3. РОБОТА. ПОТУЖНІСТЬ. ЕНЕРГІЯ.

Основні формули

1. Робота, яка виконується сталою силою

$$A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha,$$

де α – кут між напрямами векторів сили $\vec{F}$ і переміщення $\Delta\vec{r}$.

2. Робота змінної сили

$$A = \int_L F dS\cos\alpha = \int_L F_S dS,$$

де F_S – проекція сили $\vec{F}$ на напрям елементарного переміщення вздовж траєкторії руху.

3. Середня потужність за інтервал часу Δt

$$\langle N\rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

4. Миттєва потужність

$$N = \frac{dA}{dt} = F\upsilon\cos\alpha.$$

де α – кут між напрямами векторів сили $\vec{F}$ і швидкості $\vec{\upsilon}$.

5. Кінетична енергія матеріальної точки або поступального руху тіла

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

6. Зміна кінетичної енергії

$$A = \Delta E_k = E_{k1} - E_{k2}.$$

7. Потенціальна енергія тіла в полі земного тяжіння

$$E_n = mgh.$$

8. Потенціальна енергія тіла і сила, що діє на тіло в даній точці поля:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_n \text{ або } \vec{F} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial E_n}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial E_n}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial E_n}{\partial z}\right),$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори вздовж осей *OX, OY, OZ.*

9. Потенціальна енергія тіла, на яке діють сили пружності $\vec{F}_{np} = -k\vec{x}$,

$$E_n = \frac{kx^2}{2},$$

де $\vec{x}$ – вектор зміщення тіла відносно положення рівноваги.

10. Закон збереження механічної енергії консервативної системи

$$E_k + E_n = E = \text{const}.$$

Методичні вказівки і поради

При розв'язуванні задач на визначення роботи слід вияснити роботу якої сили необхідно визначити; чи ця сила є постійна чи змінна. Якщо сила стала, вона може бути результатом дії декількох сил (рівнодійною) або окремої сили. Далі слід нарисувати рисунок та вказати на ньому усі сили, котрі діють на тіло (систему). Важливо також визначити кут α між напрямком вектора сили, роботу котрої нам потрібно визначити, та напрямком переміщення (швидкості). Якщо сила за умовою задачі не задана, то її слід знайти використовуючи запис другого закону Ньютона. Використовуючи формули кінематики, знаходимо також і переміщення тіла.

Також слід пам'ятати, що робота сил, котрі діють перпендикуляно до напрямку руху в кожній точці траєкторії, рівна нулю. Оскільки робота $A = FS\cos\alpha$, а $\cos 90^0 = 0$, то і $A = 0$. Так, наприклад не виконує роботи доцентрова сила, прикладена до тіла, яке обертається, і т.п.

Якщо в задачі слід визначити роботу змінної сили, то проводиться інтегрування елементарної роботи вздовж усього шляху. У цьому випадку визначають яким чином робота залежить від шляху та встановлюються межі інтегрування. Далі проводиться математичне обчислення первісної від функції залежності сили від шляху.

Можна виділити окремий вид задач, в котрих необхідно обчислити роботу такого переміщення системи, при якому окремі її частини переміщуються на різні відстані. Прикладом таких задач може бути відкачування води з певного резервуару або піднімання ролокасети на вікні. У такому випадку слід розбити тіло (систему) на нескінченно малі елементи, обчислити роботу для кожного елементу окремо, а потім підсумувати (тобто обчислити інтеграл) по всіх елементах. Однак, у більшості випадків, з якими доводиться зустрічатися в курсі загальної фізики, має місце пряма пропорціональна залежність роботи від пройденого елементом тіла шляху. Завдяки цьому замість обчислення інтеграла можна розглядати лише одну точку тіла – його центр маси, де маса дорівнює масі всього тіла. Найважливішим прикладом такого роду задач є переміщення однорідного тіла або певного об'єму в полі сил тяжіння. Тоді шукану роботу можна подати як $E_n = mgh$ добуток ваги цього тіла на переміщення центра маси.

При розв'язуванні задач на визначення потужності, використаємо знання з попереднього розділу «Кінематика». Потужність, в залежності від того, як рухається тіло, визначається формулами $N = \frac{dA}{dt} = F\upsilon$. Для практичних розрахунків, слід розрізняти два випадки. Якщо за умовою задачі слід визначити середнє значення потужності, то у формулі береться середнє значення υ. Якщо ж в задачі слід визначити потужність в деякий момент часу, то у формулі береться миттєве значення υ. У цих формулах лінійна швидкість υ знаходиться як похідна від шляху. До миттєвого значення потужності відносять максимальне та мінімальне її значення.

Поняття потужності вводять для оцінки швидкості виконання роботи, котру виконує або може виконати та чи інша машина (механізм). Тому сила, котра виконує роботу, це сила тяги $F_{\text{тяги}}$, яка напрямлена в сторону переміщення тіла.

В задачах на знаходження енергії, спершу визначають чи система замкнута чи ні. Далі застосовується відповідний запис закону збереження енергії. Якщо при русі тіла присутні сили тертя, то ця система не замкнута, тоді зміна повної енергії E в кінцевому та початковому станах буде визначати роботу сил тертя $E_2 - E_1 = A$. Якщо в системі діють лише консервативні сили, то повна енергія залишається незмінною, тобто $E = E_k + E_n = \text{const}$. Повна енергія визначається сумою кінетичної та потенціальної енергії. Також слід пам'ятати, що робота в замкнутих системах виконується за рахунок зміни кінетичної енергії $A = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$ з однієї сторони, а з іншої робота виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії $A = E_{n1} - E_{n2} = -\Delta E_n$.

Приклади розв'язування задач

3.1. ***Тіло масою $m = 100\,г$ кинуто під кутом до горизонту з висоти $h = 10\,м$ над поверхнею Землі з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 20\,м/с$. У момент падіння на Землю швидкість була $\upsilon = 25\,м/с$. Знайти роботу, витрачену на подолання опору повітря.***

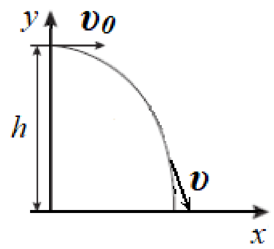


Рис.3.1

Дано:

$m = 100\,г = 0{,}1\,кг$

$h = 10\,м$

$\upsilon_0 = 20\,м/с$

$\upsilon = 25\,м/с$

$A - ?$

Розв'язування

Робота в дисипативних системах виконується за рахунок зміни повної енергії:

$$A = E_2 - E_1, \qquad (1)$$

де E_1 та E_2 відповідно значення повної енергії в початковий момент та кінцевий момент руху. Повна енергія визначається сумою потенціальної та кінетичної. В початковий момент тіло розпочинає рух з висоти h та з початковою швидкістю υ_0, тому:

$$E_1 = mgh + \frac{m\upsilon_0^2}{2}. \qquad (2)$$

В момент падіння тіла на Землю повна енергія буде складатись лише з кінетичної енергії:

$$E_2 = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (3)$$

Підставимо (2) та (3) в рівність (1) отримаємо:

$$A = \frac{m\upsilon^2}{2} - \left(mgh + \frac{m\upsilon_0^2}{2}\right) = \frac{m\left(\upsilon^2 - \upsilon_0^2 - 2gh\right)}{2}. \qquad (4)$$

Знайдемо числове значення роботи:

$$A = \frac{m\left(\upsilon^2 - \upsilon_0^2 - 2gh\right)}{2} = \frac{0{,}1 \cdot \left(25^2 - 20^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 10\right)}{2} = 1{,}45\,Дж.$$

3.2. ***Тіло зсковзує з крижаної гори висотою h і зупиняються на крижаному полі на відстані S (у горизонтальному напрямі) від вершини гори (рис. 3.2). Визначити коефіцієнт тертя μ.***

Дано:

h
S
$\mu - ?$

Розв'язування

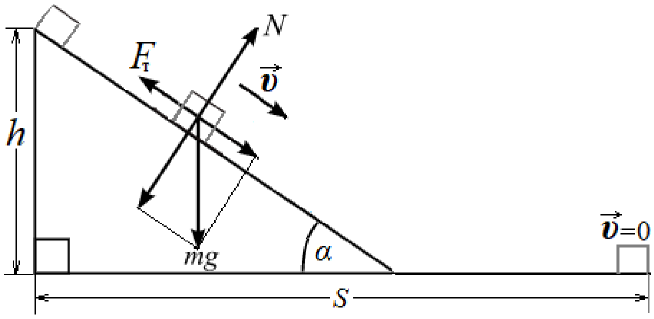


Рис. 3.2.

