1. КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

Основні формули

1. Кінематичні рівняння руху в координатній формі

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) .$$

2. Кінематичне рівняння руху в природній формі

$$S = S(t),$$

де S – шляхова координата (криволінійна координата).

3.Середня і миттєва швидкості матеріальної точки

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}; \qquad \langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \qquad \upsilon = \frac{dS}{dt},$$

де $\Delta \vec{r}$ – елементарне переміщення точки за проміжок часу Δt; $\vec{r}$ – радіус – вектор, що визначає положення точки; ΔS – шлях, пройдений точкою за проміжок часу Δt.

4. Проекції швидкості на координатні осі

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

5. Величина (модуль) миттєвої швидкості матеріальної точки

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

6. Шлях, пройдений матеріальною точкою (тілом)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t) dt .$$

7. Середнє і миттєве прискорення точки

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}; \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} .$$

8. Проекції прискорення на осі координат

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z}.$$

9. Величина (модуль) прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

10. Величина (модуль) тангенціальної складової прискорення

$$a_\tau = \left|\frac{d\upsilon}{dt}\right|.$$

11. Величина (модуль) нормальної складової прискорення

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

де R – радіус кривини траєкторії.

12. Величина (модуль) повного прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

13. Кінематичне рівняння рівномірного прямолінійного руху

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t.$$

14. Кінематичне рівняння рівнозмінного прямолінійного руху

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t \pm \frac{a_x t^2}{2}.$$

Методичні вказівки і поради

При розв'язуванні задач з теми «Механіка» спершу слід уважно перечитати умову задачі, обрати систему відліку, в який розглядатиметься рух тіла, визначити початкові значення координат і пов'язати їх з обраним тілом відліку. Визначити характер руху (рівномірний, рівноприскорений) та вид траєкторії (прямолінійна, криволінійна). Для зручності зробити малюнок руху, описаного в задачі, і пов'язати його з обраною системою координат; показати напрями переміщення, швидкості, прискорення. Записати та розв'язати рівняння для заданого руху. Обчислити значення шуканих величин.

Для простих задач, в яких розглядається рівномірний рух, розв'язування задач зводиться до відшукання однієї з трьох величин, що входять до формули $S = \upsilon t$, якщо задані дві інші.

Якщо рух тіла є складним, тобто бере участь одночасно в кількох рівномірних прямолінійних рухах, розв'язування задачі слід починати із з'ясування цих складних рухів і, якщо потрібно, з відшукування їх швидкостей. Після цього за правилом паралелограма визначити напрям результуючого руху. Якщо швидкості складових рухів спрямовані вздовж однієї лінії, їх можна розглядати не як вектори, а як скалярні величини, вважаючи швидкості в одному напрямі (будь-якому) додатними, а в протилежному - від'ємними.

Якщо в задачах розглядається змінний рух, то при їх розв'язуванні використовують закони залежності від часу $S(t)$, $\upsilon(t)$ та $a(t)$. Пам'ятаючи при цьому, що величини S, υ, a можна знайти використовуючи диферен-ціювання або інгегрування заданих виразів.

Розв'язуючи задачі на рух тіл під дією сил тяжіння, наприклад, тіло кинуте вертикально вгору, слід використовувати закони для вільного падіння (рівносповільнений рух) $h = \frac{gt^2}{2}$ або якщо тіло кинуте з початковою швидкістю υ_0, тоді $h = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$.

Розглядаючи рух тіла, кинутого горизонтально, доцільно розкласти на два: рівномірний рух з початковою швидкістю υ_0 в напрямку осі ОХ та рівноприскореного (вільне падіння) в напрямку осі ОУ.

Для визначення повного прискорення тіла слід скористатись правилом додавання векторів тангенційного a_τ та нормального a_n прискорень.

Приклади розв'язування задач

1.1. ***Вантажний автомобіль по шосе проїхав*** $S_1 = 300\,км$ ***із швидкістю*** $\upsilon_1 = 50\,км/год$***, далі він звернув на грунтову дорогу і проїхав ще*** $S_2 = 120\,км$ ***із швидкістю*** $\upsilon_2 = 30\,км/год$***. Обчисліть середню швидкість вантажівки на всьому шляху.***

Дано:
$S_1 = 300\,км$
$\upsilon_1 = 50\,км/год$
$S_2 = 120\,км$
$\upsilon_2 = 30\,км/год$

$\langle \upsilon \rangle - ?$

Розв'язування

Середня швидкість обчислюється як

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t}, \tag{1}$$

де S - весь шлях, який проїхав автомобіль, t - весь час, який рухалась вантажівка. Тому

$$S = S_1 + S_2. \tag{2}$$

Вважаючи рух вантажівки рівномірним знайдемо час поїздки як

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S_1}{\upsilon_1} + \frac{S_2}{\upsilon_2}. \tag{3}$$

Підставимо (2) та (3) в вираз (1) отримаємо, що середня t_2 швидкість вантажного автомобіля становить

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S_1 + S_2}{\frac{S_1}{\upsilon_1} + \frac{S_2}{\upsilon_2}}. \tag{4}$$

Підставимо числові значення:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S_1 + S_2}{\frac{S_1}{\upsilon_1} + \frac{S_2}{\upsilon_2}} = \frac{300 + 120}{\frac{300}{50} + \frac{120}{30}} = 42\,км/год.$$

1.2. ***Велосипедист їхав з одного міста в інше. Половину шляху він проїхав із швидкість*** $\upsilon_1 = 12\,км/год$***. Наступну половину часу, який йому залишився, він проїхав із швидкістю*** $\upsilon_2 = 6\,км/год$***. Решта шляху він пройшов пішки із швидкістю*** $\upsilon_3 = 4\,км/год$***. Обчисліть середню швидкість велосипедиста на всьому шляху.***

Дано:

$\upsilon_1 = 12\,км/год$

$\upsilon_2 = 6\,км/год$

$\upsilon_3 = 4\,км/год$

$\langle \upsilon \rangle - ?$

Розв'язування

Для зручності скористаємось рис.1.1. Середня швидкість обчислюється як

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t}, \qquad (1)$$

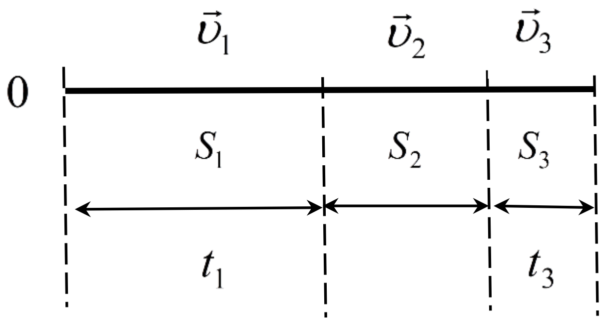


Рис.1.1.

