}^k B x_{m+k}, x_{m+i} \cdot \bar{Z}_{m+i} \right], \quad (\text{A.55})$$

для знаходження початкового вектора ліворуч від точки $x = x_{m+k}$. Зауважимо,

що при цьому вимагається існування матриці $B^{-1}(x_{m+k}, x_m)$.

А.5.3 Розв'язок вихідної задачі

Для знаходження розв'язку задачі (А.42), (А.43), (А.44) на кожному з проміжків x_i, x_{i+1} , $i = \overline{0, n-1}$ необхідно знайти всі компоненти правої частини формули (А.47). Безпосередньою перевіркою переконаємось, що

$$B_i(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.56})$$

На основі позначень (А.52), методом математичної індукції встановлюємо, що

$$B(x_p, x_q) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=0}^{p-q-1} \left(\frac{x_{q+j+1} - x_{q+j}}{\lambda_{q+j}} + \frac{1}{\alpha_{q+j+1}} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.57})$$

Підставляючи (А.57) послідовно $p = m+k$, $q = m$ та $p = m+k$, $q = m+i$, отримуємо

$$B(x_{m+k}, x_m) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{x_{m+j+1} - x_{m+j}}{\lambda_{m+j}} + \frac{1}{\alpha_{m+j+1}} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.58})$$

$$B(x_{m+k}, x_{m+i}) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=0}^{k-i-1} \left(\frac{x_{m+i+j+1} - x_{m+i+j}}{\lambda_{m+i+j}} + \frac{1}{\alpha_{m+i+j+1}} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

Необхідно зауважити, що оскільки $\det B(x_{m+k}, x_m) = 1$, то $B^{-1}(x_{m+k}, x_m)$ існує завжди, причому

$$B^{-1}(x_{m+k}, x_m) = \begin{pmatrix} 1 & -\sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{x_{m+j+1} - x_{m+j}}{\lambda_{m+j}} + \frac{1}{\alpha_{m+j+1}} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.60})$$

Обчислимо також вирази для \bar{Z}_{m+i} та $B(x_{m+k}, x_{m+i}) \cdot \bar{Z}_{m+i}$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{m+i} &= \tilde{A}_{m+i} \int_{x_{m+i-1}}^{x_{m+i}} B_{m+i-1} x_{m+i}, s \bar{R}_{m+i-1} s ds + \bar{S}_{m+i} = \\ &= \left(\begin{array}{c} r_{m+i-1} (x_{m+i} - x_{m+i-1}) \left(\frac{x_{m+i} - x_{m+i-1}}{2\lambda_{m+i-1}} + \frac{1}{\alpha_{m+i}} \right) \\ r_{m+i-1} (x_{m+i} - x_{m+i-1}) + s_{m+i} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

$$\begin{aligned} &B(x_{m+k}, x_{m+i}) \cdot \bar{Z}_{m+i} = \\ &= \left(\begin{array}{c} r_{m+i-1} (x_{m+i} - x_{m+i-1}) \left(\frac{x_{m+i} - x_{m+i-1}}{2\lambda_{m+i-1}} + \frac{1}{\alpha_{m+i}} \right) + r_{m+i-1} (x_{m+i} - x_{m+i-1}) + s_{m+i} \times \\ \times \sum_{j=0}^{k-i-1} \left(\frac{x_{m+i+j+1} - x_{m+i+j}}{\lambda_{m+i+j}} + \frac{1}{\alpha_{m+i+j+1}} \right) \\ r_{m+i-1} (x_{m+i} - x_{m+i-1}) + s_{m+i} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Формули (A.56) - (A.62) вичерпно і однозначно описують структуру розв'язку вихідної задачі (A.42), (A.43), (A.44) на довільному проміжку $x_i, x_{i+1} \subset x_0, x_n$.