Зміна повної механічної енергії між початковим положення тіла на вершині гори $E_1 = mgh$ та кінцевим положенням наприкінці шляху біля підніжжя гори $E_2 = 0$ буде витрачена на роботу A проти сил тертя на всьому шляху.

$$A = \Delta E = E_2 - E_1 = -mgh. \tag{1}$$

Робота проти сил тертя від'ємна (сила тертя напрямлена проти напрямку руху тіла). З врахуванням цього рівність (1) перепишеться як

$$A = mgh. \tag{2}$$

Значення сили тертя на схилі гори і біля підніжжя буде різною, тому розпишемо роботу як $A = A_1 + A_2$, де $A_1 = F_{т1} l_1$ – робота сил тертя під час руху тіла на схилі гори довжиною l_1, а $A_2 = F_{т2} l_2$ – робота сил тертя на горизонтальній прямій біля підніжжя гори довжиною l_2.

Знайдемо значення сили тертя $F_{т1}$ та довжини шляху l_1 з рис. 3.2:

$$F_{т1} = \mu N = \mu mg \cos\alpha; \qquad l_1 = \frac{h}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Тоді робота на похилій ділянці рівна:

$$A_1 = \mu mgh\, ctg\alpha. \tag{4}$$

Знайдемо значення сили тертя F_2 та довжини шляху l_2 з рис. 3.2

$$F_{т2} = \mu mg; \qquad l_2 = S - h\, ctg\alpha. \tag{5}$$

Тоді робота на похилій ділянці рівна:

$$A_2 = \mu mg(S - h\, ctg\alpha). \tag{6}$$

Підставимо (4) та (6) в рівність (2):

$$\mu mgh\, ctg\alpha + \mu mg(S - h\, ctg\alpha) = mgh.$$

$$\mu(h\, ctg\alpha + S - h\, ctg\alpha) = h.$$

Звідси

$$\mu = \frac{h}{S}. \tag{7}$$

3.3. ***Автомобіль рухається під дією сили тяги $F_{тяги}$, яка змінюється залежно від пройденого шляху за законом $F = B + CS + DS^2$, де $B = 300\,H$, $C = 50\,H/м$, $D = 3\,H/м^2$. Визначити роботу сили на ділянці шляху від $S_1 = 3\,м$ до $S_2 = 50\,м$.***

Дано:
$F = B + CS + DS^2$
$B = 300\,H$
$C = 50\,H/м$
$D = 3\,H/м^2$
$S_1 = 3\,м$
$S_2 = 50\,м$
$A - ?$

Розв'язування

Робота, яка виконується змінною силою

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F dS. \qquad (1)$$

Підставляємо в (1) вираз для сили та інтегруємо:

$$A = \int_{S_1}^{S_2} (B + CS + DS^2) dS = B(S_2 - S_1) + \frac{C}{2}(S_2^2 - S_1^2) + \frac{D}{3}(S_2^3 - S_1^3). \qquad (2)$$

Після підстановки числових даних знаходимо:

$$A = [300(50-3) + 25(50^2 - 3^2) + (50^3 - 3^3)]м = 201\,кДж.$$

3.4. ***Швидкість поїзда, маса якого $m = 10^5\,кг$, змінюється за законом $\upsilon = B + Dt^2$, де $B = 6\,м/с$, $D = 0{,}2\,м/с^3$. Визначити роботу сили тяги за проміжок часу від $t_1 = 5\,с$ до $t_2 = 30\,с$.***

Дано:
$m = 10^5\,кг$
$\upsilon = B + Dt^2$
$B = 6\,м/с$
$D = 0{,}2\,м/с^3$
$t_1 = 5\,с$
$t_2 = 30\,с$
$A - ?$

Розв'язування

Робота, яка виконується змінною силою

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F dS. \qquad (1)$$

Сила тяги за другим законом Ньютона

$$F_{тяги} = ma.$$

Прискорення $a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2Dt$, а елементарне переміщення

$$dS = \upsilon dt = (B + Dt^2)dt.$$

Тоді $A = 2mD\int_{t_1}^{t_2} t(B + Dt^2)dt = 2mD[\frac{B}{2}(t_2^2 - t_1^2) + \frac{D}{4}(t_2^4 - t_1^4)].$

Проведемо числовий розрахунок:

$$A = 0{,}4\cdot 10^5 \cdot [3\cdot(30^2 - 5^2) + 0{,}04\cdot(30^4 - 5^4)] = 943{,}75 МДж.$$

3.5. ***Вітрильник масою $m = 2\,000\,кг$ рухається під дією сталої сили прямолінійно, причому залежність пройденого шляху S від часу t визнача-ється виразом $S = Bt + Ct^2$, де $B = 1\,м/с$, $C = 0{,}05\,м/с^2$. Визначити роботу A сили вітру за проміжок часу від $t = 0$ до $t_2 = 30\,с$.***

Дано:
$m = 2\,000\,кг$
$S = Bt + Ct^2$
$B = 1\,м/с$
$C = 0{,}05\,м/с^2$
$t = 0$
$t_2 = 30\,с$

$A - ?$

Розв'язування

Робота А сили вітру

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F dS. \tag{1}$$

за другим законом Ньютона

$$F = ma = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d^2S}{dt^2}, \tag{2}$$

$$\upsilon = B + 2Ct, \quad a = 2C.$$

Елементарне переміщення

$$dS = \upsilon dt = (B + 2Ct)dt. \tag{3}$$

Враховуючи вирази (2) і (3), із співвідношення (1) отримуємо:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} m2C(B + 2Ct)dt = 2mC[B(t_2 - t_1) + \frac{2C}{2}(t_2^2 - t_1^2)].$$

Підставляємо числові значення:

$$A = 4000\cdot 0{,}05\cdot[1\cdot 30 + 0{,}05\cdot 30^2] = 150 кДж.$$

3.6. ***Вантаж масою $m = 10$ кг піднімають на висоту $h = 10\,м$, діючи на нього із сталою силою $F = 150\,Н$. Яка робота виконується при цьому? Чому дорівнює потенціальна енергія піднятого вантажу?***

Дано:	Розв'язування
$m = 10$ кг $h = 10\,м$ $F = 150\,Н$	За визначенням робота A, яку виконує сила F рівна: $$A = Fh. \quad (1)$$ Потенціальна енергія піднятого на висоту тіла в полі земного тяжіння рівна: $E_n = mgh$. (2)
$A - ?$ $E_n - ?$ $E_k - ?$	Дану систему можна вважати незамкнутою і тут діють не лише консервативні сили, а і сили дисипації (сили опору повітря). Тому запишемо закон збереження енергії:

$$E_n + E_k = A. \quad (3)$$

Звідси $E_k = A - E_n$ – кінетична енергія, що її набуде вантаж.

Знайдемо числові значення:

$$A = Fh = 150 \cdot 10 = 1500\,Дж = 1{,}5\,кДж;$$

$$E_n = mgh = 10 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = 980\,Дж;$$

$$E_k = A - E_n = 1500 - 980 = 520\,Дж.$$

3.7. ***Швидкість реактивного літака на деякій ділянці траєкторії залежить від пройденого шляху S за законом $\upsilon = B + CS$, де $B = 10\,м/с$, $C = 0{,}03\,с^{-1}$. Маса літака $m = 8 \cdot 10^3\,кг$. В момент часу $t_1 = 10\,с$ швидкість літака $\upsilon_1 = 200\,м/с$. Визначити роботу двигунів за проміжок часу від $t_1 = 10\,с$ до $t_2 = 40\,с$.***

Дано:	Розв'язування
$m = 8 \cdot 10^3\,кг$ $\upsilon = B + CS$ $B = 10\,м/с$ $C = 0{,}03\,с^{-1}$ $\upsilon_1 = 200\,м/с$ $t_1 = 10\,с$ $t_2 = 40\,с$	Роботу двигунів можна обчислити як зміну кінетичної енергії літака: $$A = E_{k2} - E_{k1} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \quad (1)$$ Отже, треба розрахувати швидкість υ_2. Для цього запишемо вираз для прискорення: $$a = \frac{d\upsilon}{dt} = C\frac{dS}{dt} = C\upsilon. \quad (2)$$
$A - ?$	З (2) маємо:

$$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}\frac{d\upsilon}{\upsilon}=C\int_{t_1}^{t_2}dt, \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}=C(t_2-t_1), \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2=\upsilon_1 e^{C(t_2-t_1)}. \qquad (3)$$

Підставляючи вираз для швидкості υ_2 в (1), отримаємо

$$A=\frac{m\upsilon_1^2}{2}\left(e^{C(t_2-t_1)}-1\right). \qquad (4)$$

$$A=4\cdot 10^3\cdot(e^{2\cdot 0,03\cdot 30}-1)=807,9\,Дж.$$

3.8. ***Із залитого підвалу, площа підлоги якого дорівнює*** $S=20\,м^2$***, треба відкачати воду на мостову. Глибина підвалу*** $H=3\,м$***, а глибина води в підвалі*** $h=1\,м$***. Визначити роботу, яку треба виконати, щоб відкачати воду.***

Розв'язування

Дано:
$S=20\,м^2$
$H=3\,м$
$h=1\,м$

$A-?$

Зрозуміло, що різна робота буде виконуватися при викачуванні води з самого дна та при викачуванні води із поверхні водяного покрову. Однак існує пряма пропорціональна залежність роботи від пройденого елементом тіла шляху. В цьому випадку розглянемо переміщення центру мас води.

