Р.М.Тацій, М.Ф.Стасюк, О.М.Трусевич

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Р.М.Тацій, М.Ф.Стасюк, О.М.Трусевич

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

За загальною редакцією доктора фізико–математичних наук, професора Р.М. Тація

Львів 2019

УДК 51

ББК 22.11

Т 12

Інтегральне числення: навч. посібник / Р.М.Тацій, М.Ф.Стасюк, О.М.Трусевич – Л.: ЛДУ БЖД, 2019 . – 111 с.

Рецензенти: **Кузик А.Д.,** доктор сільськогосподарських наук, професор, проректор з науково – дослідної роботи Львівського державного університету безпеки життєдіяльності

Заболоцький М.В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання Львівського національного університету ім. І.Франка

Важливим фактором у засвоєнні вищої математики й оволодінні її методами є самостійна робота читачів. Система типових розрахунків сприяє більш глибокому вивченню вищої математики.

Навчальний посібник є другою частиною серії «Математичний практикум» і не пов'язаний з програмами конкретних навчальних закладів. Він містить основні теоретичні відомості з курсу «Інтегральне числення», приклади розв'язування типових завдань та варіанти задач для самостійного розв'язування з відповідями. Посібник можна використовувати як довідник, збірник задач чи підручник для самостійного вивчення матеріалу.

Рекомендовано до друку вченою радою

Львівського державного університету безпеки життєдіяльності

(протокол № 9 від «17» квітня 2019 р.)

@ Тацій Р.М., 2019;

@ Стасюк М.Ф., 2019;

@ Трусевич О.М., 2019;

@ ЛДУ БЖД, 2019.

Присвячено світлій пам’яті професора

Михайла СУХОРОЛЬСЬКОГО

ЗМІСТ

§1 Невизначений інтеграл

1.1. Первісна та невизначений інтеграла

1.1.1.Визначення первісної

1.1.2. Визначення та властивості невизначеного інтеграла

Теоретичні питання

1.2. Основні методи інтегрування

1.2.1. Безпосереднє інтегрування

Теоретичні питання

Завдання для самостійної роботи

Відповіді

1.2.2. Заміна змінної в невизначеному інтегралі

Теоретичні питання

Завдання для самостійної роботи

Відповіді

1.2.3. Інтегрування частинами

Теоретичні питання

Завдання для самостійної роботи

Відповіді

1.3. Класи інтегровних функцій

1.3.1. Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен

Теоретичні питання

Завдання для самостійної роботи

Відповіді

1.3.2. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Теоретичні питання

Завдання для самостійної роботи

Відповіді

1.3.3. Інтегрування ірраціональних функцій

Теоретичні питання

Завдання для самостійної роботи
Відповіді
1.3.4. Інтегрування тригонометричних функцій
Теоретичні питання
Завдання для самостійної роботи
Відповіді
1.3.5.Тригонометричні підстановки
Теоретичні питання
Завдання для самостійної роботи
Відповіді
§2. Визначений інтеграл
2.1. Властивості визначеного інтеграла
2.2. Формула Н'ютона Лейбніца
Теоретичні питання
2.3. Методи інтегрування
2.3.1. Заміна змінної у визначеному інтегралі
2.3.2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі
Теоретичні питання
Завдання для самостійної роботи
Відповіді
2.4. Невластиві інтеграли
2.4.1. Невластиві інтеграли з необмеженими межами інтегрування
2.4.2. Невластиві інтеграли від розривних функцій
Теоретичні питання
Завдання для самостійної роботи
Відповіді
§3. Геометричні застосування визначеного інтеграла
3.1.Обчислення площ плоских фігур
3.1.1.Обчислення площі, якщо фігура обмежена кривою, чи кривими, які задані в декартовій системі координат
3.1.2. Обчислення площі, якщо фігура обмежена кривою, що задана параметрично

3.1.3. Обчислення площі, якщо фігура обмежена кривою, яка задана в полярній системі координат

3.2. Обчислення об'ємів тіл обертання

3.3. Обчислення довжин дуг кривих

3.3.1. Обчислення довжини дуги кривої, що задана в декартових координатах

3.3.2. Обчислення довжини дуги кривої, що задана параметрично

3.3.3. Обчислення дуги кривої, що задана в полярній системі координат

Теоретичні питання

Завдання для самостійної роботи

Відповіді

Додаток 1. Графіки деяких функцій, які часто використовують в геометричних застосуваннях визначеного інтеграла

Додаток 2. Таблиця значень тригонометричних функцій

Додаток 3. Таблиця похідних

Додаток 4. Таблиця невизначених інтегралів

Література

§1. Невизначений інтеграл

1.1. Первісна та невизначений інтеграл

1.1.1.Визначення первісної

Визначення 1.1.1. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a,b\rangle$, якщо $F'(x)=f(x)$ на цьому проміжку. Зауважимо, що $\langle a,b\rangle$ – довільний скінчений відкритий або напіввідкритий, або замкнутий інтервал дійсної осі.

Задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно. Відповідь на питання, як знайти первісну для функції $f(x)$ дає наступна

Теорема 1.1.1. Якщо $F(x)-$первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a,b\rangle$, то довільна інша первісна $\Phi(x)$ функції $f(x)$ на цьому проміжку має вигляд

$$\Phi(x)=F(x)+C, \tag{1.1}$$

де $C-$довільна дійсна стала.

1.1.2**.** *Визначення та властивості невизначеного інтеграла.*

Визначення 1.1.2. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* цієї функції і позначається знаком

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{1.2}$$

де $F(x)-$одна з первісних цієї функції, $C-$довільна стала.

У визначенні 1.1.2. функція $f(x)$ називається *підінтегральною* функцією, $x-$*змінною інтегрування*, а вираз $f(x)dx-$*підінтегральним виразом.*

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$
2. $\int dF(x)=F(x)+C.$
3. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$

4. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$

5. $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u(x)$ – неперервно диференційовна функція на проміжку інтегрування, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

1.2. Основні методи інтегрування

1.2.1. *Безпосереднє інтегрування*

Безпосереднє інтегрування – це інтегрування з використанням властивостей інтеграла 1 – 6, тотожних перетворень підінтегральної функції та застосування таблиці інтегралів (додаток 3).

Приклад 1.2.1. Знайти інтеграли:

а) $\int (3x - 2x^2 + \frac{4}{\sqrt[3]{x}})dx$; б) $\int (3\cos x - \frac{5}{\sin^2 x})dx$; в) $\int \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}\,dx$; г) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx.$

Розв'язання. Використовуючи основні властивості невизначених інтегралів та таблицю інтегралів *3*, маємо:

а) $\int (3x - 2x^2 + \frac{4}{\sqrt[3]{x}})dx = 3\int xdx - 2\int x^2dx + 4\int x^{-\frac{1}{3}}dx = = \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 6x^{\frac{3}{2}} + C;$

б) $\int (3\cos x - \frac{5}{\sin^2 x})dx = 3\int \cos xdx - 5\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ =3sin x +5ctg x + C;

в) $\int \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}\,dx = \int x^{\frac{7}{8}}dx = \frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7} + C;$

г) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)}dx = = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2}dx = \ln|x| + 2arctgx + C.$

Теоретичні питання

1. Означити первісну функцію $F(x)$ для функції $f(x)$.
2. Що таке невизначений інтеграл?
3. Сформулювати властивості невизначених інтегралів.
4. Назвати методи інтегрування невизначених інтегралів.
5. Суть методу безпосереднього інтегрування.

Завдання 1. Знайти інтеграли:

1. $\int (4x^2 + \frac{5\sqrt{x}}{x^2} - \frac{3}{2x^2+5})dx$ **;**

2. $\int (4\cos x + \frac{\sqrt{x}}{x^4} - \frac{3}{\sqrt{-x^2+1}})dx$ **;**

3. $\int (\sin x + \frac{5\sqrt[3]{x}}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{-2x^2+4}})dx$ **;**

4. $\int (14x^4 + \frac{5\sqrt{x}}{x^5} - \frac{1}{\sqrt{x^2-9}})dx$ **;**

5. $\int (5\,\mathrm{tg}\,x + \frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2-7})dx$ **;**

6. $\int (\frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{x}}{x^5} + \frac{3}{2+x^2})dx$ **;**

7. $\int (5\cos x + \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-3}})dx$ **;**

8. $\int (6x^5 + \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{1}{\sqrt{-4x^2+9}})dx$ **;**

9. $\int (4\cos x + \frac{3\sqrt{x}}{x^5} - \frac{1}{6x^2-4})dx$ **;**

10. $\int (3x^4 + \frac{x^4}{\sqrt{x}} - \frac{10}{9x^2+25})dx$ **;**

11. $\int (\frac{9}{\sin^2 x} + \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2+16})dx$ **;**

12. $\int (4\,\mathrm{ctg}\,x + \frac{3\sqrt{x}}{x^7} - \frac{1}{2x^2-3})dx$ **;**

13. $\int (3x^4 + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2+25})dx$

14. $\int (\frac{1}{3}\cos x + \frac{5\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{-x^2+4}})dx$ **;**

15. $\int (3\frac{x^4}{5} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2-2})dx$ **;**

16. $\int (\frac{\mathrm{tg}\,x}{5} + \frac{5x}{\sqrt{x}} + \frac{7}{\sqrt{x^2-7}})dx$ **;**

17. $\int (\sin x + \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{x} - \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}})dx$ **;**

18. $\int (3x + \frac{2}{5x^2+8} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}})dx$ **;**

19. $\int (\mathrm{ctg}\,x + \frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{2x^2+3})dx$ **;**

20. $\int (\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2-2})dx$

21. $\int (14\cos x + \frac{5x^5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{-x^2+9}})dx$;

22. $\int (\frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{81x^2+9}} + \frac{9x}{\sqrt{x^3}}\, dx$;

23. $\int (\frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{-25x^2+9}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}})dx$;

24. $\int (3\cos x - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}})dx$;

25. $\int (\frac{-1}{\cos^2 x} + \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2+2})dx$;

26. $\int (3x^5 + \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{10}{\sqrt{-9x^2+25}})dx$;

27. $\int (\frac{2}{x} - \frac{10}{\sqrt{-9x^2+25}} + \frac{x^2}{\sqrt{x}})dx$;

28. $\int (\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{3}{9x^2+16})dx$;

29. $\int (\frac{-x^2}{\sqrt{x}} - 3x^4 + \frac{4}{9x^2+1})dx$;

30. $\int (\frac{3}{\sin^2 x} - \frac{x^2}{\sqrt{x^3}} + \frac{3}{\sqrt{-x^2+16}})dx$.

Відповіді до завдання 1

1. $\frac{4}{3}x^3 - \frac{10}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{10}}{5} + C$.

2. $4\sin x - \frac{2}{5x^{\frac{5}{2}}} - 3\arcsin x + C$.

3. $-\cos x - \frac{15}{8x^{\frac{8}{3}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$.

4. $\frac{14}{5}x^5 - \frac{10}{7x^{\frac{7}{2}}} - \ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| + C$.

5. $-5\ln|\cos x| + 2x^{\frac{5}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{7}}{2x+\sqrt{7}}\right| + C$.

6. $\frac{1}{12}x^3 - \frac{2}{7x^{\frac{7}{2}}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$.

7. $5\sin x - 2\sqrt{x} - \ln\left|x + \sqrt{x^2-3}\right| + C$.

8. $x^6+6x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$

9. $4\sin x-\frac{6}{7x^{\frac{7}{2}}}-\frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right|+C$.

10. $\frac{3}{5}x^5-\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x}{5}+C$.

11. $-9\operatorname{ctg}x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C$.

12. $4\ln|\sin x|-\frac{6}{11x^{\frac{11}{2}}}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

13. $\frac{3}{5}x^5-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{5}+C$.

14. $\frac{1}{3}\sin x+\frac{30}{13}x^{\frac{13}{6}}-\arcsin\frac{x}{2}+C$.

15. $\frac{3}{25}x^5+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$.

16. $-\frac{1}{5}\ln|\cos x|+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+7\ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|+C$.

17. $-\cos x+\frac{15}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2}+C$.

18. $\frac{3}{2}x^2+\ln|x|+\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{10}}{4}+C$.

19. $\ln|\sin x|+6\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{6}}{3}+C$.

20. $2\operatorname{tg}x+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$.

21. $14\sin x+\frac{10}{11}x^{\frac{11}{2}}+\arcsin\frac{x}{3}+C$.

22. $3\ln|x|+\frac{27}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{27}\ln\left|9x+3\sqrt{9x^2-1}\right|+C$.

23. $3\ln|x|+\frac{1}{5}\arcsin\frac{5x}{3}-4x^{\frac{3}{4}}+C$.

24. $3\sin x-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{1}{4}\ln 2\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C$.

25. $-\operatorname{tg}x+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

26. $\frac{1}{2}x^6+12\sqrt{x}-\frac{10}{3}\arcsin\frac{3x}{5}+C$.

27. $2\ln|x|-\frac{10}{3}\arcsin\frac{3x}{5}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$.

28. $-3\operatorname{ctg}x+10\sqrt{x}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+C$.

29. $\frac{-2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}\operatorname{arctg}3x+C$.

30. $-3\operatorname{ctg}x-\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+3\arcsin\frac{x}{4}+C.$

1.2.2. *Заміна змінної в невизначеному інтегралі*

Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі базується на такій теоремі

Теорема 1.2.1. Нехай $F(x)-$ первісна для $f(x)$ на інтервалі $\langle a,b\rangle$ і нехай функція $x=\varphi(t)$ визначена і диференційовна на інтервалі $\langle\alpha,\beta\rangle$. Тоді на інтервалі $\langle\alpha,\beta\rangle$ справедлива формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C. \qquad (1.3)$$

Зауважимо, що інтервал $\langle\alpha,\beta\rangle$ $-$це узагальнюючий символ, який містить один з таких інтервалів: $[\alpha,\beta]$, (α,β), $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$.

Для методу заміни змінної існують два варіанти:

- метод введення під знак диференціала;
- метод виведення з під знаку диференціала

Метод введення під знак диференціала можна описати так. Нехай потрібно знайти інтеграл $\int f(x)dx$ і нехай існують диференційовна функція $u=\varphi(x)$ та функція $g(x)$ такі, що підінтегральний вираз може бути записаний у вигляді

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(u)du$$

(*таке перетворення називається «введенням під знак диференціала»*). Тоді

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du \qquad (1.4)$$

і, отже, для знаходження інтеграла $\int f(x)dx$ потрібно знайти інтеграл $\int g(u)du$ (який може виявитись простішим від інтеграла $\int f(x)dx$) та застосувати підстановку $u = \varphi(x)$.

Метод виведення з–під знака диференціала можна описати таким чином: нехай потрібно знайти інтеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, де функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$ і для функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ відома первісна $g(t)$. Тоді

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = g(t) + C = \mathrm{g}(\varphi^{-1}(x)) + \mathrm{C}. \qquad (1.5)$$

Приклад 1.2.2. Знайти інтеграли:

$$a)\int \frac{dx}{\sin x \cos x}; \quad б)\int x^5 \cos(2x^6 - 4)dx; \quad \text{в)} \int \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Розв'язання

а) Поділимо чисельник і знаменник дробу $\frac{1}{\sin x \cos x}$ на $\cos^2 x$. Тоді, з використанням (1.4), маємо

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{tg} x \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C;$$

б) $$\int x^5 \cos(2x^6 - 4)dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x^6 - 4 \\ dt = 12x^5 dx \\ x^5 dx = \frac{dt}{12} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{12} = \frac{1}{12}\sin t + C = \frac{1}{12}\sin(2x^6 - 4) + C;$$

в) Використовуючи (1.5), отримаємо

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \\ t = \arcsin\frac{x}{a} \end{array} \right| = \int a\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$=\int a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=\int a^2\cos^2 t dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{a^2}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{\sin 2\arcsin\frac{x}{a}}{2}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cos\arcsin\frac{x}{a}\right)+C.$$

Теоретичні питання

1. Сформулювати теорему, на основі якої базується метод заміни змінної.
2. Описати метод введення під знак диференціала.
3. Суть методу виведення з–під знака диференціала.

Завдання 2. Знайти інтеграли, використовуючи метод заміни змінної в невизначеному інтегралі:

1. $\int\frac{3x^5dx}{x^6-2}$; **2.** $\int\frac{dx}{x(\ln x-7)^3}$;

3. $\int\frac{e^{5x}dx}{e^{10x}-2}$; **4.** $\int\sin^3 3x\cos 3xdx$;

5. $\int\frac{\arccos xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; **6.** $\int\frac{x^7dx}{\sqrt[3]{x^8-2}}$;

7. $\int\frac{x^4dx}{4+x^5}$; **8.** $\int\sin 2x\cos 2xdx$;

9. $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+12}$; **10.** $\int\frac{\sqrt[4]{\ln x+5}dx}{x}$;

11. $\int\frac{\arcsin^2 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; **12.** $\int\frac{e^{\mathrm{tg}x}dx}{\cos^2 x}$;

13. $\int\frac{(2-\mathrm{ctg}\,x)^4dx}{\sin^2 x}$; **14.** $\int\frac{\cos xdx}{\sin^6 x}$;

15. $\int\frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$; **16.** $\int 3x^2e^{2x^3}dx$;

17. $\int(e^{4x}+2)e^{2x}dx$; **18.** $\int\sin 5x\sqrt[3]{\cos 5x}dx$;

19. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{14+x^4}}$; **20.** $\int\frac{2^{tgx}dx}{\cos^2 x}$;

21. $\int\sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}dx$; **22.** $\int\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

23. $\int\frac{\sqrt[3]{3-\ln x}dx}{x}$; **24.** $\int e^x\cos e^xdx$;

25. $\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^{6x}-4}}$; **26.** $\int e^{\cos x}\sin x dx$;

27. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}dx}{x}$; **28.** $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}dx}{\sin^2 x}$;

29. $\int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$; **30.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(11-x^4)^3}}$.

Відповіді до завдання 2

1. $\frac{1}{2}\ln\left|x^6-2\right|+C$. **2.** $\frac{-1}{2(\ln x-7)^2}+C$. **3.** $\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{e^{5x}-\sqrt{2}}{e^{5x}+\sqrt{2}}\right|+C$. **4.** $\frac{1}{12}\sin^4 3x+C$.

5. $-\frac{\arccos^2 x}{2}+C$. **6.** $\frac{3\left(x^8-2\right)^{\frac{2}{3}}}{16}+C$. **7.** $\frac{1}{5}\ln\left|4+x^5\right|+C$. **8.** $\frac{-1}{8}\cos 4x+C$.

9. $\frac{1}{2\sqrt{12}}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{\sqrt{12}}+C$. **10.** $\frac{4\sqrt[4]{\left(\ln x+5\right)^5}}{5}+C$. **11.** $\frac{\arcsin^3 x}{3}+C$. **12.** $e^{\operatorname{tg}x}+C$.

13. $\frac{(2-\operatorname{ctg} x)^5}{5}+C$. **14.** $\frac{\sin^{-5} x}{-5}+C$. **15.** $\frac{5\sqrt[5]{\ln^4 x}}{4}+C$. **16.** $\frac{1}{2}e^{2x^3}+C$.

17. $\frac{1}{6}e^{6x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C$. **18.** $\frac{-3}{20}\sqrt[3]{\cos^4 5x}+C$. **19.** $\frac{1}{2}\sqrt{14+x^4}+C$.

20. $\frac{2^{tgx}}{\ln 2}+C$. **21.** $\frac{-2}{3}\sqrt{\arccos^3 x}+C$. **22.** $\frac{\arcsin^4 x}{4}+C$. **23.** $\frac{-3\sqrt[3]{\left(3-\ln x\right)^4}}{4}+C$. **24.** $\sin e^x+C$.

25. $\frac{1}{3}\ln\left|e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-4}\right|+C$. **26.** $-e^{\cos x}+C$. **27.** $\frac{3\sqrt[3]{\ln^5 x}}{5}+C$. **28.** $\frac{-4\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^5 x}}{5}+C$.

29. $\ln\left|\arcsin x\right|+C$. **30.** $\frac{1}{2\sqrt{11-x^4}}+C$.

1.2.3*. Інтегрування частинами*

Нехай $u=u\left(x\right)$, $v=v\left(x\right)$ – функції, що мають на деякому інтервалі $\left\langle a,b\right\rangle$ неперервні похідні. Тоді справедлива *формула інтегрування частинами*

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (1.6)$$

Вибір множнків *u(x),dv(x)* допомагає встановити таблиця 1

	Вибір інтеграла	Співмножник *u(x)*	Співмножник *dv(x)*
а)	$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}dx$	$u=P_n(x)$ - многочлен *n*-го степеня	$dv=\begin{Bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}dx$

б)	$\int P_n(x)\begin{Bmatrix}\arcsin kx\\ \arccos kx\\ \operatorname{arc\,tg} kx\\ \log_a^m x\end{Bmatrix}dx$	$u=\begin{Bmatrix}\arcsin kx\\ \arccos kx\\ \operatorname{arc\,tg} kx\\ \log_a^m x\end{Bmatrix}$	$dv=P_n(x)dx$
в)	$\int e^{ax}\begin{Bmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{Bmatrix}dx$ $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$ $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$	довільний вибір множника $u=\begin{Bmatrix}\sqrt{a^2-x^2}\\ \sqrt{a^2+x^2}\\ \sqrt{x^2-a^2}\end{Bmatrix}$	довільний вибір множника $dv=dx$

Табл.1

Таблиця 1 вказує, який із співмножників в підінтегральному виразі слід прийняти за *u(x),* а який за *dv(x)* в кожному запропонованому випадку.

Приклад 1.2.3. Знайти інтеграли:

а) $\int(x+10)\cos 3xdx$; б) $\int 2\operatorname{arcctg} xdx;$, в) $\int\sqrt{x^2+a^2}dx.$

Розв'язання

а) Використовуючи таблицю 1а та формулу (1.6), отримаємо:

$$\int(x+10)\cos 3x\,dx=\begin{vmatrix} u=x+10, & du=dx,\\ dv=\cos 3xdx, & v=\int\cos 3xdx=\dfrac{1}{3}\sin 3x\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}(x+10)\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\,dx=\frac{1}{3}(x+10)\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$$

б) Використовуючи таблицю 1б та формулу (1.6), отримаємо:

$$\int 2\operatorname{arcctg} xdx=\begin{vmatrix} u=\operatorname{arcctg} x\\ du=-\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dv=dx\\ v=x\end{vmatrix}=2x\operatorname{arcctg} x-\int(-\frac{x}{1+x^2})dx=$$

$$=2x\operatorname{arcctg} x+\frac{2}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{1+x^2}=2x\operatorname{arcctg} x+\ln(x^2+1)+C\ ;$$

в) Використовуючи таблицю 1в та формулу (1.6), дістанемо:

$$I=\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{x^2+a^2} \\ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ dv=dx \\ v=x \end{array}\right|=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+2C.$$

Поєднавши початок і кінець, з останньої рівності отримаємо

$$I=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+2C.$$

Розв'язавши це лінійне рівняння відносно інтеграла I, знайдемо

$$2I=x\sqrt{x^2+a^2}++a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+2C.$$

Отже, остаточно маємо

$$I=\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

Теоретичні питання

1. Навести формулу інтегрування частинами.
2. Як правильно робити вибір множників *u(x)* та *dv(x)*?

Завдання 3. Знайти інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами:

1. $\int(x-7)\cos 2x\,dx$; **2.** $\int(x-4)\sin 3x\,dx$;

3. $\int(x+1)e^{5x}dx$; **4.** $\int(x-5)e^{-2x}dx$;

5. $\int(x+2)\cos(3x+5)\,dx$; **6.** $\int(x+4)\sin 6x\,dx$;

7. $\int(x-2)e^{3x-4}dx$; **8.** $\int(x-15)\cos 3x\,dx$;

9. $\int(x-9)\sin 8x\,dx$; **10.** $\int(x+6)e^{7x-3}dx$;

11. $\int(x-3)\cos\frac{x}{5}\,dx$; **12.** $\int(x+8)\sin 3x\,dx$;

13. $\int(x+1)e^{\frac{x}{2}}dx$; **14.** $\int\left(x+7\right)\cos(4x-9)\,dx$;

15. $\int(x+8)\sin\frac{x}{6}\,dx$; **16.** $\int(x-4)e^{3-5x}dx$;

17. $\int (x+2)\cos\frac{x}{4}\,dx$;

18. $\int (x-6)\sin 7x\,dx$;

19. $\int (x-7)e^{-3x}dx$;

20. $\int (x+4)\cos\frac{x}{2}\,dx$;

21. $\int (x-9)\sin\frac{x}{2}\,dx$;

22. $\int (x+4)e^{5-x}dx$;

23. $\int (6-x)\cos 2x\,dx$;

24. $\int (x+3)\sin\frac{x}{5}\,dx$;

25. $\int (7-x)e^{5x}dx$;

26. $\int (2-x)\cos 4x\,dx$;

27. $\int (x-6)\sin\frac{x}{5}\,dx$;

28. $\int (x+2)\cos(7x+5)\,dx$;

29. $\int (x-5)e^{\frac{x}{3}}dx$;

30. $\int (x-6)\sin 9x\,dx$.