A.5.4 Розрахунок стаціонарного температурного поля за умов неідеального теплового контакту між шарами

Восьмишарова плоска стінка складається з вапняної штукатурки, червоної цегли, силікатної цегли, пінобетону, сухого піску, гіпсоплити, шлакобетону, та вапняної штукатурки. В шарах стінки існують внутрішні розподілені (r_k), а між шарами точкові (s_k) джерела тепла. Крім цього, між шарами існують неідеальні теплові контакти. На зовнішніх поверхнях стінки підтримується деяка (невідома поки що) стала температура. Необхідно знайти розподіл температурного поля та розподіл густини теплового потоку восьмишарової плоскої стінки за умов, коли відомо значення температури та густини теплового потоку в точці $x = x_4$

$$\bar{T}_4(x_4) = \left(\begin{array}{c} t_4(x_4) = 547,07^\circ \text{C} \\ q_4(x_4) = 380,96 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{array} \right).$$

Вихідні дані для розрахунку стаціонарного температурного поля восьмишарової плоскої стінки за умов неідеального теплового контакту між шарами наведено в табл. А.5 [24].

Таблиця А.5

Вихідні дані для розрахунку стаціонарного температурного поля за умов неідеального теплового контакту між шарами

Склад стінки	Товщина Δ , м	Коефіцієнт тепло- провідності λ , $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}\right]$	Внутрішнє розподілене джерело тепла r , $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}\right]$	Точкове джерело тепла між шарами s , $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right]$	Коефіцієнт теплообміну між шарами α , $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}\right]$
<i>Вапняна штукатурка</i>	0,03	0,7	-80	50	110
<i>Червона цегла</i>	0,24	0,455	40		
<i>Силікатна цегла</i>	0,12	0,79	-120	-30	100
				70	120
<i>Пінобетон</i>	0,18	0,14	-130	-60	220
<i>Сухий пісок</i>	0,1	0,35	-140	-80	270
				-90	150
<i>Гіпсоплита</i>	0,2	0,35	-120	-90	150
<i>Шлако-бетон</i>	0,1	0,58	-130	-110	240
				-110	240
<i>Вапняна штукатурка</i>	0,03	0,7	-130	-110	240

Розв'язок

Для знаходження значення вектора $\bar{T}_5(x_5)$, праворуч від точки $x = x_4$, використовуємо рекурентне співвідношення (А.54), зауваживши що

$$t_4^{[1]}(x_4) = -q_4(x_4):$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_5(x_5) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_5 - x_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\alpha_5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_4(x_4) \\ t_4^{[1]}(x_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_4(x_5 - x_4) \cdot \left(\frac{x_5 - x_4}{2 \cdot \lambda_4} + \frac{1}{\alpha_5} \right) \\ r_4 \cdot (x_5 - x_4) + s_5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,67 - 0,57}{0,35} + \frac{1}{270} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 547,07 \\ -380,96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -140 \cdot (0,67 - 0,57) \cdot \left(\frac{0,67 - 0,57}{2 \cdot 0,35} + \frac{1}{270} \right) \\ -140 \cdot (0,67 - 0,57) + (-80) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 434,76^\circ \text{C} \\ -474,96 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для знаходження значення вектора $\bar{T}_3(x_3)$, ліворуч від точки $x = x_4$, використовуємо рекурентне співвідношення (А.55):

$$\begin{aligned} \bar{T}_3(x_3) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_4 - x_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} t_4(x_4) \\ t_4^{[1]}(x_4) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_3(x_4 - x_3) \cdot \left(\frac{x_4 - x_3}{2 \cdot \lambda_3} + \frac{1}{\alpha_4} \right) \\ r_3 \cdot (x_4 - x_3) + s_4 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,57 - 0,39}{0,14} + \frac{1}{220} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 547,07 \\ -380,96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -130 \cdot (0,57 - 0,39) \cdot \left(\frac{0,57 - 0,39}{2 \cdot 0,14} + \frac{1}{220} \right) \\ -130 \cdot (0,57 - 0,39) + (-60) \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 946,15^\circ \text{C} \\ -297,56 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для знаходження розподілу температурного поля на проміжку $[x_4, x_5)$ використовуємо формулу (А.47):

$$\begin{aligned} \bar{T}_4(x) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_4}{\lambda_4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_4(x_4) \\ t_4^{[1]}(x_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_4 \cdot (x - x_4)^2}{2 \cdot \lambda_4} \\ r_4 \cdot (x - x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - 0,57}{0,35} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 547,07 \\ -380,96 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{-140 \cdot (x - 0,57)^2}{2 \cdot 0,35} \\ -140 \cdot (x - 0,57) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200x^2 - 860,46x + 1102,51 \\ -140x - 301,16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проводячи аналогічні розрахунки отримуємо значення вектор-функції (функції температури та густини теплового потоку) на кожному з проміжків (табл. А.6).