Цент маси води в підвалі міститься на глибині $H-\frac{h}{2}$ від рівня мостової. Шукана робота дорівнює роботі, яку слід виконати для того, щоб підняти на висоту на висоту $H-\frac{h}{2}$ матеріальну точку з масою m, яка дорівнює масі всього шару води:

$$m=\rho Sh, \qquad (1)$$

де ρ – густина води.

Робота по викачуванні води буде рівна:

$$A=mg\left(H-\frac{h}{2}\right)=\rho Shg\left(H-\frac{h}{2}\right).$$

Знайдемо числове значення:

$$A=\rho Shg\left(H-\frac{h}{2}\right)=10^3\cdot 20\cdot 1\cdot 9,8\left(3-\frac{1}{2}\right)=4,9\cdot 10^5\,Дж=490\,кДж.$$

3.9. ***Віконна шторка масою*** $m = 0{,}8\,\text{кг}$ ***і довжиною*** $l = 1{,}5\,м$ ***накручується на тонкий валик біля верхньої частини вікна. Яка при цьому виконується робота? (Тертям знехтувати).***

Дано:
$m = 0{,}8\,\text{кг}$
$l = 1{,}5\,м$
$A - ?$

Розв'язування

Центр маси шторки піднімається при її скручуванні на висоту $h = \dfrac{l}{2}$. За умовою задачі тертям нехтують, тому система замкнута та робота виконується проти сили тяжіння.

$$A = mg\frac{l}{2}. \tag{1}$$

Отже, $$A = mg\frac{l}{2} = 0{,}8 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1{,}5}{2} = 5{,}88\,Дж.$$

3.10. ***Літак масою*** $m = 3\,\text{т}$ ***для того, щоб піднятись в небо повинен мати швидкість*** $\upsilon = 360\,км/год$ ***та довжину розгону*** $S = 600\,м$***. Яка повинна бути мінімальна потужність двигуна, необхідна для підняття літака в небо? Силу опору руху вважати пропорційною до сили нормального тиску, середній коефіцієнт опору вважати*** $\mu = 0{,}2$***. Рух при розгоні літака вважати рівноприскореним.***

Дано:
$m = 3\,\text{т} = 3 \cdot 10^3\,кг$
$\upsilon = 360\,км/год = 100\,м/с$
$S = 600\,м$
$\mu = 0{,}2$
$N - ?$

Розв'язування

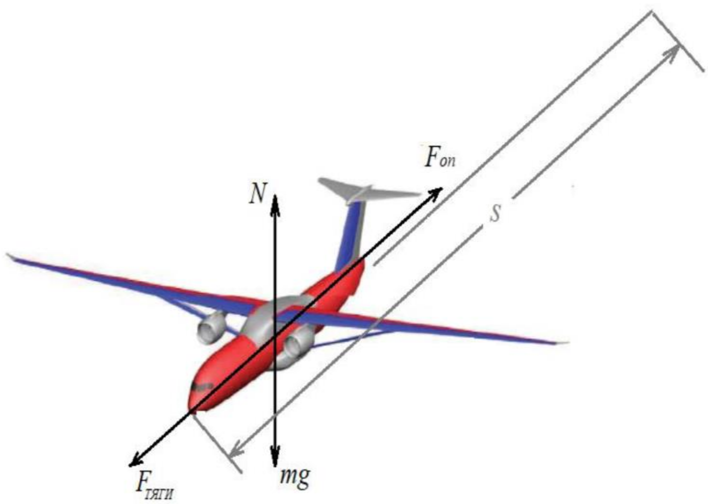


Рис.3.3.

В задачі потрібно знайти миттєве значення потужності мотору літака в момент його відриву від землі під час взльоту. Вона і буде тією мінімальною потужністю, за якої літак може ще набирати швидкість, яка йому необхідна для підняття в небо:

$$N_{\min} = F_{\text{тяги}}\upsilon. \tag{1}$$

При розгоні літака на гвинт літак діє сила тяги $F_{\text{тяги}}$. Крім неї прикладені ще сила тяжіння $F = mg$, сила реакції нормальної опори N та сила опору повітря $F_{оп} = \mu mg$. Запишемо другий закон Ньютона:

$$F_{\text{тяги}} - \mu mg = ma. \qquad (2)$$

Оскільки нам відома довжина S розгону літака та необхідна швидкість υ в момент відриву його від землі та рух літака вважається рівноприскореним, то прискорення з рівняння кінематики ми запишемо як:

$$S = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\upsilon^2}{2S}. \qquad (3)$$

З врахуванням (3) сила тяги $F_{\text{тяги}}$ рівна:

$$F_{\text{тяги}} = m\left(\frac{\upsilon^2}{2S} + \mu g\right). \qquad (4)$$

Тоді потужність рівна:

$$N_{\min} = m\upsilon\left(\frac{\upsilon^2}{2S} + \mu g\right). \qquad (5)$$

Знайдемо числове значення

$$N_{\min} = m\upsilon\left(\frac{\upsilon^2}{2S} + \mu g\right) = 3\cdot10^3\cdot100\cdot\left(\frac{100^2}{2\cdot600} + 0{,}2\cdot9{,}8\right) \approx 3\cdot10^6\,Вт \approx 3МВт$$

3.11. ***Потяг масою*** $m = 784\,\text{т}$ ***починає рухатись під гору. За час*** $t = 50\,с$ ***набирає швидкості*** $\upsilon = 18\,км/год$***. Коефіцієнт тертя*** $\mu = 0{,}005$***, кут нахилу становить*** $\varphi = 0{,}005$***. Яку середню потужність розвиває локомотив ?***

Дано:

$m = 784\,\text{т} = 7{,}84\cdot10^5\,кг$

$\upsilon = 18\,км/год = 5\,м/с$

$t = 50\,с$

$\mu = 0{,}005$

$\varphi = 0{,}005$

$\langle N\rangle - ?$

Розв'язування

Нахилом називається відношення висоти нахилу площини до її довжини: нахил $\varphi = \frac{h}{l} = \sin\alpha$. Тут α – кут нахилу похилої площини до горизонту (рис.3.4).

Середню потужність, яку розвиває сила тяги $F_{\text{тяги}}$ локомотива визначають формулою:

$$\langle N \rangle = F_{\text{тяги}} \langle \upsilon \rangle . \qquad (1)$$

Силу тяги можна знайти розписавши всі сили, котрі діють на локомотив та записавши другий закон Ньютона. На локомотив діють сили: тяжіння, тертя, реакція нормальної опори та сила тяги:

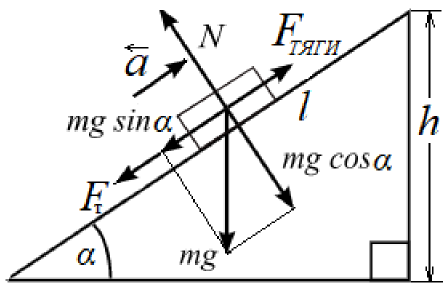


Рис.3.4.

$$F_{\text{тяги}} - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma . \qquad (2)$$

Звідси $F_{\text{тяги}} = m(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)$.(3)

З кінематики прискорення та середня швидкість:

$$a = \frac{\upsilon}{t}; \quad \langle \upsilon \rangle = \frac{\upsilon}{2} . \qquad (4)$$

Використовуючи (3) та (4) рівність (1) запишеться:

$$\langle N \rangle = \frac{m\upsilon}{2}\left(\frac{\upsilon}{t} + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha\right) \approx \frac{m\upsilon}{2}\left(\frac{\upsilon}{t} + g\varphi + \mu g\right). \qquad (5)$$

Знайдемо числове значення:

$$\langle N \rangle \approx \frac{m\upsilon}{2}\left(\frac{\upsilon}{t} + g\varphi + \mu g\right) \approx \frac{7{,}84\cdot 10^5 \cdot 5}{2}\left(\frac{5}{50} + 9{,}8\cdot 0{,}005 + 0{,}005\cdot 9{,}8\right) \approx$$

$$\approx 3{,}9\cdot 10^5\,Вт \approx 390\,кВт$$

3.12. ***Автомобіль рухається вгору вздовж невеликого уклону із швидкістю, що встановилась*** $\upsilon_1 = 15\,м/с$***. Якби він рухався вниз, то при тій самій потужності двигуна встановилася б швидкість*** $\upsilon_2 = 20\,м/с$***. Вважаючи, що сила тяги не залежить від швидкості, знайти, яка швидкість встановиться при тій самій потужності двигуна під час руху по горизонтальному шляху.***

Дано:
$\upsilon_1 = 15\,м/с$
$\upsilon_2 = 20\,м/с$

$\upsilon - ?$

Розв'язування

Слід зауважити, що у всіх випадках: 1) рух під гору, 2) рух з гори та 3) рух по горизонтальній прямій це рівномірний рух, тобто $a = 0$. Запишемо друге рівняння Ньютона для кожного випадку.