Відповіді до завдання 3

1. $\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{7}{2}\sin 2x+C$.

2. $\frac{1}{9}\sin 3x-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{4}{3}\cos 3x+C$.

3. $\frac{e^{5x}}{25}(5x+4)+C$.

4. $-\frac{e^{-2x}}{4}(2x-9)+C$.

5. $\frac{1}{9}\cos(3x+5)+\frac{1}{9}(3x+5)\sin(3x+5)+\frac{1}{9}\sin(3x+5)+C$.

6. $\frac{1}{36}\sin 6x-\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{2}{3}\cos 6x+C$.

7. $\frac{e^{3x-4}}{9}(3x-7)+C$.

8. $\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{x}{3}\sin 3x-5\sin 3x+C$.

9. $\frac{1}{64}\sin 8x-\frac{x}{8}\cos 8x+\frac{9}{8}\cos 8x+C$.

10. $\frac{e^{7x-3}}{49}(7x+41)+C$.

11. $25\cos\frac{x}{5}+5x\sin\frac{x}{5}-15\sin\frac{x}{5}+C$.

12. $\frac{1}{9}\sin 3x-\frac{x}{3}\cos 3x-\frac{8}{3}\cos 3x+C$.

13. $2e^{\frac{x}{2}}(x-1)+C$.

14. $\frac{1}{16}\cos(4x-9)+\frac{1}{16}(4x-9)\sin(4x-9)+\frac{37}{16}\sin(4x-9)+C$

15. $36\sin\frac{x}{6}-6x\cos\frac{x}{6}-48\cos\frac{x}{6}+C$.

16. $-\frac{1}{25}e^{3-5x}(5x-19)+C$.

17. $16\cos\frac{x}{4}+4x\sin\frac{x}{4}+8\sin\frac{x}{4}+C$.

18. $\frac{1}{49}\sin 7x-\frac{x}{7}\cos 7x+\frac{6}{7}\cos 7x+C$.

19. $-\frac{1}{9}e^{-3x}(3x-20)+C$.

20. $4\cos\frac{x}{2}+2x\sin\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}+C$.

21. $4\sin\frac{x}{2}-2x\cos\frac{x}{2}+18\cos\frac{x}{2}+C$.

22. $-e^{5-x}(x+5)+C$.

23. $3\sin 2x-\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

24. $25\sin\frac{x}{5}-5x\cos\frac{x}{5}-15\cos\frac{x}{5}+C$.

25. $-\frac{e^{5x}}{25}(5x-36)+C$.

26. $\frac{1}{2}\sin 4x-\frac{x}{4}\sin 4x-\frac{1}{16}\cos 4x+C$.

27. $25\sin\frac{x}{5}-5x\cos\frac{x}{5}+30\cos\frac{x}{5}+C$.

28. $\frac{1}{49}\cos(7x+5)+\frac{1}{49}(7x+5)\sin(7x+5)+\frac{9}{49}\sin(7x+5)+C$

29. $3(x-8)e^{\frac{x}{3}}+C$.

30. $\frac{1}{81}\sin 9x-\frac{x}{9}\cos 9x+\frac{2}{3}\cos 9x+C$.

Завдання 4. Знайти інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами:

1. $\int \arcsin x dx$; **2.** $\int \arccos x dx$;

3. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$; **4.** $\int \sqrt[3]{x}\log_2 x dx$;

5. $\int x \operatorname{arctg} x dx$; **6.** $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

7. $\int \frac{\ln x}{x^4}dx$; **8.** $\int x^2 \ln x dx$;

9. $\int (x-1)\ln(x-1)dx$; **10.** $\int (x+1)\operatorname{arctg} x dx$;

11. $\int \ln x dx$; **12.** $\int (x+3)\ln x dx$;

13. $\int \frac{\ln(1+x)}{x^3}dx$; **14.** $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$;

15. $\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; **16.** $\int \frac{\lg x dx}{x^3}$;

17. $\int \ln(x-1)(x^2-1)dx$; **18.** $\int \ln(x+1)(x^2-1)dx$;

19. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; **20.** $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$;

21. $\int (x+2)\operatorname{arctg} x dx$; **22.** $\int (x-8)\operatorname{arcctg} x dx$;

23. $\int \frac{\log_2 (x+1)}{x^2} dx$; **24.** $\int x \ln(x+3) dx$;

25. $\int \ln^2 x dx$; **26.** $\int (x-3)\operatorname{arctg} x dx$;

27. $\int (x+7)\operatorname{arctg} x dx$; **28.** $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$;

29. $\int (x+5)\operatorname{arc\,tg} x dx$; **30.** $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} dx$.

Відповіді до завдання 4

1. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

2. $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

3. $-2\sqrt{1-x}\arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$.

4. $\frac{3}{4}\frac{\sqrt[3]{x^4}\ln x}{\ln 2} - \frac{9}{16}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\ln 2} + C$.

5. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C.$

6. $\frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt[2]{x^3} + C$.

7. $-\frac{1}{3}\frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{9x^3} + C$.

8. $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$.

9. $\frac{(x-1)^2}{2}\ln(x-1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + C$.

10. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + x\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} - \frac{\ln\left|1+x^2\right|}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C.$

11. $x\ln x - x + C$.

12. $\frac{1}{2}x^2\ln|x| - \frac{1}{4}x^2 + 3x\ln|x| - 3x + C$.

13. $-\frac{1}{2x} - \frac{\ln|x|}{2} + \frac{\ln|x+1|(x^2-1)}{2x^2} + C$

14. $2\sqrt{1+x}\arcsin x - 4\sqrt{1-x} + C$.

15. $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{\ln|1+x|}{3} + C.$

16. $-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2\ln 10}-\frac{1}{4x^2\ln 10}+C$ **.**

17. $\frac{1}{3}(x-1)^3\ln|x-1|+(x-1)^2\ln|x-1|-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{7}{18}+C$

18. $\frac{1}{3}(x+1)^3\ln|x+1|-(x+1)^2\ln|x+1|-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{18}+C$

19. $x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}+\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$

20. $\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x^2}{6}+\frac{\ln\left|1+x^2\right|}{6}+C.$

21. $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x+2x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}-\ln\left|1+x^2\right|+\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2}+C.$

22. $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-8x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+4\ln\left|1+x^2\right|+\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2}+C.$

23. $\frac{\ln x}{\ln 2}-\frac{\ln|x+1|}{\ln 2}-\frac{\ln|x+1|}{x\ln 2}+C$.

24. $\frac{1}{2}(x+3)^2\ln|x+3|-3(x+3)\ln|x+3|-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{27}{4}+C$

25. $x\ln^2|x|-2x\ln|x|+2x+C$ **.**

26. $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-3x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\ln\left|1+x^2\right|+\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2}+C.$

27. $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x+7x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}-\frac{7}{2}\ln\left|1+x^2\right|+\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2}+C.$

28. $-\frac{\ln|x|}{x}-\frac{1}{x}+C$ **.**

29. $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x+5x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\ln\left|1+x^2\right|+\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2}+C.$

30. $2\sqrt{x}\ln|x+1|+4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-4\sqrt{x}+C.$

Завдання 5. Знайти інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами:

1. $\int\sqrt{16+x^2}dx$ **;**

2. $\int\sqrt{4+x^2}dx$ **;**

3. $\int e^{2x}\sin 4xdx$ **;**

4. $\int\sqrt{x^2-9}dx$ **;**

5. $\int e^{x}\cos 3xdx$ **;**

6. $\int e^{x}\sin 3xdx$ **;**

7. $\int e^{2x}\cos 4xdx$ **;**

8. $\int\sqrt{2x+x^2}dx$ **;**

9. $\int\sqrt{-x^2-2x}dx$; **10.** $\int\sqrt{x^2-2x+10}dx$;

11. $\int e^x\sin xdx$; **12.** $\int\sqrt{121-x^2}dx$;

13. $\int\sqrt{1-x^2-2x}dx$; **14.** $\int\sqrt{4x-x^2}dx$;

15. $\int\sqrt{-x^2-2x+3}dx$; **16.** $\int e^{-2x}\sin xdx$;

17. $\int\sqrt{x^2+2x+2}dx$; **18.** $\int\sqrt{5+2x-x^2}dx$;

19. $\int e^{-2x}\sin 3xdx$; **20.** $\int e^{3x}\cos xdx$;

21. $\int\sqrt{5-2x-x^2}dx$; **22.** $\int\sqrt{x^2+9x+1}dx$;

23. $\int\sqrt{9x^2-6x+2}dx$; **24.** $\int e^{-4x}\sin xdx$;

25. $\int e^{-x}\cos 7xdx$; **26.** $\int\sqrt{x^2-11x+2}dx$;

27. $\int e^x\cos xdx$; **28.** $\int\sqrt{x^2-11}dx$;

29. $\int e^{-4x}\sin 5xdx$; **30.** $\int\sqrt{x^2+25}dx$.

Відповіді до завдання 5

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{16+x^2}+8\ln\left|\frac{x}{4}+\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}\right|+C$.

2. $\frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2}+2\ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right|+C$.

3. $-\frac{1}{5}e^{2x}\cos 4x+\frac{1}{10}e^{2x}\sin 4x+C$

4. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C$.

5. $\frac{1}{10}e^x\cos 3x+\frac{3}{10}e^x\sin 3x+C$.

6. $-\frac{3}{10}e^x\cos 3x+\frac{1}{10}e^x\sin 3x+C$.

7. $\frac{1}{10}e^{2x}\cos 4x+\frac{1}{5}e^{2x}\sin 4x+C$.

8. $\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2x+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{2x+x^2}\right|+C$.

9. $-\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{-2x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x+1)+C$.

10. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x+10}+\frac{9}{2}\ln\left|\frac{x-1}{3}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1}\right|+C$.

11. $-\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^x\sin x+C$.

12. $\frac{1}{2}x\sqrt{121-x^2}+\frac{121}{2}\arcsin\frac{x}{11}+C$.

13. $\frac{1+x}{2}\sqrt{1-x^2-2x}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

14. $-\frac{2-x}{2}\sqrt{4x-x^2}+2\arcsin\frac{x-2}{2}+C$.

15. $\frac{1+x}{2}\sqrt{-x^2-2x+3}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C$.

16. $-\frac{1}{5}e^{-2x}\cos x-\frac{2}{5}e^{-2x}\sin x+C$.

17. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right|+C$.

18. $\frac{x-1}{2}\sqrt{5+2x-x^2}+3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$.

19. $-\frac{3}{13}e^{-2x}\cos 3x-\frac{2}{13}e^{-2x}\sin 3x+C$.

20. $\frac{3}{10}e^{3x}\cos x+\frac{1}{10}e^{3x}\sin x+C$.

21. $\frac{x+1}{2}\sqrt{5-2x-x^2}+3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{6}}+C$.

22. $\frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{x^2+9x+1}-\frac{77}{8}\ln\left|x+\frac{9}{2}+\sqrt{x^2+9x+1}\right|+C$.

23. $\frac{3x-1}{6}\sqrt{9x^2-6x+2}+\frac{1}{6}\ln\left|3x-1+\sqrt{(3x-1)^2+1}\right|+C$.

24. $-\frac{1}{17}e^{-4x}\cos x-\frac{4}{17}e^{-4x}\sin x+C$.

25. $-\frac{1}{50}e^{-x}\cos 7x+\frac{7}{50}e^{-x}\sin 7x+C$.

26. $\frac{2x-11}{4}\sqrt{x^2-11x+2}-\frac{113}{8}\ln\left|x-\frac{11}{2}+\sqrt{x^2-11x+2}\right|+C$

27. $\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^x\sin x+C$.

28. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-11}-\frac{11}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-11}\right|+C$.

29. $-\frac{5}{41}e^{-4x}\cos 5x-\frac{4}{41}e^{-4x}\sin 5x+C$.

30. $\frac{1}{2}x\sqrt{25+x^2}+\frac{25}{2}\ln\left|\frac{x}{5}+\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1}\right|+C$.

1.3. Класи інтегровних функцій

1.3.1. *Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен*

Розглянемо інтеграли вигляду:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\ I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c},$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ I_4=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Інтеграли I_1, I_2, I_3, I_4 - це інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен. Ці інтеграли шукатимемо методом підстановки, (за допомогою заміни $x=t-\frac{b}{2a}$), що дасть можливість звести їх до табличних інтегралів вигляду:

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}\quad \int\frac{dx}{x^2-a^2},\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad \int\frac{dx}{\sqrt{A+x^2}}.$$

Приклад 1.3.1. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{3x^2+2x+1}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-5x-x^2}}$; в) $\int\frac{(x-3)dx}{x^2-4x+2}$; г) $\int\frac{(4x+5)dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

Розв'язання

а) $$\int\frac{dx}{3x^2+2x+1}=\left|\begin{matrix}x=t-\frac{1}{3}\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{3(t-\frac{1}{3})^2+2(t-\frac{1}{3})+1}=$$

$$=\int\frac{dt}{3(t-\frac{1}{3})^2+2(t-\frac{1}{3})+1}=\int\frac{dt}{3t^2+\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{9}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{\frac{2}{9}})^2}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{9}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{2}{9}}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-5x-x^2}}=\left|\begin{matrix}x=t-\frac{5}{2}\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{1-5(t-\frac{5}{2})-(t-\frac{5}{2})^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{29}{4}-t^2}}=\arcsin\frac{t}{\sqrt{\frac{29}{4}}}+C=\arcsin\frac{2x+5}{\sqrt{29}}+C.$$

в) $$\int\frac{(x-3)dx}{x^2-4x+2}=\left|\begin{matrix}x=t+2\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{(t+2-3)dt}{(t+2)^2-4(t+2)+2}=$$

$$=\int\frac{(t-1)dt}{t^2-2}=\int\frac{tdt}{t^2-2}-\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-2)}{t^2-2}-\int\frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-2)^2-2\right|-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}}\right|+C.$$

г) $\displaystyle\int\frac{(4x+5)dx}{\sqrt{x^2+2x}}=\left|\begin{array}{l}x=t-1\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{(4(t-1)+5)dt}{\sqrt{(t-1)^2+2(t-1)}}=\int\frac{(4t+1)dt}{\sqrt{t^2-1}}=$

$$=\int\frac{4tdt}{\sqrt{t^2-1}}+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\frac{4}{2}\int\frac{d(t^2-1)}{\sqrt{t^2-1}}+\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|=$$

$$=2\int(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}d(t^2-1)+\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}\right|=4(t^2-1)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}\right|+C=4\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}\right|+C.$$

Зауважимо, що інтеграли прикладу *1.3.1* можна обчислити і методом виділення повного квадрата в квадратних тричленах знаменників з наступною підстановкою. Покажемо це на прикладах а) і г).

а) $\displaystyle\int\frac{(x-3)dx}{x^2-4x+2}=\left|\begin{array}{l}x^2-2x\cdot 2+4-4+2=(x-2)^2-2,\\ t=x-2,\\ x=t+2,\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{(t+2-3)dt}{t^2-2}=$

$$=\int\frac{(t-1)dt}{t^2-2}=\int\frac{tdt}{t^2-2}-\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-2)}{t^2-2}-\int\frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-2)^2-2\right|-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}}\right|+C.$$

г) $\displaystyle\int\frac{(4x+5)dx}{\sqrt{x^2+2x}}=\left|\begin{array}{l}x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1,\\ t=x+1,\\ x=t-1,\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{(4(t-1)+5)dt}{\sqrt{t^2-1}}=$

$$=\int\frac{(4t+1)dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int\frac{4tdt}{\sqrt{t^2-1}}+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\frac{4}{2}\int\frac{d(t^2-1)}{\sqrt{t^2-1}}+\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|=$$

$$=2\int(t^2-1)^{\frac{-1}{2}}d(t^2-1)+\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}\right|=4(t^2-1)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}\right|+C=4\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}\right|+C.$$

Теоретичні питання

1. Навести типи інтегралів, що містять квадратний тричлен.
2. За допомогою якої заміни обчислюються інтеграли, що містять квадратний тричлен?
3. До яких табличних інтегралів приводить ця заміна?
4. Навести суть методу виділення повного квадрата в квадратних тричленах знаменників раціональних дробів.

Завдання 6. Знайти інтеграли, що містять квадратний тричлен:

1. $\int\frac{(x-3)dx}{x^2-2x+3}$; **2.** $\int\frac{dx}{16-3x-x^2}$;

3. $\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+2x+5}$; **4.** $\int\frac{dx}{5-12x-9x^2}$;

5. $\int\frac{(4x+5)dx}{x^2-7x+10}$; **6.** $\int\frac{dx}{2x^2-5x+7}$;

7. $\int\frac{3xdx}{x^2-12x-8}$; **8.** $\int\frac{dx}{x^2-8x+7}$;

9. $\int\frac{(5x+3)dx}{x^2-6x+10}$; **10.** $\int\frac{dx}{x^2-x-1}$;

11. $\int\frac{xdx}{3x^2-2x+5}$; **12.** $\int\frac{dx}{x^2-4x+3}$;

13. $\int\frac{(x-1)dx}{x^2+2x+13}$; **14.** $\int\frac{dx}{2x^2-4x+5}$;

15. $\int\frac{xdx}{3x^2+2x+10}$; **16.** $\int\frac{dx}{5x^2-4x+1}$;

17. $\int\frac{(x+4)dx}{x^2+2x-3}$; **18.** $\int\frac{dx}{4x^2+8x-7}$;

19. $\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-2x+8}$; **20.** $\int\frac{dx}{2x^2-4x+5}$;

21. $\int\frac{(x+6)dx}{x^2+2x-10}$; **22.** $\int\frac{dx}{3x^2+6x+5}$;

23. $\int \frac{(x+4)dx}{x^2-8x+12}$; **24.** $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$;

25. $\int \frac{(3x-2)dx}{2x^2-5x+7}$; **26.** $\int \frac{dx}{16-3x-x^2}$;

27. $\int \frac{2xdx}{x^2-7x+10}$; **28.** $\int \frac{dx}{x^2-3x+3}$;

29. $\int \frac{xdx}{x^2+2x-10}$; **30.** $\int \frac{dx}{3x^2-7x+1}$.

Відповіді до завдання 6

1. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+3\right|-\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C$.

2. $\frac{1}{\sqrt{73}}\ln\left|\frac{\sqrt{73}+2x+3}{\sqrt{73}-2x-3}\right|+C$.

3. $\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$.

4. $\frac{-1}{18}\ln\left|3x-1\right|+\frac{1}{18}\ln\left|3x+5\right|+C$.

5. $\frac{25}{3}\ln\left|x-5\right|-\frac{13}{3}\ln\left|x-2\right|+C$.

6. $\frac{2}{\sqrt{31}}\mathrm{arctg}\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right)+C$.

7. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-12x-8\right|-\frac{9}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{2\sqrt{11}+x-6}{2\sqrt{11}-x+6}\right|+C$.

8. $\frac{1}{6}\ln\left|x-7\right|-\frac{1}{6}\ln\left|x-1\right|+C$.

9. $\frac{5}{2}\ln\left|x^2-6x+10\right|+18\,\mathrm{arctg}\left(x-3\right)+C$.

10. $\frac{-1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2x-1}{\sqrt{5}-2x+1}\right|+C$.

11. $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-2x+5\right|+\frac{1}{3\sqrt{14}}\mathrm{arctg}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{14}}\right)+C$.

12. $\frac{-1}{2}\ln\left|x-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|x-3\right|+C$.

13. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+13\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{3}}\right)+C$.

14. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-2}{\sqrt{3}}\right)+C$.

15. $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x+10\right|-\frac{1}{3\sqrt{29}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{29}}\right)+C$.

16. $\operatorname{arctg}(5x-2)+C$.

17. $\frac{-1}{4}\ln|x+3|+\frac{5}{4}\ln|x-1|+C$.

18. $\frac{-1}{4\sqrt{11}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}+2x+2}{\sqrt{11}-2x-2}\right|+C$.

19. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x+8\right|+\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{7}}\right)+C$.

20. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-2}{\sqrt{6}}\right)+C$.

21. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-10\right|-\frac{5}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}+x+1}{\sqrt{11}-x-1}\right|+C$.

22. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x+3}{\sqrt{6}}\right)+C$.

23. $\frac{5}{2}\ln|x-6|-\frac{3}{2}\ln|x-2|+C$.

24. $\operatorname{arctg}(x-1)+C$.

25. $\frac{3}{4}\ln\left|2x^2-5x+7\right|+\frac{7}{2\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right)+C$.

26. $\frac{1}{\sqrt{73}}\ln\left|\frac{\sqrt{73}+2x+3}{\sqrt{73}-2x-3}\right|+C$.

27. $-\frac{4}{3}\ln|x-2|+\frac{10}{3}\ln|x-5|+C$.

28. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{3}}\right)+C$.

29. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-10\right|+\frac{1}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}+x+1}{\sqrt{11}-x-1}\right|+C$.

30. $-\frac{1}{\sqrt{37}}\ln\left|\frac{\sqrt{37}+6x-7}{\sqrt{37}-6x+7}\right|+C$

Завдання 7. Знайти інтеграли, що містять квадратний тричлен:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$;

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-3x-x^2}}$;

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$;

4. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{5-12x-9x^2}}$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$;

6. $\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{2x^2-5x+7}}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x-8}}$;

8. $\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$;

10. $\int \frac{-xdx}{\sqrt{x^2-x-1}}$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+5}}$;

12. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+13}}$;

14. $\int \frac{(-x+4)dx}{\sqrt{2x^2-4x+5}}$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2x+10}}$;

16. $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{5x^2-4x+1}}$;

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$;

18. $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{4x^2+8x-7}}$;

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}}$;

20. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{2x^2-4x+5}}$;

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-10}}$;

22. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{-3x^2+6x+5}}$;

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+12}}$;

24. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$;

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+7}}$;

26. $\int \frac{(4-x)dx}{\sqrt{16-3x-x^2}}$;

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$;

28. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{-x^2-3x+3}}$;

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+10}}$;

30. $\int \frac{(5x+2)dx}{\sqrt{3x^2+7x+1}}$.

Відповіді до завдання 7

1. $\ln\left|\frac{x-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\right|+C.$

2. $-\sqrt{16-3x-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2x+3}{\sqrt{73}}\right)+C$.

3. $\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$.

4. $-\frac{1}{9}\sqrt{5-12x-9x^2}+\frac{10}{9}\arcsin\left(x+\frac{2}{3}\right)+C$.

5. $\ln\left|-\frac{7}{2}+x+\sqrt{x^2-7x+10}\right|+C$.

6. $\sqrt{2x^2-5x+7}-\frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+\sqrt{\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right)^2+1}\right|+C$.

7. $\ln\left|-6+x+\sqrt{x^2-12x-8}\right|+C$.

8. $5\sqrt{x^2-8x+7}+23\ln\left|-4+x+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$.

9. $\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right|+C$.

10. $-\sqrt{x^2-x-1}-\frac{1}{2}\ln\left|-\frac{1}{2}+x+\sqrt{x^2-x-1}\right|+C$.

11. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3x-1}{\sqrt{14}}+\sqrt{\left(\frac{3x-1}{\sqrt{14}}\right)^2+1}\right|+C.$

12. $4\sqrt{x^2-4x+3}+8\ln\left|-2+x+\sqrt{x^2-4x+3}\right|+C$.

13. $\ln\left|\frac{x+1}{2\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{x+1}{2\sqrt{3}}\right)^2+1}\right|+C.$

14. $-\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-4x+5}+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2x-2}{\sqrt{6}}+\sqrt{\left(\frac{2x-2}{\sqrt{6}}\right)^2+1}\right|+C$.

15. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3x+1}{\sqrt{29}}+\sqrt{\left(\frac{3x+1}{\sqrt{29}}\right)^2+1}\right|+C$.

16. $\frac{2}{5}\sqrt{5x^2-4x+1}-\frac{11}{5\sqrt{5}}\ln\left|5x-2+\sqrt{5x^2-4x+1}\right|+C$.

17. $\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$.