де S – весь шлях, який проїхав автомобіль, t – весь час, який рухалась вантажівка. Тому

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

На кожному відрізку шляху маємо:

$$S_1 = \upsilon_1 t_1, \quad S_2 = \upsilon_2 t_2, \quad S_3 = \upsilon_3 t_3. \qquad (2)$$

За умовою задачі $S_1 = S_2 + S_3$ і $t_2 = t_3$. Тоді середня швидкість велосипедиста обчислюється як

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3}. \qquad (3)$$

Тут $$S_1 = \frac{S}{2}; \quad S_2 = x; \quad S_3 = \frac{S}{2} - x. \qquad (4)$$

Тоді час на кожній із цих ділянок буде рівний

$$t_1 = \frac{S}{2\upsilon_1}; \; t_2 = \frac{x}{\upsilon_2}; \; t_3 = \frac{S - 2x}{2\upsilon_3}. \qquad (5)$$

Знайдемо x виходячи з умови $t_2 = t_3$

$$\frac{x}{\upsilon_2} = \frac{S - 2x}{2\upsilon_3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{S\upsilon_2}{2(\upsilon_2 + \upsilon_3)}. \qquad (6)$$

Тоді

$$t_2 = t_3 = \frac{S}{2(\upsilon_2 + \upsilon_3)} \qquad (7)$$

Підставивши вираз (7) у вираз для середньої швидкості (3), отримаємо

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{\frac{S}{2\upsilon_1} + \frac{S}{2(\upsilon_2 + \upsilon_3)} + \frac{S}{2(\upsilon_2 + \upsilon_3)}} = \frac{2\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3)}{2\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3}. \qquad (7)$$

Щоб знайти середню швидкість велосипедиста, підставимо числові значення:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{2\upsilon_1(\upsilon_2+\upsilon_3)}{2\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3} = \frac{2\cdot 12\cdot(6+4)}{2\cdot 12+6+4} = 7{,}06\,м/с\,.$$

1.3. ***Два літаки одночасно вилітають по двох взаємно перпендикулярних напрямках. один із швидкістю*** $\upsilon_1 = 300\ км/год$***, другий із швидкістю*** $\upsilon_2 = 400\,км/год$***. Якою буде віддаль*** S ***між літаками, коли перший літак пролетить шлях*** $S_1 = 900\,км$***?***

Дано:
$\upsilon_1 = 300\ км/год$
$\upsilon_2 = 400\,км/год$
$S_1 = 900\,км$
$S - ?$

Розв'язування

Спершу слід намалювати рисунок (див.1.2). З рис. видно, що віддаль між літаками знаходиться як гіпотенуза прямокутного трикутник за теоремою Піфагора

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}\,. \qquad (1)$$

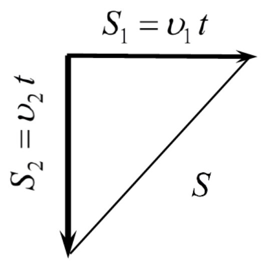


Рис.1.2.

Щоб знайти віддаль, яку пролетів другий літак, в той час коли перший пролетів 900 км, слід знати скільки часу затратив на це перший літак. Рух вважаєм рівномірним, тому $t = \dfrac{S_1}{\upsilon_1}$.

За цей час другий літак пролетить шлях рівний

$$S_2 = \upsilon_2 t = \upsilon_2\frac{S_1}{\upsilon_1}. \qquad (2)$$

Тоді відстань між літаками становитиме

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \sqrt{S_1^2 + \left(\upsilon_2\frac{S_1}{\upsilon_1}\right)^2} = S_1\sqrt{1+\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^2}\,. \qquad (3)$$

Підставимо числові значення

$$S = S_1\sqrt{1+\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^2} = 900\sqrt{1+\left(\frac{400}{300}\right)^2} = 1500\ км.$$

1.4. ***Пасажир поїзда, що їде зі швидкістю*** $\upsilon_1 = 54\,км/год$***,бачить протягом*** $t = 4\,с$ ***зустрічний поїзд завдовжки*** $l = 85\,м$***. З якою швидкістю їде зустрічний поїзд?***

Дано:	**Розв'язування**
$\upsilon_1 = 54\,км/год = 15\,м/с$ $t = 4с$ $l = 85\,м$	Оскільки поїзди рухаються назустріч, то сумарна швидкість їхня становить $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$. Час руху та довжина поїзда нам відомі, тому:
$\upsilon_2 - ?$	$$.\ \upsilon_1 + \upsilon_2 = \frac{l}{t} \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{l}{t} - \upsilon_1 \quad (1)$$

Підставимо числові значення та знайдемо швидкість другого поїзда:

$$\upsilon_2 = \frac{l}{t} - \upsilon_1 = \frac{85}{4} - 15 = 6{,}25с.$$

1.5. ***Між двома пунктами, розташованими на річці на віддалі $S = 100\,км$ один від одного, курсує катер. Катер проходить цю віддаль за течією за час $t_1 = 4год$, а проти течії за час $t_2 = 10год$. Визначити швидкість течії річки υ_1 і швидкість катера відносно води υ_2.***

Дано:	**Розв'язування**
$S = 100\,км$ $t_1 = 4год$ $t_2 = 10год$	Швидкість катера відносно берега за водою $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$. Тому він проходить відстань за час t_1: $$S = (\upsilon_1 + \upsilon_2)t_1. \quad (1)$$
$\upsilon_1 - ?$, $\upsilon_2 - ?$	Швидкість катера відносно берега проти течії $\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon_2$. Тому він проходить цю ж відстань за час t_2: $$S = (\upsilon_1 - \upsilon_2)t_2. \quad (2)$$

Розв'язавши ці два рівняння відносно невідомих υ_1 та υ_2 отримаємо:

$$\upsilon_1 = \frac{S(t_1 + t_2)}{2t_1t_2}, \qquad \upsilon_2 = \frac{S(t_2 - t_1)}{2t_1t_2}, \quad (3)$$

$$\upsilon_1 = \frac{S(t_1 + t_2)}{2t_1t_2} = \frac{100\cdot(4+10)}{2\cdot4\cdot10} = 17{,}5\,км/год,$$

$$\upsilon_2 = \frac{S(t_2 - t_1)}{2t_1t_2} = \frac{100\cdot(10-4)}{2\cdot4\cdot10} = 7{,}5\,км/год.$$

1.6. ***Вертикальний прямий дощ залишає на склі трамвая, що рухається із швидкістю $\upsilon' = 24\,км/год$, лінії під кутом $\alpha = 30^0$ до вертикалі. Знайти швидкість падіння крапель дощу υ.***

Дано:
$\upsilon' = 24\,км/год$
$\alpha = 30^0$
$\upsilon - ?$

Розв'язування

Виберемо за інерціальну систему відліку трамвай, що рухається рівномірно. Відносно нього дощова крапля бере участь у двох рухах: 1) вона вертикально падає згори вниз і 2) рівномірно рухається із швидкістю υ' у напрямі, протилежному напряму руху трамваю відносно землі (на рис.1.3. напрям руху трамваю вибрано зліва направо). З рис.1.3. видно, що

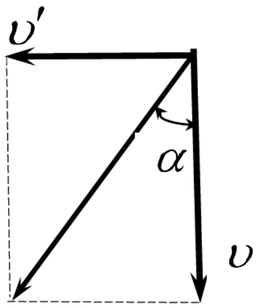


Рис.1.3.

$$tg\alpha = \frac{\upsilon'}{\upsilon}, \text{ звідки } \upsilon = \frac{\upsilon'}{tg\alpha}.$$

$$\upsilon = \frac{\upsilon'}{tg\alpha} = \frac{24}{tg30^0} = \approx 41{,}6\,км/год.$$

1.7. Пістолетна куля пробила два вертикально закріплені аркуші паперу відстань між якими $S = 30\,м$. Пробоїна у другому аркуші була на $\Delta h = 10\,см$ нижче ніж у першому. Визначити швидкість кулі, якщо до першого аркуша вона підлетіла, рухаючись горизонтально. Опором повітря нехтувати.

Дано:
$S = 30\,м$
$\Delta h = 10\,см$
$\upsilon - ?$

Розв'язування

Розглянемо рух кулі. Це складний рух, розкладемо його на прості.

OX: рух рівномірний

$$S = \upsilon t, \tag{1}$$

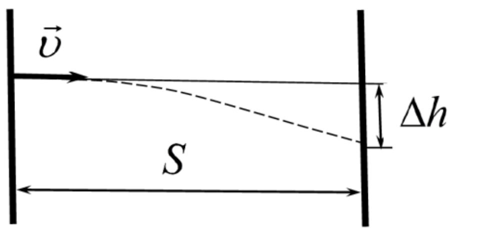


Рис.1.4.

υ – швидкість кулі.

OY: рух рівноприскорений – вільне падіння

$$\Delta h = \frac{g\,t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\,\Delta h}{g}}. \tag{2}$$

Час руху однаковий, тому $t = \sqrt{\dfrac{2\,\Delta h}{g}}$.

