6. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Основні формули

1. Диференціальне рівняння гармонічних коливань і його розв'язок

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{або} \quad x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де x – зміщення, A – амплітуда коливань; ω_0 – циклічна частота коливань; φ_0 – початкова фаза коливань.

2. Якщо $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, то швидкість руху коливної системи

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

прискорення руху коливної системи

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

3. Повна механічна енергія коливної системи

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2.$$

4. Рівняння згасаючих коливань при врахуванні сили опору $\vec{F}_{on} = -r\vec{\upsilon}$:

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \; \delta = \frac{r}{2m}, \; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

де δ – коефіцієнт згасання; ω – частота згасаючих коливань.

5. Логарифмічний декремент згасання

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

6. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язок

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_o}{m}\cos\Omega t, \qquad x = A\cos(\Omega t + \varphi),$$

де Ω – частота вимушуючої сили, A амплітуда вимушених коливань, φ – зсув фаз між зміщенням коливної точки і вимушуючою силою:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{2\delta\,\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

7. Період коливань пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

де m – маса тіла; k – жорсткість пружини.

8. Період коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де l – довжина маятника; g – прискорення вільного падіння.

9. Період коливань фізичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{зв}}{g}},$$

де J – момент інерції маятника відносно точки його підвісу; a – відстань між точкою підвісу і центром маси маятника; $L_{зв} = J/(ma)$ – зведена довжина фізичного маятника.

10. Довжина хвилі:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu},$$

де υ – фазова швидкість поширення хвилі; ν – частота хвилі.

11. Рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі OX:

$$\zeta(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де k – хвильове число $(k = \dfrac{2\pi}{\lambda})$.

Методичні вказівки і поради

Задачі, що пропонуються для розв’язування з курсу загальної фізики по темі “Механічні коливання” можна розділити на різні типи. Тому для знаходження їх розв’язку необхідно використовувати відповідні методичні прийоми. Зупинимось на їх короткому розгляді і застосуванні до розв’язування задач.

Задачі з кінематики коливного руху розв’язуються в основному порівнянням даних, заданих в умові задачі, із загальними формулами.

Для розв’язування ряду задач на механічні коливання необхідне знання основних тригонометричних формул та значень тригонометричних функцій для певних кутів. При виникненні такої необхідності рекомендується користуватися математичним довідником.

Вільні коливання механічної системи можуть здійснюватися під дією повертаючої пружної (квазіпружної) сили.

Для деяких задач на вільні коливання механічної системи доцільно знаходити їх розв’язок виходячи з розгляду повертаючої пружної (квазіпружної) сили, що пропорційна зміщенню x і напрямлена до положення рівноваги.

Якщо система здійснює згасаючі гармонічні коливання то, розглянувши сили, що діють на механічну систему, потрібно для опису її руху записати другий закон Ньютона в диференціальній формі. Використовуючи його, отримати частковий вигляд диференціального рівняння згасаючих гармонічних коливань. Співставляючи отримане рівняння із загальним диференціальним рівнянням згасаючих гармонічних коливань $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$, ототожнити вираз, що знаходиться біля зміщення x у частковому диференціальному рівнянні із ω_0^2. Визначивши циклічну частоту вільних гармонічних коливань ω_0, знайти, залежно від завдання, циклічну частоту згасаючих коливань , період згасаючих коливань, декремент згасання, логарифмічний декремент згасання і т. д.

При розв'язуванні задач на вимушені коливання механічної системи, найчастіше використовують такі типові співвідношення: амплітуду усталених вимушених коливань, зсув фаз між зміщенням і вимушуючою силою; резонансну амплітуду коливань; резонансну частоту.

При розв'язуванні багатьох задач на коливання пружинного маятника необхідно вміти визначати результуючу жорсткість пружин, що з'єднані паралельно (послідовно):

$k_{пар.}=\sum_{i=1}^{N}k_i$ – жорсткість N сполучених паралельно між собою пружин;

$\frac{1}{k_{пос.}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{k_i}$ – жорсткість N сполучених послідовно між собою пружин.

Приклади розв'язування задач

6.1. ***Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за косинусоїдальним законом, виконуючи одне повне коливання за час T = 6с. За яку частину періоду вона проходить першу і другу половину амплітуди коливання ?***

Дано:

$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

T = 6 c

$t_1=?\ t_2=?$

Розв'язування

З умови задачі випливає, що рівняння коливань має вигляд:

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Визначимо момент часу t_1, коли відхилення x_1 матеріальної точки дорівнює половині амплітуди із співвідношення:

$$\frac{A}{2}=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right).$$

Після спрощення даного рівняння, одержимо:

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right).$$

Оскільки

$$\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{3}, \text{ то } t_1 = \frac{T}{6}, \quad t_1 = 1c.$$

Амплітуду A матеріальна точка досягає за чверть періоду, тому другу частину амплітуди вона проходить за час t_2:

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{6} = \frac{T}{12}, \; t_2 = 0,5c.$$

6.2. ***Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання. Максимальна швидкість точки*** $\upsilon_{\max} = 10\,\frac{м}{с}$***, а її максимальне прискорення*** $a_{\max} = 40\,\frac{м}{с^2}$***. Визначити циклічну частоту коливань.***

Розв'язування

Дано:

$\upsilon_{\max} = 10\,\frac{м}{с}$

$a_{\max} = 40\,\frac{м}{с^2}$

$\omega_0 = ?$

Нехай матеріальна точка здійснює гармонічні коливання вздовж осі OX відносно початку координат. Коливання вважаємо вільними. Якщо $x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$, то миттєве значення швидкості коливань точки

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Отже, амплітуда швидкості $\upsilon_{\max} = A\omega_0$. (1)

Щодо прискорення, то

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

а його амплітуда $a_{\max} = A\omega_0^2$. (2)

Враховуючи, що амплітудні значення швидкості та прискорення задані в умові задачі, то:

$$\frac{a_{\max}}{\upsilon_{\max}} = \frac{A\omega_0^2}{A\omega_0} = \omega_0. \quad (3)$$

Знаходимо числове значення шуканої величини згідно (3):

$$\omega_0 = \frac{40}{10} = 4\,(\,рад \cdot с^{-1}\,).$$

6.3. ***Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за синусоїдальним законом. У деякий момент часу її зміщення від положення рівноваги x_1 = 5 см. При збільшенні фази коливань в два рази зміщення точки x_2 = 8 см. Визначити амплітуду коливань цієї точки***.

Розв'язування

Дано:
$x_1 = 5\ см = 0{,}05\ м$
$x_2 = 8\ см = 0{,}08\ м$
$\Phi_2 = 2\Phi_1$

$A = ?$

Нехай, в момент часу t_1 зміщення точки від положення рівноваги

$$x_1 = A\sin\left(\omega_0 t_1 + \varphi_0\right), \tag{1}$$

а в момент часу t_2 -

$$x_2 = A\sin\left(\omega_0 t_2 + \varphi_0\right). \tag{2}$$

Рівняння (1) та (2), із врахуванням даних задачі, не дозволяють знайти шукану амплітуду коливань, оскільки містять невідомі величини.