1) Рух під гору. В цьому випадку на автомобіль діє сила тяги $F_{\text{тяги}}$, їй протидіють сила тертя $F_{\text{т}} = \mu N = \mu mg \cos\alpha$ та складова сили тяжіння $F = mg \sin\alpha$ (α – кут нахилу), тобто

$$F_{\text{тяги}} - F_{\text{т}} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тяги}} = F_{\text{т}} + F = mg(\mu \cos\alpha + \sin\alpha). \qquad (1)$$

2) Рух з гори. В цьому сила тяги $F_{\text{тяги}}$ та складова сили тяжіння $F = mg \sin\alpha$ діють в одному напрямі, протилежно їм сила тертя $F_{\text{т}} = \mu N = \mu mg \cos\alpha$.

$$F_{\text{тяги}} + F - F_{\text{т}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тяги}} = F_{\text{т}} - F = mg(\mu \cos\alpha - \sin\alpha). \qquad (2)$$

3) Рух вздовж горизонтальної поверхні. На автомобіль в цьому випадку діє сила тяги $F_{\text{тяги}}$ та протилежно їй сила тертя $F_{\text{т}} = \mu N = \mu mg$:

$$F_{\text{тяги}} - F_{\text{т}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тяги}} = F_{\text{т}} = \mu mg. \qquad (3)$$

Використаємо, ту обставину, що потужність двигуна в усіх трьох випадках однакова. За визначенням потужність рівна:

$$N = F_{\text{тяги}} \upsilon. \qquad (4)$$

Тому використовуючи (1)-(3), запишемо:

$$\begin{cases} N = \left(F_{\text{т}} + F\right)\upsilon_1 = mg(\mu \cos\alpha + \sin\alpha)\upsilon_1; \\ N = \left(F_{\text{т}} - F\right)\upsilon_2 = mg(\mu \cos\alpha - \sin\alpha)\upsilon_2; \\ N = F_{\text{т}}\upsilon = \mu mg\, \upsilon. \end{cases} \qquad (5)$$

За умовою задачі уклон гори невеликий, тому можна прийняти що $\cos\alpha \approx 1$. З врахуванням цього рівності (5) можна звести до:

$$\begin{cases} \mu\, \upsilon = (\mu + \sin\alpha)\upsilon_1; \\ \mu\, \upsilon = (\mu - \sin\alpha)\upsilon_2. \end{cases} \qquad (6)$$

Ця рівність із трьома невідомими швидкістю υ, коефіцієнтом тертя μ та кутом нахилу α. Розв’язавши систему (6), отримаємо:

$$\upsilon = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}. \qquad (7)$$

Знайдемо числове значення:

$$\upsilon = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 20}{15 + 20} = 17{,}14\, м/с.$$

3.13. ***Визначити середню корисну потужність при пострілі гладкоствольної рушниці, якщо відомо, що куля масою*** m ***вилітає з ствола з швидкістю*** υ***, а довжина каналу ствола*** l***. Тиск пороху газів на кулю в каналі ствола наближено вважати сталим.***

Дано:	**Розв'язування**
m υ l	Середню потужність можна знайти із співвідношення:
$\langle N \rangle - ?$	

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t} = \frac{Fl}{t}, \qquad (1)$$

де F – середня сила, що діє на кулю в каналі ствола, t – час її перебування в стволі. За другим законом Ньютона $F = ma$, де a – прискорення кулі в стволі. Оскільки сила F стала, прискорення a також буде сталим. Отже, рух кулі в стволі є рівноприскореним (без початкової швидкості).

З рівняння кінематики знайдемо це прискорення та виразимо шлях через це прискорення:

$$\upsilon = at \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\upsilon}{t}, \qquad (2)$$

$$l = \frac{at^2}{2} = \frac{\upsilon t}{2}. \qquad (3)$$

Отримаємо два рівняння з двома невідомими F та t:

$$\begin{cases} F = \dfrac{m\upsilon}{t}; \\ l = \dfrac{\upsilon t}{2}. \end{cases} \qquad (4)$$

Розв'язавши їх отримаємо:

$$F = \frac{m\upsilon^2}{2l}, \quad t = \frac{2l}{\upsilon}. \qquad (5)$$

Підставимо отримані значення в (1):

$$\langle N \rangle = \frac{m\upsilon^3}{4l}. \qquad (6)$$

3.14. ***Автомобілі з встановленими на них двигунами потужністю*** $N_1 = 294\,кВт$ ***і*** $N_2 = 317{,}52\,кВт$ ***розвивають швидкість*** $\upsilon_1 = 72\,км/год$ ***і*** $\upsilon_2 = 64{,}8\,км/год$***. З якою швидкістю їхатимуть автомобілі, якщо їх з'єднати тросом.***

Розв'язування

Дано:
$N_1 = 294\,кВт = 294 \cdot 10^3\,Вт$
$N_2 = 317{,}52\,кВт = 317{,}52 \cdot 10^3\,Вт$
$\upsilon_1 = 72\,км/год = 20\,м/с$
$\upsilon_2 = 64{,}8\,км/год = 18\,м/с$

$\upsilon - ?$

Потужності першого і другого автомобілів дорівнюють:

$$N_1 = F_1\upsilon_1 \quad і \quad N_2 = F_2\upsilon_2, \qquad (1)$$

де F_1 і F_2 – сили тяги першого і другого автомобілів, відповідно.

Після з'єднання автомобілів:

$$N_1 + N_2 = (F_1 + F_2)\,\upsilon. \qquad (2)$$

Підставляючи з (1) вирази для сил тяги в (2), отримуємо

$$N_1 + N_2 = \left(\frac{N_1}{\upsilon_1} + \frac{N_2}{\upsilon_2}\right)\upsilon \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{N_1 + N_2}{N_1\upsilon_2 + N_2\upsilon_1}.$$

Проводимо числовий розрахунок:

$$\upsilon = \frac{(294 + 317{,}52) \cdot 10^3}{294 \cdot 10^3 \cdot 20 + 317{,}52 \cdot 10^3 \cdot 18} = 18{,}9\,м/с = 68{,}1\,км/год.$$

3.15. ***Вільна матеріальна точка масою $m = 10\,кг$ перебуває в стані спокою. До неї прикладають силу $F = 30\,Н$, яка діє упродовж $t = 5\,с$. Якої кінетичної енергії набуде точка?***

Дано:
$m = 10\,кг$
$F = 30\,Н$
$t = 5\,с$

$E_к - ?$

Розв'язування

Згідна з теоремою про кінетичну енергію матеріальної частинки робота сили під час переміщення частинки затрачається на приріст її кінетичної енергії. Отже, можна записати:

$$A = \Delta E_к = E_{к2} - E_{к1}, \qquad (1)$$

де $E_{к1}$ та $E_{к2}$ – відповідно значення кінетичної енергії в початковому та кінцевому станах тіла. Оскільки тіло починає рухатись із стану спокою, то $E_{к1} = 0$ (бо $\upsilon_1 = 0$). $E_{к2}$ це кінетична енергія частинки після дії на неї сили протягом часу t.