Тоді швидкість кулі буде: $\upsilon = S\sqrt{\dfrac{g}{2\Delta h}} = 30\sqrt{\dfrac{9{,}8}{2\cdot 0{,}1}} = 210\,м/с.$

1.8. ***З поверхні землі з однаковими швидкостями*** $\upsilon_0 = 15\,м/с$ ***послідовно через проміжок часу*** $\Delta t = 1с$ ***кинуто вгору два м'ячі. Визначити коли і на якій відстані від поверхні землі вони зустрінуться.***

Розв'язування

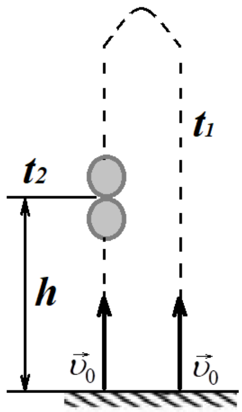


Рис.1.5.

Дано:
$\upsilon_0 = 15\,м/с$
$\Delta t = 1с$
$h - ?$
$t - ?$

М'ячі кидають вгору, їх рух – рівносповільнений, з прискоренням вільного падіння.

Запишемо рівняння залежності шляху від часу для кожного м'яча.

$$h_1 = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad (1)$$

$$h_2 = \upsilon_0 (t - \Delta t) - \frac{g(t-\Delta t)^2}{2}. \qquad (2)$$

Вони зустрінуться в той момент, коли шляхи будуть рівні. Отже, прирівняємо (1) та (2) та знайдемо час зустрічі.

$$\upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 (t - \Delta t) - \frac{g(t-\Delta t)^2}{2},$$

$$\upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 t - \upsilon_0 \Delta t - \frac{gt^2}{2} + gt\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2}. \qquad (3)$$

З рівняння (3) знайдемо час t:

$$t = \frac{\upsilon_0}{g} + \frac{\Delta t}{2}. \qquad (4)$$

Це час через який перший м'яч зустрінеться з другим, а час через який зустрінеться другий м'яч перший відповідно рівний: $t' = t - \Delta t$.

Щоб знайти на якій відстані від поверхні землі зустрінуться мячі, слід використати рівність (1) підставляючи в неї вже відомий час.

$$t = \frac{\upsilon_0}{g} + \frac{\Delta t}{2} = \frac{15}{9{,}8} + \frac{1}{2} = 2{,}3с,$$

$$h = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}..$$

Проведемо числовий розрахунок:

$$h = 15 \cdot 2{,}03 - \frac{9{,}8 \cdot 2{,}03^2}{2} = 10{,}25м.$$

1.9. ***Ціль, розміщену на пагорбі, видно з місця розташування гармати під кутом β над горизонтом. Відстань по горизонталі від гармати до цілі дорівнює L. Стрільбу ведуть з кутом піднімання над горизонтом α. Визначити швидкість υ_0 снаряда, що влучає в ціль.***

Дано:
α
β
L
$\upsilon_0 - ?$

Розв’язування

Зробимо рисунок. Виберемо початок координат точку вильоту снаряда, вектор початкової швидкості утворює з віссю X кут α, а ціль розташована в точці А. Оскільки ця точка повинна лежати на траєкторії снаряда, її координати ($x = L\cos\beta$, $y = L\sin\beta$) задовольняють рівняння траєкторії складного руху. Його слід розкласти на простіші. Вздовж осі OX це рівномірний рух, вздовж OY рівномірний рух:

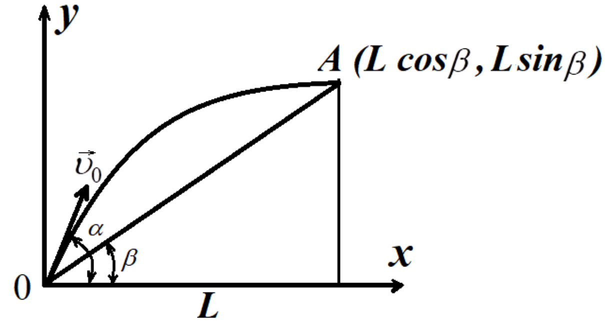


Рис. 1.6

$$OX: \quad x = \upsilon_0 \cos\alpha\, t, \tag{1}$$

$$OY: \quad y = \upsilon_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Траєкторія такого руху є парабола. Розв’язуючи рівняння (1) та (2) виключаючи t отримаємо:

$$y = tg\alpha\, x - \frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \tag{3}$$

У цю рінність підставимо координати x та y:

$$L\sin\beta = tg\alpha\, L\cos\beta - \frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha} L^2\cos^2\beta. \tag{4}$$

Звідси

$$\upsilon_0 = \cos\beta \sqrt{\frac{g\,L}{2\cos\alpha \sin(\alpha - \beta)}}. \tag{5}$$

1.10. ***Рухи двох матеріальних точок задаються рівняннями: $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$, $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, де A_1 = 10 м, B_1 = 4 м/с, C_1 = - 0,2 м/с^2, A_2 = 1 м, B_2 = 2 м/с, C_2 = 0,6 м/с^2. В який момент часу t швидкості цих точок будуть однаковими? Визначити швидкості υ_1 і υ_2 та прискорення α_1 і α_2 точок у цей момент.***

Дано:	**Розв'язування**
$x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ $A_1 = 10$ *м* $B_1 = 4$ *м/с* $C_1 = -0,2$ *м/с*^{2} $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$ $A_2 = 1$ *м* $B_2 = 2$ *м/с* $C_2 = 0,6$ *м/с*^{2}	
$\upsilon_1 = ?$ $\upsilon_2 = ?$ $\alpha_1 = ?$ $\alpha_2 = ?$	

Встановимо характер руху: тіло рухається прямолінійно, нерівномірно. За відомим законом руху необхідно знайти залежність швидкості υ і прискорення α тіла від часу.

Швидкість точок дорівнює першій похідній від шляху за часом:

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = B_1 + 2C_1t, \quad \upsilon_2 = \frac{dx_2}{dt} = B_2 + 2C_2t. \tag{1}$$

Прискорення точок дорівнює першій похідній від швидкості за часом:

$$a_1 = \frac{d\upsilon_1}{dt} = 2C_1, \quad a_2 = \frac{d\upsilon_2}{dt} = 2C_2. \tag{2}$$

За умовою задачі

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \quad \Rightarrow \quad B_1 + 2C_1t = B_2 + 2C_2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{B_1 - B_2}{2(C_2 - C_1)}. \tag{3}$$

Підставимо вираз для часу (3) в (1):

$$\upsilon_1 = B_1 + C_1\frac{B_1 - B_2}{(C_2 - C_1)}, \quad \upsilon_2 = B_2 + C_2\frac{B_1 - B_2}{(C_2 - C_1)}. \tag{4}$$

Проведемо числовий розрахунок:

$$t = \frac{4-2}{2(0,6+0,2)} = 1,25c,$$

$$\upsilon_1 = (4 - 2\cdot 0,2\cdot 1,25) = 3,5\,м/с, \quad \upsilon_2 = (2 + 2\cdot 0,6\cdot 1,25) = 3,5\,м/с,$$

$$a_1 = -0,4\,м/с^2, \qquad a_2 = 1,2\,м/с^2.$$

1.11. ***Залежність пройденого тілом шляху від часу описує рівняння $S = Ct^2 + Ht^4$, де $C = -9$ м/с^2, $H = 0,25$ м/с^4. Визначити екстремальне значення швидкості тіла.***

Дано:	**Розв'язування**
$S = Ct^2 + Ht^4$ $C = -9$ *м/с* $H = 0,25$ *м/с*^{4}	
$\upsilon_{\min} = ?$	

Швидкість тіла дорівнює першій похідній від шляху за часом:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 2Ct + 4Ht^3. \tag{1}$$

Умова екстремальної швидкості:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 2C + 12Ht^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{-C}{6H}} = \sqrt{\frac{9}{6 \cdot 0{,}25}} = \sqrt{6} = 2{,}45c \qquad (2)$$

Підставляємо час (2) у вираз (1) і знаходимо екстремальне значення швидкості тіла:

$$\upsilon_{\min} = [-2 \cdot 9 \cdot 2{,}45 + 4 \cdot 0{,}25 \cdot (2{,}45)^3] = -29{,}4\,м/c.$$

1.12. ***Рушаючи з місця, автобус рухається спочатку по прямолінійній ділянці шляху, збільшуючи свій шлях пропорційно до квадрату часу S = kt²* (t – в секундах, s– в метрах). Протягом першої хвилини він пройшов шлях S = 1000 м. Визначити швидкість і прискорення в момент часу t=10 с.**

Дано:
$S = 1000\,м$
$S = k\,t^2$
$t = 10\,c$

υ - ?, a - ?