Функції температури та густини теплового потоку

Проміжок	Функція	Значення
x_0, x_1	$t \ x$	$-57,14x^2 - 543,37x + 1200$
	$q \ x$	$80x + 380,36$
x_1, x_2	$t \ x$	$43,96x^2 - 733,98x + 1202,15$
	$q \ x$	$-40x + 333,96$
x_2, x_3	$t \ x$	$-75,95x^2 - 406,03x + 1119,11$
	$q \ x$	$120x + 320,76$
x_3, x_4	$t \ x$	$-464,29x^2 - 1763,29x + 1704,44$
	$q \ x$	$130x + 246,86$
x_4, x_5	$t \ x$	$-200x^2 - 860,46x + 1102,51$
	$q \ x$	$140x + 301,16$
x_5, x_6	$t \ x$	$-171,43x^2 - 1127,31x + 1267,01$
	$q \ x$	$120x + 394,56$
x_6, x_7	$t \ x$	$-112,07x^2 - 820,45x + 951,78$
	$q \ x$	$+130x + 475,86$
x_7, x_8	$t \ x$	$-92,86x^2 - 836,94x + 947,2$
	$q \ x$	$130x + 585,86$

Графік розподілу температурного поля та густини теплового потоку восьмишарової плоскої стінки зображено на рис. А.8 та рис. А.9 відповідно.