Відповідно до умови задачі: $\Phi_2 = 2\Phi_1$. Це означає, що

$$\left(\omega_0 t_2 + \varphi_0\right) = 2\left(\omega_0 t_1 + \varphi_0\right).. \tag{3}$$

Для зручності приймемо: $\left(\omega_0 t_1 + \varphi_0\right) = \alpha.$
(4) Запишемо (1) та (2), враховуючи (3) і (4), у вигляді:

$$x_1 = A\sin\alpha, \qquad x_2 = A\sin 2\alpha = 2A\sin\alpha\cos\alpha\ . \tag{5}$$

Далі:

$$x_1^2 = A^2\sin^2\alpha\ , \tag{6}$$

$$x_2^2 = 4A^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\ , \quad \text{або} \quad \frac{x_2^2}{4} = A^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\ . \tag{7}$$

Віднявши від (6) рівняння (7), отримаємо:

$$x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = A^2\sin^2\alpha - A^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = A^2\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right) = A^2\sin^4\alpha.$$

Враховуючи, що $A^2\sin^4\alpha = \dfrac{x_1^4}{A^2}$, знаходимо:

$$x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = \frac{x_1^4}{A^2}\ . \tag{8}$$

З (8) маємо:

$$A^2 = \frac{x_1^4}{x_1^2 - \dfrac{x_2^2}{4}} = \frac{4x_1^4}{4x_1^2 - x_2^2}\ . \tag{9}$$

Звідки:

$$A=\frac{2x_1^2}{\sqrt{4x_1^2-x_2^2}}. \qquad (10)$$

Знаходимо числове значення шуканої величини згідно (10):

$$A=\frac{2\cdot 0{,}05^2}{\sqrt{4\cdot 0{,}05^2-0{,}08^2}}\approx 0{,}083\,(м)\approx 8{,}3(см).$$

6.4. ***Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом x = A* sin *(ω₀ t + φ₀) вздовж осі ОХ. Через час t₁ =* 0,05 *с від початку руху зміщення точки від положення рівноваги x₁ =* 0,05 *м, швидкість υ₁ =* 0,62 *м/с, прискорення a₁ =* - 5,40 *м/с². Визначити амплітуду А, циклічну частоту ω₀ і початкову фазу коливань φ₀.***

Розв'язування

Дано:
$x=A\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$
t_1 = 0,05 *с*
x_1 = 0,05 *м*
υ_1 = 0,62 *м/с*
a_1 = -5,40 *м/с²*
A - ? ω - ?
φ_0 - ?

Зміщення частинки в момент часу t_1, швидкість υ_1 та прискорення a_1 мають такий вигляд:

$$x_1=A\sin(\omega_0 t_1+\varphi_0), \qquad (1)$$

$$\upsilon_1=A\omega_0\cos(\omega_0 t_1+\varphi_0), \qquad (2)$$

$$a_1=-A\omega_0^2\sin(\omega_0 t_1+\varphi_0)=-x_1\omega_0^2. \qquad (3)$$

З виразу (3) знаходимо циклічну частоту:

$$\omega_0=\sqrt{-\frac{a_1}{x_1}}, \quad \omega_0=10{,}4\,рад/с.$$

Піднесемо вирази (1) і (2) до квадрата і почленно додамо їх:

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^2=\sin^2(\omega_0 t_1+\varphi_0), \qquad \left(\frac{\upsilon_1}{\omega_0 A}\right)^2=\cos^2(\omega_0 t_1+\varphi_0),$$

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^2+\left(\frac{\upsilon_1}{A\omega_0}\right)^2=1.$$

Звідси амплітуда коливань рівна

$$A=\sqrt{x_1^2+\left(\frac{\upsilon_1}{\omega_0}\right)^2}, \quad A=0.078\,м.$$

Початкову фазу знаходимо з рівняння (1):

$$\varphi_0=\arcsin\frac{x_1}{A}-\omega_0 t_1, \qquad \varphi_0=\frac{2\pi}{9}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{18}=10^o.$$

6.5. ***Прискорення матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання, задається рівнянням*** $a=-45\pi^2\cos 3\pi t$***. Визначити залежність зміщення цієї точки від часу.***

Розв'язування

Дано:	
$a=-45\pi^2\cos 3\pi t$	
x = ?	

З виразу для прискорення $a=\dfrac{d\upsilon}{dt}$, маємо $d\upsilon = adt$.

Проінтегруємо обидві частини:

$$\upsilon=\int_0^t adt=-\int_0^t 45\pi^2\cos 3\pi t=-\frac{45\pi^2}{3\pi}\sin 3\pi t=-15\pi\sin 3\pi t. \quad (1)$$

Залежність зміщення x від часу знаходимо інтегруючи співвідношення $dx=\upsilon dt$:

$$x=\int_0^t \upsilon dt=-\int_0^t 15\pi\sin 3\pi t=\frac{15\pi}{3\pi}\cos 3\pi t.$$

Отже,

$$x=5\cos 3\pi t.$$

6.6. ***Вантаж, який піднімає баштовий кран, розхитується у горизонтальній площині і виконує гармонічні коливання за законом*** ***x* = *A*sin(**$\frac{2\pi}{T}$ ***t* + *φ*₀*), де A* = 0,8 *м, T* = 50 *с, φ*₀ = 0*. Маса вантажу m* = 200 *кг. Визначити повну енергію*** E ***вантажа, що коливається.***

Дано:	
$x=A\sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0)$	
A = 0,8 *м*	
T = 50 *с*	
φ_0 = 0	
m = 200 *кг*	
E = ?	

Розв'язування

Повна енергія E вантажа, що коливається

$$E=E_k+E_p=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{kx^2}{2}, \quad (1)$$

де

$$k=m\omega_0^2=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Миттєве значення швидкості коливань вантажа

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}=A\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right). \quad (2)$$

Підставимо вирази для зміщення x і швидкості (2) у (1). В результаті

$$E=\frac{m}{2}A^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right)+\frac{m}{2}A^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right)=$$

$$=\frac{m}{2}A^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Підставимо числові значення:

$$E=\frac{200}{2}0{,}8^2\left(\frac{2\cdot 3{,}14}{50}\right)Дж=1Дж.$$

6.7. ***Матеріальна точка масою*** $m=10г$ ***рухається під дією сили*** $F=2\cos\omega_0 t,$ ***мН, де*** $\omega_0=2\pi\, c^{-1}$. ***Визначити максимальну кінетичну енергію*** $E_k^{\max}$ ***матеріальної точки.***

Розв'язування

Дано:
$m=10г$
$F=2\cos\omega_0 t$
$\omega_0=2\pi\, c^{-1}$

$E_k^{\max}=?$

Кінетична енергія матеріальної точки

$$E_k=\frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad (1)$$

де υ - швидкість точки, яку знайдемо, використовуючи II закон Ньютона:

$$F=ma=m\frac{d\upsilon}{dt},\quad \frac{d\upsilon}{dt}=\frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t. \qquad (2)$$

Розділяючи змінні, отримуємо диференціальне рівняння. Для розв'язування цього рівняння інтегруємо обидві частини:

$$\upsilon=\int_0^t\frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t dt=\frac{F_0}{m\omega_0}\sin\omega_0 t. \qquad (3)$$

Підставляючи вираз (3) у (1), маємо:

$$E_k=\frac{F_0^2}{2m\omega_0^2}\sin^2\omega_0 t.$$

Кінетична енергія $E_k^{\max}$ матеріальної точки буде максимальна при $\sin\omega_0 t=1.$ Отже,

$$E_k^{\max}=\frac{F_0^2}{2m\omega_0},\quad E_k^{\max}=5{,}01мкДж.$$

6.8 ***Амплітуда гармонічних коливань матеріальної точки А = 0,12 м, повна енергія коливань Е = 6 мкДж. При зміщенні х від положення рівноваги на точку, що коливається, діє сила F = 50 мкН. Визначити величину зміщення х.***

Розв'язування

Дано:
$A = 0{,}12$ *м*
$E = 6$ *мкДж*
$F = 50$ *мкН*

x = ?

