4. КІНЕМАТИКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Основні формули

1. Кінематичне рівняння обертального руху

$$\varphi = \varphi(t).$$

2. Миттєва кутова швидкість

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

3. Середня кутова швидкість

$$< \omega >= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}.$$

4. Величина (модуль) кутового прискорення

$$\varepsilon = \left|\frac{d\omega}{dt}\right| = |\dot{\omega}| = |\ddot{\varphi}|.$$

5. Кінематичне рівняння рівнозмінного обертального руху:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

6. Кутова швидкість при рівнозмінному обертальному русі:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t.$$

7. Період обертання

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

8. Частота обертання

$$n = \frac{1}{T}, \quad n = \frac{\omega}{2\pi}.$$

9. Лінійна швидкість

$$\upsilon = \omega R.$$

10. Тангенціальне прискорення

$$a_\tau = \varepsilon R.$$

11. Нормальне прискорення

$$a_n = \omega^2 R.$$

Методичні вказівки і поради

Всі формули, які характеризують рівнозмінний прямолінійний рух, зберігаються і для рівнозмінного обертального руху, якщо замінити лінійні величини відповідними кутовими, лінійну швидкість υ - кутовою швидкістю ω лінійне прискорення a - кутовим прискорення $\grave{\varepsilon}$, пройдений шлях S – величиною сумарного кута повороту φ.

Замість величин φ, ω, ε іноді користуються спорідненими величинами, заснованими на числі обертів, а саме повне число обертів N, число обертів за одиницю часу n. При цьому $\varphi = 2\pi N$, $\omega = 2\pi n$.

Миттєва вісь обертання циліндра, який котиться по площині, збігається з твірною циліндра, яка дотикається до площини в даний момент.

Приклади розв'язування задач

4.1. ***Диск обертається навколо нерухомої осі так, що кут його повороту залежить від часу за законом φ = 10t² - 2t + 50 (φ – в радіанах, t – в секундах). Визначити кутову швидкість ω та кутове прискорення ε диска в момент часу t = 60 с.***

Дано:
$\varphi = 10t^2 - 2t + 50$
$t = 60$ *с*
ω - ? ε -?

Розв'язування

Визначимо кутову швидкість диска:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\left(10t^2 - 2t + 50\right)}{dt} = (20t - 2)\,\frac{рад}{с}.$$

При $t = 60$ *с*:

$$\omega = 20t - 2 = 20 \cdot 60 - 2 = 1200 - 2 = 1198\ рад/с.$$

Визначимо кутове прискорення диска:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(20t - 2)}{dt},$$

$$\varepsilon = 20\,\frac{рад}{с^2}.$$

4.2. ***Кутова швидкість колеса змінюється згідно з рівнянням $\omega = A + Bt + Ct^2$, де $A = 3$ рад/с, $B = 2$ рад/с^2, $C = 0{,}6$ рад/с^3. На який кут повернеться колесо за проміжок часу від $t_1 = 0$ с до $t_2 = 10$ с. Знайти середню кутову швидкість $<\omega>$ за цей проміжок часу.***

Розв'язування

Дано:
$\omega = A + Bt + Ct^2$
$A = 3$ *рад/с*
$B = 2$ *рад/с^2*
$t_1 = 0$ *с*
$t_2 = 10$ *с*
$<\omega>$-?

Кутова швидкість диска:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (1)$$

Звідси

$$d\varphi = \omega\, dt. \qquad (2)$$

Проінтегруємо обидві частини виразу (2) і знайдемо кут повороту колеса:

$$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{A} + \mathrm{Bt} + \mathrm{Ct}^2)\ dt = (At + \frac{B}{2}t^2 + \frac{C}{3}t^3)\Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= At_2 + \frac{B}{2}t_2{}^2 + \frac{C}{3}t_2{}^3.$$

$$\varphi = 3 \cdot 10 + 1 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 1000 = 330\, рад.$$

Середня кутова швидкість

$$<\omega> = \frac{\varphi}{\Delta t}, \quad <\omega> = 33\frac{рад}{с}.$$

4.3. ***Тіло обертається навколо нерухомої осі так, що кут його повороту змінюється в залежності від часу t за законом $\varphi = Bt - Ct^2$, де $B = 2{,}4$ рад/с, $C = 0{,}03$ рад/с^2. Визначити момент часу $t_з$, в який тіло зупиняється, та число обертів N тіла до зупинки.***

Розв'язування

Дано:
$\varphi = Bt - Ct^2$
$B = 2{,}4$ *рад/с*
$C = 0{,}03$ *рад/с^2*
$t_з$-?
N-?

Кутова швидкість тіла

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B - 2Ct. \qquad (1)$$

Тіло зупиняється, коли $\omega = 0$.

Тоді з (1), маємо:

$$B - 2Ct_з = 0, \qquad t_з = \frac{B}{2C}, \quad t_з = 40с.$$

Кут повороту тіла зв'язаний з числом обертів співвідношенням:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Звідси,

$$N = \frac{\varphi(t_з)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{B^2}{2C} - C\frac{B^2}{4C^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{B^2}{4C},$$

$$N = 7{,}64об.$$

4.4. ***Колесо підйомного механізму обертається навколо нерухомої осі так, що залежність кутової швидкості від кута повороту φ задається рівнянням*** $\boldsymbol{\omega = \omega_0 - A\varphi}$***, де*** $\boldsymbol{\omega_0}$ **= 0,8** ***рад/с,*** ***A*** **= 0,5** $\boldsymbol{c^{-1}}$***. В момент часу*** ***t*** **= 0** ***с кут*** ***φ*** **=** $\boldsymbol{0^o}$***. Визначити кут повороту φ і кутову швидкість ω в момент часу*** $\boldsymbol{t_1}$ **= 2** ***с.***

Дано:

$\omega = \omega_0 - A\varphi$

$\omega_0 = 0{,}8$ *рад/с*

$A = 0{,}5\ c^{-1}$

$t = 0\ c$

$t_1 = 2\ c$

φ-?

ω = ?

Розв'язування

Кутова швидкість колеса:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - A\varphi.$$

Розділимо змінні і про інтегруємо отриманий вираз:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\omega_0 - A\varphi} = \int_0^t dt, \qquad -\frac{1}{A}\ln(\omega_0 - A\varphi)\Big|_0^{\varphi} = t,$$

$$\ln\omega_0 - \ln(\omega_0 - A\varphi) = At, \qquad \ln\frac{\omega_0 - A\varphi}{\omega_0} = -At.$$

Пропотенціюємо отриманий вираз:

$$\omega_0 - A\varphi = -\omega_0 e^{-At},\ A\varphi = \omega_0(1 - e^{-At}).$$

Кут повороту колеса:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{A}(1 - e^{-At}),$$

$$\varphi = 1{,}01рад.$$

Кутова швидкість колеса:

$$\omega = \omega_0 - A\varphi = \omega_0 - \omega_0 + \omega_0 e^{-At} = \omega_0 e^{-At}.$$

Підставимо числові значення:

$$\omega = 0{,}29\,\frac{рад}{c}.$$

4.5. ***При обертанні маховика його кутове прискорення змінювалося за законом $\varepsilon = A - B\omega$, де $A = 0{,}8$ рад/с^2, $B = 0{,}2$ с$^{-1}$. Перед гальмуванням кутова швидкість маховика $\omega_0 = 2$ рад/с. Якою буде кутова швидкість маховика ω через час $t = 5$ с після початку гальмування?***

Дано:
$\varepsilon = A - B\omega$
$A = 0{,}8$ *рад/с*^{2}
$B = 0{,}2$ *с*$^{-1}$
$\omega_0 = 2$ *рад/с*
$t = 5$ *с*

$\omega = ?$

Розв'язування

Кутове прискорення маховика

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = A - B\omega.$$

Розділимо змінні в диференціальному рівнянні і проведемо інтегрування:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{A - B\omega} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{B}\ln(A - B\omega)\Big|_{\omega_0}^{\omega} = t,$$

$$\ln\frac{A - B\omega_0}{A - B\omega} = Bt.$$

Пропотенціюємо отриманий вираз:

$$(A - B\omega_0) = (A - B\omega)e^{Bt}.$$

Звідси

$$\omega = \frac{A}{B} - \left(\frac{A}{B} - \omega_0\right)e^{-Bt}.$$

Підставимо числові значення:

$$\omega = \frac{0{,}8}{0{,}2} - \left(\frac{0{,}8}{0{,}2} - 2\right)e^{-0{,}2\cdot 5}\ рад/с, \omega = 3{,}3\ рад/с.$$

4.6. ***Автомобільне колесо обертається навколо осі так, що кут φ його повороту залежить від часу за законом $\varphi = Ct^2$, де $C = 0{,}20$ рад/с^2. Знайдіть повне прискорення $|\vec{a}|$ точки А на ободі колеса в момент часу $t = 2{,}5$ с після початку руху, якщо швидкість точки А в цей момент дорівнює $\upsilon = 0{,}65$ м/с.***

Дано:
$\varphi = Ct^2$
$C = 0{,}20$ *рад/с*^{2}
$t = 2{,}5$ *с*
$\upsilon = 0{,}65$ *м/с*

$|\vec{a}|$ - ?

Розв'язування

За визначенням, кутова швидкість

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Врахувавши умову задачі, отримаємо, що:

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(Ct^2\right) = 2Ct.$$

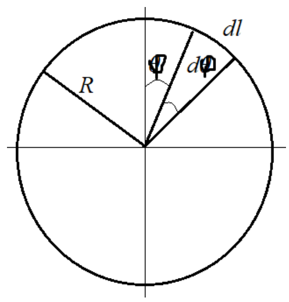


Рис.4.1

З рис.4.1 спостерігаємо, що довжина дуги dl, по якій рухається точка A, пов'язана з кутом $d\varphi$ на який вона за цей час повертається, співвідношенням:

$$dl = R\,d\varphi.$$

Лінійна швидкість υ точки A на ободі колеса при цьому дорівнює $\upsilon = \dfrac{dl}{dt}$.