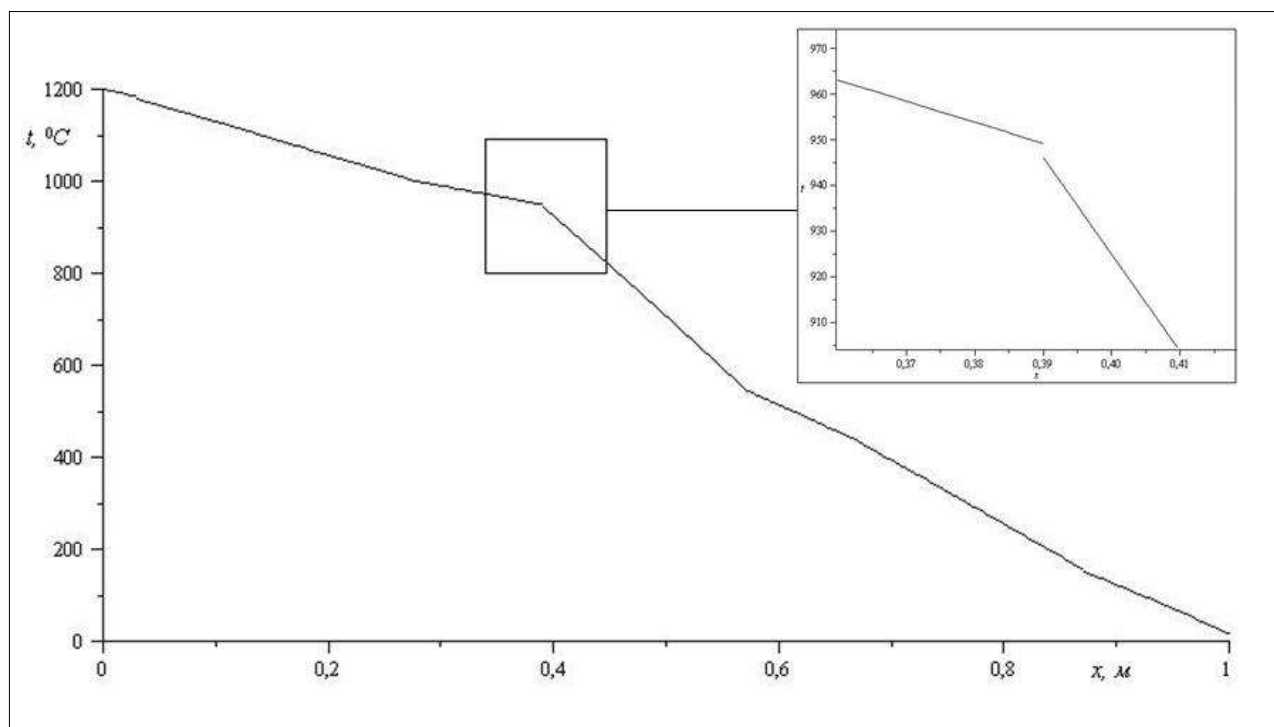


Рисунок А.8 – Розподіл стаціонарного температурного поля восьмишарової плоскої стінки за умов неідеального теплового контакту між шарами

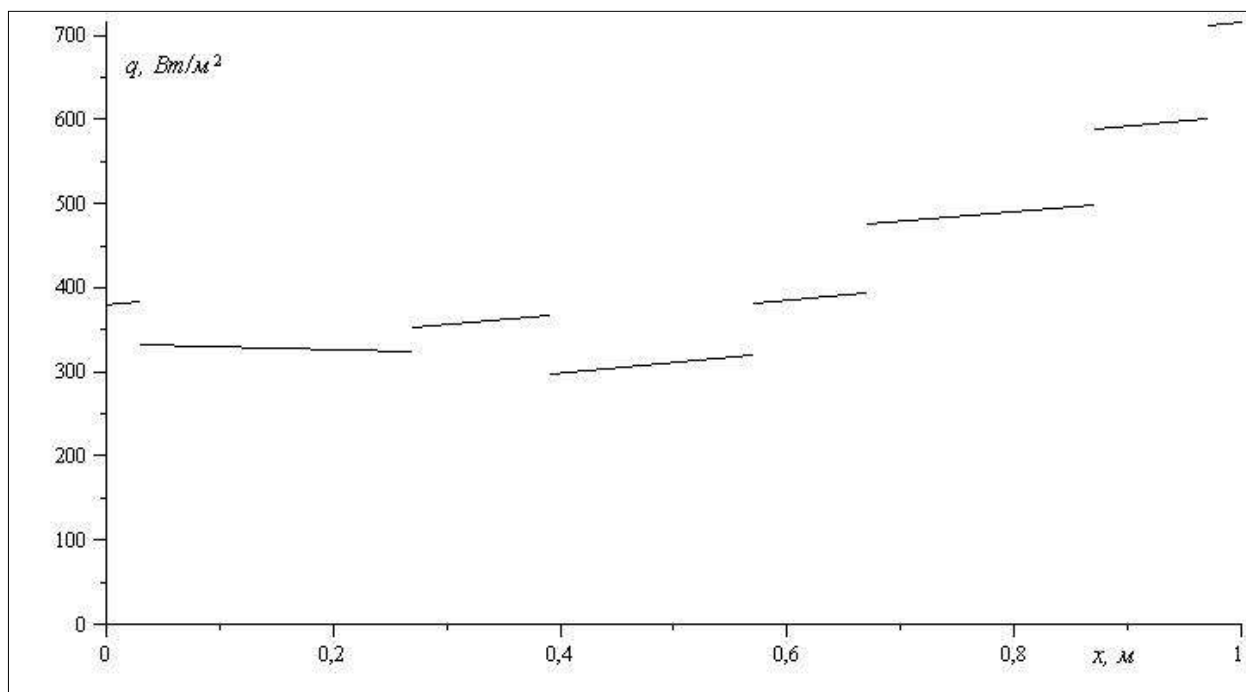


Рисунок А.9 – Розподіл густини теплового потоку восьмишарової плоскої стінки за умов неідеального теплового контакту між шарами