Повна енергія E точки, що коливається

$$E = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2. \qquad (1)$$

Згідно другого закону Ньютона

$$F = ma = -m\frac{4\pi^2}{T^2}A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0) = -m\frac{4\pi^2}{T^2}x. \qquad (2)$$

З виразів (1) і (2) отримуємо:

$$\frac{2\pi^2 m}{T^2} = \frac{E}{A^2} = \frac{F}{2x}.$$

Звідси

$$x = \frac{FA^2}{2E}.$$

Підставляючи числові значення, маємо:

$$x = 0{,}06\,м.$$

6.9. ***Матеріальна точка бере участь одночасно в двох взаємно перпендикулярних коливаннях:*** $x = \sin(\pi t)$ ***і*** $y = 4\sin(\pi t + \pi)$***. Визначити рівняння траєкторії руху точки.***

Розв'язування

Дано:
$x = \sin(\pi t)$
$y = 4\sin(\pi t + \pi)$

$y(x)$ = ?

Визначити рівняння руху – це, виключивши час з рівнянь, що задані в умові задачі, знайти залежність координати *y* від координати *x*. Задача для свого розв'язування потребує використання тригонометричних формул.

Запишемо рівняння руху матеріальної точки по осі *OY* у вигляді:

$$y = 4\sin(\pi t + \pi) = -4\sin(\pi t) \qquad (1)$$

або

$$y = -4x. \qquad (2)$$

Отже, шукане рівняння траєкторії матеріальної точки має вигляд прямої (2), що проходить через початок координат.

6.10. ***Амплітуда коливань математичного маятника за час*** t_1 **= 1 *хв*** ***зменшилася вдвічі. Довжина маятника*** l **= 1 *м*. *Визначити логарифмічний декремент згасання коливань такого маятника. Прискорення вільного падіння*** $g = 10\ \frac{м}{с^2}$**.**

Розв'язування

Дано:
$t_1 = 1\ хв = 60\ с$
$l = 1\ м$
$\frac{A_1}{A_2} = 2$
$g = 10\ \frac{м}{с^2}$

$\lambda = ?$

Відповідно до умови задачі, математичний маятник здійснює згасаючі гармонічні коливання. Нехай ці коливання здійснюються вздовж осі OX відносно початку координат.

Оскільки логарифмічний декремент згасання коливань

$$\lambda = \ln \frac{A\, e^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T)}} = \delta T \ , \tag{1}$$

то розв'язування задачі зводиться до знаходження коефіцієнта згасання δ і періоду T згасаючих коливань маятника.

За умовою задачі $\frac{A_1}{A_2} = 2,$ а з іншої сторони

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+t_1)}} = e^{\delta t_1} . \tag{2}$$

Прирівнюючи відношення амплітуд, отримаємо $e^{\delta t_1} = 2$. Для знаходження коефіцієнта згасання логарифмуємо праву і ліву частину (2): $\ln e^{\delta t_1} = \ln 2$. Отже, $\delta t_1 = \ln 2,$ а

$$\delta = \frac{\ln 2}{t_1} . \tag{3}$$

Період коливань математичного маятника, що здійснює згасаючі коливання

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}} , \tag{4}$$

де ω − циклічна частота згасаючих коливань, а

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{5}$$

– циклічна частота вільних коливань математичного маятника. Підставляючи (3) і (5) в (4), знаходимо період коливань маятн~~ика~~

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\ln^2 2}{t_1^2}}} . \tag{6}$$

Для знаходження логарифмічного декременту згасання коливань, підставимо (3) і (6) в (1) та отримаємо:

$$\lambda = \delta T = \frac{\ln 2}{t_1} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\ln^2 2}{t_1^2}}} . \qquad (7)$$

Знаходимо числове значення шуканої величини згідно (7):

$$\lambda = \frac{0{,}69}{60} \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14}{\sqrt{\frac{10}{1} - \frac{0{,}69^2}{60^2}}} = 0{,}02 .$$

6.11. ***Тіло масою m = 0,76 кг, яке підвішене до пружини жорсткістю k = 30 Н/м, виконує в деякому середовищі пружні коливання. Логарифмічний декремент коливань*** λ **= 0,01.** ***Через який проміжок часу Δt енергія коливань тіла зменшиться у n = 7,4 рази***.

Розв'язування

Дано:
m = 0,76*кг*
k = 30 *м*
λ =0,01
n =7,4

$\Delta t = ?$

Енергія коливань тіла в початковий момент часу t

$$E_1 = \frac{2\pi^2 m}{T} A_1^2 ,$$

а через проміжок часу Δt -

$$E_2 = \frac{2\pi^2 m}{T} A_2^2 ,$$

де

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (1)$$

- період коливань тіла.

Відношення енергій

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \left(\frac{A\, e^{-\delta\, t}}{A\, e^{-\delta (t + \Delta t)}} \right)^2 = e^{2\delta\, \Delta t} , \qquad (2)$$

У виразі (2) δ - коефіцієнт згасання і

$$\delta = \frac{\lambda}{T} .$$

Тоді

$$\frac{E_1}{E_2} = e^{2\frac{\lambda}{T} \Delta t} . \qquad (3)$$

Прологарифмуємо вираз (3):

$$\ln n = \ln\frac{E_1}{E_2} = \ln e^{2\frac{\lambda}{T}\Delta t} = 2\frac{\lambda}{T}\Delta t.$$

Враховуючи вираз (1), маємо

$$\Delta t = \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{m}{k}}\ln n, \qquad \Delta t = 100\, c.$$

6.12. ***Вантаж масою*** $m = 1$ ***кг, що підвішений на пружині, коефіцієнт жорсткості якої*** $k = 100\,\frac{H}{м}$***, коливається у в'язкому середовищі з коефіцієнтом опору*** $r = 1\,\frac{кг}{с}$***. На верхній кінець пружини діє вимушуюча сила, що змінюється за законом*** $F = F_0\cos\Omega t$***, де*** $F_0 = 0{,}2\,H$***. Визначити для цієї коливної системи коефіцієнт згасання*** δ ***і резонансну амплітуду*** A_p ***.***

Дано:
$m = 1$ *кг*
$k = 100\,\frac{H}{м}$
$r = 1\,\frac{кг}{с}$
$F = F_0\cos\Omega t$
$F_0 = 0{,}2\,H$

$\delta = ?$ $A_p = ?$

Розв'язування

З виразу

$$\delta = \frac{r}{2m} \tag{1}$$

знайдемо коефіцієнт згасання δ для коливної системи пружина – вантаж.

Для знаходження значення резонансної амплітуди A_p використаємо співвідношення:

$$A_p = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}\,. \tag{2}$$

Із врахуванням (1), а також того що,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{3}$$

вираз (2) набере вигляду:

$$A_p = \frac{F_0}{r\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}\,. \tag{4}$$

Знаходимо числові значення шуканих величин згідно (1) та (4):

$$\delta = \frac{1}{2\cdot 1} = 0{,}5\,c^{-1}. \qquad A_p = \frac{1}{1\cdot\sqrt{\frac{100}{1} - \frac{1}{4\cdot 1^2}}} = 0{,}02\ м\,.$$

6.13 ***Амплітуди зміщень вимушених гармонічних коливань дорівнюють одна одній при циклічних частотах $\Omega_1 =$ 400 рад/с і $\Omega_2 =$ 60 рад/с. Визначити частоту Ω_p, при якій амплітуда зміщення максимальна.***

Дано:	**Розв'язування**
$\Omega_1 = 400$ *рад/с*	
$\Omega_2 = 60$ *рад/с*	
Ω_p -?	