Зокрема, $\upsilon = \omega R$, а з врахуванням кутової швидкості отримуємо:

$$\upsilon = 2CRt\ .$$

З одержаного співвідношення визначаємо радіус колеса:

$$R = \frac{\upsilon}{2Ct}.$$

Нормальне прискорення точки A знаходимо за співвідношенням:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = (2Ct)^2 \cdot \frac{\upsilon}{2Ct} = 2\upsilon Ct.$$

Тангенціальне прискорення

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(2CtR)}{dt} = 2CR = \frac{\upsilon}{t}.$$

Повне прискорення точки A дорівнює:

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{\frac{\upsilon^2}{t^2} + \left(2C\upsilon t\right)^2} = \frac{\upsilon}{t}\sqrt{1 + 4C^2t^4}.$$

Підставляючи числові значення з умови, отримуємо:

$$a = \frac{0{,}65}{2{,}5}\cdot\sqrt{1 + 4\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot(2{,}5)^4}\ м/с^2, \quad a \approx 0{,}7 м/с^2.$$

4.7. ***Диск радіусом R = 4 см обертається навколо нерухомої осі так, що залежність кутової швидкості від часу задається рівнянням $\omega = At + Dt^4$, де A = 2 рад/с², D = 0,5 рад/с³. Визначити повне прискорення а точок на ободі диска в момент часу t=2 с після початку руху і число обертів N, виконаних диском.***

Дано:
R=4 *см*
$\omega = At + Dt^4$
A=2 *рад/с*^{2}
D=0,5 *рад/с*^{3}
t=2 *с*

$|\vec{a}|$ - ? N- ?

Розв'язування

Повне прискорення точок на ободі диска

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2}.$$

Тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \varepsilon R = \frac{d\omega}{dt}R = R(A + 4Dt^3).$$

Нормальне прискорення диска:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = R(At + Dt^4)^2.$$

Тоді

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} = R\sqrt{(A + 4Dt^3)^2 + (At + Dt^4)^2}, \qquad a = 5{,}8\, м/с^2.$$

Кут повороту φ диска:

$$\varphi = 2\pi N, \qquad \varphi = \int_{0_1}^{t} \omega\, dt = \int_{0_1}^{t} (\mathrm{At} + Dt^4)\ dt = (\frac{A}{2}t^2 + \frac{D}{5}t^5).$$

Звідси, число обертів, виконаних диском:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(\frac{A}{2}t^2 + \frac{D}{5}t^5).$$

Підставивши числові значення, отримаємо:

$$N = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}(\frac{2}{2}2^2 + \frac{0{,}5}{5}2^5) = 1{,}15.$$

4.8. ***Маховик, обертаючись рівноприскорено, збільшив за час t = 2 с частоту обертання від n_1 = 4 об/с до n_2 = 14 об/с. Визначити кутове прискорення ε маховика і число обертів N, які він здійснив за час t.***

Дано:
ε = 0,04 *рад/с*^{2}
α = 76^0
R = 20 *см*

---

t = ?
S = ?

Розв'язування

Кутова швидкість при рівнозмінному обертальному русі:

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t, \qquad 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = \varepsilon t.$$

Звідси

$$\varepsilon = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t}, \qquad \varepsilon = 31{,}4\frac{рад}{с^2}.$$

Кут повороту φ маховика:

$$\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t = \pi(n_1 + n_2)t.$$

З другого боку

$$\varphi = 2\pi N.$$

В результаті

$$2\pi N = \pi(n_1 + n_2)t, \qquad N = \frac{n_1 + n_2}{2}t, \qquad N = 18 об.$$

4.9. ***Матеріальна точка починає рухатись по коловій траєкторії зі сталим кутовим прискоренням ε = 0,04 рад/с^2. Через який час після початку руху повне прискорення матеріальної точки буде напрямлене під кутом α = 76^0 до напряму її лінійної швидкості ? Визначити шлях, що його пройде точка за цей час, якщо радіус колової траєкторії R = 20 см.***

Дано:
$\varepsilon = 0{,}04$ *рад/с*^{2}
$\alpha = 76^0$
$R = 20$ *см*

t = ?
S = ?

Розв'язування

Кут α між векторами $\vec{a}$ і $\vec{\upsilon}$ залежить від співвідношення між нормальним a_n та дотичним a_τ прискореннями:

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\upsilon^2}{Ra_\tau}. \qquad (1)$$

Оскільки

$$\upsilon = a_\tau t,$$

а

$$a_\tau = \varepsilon R,$$

то вираз (1) можна подати у вигляді:

$$tg\alpha = \frac{(a_\tau t)^2}{Ra_\tau} = \frac{a_\tau t^2}{R} = \varepsilon t^2.$$

Тоді час та шлях відповідно дорівнюють:

$$t = \sqrt{\frac{tg\alpha}{\varepsilon}},$$

$$S = \int_0^t \upsilon dt = \int_0^t a_\tau t dt = \frac{a_\tau t^2}{2} = \frac{\varepsilon R t^2}{2}.$$

Після підстановки числових даних знаходимо, що:

$$t = \sqrt{\frac{tg76^0}{0{,}04}}c = 10c,$$

$$S = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}2 \cdot 10^2}{2} м = 0{,}4 м.$$

4.10. ***Тверде тіло починає обертатися навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням*** $\boldsymbol{\varepsilon}$ ***= At, де A =*** **0,5** ***рад/с³. Радіус колової траєкторії*** **R = 0,5*м*** ***Через який час*** **t** ***після початку обертання вектор повного прискорення*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***довільної точки тіла буде утворювати кут*** $\boldsymbol{\alpha}$ **= 45⁰** ***з її вектором швидкості*** $\boldsymbol{\upsilon}$ ***?***

Дано:

$\boldsymbol{\varepsilon = At}$

$\alpha = 45^0$

$R = 0{,}5\,м$

$t = ?$

Розв'язування

Кут α між векторами $\vec{a}$ і $\vec{\upsilon}$ залежить від співвідношення між нормальним a_n та дотичним a_τ прискореннями

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \varepsilon R = AtR.$$

Нормальне прискорення тіла:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R.$$

Кутова швидкість тіла

$$\omega = \int_0^t \varepsilon dt = A\int_0^t tdt = \frac{A}{2}t^2.$$

Толі нормальне прискорення рівне:

$$a_n = \omega^2 R = \frac{A}{4}t^4.$$

В результаті

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{A^2 t^4 R}{4AtR} = \frac{At^3}{4}.$$

Звідси

$$t = \sqrt[3]{\frac{4tg\alpha}{R}}, \quad t = 2c.$$

Підставимо числові значення:

$$t = \sqrt[3]{\frac{4tg45}{0{,}5}}, \quad t = 2c.$$

4.11. ***З моменту виключення гвинтокрила (кутова швидкість задається співвідношенням*** $\omega_0 = \frac{\pi \cdot n}{18}$ ***, його гвинт, який обертався з частотою*** **n = 18000** ***об/хв, зробив до зупинки N*** **= 1000** ***обертів. Скільки часу минуло з моменту зупинки гвинтокрила, якщо вважати обертання гвинта рівносповільненим.***

Дано:
n= 18000 *об/хв*
N= 1000 *об.*
t- ?

Розв'язування

Оскільки рух ротора рівносповільнений, то в цьому випадку застосуємо рівняння рівнозмінного обертального руху:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

З іншого боку:

$$\varphi = 2\pi N .$$

Оскільки кінцева кутова швидкість $\omega = 0$, то отримуємо:

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t},$$

тоді

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0 t^2}{2t} = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

Отже,

$$2\pi N = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

Враховуючи, що $\omega_0 = \frac{\pi n}{18}$, знайдемо t:

$$t = \frac{4\pi N}{\omega_0} = \frac{4 \cdot 18\pi N}{\pi n} = \frac{72N}{n},$$

$$t = \frac{72 \cdot 1000}{18000} = \frac{72}{18} хв. = \frac{72 \cdot 60}{18} с \approx 240 \, с.$$

МЕХАНІКА

Задачі для самостійного розв'язування

4.1. Кут повороту колеса задано рівнянням $\varphi = 2 + 5t + t^2$. Радіус колеса $R = 3$ м. Визначити лінійну швидкість точки на ободі колеса наприкінці другої секунди після початку руху. **(27 м/с)**

4.2. Радіус першого колеса у k разів більший за радіус другого. Точки на їх ободах мають однакові швидкості. Знайти відношення періодів обертання коліс навколо осей. ($\frac{T_1}{T_2} = k.$)

4.3. Тверде тіло обертається навколо осі Oz. Залежність кута його повороту від часу t описується законом $\varphi = at - b\frac{t^2}{2}$, де a і b – сталі. Визначити проекцію кутової швидкості ω_z на вісь z.($\omega_z = a - bt;$)

4.4. Вал почав обертатися так, що доцентрове прискорення точок його поверхні збільшилось у K разів. Як змінилась кутова швидкість вала? **(збільшилась у** $\sqrt{K}$ **разів)**

4.5. Кутова швидкість обертового тіла збільшилася в 2 рази. У скільки разів збільшилася кінетична енергія тіла**?(у 4 рази)**

4.6. Колесо під час рівномірного обертання здійснює $N = 20$ обертів за ча $t_1 = 10$ с. На який кут повернетьго радіус колеса за час $t_2 = 1$ с? **(720^0)**

4.7. Дискова пилка діаметром $d = 0{,}5$ м здійснює $n = 25$ обертів за секунду. Визначити доцентрове прискорення найвіддаленіших від осі точок. Прийняти число $\pi = 3$. **(5625 м/с^2).**

4.8. Колесо радіусом $R = 0{,}1$ м обертається так, що залежність кута повороту колеса від часу задається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^3$, $B = 2$ рад/с; $C = 0{,}1$ рад/с^3 Визначити тангенціальне прискорення точок на краю колеса для моменту часу $t = 2$ с після початку руху **(0,12 м/с^2).**

4.9. Колесо обертається навколо нерухомої осі так, що кут його повороту залежить від часу за формулою $\varphi = kt^2$, $k = 0{,}2$ рад/с^2. Визначити кутове прискорення колеса **(0,5 рад/с^2).**

4.10. Залежність кутового прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої осі, від часу описується рівнянням $\varepsilon = 8 + 3t$, де час t вимірюється секундами, а кутове прискорення ε – рад/с^2. Початкова кутова швидкість становить ω_0 = = 5 рад/с. Визначити кутову швидкість тіла в момент часу $t = 4$ с **(61 рад/с).**

4.11. Швидкість автомобіля $\upsilon = 72\pi$ км/год. Радіус його колеса $R = 50$ см. За який час його колесо здійснить повний оберт**?(0,05с).**

4.12. Лінійна швидкість точок на ободі диску, що обертається, дорівнює $\upsilon_1 = 6$ *м/с*. Точки, що розміщені на $R = 10$ *см* ближче до осі, мають лінійну швидкість $\upsilon_2 = 4$ *м/с*. Знайти кутову швидкість ω диска. **(20 c^{-1})**