18. $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+8x-7}+\frac{1}{2}\ln\left|2x+2+\sqrt{4x^2+8x-7}\right|+C$.

19. $\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{7}}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\right|+C$.

20. $2\sqrt{2x^2-4x+5}+2\sqrt{2}\ln\left|\frac{2x-2}{\sqrt{6}}+\sqrt{\left(\frac{2x-2}{\sqrt{6}}\right)^2+1}\right|+C$.

21. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-10}\right|+C$.

22. $-\frac{1}{3}\sqrt{-3x^2+6x+5}+\sqrt{3}\arcsin\left(\frac{3x-3}{2\sqrt{6}}\right)+C$.

23. $\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+12}\right|+C$.

24. $2\sqrt{x^2-2x+2}+2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C$.

25. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+\sqrt{\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right)^2+1}\right|+C$.

26. $\sqrt{16-3x-x^2}+\frac{11}{2}\arcsin\left(\frac{2x+3}{\sqrt{73}}\right)+C$.

27. $\ln\left|x-\frac{7}{2}+\sqrt{x^2-7x+10}\right|+C$.

28. $-3\sqrt{x^2-3x+3}-\frac{5}{2}\arcsin\left(\frac{2x+3}{\sqrt{21}}\right)+C$.

29. $\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{11}}\right)+C$.

30. $\frac{5}{3}\sqrt{3x^2+7x+1}-\frac{23\sqrt{3}}{18}\ln\left|x\sqrt{3}+\frac{7}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3x^2+7x+1}\right|+C$

1.3.2. *Інтегрування дробово-раціональних функцій.*

Дробово-раціональною функцією (раціональним дробом) називається функція вигляду

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \qquad (1.7)$$

де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени степеня m і n відповідно.

Раціональний дріб (1.7) називається *правильним*, якщо степінь m многочлена $P_m(x)$ менший від степеня n многочлена $Q_n(x)$. У протилежному випадку, дріб (1.7) називається *неправильним.*

Якщо дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $-$неправильний, то поділивши многочлен $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$, можна виділити в ньому цілу частину, тобто подати його у вигляді і

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \qquad (1.8)$$

де $L_{m-n}(x)$ і $R_r(x)-$многочлени степенів $m-n$ і r відповідно, $r<n,$ а тому дріб $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ $-$правильний.

Отже інтегрування неправильного раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена та правильного раціонального дробу. Тому зосередимо увагу на інтегруванні правильних раціональних дробів.

Елементарними раціональними дробами називають раціональні дроби таких чотирьох видів:

$$\text{I.}\frac{A}{x-a}; \quad \text{II.}\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n=2,3,...;$$

$$\text{III.}\frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad \text{IV.}\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}, \quad n \ge 2, \qquad (1.9)$$

де $A,a,M,N,p,q-$дійсні числа, а тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто $p^2-4q<0.$

Розглянемо інтеграли від елементарних дробів:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C;$

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int(x-a)^{-n}d(x-a) = -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C;$

III.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} t = x+\frac{p}{2}; \\ x^2+px+q= \\ = x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}= \\ =\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=t^2+a^2; \\ dx=dt, a^2=q-\frac{p^2}{4} \end{array} \right| t = \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\frac{2N-Mp}{2a}arctg\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{2N-Mp}{2a}arctg\frac{t}{a}+C=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)+C.$$

IV. $$\int \frac{\left(Mx+N\right)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} = \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt = \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^n}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = -\frac{M}{2}\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}.$$

Покажемо, що інтеграл $I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$ можна знайти, використовуючи відому рекурентну формулу

$$I_n = \frac{1}{(2n-2)a^2}\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}. \qquad (1.10)$$

Покажемо, як вивести формулу (1.10). Маємо

$$I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt==\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int t\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt=$$

$$\left|\begin{array}{ll} u=t; & dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}; \\ du=dt; & v=\dfrac{1}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-n}d\left(t^2+a^2\right)=-\dfrac{1}{2n-2}\dfrac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{t}{a^2\left(2n-2\right)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{a^2\left(2n-2\right)}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}=$$

$$=\frac{t}{a^2\left(2n-2\right)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+I_{n-1}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2a^2\left(n-1\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2\left(2n-2\right)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{a^2\left(2n-2\right)}I_{n-1},$$

що й завершує доведення формули (1.10).

Таким чином, вміючи інтегрувати елементарні дроби (1.9), перейдемо до інтегрування правильних раціональних дробів.

Нехай дробово-раціональна функція (9.1) є *правильним раціональним дробом* і знаменник $Q_n(x)$ цього дробу розкладено на множники

$$Q_n(x)=\left(x-\alpha_1\right)^{s_1}\cdots\left(x-\alpha_l\right)^{s_l}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{t_1}\cdots\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{t_k}, \qquad (1.11)$$

де $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_l$ – дійсні корені многочлена $Q_n(x)$ кратностей $s_1,s_2,...,s_l$ відповідно, а квадратні тричлени $x^2+p_1x+q_1,\ \ x^2+p_2x+q_2,\ \ ...,\ \ x^2+p_kx+q_k$ кратностей $t_1,t_2,...,t_k$ відповідно не мають дійсних коренів і $s_1+s_2+\cdots+s_l+2\left(t_1+t_2+\cdots t_k\right)=n.$ Тоді цей дріб можна подати у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1}+\cdots+\frac{A_{s_1}^{(1)}}{\left(x-\alpha_1\right)^{s_1}}+\cdots+\frac{A_1^{(l)}}{x-\alpha_l}+\cdots+\frac{A_{s_l}^{(l)}}{\left(x-\alpha_l\right)^{s_l}}+$$

$$+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+\frac{B_{t_1}^{(1)}x+C_{t_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{t_1}}+\cdots+\frac{B_1^{(k)}x+C_1^{(k)}}{x^2+p_kx+q_k}+\cdots$$

$$+\frac{B_{t_k}^{(k)}x+C_{t_k}^{(k)}}{\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{t_k}}, \qquad (1.12)$$

де коефіцієнти $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, C_i^{(j)}$ – деякі дійсні числа, поки що невизначені.

Таке подання (до того часу, поки коефіцієнти не визначені) не залежить від чисельника дробу $P_m(x)$.

Числа $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, C_i^{(j)}$ в (1.12) визначаються одним із способів:

- *методом невизначених коефіцієнтів,* який полягає в прирівнюванні коефіцієнтів при однакових степенях x у многочлені $P_m(x)$ і многочлені, який отримуємо у чисельнику правої частини (1.12) після зведення її до спільного знаменника;
- *прирівнювання многочлена* $P_m(x)$ і многочлена, який отримуємо у чисельнику правої частини (1.12) після зведення її до спільного знаменника, при певних значеннях невідомої x, а саме, при значеннях дійсних коренів знаменника $Q_n(x)$.

Отже, завдяки поданню (1.12), інтегрування правильних раціональних дробів зводиться до інтегрування простих дробів вказаних чотирьох типів.

В загальному випадку дробово-раціональна функція інтегрується з використанням процедури, яка описана формулою (1.8), звідки випливає, що інтегрування неправильного дробу зводиться до інтегрування многочлена і правильного дробу.

Приклад 1.3.2. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx;$ б) $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx;$ в) $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+4)};$ г) $\int\frac{dx}{(x^2+5)^3};$

д) $\int\frac{(x^3+2)^2}{(x^2-1)(x+2)}dx.$

Розв'язання

а) Розкладемо знаменник підінтегральної функції на множники.

$$x^3-5x^2+6x=x\left(x^2-5x+6\right)=x(x-2)(x-3).$$

Використовуючи розклад (1.12), маємо

$$\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}. \qquad (1.13)$$

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника, тоді прийдемо до рівності

$$\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x^3-5x^2+6x}.$$

Прирівнявши чисельники рівних дробів з однаковими знаменниками, отримаємо рівність многочленів

$$2x^2-1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2).$$

Для визначення коефіцієнтів A,B,C застосуємо другий спосіб (див. вказівки після формули (1.12)), надаючи змінній x значення: $x=0,\quad x=2,\quad x=3.$ Маємо

$$x=0:\ \ -1=A(-2)(-3);\ \ -1=6A;\ \ A=\frac{1}{6};$$

$$x=2:\quad 2\cdot 2^2-1=B\cdot 2(-1);\ \ 7=-2B;\ \ B=-\frac{7}{2};$$

$$x=3:\quad 2\cdot 3^2-1=C\cdot 3\cdot 1;\ \ 17=3C;\ \ C=\frac{17}{3}.$$

Підставляючи знайдені A,B,C в (1.13), отримуємо

$$\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{17}{3}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Отже

$$\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx=-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}-\frac{7}{2}\int\frac{d(x-2)}{x-2}+\frac{17}{3}\int\frac{d(x-3)}{x-3}=$$

$$\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C.$$

б) В цьому випадку знаменник підінтегрального дробу $x^3(x-2)^2$ має кратні корені: $x=0$ кратності 3 та $x=2$ кратності 2. Тому, використовуючи (1.12), отримаємо

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1}{x-2}+\frac{B_2}{(x-2)^2}.$$

Як і в пункті а), зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники дробів праворуч і ліворуч (оскільки знаменники цих дробів рівні). Маємо

$$x^3 - 2x^2 + 4 = A_1 x^2 (x-2)^2 + A_2 x(x-2) + A_3 (x-2)^2 + B_1 x^3 (x-2) + B_2 x^3.$$

Для знаходження невідомих A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 застосуємо метод невизначених коефіцієнтів (див. зауваження після формули (1.12)). Маємо

$x^4 : A_1 + B_1 = 0;$

$x^3 : -4A_1 + A_2 - 2B_1 + B_2 = 1;$

$x^2 : 4A_1 - 4A_2 + A_3 = -2;$

$x : 4A_2 - 4A_3 = 0;$

$x^0 : 4A_3 = 4.$

Із цієї системи п'яти лінійних рівнянь отримаємо

$$A_1 = 1; \quad A_2 = 1; \quad A_3 = \frac{1}{4}; \quad B_1 = -\frac{1}{4}; \quad B_2 = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3 (x-2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{2(x-2)^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{4}\int \frac{d(x-2)}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-2} + C =$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x-2)} + C.$$

в) Оскільки знаменник підінтегральної функції $(x+1)(x^2+4)$ має дійсний корінь $x = 1,$ а квадратний двочлен $x^2 + 4$ не має дійсних коренів, то подання (1.12) в цьому випадку має вигляд

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

Зведемо праву частину попередньої рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники дробів в правій та лівій частині. Тоді матимемо

$$1 = A\left(x^2+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+1\right).$$

Використавши метод невизначених коефіцієнтів для знаходження невідомих коефіцієнтів $A, B, C,$ прийдемо до системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B+C=0, \\ 4A+C=1. \end{cases}$$

Розв'язки цієї системи $A=\frac{1}{5},\quad B=-\frac{1}{5},\quad C=\frac{1}{5}$ реалізують розклад підінтегральної функції

$$\frac{1}{(x+1)\left(x^2+4\right)} = \frac{1}{5(x+1)}+\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+4}.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{(x+1)\left(x^2+4\right)} = \frac{1}{5}\int\frac{d\left(x+1\right)}{x+1}-\frac{1}{5}\int\frac{x-1}{x^2+4}dx = \frac{1}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{5}\int\frac{xdx}{x^2+4}+$$

$$+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{2\cdot 5}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}arctg\,\frac{x}{2} =$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{10}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{10}arctg\,\frac{x}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{10}\left(\ln\frac{|x+1|}{x^2+4}+arctg\,\frac{x}{2}\right)+C.$$

г) $I_3=\int\frac{dx}{\left(x^2+5\right)^3}$ $-$це інтеграл, який можна знайти за рекурентною формулою (1.10).

Знаходимо послідовно:

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+5}=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C;$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+5\right)^2}=\frac{1}{10}\cdot\frac{x}{x^2+5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C;$$

$$I_3 = \frac{1}{20}\cdot\frac{x}{\left(x^2+5\right)^2} + \frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{x}{x^2+5} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\, arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C;$$

д) Знайти інтеграл $\int \frac{\left(x^3+2\right)^2}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}dx.$

Підінтегральна функція $\frac{\left(x^3+2\right)^2}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}$ – це *неправильний* дріб, оскільки степінь чисельника $m=6,$ а степінь знаменника $n=3.$ Виділимо цілу частину цього дробу. Для цього поділимо чисельник дробу $\left(x^3+2\right)^2 = x^6+4x^3+4$ на знаменник $\left(x^2-1\right)\left(x+2\right) = x^3+2x^2-x-2.$ Маємо

$$\begin{array}{r|l}
x^6+4x^3+4 & x^3+2x^2-x-2 \\ \cline{2-2}
-\;\underline{x^6+2x^5-x^4-2x^3} & x^3-2x^2+5x-6 \\
-2x^5+x^4+6x^3+4 & \\
-\;\underline{-2x^5-4x^4+2x^3+4x^2} & \\
-5x^4+4x^3-4x^2+4 & \\
-\;\underline{-5x^4+10x^3-5x^2-10x} & \\
-6x^3+x+10x+4 & \\
-\;\underline{-6x^3-12x^2+6x+12} & \\
13x^2+4x-8 &
\end{array}$$

Отже, за $(1.8),$ дістанемо

$$\frac{\left(x^3+2\right)^2}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)} = x^3-2x^2+5x-6+\frac{13x^2+4x-8}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}.$$

Оскільки, після виділення цілої частини, ми отримали правильний дріб $\frac{13x^2+4x-8}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)},$ то подамо його у вигляді (12.1) та зінтегруємо, оскільки немає проблем в інтегруванні цілої частини, тобто многочлена $x^3-2x^2+5x-6.$

Оскільки знаменник $\left(x^2-1\right)\left(x+2\right) = \left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)$ дробу $\frac{13x^2+4x-8}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}$ має дійсні різні корені $x=1,\quad x=-1,\quad x=2$, то маємо наступне його подання у вигляді суми простих раціональних дробів

$$\frac{13x^2+4x-8}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}.$$

Прирівняємо чисельники обох частин останнього дробу після зведення його до спільного знаменника. Отримуємо

$$13x^2+4x-8=A\left(x+1\right)\left(x+2\right)+B\left(x-1\right)\left(x+2\right)+C\left(x-1\right)\left(x+1\right).$$

Використаємо другий спосіб (як у прикладі а)) знаходження невизначених коефіцієнтів $A,B,C.$

$$x=0;\quad -8=2A-2B-C;$$

$$x=-1;\quad 1=-2B;\quad B=-\frac{1}{2};$$

$$x=1;\quad 9=6A;\quad A=\frac{3}{2}.$$

З першої рівності дістанемо $C=8+2A-2B=8+3+1=12.$

Отже

$$\frac{13x^2+4x-8}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+12\frac{1}{x+2}.$$

Остаточно отримуємо

$$\frac{\left(x^3+2\right)^2}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}dx=\int x^3dx-2\int x^2dx+5\int xdx-6\int dx+\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x-1\right)}{x-1}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+1\right)}{x+1}+12\int\frac{d\left(x+2\right)}{x+2}=\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x+\frac{3}{2}\ln\left|x-1\right|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right|+12\ln\left|x+2\right|+C=\frac{3x^4-8x^3+30x^2-72x}{12}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(x-1\right)^3\left(x+2\right)^{24}}{x+1}\right|+C.$$

Теоретичні питання

1. Які функції називаються дробово-раціональними?

2. Означити правильний (неправильний) раціональний дріб.

3. Які раціональні дроби називаються елементарними?

4. Як інтегрувати елементарні дроби?

5. Як інтегрувати неправильний раціональний дріб?

6. Які є відомі методи для знаходження невизначених коефіцієнтів? Як вони «працюють»?

Завдання 8. Знайти інтеграли від дробово-раціональних функцій (знаменник має тільки дійсні корені).

1. $\int \frac{2x^2+x-2}{x^3-x^2}\,dx$; **2.** $\int \frac{-9x^2+13x-6}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$;

3. $\int \frac{x+1}{(x-2)(x-1)^2}\,dx$; **4.** $\int \frac{14x+16}{x(x+2)^2}\,dx$;

5. $\int \frac{3x^2+x+8}{x(x+2)^2}\,dx$; **6.** $\int \frac{x+8}{x(x-1)^2}\,dx$;

7. $\int \frac{-7x^2+7x-1}{(x-2)(x-1)^2}\,dx$; **8.** $\int \frac{4x^2-x-2}{x^2-x^3}\,dx$;

9. $\int \frac{5x^2+4}{(x+1)x^2}\,dx$; **10.** $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$;

11. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-2)(x-4)^2}\,dx$; **12.** $\int \frac{-2x^2-3x+4}{(x-2)x^2}\,dx$;

13. $\int \frac{6x^2+4x+1}{(x+1)x^2}\,dx$; **14.** $\int \frac{x^2+5x+1}{x^3-x^2}\,dx$;

15. $\int \frac{x^2+7x-1}{(x-2)^2(x-3)}\,dx$; **16.** $\int \frac{x^2+x-5}{(x+4)x^2}\,dx$;

17. $\int \frac{2x^2+10x+8}{x(x+2)^2}\,dx$; **18.** $\int \frac{-18x^2+26x-12}{(x-2)(x-1)^2}\,dx$;

19. $\int \frac{x^2+7x-3}{(x-4)(x-1)^2}\,dx$; **20.** $\int \frac{-3x^2+8x-1}{(x-2)(x+3)^2}\,dx$;

21. $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-5)(x+6)^2}\,dx$; **22.** $\int \frac{x^2+4-x}{(x+2)(x-1)^2}\,dx$;

23. $\int \frac{-3x^2+9x-1}{(x-2)(x+7)^2}\,dx$; **24.** $\int \frac{-x^2+7x-1}{x^3-4x^2}\,dx$;

25. $\int \frac{x^2-8x-3}{x(x-1)^2}\,dx$; **26.** $\int \frac{x^2+3x-2}{x(x-2)^2}\,dx$;

27. $\int \frac{x^2+1}{x(x+5)^2}\,dx$; **28.** $\int \frac{3x^2+7}{x(x-9)^2}\,dx$;

29. $\int \frac{3x^2+5x-1}{x^3+3x^2}\,dx$; **30.** $\int \frac{x^2+8x-13}{x^3-5x^2}\,dx$.

Відповіді до завдання 8

1. $\ln|x|+\ln|x-1|-\dfrac{2}{x}+C$.

2. $-16\ln|x-2|+7\ln|x-1|-\dfrac{2}{x-1}+C$.

3. $3\ln|x-2|-3\ln|x-1|+\dfrac{2}{x-1}+C$.

4. $4\ln|x|-4\ln|x+2|-\dfrac{6}{x+2}+C$.

5. $2\ln|x|+\ln|x+2|+\dfrac{9}{x+2}+C$.

6. $8\ln|x|-8\ln|x-1|-\dfrac{9}{x-1}+C$.

7. $8\ln|x-1|-15\ln|x-2|-\dfrac{1}{x-1}+C$.

8. $-3\ln|x|-\ln|x-1|+\dfrac{2}{x}+C$.

9. $-4\ln|x|+9\ln|x+1|-\dfrac{4}{x}+C$.

10. $\dfrac{9}{2}\ln|x-3|+\dfrac{1}{2}\ln|x+1|-\dfrac{18}{x-3}+C$.

11. $-3\ln|x-4|+4\ln|x-2|-\dfrac{13}{x-4}+C$.

12. $\dfrac{1}{2}\ln|x|-\dfrac{5}{2}\ln|x-2|+\dfrac{2}{x}+C$.

13. $3\ln|x|+3\ln|x+1|-\dfrac{1}{x}+C$.

14. $4\ln|x|-3\ln|x+1|-\dfrac{1}{x}+C$.

15. $29\ln|x-3|-28\ln|x-2|+\dfrac{17}{x-2}+C$.

16. $\dfrac{9}{16}\ln|x|+\dfrac{7}{16}\ln|x+4|+\dfrac{5}{4x}+C$.

17. $2\ln|x|-\dfrac{2}{x+2}+C$.

18. $-\dfrac{4}{x-1}+14\ln|x-1|-32\ln|x-2|+C$.

19. $\dfrac{5}{3(x-1)}-\dfrac{32}{9}\ln|x-1|+\dfrac{41}{9}\ln|x-4|+C$.

20. $-\frac{52}{5(x+3)}-\frac{78}{25}\ln|x+3|+\frac{3}{25}\ln|x-2|+C$.

21. $\frac{23}{11(x+6)}+\frac{87}{121}\ln|x+6|+\frac{34}{121}\ln|x-5|+C$.

22. $\frac{10}{9}\ln|x+2|-\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{4}{3(x-1)}+C$.

23. $\frac{5}{81}\ln|x-2|-\frac{211}{9(x+7)}-\frac{248}{81}\ln|x+7|+C$.

24. $-\frac{27}{16}\ln|x|+\frac{11}{16}\ln|x-4|-\frac{1}{4x}+C$.

25. $4\ln|x-1|-3\ln|x|+\frac{10}{x-1}+C$.

26. $-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{4}{x-2}+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C$.

27. $\frac{1}{25}\ln|x|+\frac{24}{25}\ln|x+5|+\frac{26}{5(x+5)}+C$.

28. $\frac{7}{81}\ln|x|+\frac{236}{81}\ln|x-9|-\frac{250}{9(x-9)}+C$.

29. $\frac{16}{9}\ln|x|+\frac{11}{9}\ln|x+3|+\frac{1}{3x}+C$.

30. $-\frac{27}{25}\ln|x|+\frac{52}{25}\ln|x-5|-\frac{13}{5x}+C$.

Завдання 9. Знаменник містить квадратні тричлени без дійсних коренів.

1. $\int\frac{x-2}{x^3+4x}\,dx$; **2.** $\int\frac{13x-6}{(x-1)(x^2+6x+10)}\,dx$;

3. $\int\frac{x^2-x+1}{x^3+4x^2+5x}\,dx$; **4.** $\int\frac{14x+1}{x(x^2+2)}\,dx$;

5. $\int\frac{x^2+3x+8}{x(x^2+8)}\,dx$; **6.** $\int\frac{x+8}{x^3+1}\,dx$;

7. $\int\frac{-7x-1}{(x^2+6x+10)(x-1)}\,dx$; **8.** $\int\frac{x-2}{x+x^3}\,dx$;

9. $\int\frac{15x^2+4}{x(x^2+1)}\,dx$; **10.** $\int\frac{-x^2+6x+7}{(x^2+1)(x-3)}\,dx$;

11. $\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+4x+5)x}\,dx$; **12.** $\int\frac{x^2+4}{(x^2+2)x}\,dx$;

13. $\int \frac{x^2-3x+1}{(x^2+1)x}\,dx$; **14.** $\int \frac{x^2+5x+1}{x^3+7x}\,dx$;

15. $\int \frac{x^2+9x}{(x^2+2)(x-3)}\,dx$; **16.** $\int \frac{x^2+5}{(x^2+4)x}\,dx$;

17. $\int \frac{-x+6}{(x^2+4x+5)x}\,dx$; **18.** $\int \frac{8x^2+6x-1}{(x-2)(x^2+8)}\,dx$;

19. $\int \frac{x^2-3}{x^3-x^2+5x-5}\,dx$; **20.** $\int \frac{-x-1}{x^3+6x^2+10x}\,dx$;

21. $\int \frac{x^2+2x}{(x-5)(x^2+6)}\,dx$; **22.** $\int \frac{x^2+4-x}{(x^2+2)(x-1)}\,dx$;

23. $\int \frac{x^2+9x-4}{(x-2)(x^2+7)}\,dx$; **24.** $\int \frac{-x^2+x-1}{x^3+4x}\,dx$;

25. $\int \frac{x^2-8x-13}{x(x^2+1)}\,dx$; **26.** $\int \frac{x^2-3}{x^3-x^2+x-1}\,dx$;

27. $\int \frac{x^2+x}{x^3+8}\,dx$; **28.** $\int \frac{x^2+7}{(x^2+6)(x-9)}\,dx$;

29. $\int \frac{x^2+8x-1}{x^3+3x}\,dx$; **30.** $\int \frac{x^2+8}{x^3+5x}\,dx$.

Відповіді до завдання 9

1. $-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{4}\ln\left|x^2+4\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

2. $\frac{7}{17}\ln|x-1|-\frac{7}{34}\ln\left|x^2+6x+10\right|+\frac{193}{17}\operatorname{arctg}(x+3)+C$.

3. $\frac{1}{5}\ln|x|+\frac{2}{5}\ln\left|x^2+4x+5\right|-\frac{17}{5}\operatorname{arctg}(x+2)+C$.