Розв'язування

Звернемо увагу на те, що автобус рухається поступально, тому досить вивчити рух будь-якої точки автобуса.

За умовою задачі закон руху точки описується рівністю:

$$S = kt^2. \qquad (1)$$

Визначимо коефіцієнт k скориставшись тим, що протягом $t = 60\,c$ автобус пройшов шлях $S = 1000\,м$:

$$k = \frac{S}{t^2} = \frac{1000}{60^2} \approx 0{,}28\,м/c^2. \qquad (2)$$

Отже, закон руху точки має вигляд:

$$S = 0{,}28t^2\,(м). \qquad (3)$$

Використовуючи (3) знайдемо швидкість за формулою:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 0{,}56t\ \ м/с. \qquad (4)$$

В момент часу $t = 10\,c$:

$$\upsilon = 0{,}56 \cdot 10 = 5{,}6\ \ м/с.$$

Оскільки за умовою задачі рух відбувається по прямолінійній ділянці, то:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = 0, \quad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \quad a_\tau = 0{,}56\ \ м/c^2.$$

1.13. ***Знайти рівняння траєкторії точки і визначити закон її руху по траєкторії, відраховуючи відстань від початкового положення, що відповідає t = 0, якщо рівняння руху точки мають вигляд:*** $x = 2 - 4\cos 5t$ ***;*** $y = 4\sin 5t - 1$ ***(x і y– в метрах, t– в секундах).***

Дано:
$x = 2 - 4\cos 5t$
$y = 4\sin 5t - 1$
$t = 0$ *с*

s- ?

Розв'язування

Спочатку визначимо траєкторію точки, для чого перепишемо рівняння у вигляді:

$$-4\cos 5t = x - 2, \qquad 4\sin 5t = y + 1. \tag{1}$$

Кожне з цих рівнянь піднесемо до квадрату і додамо їх, отримаємо рівняння траєкторії у вигляді:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4^2. \tag{2}$$

Отже, траєкторією руху є коло радіусом $R = 4$ *м* з центром в точці (2; –1).

Для знаходження закону руху точки вздовж траєкторії визначимо спочатку диференціал дуги траєкторії:

$$dS = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt, \tag{3}$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = 20\sin 5t, \; y' = \frac{dy}{dt} = 20\cos 5t,$$

$$dS = \sqrt{20^2\sin^2 5t + 20^2\cos^2 5t}dt = 20dt. \tag{4}$$

Отже,

$$S = \int 20dt = 20t + C. \tag{5}$$

Для визначення сталої інтегрування C врахуємо початкові умови руху точки: при $t = 0$, $S = 0$. Тоді $C = 0$. Таким чином, закон руху точки має вигляд:

$$S = 20t \; (м). \tag{6}$$

1.14. ***Рух матеріальної точки в площині xy описується рівнянням x = At, y = At + Bt²*****, де** ***A = 0,5 м/с, B = -1 м/с². Отримати рівняння траєкторії матеріальної точки y(x), швидкість υ точки в момент часу t₁ = 0,5 с, прискорення α точки, момент часу t₂, коли кут між швидкістю і прискоренням α = π/4.***

Дано:
$x = At$
$y = At + Bt^2$
$A = 0{,}5$ *м/с*
$B = -1$ *м/с*^{2}
$t_1 = 0.5$ *с*
$\alpha = \pi/4$
υ - ? a - ? t_2 -?

Розв'язування

За умовою задачі рух матеріальної точки відбувається в площині та задається двома координатами x, y. Запишемо рівняння руху, виключивши з двох рівняннь змінну часу t:

$$t = \frac{x}{A} \quad \Rightarrow \quad y = A\frac{x}{A} + B\left(\frac{x}{A}\right)^2 = x + \frac{B}{A^2}x^2. \qquad (1)$$

Враховуючи значення A, B (1) запишеться як:

$$y = x - 4x^2. \qquad (2)$$

Знайдемо проекції вектора швидкості на координати x та y, враховуючи, що $\upsilon_x = x'$ та $\upsilon_y = y'$:

$$\upsilon_x = A \quad \text{та} \quad \upsilon_y = A + 2Bt_1 \ . \qquad (3)$$

Враховуючи (3) вектор швидкості рівний:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{A^2 + (A + 2Bt_1)^2}. \qquad (4)$$

Підставляючи числові значення в (4), отримаємо:

$$\upsilon = \sqrt{0{,}5^2 + (0{,}5 - 2 \cdot 0{,}8)^2} = 1{,}2\, м/с.$$

За аналогією, знайдемо проекції вектора прискорення на коордитатні осі x та y, враховуючи, що $a_x = \upsilon_x'$ та $a_y = \upsilon_y'$:

$$a_x = 0 \quad \text{та} \quad a_y = 2B \ , \quad a_y = -2\, м/с^2 . \qquad (5)$$

Враховуючи (5) прискорення матеріальної точки рівне:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\, м/с^2 . \qquad (6)$$

Для знаходження моменту часу t_2, коли кут між швидкістю і прискоренням $\alpha = \pi/4$, скористаємось визначенням для косинуса цього кута та виразом швидкості (4):

$$\cos\alpha = \frac{a_\tau}{a}, \quad \upsilon = a_\tau t_2, \quad a_\tau = \frac{\upsilon}{t_2} \quad \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{A^2 + (A + 2Bt_2)^2}}{2Bt_2} \qquad .(7)$$

Піднесемо ліву та праву частини (7) до квадрату, підставимо числові значення та знайдемо час:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 4B^2t_2^2 = A^2 + A^2 + 4ABt_2 + 4B^2t_2^2; \quad 2B^2t_2^2 + 4ABt_2 + 2A^2 = 0$$

$$2t_2^2 - 2t_2 + 0{,}5 = 0; \quad t_2 = 0{,}5c.$$

1.15. ***Залежність швидкості тіла від часу задається рівнянням $\upsilon = A + Bt + Ct^2$, де $A = 4$ м/с, $B = 2$ м/с^2, $C = 0{,}3$ м/с^3. Який шлях проходить тіло за проміжок часу від $t_1 = 2$ с до $t_2 = 5$ с? Яка середня швидкість $<\upsilon>$ тіла і середнє прискорення $<a>$ за цей проміжок часу?***

Дано:
$\upsilon = A + Bt + Ct^2$
$A = 4$ м/с
$B = 2$ м/с^2
$C = 0{,}3$ м/с^3
$t_1 = 2$ с
$t_2 = 5$ с

ΔS – ?
$<\upsilon>$ – ?
$<a>$ – ?