4.13. Диск радіусом $R = 0{,}2\ м$ обертається так, що залежність кута повороту його радіуса від часу задається рівнянням: $\varphi = A + Bt + Dt^3$, де $A = 3 рад$, $B = -1 рад/с$, $C = 0{,}1 рад/с^3$. Визначити 1) кутову швидкість, 2) кутове прискорення, 3) тангенціальне, 4) нормальне і 5) повне прискорення точок на краю диска в момент часу t = 10 *с*. **(29 *с*$^{-1}$; 6 *с*$^{-2}$; 1,2 *м/с*^{2}; 168 *м/с*^{2}; 168 *м/с*^{2}).**

4.14. Залежність кутового прискорення тіла від часу задається рівнянням ε = 8+3*t*. Початкова кутова швидкість дорівнювала ω_0 = 5 *рад/с*. Знайти кутову швидкість ω тіла в момент часу t = 4 *с*. **(61 *рад/с*)**

4.15. Точка рухається по колу радіусом R = 2 *см*. Залежність шляху від часу задається рівнянням $x = Dt^3$, де D = 0,1 *см/с*^{3}. Визначити нормальне a_n і тангенціальне a_τ прискорення точки в момент, коли лінійна швидкість цієї точки υ = 0,3 *м/с*. **(4,5 *м/с*^{2}; 0,06 *м/с*^{2})**

4.16. Колесо радіусом R = 5 *см* обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу задається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де D = 1 *рад/с*^{3}. Визначити для точок, які лежать на ободі колеса, зміну тангенціального прискорення Δa_τ за кожну секунду руху. **(0,3 *м/с*^{2})**

4.17. Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від кута повороту задається рівнянням $\varphi = Bt + Ct^2 + Dt^3$, де B = 1 *рад/с,* C = =1 *рад/с*^{2}, D=1 *рад/с*^{3}. В кінці другої секунди руху нормальне прискорення точок, які лежать на ободі колеса, a_n = 346 *м/с*^{2}**.** Знайти радіус R колеса **(1,2 *м*)**

4.18. Колесо обертається навколо нерухомої осі так, що залежність кута повороту його радіуса від часу задається рівнянням $\varphi = Ct^2$, де C = 0,2 *рад/с*^{2}. В момент часу $t = 2{,}5\ с$ лінійна швидкість точки на ободі цього колеса в цей момент часу $\upsilon = 0{,}65\ м/с$. Знайти повне прискорення a точки на ободі цього колеса. **(0,7 *м/с*^{2})**

4.19. Диск радіусом R = 4 *см* обертається навколо нерухомої осі так, що залежність кутової швидкості від часу задається рівнянням $\omega = At + Dt^4$, де A = 2 *рад/с*^{2}, D=0,5 *рад/с*^{3}. Визначити повне прискорення a точок на ободі диска в момент часу t=2 *с* після початку руху і число обертів N, виконаних диском. **(5,8 *м/с*^{2}; 1,15 *обертів*)**

4.20. Вектор повного прискорення точки утворює кут $\alpha = 30^o$ з вектором її лінійної швидкості. У скільки разів в цей момент нормальне прискорення точки, що розміщена на ободі колеса, що обертається, більше від її тангенціального прискорення? **(0,578)**

Тести

4.1. Закінчіть фразу: «Обертанням абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий його рух, під час якого всі точки тіла...

А) ...рухаються в площинах, паралельних до нерухомої осі обертання»;

Б) ...рухаються в площинах, перпендикулярних до нерухомої осі обертання, і описують еліпси, центри яких лежать на цій осі»;

В) ...рухаються в площинах, перпендикулярних до нерухомої осі обертання, і описують кола, центри яких лежать на цій осі»;

Г) ...рухаються в площинах під кутом α до нерухомої осі обертання»;

Д) ...проходять однакові відстані».

4.2. Кутовою швидкістю називається:

А) векторна величина, яка дорівнює першій похідній кута повороту тіла по часу;

Б) скалярна величина, яка дорівнює першій похідній шляху, який пройшла точка тіла, по часу;

В) векторна величина, яка дорівнює відношенню кута повороту тіла до часу;

Г) скалярна величина, яка дорівнює другій похідній кута повороту по часу;

Д) векторна величина, яка дорівнює другій похідній кута повороту по часу.

4.3. Яка з формул визначає зв'язок між векторами лінійної і кутової швидкостей?

А) $\vec{\upsilon} = [\vec{R}, \vec{\omega}]$; **Б)** $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$; **В)** $\vec{\omega} = [\vec{\upsilon}, \vec{R}]$;

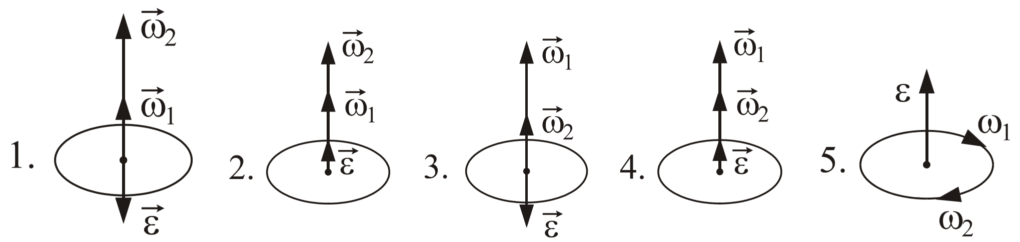
Г) $\vec{\omega} = [\vec{R}, \vec{\upsilon}]$; **Д)** $\vec{\upsilon} = [m\vec{\omega}, R]$.

4.4. Кутове прискорення можна розрахувати за допомогою виразу:

А) $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$; **Б)** $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d^2\vec{\upsilon}}{dt^2}$; **В)** $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}R$;

Г) $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d^2\vec{\omega}}{dt^2}$; **Д)** $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$.

4.5. На якому з рисунків напрямки векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ відповідають прискореному обертанню диска?



А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 5.

4.6. Яка з формул визначає кутову швидкість тіла під час рівнозмінного обертанні?

А) $\omega = \omega_0 + \dfrac{\varepsilon t^3}{2}$; **Б)** $\omega = \omega_0 t + \varepsilon t^2$; **В)** $\omega = \omega_0 + a_\tau t$;

Г) $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; **Д)** $\omega = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$.

№ завдання	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
Варіант відповіді	**В**	**А**	**Б**	**А**	**Б**	**Г**

5. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Основні формули

1. Момент сили $\vec{F}$ відносно точки (центра *O*) обертання

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений з точки (центра *O*) до точки прикладання сили $\vec{F}$.

2. Момент імпульсу матеріальної точки відносно точки (центра *O*) обертання

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{P}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{\upsilon}\right],$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений з точки (центра *O*) до матеріальної точки, імпульс якої $\vec{P}$.

3. Момент сили відносно осі z

$$M_z = F_\tau d,$$

де F_τ, тангенціальна складової сили, яка діє на матеріальну точку (тіло); d - найкоротша відстань (плече сили) від осі z до точки прикладання сили.

4. Момент імпульсу матеріальної точки відносно осі z

$$L_z = m\upsilon_\tau d \ ,$$

де d - плече імпульсу матеріальної точки відносно заданої осі z.

6. Момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр його маси

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2,$$

де r_i - відстань від елемента маси Δm_i до осі обертання.

7. Момент інерції тіла відносно заданої осі (теорема Штейнера)

$$J = J_0 + md^2,$$

де J_0 – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр маси тіла і є паралельною до заданої осі обертання; d – відстань між осями; m – маса тіла.

8. Момент інерції матеріальної точки відносно осі

$$J = md^2,$$

де d, - відстань точки до осі.

9. Момент інерції тонкого обруча відносно осі, яка перпендикулярна до площини обруча і проходить через його центр

$$J = mR^2,$$

де *R* – радіус обруча.

10. Момент інерції диска відносно осі, яка перпендикулярна до площини диска і проходить через його центр

$$J = \frac{1}{2} mR^2 .$$

11. Момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через середину стрижня і перпендикулярна до нього

$$J = \frac{1}{12} ml^2 ,$$

де l - довжина стрижня.

12. Момент інерції кулі відносно осі, що проходить через її центр

$$J = \frac{2}{5} mR^2 .$$

13. Момент імпульсу тіла відносно осі z, що проходить через його центр

$$L_z = J\omega ,$$

де ω - кутова швидкість обертання тіла.

14. Рівняння динаміки обертального руху тіла відносно нерухомої осі

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z , \; J\varepsilon = M_z \; (J = \text{const}) ,$$

де ε - кутове прискорення тіла.

15. Рівняння динаміки обертального руху тіла відносно точки обертання

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} .$$

16. Кінетична енергія тіла, що обертається навколо осі

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2} .$$

17. Закон збереження моменту імпульсу

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \text{const} .$$

18 . Робота сталого моменту сили *M*, що діє на тіло, яке обертається

$$A = M\varphi ,$$

де φ - кут повороту тіла.

19. Миттєва потужність під час обертання тіла

$$N = M\omega .$$

Методичні вказівки і поради

В задачах цього розділу розглядається обертання твердого тіла навколо нерухомої осі і складний плоский рух, який можна представити як суму поступального руху і обертання навколо уявної осі, що проходить через центр мас і перпендикулярної площинам, в яких розміщуються траєкторії всіх точок тіла.

Розв'язування задач цього розділу можливе як «силовим» методом, так і з допомогою законів збереження. «Силовий» метод ґрунтується на безпосередньому використанні другого закону Ньютона, записаного для центра мас твердого тіла, і основного рівняння динаміки обертального руху, яке (оскільки розглядається тільки обертання навколо осі) можна записувати в скалярній формі, замінюючи відповідні векторні величини (кутове прискорення, момент сили і т.д.) проекціями цих векторів на вісь обертання.

Для найпростіших тіл, які часто доводиться розглядати, доцільно використовувати значення моментів інерції як відомі.

При розв'язуванні задач трапляються випадки, коли рух тіла відбувається навколо миттєвої осі (положення якої в просторі змінюється з часом). При цьому в кожний момент часу справедливі ті самі формули, що й при нерухомій осі. Такі випадки трапляються, наприклад, при розгляді тіл, що котяться без ковзання по поверхні: миттєва вісь обертання проходить через точки стикання тіла з поверхнею.