Амплітуда зміщень вимушених коливань

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \tag{1}$$

Амплітуди при різних циклічних частотах будуть рівні, якщо рівними будуть підкореневі вирази в (1):

$$\left(\omega_0^2 - \Omega_1^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega_1^2 = \left(\omega_0^2 - \Omega_2^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega_2^2,$$

$$\omega_0^4 - 2\omega_0^2\Omega_1^2 + \Omega_1^4 + 4\delta^2\Omega_1^2 = \omega_0^4 - 2\omega_0^2\Omega_2^2 + \Omega_2^4 + 4\delta^2\Omega_2^2,$$

$$2\omega_0^2\Omega_2^2 - 2\omega_0^2\Omega_1^2 - 4\delta^2\Omega_2^2 + 4\delta^2\Omega_1^2 = \Omega_2^4 - \Omega_1^4,$$

$$2\omega_0^2(\Omega_2^2 - \Omega_1^2) - 4\delta^2(\Omega_2^2 - \Omega_1^2) = \Omega_2^4 - \Omega_1^4,$$

$$2(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)(\omega_0^2 - 2\delta^2) = (\Omega_2^2 - \Omega_1^2)(\Omega_2^2 + \Omega_1^2),$$

$$2(\omega_0^2 - 2\delta^2) = (\Omega_2^2 + \Omega_1^2),$$

$$(\omega_0^2 - 2\delta^2) = \frac{1}{2}(\Omega_2^2 + \Omega_1^2)..$$

Враховуючи, що частота Ω_p, при якій амплітуда зміщення максимальна

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

отримуємо

$$\Omega_p = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\Omega_2^2 + \Omega_1^2\right)}, \quad \Omega_p = 509{,}9\,\frac{рад}{с}.$$

6.14. ***Рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі ОХ, має вигляд $\xi = A\sin(\omega t - kx)$. Зміщення від положення рівноваги точки, що знаходиться на відстані $x = 4$ см від джерела коливань дорівнює половині амплітуди в момент часу $t = \frac{T}{6}$, де T – період коливань. Визначити довжину хвилі.***

Розв'язування

Дано:	
$\xi = A\sin(\omega t - kx)$	
$x = 4\ см = 0{,}04\ м$	
$t = \frac{T}{6}$	
$\xi = \frac{A}{2}$	
$\lambda = ?$	

Враховуючи, що $\xi = \frac{A}{2}$ в момент часу $t = \frac{T}{6}$, рівняння плоскої хвилі $\xi = A\sin(\omega t - kx)$ набуде вигляду:

$$\frac{A}{2} = A\sin\left(\frac{\omega T}{6} - kx\right). \qquad (1)$$

Після спрощення (1), отримаємо:

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\omega T}{6} - kx\right)$$

або
$$\left(\frac{\omega T}{6} - kx\right) = \frac{\pi}{6}. \qquad (2)$$

Скористаємося тим, що циклічна частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (3), а хвильове число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (4). Підставляючи (3) та (4) в (2), отримуємо:

$$\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{6} - \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{6}. \qquad (5)$$

З (5) знаходимо:

$$\lambda = 12\ x. \qquad (6)$$

Знаходимо числове значення шуканої величини згідно (6):

$$\lambda = 12\cdot 0{,}04 = 0{,}48\ (м).$$

6.15. Визначити період коливань T стовпчика ртуті в U – подібній трубці при виведенні його з положення рівноваги. Площа поперечного перерізу трубки $S = 0{,}3\ см^2$, маса ртуті $m = 120\ г$, густина ртуті $\rho = 13600\ \frac{кг}{м^3}$, прискорення вільного падіння $g = 10\ \frac{м}{с^2}$.

Дано:	
$S = 0{,}3\ см^2 = 3\cdot 10^{-5}\ м^2$	
$m = 120\ г = 0{,}12\ кг$	
$\rho = 13600\ \frac{кг}{м^3}$	
$g = 10\ \frac{м}{с^2}$	
$T - ?$	

Розв'язування

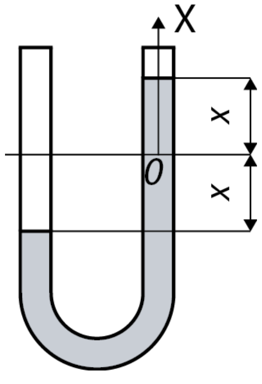


Рис. 6.1.

Вважаємо, що ртуть здійснює коливання відносно нерухомої системи координат – посудини і є нестискувальною рідиною. Фізичне явище в цій задачі полягає в тому, що спочатку ртуть знахо--дилася в положенні рівноваги, а після виведення її з рівноваги здійнює коливний рух. Зауважимо, що стовпчик ртуті не можна розглядати як матеріальну точку. Але зрозуміло, що кожна його точка рухається за одним і тим самим законом. Саме тому для розв’язування задачі достатньо описати рух будь-якої точки стовпчика ртуті. Початок координат, яку пов’язано із посудиною, помістимо на рівні нерухомої рідини в колінах трубки, а вісь OX направимо так, як показано на рис. 6.1.

Період коливань стовпчика ртуті під дією повертаючої квазіпружної сили обчислюємо за формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad , \tag{1}$$

де m – маса ртуті, k – коефіцієнт пропорційності між квазіпружною силою та зміщенням стовпчика ртуті. Виразимо коефіцієнт пропорційності k в (1) через квазіпружну силу. Квазіпружною силою, що викликає коливання ртуті у трубці, є додаткова сила тиску

$$F = -pS = -2\rho gxS. \tag{2}$$

Знак мінус вказує її квазіупружний характер. З іншої сторони, будь-яка квазіпружна сила має загальний вигляд

$$F = -kx\,. \tag{3}$$

Прирівнюючи (2) до (3), отримаємо:

$$-2\rho gSx = -kx\,. \tag{4}$$

Звідки:

$$2\rho gS = k\,. \tag{5}$$

Підставляючи (5) в (1), знайдемо, що

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho gS}}\,. \tag{6}$$

Другий спосіб

Цю задачу можна розв’язати міркуючи дещо інакше. Якщо ртуть, налиту в U – подібну трубку, вивести з положення рівноваги, тоді вся маса ртуті буде здійснювати гармонічні коливання, відносно свого початкового рівня. Як видно з рис. 6.1, стовпчик ртуті висотою $h = 2x$ створює додатковий тиск

$$p = \rho gh = \rho g 2x = 2\rho gx \qquad (7)$$

і викликає додаткову силу тиску $F = pS$, під дією якої здійснюються коливання ртуті. У цьому випадку сила F є квазіпружною силою, оскільки вона пропорційна зміщенню і напрямлена до положення рівноваги:

$$F = -2\rho gSx. \qquad (8)$$

Далі використаємо другий закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -2\rho gSx$$

або

$$\ddot{x} + \frac{2\rho gSx}{m} = 0. \qquad (9)$$

Співставляючи рівняння (9) із диференціальним рівнянням вільних гармонічних коливань

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (10)$$

отримаємо:

$$\omega_0{}^2 = \frac{2\rho g\mathrm{S}}{m} \quad \text{або} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\rho gS}{m}}. \qquad (11)$$