Отже, робота сили дорівнює кінетичній енергії частинки

$$A = E_{к2}. \qquad (2)$$

Знайдемо чому дорівнює робота сили. Оскільки сила стала за величиною та напрямком, то її робота дорівнюватиме:

$$A = FS\,. \qquad (3)$$

Рух тіла під дією сили рівномірно прискорений без початкової швидкості, тому пройдений шлях буде:

$$S = \frac{at^2}{2}. \qquad (4)$$

Значення прискорення визначимо з другого закону Ньютона:

$$a = \frac{F}{m}. \qquad (5)$$

Підставимо вираз (5) в (4), а вираз (4) в (3), отримаємо:

$$E_{\kappa 2} = A = F\,\frac{Ft^2}{2m}. \qquad (6)$$

Знайдемо числове значення:

$$E_{\kappa 2} = \frac{F^2 t^2}{2m} = \frac{30^2 \cdot 10^2}{2 \cdot 5} = 9000\,Дж = 9\,кДж.$$

3.16. ***Автомобіль масою*** $m = 1000\,кг$ ***рухається прямолінійною дорогою зі швидкістю*** $\upsilon = 72\,км/год$***. Визначити силу, яка необхідна для гальмування автомобіля, якщо гальмівний шлях автомобіля за цієї швидкості становить*** $S = 10\,м$***.***

$m = 1000\,кг$

$\upsilon = 72\,км/год = 20\,м/с$

$S = 10\,м$

$F - ?$

Розв'язування

За вимкненого двигуна робота сили гальмування дорівнюватиме зміні кінетичної енергії автомобіля, тобто

$$A = \Delta E_{\kappa} = E_{\kappa 2} - E_{\kappa 1}. \qquad (1)$$

Оскільки кінцева швидкість автомобіля рівна нулю $\upsilon_2 = 0$, то і $E_{k2} = 0$. Робота сили гальмування на прямолінійному шляху визначається як:

$$A = FS. \qquad (2)$$

Отже, рівняння кінетичної енергії матиме вигляд:

$$FS = -E_{k1} = -\frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (3)$$

Тоді гальмівна сила буде рівна:

$$F = -\frac{m\upsilon^2}{2S}. \qquad (4)$$

Знак «-» означає, що сила спрямована в бік, протилежний до напрямку руху автомобіля.

Підставимо числові значення:

$$F=-\frac{m\upsilon^2}{2S}=-\frac{10^3\cdot 20^2}{2\cdot 10}=-20000\,H=-20\,кH.$$

3.17. ***Визначити взаємну потенціальну енергію системи, що складається з двох зірок, які знаходяться на відстані $r=5\cdot 10^8\,км$ одна від одної. Маса кожної зірки $m=1{,}5\cdot 10^{34}\,кг$.***

$r=5\cdot 10^8\,км=5\cdot 10^{11}\,м$ $m_1=m_2=m=1{,}5\cdot 10^{34}\,кг$	
$E_{n12}-?$	

Розв'язування

Навколо зірок існують гравітаційні поля. Тому система двох зірок, які знаходяться одна від одної на певній відстані r, характеризуються взаємною потенціальною енергіє. Якби відстань між зірками була нескінченною, то їх взаємна потенціальна енергія дорівнювала б нулю ($E_{n\infty}=0$). У міру наближення, наприклад, другої зірки до першої сили поля першої зірки виконували б роботу:

$$A=\int_\infty^r \vec{F}\,d\vec{r}=\int_\infty^r G\frac{m_1m_2}{r}\,dr=-G\frac{m_1m_2}{r}\Bigg|_\infty^r=-G\frac{m_1m_2}{r}-0=-G\frac{m_1m_2}{r}. \quad (1)$$

Робота цих сил дорівнює зміні потенціальної енергії системи, тобто

$$A=E_{n12}-E_{n\infty}=E_{n12}. \quad (2)$$

Отже, взаємна потенціальна енергія двох зірок дорівнюватиме:

$$E_{n12}=-G\frac{m_1m_2}{r}. \quad (3)$$

Підставимо числові значення:

$$E_{n12}=-G\frac{m_1m_2}{r}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{\left(1{,}5\cdot 10^{34}\right)^2}{5\cdot 10^{11}}=-3\cdot 10^{46}\,Дж.$$

3.18. ***Потенціальна енергія частинки в центральному силовому полі задана як функція відстані r від центра поля до точки, де перебувала частинка: $U(r)=-\frac{A}{r}+\frac{B}{r^2}$, де $A=3\cdot 10^{-4}\,Дж\cdot м$, $B=5\cdot 10^{-6}\,Дж\cdot м^2$. Визначити, при яких значеннях r потенціальна енергія і сила, що діє на частинку, мають екстремальні значення і знайти ці значення.***

Дано:

$U(r) = -\dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r^2}$

$A = 3 \cdot 10^{-4}\,Дж \cdot м$

$B = 5 \cdot 10^{-6}\,Дж \cdot м^2$

$r_1 - ?$

$r_2 - ?$

$U(r_1) - ?$

$F(r_2) - ?$

Розв'язування

Екстремальні значення величин знаходяться із рівності, коли першу похідну від функції прирівняють до нуля. Тому екстремальне значення потенціальної енергії розрахуємо як:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{A}{r^2} - \frac{2B}{r^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}(Ar - 2B) = 0 \Rightarrow \quad r_1 = \frac{2B}{A}.$$

Тоді $$U(r_1) = -\frac{A^2}{2B} + \frac{A^2}{4B} = -\frac{A^2}{4B}.$$

Сила, що діє на частинку

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{A}{r^2} + \frac{2B}{r^3}.$$

Умова екстремального значення сили:

$$\frac{dF}{dr} = \frac{2A}{r^3} - \frac{6B}{r^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad Ar - 3B = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{3B}{A}.$$

Екстремальне значення сили:

$$F(r_2) = -\frac{A^2}{9B^2} + \frac{2BA^3}{27B^3} = -\frac{A^3}{27B^2}.$$

Підставимо числові значення:

$$r_1 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-4}} = 3{,}33\,см, \qquad U(r_1) = -\frac{(5 \cdot 10^{-6})^2}{4 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = -4{,}5\,мДж,$$

$$r_2 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-4}} = 5{,}00\,см, \qquad F(r_2) = -\frac{(5 \cdot 10^{-6})^3}{27 \cdot (3 \cdot 10^{-4})^2} = -0{,}04\,Н.$$

3.19. ***Куля масою $m_1 = 3\,кг$, що рухається зі швидкістю $\upsilon_1 = 6\,м/с$, доганяє кулю масою $m_2 = 1\,кг$, що рухається зі швидкістю $\upsilon_2 = 2\,м/с$. Удар кулі центральний. Визначити швидкості куль після пружного співудару.***

Дано:

$m_1 = 3\,кг$

$m_2 = 1\,кг$

$\upsilon_1 = 6\,м/с$

$\upsilon_2 = 2\,м/с$

$\upsilon_1' - ?$

$\upsilon_2' - ?$

Розв'язування

Згідно закону збереження кінетичної енергії

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2'^2}{2} \qquad (1)$$

і закону збереження імпульсу

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'. \qquad (2)$$

Проведемо перетворення виразів (1) і (2):

$$m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2), \qquad (3)$$

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2). \qquad (4)$$

Поділивши вираз (3) на вираз (4), отримуємо:

$$(\upsilon_1 + \upsilon_1') = (\upsilon_2' + \upsilon_2), \quad \upsilon_1' = \upsilon_2' + \upsilon_2 - \upsilon_1, \quad \upsilon_2' = \upsilon_1' + \upsilon_1 - \upsilon_2. \qquad (5)$$

Підставимо

$$\upsilon_1' = \upsilon_2' + \upsilon_2 - \upsilon_1$$

у рівняння (2):

$$2m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_2' + m_1\upsilon_2 - m_2\upsilon_2,$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1\upsilon_1 + m_1\upsilon_2 - m_2\upsilon_2}{(m_1 + m_2)}, \quad \upsilon_2' = 12 м/с$$

Підставимо

$$\upsilon_2' = \upsilon_1' + \upsilon_1 - \upsilon_2.$$

у рівняння (2):

$$(m_2 - m_1)\upsilon_1 + (m_1 + m_2)\upsilon_1' = 2m_2\upsilon_2,$$

$$\upsilon_1' = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{(m_1 + m_2)}, \qquad \upsilon_1' = 4 м/с.$$

3.20. ***Камінь кинутий під деяким кутом до горизонту зі швидкістю υ_0 (рис.3.5). На якій висоті від точки кидання швидкість каменю зменшиться в два рази? Опором знехтувати.***

Дано:	**Розв'язування.**
υ_0	
$\upsilon = \dfrac{\upsilon_0}{2}$	
$h - ?$	

Цю задачу можна вирішити двома способами: за допомогою другого рівняння Ньютона або за допомогою закону збереження енергії. За умовою задачі опором нехтуємо, тому систему вважаємо замкнутою. Повна енергія в системі залишається незмінною.

$$E_1 = E_2. \qquad (1)$$

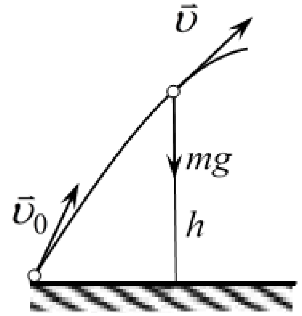


Рис.3.5.