Розв'язування

Оскільки швидкість тіла від часу задається рівнянням

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}, \text{ то } \quad dS = \upsilon dt. \qquad (1)$$

Проінтегрувавши цей вираз (1), знайдемо шлях, який проходить тіло за проміжок часу від t_1 до t_2:

$$\int_{S_1}^{S_2} dS = \int_{t_1}^{t_2} (A + Bt + Ct^2)dt,$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = A(t_2 - t_1) + \frac{B}{2}(t_2^2 - t_1^2) + \frac{C}{3}(t_2^3 - t_1^3). \qquad (2)$$

Середня швидкість дорівнює:

$$<\upsilon> = \frac{\Delta S}{t_2 - t_1}, \qquad (3)$$

а середнє прискорення –

$$<a> = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{3B + 21C}{t_2 - t_1}. \qquad (4)$$

Підставляємо числові значення в (2)–(5) і проводимо розрахунок:

$$\Delta S = (4 \cdot 3 + 1 \cdot 21 + 0{,}1 \cdot 117) = 44.7 м,$$

$$<\upsilon> = \frac{\Delta S}{t_2 - t_1} = \frac{44{,}7}{3} = 14{,}9\, м/с,$$

$$<a> = \frac{3 \cdot 2 + 21 \cdot 0{,}3}{3} = 4{,}1\, м/с^2.$$

1.16. ***Автомобіль під час руху сповільнюється за законом*** $a = -\beta\sqrt{\upsilon}$***, де β– додатна стала;*** υ***– швидкість автомобіля. На початку руху швидкість автомобіля становила*** υ_0***. За який час t₀ автомобіль зупиниться остаточно? Який шлях S необхідний для повної зупинки автомобіля?***

Дано:

$a = -\beta\sqrt{\upsilon}$

$\beta > 0$

υ_0

---

t_0= ?

S = ?

Розв'язування

За визначенням, прискорення $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$. Порівнявши це з умовою задачі, маємо $-\beta\sqrt{\upsilon} = \dfrac{d\upsilon}{dt}$.

Розділимо змінні: $-\beta dt = \dfrac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon}}$ та проінтегруємо:

$$-\int \beta dt = \int \upsilon^{-0.5} d\upsilon \Rightarrow 2\sqrt{\upsilon} = -\beta t + C,$$

де C– стала інтегрування, яку необхідно визначити. Використавши початкові умови визначаємо C: для t = 0 (на початку руху) величина $\upsilon = \upsilon_0$ – початкова швидкість, тобто $2\sqrt{\upsilon_0} = -\beta\cdot 0 + C \Rightarrow 2\sqrt{\upsilon_0} = C$.

Таким чином,

$$2\sqrt{\upsilon} = -\beta t + 2\sqrt{\upsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{\beta t}{2}\right)^2.$$

Зупинка автомобіля характеризується тим, що його швидкість $\upsilon = 0$, це відповідає умові: $\sqrt{\upsilon_0} = \dfrac{\beta t_0}{2}$, де t_0 – час до зупинки. Отже,

$$t_0 = \frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\beta}.$$

Шлях до зупинки дорівнює:

$$S = \int_0^{t_0} \upsilon dt = \int_0^{t_0} \left(\upsilon_0 + \frac{\beta^2 t^2}{4} - \beta\sqrt{\upsilon_0}\, t\right) dt = \upsilon_0 t_0 + \frac{\beta^2 {t_0}^3}{12} - \frac{\beta\sqrt{\upsilon_0}\,{t_0}^2}{2}.$$

Врахувавши час повної зупинки отримаємо:

$$S = \upsilon_0 \cdot \left(\frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\beta}\right) + \frac{\beta^2}{12}\cdot\left(\frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\beta}\right)^3 - \frac{\beta\sqrt{\upsilon_0}}{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\beta}\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{{\upsilon_0}^{3/2}}{\beta}.$$

1.17. ***Ракета, встановлена в момент старту на висоті H_0 = 5 м над поверхнею Землі, рухається вгору з прискоренням, яке з часом змінюється за законом $a = kt^2$, де k = 1,5 м/с^4. На якій висоті над поверхнею Землі буде ракета через час t = 6 с після старту?***

Дано:
H_0 = 5 *м*
$a = kt^2$
k = 1,5 *м/с*^{4}
t = 6 *с*
H = ?

Розв'язування

За умовою задачі рух ракети – рівноприскорений. Знайдемо залежність пройденого шляху від часу. Для цього використаємо визначення для швидкості руху та методом інтегрування знайдемо вираз для знаходження шляху (висоти $H(t)$):

$$\frac{dH}{dt} = \upsilon \quad \Rightarrow \quad H = \int \upsilon dt. \tag{1}$$

Щоб знайти вираз залежності швидкості від часу, скористаємось визначенням для прискоренням та умовою задачі:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = kt^2, \qquad \upsilon = \int a dt = \int kt^2 dt = k\frac{t^3}{3} + C. \tag{2}$$

Ракета починає рух без початкової швидкості, тому на час $t = 0$ $\upsilon = 0$ сталу інтегрування можна прийняти як $C = 0$. Тоді:

$$\upsilon = \frac{kt^3}{3}. \tag{3}$$

Підставимо вираз (3) в (1) отримаємо:

$$H = \int \frac{1}{3} kt^3 dt = \frac{k}{12} t^4 + C_1. \tag{4}$$

Тут C_1 – стала інтегрування. На момент часу $t = 0$ точка відліку (висота, з якої розпочався рух ракети) за умовою задачі рівна $C_1 = H_0$. З врахуванням цього, рівність (4) запишеться як:

$$H = H_0 + \frac{k}{12} t^4. \tag{5}$$

Знайдемо числове значення використовуючи рівність (5):

$$H = (5 + \frac{1,5}{12} \cdot 6^4) = 167 м.$$

1.18. ***Матеріальна точка рухається рівноприскорено по колу радіусом R = 5 м. За час t = 7 с вона проходить шлях S = 38 м. Через скільки секунд після початку руху її повне прискорення дорівнюватиме a = 4,6 м/с² ?***

Дано:
$R = 5$ *м*
$S = 38$ *м*
$a = 4{,}6$ м/с^2
$t = 7$ *с*

$t_1 = ?$

Розв'язування

Модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,, \tag{1}$$

де a_n – нормальне, a_τ – тангенціальне прискорення. При цьому русі тангенціальне прискорення є сталою величиною, а нормальне – буде змінюватись, оскільки воно залежить від лінійної швидкості, яка змінюється. Тангенціальне прискорення можна визначити з формули:

$$S = \int_0^t \upsilon dt = \int_0^t a_\tau t dt = \frac{a_\tau t^2}{2}, \tag{2}$$

звідки

$$a_\tau = \frac{2S}{t^2}. \tag{3}$$

В момент часу t_1, коли повне прискорення буде мати значення a, лінійна швидкість

$$\upsilon = a_\tau t_1,$$

а нормальне прискорення

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{4S^2 t_1^2}{t^4 R}. \tag{4}$$

Тоді є можливість записати, що

$$a^2 = \frac{16 s^4 t_1^4}{t^8 R} + \frac{4S^2}{t^4}. \tag{5}$$

З виразу (5) можна визначити шукану величину

$$t_1 = \frac{t}{2S}\left[R^2(a^2 t^4 - 4S^2)\right]^{1/4}.$$

Після підстановки числових даних знаходимо:

$$t_1 = \frac{7}{2\cdot 38}\cdot\left[5^2\cdot(4{,}6^2\cdot 7^4 - 4\cdot 38^2)\right]^{1/4} c,$$

$$t_1 = 3\,c\,.$$

1.19. ***Точка рухається по колу зі швидкістю*** υ **=** ***Bt, де B*** **=** 0,75 ***м/с***^{2}**.** ***Після початку руху вона проходить шлях, рівний*** *0,2* ***довжини кола. Визначити повне прискорення*** α ***точки в цей момент часу.***

Дано:	
$\upsilon = Bt$	
$B = 0{,}75$ *м/с*^{2}	
$S = 0{,}2L$	
α = ?	