Період коливань ртуті визначаємо за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho gS}}. \qquad (12)$$

Знаходження числового значення шуканої величини:

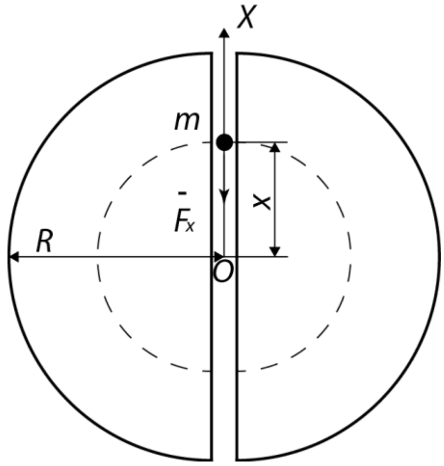
$$T = 2\cdot 2{,}14\cdot\sqrt{\frac{0{,}12}{2\cdot 3\cdot 10^{-5}\cdot 13600\cdot 10}} \approx 0{,}76\ c.$$

Отримані однакові вирази (6) та (12) для періоду T коливань ртуті в трубці дають підставу стверджувати, що обидва способи розв'язку задачі є фізично вірними.

6.16. Однорідна планета густиною ρ пробита наскрізь тунелем вздовж діаметра. В утворений тунель без початкової швидкості біля поверхні планети падає невелике тіло. Сила опору атмосфери планети пропорційна швидкості руху тіла $F_{оп.} = -r\upsilon$, коефіцієнт згасання - δ. Визначити циклічну частоту коливань ω тіла в тунелі.

Розв'язування

Дано:
ρ
$F_{оп.} = -r\upsilon$
δ
$\omega - ?$



В системі планета – тіло приймемо тіло, що падає, за матеріальну точку. Фізичне явище в задачі полягає в розгляді коливного руху, що здійснює ця матеріальна точка під дією сили тяжіння планети. Оскільки існує сила опору атмосфери планети, то коливання тіла будуть згасаючими. Початок координат системи відліку, пов'язану з планетою, помістимо в її центр, а вісь O направимо так, як показано на рис. 6.2.

Рис. 6.2.

Використовуючи другий закон Ньютона, отримаємо диференціальне рівняння згасаючих коливань, а далі знайдемо і вираз для визначення частоти згасаючих коливань ω.

Розглянемо довільне положення матеріальної точки масою m, що знаходиться на відстані x від центру планети в момент часу t. На неї діє сила тяжіння F_x з боку кулі масою M_x, що має радіус x:

$$F_x = G\frac{mM_x}{x^2}, \tag{1}$$

де G –гравітаційна стала. Враховуючи, що

$$M_x = \rho V_x = \frac{4\rho\pi x^3}{3}, \tag{2}$$

отримаємо:

$$F_x = G\frac{4m\rho\pi x^3}{3x^2} = \frac{4Gm\rho\pi}{3}x. \tag{3}$$

Сила F_x – повертаюча квазіпружна сила, тому беремо її в подальшому зі знаком "–".

На матеріальну точку додатково діє ще сила опору повітря $F_{оп.} = -r\upsilon$. Враховуючи ці сили, запишемо другий закон Ньютона у вигляді:

$$ma = -F_x - F_{оп.} = -\frac{4Gm\rho\pi x}{3} - r\upsilon. \tag{4}$$

Далі, знаходимо диференціальне рівняння згасаючих коливань. Для цього перенесемо в (4) всі його доданки в ліву частину, поділивши кожний із них на m, та зробимо такі заміни:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \ \ a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Тоді (4) набуде вигляду:

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \frac{4G\rho\pi}{3}x = 0. \qquad (5)$$

Співставляючи (5) із загальним диференціальним рівнянням згасаючих гармонічних коливань $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, отримаємо:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4G\rho\pi}{3}}. \qquad (6)$$

Враховуючи (6), частоту згасаючих коливань визначимо як

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{4G\rho\pi}{3} - \delta^2}. \qquad (7)$$

6.17. На кінцях невагомого стрижня довжиною $d = 1\ м,$ підвішеного на шарнірі так, що він може обертатися без тертя навколо вертикальної осі, що проходить через його середину, закріплені дві маленькі кульки $m_1 = m_2 = 1\ г.$ На одній прямій із стрижнем закріплені нерухомо дві великі кулі $M_1 = M_2 = 50\ кг.$ Відстань між центрами сусідніх великої кулі і маленької кульки $r = 6\ см.$ Визначити період коливань T такого крутильного маятника. Гравітаційна стала $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}.$

Дано:

$d = 1\ м$

$m_1 = m_2 = m = 1\ г$

$M_1 = M_2 = M = 50\ кг$

$r = 6\ см = 6 \cdot 10^{-2}\ м$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$

$T - ?$

Розв'язування

Для розв'язування задачі використаємо аналітичний метод. Приймемо кожну половину стрижня з маленькою кулькою на кінці за математичний маятник довжиною $l = \frac{d}{2}$ (рис. 6.3).

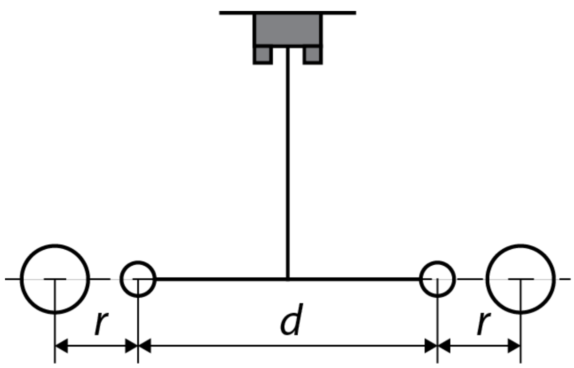


Рис.6.3

Такі два маятника коливаються в полі тяжіння великих куль (коливання здійснюються в горизонтальній площині). Для визначення прискорення вільного падіння в полі тяжіння великої кулі застосуємо закон всесвітнього тяжіння.

Періоди коливань кульок, що коливаються в полі тяжіння великих куль, є однаковими та дорівнюють:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}\,, \tag{1}$$

де g_1 – прискорення вільного падіння в полі тяжіння великої кулі.

Знайдемо вираз для g_1 з умови:

$$mg_1 = G\frac{M\ m}{r^2}\,.$$

Звідки:

$$g_1 = G\frac{M}{r^2}\,. \tag{2}$$

Із врахуванням (2), (1) набуде такого вигляду:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{dr^2}{2GM}}. \tag{3}$$

Знаходження числового значення шуканої величини:

$$T = 2\cdot 3{,}14\cdot\sqrt{\frac{\left(6\cdot 10^{-2}\right)^2}{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 50}} \approx 4614\ с \approx 1{,}3\ год.$$

6.18. Фізичний маятник має вигляд тонкого однорідного стержня. Точка підвісу маятника *O* знаходиться від центру його маси *C* на відстані $L = 20{,}2\ см.$ **Визначити довжину стержня** l, **якщо частота коливань маятника максимальна.**

Розв'язування

Дано:
$L = 20{,}2\ см = 0{,}202\ м$
$\omega_0 = \omega_{\max}$

$l - ?$

Використаємо синтетичний метод розв'язування задачі. Розпочнемо з аналізу формули для циклічної частоти коливань фізичного маятника, в яку входить шукана величина l (рис. 6.4). Дослідження ω_0, що є функцією L та l, на максимум дасть можливість знайти довжину стрижня l.