Тут E_1 та E_2 - відповідно значення повної енергії в початковому положенні та в положенні 2, коли швидкість зменшилась в два рази. В початковому положенні камінь має лише кінетичну енергію. Відлік потенціальної енергії візьмемо положення, з якого починається рух каменю.

$$E_1 = \frac{m\upsilon_0^2}{2}. \tag{2}$$

В другому положенні повна енергія буде складатися з кінетичної та потенціальної енергії:

$$E_2 = \frac{m\upsilon_0^2}{8} + mgh. \tag{3}$$

Підставимо (2) та (3) в (1):

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon_0^2}{8} + mgh. \tag{4}$$

Звідси
$$h = \frac{3\upsilon_0^2}{8g}. \tag{5}$$

3.21. ***Вантаж масою $m = 1\,кг$ падає з висоти $h = 240\,м$ і заглиблюється в пісок на $S = 0{,}2\,м$. Визначити середню силу опору грунту, якщо початкова швидкість падіння вантажу $\upsilon_0 = 14\,м/с$. Опором повітря знехтувати.***

Дано:
$m = 1\,кг$
$h = 240\,м$
$S = 0{,}2\,м$
$\upsilon_0 = 14\,м/с$

$F_{оп} - ?$

Розв'язування.

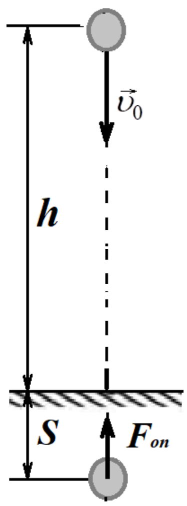


Рис.3.6

Зробимо рисунок (рис.3.6) та запишемо закон збереження енергії зміна повної енергії системи буде визначати роботу сил опору грунту:

$$E_2 - E_1 = A. \tag{1}$$

При падіння каменя на грунт на нього діє сила опору грунту $F_{оп}$ спрямована протилежно до його руху тому:

$$A = -F_{оп}S. \tag{2}$$

За нульовий відлік потенціальної енергії візьмемо кінцеве положення каменю. Повна енергія у початковому положенні буде складатися з кінетичної та потенціальної енергій:

$$E_1 = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + mg(h+S). \tag{3}$$

В кінцевому положенні повна енергія рівна $E_2 = 0$. Підставимо (2) та (3) в рівність (1):

$$-\frac{m\upsilon_0^2}{2} - mg(h+S) = -F_{on}S. \quad (4)$$

З рівності (4) знайдемо силу опору грунту:

$$F_{on} = \frac{m}{S}\left(\frac{\upsilon_0^2}{2} + g(h+S)\right). \quad (5)$$

Підставимо числові значення:

$$F_{on} = \frac{m}{S}\left(\frac{\upsilon_0^2}{2} + g(h+S)\right) = \frac{1}{0{,}2}\cdot\left(\frac{14^2}{2} + 9{,}8\cdot(240+0{,}2)\right) = 12\,260\,H \approx 12\kappa H$$

3.22. ***Важка кулька рухається без тертя по похилому жолобу і утворює «мертву петлю» радіусом R. З якої висоти слід пустити кульку, щоб вона не відірвалась у верхній точці петлі?***

Дано:	
R	
$h - ?$	

Розв'язування

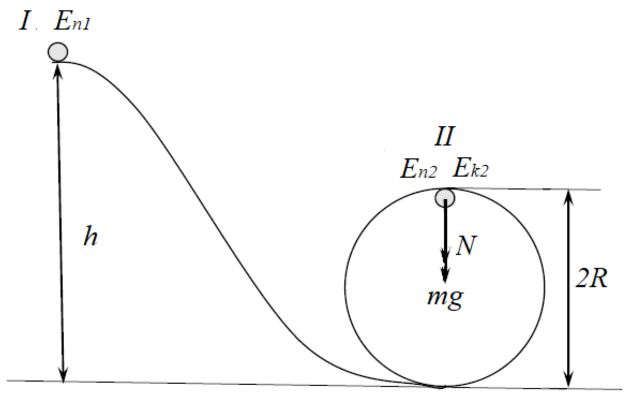


Рис.3.7.

Розв'яжемо цю задачу, виходячи з закону збереження енергії. За умовою задачі тертям можна знехтувати, отже система замкнута повна енергія залишається незмінною. Повна механічна енергія в точці I буде рівна повній механічній енергії в точці II (рис.3.7).

$$E_1 = E_2. \quad (1)$$

В точці I кулька має потенціальну енергію:

$$E_1 = mgh. \quad (2)$$

В точці II повна механічна енергія складатиметься із потенціальної та кінетичної енергії:

$$E_2 = mg2R + \frac{m\upsilon^2}{2}. \quad (3)$$

Залишається знайти значення швидкості кульки, при якій вона не відірветься у верхній точці «мертвої петлі» від жолоба. Для цього розглянемо сили, які діють на кульку в положенні II та запишемо другий закон Ньютона.

Коли кулька рухається по колу, то її прискорення рівне доцентровому $a = a_д = \frac{\upsilon^2}{R}$. $N + mg = ma = m\frac{\upsilon^2}{R}$.

При русі по похиленому жолобі з відповідної висоти кулька набуває такої швидкості, що в кожній точці петлі тисне на жолоб з деякою силою нормального тиску N, яка є різною в різних точках. За третім законом Ньютона жолоб із такою ж силою по модулю діє на кульку. Якщо зменшувати початкову висоту спуску, швидкість в верхній точці петлі зменшиться і при деякому значенні стане такою, що кулька пролетить верхню точку петлі ледь торкаючись жолобу. Для цього граничного випадку $N = 0$, тоді другий закон Ньютона запишеться як:

$$mg = m\frac{\upsilon^2}{R} \text{ або } g = \frac{\upsilon^2}{R}. \quad (4)$$

Тобто $$\upsilon^2 = gR. \quad (5)$$

Підставимо вираз (5) в закон збереження енергії

$$mgh = mg2R + \frac{mgR}{2}.$$

$$h = 2R + \frac{R}{2} = 2{,}5R \cdot$$

3.23. ***Навколо горизонтальної осі без тертя обертається важіль (рис.3.8) з плечима l_1 та l_2 на кінцях важеля закріплені вантажі масами m_1 та m_2. Залишений сам на себе, важіль переходить із горизонтального положення у вертикальне. Яку швидкість буде мати в нижній точці другий вантаж?***

Дано:
l_1
l_2
m_1
m_2
$\upsilon_2 - ?$

Розв'язування.

В цій задачі розглядається обертальний рух матеріальних точок. Розв'язувати її слід використовуючи закон збереження енергії. Візьмемо за початкове положення системи горизонтальне розміщення важеля. За кінцеве – вертикальне положення важеля – це той момент, коли другий тягарець проходитиме нижню точку системи. За умовою задачі тертям та масою важеля можна знехтувати. В

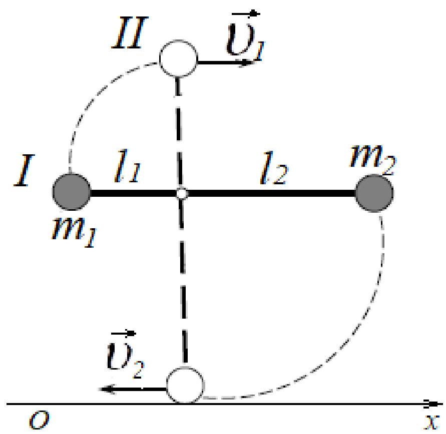


Рис.3.8.

системі діють лише консервативні сили, повна енергія тягарців не змінюється і закон збереження енергії запишеться:

$$E_2 - E_1 = 0. \qquad (1)$$

В горизонтальному положенні важеля повна механічна енергія буде визначатися лише потенціальною енергією тягарців, бо за відсутності руху кінетична енергія рівна нулю. потенціальну енергію тягарців будемо визначати відносно нижнього рівня *Ox*.

$$E_1 = m_1 g l_2 + m_2 g l_2. \qquad (2)$$

У вертикальному положенні повна механічна енергія рівна:

$$E_2 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + m_1 g(l_1 + l_2) + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2}, \qquad (3)$$

де υ_1 та υ_2 – швидкості відповідно першого та другого тягарців.