Приклади розв'язування задач

5.1. ***Радіус тонкого однорідного кільця*** $R = 20$ *см* ***і маса*** $m = 100$ *г*. ***Знайти момент інерції J відносно осі, що лежить в площині кільця і проходить через його центр (рис.5.1).***

Розв'язування

Дано:
$R = 20$ *см*
$m = 100$ *г*
$J = ?$

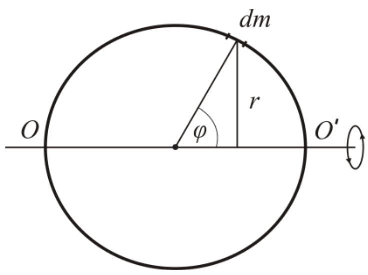


Рис.5.1

Розглянемо малий елемент кільця масою

$$dm = m\frac{d\varphi}{2\pi}.$$

При обертанні навколо осі OO' цей елемент матиме момент інерції:

$$dJ = dmr^2, \qquad (1)$$

де $r = R\sin\varphi$ – відстань від елемента до осі обертання. Момент інерції всього кільця:

$$J=\int dJ=\int dmr^2=\int\frac{md\varphi}{2\pi}R^2\sin^2\varphi. \qquad (2)$$

Кут φ при інтегруванні по всьому кільцю змінюється від 0 до 2π тому:

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{mR^2}{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{mR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\varphi\ . \qquad (3)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$J=\frac{mR^2}{2},\quad J=2\cdot10^{-3}\ кг\cdot м^2.$$

5.2. ***Однорідний конус має масу*** $m=2кг$ ***і радіус основи*** $R=0,2м$***. Обчислити момент інерції*** J ***конуса відносно його осі.***

Дано:

$m=2\ кг$

$R=0,2\ м$

$J_{диска}=\frac{1}{2}MR^2$

$J=?$

Розв'язування

Розіб'ємо конус на циліндричні шари у формі диска товщиною dr, для кожного з яких можемо розрахувати момент інерції (рис.5.2)

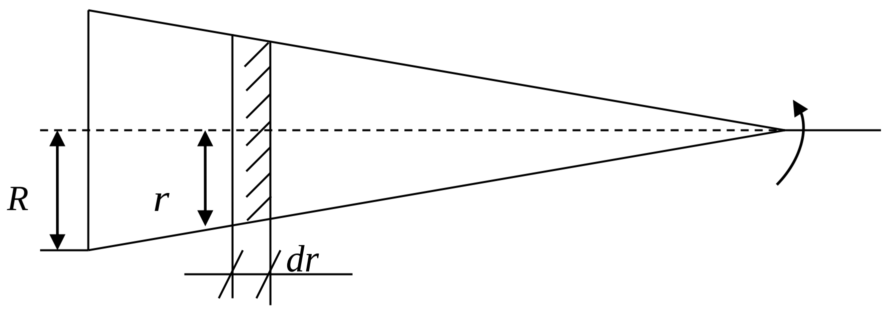


Рис.5.2

Маса такого шару буде:

$$d_m=\rho\pi r^2dr.$$

Момент інерції такого шару, який має форму диска, буде

$$dJ=\frac{1}{2}d_mr^2=\frac{1}{2}\rho\pi r^2drr^2=\frac{1}{2}\rho\pi r^4dr$$

Момент інерції всього конуса складається із суми моментів інерції всіх шарів:

$$J=\int_0^R dJ=\int_0^R\frac{1}{2}\pi\rho r^4dr=\frac{\pi}{10}\rho R^5. \qquad (1)$$

Густину циліндра можемо визначити через його масу:

$$m=\int_0^R dm=\int_0^R\pi\rho r^2dr=\frac{\rho\pi}{3}R^3,$$

звідси

$$\rho = \frac{3m}{\pi R^3}. \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1) і отримаємо

$$J = \frac{\pi R^5}{10} \cdot \frac{3m}{\pi R^3} = \frac{3}{10} mR^2.$$

Після обчислень: $J = 0,02$ $кг\,м^2$.

5.3. ***Маховик у вигляді диску, масою*** $m = 50\,кг$ ***і радіусом*** $r = 20\,см$***, розкрутили до частоти обертання*** $n = 480\,об/хв$ ***і відпустили. Внаслідок тертя маховик зупинився. Знайти момент сил тертя M_T, вважаючи його сталим, якщо маховик зупинився через*** $t = 50\,с$**.**

Дано:
$m = 50\,кг$
$r = 20\,см$
$n = 480\,об/хв$
$t = 50\,с$

$M_T = ?$

Розв'язування

Згідно основного закону динаміки обертального руху твердого тіла

$$M_T = J\varepsilon, \qquad (1)$$

де J – момент інерції маховика; M_T, ε – момент сили тертя та кутове прискорення, спроектовані на вісь обертання.

Рух рівносповільнений, тому кутова швидкість змінюється за законом $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$, де ω_0 – початкова кутова швидкість, $\omega_0 = 2\pi n$. Кінцева швидкість $\omega = 0$, тому

$$\omega_0 - \varepsilon t = 0,$$

а звідси:

$$\varepsilon = \frac{2\pi n}{t}. \qquad (2)$$

Момент інерції диску відносно осі, що проходить через його центр інерції дорівнює

$$J = \frac{mr^2}{2}. \qquad (3)$$

Підставляючи (2), (3) у формулу (1), отримаємо:

$$M_T = \frac{mr^2 2\pi n}{2t}, \quad M_T = 1\,Н \cdot м.$$

5.4. ***Дископодібний маховик, масою*** $m = 10\,кг$ ***і радіусом*** $R = 0,25\,м$***, обертається з частотою*** $n = 40\,об/\text{с}$***. Коли вимкнули привід, маховик зробивши*** $N = 200$ ***обертів під дією тертя зупинився. Визначити момент сил тертя*** M_T***, що діяв на маховик.***

Дано:
$m = 10\,кг$
$R = 0,25\,м$
$n = 40\,об/\text{с}$
$N = 200$
$M_T = ?$

Розв'язування

Згідно основного закону динаміки обертального руху твердого тіла

$$M_T = J\varepsilon\,, \tag{1}$$

де J – момент інерції маховика; M_T, ε – момент сили тертя та кутове прискорення, спроектовані на вісь обертання.

Момент інерції диску відносно осі, що проходить через його центр інерції дорівнює

$$J = \frac{mR^2}{2}. \tag{2}$$

Рух рівносповільнений, тому кутова швидкість змінюється за законом

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t\,,$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість,

$$\omega_0 = 2\pi n\,.$$

Кінцева швидкість $\omega = 0$, тому

$$\omega_0 - \varepsilon t = 0\,,$$

а звідси

$$\varepsilon = \frac{2\pi n}{t}\,. \tag{3}$$

Маховик зробивши N обертів, повернуся на кут

$$\varphi = 2\pi N = 2\pi n - \frac{\varepsilon t^2}{2} = 2\pi n - \frac{1}{2}\frac{2\pi n}{t}t^2 = \pi nt. \tag{4}$$

З виразу (3) час до зупинки маховика

$$t = \frac{2N}{n}. \tag{5}$$

Підставляючи (5) формулу (3), а потім отриманий вираз і формулу (2) - у (1), отримаємо:

$$M_T = \frac{mR^2\pi n^2}{2N}, \quad M_T = 15,7\ H \cdot м\,.$$

5.5. ***Однорідний і суцільний диск масою* m *= 5 кг і радіусом* R *= 0,2 м обертається з кутовою швидкістю* ω_1 *= 6,1 рад/с навколо осі, що проходить через центр диска. Момент сили тертя, що діє на диск, прямо пропорційний кутовій швидкості:* $M_T = B\omega$*, де* B *= 0,01 Н·м·с/рад. Визначити кутову швидкість* ω_2 *диска через час* t *= 30 с після припинення дії зовнішнього моменту сил. Скільки обертів зробить диск протягом цього часу?***

Дано:
$m = 5$ *кг*
$R = 0{,}2$ *м*
$\omega_1 = 6{,}1$ *рад/с*
$M_T = B\omega$
$B = 0{,}01$ *Н·м·с/рад*
$t = 30$ *с*

ω_2 -?
N - ?

Розв'язування

Згідно основного закону динаміки обертального руху твердого тіла

$$-M_T = J\frac{d\omega}{dt}, \qquad -B\omega = J\frac{d\omega}{dt}, \qquad (1)$$

де J - момент інерції диска.

Розділимо в диференціальному рівнянні (1) змінні та проінтегруємо:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{B}{J}dt, \quad \int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{B}{J}\int_0^t dt, \quad \ln\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{B}{J}t.$$

Пропотенціюємо отриманий вираз і врахуємо, що момент інерції диска

$$J = \frac{1}{2}mR^2.$$

Тоді кутова швидкість диска через час t буде рівна:

$$\omega_2 = \omega_1 e^{-\frac{B}{J}t}, \qquad \omega_2 = \omega_1 e^{-\frac{2B}{mR^2}t},$$

$$\omega_2 = 0{,}3\,рад/с.$$

Кут повороту диска:

$$\varphi = \omega_1 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \omega_1 t - \frac{1}{2}\frac{\omega_1 - \omega_2}{t}t^2 = \omega_1 t - \frac{1}{2}\omega_1 t + \frac{1}{2}\omega_2 t = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t.$$

З другої сторони, кут повороту

$$\varphi = 2\pi N.$$

Тоді

$$2\pi N = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t, \qquad N = \frac{1}{4\pi}(\omega_1 + \omega_2)t.$$

Підставимо числові значення

$$N = \frac{1}{4\cdot 3{,}14}(6{,}1 + 0{,}3)30 = 15{,}3\,об.$$

5.6. ***Вал у вигляді суцільного циліндра масою m_1 = 5 кг насаджений на горизонтальну вісь (рис. 5.3). На циліндр намотаний шнур, до вільного кінця якого підвішений вантаж мас m_2 = 2,5 кг. З яким прискоренням а буде опускатися вантаж?***

Дано:
$m_1 = 5$ кг $m_2 = 2{,}5$ кг $g = 9{,}8\ м/с^2$ $J = \frac{1}{2}mR^2$
$a = ?$

Розв'язування

Запишемо рівняння руху

$$m_2 g - T = m_2 a, \qquad (1)$$

де T - сила натягу шнура.

Згідно основного закону динаміки обертального руху циліндра $M = J\varepsilon$,

де $M = TR$ - момент сили, J – момент інерції циліндра (J=0,5m_1R^2) .