4. $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+2\right|+7\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

5. $\ln|x|+\frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)+C$.

6. $\frac{7}{3}\ln|x+1|-\frac{7}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

7. $-\frac{8}{17}\ln|x-1|+\frac{4}{17}\ln\left|x^2+6x+10\right|-\frac{87}{17}\operatorname{arctg}(x+3)+C$.

8. $-2\ln|x|+\ln\left|x^2+1\right|+\operatorname{arctg}x+C$.

9. $4\ln|x|+\frac{11}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C$.

10. $\frac{8}{5}\ln|x-3|-\frac{13}{10}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{9}{5}\operatorname{arctg}x+C$

11. $\frac{1}{5}\ln|x|+\frac{2}{5}\ln\left|x^2+4x+5\right|-\frac{17}{5}\operatorname{arctg}(x+2)+C$

12. $2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+C$.

13. $\ln|x|-3\operatorname{arctg}x+C$.

14. $\frac{1}{7}\ln|x|+\frac{3}{7}\ln\left|x^2+7\right|+\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+C$.

15. $\frac{36}{11}\ln|x-3|-\frac{25}{22}\ln\left|x^2+2\right|+\frac{12\sqrt{2}}{11}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

16. $\frac{5}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln\left|x^2+4\right|+C$.

17. $\frac{6}{5}\ln|x|-\frac{3}{5}\ln\left|x^2+4x+5\right|-\frac{17}{5}\operatorname{arctg}(x+2)+C$.

18. $\frac{43}{12}\ln|x-2|+\frac{53}{24}\ln\left|x^2+8\right|+\frac{89\sqrt{2}}{24}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)+C$.

19. $-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln\left|x^2+5\right|+\frac{4\sqrt{5}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C$.

20. $-\frac{1}{10}\ln|x|+\frac{1}{20}\ln\left|x^2-6x+10\right|-\frac{13}{10}\operatorname{arctg}(x-3)+C$.

21. $\frac{35}{31}\ln|x-5|-\frac{2}{31}\ln\left|x^2+6\right|+\frac{7\sqrt{6}}{31}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)+C$.

22. $\frac{4}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+2\right|-\frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

23. $\frac{18}{11}\ln|x-2|-\frac{7}{22}\ln\left|x^2+7\right|+\frac{85\sqrt{7}}{77}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+C$.

24. $-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{3}{8}\ln\left|x^2+4\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$.

25. $-13\ln|x|+7\ln\left|x^2+1\right|-8\operatorname{arctg}x+C$.

26. $-\ln|x-1|+\ln\left|x^2+1\right|+2\operatorname{arctg}x+C$.

27. $\frac{1}{6}\ln|x+2|+\frac{5}{12}\ln\left|x^2-2x+4\right|+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

28. $\frac{88}{87}\ln|x-9|-\frac{1}{174}\ln\left|x^2+6\right|-\frac{\sqrt{6}}{58}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)+C$.

29. $-\ln|x|+\ln\left|x^2+1\right|+8\operatorname{arctg}x+C$.

30. $\frac{8}{5}\ln|x|-\frac{3}{10}\ln\left|x^2+5\right|+C$.

1.3.3. *Інтегрування ірраціональних функцій*

Інтеграл $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_l}{n_l}}\right)dx,$ де $R\left(x,x_1,x_2,...,x_l\right)$ – дробово-раціональна функція від змінних $x,x_1,x_2,...,x_l$, m_i,n_i, $i=1,2,...,1$ – цілі числа, a,b,c,d – дійсні сталі, причому $ad-bc\neq 0$, зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції підстановкою

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k, \qquad (1.14)$$

де $k=НСК\left(n_1,n_2,...,n_l\right)$. (НСК – найменше спільне кратне)

Приклад 1.3.3. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

а) $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$; б) $\int\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{1-x}\right)^3}}{x+\sqrt{\frac{x}{1-x}}}dx.$

Розв'язання

а) Застосуємо підстановку $x+4=t^2$, поклавши в (14) $a=1,b=4,c=d=0$. Маємо:

$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\left|\begin{array}{l}x+4=t^2\\dx=2tdt\\t=\sqrt{x+4}\end{array}\right|=\int\frac{2t^2dt}{t^2-4}=2\int\frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt=2t+8\int\frac{dt}{t^2-4}=$$

$$=2t+\frac{8}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.$$

б) Застосувавши підстановку $\sqrt{\frac{x}{1-x}}=t$, отримаємо

$$\frac{x}{1-x}=t^2;\quad x=\frac{t^2}{1+t^2};\quad dx=\frac{2tdt}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Тому

$$I=\int\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{1-x}\right)^3}}{x+\sqrt{\frac{x}{1-x}}}dx=\int\frac{t^3\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+t}dt=2\int\frac{t^4}{\left(1+t^2\right)\left(t^3+t^2+t\right)}dt=$$

$$=2\int\frac{t^3}{\left(1+t^2\right)\left(t^2+t+1\right)}dt.$$

Подамо підінтегральну функцію у вигляді суми простих дробів

$$\frac{t^3}{\left(1+t^2\right)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+t+1};$$

$$t^3=(At+B)\left(t^2+t+1\right)+\left(Ct+D\right)\left(1+t^2\right);$$
$$t^3=(A+C)t^3+\left(A+B+D\right)t^2+\left(A+B+C\right)t+\left(B+D\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної t, одержуємо систему:

$$\begin{cases}1=A+C,\\0=A+B+D,\\0=A+B+C,\\0=B+D.\end{cases}$$

Звідки

$$A=0, B=-1, C=1, D=1.$$

Отже

$$I=-2\int\frac{dt}{1+t^2}+2\int\frac{1+t}{t^3+t^2+t}dt=-2\operatorname{arctg}t+\int\frac{(2t+1)+1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt=$$

$$=-2\operatorname{arctg}t+\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}+\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=-2\operatorname{arctg}t+\ln\left|t^2+t+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}+C=$$

$$=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\ln\left|\frac{x}{1-x}+\sqrt{\frac{x}{1-x}}+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Теоретичні питання

1. Яка функція називається ірраціональною?

2. Навести класи ірраціональних функцій, що інтегруються.

3. Яка заміна змінних використовується для інтегрування ірраціональних функцій?

Завдання 10. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій.

1. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x}}{x(1+\sqrt{x})}\,dx$; **2.** $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx$;

3. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}\,dx$; **4.** $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x^2})}\,dx$;

5. $\int \frac{x-2\sqrt[3]{x}}{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; **6.** $\int \frac{(1-\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;

7. $\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}}\,dx$; **8.** $\int \frac{x+\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$;

9. $\int \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$; **10.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$;

11. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-\sqrt[4]{2-x}}\,dx$; **12.** $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$;

13. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$; **14.** $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$;

15. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}\,dx$; **16.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}\,dx$;

17. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{1-x}}\,dx$; **18.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$;

19. $\int \frac{\sqrt{2x-1}+x}{\sqrt[3]{2x-1}}\,dx$; **20.** $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$;

21. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$; **22.** $\int \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\,dx$;

23. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$; **24.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^4}}\,dx$;

25. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}(2+x)}\,dx$; **26.** $\int \frac{1+\sqrt[3]{x^2}}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$;

27. $\int \frac{3+x}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx$; **28.** $\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-x}\,dx$;

29. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$; **30.** $\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$.

Відповіді до завдання 10

1. $2\sqrt{x}-4\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|-\ln\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right|+2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

2. $-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{3}{4}\ln\left|2\sqrt{x}+1\right|+C$.

3. $-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}-\dfrac{1}{4}+C$.

4. $\ln|x|-\dfrac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x^2}+1\right|+3\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[3]{x}+C$.

5. $\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{7}{6}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{7}{18}\ln\left|3\sqrt[3]{x^2}+1\right|+C$.

6. $-\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+3x-\dfrac{18}{5}\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$.

7. $-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{10}{9}\sqrt{x}-\dfrac{10}{27}\ln\left|3\sqrt{x}+1\right|+C$.

8. $\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{(x+2)^7}+\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{(x+2)^5}-3\sqrt[3]{(x+2)^2}+C$.

9. $\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{10}\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{9}{16}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{3}{8}\sqrt{x}+\dfrac{9}{32}\sqrt[3]{x}+\dfrac{9}{32}\sqrt[6]{x}+\dfrac{9}{64}\ln\left|2\sqrt[6]{x}-1\right|+C$

10. $\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|+C$.

11. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3}+\dfrac{4}{5}\sqrt[4]{(2-x)^5}-x+2+\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{(2-x)^3}+C$.

12. $18\sqrt[6]{x}+9\sqrt[3]{x}+18\ln\left|1-\sqrt[6]{x}\right|+C$.

13. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$.

14. $4\sqrt{x+1}+x+1+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C$.

15. $-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}-12\sqrt[6]{x}-12\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$.

16. $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$.

17. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}+\dfrac{4}{5}\sqrt[4]{(1-x)^5}-x+1+\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{(1-x)^3}+C$.

18. $\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}+C$.

19. $\dfrac{3}{7}\sqrt[6]{(2x-1)^7}+\dfrac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-1)^5}+\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-1)^2}+C$.

20. $x-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$.

21. $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right)+C$.

22. $-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\sqrt{x-1}\sqrt{(x+1)^3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

23. $x-2\sqrt{x}+2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$.

24. $\dfrac{6}{5}\ln\left|\sqrt[6]{x^5}+1\right|+C$.

25. $2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right)+C$.

26. $\dfrac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x^2}+1\right|+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x^2}+1\right|+C$.

27. $-\dfrac{\sqrt{3+2x}}{x}+C$.

28. $-3\ln\left|-\sqrt[3]{x^2}+1\right|-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{3}{2}\ln\left|-\sqrt[3]{x^2}+1\right|+C$.

29. $-\dfrac{3}{8}\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}}{x-1}+C$.

30. $-\dfrac{3}{8}\dfrac{(x+2)\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}}{x-2}+C$.

1.3.4. *Інтегрування тригонометричних функцій*

До інтегрування тригонометричних функцій нема загального підходу такого як, наприклад, до інтегрування дробово-раціональних функцій. Проте можна виділити деякі класи тригонометричних функцій, для яких застосовні певні рекомендації.

а) застосування тригонометричних формул пониження степеня:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x; \qquad (1.15)$$

Приклад 1.3.4. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

Розв'язання. Використавши перші дві формули з (1.15), матимемо

$$\int \sin^2 x\cos^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$$

$$\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)dx=\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\sin 2x-$$

$$-\frac{1}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx-\frac{1}{16}\int\cos^2 2x\cdot d\left(\sin 2x\right)=$$

$$\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{1}{16}\int\left(1-\sin^2 2x\right)d\left(\sin 2x\right)=$$

$$\frac{x}{16}+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

б) використання підстановок:

- підстановка

$$t=\cos x, \qquad (1.16)$$

якщо в інтегралі $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ підінтегральна функція $R\left(\sin x,\cos x\right)-$ непарна відносно $\sin x$, тобто

$$R\left(-\sin x,\cos x\right)=-R\left(\sin x,\cos x\right);$$

- підстановка

$$t=\sin x, \qquad (1.17)$$

якщо в інтегралі $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ підінтегральна функція $R\left(\sin x,\cos x\right)-$ непарна відносно $\cos x$, тобто

$$R\left(\sin x,-\cos x\right)=-R\left(\sin x,\cos x\right).$$

- підстановки

$$tgx=t \qquad (1.18)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\quad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}. \qquad (1.19)$$

у випадку, якщо функція $R\left(x,y\right)-$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто

$$R\left(-\sin x,-\cos x\right)=R\left(\sin x,\cos x\right).$$

Приклад 1.3.5. Знайти інтеграл $\int\frac{\sin x}{\sin^2 x+6\cos^2 x}dx.$

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $-$непарна відносно $\sin x$, то застосуємо підстановку $\left(1.16\right)$. Маємо

$$\int\frac{\sin x}{\sin^2 x+6\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1+5\cos^2 x}dx=\left|\begin{matrix}t=\cos x\\ dt=-\sin x dx\end{matrix}\right|=-\int\frac{dt}{1+5t^2}=-\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{5}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{5}}}+C=-\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\cos x\right)+C.$$

Приклад 1.3.6. Знайти інтеграл $\int\cos^5 x\cdot\sqrt{\sin x}dx.$

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $-$ непарна відносно $\cos x$, то застосуємо підстановку (1.17).

Маємо

$$\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}dx = \int \cos^4 x \cdot \sqrt{\sin x} \cos xdx =$$

$$= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \sqrt{\sin x} \cos xdx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos xdx \end{vmatrix} = \int \left(1-t^2\right)^2 \sqrt{t}dt = \int \left(1-2t^2+t^4\right) t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \int \left(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}} \right) dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}} + C =$$

$$\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}(\sin x)^{\frac{11}{2}} + C.$$

Приклад 1.3.7. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

Розв'язання. В цьому випадку застосуємо до підінтегральної функції підстановку (1.18) та формули (1.19), оскільки підінтегральна функція $-$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$. Маємо

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 5\sin^2 x}dx = \begin{vmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(\frac{3}{1+t^2} + \frac{5t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{5t^2+3} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{5}}t + C = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg} x + C.$$

в) інтегрування добутків синусів та косинусів

Для знаходження інтегралів:

$$\int \cos ax \cos bxdx, \quad \int \sin ax \sin bxdx, \quad \int \sin ax \cos bxdx$$

слід використати такі тригонометричні формули:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right), \qquad (1.20)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

Приклад 1.3.8. Знайти інтеграл $\int \sin 2x \cos 4xdx$.

Розв'язання. Використовуючи третю з формул (1.20), отримуємо

$$\int \sin 2x \cos 4xdx = \frac{1}{2}\int (\sin(4x+2x) + \sin(2x-4x))dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 6x-\sin 2x)dx=\frac{-1}{2\cdot 6}\cos 6x+\frac{1}{2\cdot 2}\cos 2x+C=$$

$$=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{12}\cos 6x+C.$$

г) розглянемо інтеграл виду

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx,$$

де $R(x,y)-$дробово-раціональна функція змінних x та y (без будь-яких додаткових умов).

Такий інтеграл раціоналізується з допомогою *універсальної тригонометричної підстановки*

$$tg\,\frac{x}{2}=t \qquad (1.21)$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x==\frac{2t}{1+t^2},\quad dx==\frac{2dt}{1+t^2}; \qquad (1.22)$$

Приклад 1.3.8. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Застосуємо до підінтегральної функції підстановку (1.21) та формули (1.22). Маємо

$$\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int\frac{1}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}=$$

$$=\left|\begin{matrix}t^2-8t+15=\\(t-4)^2-1\end{matrix}\right|=\int\frac{2d(t-4)}{(t-4)^2-1}=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

Теоретичні питання

1. Навести формули зниження степеня для інтегрування деяких класів тригонометричних функцій.

2. Навести типи підстановок для обчислення інтеграла $\int R(\sin x,\cos x)dx$ залежно від степеня тригонометричних функцій.

3. Як інтегрувати функції, що містять добутки синусів та косинусів?
4. Що таке універсальна тригонометрична підстановка?

Завдання 11. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

1. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 2x\, dx$; **2.** $\int \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x} dx$;

3. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$; **4.** $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\, dx$;

5. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx$; **6.** $\int \frac{\cos^3 6x}{\cos^2 6x + 3\sin 6x} dx$;

7. $\int (3\sin^2 x + 2\cos^2 x) dx$; **8.** $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} dx$;

9. $\int \cos^6 2x\, dx$; **10.** $\int \sin^2 3x \cdot \cos^4 3x dx$;

11. $\int \sin^4 4x \cdot \cos^3 4x dx$; **12.** $\int \frac{\sin^3 3x}{\cos 3x} dx$;

13. $\int \sin^6 5x dx$; **14.** $\int \sin^4 3x dx$;

15. $\int 3\sin^2 2x \cdot \cos^5 2x dx$; **16.** $\int \sin^3 5x \cdot \cos^2 5x dx$;

17. $\int \frac{\cos^3 4x}{\sin 4x} dx$; **18.** $\int \frac{2\cos^2 5x + 1}{\sin^2 5x + 3\cos^2 5x} dx$;

19. $\int \frac{\cos 2x}{3\cos^2 2x + \sin 2x} dx$; **20.** $\int (4\sin^2 x + 5\cos^2 x) dx$;

21. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sin^2 2x + 2\cos^2 2x} dx$; **22.** $\int (\sin^2 2x + 5)^2 \cos 2x dx$;

23. $\int \cos^4 5x dx$; **24.** $\int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x}$;

25. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x)^2}$; **26.** $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$;

27. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$; **28.** $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;

29. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}}$; **30.** $\int \frac{\sin^5 x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

Відповіді до завдання 11

1. $-\frac{1}{10}\sin^2 2x \cdot \cos^3 2x - \frac{1}{15}\cos^2 2x + C$.

2. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| - x + C$.

3. $\frac{\sin^4 x}{\cos x} + \sin^2 x \cdot \cos x + 2\cos x + \frac{\sin x^2}{\mathrm{cosx}} + C$.

4. $-\frac{1}{6}\sin^3 x\cos^3 x-\frac{1}{8}\cos^3 x\sin x+\frac{1}{16}\cos x\sin x+\frac{1}{16}x+C$.

5. $\frac{1}{3\sin x\cos^3 x}+\frac{4}{3\sin x\cos x}-\frac{8}{3}\operatorname{ctg} x+C$.

6. $\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{4}\ln\left|\sin^2 6x-3\sin 6x-1\right|-\frac{3}{4\sqrt{13}}\ln\left|\frac{\sqrt{13}-3+2\sin 6x}{\sqrt{13}+3-2\sin 6x}\right|+C$

7. $-\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{5}{2}x+C$. **8.** $\frac{\sqrt{15}}{6}\operatorname{arctg}\left|\frac{3\operatorname{tg} x}{\sqrt{15}}\right|-\frac{x}{2}+C$.

9. $\frac{1}{12}\sin 2x\cos^5 2x+\frac{5}{48}\cos^3 2x\sin 2x+\frac{5}{64}\sin 4x+\frac{5}{16}x+C$.

10. $-\frac{1}{18}\sin 3x\cos^5 3x+\frac{1}{72}\cos^3 3x\sin 3x+\frac{1}{96}\sin 6x+\frac{1}{16}x+C$.

11. $-\frac{1}{20}\sin 4x\cos^4 4x+\frac{1}{60}\cos^2 4x\sin 4x+\frac{1}{30}\sin 4x+C$.

12. $-\frac{1}{6}\sin^2 3x-\frac{1}{3}\ln\left|\cos 3x\right|+C$.

13. $-\frac{1}{30}\sin^5 5x\cos 5x-\frac{1}{24}\cos 5x\sin^3 5x-\frac{1}{32}\sin 10x+\frac{5}{16}x+C$.

14. $-\frac{1}{12}\sin^3 3x\cos 3x-\frac{1}{8}\cos 3x\sin 3x+\frac{3}{8}x+C$.

15. $\sin 2x(-\frac{3}{14}\cos^6 2x+\frac{3}{70}\cos^4 2x+\frac{2}{35}\cos^2 2x+\frac{4}{35})+C$.

16. $-\frac{1}{25}\sin^2 5x\cos^3 5x-\frac{2}{75}\cos^3 5x+C$.

17. $\frac{1}{8}\cos^2 4x+\frac{1}{4}\ln\left|\sin 4x\right|+C$.

18. $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5x)+C$.

19. $\frac{1}{2\sqrt{37}}\ln\left|\frac{\sqrt{37}-1+6\sin 2x}{\sqrt{37}+1-6\sin 2x}\right|+C$.

20. $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{9}{2}x+C$.

21. $\frac{1}{2}\cos 2x-\operatorname{arctg}(\cos 2x)+C$.

22. $\frac{25}{2}\sin 2x+\frac{1}{10}\sin^5 2x+\frac{5}{3}\sin^3 2x+C$.

23. $\frac{1}{20}\sin 5x\cos^3 5x+\frac{3}{40}\cos 5x\sin 5x++\frac{3}{8}x+C$.

24. $\operatorname{arctg}(\sin x)+C$. **25.** $\dfrac{1}{1+\cos x}+C$.

26. $\dfrac{\sin^4 x}{\cos x}+\cos x\sin^2 x+2\cos x+C$.

27. $-\dfrac{1}{6}\sin^3 x\cos^3 x-\dfrac{1}{8}\cos^3 x\sin x+\dfrac{1}{16}\cos x\sin x+\dfrac{1}{16}x+C$.

28. $-\dfrac{1}{4}\sin x\cos^3 x+\dfrac{1}{8}\cos x\sin x+\dfrac{1}{8}x+C$.

29. $-\dfrac{2}{5}\left(\sin^2 x-5\right)\sqrt{\sin x}+C.$

30. $-\dfrac{32}{45}\left(2+2\cos^2\dfrac{x}{2}+3\cos^4\dfrac{x}{2}-10\cos^6\dfrac{x}{2}+5\cos^8\dfrac{x}{2}\right)\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}-1}+C$.

Завдання 12. Знайти інтеграли від добутків тригонометричних функцій.

1. $\int\sin 3x\cdot\cos 5xdx$; **2.** $\int\cos 5x\cdot\cos 3xdx$;

3. $\int\cos\dfrac{5x}{2}\cdot\sin 8xdx$; **4.** $\int\sin 4x\cdot\sin 8xdx$;

5. $\int\sin 6x\cdot\cos 4xdx$; **6.** $\int\cos 5x\cdot\sin 4x\cdot\cos 3xdx$;

7. $\int\cos 7x\cdot\sin 8xdx$; **8.** $\int\sin 7x\cdot\cos 4xdx$;

9. $\int\cos\dfrac{x}{3}\cdot\sin\dfrac{x}{2}dx$; **10.** $\int\sin 6x\cdot\sin 8xdx$;

11. $\int\sin x\cdot\sin 8xdx$; **12.** $\int\sin 2x\cdot\sin 4x\cdot\sin 8xdx$;

13. $\int\cos 7x\cdot\cos xdx$; **14.** $\int\cos\dfrac{4x}{3}\cdot\sin\dfrac{x}{2}dx$;

15. $\int\sin x\cdot\cos 14xdx$; **16.** $\int\cos x\cdot\cos 7x\cdot\cos 9xdx$;

17. $\int\sin x\cdot\sin 8x\cdot\cos 3xdx$; **18.** $\int\cos 5x\cdot\sin 8xdx$;

19. $\int\cos x\cdot\cos\dfrac{4x}{3}\cdot\sin\dfrac{x}{2}dx$; **20.** $\int\sin^2 4x\cdot\cos xdx$;

21. $\int\cos\dfrac{7x}{3}\cdot\sin\dfrac{5x}{2}dx$; **22.** $\int\cos^2 x\cdot\sin 8xdx$;

23. $\int\cos 2x\cdot\sin^2 8xdx$; **24.** $\int\cos x\cdot\cos 3x\cdot\sin 4xdx$;

25. $\int\cos\dfrac{3x}{4}\cdot\sin\dfrac{5x}{2}dx$; **26.** $\int\cos\dfrac{4x}{3}\cdot\sin 2xdx$;

27. $\int\sin 2x\cdot\sin 3x\cdot\cos 4xdx$; **28.** $\int\sin^2 x\cdot\sin 8xdx$;

29. $\int \cos x \cdot \cos 6x \cdot \cos 8x dx$; **30.** $\int \cos 3x \cdot \sin \frac{5x}{2} dx$.

Відповіді до завдання 12

1. $-\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. **2.** $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 8x + C$.

3. $-\frac{1}{21}\cos\frac{21x}{2} - \frac{1}{11}\cos\frac{11x}{2} + C$. **4.** $\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$.

5. $-\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

6. $-\frac{1}{48}\cos 12x - \frac{1}{24}\cos 6x + \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$.

7. $-\frac{1}{30}\cos 15x - \frac{1}{2}\cos x + C$. **8.** $-\frac{1}{22}\cos 11x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$.

9. $-\frac{3}{5}\cos\frac{5x}{6} - 3\cos\frac{x}{6} + C$. **10.** $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{28}\sin 14x + C$.

11. $\frac{1}{14}\sin 7x - \frac{1}{18}\sin 9x + C$.

12. $-\frac{1}{40}\cos 10x + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{56}\cos 14x - \frac{1}{24}\cos 6x + C$.

13. $\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 8x + C$. **14.** $-\frac{3}{11}\cos\frac{11x}{6} + \frac{3}{5}\cos\frac{5x}{6} + C$.

15. $-\frac{1}{30}\cos 15x + \frac{1}{26}\cos 13x + C$.

16. $\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{60}\sin 15x + \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{68}\sin 17x + C$.