Підставимо рівності (1) та (2) в (1):

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + m_1 g(l_1 + l_2) + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} - m_1 g l_2 - m_2 g l_2 = 0. \qquad (4)$$

Ця рівність містить дві невідомі величини – швидкості тягарців. Другу рівність, яку слід записати, отримаємо виходячи з того, що в кожний момент часу радіуси обертання всіх точок важеля мають однакову кутову швидкість, тому в положенні II маємо:

$$\omega = \frac{\upsilon_1}{l_1} = \frac{\upsilon_2}{l_2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \frac{\upsilon_2 l_1}{l_2}. \qquad (5)$$

Підставивши вираз (5) в (4) знайдемо швидкість υ_2:

$$\upsilon_2 = l_2 \sqrt{\frac{2g\left(m_2 l_2 - m_1 l_1\right)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}}.$$

Задачі для самостійного розв’язування

3.1. Рівняння руху тіла вздовж осі 0*x* має вигляд $x = (7 - 2t)\,м$. Визначити кінетичну енергію тіла, якщо його маса дорівнює $m = 5\,кг$. (**10 *Дж***)

3.2. Визначити масу тіла, що рухається зі швидкістю $\upsilon = 20\,м/с$, якщо його кінетична енергія $E = 2400\,Дж$. (**12 *кг***)

3.3. Потенціальна енергія частинки має вигляд $U = ax^3 + bx^2 + cz$, де *a, b* і *c* – сталі. Визначити силу $\vec{F}$, яка діє на частинку. ($\vec{F} = -\left(3ax^2 + 2bx\right)\vec{i} - c\vec{k}$)

3.4. Тіло масою $m = 250\,г$ кинули вертикально вгору зі швидкістю $\upsilon_0 = 20\,м/с$. Визначити його потенціальну енергію в точці найвищого підйому. (**50 *Дж***)

3.5. Визначити роботу сили тертя під час рівномірного переміщення велосипедиста на дистанції $S = 3\,км$, якщо він розвивав середню силу тяги $F = 70\,Н$. (**-210 *кДж***)

3.6. Автомобіль масою $M = 2\,т$ рушає з місця з прискоренням $a = 2\,м/с^2$ і розганяється на горизонтальному шляху протягом $t = 5\,с$. Яка робота виконується за цей час, якщо коефіцієнт опору $\mu = 0{,}01$? Прискорення вільного падіння $g = 10\,м/с^2$. (**105 *кДж***)

3.7. Хлопчик, який стоїть на гладенькому льоді, штовхнув санки, надавши їм початкової швидкості. Маса санок $m_1 = 3\,кг$, маса хлопчика $m_2 = 30\,кг$. Визначити відношення кінетичної енергії санок до кінетичної енергії хлопчика відразу ж після поштовху. (**10**)

3.8. Тіло, маса якого $m = 100\,г$, кинули вертикально вгору зі швидкістю $\upsilon_0 = 40\,м/с$. Визначити потенціальну енергію тіла через $t = 3\,с$ від початку руху. Прийняти прискорення вільного падіння $g = 10\,м/с^2$. (**75 *Дж***)

3.9. Тіло, кинуте вертикально вниз з висоти $h = 85\,м$ зі швидкістю $\upsilon_0 = 10\,м/с$, в момент удару об землю мало кінетичну енергію $E_k = 1800\,Дж$. Визначити масу тіла. Прийняти прискорення вільного падіння $g = 10\,м/с^2$. (**2 *кг***)

3.10. З шахти глибиною $h = 160\,м$, намотуючи канат на барабан лебідки, піднімають кошик масою $m_1 = 30\,кг$, кожна одиниця довжини канату має масу $m_l = 0{,}5\,кг$. Визначити роботу, яка виконується під час підняття кошика на поверхню землі. Прийняти прискорення вільного падіння $g = 10\,м/с^2$. (**112 *кДж***)

3.11. По гладкій горизонтальній поверхні стола ковзає предмет. Відношення кінетичної енергії предмета до його потенціальної енергії становить *N=1*, початкова швидкість предмета $\upsilon_0 = 5\,м/с$, його механічна енергія

$E = 50\,Дж$. Визначити масу предмета. Тертям предмета об поверхню знехтувати. (**2 *кг***)

3.12. Під час гальмування автомобіля гальмівний шлях змінюється за законом $S = A + Bt + Ct^2$, де $B = 25\,м/с$, $C = 5\,м/с^2$. Яку роботу виконають сили тертя до повної зупинки автомобіля, якщо його маса $m = 1т$? (**312,5 *кДж***)

3.13. Швидкість автомобіля, маса якого $m = 8т$, змінюється за законом $\upsilon = A + Bt + Ct^2$. $A = 20\,м/с$, $B = 2\,м/с^2$, $C = 5\,м/с^3$. Визначити роботу сили тяги за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 5с$. (**140 *кДж***)

3.14. Автомобіль рухається під дією сили тяги F, яка змінюється залежно від пройденого шляху за законом $F = B + CS + DS^2$, $B = 300\,Н$, $C = 50\,Н/м$, $D = 3\,Н/м^2$. Визначити роботу сили на ділянці шляху від $s_1 = 3м$ до $s_2 = 50\,м$. (**32,6 *кДж***)

3.15. Матеріальна точка масою m рухалася під дією деякої сили згідно з рівнянням $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, $A = 5\,м$, $B = -2\,м/с$, $C = 3\,м/с^2$, $D = -0,2\,м/с^3$. Визначити потужність, яка затрачається на рух точки в момент часу $t = 2с$. (**136,8 *Вт***)

3.16. По похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^0$ з'їжджає лижник масою $m_1 = 70кг$. Проїхавши віддаль $l = 20\,м$ від вершини, він стріляє вгору сигнальною ракетою. Маса ракети $m_2 = 0,5кг$, її початкова швидкість $\upsilon_2 = 85м/с$. Тертя не враховувати. Визначити швидкість лижника після пострілу. (**14,4 *м/с***)

3.17. Швидкість реактивного літака на деякій ділянці траєкторії залежить від пройденого шляху S за законом $\upsilon = B + CS$, $B = 10\,м/с$, $C = 0,03\,с^{-1}$. Маса літака $m = 8т$. В момент часу $t_1 = 10с$ швидкість літака становила $\upsilon_1 = 200\,м/с$. Визначити роботу двигунів за проміжок часу від $t_1 = 10с$ до $t_2 = 40\,с$. (**807,9 *МДж***)

3.1. Яка з формул визначає роботу змінної сили?

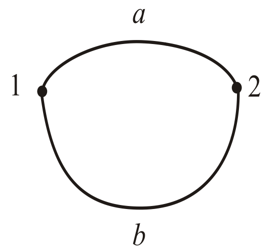
А) $A = Fs\cos\alpha$; **Б)** $A = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds$; **В)** $A = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$;

Г) $A = \int_{t_1}^{t_2} F_s dt$; **Д)** $A = \int_{L_1}^{L_2} F_s d\ell$.

3.2. За якого значення кута між векторами сили та переміщення не виконується робота?

А) 0; **Б)** 30°; **В)** 60°; **Г)** 90°; **Д)** 180°.

3.3. Тіло може переміщатись з точки 1 в точку 2 по траєкторії 1-*a*-2 або 1-*b*-2. Знайдіть умову того, що сила, яка діє на тіло, є консервативною.



А) $A_{1\text{-}a\text{-}2} < A_{1\text{-}b\text{-}2}$; **Б)** $A_{1\text{-}a\text{-}2} = A_{1\text{-}b\text{-}2}$;

В) $A_{1\text{-}a\text{-}2} = A_{1\text{-}b\text{-}2} = 0$; **Г)** $A_{1\text{-}a\text{-}2} > A_{1\text{-}b\text{-}2}$;

Д) $A_{1\text{-}a\text{-}2} + A_{1\text{-}b\text{-}2} > 0$.

3.4. Робота консервативної сили при переміщенні тіла вздовж замкненої траєкторії *L* дорівнює:

А) $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = A$; **Б)** $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = FS$; **В)** $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = 0$;

Г) $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = FL$; **Д)** $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) > 0$.

3.5. До дисипативних належить сила:

А) тертя; **Б)** пружної деформації;

В) гравітаційного притягання; **Г)** електростатичної взаємодії;

Д) правильної відповіді тут немає.

3.6. Кінетичною можна називати енергію:

А) яка зв'язана з механічним рухом тіла;

Б) яка зв'язана з положенням тіла відносно Землі;

В) яка зв'язана зі взаємним розміщенням частин тіла;

Г) пружно деформованого тіла; **Д)** що виділяється при взаємодії тіл.

3.7. Яка з формул виражає кінетичну енергію поступального руху тіла?

А) $E_к = \frac{J\omega^2}{2}$; **Б)** $E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$; **В)** $E_к = m\upsilon^2$;

Г) $E_к = \frac{m\upsilon}{2}$; **Д)** $E_к = \frac{J\upsilon^2}{2}$.

3.8. Чи зміниться величина кінетичної енергії тіла під час переходу з однієї інерціальної системи до іншої?

А) зміниться; **Б)** не зміниться;

В) збільшиться в 2 рази; **Г)** зменшиться в 2 рази;

Д) правильної відповіді тут немає.