ДОДАТОК Б

Корені характеристичного рівняння

Корені характеристичного рівняння (3.35)

k	ω_k	ω_{k+25}	ω_{k+50}	ω_{k+75}
1.	0.00001552010462	0.02398087090	0.09212854535	0.2082539488
2.	0.0001085948440	0.02619206451	0.09581630165	0.2148658374
3.	0.0002955273132	0.02767108070	0.1002794542	0.2212750048
4.	0.0005766082590	0.02898497705	0.1048902672	0.2248426371
5.	0.0009270555455	0.03137764174	0.1095101910	0.2293101064
6.	0.001131792280	0.03397157102	0.1128998617	0.2360786709
7.	0.001500555167	0.03665995157	0.1152222732	0.2431267832
8.	0.002082039878	0.03921411297	0.1198576137	0.2502321540
9.	0.002775188722	0.04043853546	0.1248794570	0.2566443343
10.	0.003560478660	0.04272147512	0.1300084551	0.2596398332
11.	0.004264571686	0.04570394176	0.1349848971	0.2657201032
12.	0.004661044212	0.04883087796	0.1376978855	0.2731156853
13.	0.005581719100	0.05200959035	0.1412827590	0.2806967381
14.	0.006691731555	0.05450334845	0.1466155032	0.2882498159
15.	0.007908824660	0.05600464720	0.1521802208	0.2940227318
16.	0.009174165515	0.05919491355	0.1578057497	0.2975608300
17.	0.009930865490	0.06273330070	0.1628182628	0.3048844199
18.	0.01084787233	0.06638309570	0.1651764344	0.3128588474
19.	0.01234696494	0.06997446030	0.1701471268	0.3209575382
20.	0.01398974157	0.07202129680	0.1760823594	0.3288490068
21.	0.01572194977	0.07451087920	0.1821778049	0.3335172002
22.	0.01729622373	0.07838335290	0.1882539256	0.3386064111
23.	0.01805862684	0.08246322485	0.1927155507	0.3467753444
24.	0.01975715628	0.08661800845	0.1957322098	0.3553042500
25.	0.02180971624	0.09036846100	0.2017528271	0.3638978584

ДОДАТОК В

Коефіцієнти Фур'є розкладу функцій

Коефіцієнти Фур'є розкладу функції $\frac{\partial u}{\partial \tau}$

<i>k</i>	<i>u_k</i>	<i>u_{k+25}</i>	<i>u_{k+50}</i>	<i>u_{k+75}</i>
1.	0.0292496	0.00135259	0.000192663	0.000161667
2.	0.0297542	0.00114700	0.000341984	0.000155178
3.	0.0257503	0.00037460	0.000334662	0.000132072
4.	0.0209293	0.000991871	0.000320545	0.000049267
5.	0.0137337	0.00104095	0.000289926	0.000135998
6.	0.00593738	0.000971778	0.000106602	0.000143434
7.	0.0127638	0.000887168	0.000238045	0.000138961
8.	0.0109091	0.00061387	0.000277327	0.000132009
9.	0.00893221	0.000352616	0.000270727	0.000085667
10.	0.00713711	0.000745853	0.000256841	0.000065849
11.	0.00289791	0.000726558	0.000211967	0.000122604
12.	0.00420226	0.000680302	0.000081706	0.000124658
13.	0.00505168	0.000611391	0.000222413	0.000120328
14.	0.00440612	0.000242912	0.000228878	0.000111433
15.	0.00377400	0.000454997	0.000221837	0.000045167
16.	0.00291663	0.000556215	0.000208766	0.000088386
17.	0.00097831	0.000532798	0.000125781	0.000109867
18.	0.00263160	0.000499912	0.000111764	0.000108774
19.	0.00252912	0.000416025	0.000193281	0.000105117
20.	0.00226280	0.000149735	0.000192368	0.000091498
21.	0.00197601	0.000414353	0.000185012	0.000032270
22.	0.00105239	0.000426193	0.000169393	0.000090726
23.	0.00103812	0.000407860	0.000063253	0.0000972946
24.	0.00159446	0.000379927	0.000139614	0.0000961153
25.	0.00148824	0.000231176	0.000165145	0.0000909075