Тоді,

$$TR = J\varepsilon,\ T = \frac{J\varepsilon}{R} = \frac{1}{2R}m_1R^2\frac{a}{R} = \frac{1}{2}m_1 a. \qquad (2)$$

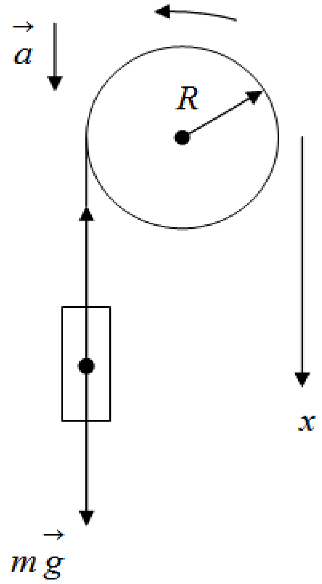


Рис.5.3

Підставимо вираз (2) в рівняння руху (1):

$$m_2 g - \frac{1}{2}m_1 a = m_2 a,\ \ a = \frac{2m_2 g}{m_1 + 2m_2},\ a = 4.9\ м/с^2$$

5.7. ***Два вантажі масами*** $m_1 = 2$ *кг* ***та*** $m_2 = 1$ *кг* ***з'єднані невагомою ниткою, яка перекинута через блок масою*** $m = 1$ *кг*. ***Знайти: 1) прискорення*** a, ***з яким рухаються вантажі; 2) силу натягу*** T_1 ***та*** T_2 ***нитки, до якої підвішені вантажі. Блок вважати однорідним циліндром. Тертям знехтувати. Прискорення вільного падіння*** $g = 9{,}8\ м/с^2$.

Дано:
$m = 1$ кг $m_1 = 2$ $m_2 = 1$ кг $g = 9{,}8\ м/с^2$ $J = \frac{1}{2}mR^2$
$a = ?$ $T_1 = ?$ $T_2 = ?$

Розв'язування

Виберемо систему координат таким чином, що додатній напрямок осі x співпадатиме з напрямком руху тіла масою m_1, а вісь y скеровуємо перпендикулярно до площини рисунка в напрямку до нас (рис.5.4).

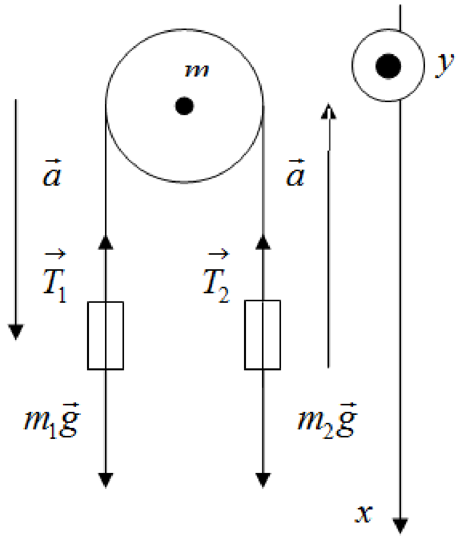


Рис.5.4

Запишемо рівняння руху першого та другого вантажів, враховуючи, що вони будуть рухатись з однаковим прискоренням у протилежних напрямках:

$$m_1 a = m_1 g - T_1; \quad (1)$$

$$-m_2 a = m_2 g - T_2. \quad (2)$$

Рівняння обертального руху блока матиме вигляд:

$$J\varepsilon = M_1 - M_2, \quad (3)$$

де $M_1 = T_1 R$ та $M_2 = T_2 R$ - моменти сил натягу нитки T_1 та T_2 відповідно, $J = \frac{1}{2} mR^2$ - момент інерції блока (циліндра), ε - кутове прискорення блока.

Зв'язок між лінійним та кутовим прискоренням задається рівнянням

$$a = \varepsilon R. \quad (4)$$

Підставимо (4) в (3) і отримаємо: $J\frac{a}{R} = R(T_1 - T_2)$. (5)

Віднімемо від (1) рівняння (2) і з врахуванням рівняння (5) отримаємо:

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}, \quad a = 2{,}8 \ \ м/с^2.. \quad (6)$$

Підставляючи (6) в рівняння (1) та (2) отримаємо:

$$T_1 = m_1(g - a), \quad T_1 = 14\ Н; \quad T_2 = m_2(g + a), \quad T_2 = 12{,}6\ Н.$$

5.8. ***На барабан масою*** $m_0 = 9\,кг$ ***намотано невагомий шнур, до кінця якого прив'язано вантаж масою*** $m = 2\,кг$***. Знайти прискорення, з яким опускається вантаж. Барабан вважати однорідним диском. Тертям знехтувати.***

Дано:

$m_0 = 9\ кг$

$m = 2\ кг$

$g = 9{,}8\ м/с^2$

$J = \frac{1}{2} m_0 R^2$

$a = ?$

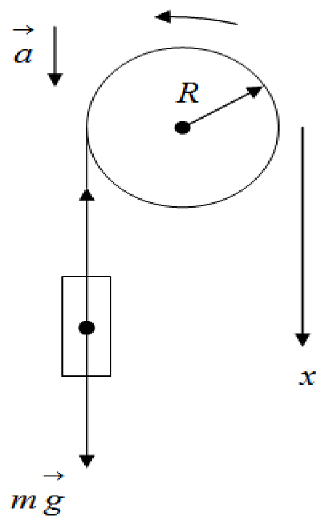


Рис.5.5

Розв'язування

Скеруємо вісь x в напрямку руху вантажу m (рис.5.5). Без врахування сил тертя і опору середовища систему «вантаж-барабан» можна вважати замкненою і застосувати закон збереження енергії, з якого випливає, що при опусканні вантажу на висоту h потенціальна енергія mgh переходить в кінетичну енергію поступального руху вантажу та в кінетичну енергію обертання барабана:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (1)$$

де J - момент інерції барабана, який можна розрахувати, розглядаючи барабан як суцільний диск:

$$J = \frac{m_0 R^2}{2}. \quad (2)$$

Крім того
$$\omega = \frac{\upsilon}{R}, \quad (3)$$

де ω – кутова швидкість диска, υ – лінійна швидкість точок на ободі диску, R – радіус диска.

Отже на основі (1), (2) та (3) отримаємо:

$$mgh = \frac{\upsilon^2}{2}\left(m + \frac{m_0}{2}\right). \quad (4)$$

Використаємо вираз для переміщення на відстань h при рівноприскореному русі, враховуючи, що початкова швидкість вантажу була рівна нулю, а початок координат співпадає із початковим положенням вантажу:

$$h = \frac{at^2}{2} \quad (5)$$

та
$$\upsilon = at. \quad (6)$$

На основі (4), (5) та (6) отримаємо:

$$a = \frac{2mg}{m_0 + 2m}, \quad a = 3 \ м/с^2.$$

5.9. ***Знайти кінетичну енергію велосипедиста та велосипеда, що їде зі швидкістю $\upsilon = 9 км/год$. Маса велосипедиста разом з велосипедом становить $m = 78 кг$. На колеса припадає маса $m_0 = 3 кг$. Колеса велосипеда вважати обручами.***

Розв'язування

Дано:

$\upsilon = 9 \ км/год = 2{,}5 \ м/с$
$m = 78 \ кг$
$m_0 = 3 \ кг$
$J = m_0 R^2$,

$E_K = ?$

Кінетична енергія велосипеда складається з кінетичної енергії поступального руху та кінетичної енергії обертального руху коліс:

$$E_K = E_K^{пост} + E_K^{об} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (1)$$

Момент інерції коліс, які, згідно умови задачі, можемо вважати обручами, дорівнює $J = m_0 R^2$, .

Скориставшись тим, що кутова швидкість обертання коліс зв'язана із лінійною швидкістю точок на їх ободі згідно виразу $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$, із рівняння (1) отримаємо вираз для повної кінетичної енергії

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m_0 R^2 \upsilon^2}{2R^2} = \frac{\upsilon^2(m+m_0)}{2},$$

$$E_K = 253 \ Дж.$$

5.10. ***Хлопчик котить обруч по горизонтальній дорозі зі швидкістю*** $\upsilon = 7,2 км/год$***. На яку віддаль може закотитись обруч на похилу площину за рахунок кінетичної енергії, якщо зміна висоти площини дорівнює 1 м на 10 м довжини площини. Прискорення вільного падіння*** $g = 10 \ м/с^2$***.***

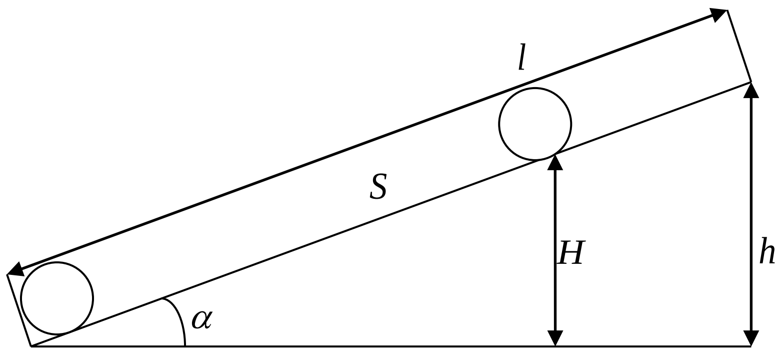
Дано:	**Розв'язування**
$\upsilon = 7,2 \ км/год = 2 \ м/с$ $g = 10 \ м/с^2$ $\dfrac{h}{l} = \dfrac{H}{S}$	
$S = ?$	

Рис.5.6

Біля підніжжя похилої площини (рис.5.6) обруч володів кінетичною енергією, що складалась з кінетичної енергії поступального та обертального рухів

$$E_K = E_{пост} + E_{об} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

де $J = mR^2$ - момент інерції обруча, а кутова швидкість обертання обруча ω і лінійна швидкість υ точок на його ободі радіуса R пов'язані між собою співвідношенням

$$\omega = \frac{\upsilon}{R}. \qquad (2)$$

Коли обруч вкотився на похилу площину на віддаль S, піднявшись при цьому на висоту H, то його кінетична енергія E_K повністю перейшла в потенціальну

$$E_П = mgH. \qquad (3)$$

Згідно закону збереження енергії на основі (1), (2) та (3) можемо записати

$$\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{mR^2\upsilon^2}{2R^2}=mgH\ ,$$

звідки

$$m\upsilon^2=mgH \quad \text{або} \quad H=\frac{\upsilon^2}{g}$$

З рис.1.6 видно, що

$$\frac{h}{H}=\frac{l}{S} \qquad \text{або} \qquad S=\frac{Hl}{h}. \qquad (5)$$

Підставимо (4) в (5) і отримаємо

$$S=\frac{\upsilon^2 l}{gh}, \quad S=4{,}1\ м\,.$$

5.11. ***Нехтуючи тертям, визначити, яку роботу треба виконати, щоб довести маховик, масу якого M = 0,2 т наближено можна вважати рівномірно розподіленою по його обводу діаметром d = 1,2 м, до рівномірного обертання зі швидкістю n = 100 об/хв.***

Дано:

$M = 0{,}2\ т$
$d = 1{,}2\ м$
$n = 100\ об/хв$

A-?