3.9. Імпульс тіла *P* та його кінетична енергія *E* пов'язані виразом:

А) $P = \frac{E}{2\upsilon}$; **Б)** $E = P\upsilon$; **В)** $P = \frac{2E}{\upsilon}$; **Г)** $P = \frac{2E}{m}$;

Д) правильної відповіді тут немає.

3.10. Яка з формул визначає кінетичну енергію системи тіл?

А) $\frac{m\upsilon^2}{2}$; **Б)** $\frac{(m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$; **В)** $-\int_{\upsilon}^{0} m\upsilon\, d\upsilon$; **Г)** $\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\upsilon_i^2}{2}$;

Д) правильної формули тут немає

3.11. Яку енергію механічної системи називають потенціальною?

А) енергію, яка зв'язана з рухом тіла;

Б) енергію, яка залежить від взаємного розміщення всіх матеріальних тіл;

В) енергію, яка зв'язана з рухом молекул тіла;

Г) енергію пружно деформованого тіла;

Д) правильної відповіді тут немає.

3.12. Яка з формул визначає потенціальну енергію?

А) $E_n = \int_{\infty}^{r} \vec{F} d\vec{r} + C$; **Б)** $E_n = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} d\vec{r}$; **В)** $E_n = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} d\vec{r} + C$;

Г) $E_n = \int_{\infty}^{r} \vec{F} d\vec{r}$; **Д)** $E_n = -\int_{r}^{\infty} \vec{F} d\vec{r} + C$.

3.13. Яка формула визначає зв'язок між силою, що діє на матеріальну точку в потенціальному полі, і потенціальною енергією цієї точки?

А) $\vec{F} = grad\, E_n$; **Б)** $E_n = -grad\, \vec{F}$; **В)** $E_n = grad\, \vec{F}$;

Г) $\vec{F} = -grad\, E_n$; **Д)** $\vec{F} = -grad\, E_n^2$.

3.14. Що називається повною механічною енергією тіла?

А) сума його потенціальної та внутрішньої енергій;

Б) сума його потенціальної та кінетичної енергій;

В) сума його кінетичної та внутрішньої енергій;

Г) сума його потенціальної, кінетичної та внутрішньої енергій;

Д) правильної відповіді тут немає.

3.15. Зміна повної механічної енергії системи під час переходу з одного стану в інший дорівнює:

А) роботі, яка виконана зовнішніми консервативними силами;

Б) роботі, яка виконана зовнішніми неконсервативними силами;

В) нулю;

Г) роботі, яка виконана внутрішніми консервативними силами;

Д) зміні кінетичної енергії.

3.16. Яке з наведених формулювань виражає закон збереження механічної енергії?

А) у системі тіл, на які діють зовнішні неконсервативні сили, повна механічна енергія не змінюється з часом;

Б) у системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, сумарна кінетична енергія тіл не змінюється з часом;

В) у системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, повна механічна енергія тіл не змінюється з часом;

Г) у системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, сумарна потенціальна енергія тіл не змінюється з часом;

Д) у системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, сумарна кінетична енергія тіл дорівнює нулю.

3.17. Які перетворення енергії тіла відбуваються під час його вільного падіння?

А) потенціальна енергія збільшується, а кінетична – зменшується;

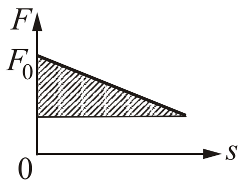
Б) потенціальна енергія зменшується, а кінетична – збільшується;

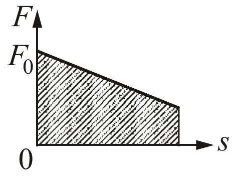
В) потенціальна енергія збільшується, а кінетична – не змінюється;

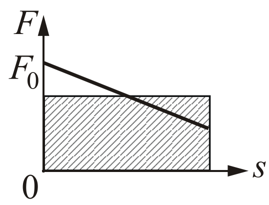
Г) потенціальна енергія не змінюється, а кінетична – збільшується;

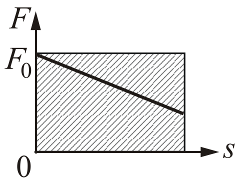
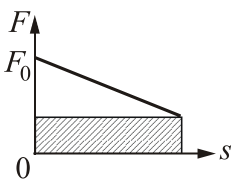
Д) потенціальна і кінетична енергія – збільшуються.

3.18. На рисунку зображено графік залежності від відстані сили, яка прикладена до вільного тіла. На якому з графіків правильно показано значення роботи як заштрихованої площі?

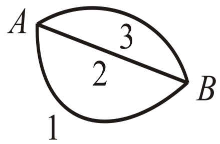
А)


Б)


В)


Г)  Д) 

3.19. Порівняйте роботу сили тяжіння під час переміщення тіла з точки A у точку B за трьома траєкторіями.



А) $A_1 < A_2 = A_3$; **Б)** $A_3 < A_2 < A_1$;
В) $A_1 = A_2 = A_3$; **Г)** $A_2 < A_1 = A_3$; **Д)** $A_1 = A_3 < A_2$.

3.20. Яке із співвідношень визначає роботу сталої за модулем сили?

А) $A = \dfrac{Fat}{2}$; **Б)** $A = \dfrac{F^2t^2}{2m}$; **В)** $A = \dfrac{F^2t}{2m}$;

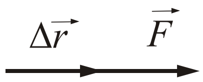
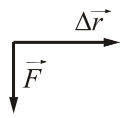
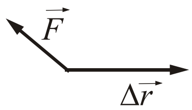
Г) $A = \dfrac{F^2t^2}{2}$; **Д)** $A = \dfrac{Ft^2}{2m}$.

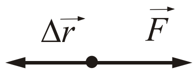
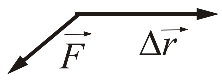
3.21. Одна сила виконала над тілом таку саму роботу, як і друга, але за час у k разів більший. Яке відношення величин сили?

А) $\dfrac{F_1}{F_2} = k^2$; **Б)** $\dfrac{F_1}{F_2} = \sqrt{k}$; **В)** $\dfrac{F_1}{F_2} = k$;

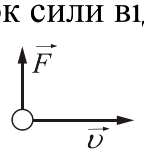
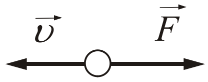
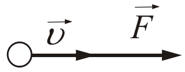
Г) $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{1}{k}$; **Д)** $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{1}{k^2}$.

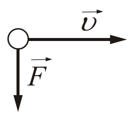
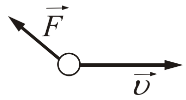
3.22. У якому випадку робота сили дорівнює –1 Дж, якщо модуль сили $F = 1$ Н, модуль переміщення $\Delta r = 1$ м?

А)  **Б)**  **В)** 

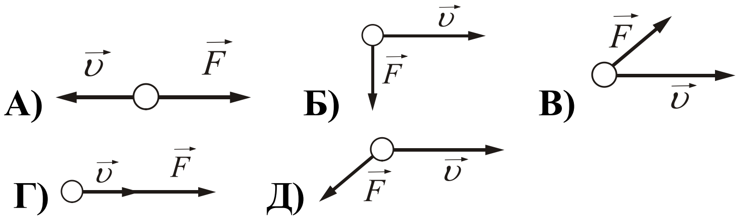
Г)  **Д)** 

3.23. До рухомого тіла, яке мало початкову швидкість, приклали сталу силу. Кінетична енергія тіла зростає пропорційно до відстані. Яким є напрямок сили відносно швидкості тіла?

А)  **Б)**  **В)** 

Г)  **Д)** 

3.24. Як повинна бути спрямована на тіло сила щодо його швидкості, щоб кінетична енергія тіла була сталою?

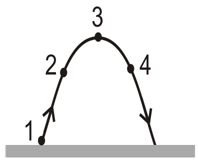


3.25. Стан механічної системи є станом стійкої рівноваги, якщо внаслідок її виведення з цього стану потенціальна енергія системи:

А) збільшується; **Б)** зменшується; **В)** не змінюється;

Г) спочатку зменшується, а потім збільшується; **Д)** відсутня.

3.26. Зображено траєкторію руху тіла, кинутого під кутом до горизонту. У якій точці траєкторії сума кінетичної і потен-. ціальної енергії максимальна? Опір повітря не враховувати.



А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** в усіх точках однакова.

3.1	3.2.	3.3.	3.4.	3.5.	3.6.	3.7.	3.8.
Б	**Г**	**Б**	**В**	**А**	**А**	**Б**	**А**
3.9.	3.10.	3.11.	3.12.	3.13.	3.14.	3.15.	3.16.
В	**Г**	**Б**	**В**	**Г**	**Б**	**Б**	**В**
3.17.	3.18.	3.19.	3.20.	3.21.	3.22.	3.23.	3.24.
Б	**Б**	**В**	**Б**	**В**	**Г**	**В**	**Б**
3.25.	3.26						
А	**Д**						