Коефіцієнти Фур'є розкладу функції $f(x)$

k	f_k	f_{k+25}	f_{k+50}	f_{k+75}
1.	- 219.694	- 8.25879	- 2.76800	- 0.931691
2.	- 201.137	- 10.1976	- 1.79935	- 1.31690
3.	- 185.868	0.5896	- 2.71939	- 0.44019
4.	- 139.895	- 9.29890	- 1.85652	- 0.95645
5.	- 109.965	- 6.22095	- 2.68569	- 0.57830
6.	- 26.4441	- 7.65961	0.39797	- 1.19994
7.	- 96.7648	- 5.12428	- 2.61449	- 0.800463
8.	- 72.4558	- 6.77433	- 1.53436	- 1.16306
9.	- 65.9386	0.17318	- 2.20088	- 0.04107
10.	- 45.0886	- 6.44335	- 1.43203	- 1.03503
11.	- 29.9232	- 4.36178	- 2.25697	- 0.60468
12.	- 20.7774	- 5.45999	0.37779	- 1.03557
13.	- 38.6625	- 3.17344	- 2.12064	- 0.681382
14.	- 28.6079	- 3.79626	- 1.30119	- 1.04279
15.	- 28.8328	- 1.35660	- 1.81694	0.18113
16.	- 15.7315	- 4.63743	- 1.08989	- 1.05254
17.	- 12.7726	- 3.18373	- 1.73895	- 0.587559
18.	- 14.7554	- 4.12216	0.07927	- 0.895951
19.	- 19.5050	- 1.64594	- 1.71456	- 0.579185
20.	- 14.3117	- 2.65707	- 1.11175	- 0.95430
21.	- 15.9194	- 1.90096	- 1.53698	0.19655
22.	- 2.72154	- 3.49129	- 0.77792	- 0.91492
23.	- 11.7750	- 2.41142	- 1.16274	- 0.542141
24.	- 9.36178	- 3.26901	- 0.37509	- 0.792212
25.	- 11.5814	- 0.21061	- 1.41308	- 0.475392

ДОДАТОК Г

Впровадження результатів дослідження



МІНІСТЕРСТВО ЕНЕРГЕТИКИ
ТА ВУГІЛЬНОЇ ПРОМИСЛОВОСТІ УКРАЇНИ
ЕНЕРГОАТОМ
ENERGOATOM

НАЦІОНАЛЬНА АТОМНА
ЕНЕРГОГЕНЕРУЮЧА КОМПАНІЯ

Відокремлений підрозділ
Запорізька АЕС

вул. Промислова, 133,
м. Енергодар Запорізької обл., Україна, 71504
Тел.: (06139) 5-38-78, факс: 5-55-33
E-mail: 006679@mgm.pp.zp.ua

П/р 26005819838393
ПАТ "Промінвестбанк",
МФО 300012, код ЗКПО 19355964

№ *58-201* від _____ 201 р.

№ _____ від _____ 201 р.

Голові спеціалізованій вченої ради
К 35.847.01
Львівського державного університету
безпеки життєдіяльності
д.т.н., професору Семераку М.М.
м. Львів, 79007
вул. Клепарівська, 35

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження:
Пазена Олега Юрійовича

**«Математичне моделювання процесів теплопереносу в багатошарових плоских
конструкціях за умов пожежі»**

представлену на здобуття наукового ступеня кандидата
технічних наук за спеціальністю 21.06.02 – пожежна безпека

Теоретичні результати дисертаційного дослідження Пазена Олега Юрійовича на тему «Математичне моделювання процесів теплопереносу в багатошарових плоских конструкціях за умов пожежі» використані під час проведення науково-дослідної роботи за темою «Аналіз пожежної небезпеки машинного залу за умови викиду водню з корпусу турбоагрегату енергоблоку №1 ВП ЗАЕС» пов'язаної зі здійсненням комплексних заходів по продовженню терміну експлуатації першого енергоблоку Запорізької АЕС (номер державної реєстрації №0115U001926).