Розв'язування

Шукану роботу можна обчислити як зміну кінетичної енергії маховика $E_к$. Спочатку енергія $E_{к1}=0$, а потім досягає значення

$$E_{к2}=\frac{J\omega^2}{2}\ ,$$

де J – момент інерції маховика відносно осі обертання, а ω– кутова швидкість маховика;

$$\omega=2\pi n.$$

Отже,

$$A=\Delta E_k=E_{k2}=2J\pi^2 n^2.$$

Момент інерції маховика можна обчислити за формулою

$$J=Mr^2=\frac{Md^2}{4}.$$

Підставивши цей вираз у формулу для роботи, знайдемо:

$$A=\frac{1}{2}Md^2\pi^2 n^2.$$

Підставимо числові значення:

$$A=\frac{1}{2}200\cdot 1{,}2^2 3{,}14^2 1{,}66^2\ Дж, \quad A=40\,Дж.$$

5.12. ***Олівець довжиною*** $l = 15 см$***, поставлений вертикально, падає на стіл (рис.5.7). Яку кутову та лінійну швидкості будуть мати в кінці падіння середина та верхній кінець олівця ? Прискорення вільного падіння*** $g = 9{,}8 м/с^2$**.**

Дано:

$l = 15 \ см = 0{,}15 \ м$

$g = 9{,}8 \ м/с^2$

$\upsilon_1 = ?$

$\upsilon_2 = ?$

$\omega = ?$

Розв'язування

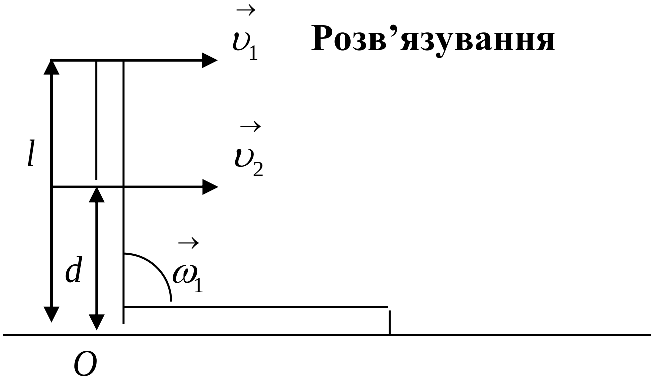


Рис. 5.7

Використаємо одну із властивостей центра мас, а саме те, що рух тіла можна представити так, ніби всі сили, які діють на нього, прикладені до центра мас цього тіла. Розглянемо рух центра мас олівця під дією сили тяжіння. У вертикальному положенні олівець володіє потенціальною енергією, яка при падінні переходить в кінетичну енергію обертального руху:

$$E_п = E_к; \qquad mg\frac{l}{2} = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (1)$$

Момент інерції олівця відносно осі O, яка проходить через його кінець знайдемо за теоремою Штейнера: $J = J_c + md^2$,

де J_c - момент інерції олівця відносно осі, що проходить через центр мас ($J_c = \frac{1}{12}ml^2$, $d = \frac{1}{2}l$), отже

$$J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2. \qquad (2)$$

Підставивши (2) в (1) отримаємо:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{3}ml^2\omega^2,$$

Звідси

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}, \quad \omega = 14 \ \text{рад/с}.$$

Лінійна швидкість точок олівця визначається із співвідношення $\upsilon = \omega R$, тобто

$$\upsilon_1 = \omega l, \quad \upsilon_1 = 2{,}1 \ м/с; \qquad \upsilon_2 = \omega \frac{l}{2}, \quad \upsilon_2 = 1{,}05 \ м/с.$$

5.13. ***На ідеально гладкій горизонтальній поверхні лежить стрижень довжиною*** $l = 0{,}5\,м$ ***і масою*** $m = 34\,г$***. В одну з точок стрижня вдаряє кулька масою*** $m_0 = 17\,г$***, яка рухається по поверхні перпендикулярно до стрижня (рис.5.8). Вважаючи удар абсолютно пружним, визначити на якій віддалі від середини стрижня повинен відбутися удар, щоб кулька передала стрижню всю свою кінетичну енергію?***

Дано:

$l = 0{,}5 \ м$

$m = 34 \ г = 0{,}034 \ кг$

$m = 17 \ г = 0{,}017 \ кг$

$I = \frac{1}{12} m l^2$

$x = ?$

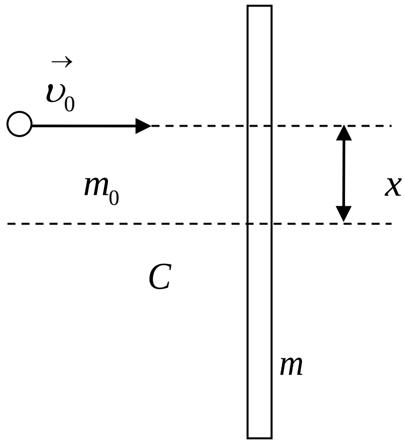


Рис.5.8

Розв'язування

При взаємодії кульки із стрижнем виконуються три закони збереження: закон збереження імпульсу системи «кулька-стрижень», закон збереження механічної енергії та закон збереження моменту імпульсу системи відносно осі, що проходить через центр мас стрижня C.

Відповідні рівняння із врахуванням того, що кулька після удару зупинилась, мають вигляд: $m_0 \upsilon_0 = m \upsilon_c$, (1)

де υ_c - швидкість центра мас стрижня відразу після удару;

$$\frac{m_0 \upsilon_0^2}{2} = \frac{m \upsilon_c^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2}, \qquad (2)$$

де J - момент інерції стрижня, а ω - його кутова швидкість;

$$m_0 \upsilon_0 x = J \omega, \qquad (3)$$

де x - віддаль від центра мас до точки удару кульки.

З рівняння (1) отримаємо

$$\upsilon_c = \frac{m_0 \upsilon_0}{m}. \qquad (4)$$

Підставивши (4) в (3) та врахувавши, що $J=\frac{1}{12}ml^2$, отримаємо

$$\omega=\frac{2\upsilon_0}{l}\sqrt{\frac{3m_0}{m}\left(1-\frac{m_0}{m}\right)}. \qquad (5)$$

На основі (5) та (3) знайдемо

$$x=\frac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{m}{m_0}-1}, \quad x=0{,}14\ м.$$

5.14. ***Куля масою $m=1кг$ котиться без ковзання, вдаряється об стіну і відскакує від неї. Швидкість кулі до удару в стіну $\upsilon_1=10 см/с$, після удару $\upsilon_2=8 см/с$. Знайти кількість теплоти, що виділилась при ударі об стіну***.

Розв'язування

Дано:
$m=1\ кг$
$\upsilon_1=10\ см/с=0{,}1\ м/с$
$\upsilon_2=8\ см/с=0{,}08\ м/с$
$Q=?$

Вважаємо, що рух кулі проходить в горизонтальній площині. Кількість теплоти Q, яка виділиться при ударі кулі об стіну повинна дорівнювати зменшенню кінетичної енергії кулі

$$Q=E_{K_1}-E_{K_2},$$

де E_{K_1} та E_{K_2} - кінетична енергія кулі до та після удару відповідно.

Кінетична енергія кулі до та після удару складається з кінетичної енергії поступального та обертального рухів

$$E_{K_1}=\frac{m\upsilon_1^2}{2}+\frac{J\omega_1^2}{2}; \qquad (1)$$

$$E_{K_2}=\frac{m\upsilon_2^2}{2}+\frac{J\omega_2^2}{2}, \qquad (2)$$

де $J=\frac{2}{5}mR^2$ - момент інерції кулі, $\omega_1=\frac{\upsilon_1}{R}$ та $\omega_2=\frac{\upsilon_2}{R}$ - кутова швидкість кулі до та після удару.

Перетворимо вирази $\frac{J\omega_1^2}{2}$ та $\frac{J\omega_2^2}{2}$:

$$\frac{J\omega_1^2}{2}=\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{\upsilon_1^2}{2R^2}=\frac{m\upsilon_1^2}{5}; \quad \frac{J\omega_2^2}{2}=\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{\upsilon_2^2}{2R^2}=\frac{m\upsilon_2^2}{5}. \qquad (3)$$

Перепишемо рівняння (1) та (2) із врахуванням (3)

$$E_{K_1} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_1^2}{5} = \frac{7}{10} m\upsilon_1^2; \quad E_{K_2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{5} = \frac{7}{10} m\upsilon_2^2.$$

Обчислимо теплоту Q, яка виділилась при ударі кулі об стіну:

$$Q = E_{K_1} - E_{K_2} = \frac{7}{10} m\upsilon_1^2 - \frac{7}{10} m\upsilon_2^2 = \frac{7}{10} m\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right); \quad Q = 2{,}5 \text{ мДж.}$$

5.15. ***Суцільний маховик масою $m = 20\,кг$ і радіусом $R = 120\,мм$ обертається, здійснюючи 600 об/хв. З якою силою необхідно притиснути до нього гальмівну колодку, щоб він зупинився через $t = 3\,с$ після початку гальмування, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}1$?***

Дано:	**Розв'язування**
$m = 20\ кг$ $R = 120\,\text{мм} = 0{,}12\,\text{м}$ $n = 600\ об/хв = 10\ об/с$ $t = 3\ с$ $\mu = 0{,}1$ ——— $F_{тиску} = ?$	Маховик, що обертається, володіє кінетичною енергією $E_K = \frac{J\omega^2}{2}$, де $J = \frac{mR^2}{2}$ - момент інерції маховика, який можна вважати диском. Тоді: $$E_K = \frac{mR^4\omega^2}{4}. \qquad (1)$$

Зменшення кінетичної енергії маховика до нуля здійснюється за рахунок сил тертя між гальмівною колодкою та маховиком: $E_K = A_{тертя}$

$$A_{тертя} = \mu F_T l, \qquad (2)$$

де l - шлях, який пройдуть точки ободу маховика від початку гальмування до повної зупинки, причому

$$l = \upsilon t, \qquad (3)$$

де υ - лінійна швидкість точок ободу маховика:

$$\upsilon = \omega R. \qquad (4)$$

На основі (2), (3) та (4) отримаємо

$$A_T = \mu F_T \omega R t. \qquad (5)$$

На основі (1) та (5) отримаємо:

$$\frac{mR^2\omega^2}{4} = \mu F_{Tt}\omega R t.$$

Враховуючи, що $\omega = 2\pi n$ отримаємо

$$F_T = \frac{\pi n m R}{\mu t}, \quad F_T = 251{,}33\ H.$$

5.16. ***Людина, масою $m_1 = 60\,кг$, знаходиться на нерухомій платформі масою $m = 100\,кг$ (рис.5.9). Яку кількість обертів n буде здійснювати платформа, якщо людина буде рухатись по колу радіусом $r = 5\,м$ навколо осі обертання? Швидкість руху людини відносно платформи $\upsilon = 4\,км/год$. Радіус платформи $R = 10\ м$. Вважати платформу однорідним диском, а людину – точковою масою.***