Циклічна частота коливань фізичного маятника визначається за формулою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{J}}, \qquad (1)$$

де L – відстань між точкою підвісу O і центром маси C маятника, J – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу, m –маса маятника.

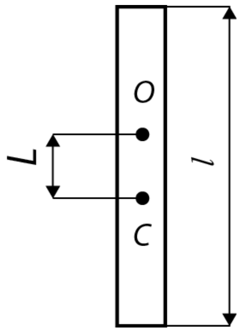


Рис.6.4

Момент інерції J стрижня відносно горизонтальної осі, що проходить через точку O визначаємо за теоремою Штайнера:

$$J = J_c + mL^2 = \frac{ml^2}{12} + mL^2 = \frac{ml^2 + 12mL^2}{12}. \qquad (2)$$

В (2) враховано, що момент інерції стержня відносно осі, що проходить через його центр маси $J_c = \frac{ml^2}{12}$.

Підставляючи (2) в (1), отримаємо:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{J}} = \sqrt{\frac{12mgL}{ml^2 + 12mL^2}} = \sqrt{\frac{12gL}{l^2 + 12L^2}}. \qquad (3)$$

Знайдемо екстремум ω_0 з умови $\frac{d\omega_0}{dL} = 0$, яка рівносильна такому виразу:

$$\frac{6g\left(l^2 - 12L^2\right)}{L^{1/2}\left(l^2 + 12L^2\right)^{3/2}} = 0. \qquad (4)$$

Звідки:

$$l^2 - 12L^2 = 0. \qquad (5)$$

З (5), отримаємо:

$$l = \sqrt{12L^2} = L\sqrt{12}. \qquad (6)$$

Знаходження числового значення шуканої величини:

$$l = 0,202\sqrt{12} \approx 0,7 \text{ м}.$$

6.19. Швидкість звуку у воді $\upsilon = 1450\ \frac{м}{с}$. На якій відстані знаходяться дві найближчі точки, що здійснюють коливання в протилежних фазах, якщо частота коливань $\nu = 725\ Гц$?

Дано:

$\upsilon = 1450\ \frac{м}{с}$

$\nu = 725\ Гц$

$L - ?$

Розв'язування

Використаємо аналітичний метод розв'язування задачі. Візьмемо до уваги, що довжина хвилі λ – відстань між двома найближчими точками середовища, що коливаються в однакових фазах. Якщо точки здійснюють коливання в протилежних фазах, тоді відстань між ними дорівнює половині довжини хвилі. Для розв'язування задачі використаємо співвідношення, що пов'язує довжину хвилі λ, частоту коливань ν і швидкість υ поширення хвилі:

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}. \tag{1}$$

Використовуючи (1) та враховуючи, що

$$L = \frac{\lambda}{2}, \tag{2}$$

отримаємо:

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{\upsilon}{2\nu}. \tag{3}$$

Знаходження числового значення шуканої величини:

$$L = \frac{1450}{2 \cdot 725} = 1\ м.$$

6.20. По прямій ділянці дороги рухаються в одному напрямку один за одним два автомобілі зі швидкостями $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 90\ \frac{км}{год}$. Коли появився зустрічний третій автомобіль, що рухався зі швидкістю $\upsilon_3 = 72\frac{км}{год}$, водій першого автомобіля дав звуковий сигнал з частотою $\nu_0 = 700\ Гц$. Звуки якої частоти ν_1 та ν_2 сприймуть пасажири другого і третього автомобілів? Швидкість звуку в повітрі $\upsilon = 340\ \frac{м}{с}$.

Розв'язування

Дано:

$\upsilon_1 = \upsilon_2 = 90\,\frac{км}{год} = 25\,\frac{м}{с}$

$\upsilon_3 = 72\,\frac{км}{год} = 20\,\frac{м}{с}$

$\nu_0 = 700\ Гц$

$\upsilon = 340\,\frac{м}{с}$

$\nu_1 - ?$

$\nu_2 - ?$

Частота коливань звукової хвилі, що сприймає рухомий приймач при русі джерела дорівнює

$$\nu = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр.}}{\upsilon - \upsilon_{дж.}}\nu_0. \tag{1}$$

У задачі потрібно розглянути два різні випадки, враховуючи правила знаків: джерело рухається від приймача, приймач – до джерела; джерело рухається до приймача, приймач – до джерела.

1. Джерело звукової хвилі пов'язано з перший автомобілем, а другий автомобіль – приймач звукового сигналу. За умовою задачі джерело рухається від приймача, а приймач рухається до джерела. Враховуючи ці умови, отримаємо:

$$\nu_1 = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр.}}{\upsilon + \upsilon_{дж.}}\nu_0. \tag{2}$$

2. Джерело звукової хвилі пов'язане з першим автомобілем, третій автомобіль – приймач звукового сигналу. За умовою задачі джерело рухається до приймача, приймач рухається до джерела. Враховуючи ці умови, отримаємо:

$$\nu_2 = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр.}}{\upsilon - \upsilon_{дж.}}\nu_0. \tag{3}$$

Знаходження числового значення першої шуканої величини:

$$\nu_1 = \frac{340 + 25}{340 + 25} \cdot 700 = 700\ Гц.$$

Знаходження числового значення другої шуканої величини:

$$\nu_2 = \frac{340 + 20}{340 - 25} \cdot 700 = 800\ Гц.$$

Задачі для самостійного розв'язування

6.1. Рівняння руху точки має вигляд $x = 2sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см.

Визначити максимальну швидкість точки. **(π см/с)**

6.2. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливанні згідно з формулою $x = 2sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ с$м$. Визначити максимальне прискорення точки. **(π^2/2 см/с^2).**

6.3. Амплітуда гармонічних коливань $A.$ Який шлях пройде частинка за час $\frac{3}{4}T$? $(3A)$.

6.4. Рівняння коливань матеріальної точки масою $m = 16\ г$ має вигляд $x = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)\ м.$ Визначити максимальну силу, що діє на неї. ($F_{мах.} = 246\ мкН$).

6.5. Матеріальна точка масою $m = 50\ г$ виконує коливання, рівняння якого має вигляд $x = 0{,}1\cos 5t.$ Визначити силу, що діє на точку в момент фази $\omega_0 t = \frac{\pi}{3}.$ $(-0{,}0625\ H)$.

6.6. Точка виконує гармонічні коливання за законом $x = 0{,}04\cos\omega_0 t.$ Визначити швидкість точки в момент часу, коли вона перебуває на відстані $x = 0{,}02\ м$ від положення рівноваги. Період коливань $T = 4{,}35\ с.$ $(0{,}05\frac{м}{с})$.

6.7. Людина несе на коромислі відро з водою, період коливань якого $T = 1{,}6\ с$. При якій швидкості руху людини вода буде особливо сильно вихлюпуватися, якщо довжина кроку людини $l = 60\ см$? $(\upsilon = 0{,}75\frac{м}{с})$.

6.8. Визначити відношення кінетичної енергії точки, що коливається, до її потенціальної енергії в момент часу $t = \frac{T}{12},$ де $T -$ період коливань. Початкова фаза коливань $\varphi_0 = 0.$ $(\frac{E_к}{E_п} = 3)$.

6.9. Амплітуда гармонічних коливань матеріальної точки $A = 0{,}12\ м,$ повна енергія коливань $E = 6\ мкДж.$ У разі зміщення x від положення рівноваги на точку, що коливається, діє сила $F = 50\ мкН.$ Визначити величину цього зміщення. $(0{,}06\ м)$.