17. $\frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{40}\sin 10x - \frac{1}{24}\sin 6x - \frac{1}{48}\sin 12x + C$.

18. $-\frac{1}{26}\cos 13x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$.

19. $-\frac{3}{34}\cos\frac{17x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} + \frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6} - \frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} + C$.

20. $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{28}\sin 7x - \frac{1}{36}\sin 9x + C$.

21. $-\frac{3}{29}\cos\frac{29x}{6} - 3\cos\frac{x}{6} + C$.

22. $-\frac{1}{40}\cos 10x - \frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{24}\cos 6x + C$.

23. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{56}\sin 14x-\frac{1}{72}\sin 18x+C$.

24. $-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{32}\cos 8x-\frac{1}{24}\cos 6x+C$.

25. $-\frac{2}{13}\cos\frac{13x}{4}-\frac{2}{7}\cos\frac{7x}{4}+C$.

26. $-\frac{3}{20}\cos\frac{10x}{3}-\frac{3}{4}\cos\frac{2x}{3}+C$.

27. $\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{20}\sin 5x-\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{36}\sin 9x+C$.

28. $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{40}\cos 10x+\frac{1}{24}\cos 6x+C$.

29. $\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{52}\sin 13x+\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{60}\sin 15x+C$.

30. $-\frac{1}{11}\cos\frac{11x}{2}+\cos\frac{x}{2}+C$.

Завдання 13. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

1. $\int\frac{dx}{4\sin x+5}$; **2.** $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;

3. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+1}$; **4.** $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$;

5. $\int\frac{dx}{5\sin x-2\cos x+2}$ **6.** $\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;

7. $\int\frac{dx}{4-3\cos x}$; **8.** $\int\frac{dx}{10-\sin x+\cos x}$;

9. $\int\frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$; **10.** $\int\frac{dx}{1-5\sin x+\cos x}$;

11. $\int\frac{dx}{2-\sin x}$; **12.** $\int\frac{dx}{-3\cos x+5}$;

13. $\int\frac{dx}{\cos x-1-3\sin x}$; **14.** $\int\frac{dx}{-21-16\sin x}$;

15. $\int\frac{dx}{3+\cos^2 x}$; **16.** $\int\frac{dx}{2+\sin^2 x+3\cos^2 x}$;

17. $\int\frac{dx}{5+\sin^2 x}$; **18.** $\int\frac{dx}{7+2\cos^2 x+3\sin^2 x}$;

19. $\int\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\,dx$; **20.** $\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$;

21. $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\,dx$ **;**

22. $\int \frac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}\,dx$ **;**

23. $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$

24. $\int \frac{dx}{5+2\sin x-\cos x}$ **;**

25. $\int \frac{dx}{\cos x-6}$ **;**

26. $\int \frac{dx}{5+3\sin x}$ **;**

27. $\int \frac{dx}{1-2\sin x+\cos x}$ **;**

28. $\int \frac{dx}{3-\sin x+2\cos x}$ **;**

29. $\int \frac{dx}{3+\sin x-\cos x}$ **;**

30. $\int \frac{dx}{10-4\sin x}$ **.**

Відповіді до завдання 13

1. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\right)+C$ **.**

2. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|+C$ **.**

3. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right|+C$ **.**

4. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$ **.**

5. $-\frac{1}{5}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+5\right|+\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$ **.**

6. $\frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C$ **.**

7. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sqrt{7}\right)+C$ **.**

8. $\frac{\sqrt{2}}{7}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{28}\left(18\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-2\right)\sqrt{2}+C$

9. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$ **.**

10. $-\frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C$ **.**

11. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-1\right)+C$ **.**

12. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$ **.**

13. $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|-\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

14. $-\frac{2}{\sqrt{185}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{370}\left(42\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+32\right)\sqrt{185}+C$.

15. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\sqrt{3}\right)+C$.

16. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\operatorname{tg}x\sqrt{15}\right)+C$.

17. $\frac{1}{\sqrt{30}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\operatorname{tg}x\sqrt{30}\right)+C$.

18. $\frac{1}{3\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}x\sqrt{10}\right)+C$.

19. $-\ln\left|\operatorname{tg}x-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2x+1\right|+C$.

20. $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C$.

21. $-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-x+C$.

22. $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|+x+C$.

23. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C$.

24. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{10}\left(6\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+2\right)\sqrt{5}+C$.

25. $-\frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{35}}{5}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

26. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)+C$.

27. $-\frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C$.

28. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+C$.

29. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}(4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1)+C$.

30. $\frac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{21}}(10\operatorname{tg}\frac{x}{2}-4)+C$.

1.3.5. Тригонометричні підстановки

Деякі інтеграли від ірраціональних функцій доцільно знаходити з допомогою тригонометричних підстановок. Такими інтегралами є наступні

$$\text{а)}\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$$

$$\text{б)}\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \qquad (1.23)$$

$$\text{в)}\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$$

де $R(x,y)$ – дробово-раціональна функція двох змінних x, y. До інтегралів (1.23) застосовують такі тригонометричні підстановки відповідно

$$\text{а)}\quad x=a\sin t,\quad \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t;$$

$$\text{б)}\quad x=a\,\mathrm{tg}\,x,\quad \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t}; \qquad (1.24)$$

$$\text{в)}\quad x=\frac{a}{\cos t},\quad \sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{tg}\,t,;$$

Тоді прийдемо до інтегралів від тригонометричних функцій, які розглянуті в пункті 1.3.4.

Якщо вирази під знаком квадратного кореня є квадратними тричленами, то шляхом виділення повних квадратів та подальшою заміною змінних прийдемо до інтегралів (1.23).

Приклад 1.3.9. Знайти інтеграли:

$$\text{а)}\int\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx,\quad \text{б)}\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}};\quad \text{в)}\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx.$$

Розв'язання

а) Застосуємо для цього випадку підстановку $(1.24a)$. Тоді

$$\int\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx=\int\frac{(4\cos t)^2}{4^4\sin^4 t}=\frac{1}{16}\int\frac{\mathrm{ctg}^2\,t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=-\frac{1}{16}\int\mathrm{ctg}^2\,t\,d(\mathrm{ctg}\,t)=-\frac{1}{16}\frac{\mathrm{ctg}^3\,t}{3}+C=-\frac{1}{48}\frac{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}{x^3}+C.$$

б) В цьому випадку виділимо повний квадрат в квадратному тричлені x^2-2x+5. Отримаємо

$$x^2-2x+5=x^2-2x+1+4=(x-1)^2+4.$$

Тому

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\left[(x-1)^2+4\right]^{\frac{3}{2}}} = \begin{vmatrix} x-1=u \\ dx=du \end{vmatrix} = \int \frac{du}{\left(u^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отже ми прийшли до інтеграла $(1.23б)$ із змінною u. Застосуємо підстановку $(1.24б)$ до останнього інтеграла. Тоді маємо

$$\int \frac{du}{\left(u^2+4\right)^{\frac{3}{2}}} = \begin{vmatrix} u=2tgt \\ du=\dfrac{2dt}{\cos^2 t}, \quad \left(u^2+4\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{8}{\cos^3 t} \end{vmatrix} = \int \frac{2dt}{\cos^2 t \dfrac{8}{\cos^3 t}} =$$

$$\frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\frac{tgt}{\sqrt{tg^2 t+1}} + C = \frac{1}{4}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} + C.$$

І остаточно отримуємо

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} + C.$$

в) Інтеграл $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$ – це інтеграл $(1.23в)$. Застосувавши до знаходження цього інтеграла підстановку $(1.24в)$, маємо

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx = \begin{vmatrix} x=\dfrac{1}{\cos t} \\ dx=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt, \quad \sqrt{x^2-1}=\operatorname{tg} t \end{vmatrix} = \int \operatorname{tg} t\cdot\cos^2 t\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt = \int \frac{dt}{\cos t} - \int \cos t dt = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| -$$

$$-\sin t + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

Теоретичні питання

1. Класи яких інтегралів раціоналізуються за допомогою тригонометричних підстановок?

2. Навести тип інтеграла, що обчислюється за допомогою підстановки $x = a\sin t$.

3. За допомогою якої підстановки доцільніше обчислити інтеграл $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$?

Завдання 14. Знайти інтеграли, застосувавши тригонометричні підстановки.

1. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx$; **2.** $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,dx$;

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx$; **4.** $\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}\,dx$;

5. $\int \sqrt{x^2+x}dx$; **6.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$;

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$; **8.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

9. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$; **10.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$;

11. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$; **12.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$;

13. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$; **14.** $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$;

15. $\int \frac{x^3}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$; **16.** $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\,dx$;

17. $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx$; **18.** $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{81-x^2}}\,dx$; **20.** $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx$;

21. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx$; **22.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$;

23. $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$; **24.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$;

25. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$; **26.** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,dx$;

27. $\int \frac{\sqrt{5-2x+x^2}}{x-1}\,dx$; **28.** $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$;

29. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$; **30.** $\int \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^4}\,dx$.

Відповіді до завдання 14

1. $\sqrt{16-x^2}-2\ln\left|\dfrac{\sqrt{16-x^2}+4}{\sqrt{16-x^2}-4}\right|+C\ \int\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx$**;**

2. $\dfrac{1}{18}\dfrac{\sqrt{\left(x^2-9\right)^3}}{x^2}-\dfrac{1}{18}\sqrt{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{\sqrt{x^2-9}}+C$**;**

3. $\dfrac{\ln\left|x^2+x-1\right|-x}{\sqrt{x^2-1}}+C$**;** **4.** $-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4+x^2}+2}{\sqrt{4+x^2}-2}\right|+C$**;**

5. $\dfrac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x}-\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x}\right|+C$**;**

6. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-9}+\dfrac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C$**;**

7. $-\dfrac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\dfrac{1}{2}x+C$**;**

8. $-\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin x+C$**;**

9. $\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1}\right|+C$**;**

10. $\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}\right|+C$**;**

11. $\sqrt{x^2-1}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C$**;**

12. $-\dfrac{1}{4}x\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\dfrac{1}{2}x+C$**;**

13. $\dfrac{1}{9}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C$**;** **14.** $-\sqrt{4-x^2}+C$**;**

15. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{25-x^2}\,(x^2+50)+C$**;**

16. $\sqrt{x^2-16}+4\operatorname{arctg}\dfrac{4}{\sqrt{x^2-16}}+C$**;**

17. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$**;**

18. $\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C$**;**

19. $-\frac{1}{2}x\sqrt{81-x^2}+\frac{81}{2}\arcsin\frac{1}{9}x+C$;

20. $-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{x^3}+C$;

21. $\frac{1}{8}\frac{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}{x^2}-\frac{1}{8}\sqrt{x^2-4}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}+C$;

22. $-\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{x}-x\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C$;

23. $\sqrt{x^2+4}+C$;

24. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-25}+\frac{25}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right|+C$;

25. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1}\right|+C$;

26. $-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}+C$;

27. $\sqrt{5-2x+x^2}-\ln\left|\frac{\sqrt{5-2x+x^2}+2}{\sqrt{5-2x+x^2}-2}\right|+C$;

28. $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}+C$;

29. $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$;

30. $-\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}}{x}-x\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}-\frac{3}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$.

§ 2. Визначений інтеграл

2.1. Визначення та властивості

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n довільних частин точками x_k:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

Розглянемо відрізки $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$, породжені цим розбиттям.

Введемо позначення

$$T_n \stackrel{df}{=} \{[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \dots \quad , \quad [x_{n-1}, x_n]\} \qquad (2.1)$$

і назвемо T_n *розбиттям* відрізка $[a,b]$.

Виберемо на кожному відрізку точку

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

і назвемо

$$\mu_n \stackrel{df}{=} \{\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0,1,\dots,n-1\} \qquad (2.2)$$

вибором точок.

Позначимо довжини відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ через

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

і назвемо

$$\lambda_n \stackrel{df}{=} \max\{\Delta x_1, \quad \Delta x_2, \quad \dots, \quad \Delta x_n\}$$

діаметром розбиття T_n.

Визначення 2.1.1. Інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається сума

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Визначення 2.1.2. Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається границя

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (2.3)$$

якщо:

1. ця границя існує;
2. не залежить від розбиття (2.1) (як тільки діаметр розбиття $\lambda_n \to 0$);
3. не залежить від вибору точок (2.2).

Визначений інтеграл (2.3) позначається $\int_a^b f(x)dx.$

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

3. $\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx.$

5. якщо $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) < \int\limits_a^b f(x)dx < M(b-a).$$

6. *Теорема про середнє значення.* Якщо функція $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує $c \in (a,b)$ таке, що $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$

2.2. Формула Н'ютона- Лейбніца.

Зв'язок між визначеним інтегралом і первісною підінтегральної функції виражає формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (2.4)$$

де $F(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$.

Формула (2.4) називається *формулою Ньютона-Лейбніца.*

Приклад 2.2.1. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_1^2 (x^2+1)dx.$

Розв'язання. Використавши формулу (2.4) отримаємо

$$\int\limits_1^2 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 3\frac{1}{3}.$$

2.3. Методи інтегрування.

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, користуються методами *заміни змінної* та *інтегрування частинами.*

2.3.1. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а функція $\varphi(t)$ та її похідна неперервні на $[a,b]$ і $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, *то справджується рівність*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (2.5)$$

Зауваження. Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла методом підстановки з заміною $x=\varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла, замість цього, потрібно врахувати цю заміну. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a=\varphi(t)$ відносно змінної t, а верхня межа β – з рівняння $b=\varphi(t)$.

Якщо функція $\varphi(t)-$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть декілька різних пар α і β, що справджують рівність (2.5). В цьому випадку можна взяти довільну пару розв'язків.

Приклад 2.3.1. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; б) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$

Розв'язання

а) Для обчислення інтеграла $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ застосуємо метод підстановки і формулу (2.5)

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=a\sin t \\ dx=a\cos t dt \\ x=0\Rightarrow t=0 \\ x=a\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cos t dt=$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2\pi}{4}.$$

б) Використовуючи (2.5), отримаємо

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\left|\begin{array}{l} e^x-1=t^2 \\ e^x=t^2+1 \\ e^x dx=2tdt \\ x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\ln 5\Rightarrow t=2\end{array}\right|=\int_0^2\frac{t(t^2+1)tdt}{(t^2+1)(t^2+4)}=$$

$$2\int_0^2\frac{(t^2+4-4)dt}{t^2+4}=2\int_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt==2\left(t-2arctd\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2=4-4\frac{\pi}{4}=4-\pi.$$

2.3.2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Якщо $u(x), v(x)$ – неперервні та диференційовні функції на деякому інтервалі $[a,b]$, то справедлива *формула інтегрування частинами*

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (2.6)$$

Вибір функцій u і dv такий самий, як і в невизначеному інтегралі і добре описаний таблицею 1.

Приклад 2.3.2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$, б) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

Розв'язання

а) Використавши табл.1а та формулу (2.6), маємо

$$\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x-1, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -1 - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e}.$$

б) Використавши табл.1б та формулу (2.6), маємо

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx, & v = \dfrac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Теоретичні питання

1. Означити поняття визначеного інтеграла.
2. Навести формулу Ньютона – Лейбніца.
3. Сформулювати властивості визначених інтегралів.
4. Які методи використовуються для обчислення визначених інтегралів?
5. Яка різниця між методом заміни змінної у невизначеному та визначеному інтегралах?
6. Навести формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Завдання 15. Обчислити інтеграли:

1. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$; **2.** $\int_0^2 \sin^2 x dx$;

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$; **4.** $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

5. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$; **6.** $\int_1^3 e^{3x-4}dx$;

7. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$; **8.** $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$;

9. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)dx}{x}$; **10.** $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+4x+1}$;

11. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4}}$; **12.** $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{6x+x^2}}$;

13. $\int_2^3 \frac{dx}{x(\ln x-4)}$; **14.** $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$;

15. $\int_1^3 x^2 e^{3x^3} dx$; **16.** $\int_1^2 \frac{dx}{-5x+1}$;

17. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+4)^3}$; **18.** $\int_1^2 -2\,\mathrm{tg}(x+4)dx$;

19. $\int_0^3 (x^2-2)x dx$; **20.** $\int_0^1 (\cos(3+2x)+3x)dx$;

21. $\int_1^2 \frac{dx}{2x^2+x-1}$; **22.** $\int_1^2 \frac{4}{x}\ln x dx$;

23. $\int_1^3 \frac{dx}{x(\ln x+1)}$; **24.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(2-4x+x^2)}}$;

25. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+13}$; **26.** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

27. $\int_1^3 e^{2x+3}dx$; **28.** $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(12-x)}}$;

29. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+4)^3}$; **30.** $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^2}{x}dx$.

Відповіді до завдання 15

1. $\frac{(e-1)^5}{5}$; **2.** $-\frac{1}{4}\sin 4$; **3.** $\frac{5\sqrt{2}}{12}$; **4.** $\ln 2$; **5.** $2\ln 2-\ln 3$; **6.** $-\frac{1}{3e}+\frac{1}{3}e^5$ **7.** 0; **8.** 1;

9. $1-\cos 1$; **10.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{3+4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3}$; **11.** $\frac{1}{2}\pi$; **12.** $\ln\frac{3}{\sqrt{19}+10}-\ln\frac{2}{\sqrt{13}+7}$;

13. $\ln\left|\frac{4-\ln 3}{4-\ln 2}\right|$; **14.** $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{9}\right)$; **15.** $\frac{1}{9}e^{81}-\frac{1}{9}e^3$; **16.** $\frac{2}{5}\ln 2-\frac{2}{5}\ln 3$; **17.** $\frac{11}{1800}$;

18. $2\ln|\cos 6|-2\ln|\cos 5|$; **19.** $\frac{45}{4}$; **20.** $\frac{1}{2}\sin 5-\frac{1}{2}\sin 3$; **21.** $\frac{1}{3}\ln 2$; **22.** $2\ln^2 2$;

23. $\ln(\ln 3+1)$; **24.** $-\ln(2-\sqrt{2})$; **25.** $\frac{1}{2}\ln\frac{17}{15}$; **26.** $-\ln(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-2)$; **27.** $\frac{1}{2}e^9-\frac{1}{2}e^5$;

28. $2\sqrt{11}-6$; **29.** $\frac{11}{1800}$; **30.** $-\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$.

Завдання 16. Обчислити інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos\frac{x}{3}dx$;

2. $\int_0^2 xe^{2x}dx$;

3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x dx$;

4. $\int_1^e x\ln x dx$,

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(-4x)dx$;

6. $\int_0^1 \arcsin x dx$;

7. $\int_0^{\pi} \cos 3x e^{2x}dx$;

8. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \operatorname{arc\,tg} x dx$.

9. $\int_1^e \ln^2 x dx$;

10. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos^2 x dx$;

11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{tg}^2 x dx$;

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$;

13. $\int_e^{e^2} x^2\ln x dx$;

14. $\int_0^1 \frac{x}{4}\operatorname{arc\,tg} x dx$;

15. $\int_0^1 x^2 e^{2x}dx$;

16. $\int_0^1 \ln(x^2+4)dx$;

17. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

18. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$;

19. $\int\limits_{1}^{e} \sin \ln x dx$;

20. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x \,\mathrm{tg}^2 x dx$;

21. $\int\limits_{1}^{2} x 2^x dx$;

22. $\int\limits_{0}^{1} x e^{-x} dx$;

23. $\int\limits_{2}^{4} x \log_2 x dx$;

24. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}$;

25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x e^{2x} dx$;

26. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2} dx$;

27. $\int\limits_{1}^{3} x^2 e^{2x+3} dx$;

28. $\int\limits_{1}^{2} x^2 5^x dx$;

29. $\int\limits_{1}^{2} x^2 \log_4 x dx$;

30. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{3} \mathrm{arc\,tg} 3x dx$.

Відповіді до завдання 16

1. $9\cos\frac{\pi}{12} + \frac{3}{4}\pi \sin\frac{\pi}{12} - 9\cos\frac{1}{3} - 3\sin\frac{1}{3}$; 2. $\frac{3e^4}{4} + \frac{1}{4}$; **3.** $\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4}$; **4.** $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$;

5. $\frac{1}{32} + \frac{31}{32}\cos 8 - \frac{1}{4}\sin 8$; **6.** $\frac{1}{2}\pi - 1$; **7.** $-\frac{2}{13}e^{2\pi} - \frac{2}{13}$. **8.** $\frac{3\sqrt{3}-2}{12\sqrt{3}}\pi - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$;

9. $e-2$; **10.** $\frac{1}{144}\pi^2 + \frac{1}{48}\pi\sqrt{3} - \frac{1}{16}$; **11.** $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{32}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln 2$; **12.** $\frac{1}{2}\pi - 1$;

13. $\frac{5}{9}e^6 - \frac{2}{9}e^3$; **14.** $\frac{1}{16}\pi - \frac{1}{8}$; **15.** $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$; **16.** $\ln 5 + 4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - 2$;

17. $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}$; **18.** $-\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{3}\pi\sqrt{3}$; **19.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e(\cos 1 - \sin 1)$;

20. $-\frac{1}{4}\pi - \frac{7}{288}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\pi$; **21.** $\frac{2(3\ln 2 - 1)}{\ln^2 2}$; **22.** $1 - \frac{2}{e}$; **23.** $\frac{14\ln 2 - 3}{\ln 2}$;

24. $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$; **25.** $-\frac{12}{169} - \frac{1}{13}e^{\pi}\pi - \frac{5}{169}e^{\pi}$; **26.** $1 - \frac{2}{e}$; **27.** $\frac{13}{4}e^9 - \frac{1}{4}e^5$;

28. $\frac{5\left(19\ln^2 5 - 18\ln 5 + 8\right)}{\ln^3 5}$; **29.** $\frac{1}{18}\frac{24\ln 2 - 7}{\ln 2}$; **30.** $\frac{5}{27}\mathrm{arctg}\,3 - \frac{1}{18}$.

2.4. Невластиві інтеграли

Невластивими називаються інтеграли двох видів:

- інтеграли з нескінченими межами (невластиві інтеграли першого роду);
- інтеграли від необмежених функцій (невластиві інтеграли другого роду);

2.4.1. Невластиві інтеграли з необмеженими межами інтегрування.

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a,+\infty)$. Розглянемо інтеграл

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx, \qquad (2.7)$$

який має сенс для довільного $b>a$ і є неперервною функцією від b.

Визначення 2.4.1. Границя інтеграла (2.7) називається ***невластивим інтегралом першого роду*** і позначається

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.8)$$

- якщо границя в правій частині рівності (2.8) *існує і є скінченою*, то невластивий інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ називається ***збіжним***;
- якщо ж границя праворуч у (2.8) *не існує або є нескінченою*, то невластивий інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ називається ***розбіжним***.

Аналогічно можна ввести й інші невластиві інтеграли з нескінченими межами, а саме:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx\overset{df}{=}\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2.9)$$

та

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\overset{df}{=}\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^\infty f(x)dx. \qquad (2.10)$$

Зауважимо, що в (2.10) $a\in(-\infty,+\infty)$ − довільна точка.

Поняття ***збіжності чи розбіжності*** для невластивого інтеграла (2.9) таке ж, як і для інтеграла (2.8).

Невластивий інтеграл (2.10) називається

- ***збіжним,*** якщо збіжними є обидва інтеграли в правій частині (2.10) (це інтеграли (2.8) і (2.9) відповідно, для яких поняття збіжності вже визначене);
- ***розбіжним,*** якщо хоча б один з невластивих інтегралів у правій частині (2.10) є розбіжним.

Приклад 2.4.1. Обчислити невластиві інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; в) $\int\limits_0^{+\infty} 3^x dx$; г) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Розв'язання

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_1^b = = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^0 + \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim\limits_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) +$

$+ \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} 3^x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b 3^x dx = \frac{1}{\ln 3} \lim\limits_{b\to+\infty} 3^x\Big|_0^b = \frac{1}{\ln 3} \lim\limits_{b\to+\infty}\left(3^b - e^0\right) = +\infty.$

Отже інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} 3^x dx$ −розбіжний;

г) Для інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in R$ розглянемо окремі випадки:

- якщо $\alpha = 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln b - \ln 1\right) = +\infty.$$

- якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\alpha} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha < 1 \end{cases}.$$

Остаточно маємо: інтеграл збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \leq 1$.