Дано:

$m_1 = 60\,кг$

$m = 100\,кг$

$r = 5\,м$

$\upsilon = 4\,км/год$

$R = 10\ м$

$n = ?$

Розв'язування

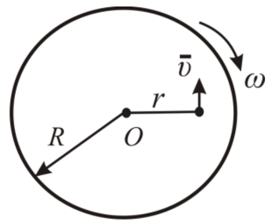


Рис.5.9

В початковий момент часу платформа з людиною перебувала в стані спокою і момент імпульсу цієї системи дорівнював нулю. Коли людина починає рухатись по платформі, платформа буде обертатись в протилежному від руху людини напрямку (рис.1.9). Отже, якщо відстань людини до осі платформи r, то в місці знаходження її швидкість на платформі становитиме:

$$u = \omega r\,. \tag{1}$$

Таким чином, якщо людина рухається відносно платформи зі швидкістю υ, то відносно Землі вона буде рухатись зі швидкістю

$$\upsilon_1 = \upsilon - u = \upsilon - \omega r\,. \tag{2}$$

Момент імпульсу людини відносно осі платформи

$$L_1 = m_1 \upsilon_1 r = m_1 \left(\upsilon - \omega r\right) r\,. \tag{3}$$

Момент імпульсу платформи відносно її осі:

$$L = -J\omega\,, \tag{4}$$

де J – момент інерції платформи.

Оскільки платформа це однорідний диск, то її момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас

$$J = \frac{mR^2}{2}. \tag{5}$$

Із закону збереження моменту імпульсу для системи платформа-людина маємо:

$$L_1 + L = 0 = m_1\left(\upsilon - \omega \cdot r\right) r - 1/2 m R^2 \omega\,. \tag{6}$$

Визначаємо з рівняння (6) кутову швидкість обертання платформи

$$\omega = \frac{2m_1\upsilon r}{2m_1r^2 + mR^2}\,. \qquad (7)$$

Число обертів платформи визначаємо із співвідношення:

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2m_1\upsilon r}{2m_1r^2 + mR^2} \text{ або } n = \frac{m_1\upsilon r}{\pi\left(2m_1r^2 + mR^2\right)}, \quad n \approx 0,01\,об/с\,.$$

5.17. ***Горизонтальна платформа масою*** $m = 80\,кг$ ***та радіусом*** $R = 1\,м$ ***обертається з частотою*** $n_1 = 20\,об/хв$***. В центрі платформи стоїть людини тримаючи в розставлених руках вантажі. З якою частотою*** n_2 ***буде обертатись платформа якщо людина, опустивши руки, зменшить свій момент інерції від*** $J_1 = 2{,}9\,кг\cdot м^2$ ***до*** $J_2 = 0{,}98\,кг\cdot м^2$ ***? Платформу вважати однорідним диском.***

Дано:
$m = 80\,кг$
$R = 1\,м$
$n_1 = 20\,об/хв$
$J_1 = 2{,}9\,кг\cdot м^2$
$J_2 = 0{,}98\,кг\cdot м^2$

$n_2 = ?$

Розв'язування

В початковому положенні момент інерції платформи з людиною складається з моменту інерції платформи і моменту інерції людини:

$$J = J_0 + J_1\,, \qquad (1)$$

а коли людина опустила руки

$$J' = J_0 + J_2\,, \qquad (2)$$

де $J_0 = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент інерції платформи.

Згідно закону збереження моменту імпульсу, вважаючи систему платформа-людина замкненою, можна записати:

$$J\omega_1 = J'\omega_2\,, \qquad (3)$$

де

$$\omega_1 = 2\pi n_1\,,\ \omega_2 = 2\pi n_2\,.$$

Тоді

$$J2\pi n_1 = J'2\pi n_2$$

Звідси

$$n_2 = \frac{Jn_1}{J'}\,. \qquad (4)$$

Розв'язуючи рівняння (1) – (4), отримаємо:

$$n_2 = \frac{\left(mR^2/2 + J_1\right)n_1}{mR^2/2 + J_2}, \quad n_2 = 0{,}21\,об/с$$

5.18. ***Горизонтальна платформа масою M і радіусом R обертається з кутовою швидкістю ω. На краю платформи стоїть людина масою m. З якою кутовою швидкістю ω_1 обертатиметься платформа, якщо людина перейде з краю платформи до її центра? Людину можна вважати матеріальною точкою, платформу — однорідним диском.***

Дано:
M, R, m, ω

ω_1 = ?

Розв’язування

Початкова сума моментів імпульсів людини та платформи дорівнює

$$L = \frac{MR^2}{2}\omega + mR^2\omega.$$

Якщо людина перейде до центра платформи, то момент імпульсу дорівнюватиме

$$L_1 = \frac{MR^2}{2}\omega_1.$$

За законом збереження момента імпульсу

$$\frac{MR^2}{2}\omega + mR^2\omega = \frac{MR^2}{2}\omega_1.$$

Звідки ,

$$\omega_1 = \frac{M + 2m}{M}\omega.$$

Задачі для самостійного розв’язування

5.1. Сила, прикладена до точки, збільшилась у 2 рази, а плече сили зменшилось у 4 рази. Як зміниться модуль момента сили?($\frac{M_1}{M_2} = 2;$)

5.2. Радіус першого диска ($J = \frac{1}{2}mR^2$) у k разів більший за радіус другого. Товщина дисків однакова. До них прикладено сталий момент сили. Як відносяться кутові прискорення дисків?($\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = k^4;$)

5.3. Кількість обертів на хвилину диска збільшилась у k разів. Як зміниться кінетична енергія диска з нерухомою віссю обертання? (**збільшиться у k^2 разів**)

5.4. Кут повороту диска змінюється за законом $\varphi = 8 + 5t + 2t^2$. Маса диска m, радіус R ($J = \frac{1}{2}mR^2$). Знайти момент сили обертання.($M = \frac{1}{2}mR^2(5 + 4t)$.)

5.5. Як зміниться кутове прискорення твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі OZ, якщо головний момент відносно цієї осі всіх зовнішніх сил збільшився в 2 рази, а момент інерції тіла відносно осі OZ зменшився в 2 рази**?** **(збільшиться в 4 рази).**

5.6. Однорідний суцільний диск радіусом R = 1 *м* має масу m = 2 *кг*. Визначити момент інерції J диска відносно осі, що проходить через його край і перпендикулярна до площини диска. **(3 *кг·м*²)**

5.7. Радіус Землі $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ *м*, а її середня густина $\rho = 5{,}5 \cdot 10^3$ *кг* / *м*³. Знайти момент інерції J та момент імпульсу L Землі відносно власної осі обертання. **(9,7·10³⁷ *кг·м*²; 7·10³³ *кг·м*²/*с*)**

5.8. Дано однорідну суцільну кулю масою m = 2 *кг* і радіусом R = 5 *см*. Визначити момент інерції J кулі відносно осі, що дотична до кулі. **(0,007 *кг·м*²)**

5.9. Однорідний тонкий стрижень має масу m = 3 *кг* і довжину l = 2 *м*. Обчислити момент інерцій J_c стрижня відносно осі, що проходить через середину стрижня перпендикулярно до нього і момент інерції J відносно осі, що проходить через кінець стрижня. **(1 *кг·м*²; 4 *кг·м*²)**

5.10. Однорідний стрижень довжиною $l = 1$ *м* і масою $m = 0{,}5$ *кг* обертається у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, що проходить через середину стрижня. З яким кутовим прискоренням ε обертається стрижень, якщо на нього діє момент сил $M = 98{,}1 \cdot 10^{-3}$ *Н · м*? **(2,35 *рад/с*²)**

5.11. Визначити момент інерції однорідного стрижня довжиною l = 50 *см* і масою m = 360 *г* відносно осі, що є перпендикулярною до стрижня і проходить через: а) кінець стрижня; б) точку, яка лежить на відстані l/6 від кінця стрижня. **($3 \cdot 10^{-2}$ *кг·м*² ; $1{,}75 \cdot 10^{-2}$ *кг·м*²)**

5.12. Обруч та суцільний диск однакової маси котяться без проковзування з однаковою швидкістю. Кінетична енергія диска $E_к^{д}$ = 12 *Дж*. Визначити кінетичну енергію $E_к^{об}$ обруча. **(16 *Дж*)**

5.13. Обруч, суцільний диск і куля скочуються без проковзування з похилої площини з кутом нахилу α = 30⁰. Початкові швидкості тіл дорівнюють нулю. Визначити лінійні прискорення центрів мас цих тіл. **($a_{об}$ =2,45 *м/с*²; $a_д$ = 3,27 *м/с*²; $a_к$= 3,50 *м/с*²)**

5.14. По горизонтальному столі може котитися без проковзування суцільний циліндр масою m = 1,1 *кг*, на який намотана нитка. До вільного кінця нитки, який пере кинутий через легкий блок, прикріплений вантаж такої ж маси.

Визначити прискорення вантажу a і силу тертя F_T між циліндром і столом. **(7,1 *м/с*^{2}; 0,98 *Н*)**

5.15. Однорідний диск радіусом R = 0,2 *м* і масою m = 5 *кг* обертається навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до його площини. Залежність кутової швидкості обертання диска від часу подано рівнянням $\omega = A + Bt$, B = 8 *рад*/с^2. Визначити обертовий момент сил, прикладених до диска **(0,8 Н·м)** .