6.10. Максимальна швидкість руху підвішеної на нитці кульки масою $m = 80\ г,$ що здійснює малі коливання, дорівнює $\upsilon = 0{,}3\frac{м}{с}.$ Визначити повну механічну енергію коливальної системи. $(3{,}6\ мДж)$.

6.11. У скільки разів зміниться повна механічна енергія маятника при зменшенні його довжини в три рази і збільшенні амплітуди коливань в два рази? $(\frac{E_2}{E_1}=12)$.

6.12. Рівняння коливань тіла на пружині жорсткістю $k=600\frac{Н}{м}$ має вигляд $x=0,01\sin\frac{\pi}{2}t$. Визначити повну механічну енергію коливальної системи. $(0,03\ Дж)$.

6.13. Матеріальна точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що описуються рівняннями $x=\sin\omega t$ і $y=2\sin 2\omega t$. Написати рівняння траєкторії матеріальної точки. $(16x^4-16x^2+y^2=0)$.

6.14. Матеріальна точка бере участь одночасно у двох косинусоїдальних коливаннях одного напряму з однаковими амплітудами $A = 0{,}025$ *м* і однаковими періодами $T = 8$ *с*. Різниця фаз між цими коливаннями $\varphi_2-\varphi_1 = \pi/4$. Початкова фаза одного з цих коливань дорівнює нулю. Написати рівняння результуючого руху. $\boldsymbol{(x = 0{,}046\cos(\pi t/4 + \pi/8))}$

6.15. Визначити період незгасаючих гармонічних коливань, якщо диференціальне рівняння цих коливань має вигляд: $\ddot{x}+0,25\pi^2x=0$. $(4с)$.

6.16. Диференціальне рівняння згасаючих коливань $\ddot{x}+8\dot{x}+\frac{\pi^2}{4}x=0$. Визначити коефіцієнт згасання. $(4с^{-1})$.

6.17. Система коливається з амплітудою $A=1\ мм$ і частотою $\nu=5\ Гц$. Коефіцієнт опору дорівнює $r=200\frac{кг}{с}$. Визначити максимальну силу опору. $(6,28\ Н)$.

6.18. Період згасаючих коливань $T=2,5\ с$, коефіцієнт згасання $\delta=0,2\ с^{-1}$. Через скільки коливань амплітуда зменшиться в e разів? (2).

6.19. За проміжок часу, протягом якого коливна система здійснює $N=50$ повних коливань, амплітуда зменшилася в два рази. Визначити добротність системи. $(Q=227)$.

6.20. Тіло масою $m=50\ г$, що висить на нитці довжиною $l=20\ см$, здійснює коливання в рідині. Коефіцієнт опору рідини $r=0,02\frac{кг}{с}$. На тіло діє вимушуюча сила $F=0,1\cos\Omega t\ Н$. Визначити частоту вимушуючої сили при якій амплітуда вимушених коливань максимальна та резонансну амплітуду. ($\Omega = 7\ c^{-1}$, $A_{рез} = 71,4\ см$).

6.21. Визначити довжину хвилі коливань, якщо відстань між першою і четвертою пучностями стоячої хвилі $l = 15\ см.$ ($\lambda = 0,1\ м$).

6.22. У скільки разів швидкість поширення звуку в повітрі при температурі $t_1 = 27\ ^\circ C$ більша за швидкість поширення звуку в повітрі при температурі $t_2 = -33\ ^\circ C$? ($\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 1{,}12$).

Тести

6.1. Яка з формул визначає залежність координати x від часу t при прямолінійних гармонічних коливаннях вздовж осі координат OX?

А) $x = A\omega\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; **Б)** $x = A\cos(\omega_0 t^2 + \varphi_0)$;
В) $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; **Г)** $x = A\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$;
Д) $x = A\omega\cos(\omega_0 + \varphi_0)t$.

6.2. Яке співвідношення показує, що за час T здійснюється одне повне коливання і фаза коливань отримує приріст 2π?

А) $\omega_0(t + T) + \varphi_0 = (\omega_0 t + \varphi_0) + 2\pi$; **Б)** $(\omega_0 t + \varphi_0) + T = (\omega_0 t + \varphi_0) + 2\pi$;
В) $\omega_0(t + T) + 2\pi = (\omega_0 t + \varphi_0) + T$; **Г)** $(\omega_0 t + \varphi_0) + T = \omega_0 t + (\varphi_0 + 2\pi)$;
Д) $(\omega_0 + \varphi_0)t + T = \omega_0 t + (\varphi_0 + 2\pi)$.

6.3. Який вираз визначає швидкість коливної точки?

А) $\upsilon = A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$; **Б)** $\upsilon = A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$;
В) $\upsilon = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$; **Г)** $\upsilon = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$;
Д) $\upsilon = -A\omega_0\sin(\omega_0 + \varphi_0)t$.

6.4. Який вираз визначає прискорення коливної точки?

А) $a = A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; **Б)** $a = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$;
В) $a = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; **Г)** $a = -A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$;
Д) $a = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

6.5. На яку величину відрізняється фаза швидкості від фази зміщення?

А) $\pi/2$; **Б)** 2π; **В)** π; **Г)** $3\pi/2$; **Д)** $\pi/4$.

6.6. Яка з формул визначає диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань, збуджених квазіпружними силами?

А) $\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; **Б)** $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; **В)** $\ddot{x} + \omega_0^2\dot{x} = 0$;

Г) $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0;$ **Д)** $\ddot{x}-\omega_0^2 x=0.$

6.7. Який вираз визначає кінетичну енергію матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання?

А) $E_к=\dfrac{m}{2}A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0);$ **Б)** $E_к=\dfrac{m}{2}A^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0);$

В) $E_к=\dfrac{m}{2}A^2\omega_0\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0);$ **Г)** $E_к=\dfrac{m}{2}A^2\upsilon^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0);$

Д) $E_к=mA^2\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0).$

6.8. Зведена довжина фізичного маятника – це:

А) довжина абсолютно твердого тіла, що здійснює коливання під дією сили тяжіння;
Б) віддаль між точкою підвісу та центром мас маятника;
В) віддаль між точкою підвісу та центром гойдання маятника;
Г) віддаль між центром мас та центром гойдання маятника;
Д) довжина такого пружинного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань цього фізичного маятника.

6.9. Період коливань фізичного маятника можна знайти за формулою:

А) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mg\ell}};$ **Б)** $T=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}};$ **В)** $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}};$

Г) $T=2\pi\sqrt{LC};$ **Д)** $T=\dfrac{2\pi}{\omega}.$

6.10. Які рівняння описують гармонічні коливання однакової частоти, що спрямовані вздовж однієї прямої?