2.4.2. Невластиві інтеграли від розривних функцій

Розглянемо три випадки, які характеризуються різними характерами розривів підінтегральної функції.й

1-й випадок (Рис.1). Нехай функція $f(x)$ визначена на скінченому інтервалі $[a,b]$, але необмежена на цьому інтервалі. Припустимо, що на довільному інтервалі $[a,b-\varepsilon]\,(0<\varepsilon<b-a)$ функція $f(x)-$обмежена та інтегровна, проте виявляється необмеженою на кожному інтервалі $[b-\varepsilon,b]$.

Визначення 2.4. 2. Невластивим інтегралом від необмеженої функції в цьому випадку називається границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad (2.11)$$

яка позначається

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \qquad (2.12)$$

- якщо границя (2.11) *існує і є скінченою*, то невластивий інтеграл (2.12) називається ***збіжним***;
- якщо границя (2.11) *не існує або є нескінченою*, то невластивий інтеграл (12.2) називається ***розбіжним***;

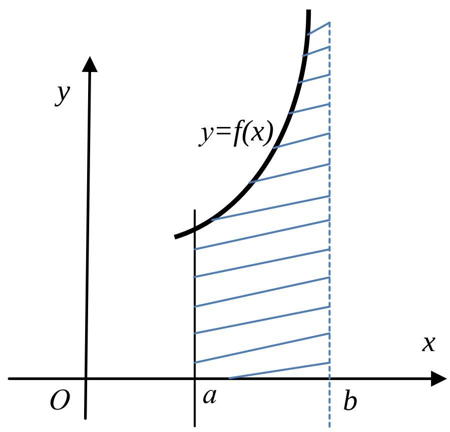


Рис. 1

2-й випадок (рис. 2). Нехай функція $f(x)$ визначена на скінченому інтервалі $[a,b]$, але необмежена на цьому інтервалі. Припустимо, що на довільному інтервалі $[a+\varepsilon,\mathrm{b}]\,(0<\varepsilon<b-a)$ функція $f(x)$ обмежена та інтегровна, проте виявляється необмеженою на кожному інтервалі $[a,a+\varepsilon]$.

Визначення 5.2. Невластивим інтегралом від необмеженої функції в цьому випадку називається границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \qquad (2.13)$$

яка позначається

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (2.14)$$

- якщо границя (2.13) *існує і є скінченою*, то невластивий інтеграл (2.14) називається ***збіжним***;
- якщо границя (2.13) *не існує або є нескінченою*, то невластивий інтеграл (2.14) називається ***розбіжним***;

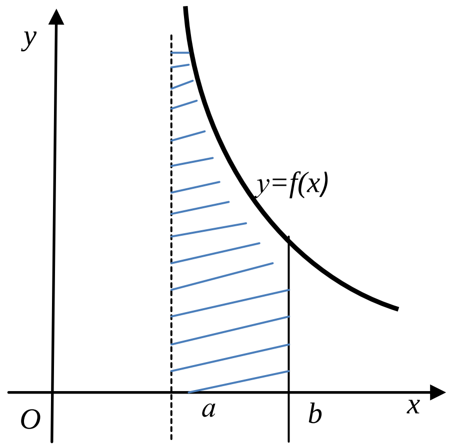


Рис. 2

3-й випадок (рис. 3) Нехай функція $f(x)$ визначена на скінченому інтервалі $[a,b]$ і має нескінчений розрив в деякій точці $c\in(a,b)$. Припустимо, що на інтервалі $[a,\text{c}-\varepsilon]\cup[\text{c}+\varepsilon,b]$ функція $f(x)$ обмежена та інтегровна, проте виявляється необмеженою на кожному інтервалі $[\text{c}-\varepsilon,\text{c}+\varepsilon]$.

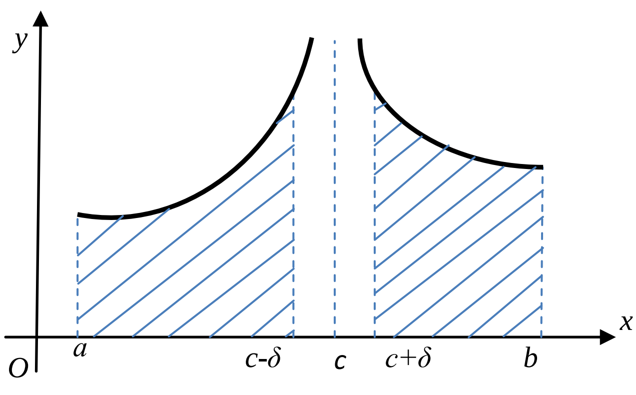


Рис.3

Визначення 6.3. Невластивим інтегралом від необмеженої функції в цьому випадку називається границя

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (2.15)$$

- якщо обидві границі праворуч в (2.15) *існують і є скінченими*, то невластивий інтеграл (2.15) називається ***збіжним***;
- якщо хоча б одна з границь в правій частині (2.15) не існує, або є нескінченою, то інтеграл (2.15) називається ***розбіжним.***

Зауважимо, що на проміжку $[a,b]$ може бути скінчене число точок розривів 2-го роду. Тоді в (2.15) матимемо скінчене число невластивих інтегралів (2.12) і (2.14).

Приклад 2.4.2. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність: а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$;

в) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Розв'язання.

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ – це невластивий інтеграл (2.12), бо функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ має нескінчений розрив в точці $x=4$, тобто на правому кінці проміжку інтегрування. Тому

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^{4-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{4-\varepsilon}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл $-$збіжний.

б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ $-$це невластивий інтеграл (2.14), оскільки точка нескінченого розриву$-$це точка $x=0$, яка розміщена на лівому кінці відрізка $[0,1]$.

Розглянемо два випадки:

- якщо $\alpha=1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to +0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to +0}(\ln 1-\ln\varepsilon) = +\infty.$$

- якщо $\alpha\neq 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, 0<\alpha<1;\\ +\infty,\ \alpha>1.\end{cases}$$

Отже, при $0<\alpha<1$ невластивий інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ – збіжний, а при $\alpha\geq 1$ $-$ розбіжний.

в) $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ – це невластивий інтеграл (2.15), бо точка нескінченого розриву $x=1$ лежить всередині відрізка $[-1,2]$. Тому

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}3\cdot\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}3\cdot\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=$$

$$=3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{-\varepsilon}-\sqrt[3]{-2}\right)+3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\varepsilon}\right)=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

Отже невластивий інтеграл $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ – збіжний і дорівнює $3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$.

Теоретичні питання

1. Навести означення невластивих інтегралів.
2. Що таке невластивий інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty}f(x)dx$ з необмеженими межами інтегрування? Коли він є збіжним (розбіжним)?
3. Означити невластивий інтеграл від необмежених функцій.
4. Дати означення збіжності та розбіжності невластивого інтеграла від необмежених функцій.
5. У якому випадку невластивий інтеграл $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ є збіжний, а у якому – розбіжний?

Задачі для самостійної роботи.

Завдання 17. Обчислити невластиві інтеграли, або довести їх розбіжність:

1. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ **;**

2. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$ **;**

3. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}$ **;**

4. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{2x+1}{x(x+1)}dx$ **;**

5. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$ **;**

6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ **;**

7. $\int\limits_{0}^{\infty}\sin xdx$ **;**

8. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ **;**

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$ **;**

10. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^4}dx$ **;**

11. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x+\sqrt[4]{x^4+4}}$; **12.** $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}$;

13. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$; **14.** $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{1+x^2}{x^3}dx$;

15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+7}$; **16.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^x}dx$;

17. $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}\sin xdx$; **18.** $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$;

19. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; **20.** $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-x^2}dx$;

21. $\int\limits_{0}^{\infty}x\cos xdx$; **22.** $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$;

23. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+8}$; **24.** $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx$;

25. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$; **26.** $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$;

27. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{2+x^2}dx$; **28.** $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3}{1+x^4}dx$;

29. $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-2x}dx$; **30.** $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$.

Відповіді до завдання 17

1. $\frac{1}{8}\pi^2$; **2.** ∞, тобто розбіжний; **3.** $\frac{1}{2}\ln 3$; **4.** ∞; **5.** $\frac{2}{9}\pi\sqrt{3}$; **6.** π; **7.** розбіжний; **8.** $\frac{1}{4}\pi$; **9.** π; **10.** $\frac{1}{9}$; **11.** ∞;**12.** $-\frac{1}{4}$; **13.** $\ln 2-\ln 3+\frac{1}{2}$; **14.** ∞; **15.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\pi$; **16.** ∞; **17.** $\frac{1}{2}$; **18.** $\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\ln 2$; **19.** 1; **20.** $\frac{1}{2}$; **21.** розбіжний; **22.** розбіжний; **23.** ∞; **24.** $\frac{1}{4}$; **25.** $\frac{1}{4}\ln 2$; **26.** ∞; **27.** ∞;**28.** ∞; **29.** $\frac{1}{2}$. **30.** 2.

Завдання 18. Обчислити невластиві інтеграли від необмежених функцій, або довести їх розбіжність.

1. $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^6+x^2}dx$; **2.** $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{x}$;

3. $\int\limits_{0}^{3}\frac{xdx}{\sqrt[5]{x^2-1}}$; **4.** $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(1-x)^2}$;

5. $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

7. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$;

8. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{x\ln x}$;

9. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

10. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

11. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$;

12. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$;

13. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;

14. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

15. $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

16. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

17. $\int_{-2}^2 \frac{xdx}{x^2-1}$;

18. $\int_0^1 \ln x dx$;

19. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^4}}$;

20. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$;

21. $\int_{-1}^1 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

22. $\int_0^1 x\ln x dx$;

23. $\int_0^1 \frac{x^2-1}{x\sqrt{x}}dx$;

24. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

25. $\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}$;

26. $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$;

27. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3}$;

28. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

29. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$;

30. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Відповіді до завдання 18

1. ∞; **2.** розбіжний; **3.** $\frac{5}{\sqrt[5]{8}}-\frac{5}{8}$; **4.** ∞; **5.** ∞; **6.** $\frac{1}{2}\pi$; **7.** π; **8.** $-\infty$; **9.** $2\sqrt{\ln 2}$; **10.** $\frac{1}{\ln 2}$; **11.** π; **12.** $\frac{2}{3}$; **13.** $\frac{1}{e}$; **14.** $\frac{8}{3}$; **15.** -1; **16.** π; **17.** розбіжний; **18.** -1; **19.** ∞; **20.** ∞; **21.** 12; **22.** $-\frac{1}{4}$;

23. $-\infty$; **24.** $\frac{3}{2}$; **25.** ∞; **26.** ∞; **27.** $-\infty$; **28.** ∞; **29.** $\frac{1}{2}\pi$; **30.** $\frac{1}{2}\pi$.

§ 3. Геометричні застосування визначеного інтеграла

3.1. Обчислення площ плоских фігур

3.1.1.*Обчислення площі, якщо фігура обмежена кривою, чи кривими, які задані в декартовій системі координат*

Площу фігури, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), прямими $x = a$ та $x = b$ і віссю Ox (площу криволінійної трапеції) (рис. 4) обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3.1)$$

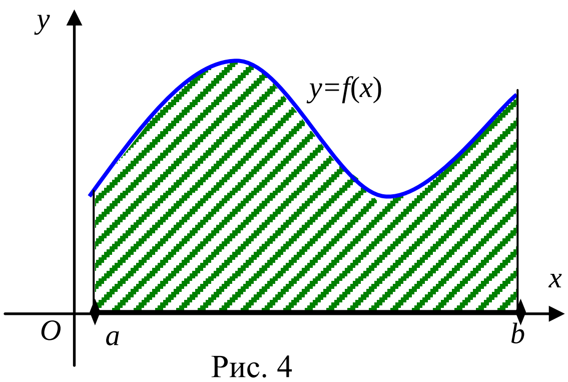


Рис. 4

Площу фігури, обмеженої графіками неперервних функцій $y = f(x), y = g(x)$ $\left(g(x) \leq f(x)\right)$ (рис.5), обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx \qquad (3.2)$$

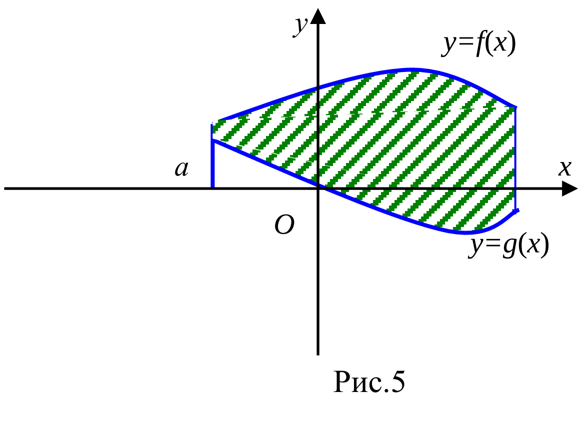


Рис.5

3.1.2. *Обчислення площі, якщо фігура обмежена кривою, що задана параметрично*

Якщо фігура обмежена кривою, яка задана параметрично, тобто рівняннями: $x = x(t), \quad y = y(t),$ і прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox, то її площу обчислюють за формулою

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt, \qquad (3.3)$$

де межі інтегрування можна знайти з рівнянь $x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b,$ а $y(t) \ge 0$ на інтервалі $[\alpha, \beta]$.

3.1.3. *Обчислення площі, якщо фігура обмежена кривою, яка задана в полярній системі координат*

Площу фігури, яка обмежена неперервною функцією $\rho = \rho(\varphi)$, що задана в полярній системі координат і полярними радіусами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ (або площу криволінійного сектора) (рис.7) обчислюють за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (3.4)$$

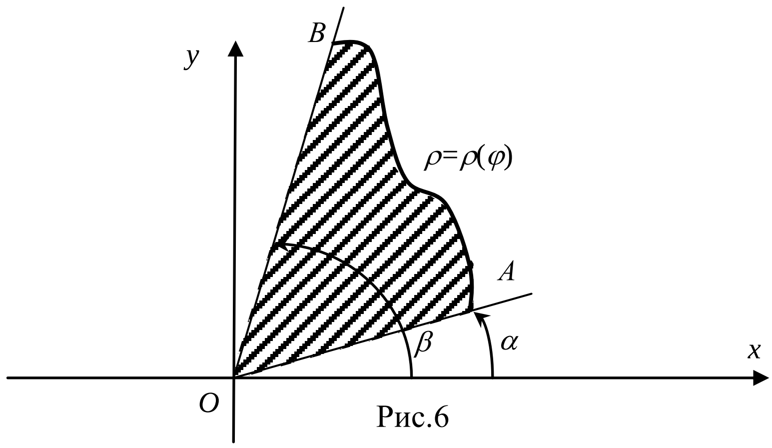


Рис.6

Приклад 3.1.1

а) Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 + 1, x = -1, x = 2, y = 0$ (рис.7);

б) Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2, y = 2x + 3$ (рис.8);

в) Знайти площу петлі кривої (рис.9):

$$x = a\left(t^2 - 1\right), \quad y = b\left(4t - t^3\right), \quad a > 0, b > 0;$$

г) Знайти площу, обмежену кардіоїдою $\rho = 1 + \cos\varphi$ (рис.10).

Розв'язання

а) За формулою (*3.1*) маємо :

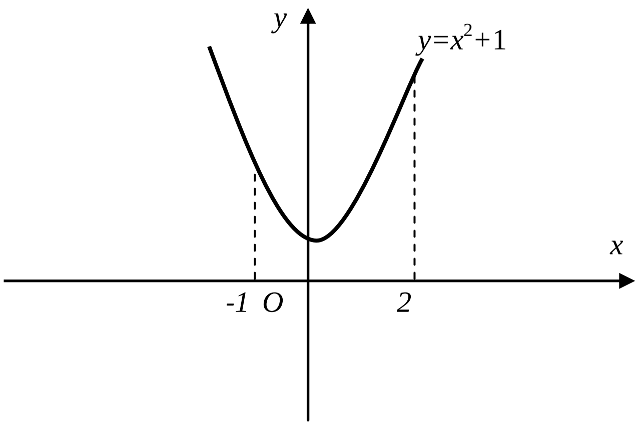


Рис. 7

$$S=\int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(\frac{2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-1\right)=\frac{8}{3}+\frac{6}{3}+\frac{4}{4}=6\left(кв.од.\right)$$

б)

- Побудуємо відповідну криволінійну трапецію, обмежену лініями $y=x^2,\quad y=2x+3$:

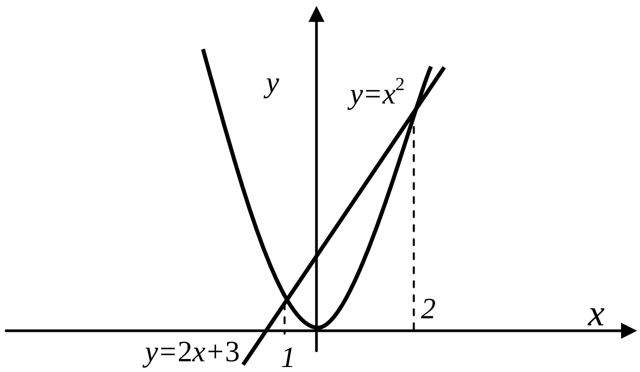


Рис. 8

- Знайдемо абсциси точок перетину графіків ліній, прирівнявши праві частини відповідних аналітичних виразів

$$x^2=2x+3,$$

звідки знайдемо: $x_1=-1,\quad x_2=2.$

- Обчислимо площу криволінійної трапеції, обмеженої кривими $y=x^2,\quad y=2x+3$ за формулою (*3.2*). Маємо

$$S=\int_{-1}^{2}\left(2x+3-x^2\right)dx=\left(x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(2^2+6-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\left(-1\right)^2-3-\frac{\left(-1\right)^3}{3}\right)=9\left(кв.од.\right)$$

в) Знайдемо точки перетину кривої з координатними осями. Маємо: $x=0$ при $t=\pm1$; $y=0$ при $t=0$, $t=\pm2$. Отже отримуємо такі точки кривої:

- $\left(0,3b\right)$ при $t=1$;
- $(0, -3b)$ при $t=-1$;
- $\left(-a,0\right)$ при $t=0$;
- $\left(3a,0\right)$ при $t=\pm2$.

Точка $\left(3a,0\right)$ – це точка самоперетину кривої. Для $0\le t\le 2$ $y\ge 0$; для $-2\le t\le 0$ $y\le 0$. (рис.9)

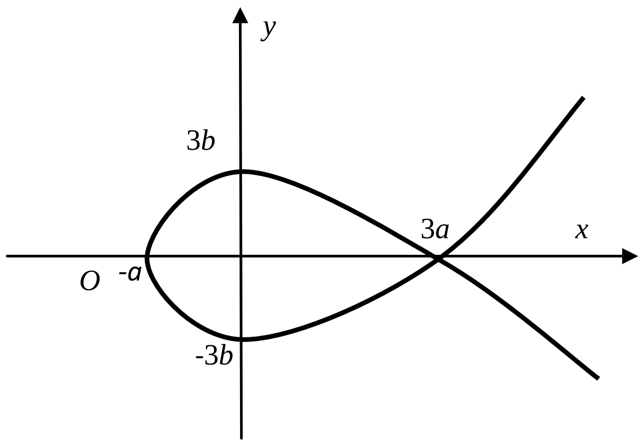


Рис.9

Площу фігури, обмеженої петлею, знайдемо, як подвоєну площу верхньої половинки за формулою $\left(3.3\right)$

$$S=\int_{-a}^{3a}y\left(t\right)x'\left(t\right)dt=2\int_{0}^{2}y\left(t\right)x'\left(t\right)dt=2\int_{0}^{2}b\left(4t-t^3\right)a\cdot 2tdt=$$

$$4ab\int_{0}^{2}\left(4t-t^3\right)dt=4ab\left(\frac{4}{3}t^3-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{256}{15}\text{ (кв.од.)}$$

г) Так як кардіоїда – симетрична відносно полярної осі, то її площу знайдемо для верхньої половинки, яка обмежена променями $\varphi=0$ і $\varphi=\pi$ (рис.10).

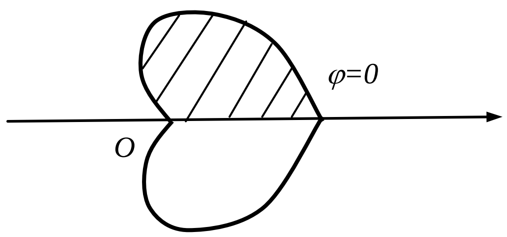


Рис. 10

Тому, за формулою (*3.4*) маємо:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi = \int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2})d\varphi =$$

$$= (\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{2}(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi))\Big|_0^{\pi} = \pi+\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}\text{(кв.од).}$$

3.2. Обчислення об'ємів тіл обертання

3.2.1. *Обчислення об'ємів тіл обертання навколо осі* Ox *:*

- Якщо криволінійна трапеція, яка обмежена кривою $y = f(x)$, $a \le x \le b$ обертається навколо осі Ox, то її об'єм обчислюється за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (3.5)$$

- Якщо криволінійна трапеція, яка обмежена кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$, $a \le x \le b$ обертається навколо осі Ox, то її об'єм обчислюється за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx \qquad (3.6)$$

3.2.2. *Обчислення об'ємів тіл обертання навколо осі* Oy :

Якщо криволінійна трапеція, яка обмежена кривою $y = f(x)$, $a \le x \le b$ обертається навколо осі Oy, то її об'єм обчислюється за формулою

$$V_y = 2\pi\int_a^b x|f(x)|dx, \quad a \ge 0. \qquad (3.7)$$

Приклад 3.2.1.

а) Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням синусоїди $y = \sin x$ на проміжку $0 \le x \le \pi$ навколо осі Ox (рис. 11).

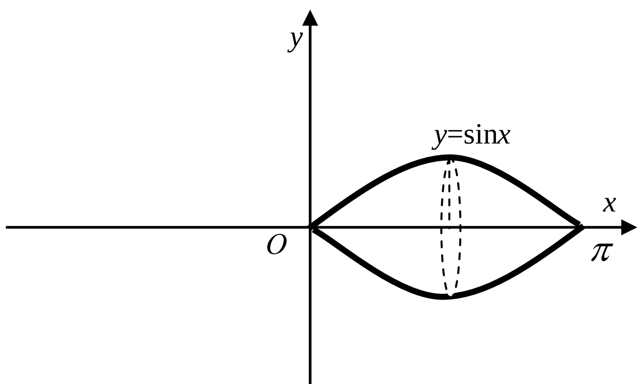


Рис. 11

Розв'язання. Використовуючи формулу (*3.5*), маємо

$$V_x = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}\left(\textit{куб.од.}\right).$$

б) Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням синусоїди $y = \sin x$ на проміжку $0 \le x \le \pi$ навколо осі Oy (рис. 12)

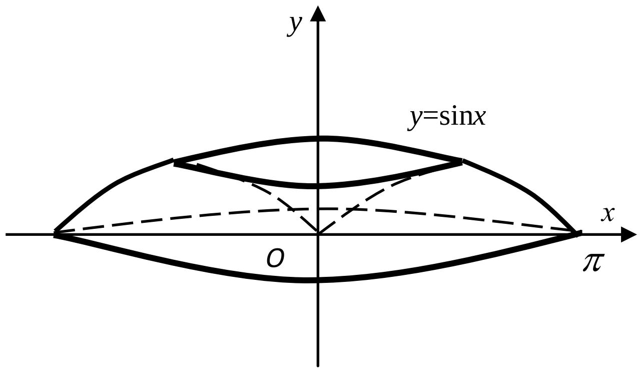


Рис. 12

Використовуючи формулу (*3.7*), одержимо

$$V_y = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= 2\pi(-x\cos x + \int_0^{\pi}\cos dx) = 2\pi\left(\pi + \sin x\Big|_0^{\pi}\right) = 2\pi^2\left(\textit{куб.од.}\right).$$

3.3. Обчислення довжин дуг кривих

3.3.1. *Обчислення довжини дуги кривої, що задана в декартових координатах.*

Довжина s дуги гладкої кривої $y = f\left(x\right)$, що лежить між точками з абсцисами $x = a$ і $x = b$, дорівнює

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx. \qquad (3.8)$$

3.3.2. *Обчислення довжини дуги кривої, що задана параметрично.*

Якщо крива задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

($x(t), y(t)$ – неперервно диференційовані функції), то довжина дуги l кривої дорівнює

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt, \qquad (3.9)$$

де t_1, t_2 – значення параметра, що відповідають кінцям дуги.

3.3.3. *Обчислення довжини дуги кривої, що задана в полярній системі координат.*

Якщо гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ в полярних координатах ρ, φ, то довжина дуги s дорівнює

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi, \qquad (3.10)$$

де α, β – значення полярного кута в крайніх точках дуги.

Приклад 3.3.1.