Розв'язування

Модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ , \tag{1}$$

де a_n – нормальне, a_τ – тангенціальне прискорення. Танген-ціальне прискорення можна визначити з формули:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = B. \tag{2}$$

Нормальне прискорення

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{B^2 t^2}{R}, \tag{3}$$

де R – радіус кола. За умовою задачі

$$0{,}2 \cdot 2\pi R = \upsilon t = Bt^2. \tag{4}$$

Підставивши вираз (4) в (3), отримаємо:

$$a_n = \frac{0{,}2 \cdot 2\pi RB}{R} = 0{,}2 \cdot 2\pi B. \tag{5}$$

В результаті

$$a = \sqrt{B^2[1 + (0{,}2 \cdot 2\pi)^2]} = B\sqrt{1 + (0{,}2 \cdot 2\pi)^2}.$$

Після підстановки числових даних знаходимо:

$$a = 0{,}75 \cdot \sqrt{1 + (0{,}2 \cdot 2 \cdot 3{,}14)^2} = 1{,}2\, м/c^2.$$

1.20. ***Нормальне прискорення точки, що рухається по колу радіусом R*** **=** 4 ***м, змінюється за законом*** α_n**= A + Bt + Ct**^{2}**,** ***де A*** **= 1** ***м/с***^{2}**,** ***B*** **= 3** ***м/с***^{3}**,** ***C*** = *2,25* ***м/с***^{4}**.** ***Визначити тангенціальне прискорення*** α_τ ***точки, шлях, що пройшла точка за час t***$_1$ ***= 6 с після початку руху, повне прискорення*** α ***у момент часу t***$_2$**=**$\frac{2}{3}$ ***с.***

Дано:
$R = 4$ *м*
$\alpha_n = A + Bt + Ct^2$
$A = 1$ *м/с*^{2}
$B = 3$ *м/с*^{3}
$C = 2{,}25$ *м/с*^{4}
$t_1 = 6$ *с*
$t_2 = 2/3$ *с*
$\alpha_\tau = ?$ $\alpha = ?$
$S = ?$

Розв'язування

Нормальне прискорення точки

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = A + Bt + Ct^2. \tag{1}$$

Звідси швидкість

$$\upsilon = \sqrt{R(A + Bt + Ct^2)} = \sqrt{4(1 + 3t + 2{,}25t^2)} = \\ = 2\sqrt{(1 + 1{,}5t)^2} = 2 + 3t. \tag{2}$$

Тангенціальне прискорення можна визначити з формули:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 3\,м/с^2. \tag{3}$$

Модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(A + Bt_2 + Ct_2^2)^2 + 3^2}\,. \tag{4}$$

Підставимо числові значення:

$$a = \sqrt{(1 + 3\cdot\frac{2}{3} + 2{,}25\cdot\frac{4}{9})^2 + 9} = 5\,м/с^2.$$

Шлях, який проходить точка за час t_1:

$$S = \int_0^{t_1}(2 + 3t)\,dt = 2t_1 + \frac{3}{2}t_1^2\,. \tag{5}$$

Підставимо числові значення:

$$S = (2\cdot 6 + \frac{3}{2}\cdot 36) = 66\,м.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Одну половину часу велосипедист рухався зі швидкістю $\upsilon_1 = 10\,км/год$, а іншу – $\upsilon_2 = 30\,км/год$. Визначити середню швидкість $\langle\upsilon\rangle$ велосипедиста за весь час. (**20 *км/год***)

1.2. Першу половину дистанції велосипедист пройшов із швидкістю $\upsilon_1 = 10\,км/год$, а другу – $\upsilon_2 = 30\,км/год$. Визначити середню швидкість $\langle\upsilon\rangle$ велосипедиста на всій дистанції. (**15 *км/год***)

1.3. Мотоцикліст проїхав 40% шляху між двома містами зі швидкістю $\upsilon_1 = 72\, км/год$, а решту – зі швидкістю $\upsilon_2 = 54\, км/год$. Визначити середню швидкість $\langle \upsilon \rangle$ мотоцикліста на всьому шляху. (**60 *км/год***)

1.4. Тіло послідовно здійснює два переміщення однакові величини. Перше – зі швидкістю $\upsilon_1 = 20\, м/с$ під кутом $\alpha = 60^0$, а друге – зі швидкістю $\upsilon_2 = 40\, м/с$ під кутом $\beta = 120^0$ до напрямку осі OX. Визначити модуль і напрям середньої швидкості $\langle \upsilon \rangle$ переміщення тіла на всьому шляху. (**23.1 *м/с*, вдовж осі OY**)

1.5. Вершник за перші $t_1 = 40 хв$ проїхав $S_1 = 5 км$. Наступну годину він рухався зі швидкістю $\upsilon_2 = 10\, км/год$. решту шляху $S_3 = 6 км$ він подолав зі швидкість $\upsilon_3 = 12\, км/год$. Яка середня швидкість вершника на всьому шляху, за першу годину руху та на першій половині шляху? (**9,7 *км\год*, 8,3 *км\год*, 8,6 *км\год***)

1.6. Пасажир їде в поїзді швидкість якого $\upsilon_1 = 60\, км/год$. Назустріч поїзду рухається товарний поїзд завдовжки $l = 1 км$ зі швидкістю $\upsilon_2 = 40\, км/год$. Скільки часу товарний поїзд рухатиметься повз пасажирку? (**36 *с***)

1.7. З пункта А до пункта В автомобіль рухався зі швидкістю $\upsilon_1 = 60\, км/год$, а повертався – зі швидкістю $\upsilon_2 = 40\, км/год$. Визначити середню швидкість автомобіля за весь час руху. (**48 *м/с***)

1.8. Скутер, який має швидкість $\upsilon_1 = 90\, км/год$, за відсутності течії проходить від корми до носа пароплава й назад за $t = 37{,}5 с$. Визначити швидкість пароплава υ_2, якщо його довжина дорівнює $L = 300\, м$. (**54 *км/год***)

1.9. З катера, що йде за течією річки, випав рятувальний круг. Через $t = 45 хв$ це виявили й повернули назад. Визначити швидкість течії υ, якщо круг зустріли на відстані $l = 3\, км$ нижче місця, де загубили. (**2 *км/год***)

1.10. М'яч, кинутий вертикально вгору, впав на землю через $t = 3\, с$. Визначити початкову швидкість υ_0 м'яча. (**15 *м/с***)

1.11. Парашутист у стрибку з висоти $h = 200\, м$ розкриває парашут із затримкою $\Delta t = 5\, с$. Визначити швидкість υ парашутиста та відстань до землі на момент розкриття парашута. (**50 *м/с*, 75 *м***)

1.12. З даху будинку висотою $h = 28\, м$ кинули вгору камінь зі швидкістю $\upsilon_0 = 8\, м/с$. Визначити, з якою швидкістю υ камінь упаде на землю. (**25 *м/с***)

1.13. З гелікоптера, що завис, з інтервалом $\Delta t = 1\,с$ скинули без початкової швидкості два вантажі. Визначити відстань між вантажами через $t_1 = 2\,с$ та $t_2 = 4\,с$ після початку падіння першого вантажу. (**15 *м*; 35 *м***)

1.14. Снаряд, випущений під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту, побував на деякій висоті двічі: через $t_1 = 3\,с$ і $t_2 = 5\,с$ з моменту пострілу. Визначити початкову швидкість υ_0 та максимальну висоту $h_{\max}$ підйому снаряда. (**80 *м/с*; 80 *м***)

1.15. М'яч, кинутий горизонтально, вдаряється об стінку, що знаходиться на відстані $l = 5\,м$ від місця кидання. Висота місця удару м'яча об стінку на $\Delta h = 1\,м$ менше висоти h, з якою кинутий м'яч. З якою швидкістю υ_0 кинутий м'яч? Під яким кутом φ м'яч підлітає до поверхні стінки? (**11,1 *м/с*; 68,2^0**)