5.16. Залізна куля радіусом R = 0,1 *м* обертається з частотою n = 3 *об/с* навколо осі, що проходить через її центр. Яку роботу A необхідно виконати, щоб збільшити кутову швидкість кулі вдвічі? Густина заліза ρ = 7870 *кг/м*^{3}. **(70,17 *Дж*)**

5.17. Вентилятора обертається з частотою $n = 900\,об/хв$. Після виключення, вентилятор, обертаючись рівносповільнено, зробив до зупинки $N = 75$ обертів. Робота сил гальмування $A = 44{,}4\,Дж$. Знайти момент інерції J вентилятора та момент сил гальмування M_T . **(0,01 *кг·м*^{2} ; 94·10^{-3} *Н·м*)**

5.18. На платформі у вигляді диска сидить людина і тримає у витягнутих руках гирі масою по m = 5 *кг* кожна. Відстань від кожної гирі до осі обертання платформи l_1 = 0,6 *м*. Платформа обертається з частотою n_1 = 2 *об/с* відносно осі, що проходить через її центр маси і центр маси людини. Сумарний момент інерції людини і платформи відносно осі обертання J_0 = 2,1 *кг м*^{2}. Людина стискає руки так, що відстань від кожної гирі до осі стає l_2 = 0,3 *м*. Якою буде частота n_2 обертання платформи і яку роботу A виконає людина? **(3,8 *об/с*; 404,6 *Дж*)**

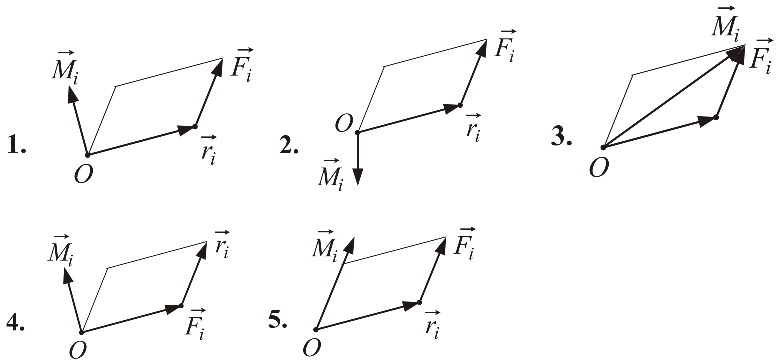
5.19. Платформа у вигляді диска радіусом R = 2,0 *м* і масою m_1 = 160 *кг* обертається навколо вертикальної осі, що проходить через її центр, з кутовою швидкістю ω_1 = 1,5 *рад/с*. У центрі платформи стоїть людина масою m_2 = 70 *кг.* Людина переходить на край платформи. Якою буде лінійна швидкість υ людини відносно землі? **(1,6 *м/с*)**

5.20. Горизонтальна платформа масою $m = 100\,кг$ обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи з частотою $n_1 = 10\,об/хв$. Людина, масою $m = 60\,кг$, стоїть при цьому на краю платформи. З якою частотою n_2 почне обертатись платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центру? Вважати платформу однорідним диском, а людину – точковою масою. **(22 *об/хв*)**

5.21. Два гумових диски з жорсткими поверхнями обертаються в однакових напрямках навколо осей, що лежать на одній вертикалі, причому площини дисків паралельні. Перший диск має момент інерції J_1 = 2 *кг·м*^{2} і кутову швидкість ω_1 = 3 *рад/с*, другий – J_2 = 0,5 *кг·м*^{2} і ω_2 = 4 *рад/с*. Верхній диск падає на нижній і з’єднується з ним. Визначити кутову швидкість ω дисків і зміну їх кінетичної енергії $\Delta E_к$. **(3,2 *рад/с*; 0,2 *Дж*)**

Тести

5.1. На якому рисунку напрямок вектора $\vec{M}_i$ вказано правильно?



А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 5.

5.2. Який вираз визначає модуль моменту сили?

А) $M_i = F_i r_i \cos\alpha_i$; **Б)** $M_i = F_i r_i \sin\alpha_i$;

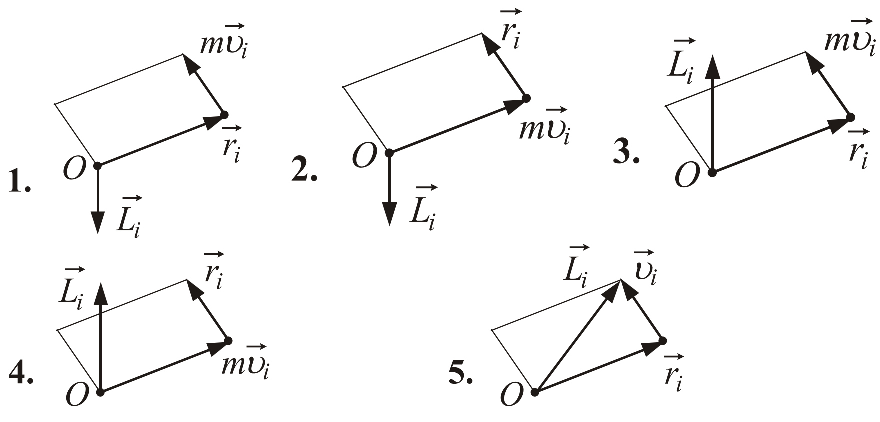
В) $M_i = m_i \upsilon_i \cos\alpha_i$; **Г)** $M_i = m_i \upsilon_i \sin\alpha_i$; **Д)** $M_i = m_i \omega_i \cos\alpha_i$.

5.3. Який вираз визначає момент імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки *O*?

А) $\vec{L}_i = [m\vec{\upsilon}_i, \vec{r}_i]$; **Б)** $\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i,]$; **В)** $\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i]$;

Г) $\vec{L}_i = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}_i]$; **Д)** $\vec{L}_i = [\vec{r}, \vec{F}_i]$.

5.4. На якому рисунку напрямок вектора моменту імпульсу $\vec{L}_i$ вказано правильно?



А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 5.

5.5. Моментом інерції тіла відносно осі *OZ* називається:

А) сума добутків мас усіх матеріальних точок тіла на квадрати їх відстаней до осі *OZ*;

Б) добуток маси тіла на квадрати їх відстаней до осі *OZ*;

В) сума добутків мас усіх матеріальних точок тіла на їх відстань до осі *OZ*;

Г) сума добутків мас усіх матеріальних точок тіла на квадрати їх швидкостей;

Д) одній другій суми добутків мас усіх матеріальних точок тіла на квадрати їх відстаней до осі *OZ*.

5.6. Який з виразів визначає момент імпульсу тіла відносно осі?

А) $L_z = J_z \upsilon;$ **Б)** $L_z = \frac{J_z}{\omega_z};$ **В)** $L_z = m\upsilon r^2;$

Г) $L_z = J_z \omega_z;$ **Д)** $L_z = \frac{\omega_z}{J_z}.$

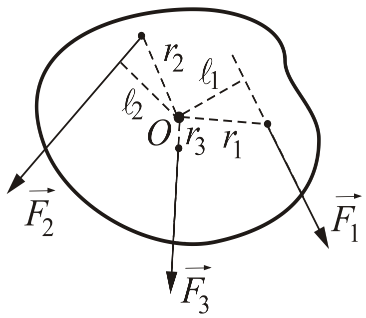
5.7. Момент інерції тіла:

А) є мірою інертності тіла під час обертального руху;
Б) є мірою інертності тіла під час поступального руху;
В) є мірою інертності тіла під час коливального руху;
Г) кількість речовини в тілі;
Д) є мірою маси тіла.

5.8. Момент сили, прикладеної на відстані радіус-вектора до тіла, яке може обертатися навколо нерухомої осі, залежить від:

А) сили, радіус-вектора та кута між ними;
Б) маси тіла та швидкості його руху;
В) сили і маси тіла;
Г) радіус-вектора точки прикладання сили і маси тіла;
Д) моменту інерції тіла та його кутової швидкості.

5.9. До тіла, яке може обертатись відносно точки *O*, прикладено три сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ або $\vec{F}_3$. Виберіть правильне співвідношення модулів моментів цих сил.



А) $M_1 = F_1 r_1$, $M_2 = F_2 r_2$, $M_3 = F_3 r_3$;
Б) $M_1 = F_1 \ell_1$, $M_2 = F_2 \ell_2$, $M_3 = F_3 r_3$;
В) $M_1 = F_1 \ell_1$, $M_2 = F_2 \ell_2$, $M_3 = 0$;
Г) $M_1 = F_1 r_1$, $M_2 = F_2 r_2$, $M_3 = 0$;
Д) $M_1 = F_1 r_1$, $M_2 = F_2 \ell_2$, $M_3 = F_3 r_3$.

5.10. Яке рівняння визначає закон зміни моменту імпульсу тіла, що обертається навколо нерухомої точки?

А) $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M};$ **Б)** $\frac{J\vec{\omega}}{t} = \vec{M};$ **В)** $\Delta(J\vec{\omega}) = \vec{M}\Delta t;$

Г) $\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{F}, \vec{r}];$ **Д)** $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}.$

5.11. Яке рівняння визначає динаміку тіла, що обертається навколо нерухомої осі *OZ*?

А) $\frac{J_z}{\varepsilon_z} = M_z;$ **Б)** $J_z \varepsilon_z = M_z;$ **В)** $J_z \omega_z = M_z;$ **Г)** $J\varepsilon_z = M_z t;$ **Д)** $\frac{J_z}{\varepsilon_z} = M_z t.$

5.12. Яка з формул визначає кінетичну енергію тіла, що рухається поступально і обертається навколо осі, яка проходить через його центр інерції?

А) $E_к = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$; **Б)** $E_к = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{J_C\omega^2}{2}$; **В)** $E_к = \dfrac{J_C\omega^2}{2}$;

Г) $E_к = \dfrac{m\upsilon^2}{2} - \dfrac{J_C\omega^2}{2}$; **Д)** $E_к = \dfrac{J_C\omega^2}{2} - \dfrac{m\upsilon^2}{2}$.

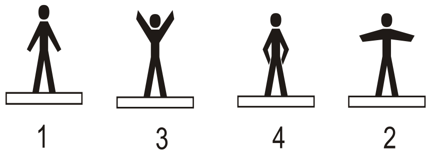
5.13. Яка з формул виражає закон збереження моменту імпульсу в найбільш загальному вигляді?

А) $J_1\omega_1 = J_2\omega_2^2$; **Б)** $J = \sum\limits_{i=1}^{n} J_i\omega_i$;

В) $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2'$; **Г)** $\sum\limits_{i=1}^{n} J_i\omega_i = const$;

Д) $\vec{L} = \dfrac{d(J\omega)}{dt}$.

5.14. Людина стоїть на лаві, яка обертається. В якому випадку кутова швидкість буде найменшою?



А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4;
Д) у всіх випадках, крім 4.

№ завдання	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	5.10	5.11	5.12	5.13	5.14
Варіант відповіді	**А**	**Б**	**В**	**В**	**А**	**Г**	**А**	**А**	**В**	**А**	**Б**	**Б**	**Г**	**Б**