а) Знайти довжину дуги кривої $y = \ln\cos x$, обмеженої точками з абсцисами $x = 0, x = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Оскільки, крива задана явно, то її довжина на відрізку $[a, b]$ визначається за формулою (3.8)

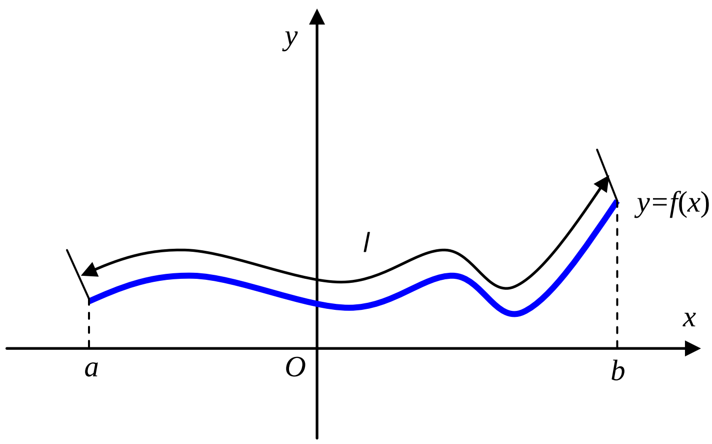


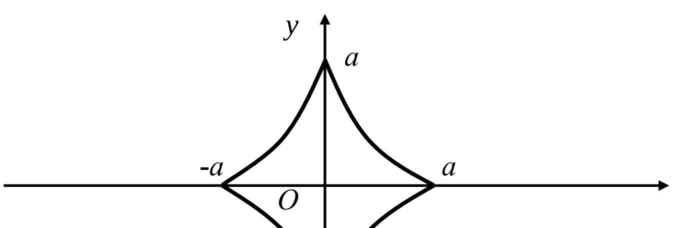
Рис. 13

Оскільки $y' = -\operatorname{tg} x$ $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}$, то маємо:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\,(л.од.).$$

б) Знайти довжину астроїди: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$.

Розв'язання. Для даної кривої довжина дуги визначається за формулою (3.9)



x

Рис. 14

Оскільки $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y_t' = 3a\sin^2 t\cos t$, то

$\sqrt{(y_t')^2 + (x_t')^2} = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t} = 3a\left|\sin t\cos t\right| = \dfrac{3a}{2}\left|\sin 2t\right|$.

Через те, що функція $y = \sin 2t$ має період $\dfrac{\pi}{2}$, то, обчисливши довжину дуги четвертинки астроїди, остаточно матимемо

$$l = 4\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt = 6a\left(л.од.\right).$$

в) Знайти довжину дуги кривої, заданої в полярних координатах: $\rho = \sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Довжина дуги цієї кривої (рис. 15) обчислюється за формулою (*3.10*)

Маємо $\rho'(\varphi) = \sin^2\dfrac{\varphi}{3}\cos\dfrac{\varphi}{3}$. Отже

$$l = \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3} + (\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3})^2}d\varphi = \int_0^{\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos\frac{2\varphi}{3})d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3})\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{8}(4\pi - 3\sqrt{3})\left(л.од.\right)$$

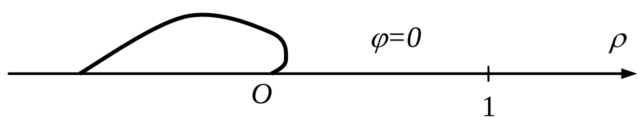


Рис.15

Теоретичні питання

1. Сформулювати геометричний зміст визначеного інтеграла.

2. Навести формулу для обчислення площі криволінійної трапеції.

3. Проаналізувати формулу обчислення площі криволінійної трапеції, коли вона обмежена двома функціями.

4. Як обчислити площі складних фігур, обмежених декількома функціями?

5. Як обчислити площу криволінійного сектора?

6. Записати формули для обчислення довжини дуги кривої залежно від способів її задання.

7. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислити об'єм тіл обертання?

8. Записати формулу для знаходження площі поверхні тіла обертання.

Завдання 19. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1. **а)** $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$;

б) $\rho = 2\sin 3\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$;

2. **а)** $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$;

б) $x = 2\sin^3\frac{t}{4}, \quad y = 2\cos^3\frac{t}{4}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

3. **а)** $y = x^3$, $y = x^{1/3}$, $x = 0$, $x = 1$;

б) $\rho = 6(1 - \cos\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi;$

4. **а)** $y = 2\sqrt{x}$, $y = x$;

б) $x = 2t - t^2, \quad y = 2t^2 - t^3; \; 0 \le \varphi \le 2\pi;$

5. **а)** $y = -x^2 + 4x + 18$, $x - y = 0$;

б) $\rho^2 = 8\cos 2\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$;

6. **а)** $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

б) $\rho = 6(1 - \cos 2\varphi), 0 \le \varphi \le \pi$;

7. **а)** $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$;

б) $\rho = 2\sin 3\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$;

8. **а)** $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;

б) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

9. **а)** $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$;

б) $\rho = 2 + \cos\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi;$;

10. **а)** $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 4$, $y = 10 - \frac{2}{3}x$;

б) $\rho = 7\sin 2\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$;

11. **а)** $y = 3x^2 + 3x - 18$, $y = -3x^2 + 9x + 18$;

б) $x = 3\sin t, \quad y = 2\cos t, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

12. **а)** $y = 2x^2 - 5x + 2$, $y = 4x + 14 - x^2$;

б) $\rho = \sin\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2};$

13. **а)** $y = -x^2 + 4$, $x + y = 4$;

б) $\rho = 3(1 - \cos\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi;$

14. **а)** $y = -x^3$, $x = 1$, $y = 0$;

б) $x = a\sin t, y = a\cos t$ **;** $0 \le \varphi \le 2\pi;$

15. **а)** $y = -\frac{2}{3}x^2 + 5x$**,** $y = \frac{1}{3}x^2 + 4$**;**

б) $\rho = 2\cos 3\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi;$

16. **а)** $y = -7x + 12$**,** $y = 11x - 12 - 3x^2$**;**

б) $\rho = 2\sin 5\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi;$

17. **а)** $y = x^3$**,** $x = 1$**,** $y = 8$**;**

б) $\rho = 3\sqrt{2\cos\varphi}, \frac{-\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$**;**

18. **а)** $y = -x^2 - 2x + 8$**,** $y = x^2 + 2x + 2$**;**

б) $\rho = 4(2 + \cos\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi;$

19. **а)** $y = 3 + 2x - x^2$**,** $x + y - 5 = 0$**;**

б) $\rho = 3\operatorname{tg}\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$**;**

20. **а)** $y = 4x - x^2$**,** $y = 4 - x$**;**

б) $x = 2t + \cos t, \quad y = -\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi;$

21. **а)** $y = x^2 - 2x + 3$**,** $y = 3x - 1$**;**

б) $\rho = 2\cos\varphi - 1; 0 \le \varphi \le 2\pi;$

22. **а)** $y = x^2 - 5x + 4$**,** $y = 2x - 2$**;**

б) $x = 2t + t^2, \quad y = 2t^2; \ 0 \le \varphi \le 2\pi;$

23. **а)** $y = -x^2$**,** $y = 2e^x$**,** $x = 0$**,** $x = 1$**;**

б) $\rho = 2\sin 6\varphi, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3};$

24. **а)** $y = x^2 - 2x + 8$**,** $y = 2 + 6x - x^2$**;**

б) $\rho = 3\sin 3\varphi; \ 0 \le \varphi \le 2\pi;$

25. **а)** $y = -x^2 + 4$**,** $y = (x-2)^2$**;**

б) $x = \frac{1}{3}t\left(3 + t^2\right), \quad y = t^2; \ 0 \le \varphi \le 2\pi;$

26. **а)** $y = \sqrt{x}$**,** $y = 2 - x$**,** $x = 0$**;**

б) $\rho = \sin 4\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4};$

27. **а)** $y = x^3$**,** $x = -2$**,** $y = 1$**;**

б) $\rho^2 = 6\cos\varphi, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4};$

28. **а)** $y = x^2$**,** $y = 1 + \frac{3x^2}{4}$**;**

б) $\rho = \operatorname{tg}\varphi, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3};$

29. **а)** $y = \frac{2}{x}$**,** $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$**;**

б) $\rho = e^{\varphi}, \ 0 \le \varphi \le 2\pi;$

30. **а)** $y=x^2+1$**,** $5x+3y-25=0$

б) $\rho=1+\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$

Відповіді до завдання 19

1.а) $\frac{125}{6}$кв.од.; **б)** $\frac{1}{3}\pi$ кв.од.; **2. а) 9** кв.од.; **б)** $\frac{3}{8}\pi$; **3.а)** $\frac{1}{2}$ кв.од.; **б)** 54π кв.од.; **4. а)** $\frac{8}{3}$ кв.од.; **б)** $\left(\frac{32}{3}\pi^3+\frac{64}{5}\pi^5-24\pi^4\right)$; кв.од.; **5. а)** $\frac{243}{2}$ кв.од.; **б)** 2 кв.од.; **6. а)** $8\ln 2$ кв.од.; **б)** 27π кв.од.;**7. а)** 12 кв.од.; **б)** $\frac{\pi}{3}$ кв.од.; **8. а)** 1 кв.од.; **б)** $3\pi a^2$ кв.од.; **9. а)** $\frac{9}{2}$ кв.од.; **б)** $\frac{9}{2}\pi$ кв.од.; **10. а)** $\frac{1331}{6}$ кв.од.; **б)** $\frac{49}{8}\pi$ кв.од.; **11. а)** 125 кв.од.; **б)** 6π кв.од.; **12. а)** $\frac{125}{2}$ кв.од.; **б)** $\frac{1}{4}\pi$ кв.од.; **13. а)** $\frac{1}{6}$ кв.од.; **б)** $\frac{27}{2}\pi$ кв.од.; **14. а)** $\frac{1}{4}$ кв.од.; **б)** πa^2 кв.од.; **15. а)** $\frac{27}{2}$ кв.од.; **б)** 2π кв.од.; **16. а)** 4 кв.од.; **б)** 2π кв.од.; **17. а)** $\frac{17}{4}$ кв.од.; **б)** 9 кв.од.; **18. а)** $\frac{64}{3}$ кв.од.; **б)** 72π кв.од.; **19. а)** $\frac{1}{6}$ кв.од.; **б)** $\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{8}\pi\right)$кв.од.; **20. а)** $\frac{9}{2}$ кв.од.; **б)** π кв.од.; **21. а)** $\frac{9}{2}$ кв.од.; **б)** 3π кв.од.; **22. а)** $\frac{125}{6}$ кв.од.; **б)** $\left(\frac{32}{3}\pi^3+16\pi^4\right)$кв.од.;**23. а)** $\left(-\frac{5}{3}+2e\right)$ кв.од.; **б)** $\frac{1}{3}\pi$ кв.од.; **24. а)** $\frac{8}{3}$ кв.од.; **б)** $\frac{9}{2}\pi$ кв.од.; **25. а)** $\frac{8}{3}$ кв.од.; **б)** $\left(\frac{8}{3}\pi^3+\frac{128}{5}\pi^5\right)$кв.од.;**26. а)** $\frac{5}{6}$ кв.од.; **б)** $\frac{1}{16}\pi$ кв.од.; **27. а)** $\frac{27}{4}$ кв.од.; **б)** $\frac{3}{\sqrt{2}}$ кв.од.; **28. а)** $\frac{32}{3}$ кв.од.; **б)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6}\pi\right)$кв.од.; **29. а)** $\left(\frac{15}{4}-4\ln 2\right)$ кв.од.; **б)** $\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{4\pi}\right)$кв.од.; **30. а)** $\frac{4913}{162}$ кв.од.; **б)** $\frac{3}{2}\pi$ кв.од.

Завдання 20. Обчислити об'єми тіл обертання :

а) навколо осі Ox;

б) навколо осі Oy;

1. $y=\cos x, y=0, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$ **;**

2. $y=5-x^2, y=0;$

3. $y=3x-x^2, y=0$ **;**

4. $y=x^3, y=x$ **;**

5. $y=\arcsin x, y=0, x=1$ **;**

6. $y=x^2, y^2=8x$ **;**

7. $y=1+6x^2, x=0, x=1, y=0;$ **;**

8. $y=xe^x, y=0, x=1$**;**

9. $y=\sqrt{x-2}, y=\frac{x}{3}$ **;**

10. $y=3x(x-1), y=0$ **;**

11. $y=3x+2, y=0, 0\le x\le 2$**;**

12. $y=x^2, y=x$**;**

13. $y=1-x^4, y=0$**;**

14. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$**;**

15. $y=x(2-x), y=0$**;**

16. $y=x^2, y=0, x=2$**;**

17. $y=3-x^2, y=0$**;**

18. $y=3-x, y=0, x=0$**;**

19. $y=\sqrt{x}, x=2, y=0$**;**

20. $xy=4, 1\le x\le 4, y=0$**;**

21. $y=x^3, y=0, x=2$**;**

22. $y^2=x, y=2, x=0$**;**

23. $y=x^2, y=0, x=3;$

24. $y=tgx, y=0, x=\dfrac{\pi}{4};$

25. $y=2^x, y=0, x=0, x=1$**;**

26. $2y=x^2, 2y+2x=3;$

27. $y=\sqrt{x}, y=x^{\frac{3}{2}}$**;**

28. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$**;**

29. $y=e^x, y=0, x=0, x=1$**;**

30. $y=x^2, y=0, x=3;$

Відповіді до завдання 20

1.а) $\frac{1}{4}\pi^2$ куб.од.; **б)** $(\pi^2-2\pi)$ куб.од.; **2. а)** $\frac{80\sqrt{5}}{3}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{25}{2}\pi$ куб.од.; **3.а)** $\frac{81}{10}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{27}{2}\pi$ куб.од.; **4. а)** $\frac{4}{21}\pi$ куб. од.; **б)** $\frac{1}{4}\pi$ куб.од.; **5. а)** $\left(\frac{1}{4}\pi^3-2\pi\right)$ куб.од.; **б)** $\frac{1}{4}\pi^2$ кв.од.; **6. а)** $\frac{48}{5}\pi$ куб. од.; **б)** $\frac{64}{3}\pi$ куб.од.; **7. а)** $\frac{61}{5}\pi$ куб.од.; **б)** 19π куб.од.; **8. а)** $\left(\frac{1}{4}\pi e^2-\frac{1}{4}\pi\right)$ куб.од.; **б)** $(2\pi e-4\pi)$ куб.од.; **9. а)** $\frac{1}{2}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{9}{2}\pi$ кв.од.; **10. а)** $\frac{3}{10}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{1}{2}\pi$ куб.од.; **11. а)** 56π куб.од.; **б)** 24π куб.од.; **12. а)** $\frac{2}{15}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{1}{6}\pi$ куб.од.; **13. а)** $\frac{64}{45}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{2}{3}\pi$ куб.од.; **14. а)** 8π куб.од.; **б)** $\frac{32}{\sqrt{3}}\pi$ куб.од.; **15. а)** $\frac{16}{15}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{8}{3}\pi$ куб.од.; **16. а)** $\frac{32}{5}\pi$ куб.од.; **б)** 8π куб.од.; **17. а)** $\frac{48\sqrt{3}}{5}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{9}{2}\pi$ куб.од.; **18. а)** 9π куб.од.; **б)** 9π куб.од.; **19. а)** 2π куб.од.; **б)** $\frac{16\sqrt{2}}{5}\pi$ куб.од.; **20. а)** 12π куб.од.; **б)** 24π куб.од.; **21. а)** $\frac{128}{7}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{64}{5}\pi$ куб.од.; **22. а)** 8π куб.од.; **б)** $\frac{64}{3}\pi$ куб.од.; **23. а)**

$\frac{243}{5}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{81}{2}\pi$ куб.од.; **24. а)** $\left(\pi-\frac{1}{4}\pi^2\right)$ куб.од.; **б)** $\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ куб. од.; **25. а)** $\frac{3}{2\ln 2}\pi$ куб. од.; **б)** $\frac{2\pi\left(2\ln 2-1\right)}{\ln^2 2}$ куб.од.; **26. а)** $\frac{272}{15}\pi$ куб. од.; **б)** $\frac{2}{3}\pi$ куб.од.; **27. а)** $\frac{1}{4}\pi$ куб.од.; **б)** $\frac{4}{15}\pi$ куб.од.; **28. а)** $\frac{64}{3}\pi$ куб. од.; **б)** $\frac{32}{3}\pi$ куб. од.; **29. а)** $\left(-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi e^2\right)$ куб. од.; **б)** 2π куб. од.; **30. а)** $\frac{243}{5}\pi$ куб. од.; **б)** $\frac{81}{2}\pi$ куб.од.

Завдання 21. Обчислити довжини дуг кривих:

1. $y=2\sqrt{x}, 0\le x\le 1$**;**

2. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}\ 0\le t\le 1;$

3. $\rho=2(1+\cos\varphi), 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$**;**

4. $y=e^x, 0\le x\le 1;$

5. $\begin{cases} x=\sin 2t, \\ y=\cos 2t, \end{cases}\ 0\le t\le 1;$

6. $y=x^2, 0\le x\le 1$**;**

7. $\rho=3(1-\cos\varphi), 0\le\varphi\le\pi$**;**

8. $y=\sqrt{x^3}, 0\le x\le 1$**;**

9. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}\ 0\le t\le\ln\pi$**;**

10. $\rho=e^{\varphi}, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$**;**

11. $y=e^{-x}, 0\le x\le 1$**;**

12. $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3, \end{cases}\ 0\le t\le 2$**;**

13. $y=x^2, -2\le x\le 0$**;**

14. $\rho=\sin\varphi, 0\le\varphi\le\pi$**;**

15. $\begin{cases} x=3\cos t-\cos 3t, \\ y=3\sin t-\sin 3t, \end{cases}\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$**;**

16. $y=\sqrt{x}, 0\le x\le 4$**;**

17. $\rho=\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$**;**

18. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3-\mathrm{t}, \\ y=5+t^2, \end{cases}\ 0\le t\le 2$**;**

19. $y=3\sqrt{x}, 0\le x\le 1$**;**

20. $\rho=5(1-\cos\varphi), 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{6}$**;**

21. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^2-1, \end{cases} 0\le t\le 2$ **;**

22. $y=3-x, -1\le x\le 2;$

23. $\rho=3\varphi^2, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$**;**

24. $\begin{cases} x=\dfrac{t^5}{5}, \\ y=4-\dfrac{t^4}{4}, \end{cases} 0\le t\le 2$**;**

25. $y=\arcsin(e^{-x}), 0\le x\le 1;$

26. $\rho=\sin^2\dfrac{\varphi}{2}, 0\le\varphi\le\pi$ **;**

27. $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3-t^3, \end{cases} 0\le t\le 3;$

28. $y=\ln x, 1\le x\le 3;$

29. $\rho=1-\cos\varphi, 0\le\varphi\le\pi$ **;**

30. $\begin{cases} x=\sin 3t, \\ y=\cos 3t, \end{cases} 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}.$

Відповіді до завдання 21

1. $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$ од.; **2.** $\left(\sqrt{2}e-\sqrt{2}\right)$ л.од.; **3.** $4\sqrt{2}$ л.од.; **4.** $\left(\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{e^2+1}+1}\right|+\sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}\right)$ л.од.; **5.** 2 л.од.; **6.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{5}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\sqrt{5}-2\right|$ л.од.; **7.** 12 л. од.; **8.** $\left(\dfrac{13}{27}\sqrt{13}-\dfrac{8}{27}\right)$ л.од.; **9.** $\left(\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}\right)$ л.од.; **10.** $\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\right)$ л.од.; **11.** $\left(\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^{-2}+1}+1}{\sqrt{e^{-2}+1}-1}\right|-\sqrt{e^{-2}+1}+\sqrt{2}\right)$ л.од.; **12.** 14 л.од.; **13.** $\left(\sqrt{17}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\sqrt{17}-4\right|\right)$ л.од.; **14.** π л.од.; **15.** 6 од.; **16.** $\left(\sqrt{17}+\dfrac{1}{8}\ln\left|8\sqrt{17}+33\right|\right)$ л.од.; **17.** $\dfrac{\pi}{3}$ л.од.; **18.** $\dfrac{14}{3}$ л.од.; **19.** $\left(\dfrac{\sqrt{13}}{2}+\dfrac{9}{8}\ln\left|4\sqrt{13}+17\right|-\dfrac{9}{4}\ln 3\right)$ л.од.; **20.** $\left(20-20\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$ л.од.; **21.** $4\sqrt{2}$ од.; **22.** $3\sqrt{2}$ од.; **23.** $\left(\dfrac{\pi^2}{8}\sqrt{\pi^2+16}+2\sqrt{\pi^2+16}-8\right)$ од.; **24.** $\left(\dfrac{10}{3}\sqrt{5}+\dfrac{2}{15}\right)$ од.; **25.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-e^{-2}}}{1-\sqrt{1-e^{-2}}}\right|$ л.од.; **26.**

$\left(2+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right|\right)$ л.од.; **27.** $\left(13\sqrt{13}-8\right)$ л.од.; **28.** $\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right|-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ л. од.; **29.** 4 л.од.; **30.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}\pi$ л. од.

Додатки

Додаток 1

Графіки деяких важливих кривих

Наведемо графічні зображення деяких кривих, їхні рівняння в декартових, полярній та в параметричній формах.