1.16. Тіло, що рухається рівноприскорено зі стану спокою, за час $t = 5с$ пройшло відстань L=200 м. Яку відстань тіло пройде за час $t_1 = 2с$? (**32 *м***)

1.17. Шлях, який проходить літак під час посадки до повної зупинки, становить s = 1000 м. Який шлях пройде літак за першу половину часу гальмування? (**750 *м***)

1.18. Куля, що рухається вертикально гору, пробиває горизонтальних крилах літака два отвори, зміщені один відносно одного на відстані $S = 15\,см$. Швидкість літака $\upsilon_0 = 500\,км/год$. Відстань між крилами $l = 2м$. Знайти швидкість кулі. (**~1852 *м/с***)

1.19. Поїзд, рухаючись від зупинки, за час $t_1 = 10с$ набув швидкості $\upsilon_1 = 0{,}9\,м/с$. Який шлях пройде поїзд до моменту, коли його швидкість становитиме $\upsilon_2 = 2{,}7\,м/с$? (**40,5 *м***)

1.20. Дві матеріальні точки рухаються згідно з рівняннями: $x_1 = 2 + 23t^2 - t^3$, $x_2 = 4t + 11t^2 + t^3$. В який момент часу прискорення цих точок будуть однаковими? Визначити швидкості точок у цей момент часу. (**2 *с*; 80 *м/с*; 60 *м/с***)

1.21. Матеріальна точка рухається по колу згідно з рівнянням $s = 6t + \frac{1}{8}t^2$ (довжина дуги s вимірюється у метрах, час – у секундах). Визначити тангенціальне прискорення точки в момент часу t = 2 с . (**0,25 *м/с²***)

1.22. Матеріальна точка рухається по колу радіусом R = 1 м згідно з рівнянням $s = 6t + \frac{1}{8}t^2$, де довжина дуги s вимірюється у метрах, час – у секундах. Визначити нормальне прискорення точки в момент часу t = 2 с.(**42,25 *м/с²***)

1.23. Залежність швидкості тіла від часу записується рівнянням $\upsilon = 2 + 3t$. Який шлях проходить тіло за проміжок часу від $t_1 = 0$ с до $t_2 = 3$ с? (**19,5 *м***)

1.24. Тіло починає рухатись по колу з тангенціальним прискоренням, що змінюється за законом $a_\tau = 2t$. Через час $t = 2$ с нормальне прискорення тіла становитиме $a_n = 2$ м/с^2. Визначити радіус кола. (**8 *м***)

1.25. Під час рівноприскореного руху тіла по колу в деякий момент часу його нормальне прискорення у $\sqrt{3}$ разів більше за величину тангенціального прискорення. Визначити кут між векторами швидкості і повного прискорення тіла у цей момент. (**60^0**)

1.26. Точка рухається по колу зі швидкістю $\upsilon = 0{,}75t$. Після початку руху вона проходить шлях, який дорівнює 0,2 довжини кола. Визначити повне прискорення точки у цей момент часу. (**1.2 *м/с^2***)

1.27. Матеріальна точка починає рухатися за годинниковою стрілкою по колу радіусом $R = 0{,}2$ м зі сталим тангенціальним прискоренням $a_\tau = 0{,}15$ м/с^2. Через який час вектор прискорення утворить з вектором швидкості кут $\alpha = 60°$? Який шлях пройде за цей час рухома точка? (**1,52 *с*; 0,17 *м***)

Тести

1.1. Закінчити речення: «Механічним рухом називається...

А) ...рух тіла відносно інших тіл»;
Б) ...зміна положення тіла відносно інших тіл»;
В) ...зміна положення тіла відносно інших тіл з плином часу»;
Г) ...пройдений шлях»;
Д) ...зміна з часом агрегатного стану тіла».

1.2. Траєкторією називається:

А) пряма лінія; **Б)** крива або ламана лiній;
В) лінія будь-якої форми; **Г)** уявна лінія, яку описує тіло під час руху;
Д) відрізок, що з’єднує початкове положення тіла з кінцевим.

1.3. Закінчити речення: «Матеріальною точкою називають...

А) ...тіло малих розмірів»;
Б) ...тіло, розмірами якого можна знехтувати у даних умовах руху»;
В) ...тіло, що перебуває у спокої»; **Г)** ...точку на площині»;
Д) ...будь-яке фізичне тіло».

1.4. Вектором переміщення називається:

А) вектор, проведений з центра системи координат до початкового положення рухомої точки;

Б) вектор, проведений з початкового положення рухомої точки у положення її в певний момент часу;

В) вектор, який починається в початковому положенні рухомої точки і спрямований вздовж дотичної до траєкторії у бік руху;

Г) вектор, який починається в кінцевому положенні рухомої точки і спрямованих вздовж вектора середньої швидкості;

Д) вектор, проведений з центра системи координат до кінцевого положення рухомої точки.

1.5. Який вираз визначає вектор миттєвої швидкості?

А) $\dfrac{ds}{dt}$; **Б)** $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$; **В)** $\dfrac{d\vec{s}}{dt}$; **Г)** $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$; **Д)** $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

1.6. Рівноприскорений рух – це рух тіла, під час якого швидкість за будь-які рівні інтервали часу:

А) змінюється по-різному; **Б)** не змінюється;

В) змінюється однаково; **Г)** змінює напрямок;

1.7. Які вирази визначають вектор миттєвого прискорення?

1. $\dfrac{d^2s}{dt^2}$; 2. $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$; 3. $\dfrac{d\upsilon}{dt}$; 4. $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$; 5. $\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

А) 1, 3, 5; **Б)** всі; **В)** 2, 4; **Г)** жоден; **Д)** 2, 3, 4.

1.8. Тангенціальним прискоренням називається:

А) складова прискорення, яка характеризує зміну швидкості за величиною і напрямком;

Б) складова прискорення, яка характеризує зміну швидкості за напрямком;

В) складова прискорення, яка характеризує зміну швидкості за величиною;

Г) складова прискорення, яка дорівнює нулю, якщо рух тіла прямолінійний і рівнозмінний;

Д) складова прискорення, що не дорівнює нулю під час рівномірного руху по колу.

1.9. Нормальним прискоренням називається:

А) складова прискорення, яка характеризує зміну швидкості за величиною;

Б) складова прискорення, яка характеризує зміну швидкості за величиною і напрямком;

В) швидкість зміни вектора швидкості;

Г) складова прискорення, яка характеризує зміну швидкості за напрямком;

Д) складова прискорення, яка дорівнює нулю під час рівномірного руху по колу.

1.10. Який вираз визначає модуль тангенціального прискорення?

А) $\dfrac{d\upsilon}{dt}$; **Б)** $\dfrac{\upsilon}{R}$; **В)** $\dfrac{d^2\upsilon}{dt^2}$; **Г)** $\dfrac{ds}{dt}$; **Д)** $\dfrac{dr}{dt}$.

1.11. Який вираз визначає модуль нормального прискорення?

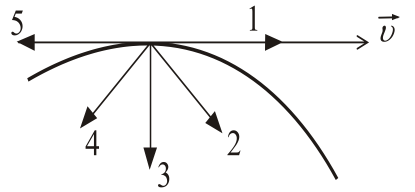
А) $\dfrac{d\upsilon}{dt}$; **Б)** $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)\cdot\dfrac{1}{R}$; **В)** $\dfrac{\upsilon^2}{R}$; **Г)** $\dfrac{d^2s}{dt^2}$; **Д)** $\dfrac{\upsilon}{R^2}$.

1.12. За яких значень тангенціальної та нормальної складових прискорення рух точки буде прямолінійним і рівнозмінним?

А) $a_\tau = \text{const},\ a_n = 0$; **Б)** $a_\tau > 0,\ a_n \neq 0$; **В)** $a_\tau = f(t),\ a_n = 0$;

Г) $a_\tau = \text{const},\ a_n \neq 0$; **Д)** $a_\tau = 0,\ a_n = 0$.