Головний інженер
(перший заступник
генерального директора)

Ф.М. Красногоров

ГФ АЕС (з ТУ) Михальченко О.М. т. 5 62 80
ЗГФ АЕС (з реконструкції ТУ) Панченко О.В. т. 5 63 81

0093695

ЗАТВЕРДЖУЮ

Головний інженер філії МН «Дружба»
ПАТ «Укртранснафта»

С. Р. Яновський

_____ 2015 р.



АКТ

впровадження результатів наукових досліджень

«21» 05 2015 р.

м. Львів

Ми, що нижче підписались, головний механік філії МН «Дружба» ПАТ «Укртранснафта» Гатич М.І., головний енергетик філії МН «Дружба» ПАТ «Укртранснафта» Гула С.Г. начальник відділу охорони праці МН «Дружба» ПАТ «Укртранснафта» Хома Р.П., підтверджуємо, що результати досліджень, отримані Пазеном Олегом Юрійовичем в результаті виконання дисертаційної роботи у Львівському державному університеті безпеки життєдіяльності, щодо поширення нестационарних температурних полів в багатошарових конструкціях при необхідності будуть використані при будівництві та реконструкції резервуарів і трубопроводів, в яких зберігатимуться та транспортуватимуться нафтопродукти.

Розроблена Пазеном О.Ю. методика розрахунку нестационарного температурного поля дозволяє оцінити рівень пожежної безпеки трубопроводів і резервуарів, які знаходяться в експлуатації.

Використання математичної моделі поширення нестационарного температурного поля в багатошарових конструкціях і результатів досліджень дисертаційної роботи дає змогу підвищити надійність резервуарів та трубопроводів і їх ефективність під час експлуатації.

Головний механік

М.І. Гатич

Головний енергетик

С.Г. Гула

Начальник відділу ОП

Р.П. Хома

Товариство з обмеженою відповідальністю

"ЛЕВАДІЯ-ПРОЕКТ"

Адреса: 79017, м. Львів, вул. Володимирська, 2 офіс 522
 тел./факс (0322) 2976207; 2971347
 levadia@ukr.net
 ЛІЦЕНЗІЯ АВ № 590408

р/р 26003053823946 в ЛІФ ПАТ КБ «ПРИВАТБАНК»
 МФО 325321, код ЄДРПОУ 35898306
 ПІН 358983013041
 св. № 100117284

№ 02-16/11 від 16.11.2015р

на № _____ від _____

Голові спеціалізованої вченої ради
 К 35.847.01
 Львівського державного університету
 безпеки життєдіяльності
 д.т.н., професору Семераку М.М.
 м. Львів, 79007
 вул. Клепарівська, 35

АКТ

про впровадження результатів дисертаційного дослідження
Пазена Олега Юрійовича

**«Математичне моделювання процесів теплопереносу в багатошарових плоских
 конструкціях за умов пожежі»**

представлену на здобуття наукового ступеня кандидата
 технічних наук за спеціальністю 21.06.02 – пожежна безпека

Ми, що нижче підписалися, склали цей акт про те, що теоретичні результати дисертаційного дослідження Пазена Олега Юрійовича на тему «Математичне моделювання процесів теплопереносу в багатошарових плоских конструкціях за умов пожежі» використані у виробничій діяльності підприємства ТзОВ «Левадія-Проект» (м. Львів) для визначення теплоізоляційної спроможності багатошарових будівельних конструкцій перекриття з урахуванням внутрішнього джерела тепла. Для проведення розрахунків використано, розроблений Пазеном О.Ю., прямий метод дослідження нестационарного температурного поля багатошарових плоских конструкцій, який реалізований у програмному середовищі Maple 13.

Комісією встановлено, що результати математичного моделювання процесів теплопереносу в багатошаровій плоскій стінці за умов пожежі доцільно використовувати при підготовці проектних рішень щодо попередження прогріву або руйнування багатошарових будівельних конструкцій перекриття.

Директор ТзОВ «Левадія-Проект»

Бурило Я.М.

Головний конструктор

ТзОВ «Левадія-Проект»



Ушак Т.І.