Строфоїда

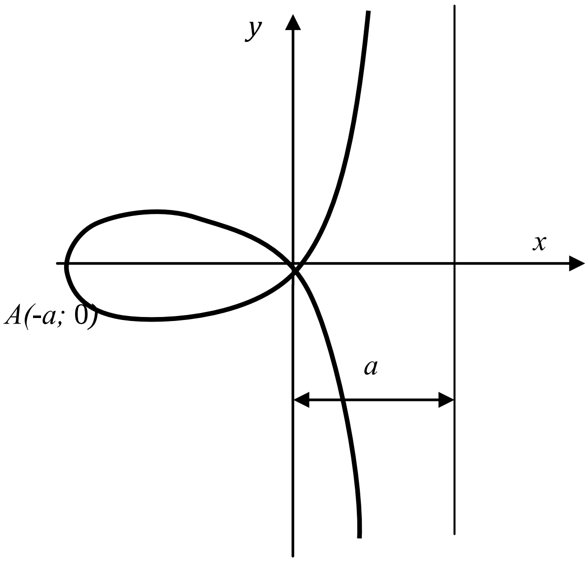


Рис. Строфоїда

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}, a > 0.$$

$$\begin{cases} x = a\dfrac{t^2-1}{t^2+1}, \\ y = at\dfrac{t^2-1}{t^2+1}, t \in (-\infty, +\infty). \end{cases} \qquad \rho = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Цисоїда Діоклеса

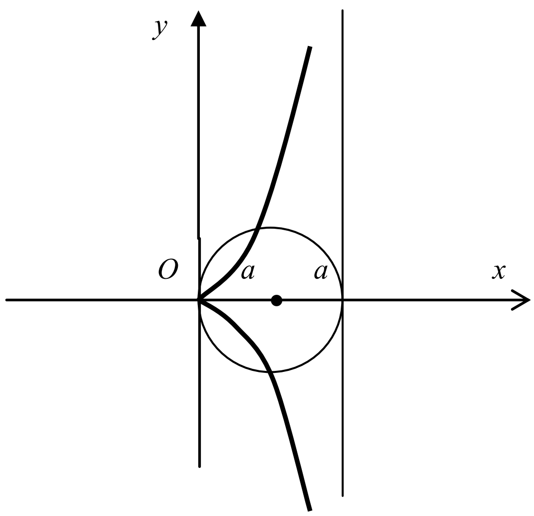


Рис. Цисоїда Діоклеса

$y^2(a-x)=x^3, a>0.$

$$\begin{cases} x=\dfrac{at^2}{t^2+1}, \\ y=\dfrac{at^3}{t^2+1}, t\in(-\infty,+\infty). \end{cases}$$

$\rho = a\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi.$

Лист Декарта

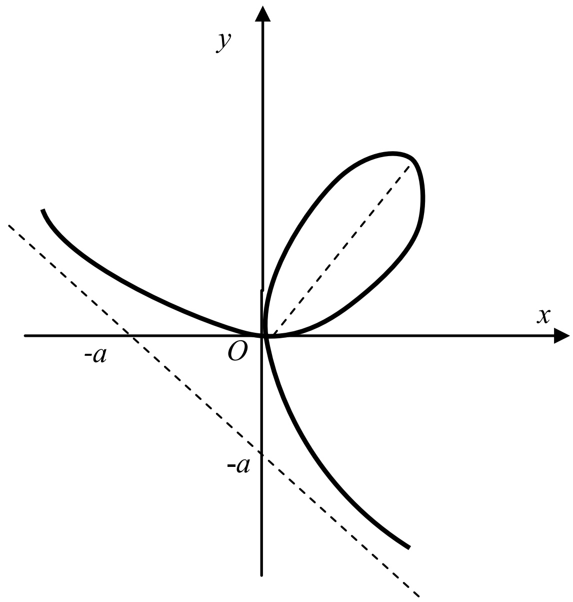


Рис. Лист Декарта

$x^3+y^3-3ax=0, a>0.$

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{t^3+1} \\ y=\dfrac{3at^2}{t^3+1}, t\in(-\infty,+\infty), x\neq -1. \end{cases}$$

Конхоїда Нікомеда

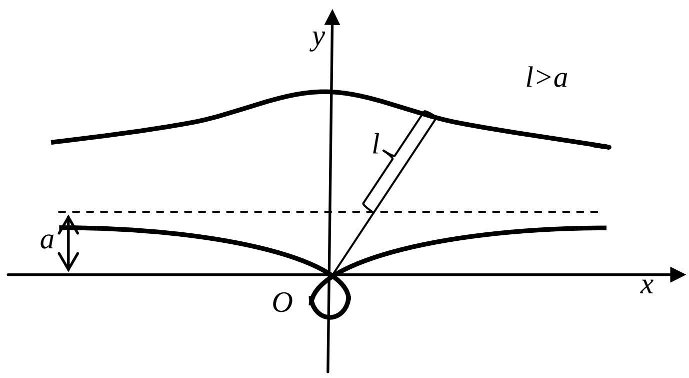
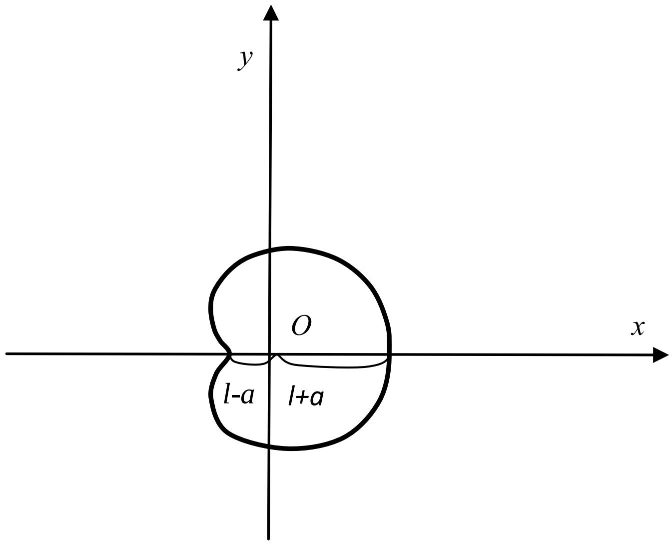


Рис. Конхоїда Нікомеда

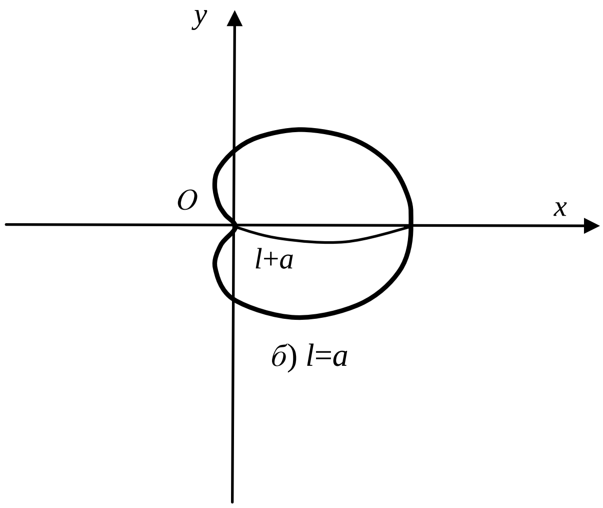
$(y-a)^2(x^2+y^2)-l^2y^2=0, a>0.$

$$\rho = \frac{a}{\sin\varphi} + l.$$

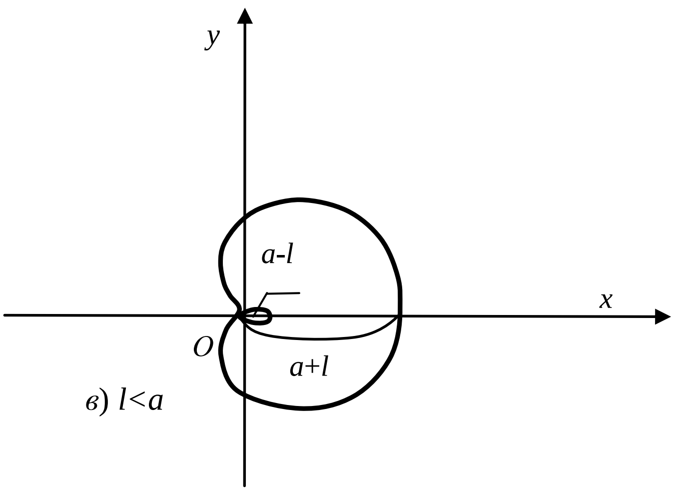
Завиток Паскаля



а) *l*>*a*



б) *l*=*a*



в) *l*<*a*

Рис. Завиток Паскаля

$(x^2+y^2-ax)^2 = l^2(x^2+y^2), a>0.$

$\begin{cases} x = a\cos^2 t + l\cos t, \\ y = a\sin t\cos t + l\sin t, \end{cases}$

Кардіоїда

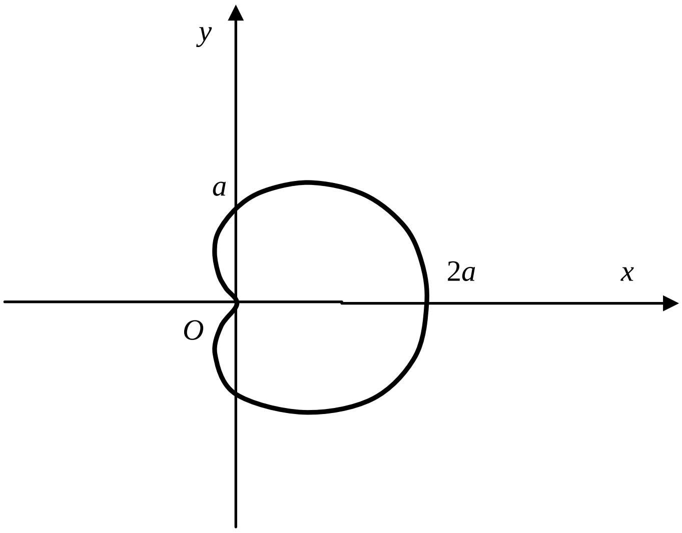


Рис. Кардіоїда

$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax)-a^2y^2=0,$

$\begin{cases} x = a\cos t(1+\cos t), \\ y = a\sin t(1+\cos t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi \quad \rho = a(\cos\varphi + 1).$

Епіциклоїда

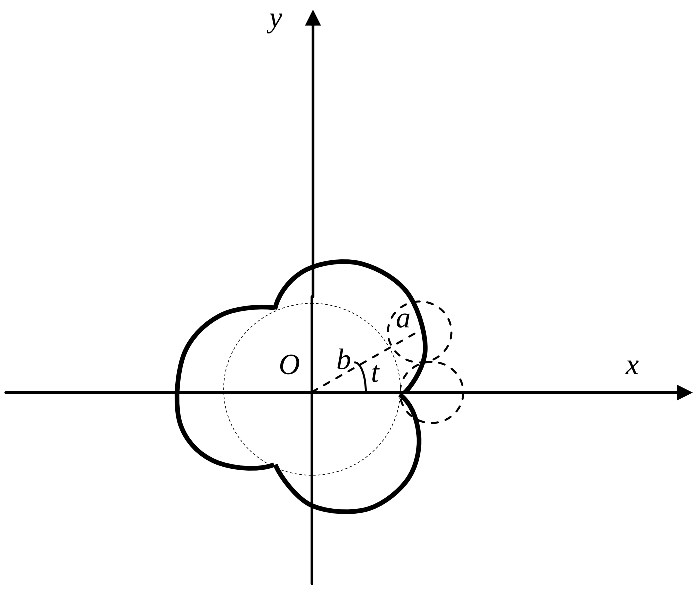


Рис. Епіциклоїда

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - a\cos\dfrac{(a+b)t}{a}, \\ y = (a+b)\sin t - a\sin\dfrac{(a+b)t}{a}. \end{cases}$$

Гіпоциклоїда

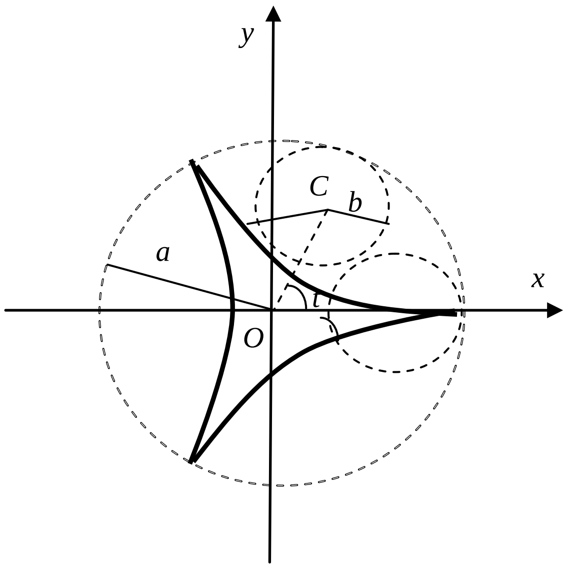


Рис. Гіпоциклоїда

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos t + b\cos\dfrac{(a-b)t}{b}, \\ y = (a-b)\sin t + b\sin\dfrac{(a-b)t}{b}, 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$

Астроїда

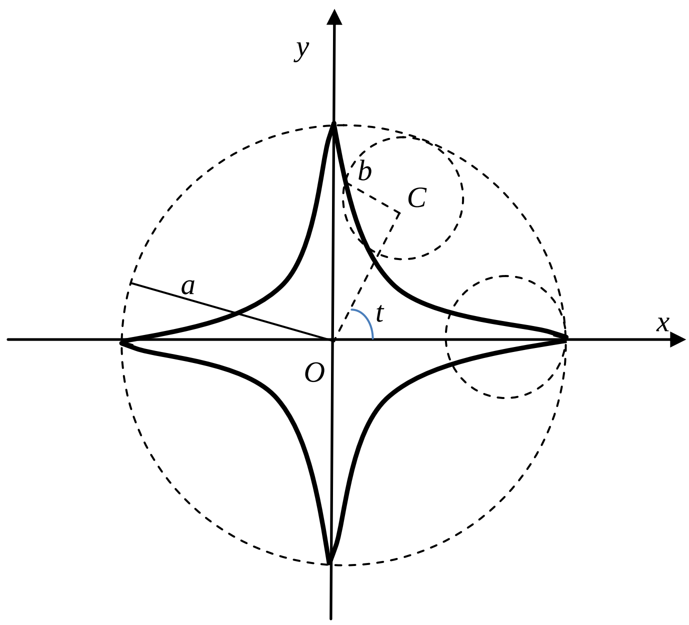


Рис. Астроїда

$$b = \frac{a}{4},$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, 0 < t < 2\pi. \end{cases}$$

Лемніската Бернуллі

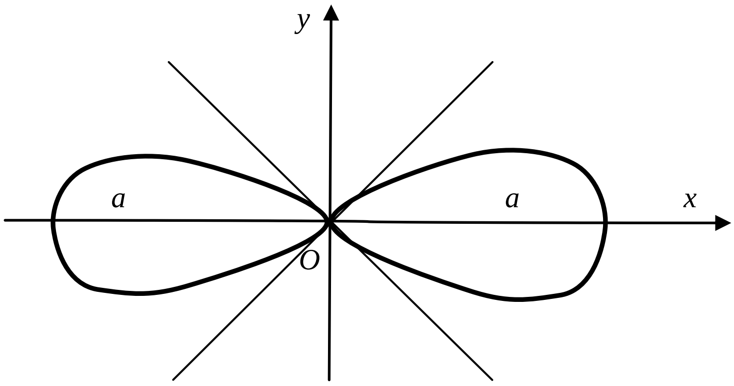


Рис. Лемніската Бернуллі

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), a > 0,$$

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Трипелюсткова троянда

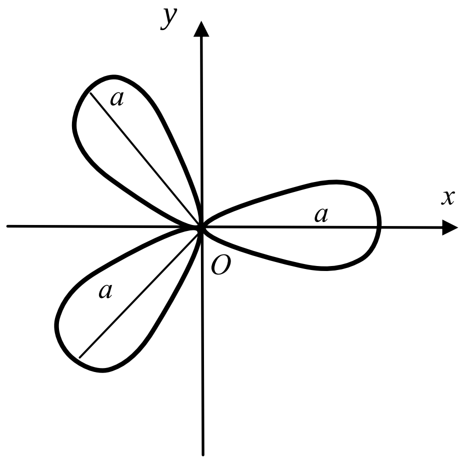


Рис. Трипелюсткова троянда

$$\rho = a\cos 3\varphi.$$

Чотирипелюсткова троянда

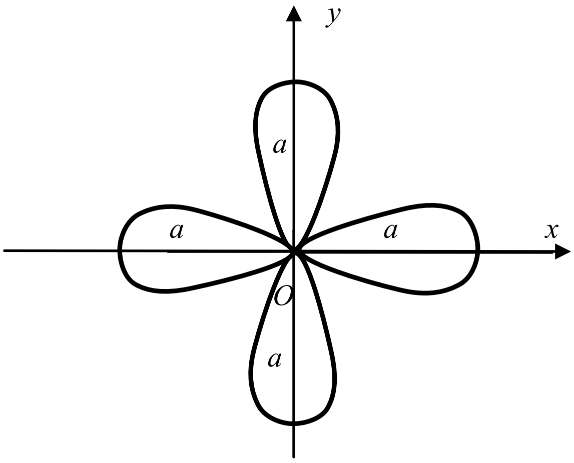


Рис. Чотирипелюсткова троянда

$\rho = a\cos 2\varphi.$

Спіраль Архімеда

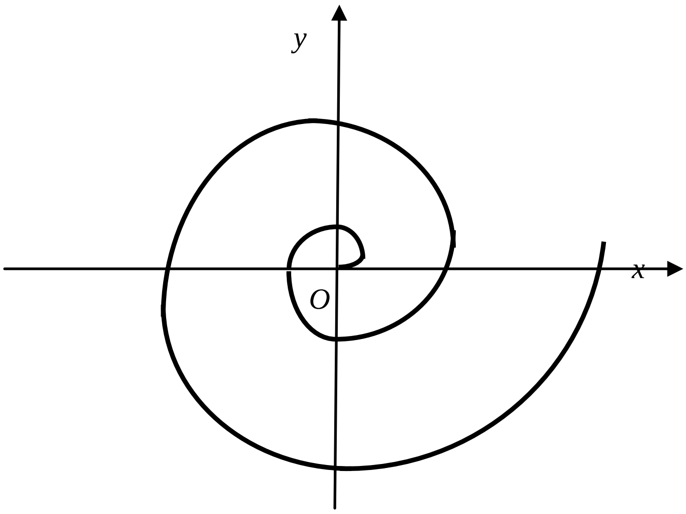


Рис. Спіраль Архімеда

$\rho = a\varphi, \rho > 0.$

Гіперболічна спіраль

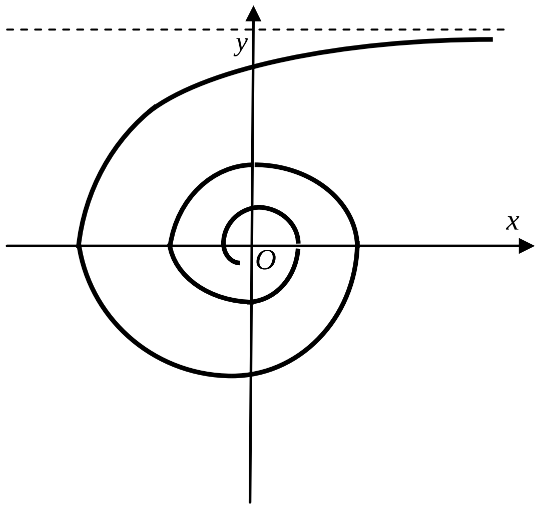


Рис. Гіперболічна спіраль

$\rho = \dfrac{a}{\varphi}, \rho > 0$

Логарифмічна спіраль

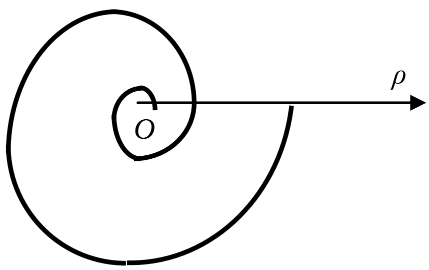


Рис. Логарифмічна спіраль

$\rho = e^{a\varphi}$

Спіраль Галілея

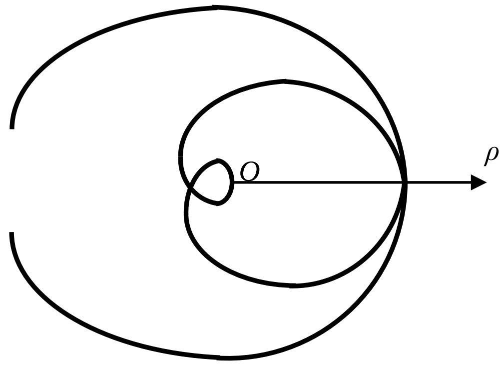


Рис. Спіраль Галілея

$\rho = a\varphi^2.$

Спіраль

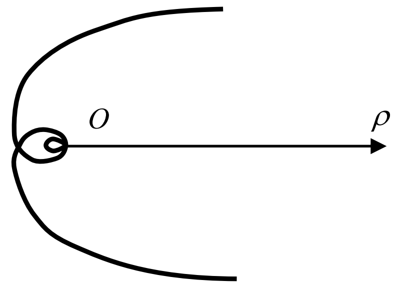


Рис. Спіраль

$$\rho = \frac{a}{\varphi^2}$$

Циклоїда звичайна

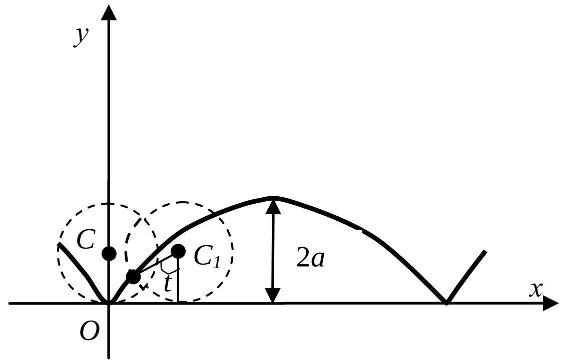


Рис. Циклоїда звичайна

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), -\infty < t < +\infty. \end{cases} \quad x = a\arccos(1 - \frac{y}{a}) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Ланцюгова лінія

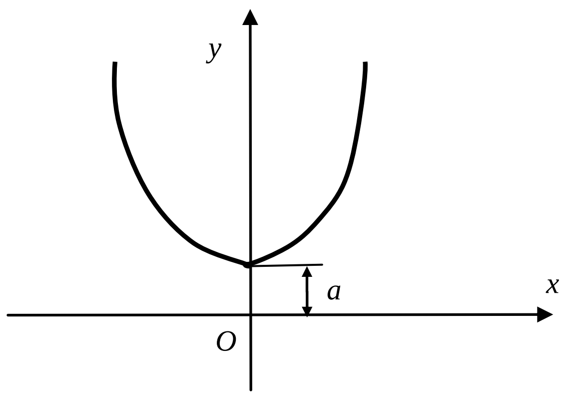


Рис. Ланцюгова лінія

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

Евольвента кола

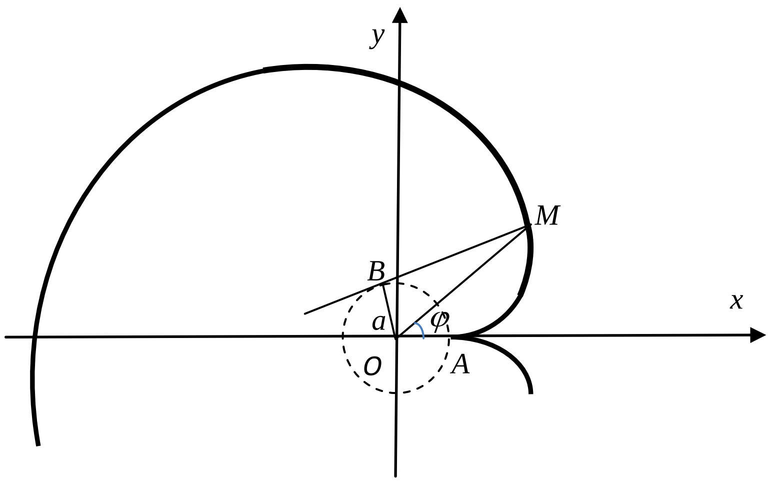


Рис. Евольвента кола

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$$

$t = \angle BOx$,

$$\varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a} - \arccos\frac{a}{\rho}.$$

Додаток 2

Таблиця деяких значень тригонометричних функцій

Функція	Аргумент (x)					
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin*x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos*x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tg*x*	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
ctg*x*	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞

Додаток 3

Таблиця похідних елементарних функцій

$c' = 0$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	
$(\sin x)' = \cos x$	
$(\cos x)' = -\sin x$	

Додаток 4

Таблиця невизначених інтегралів

$\int dx = x + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{a^2 + x^2} \right\rvert + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	

Література

1. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / *Г. Н. Берма* – М.: Наука. – 1977.
2. *Васильченко І. П.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник.Ч.2. / *І. П.Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанів* – К.: Либідь, 1992. – 256 с.
3. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике / *М. Я. Выгодский* – М.: Физматлит, 1995. – 872 с.
4. *Гихман И. И.* Теория вероятностей и математическая статистика / *И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. Ч. Ядренко* – К.: "Высшая школа". – 1979.
5. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посібник/ *В. П Дубовик, І. І. Юрик* – К.: АСК., 2001. – 648 с.
6. *Дубовик В. П.* Вища математика: збірник задач / *В. П Дубовик, І. І. Юрик* – К.: АСК., 2001. – 479 с.
7. *Ефимов А. В.* Сборник задач по математике для втузов Линейная алгебра и основы математического анализа подредакцией / *А. В. Ефимов, В. П. Демидович* – М. Наука ГРФМЛ – 1981 – 464 с.
8. *Кудрявцев В. А.* Краткий курс высшей математики / *В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович.* М.: Наука. – 1989.
9. *Кузик А. Д.* Вища математика: навч. посібник.Ч. 1 / *А. Д. Кузик, О. О. Карабин, О. М. Трусевич* – Л.: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
10. *Кузик А. Д.* Вища математика: навч. посібник.Ч. 2 / *А. Д. Кузик, О. О. Карабин, О. М. Трусевич* – Л.: ЛДУ БЖД, 2014. – 200 с.
11. *Кулініч Г. Л.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник.Ч.1. / *Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва* – К.: Либідь, 1992. – 288 с.
12. *Овчинников П. П.* Вища математика. – Ч. 1, 2. / *П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко* – К.: Техніка. – 2000.
13. *Овчинников П. П.* Вища математика: Збірник задач. – Ч. 1, 2. / *П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко*– К.: Техніка. – 2000.
14. *Фролов С. В.* Курс высшей математики. – Т. 1, 2. / *С. В. Фролов, Р. Я. Шостак* – М.: "Высшая школа". – 1973.
15. *Шкіль М. І.* Математичний аналіз: Ч. 1, 2. / *М. І. Шкіль* – К.: "Вища школа". – 1978.

Навчальне видання

Тацій Р.М., Стасюк М.Ф.,Трусевич О.М.

Інтегральне числення

Навчальний посібник

Літературний редактор **Галина Падик**
Друк на різографі **Маріанна Климус**

Підписано до друку 23.05.2019 р.
Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Roman.
Друк на різографі. Папір офсетний. Наклад: 100.
Ум. друк. арк. 9,1

Друк ЛДУ БЖД
79007, Україна, м. Львів, вул. Клепарівська, 35
тел/факс: (032) 233 – 32 – 40, 233 – 24 – 79
e-mail: mail@ubgd.lviv.ua, ubgd@i.ua