1.13. Напрямок вектора повного прискорення збігається з вектором:



А) 1; **Б)** 2; **В)** 3;

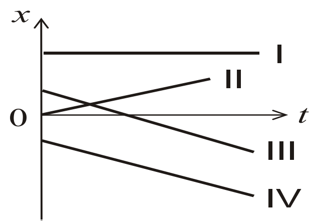
Г) 4; **Д)** 5.

1.14. Який вираз визначає модуль повного прискорення?

А) $a = a_\tau + a_n$; **Б)** $a = a_\tau^2 + a_n^2$; **В)** $a = \sqrt{a_\tau + a_n}$;

Г) $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; **Д)** $a = a_\tau^2 - a_n^2$.

1.15. Яке тіло рухається рівномірно прямолінійно у напрямку осі $0x$

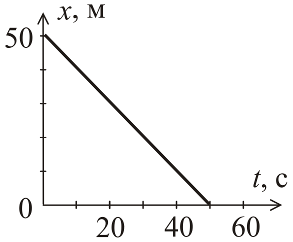


А) I; **Б)** II;

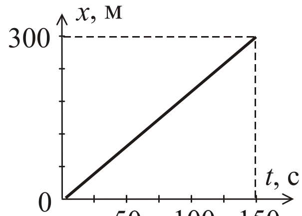
В) III; **Г)** IV;

Д) усі тіла рухаються рівномірно прямолінійно.

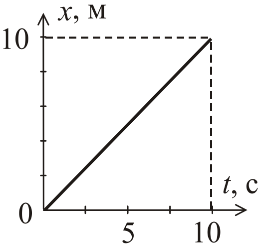
1.16. Вибрати графік рівномірного руху тіла, швидкість якого є найбільшою.



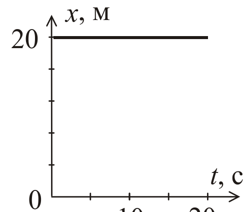
А)



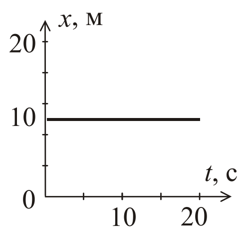
Б)



В)



Г)



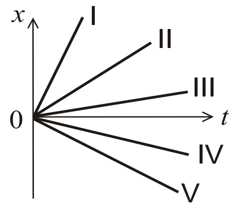
Д)

1.17. Рівняння руху матеріальної точки має вигляд: $x = 24 - 3t$. Визначити момент часу (у с), коли матеріальна точка перебуватиме в початку координат.

А) 24; **Б)** 8; **В)** 4; **Г)** 6; **Д)** 12

1.18. За графіками визначити тіло, яке рухається з меншою за модулем швидкістю у напрямку осі $0x$.

А) I; **Б)** II; **В)** III; **Г)** IV; **Д)** V.

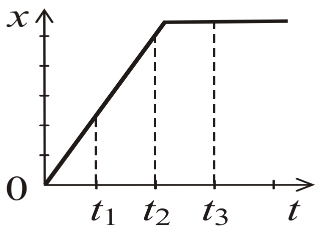


1.19. Порівняти швидкості тіла у моменти часу t_1, t_2, t_3.

А) $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3$; **Б)** $\upsilon_1 < \upsilon_2 < \upsilon_3$;

В) $\upsilon_1 = \upsilon_2 < \upsilon_3$; **Г)** $\upsilon_1 = \upsilon_2 > \upsilon_3$;

Д) $\upsilon_1 > \upsilon_2 > \upsilon_3$.



1.20. Початкова швидкість матеріальної точки υ_0, прискорення a. Яким рівнянням описується рух матеріальної точки?

$\upsilon_0 = 5$ м/с; $a = 5$ м/с^2.

А) $x = 5t + 2{,}5t^2$; **Б)** $x = 5t + 5t^2$; **В)** $x = t + 5t^2 + 5$;

Г) $x = 5t$; **Д)** $x = 10t + 0{,}4t^2$.

1.21. Матеріальна точка рухається прямолінійно. Рівняння руху має вигляд $x = At + Bt^3$. Визначити швидкість (у м/с) точки в момент часу t.

$A = 3$ м/с; $B = 0{,}06$ м/с^3; $t = 3$ с.

А) 3,28; **Б)** 4,62; **В)** 5,13; **Г)** 6,28; **Д)** 7,41.

1.22. Матеріальна точка рухається прямолінійно вздовж осі OX. Рівняння руху матеріальної точки має вигляд $x = At + Bt^3$. Визначити прискорення (у м/с^2) точки в момент часу t.

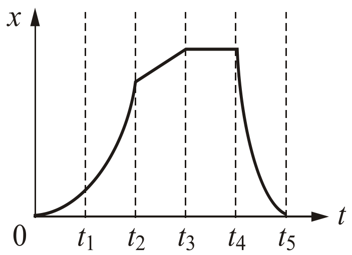
$A = 3$ м/с; $B = 0{,}06$ м/с^3; $t = 3$ с.

А) 0,82; **Б)** 1,08; **В)** 2,12; **Г)** 3,14;
Д) 5,13.

1.23. Частинка рухається вздовж осі $0x$ так, що залежність її координати x від часу t задається графіком, зображеним на рисунку. На проміжку якого часу частинка рухалась рівномірно?

А) (t_1, t_2); **Б)** (t_2, t_3); **В)** (t_3, t_4);

Г) $(0, t_1)$; **Д)** (t_4, t_5).



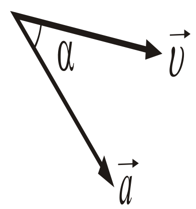
1.24. Якому типу руху відповідає схема на рисунку?

А) криволінійному з $|\vec{\upsilon}| = const$;

Б) криволінійному сповільненому;

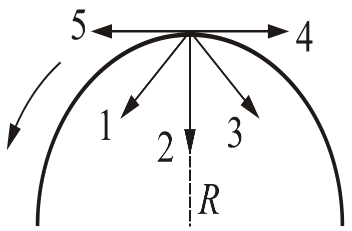
В) прямолінійному нерівномірному;

Г) криволінійному прискореному; **Д)** руху по колу.



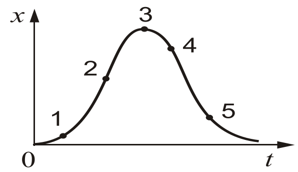
1.25. Вектор повного прискорення при сповільненому русі по колу спрямований як вектор:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 5.



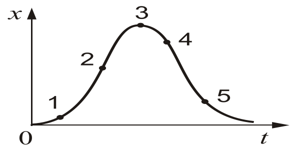
1.26. Яка з точок 1, 2, 3, 4, 5 на графіку відповідає руху вздовж осі $0x$ з найменшою за модулем швидкістю?

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 5.



1.27. Які з точок 1, 2, 3, 4, 5 на графіку відповідають руху з додатною проекцією швидкості?

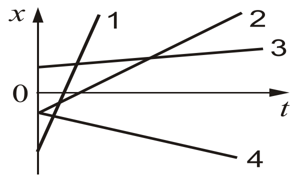
А) 1, 2; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 2, 3, 4; **Д)** усі.



1.28. Який з графіків відповідає руху з найбільшою швидкістю?

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4;

Д) швидкість в усіх випадках однакова.



Відповіді до тестів

№ завдання	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
Варіант відповіді	**В**	**Г**	**Б**	**Б**	**Д**	**В**	**В**
№ завдання	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12	1.13	1.14
Варіант відповіді	**В**	**Г**	**А**	**В**	**А**	**Б**	**Г**
№ завдання	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21
Варіант відповіді	**Б**	**Б**	**Б**	**В**	**Г**	**А**	**Б**
№ завдання	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28
Варіант відповіді	**Б**	**Б**	**Г**	**В**	**В**	**А**	**А**