А) $x_1=A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_{01});$ $y_1=A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_{02});$

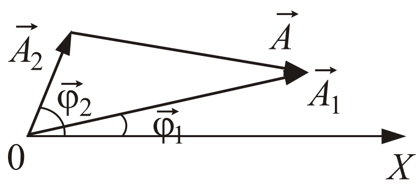
Б) $x_1=A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_{01});$ $x_2=A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_{02});$

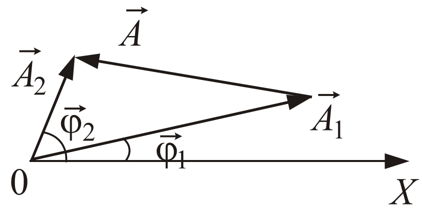
В) $y_1=A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_{01});$ $x_2=A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_{02});$

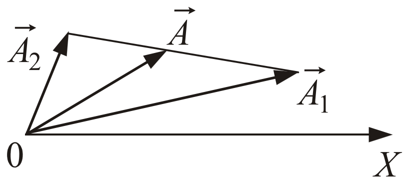
Г) $x_1=A_2\cos(\omega_1 t+\varphi_{01});$ $x_2=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_{02});$

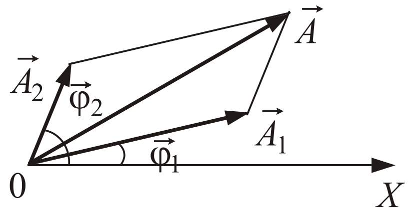
Д) $x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_{01});$ $y_2=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_{02}).$

6.11. На якому рисунку правильно виконано додавання двох гармонічних коливань однакової частоти, які напрямлені вздовж однієї прямої?

1. 

2. 

3. 

4. 

А) 1; **Б)** 2; **В)** 2 і 3; **Г)** 3; **Д)** 4.

6.12. Який вираз визначає амплітуду результуючого коливання двох гармонічних коливань однакової частоти, які спрямовані вздовж однієї прямої?

А) $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$;

Б) $A = A_1 + A_2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$;

В) $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$;

Г) $A = \sqrt{A_1 + A_2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$;

Д) $A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$.

6.13. Який вираз визначає початкову фазу результуючого коливання двох гармонічних коливань однакової частоти, які спрямовані вздовж однієї прямої?

А) $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}$; **Б)** $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$;

В) $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}$; **Г)** $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{A_1\cos\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\sin\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$;

Д) $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{A_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 + A_2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2}{A_1\,\mathrm{ctg}\,\varphi_1 + A_2\,\mathrm{ctg}\,\varphi_2}$.

6.14. Яка з формул визначає рівняння, що описує биття?

А) $x = (2A\cos\dfrac{\Delta\omega}{2}t)\cos\omega_0 t$; **Б)** $x = (2A\cos\dfrac{\omega_0 t}{2})\cos\Delta\omega t$;

В) $x = (2A\cos\Delta\omega t)\sin\omega_0 t$; **Г)** $x = (2A\cos\omega_0 t)\cos\Delta\omega t$;

Д) $x = (2A\cos\Delta\omega t)\sin\Delta\omega t$.

6.15. Який вираз визначає період биття?

А) $T_б = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$; **Б)** $T_б = 2\pi\Delta\omega$; **В)** $T_б = \dfrac{2\pi}{\omega_0 + \Delta\omega}$;

Г) $T_б = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$; **Д)** $T_б = 2\pi\omega_0$.

6.16. Які рівняння описують взаємно перпендикулярні коливання однакової частоти?

А) $x_1 = A_1\cos\omega_0 t,$
$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi);$

Б) $x = A\cos\omega_0 t,$
$y = B\cos(\omega_0 t + \varphi);$

В) $y_1 = B_1\cos(\omega_0 t + \varphi),$
$y_2 = B_2\cos\omega_0 t;$

Г) $x = A\cos\omega_1 t,$
$y = B\cos(\omega_2 t + \varphi);$

Д) $x_1 = A_1\cos\omega_1 t$
$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi).$

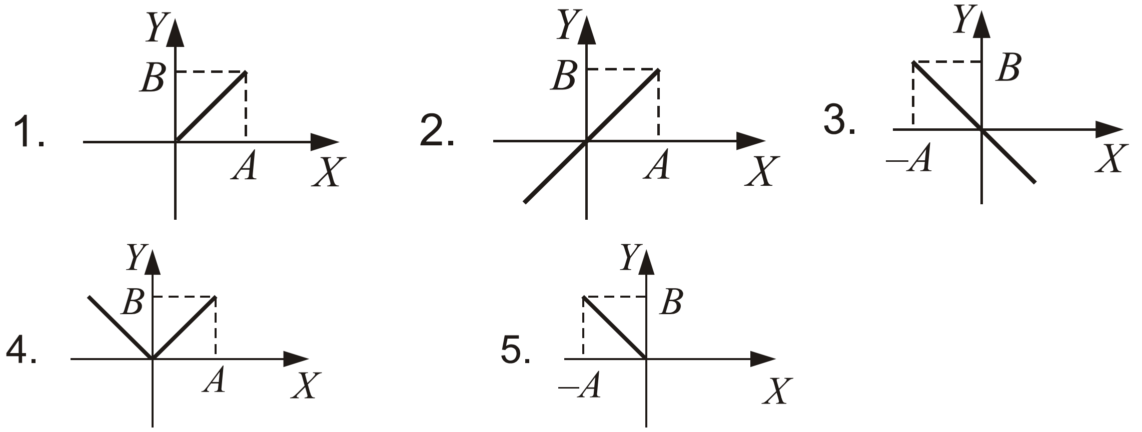
6.17. Яке рівняння визначає траєкторію, по якій рухається точка, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях?

А) $\frac{x^2}{A^2} + 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi;$ **Б)** $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi;$

В) $\frac{x^2}{A^2} + 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\sin\varphi + \frac{y^2}{B} = \cos^2\varphi;$ **Г)** $\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi;$

Д) $\frac{x^2}{A^2} + \frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = 2\sin^2\varphi.$

6.18. Знайти траєкторію руху точки, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, якщо $\varphi = \pm 2m\pi$.



А) 5; **Б)** 4; **В)** 3; **Г)** 2; **Д)** 1.

6.19. Яке рівняння визначає траєкторію руху точки, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, якщо $\varphi = \pm(2m + 1)\pi$?

А) $\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0;$ **Б)** $\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0;$ **В)** $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1;$

Г) $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1;$ **Д)** $\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 1.$

6.20. Коливання вважаються згасаючими, якщо поступово зменшується їх:
А) період; **Б)** частота; **В)** амплітуда;
Г) фаза; **Д)** правильної відповіді тут немає.

6.21. Сила опору пропорційна до:
А) маси тіла; **Б)** швидкості руху тіла;
В) площі поперечного перерізу тіла;
Г) прискорення руху тіла; **Д)** об’єму тіла.

6.22. Яка з формул визначає другий закон Ньютона для згасаючих коливань?

А) $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$; **Б)** $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$; **В)** $\ddot{x}+2\delta x=0$;

Г) $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2=0$; **Д)** $\ddot{x}-2\delta\dot{x}-\omega_0^2 x=0$.

6.23. Розв’язок рівняння згасаючих коливань має вигляд:

А) $x=A\cos(\omega t+\varphi)$; **Б)** $x=Ae^{\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$;

В) $x=A_0e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t+\varphi)$; **Г)** $x=A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$;

Д) $x=A_0e^{-\delta t}\cos(\omega_0+\varphi_0)t$.

6.24. Який вираз визначає власну циклічну частоту коливань дисипативної системи?

А) $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$; **Б)** $\omega=\omega_0-\delta$; **В)** $\omega=\sqrt{\omega_0-\delta}$;

Г) $\omega=\sqrt{\omega_0^2+\delta^2}$; **Д)** $\omega=\omega_0-2\delta$.

6.25. Який вираз визначає логарифмічний декремент загасання?
А) æ = ωT; **Б)** æ = δ/T; **В)** æ = δT; **Г)** æ = N; **Д)** æ = T/δ.

6.26. Яка з величин, що характеризують швидкість загасання коливань, дорівнює $1/N$ (N – кількість коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e разів)?
А) час релаксації; **Б)** декремент загасання;
В) логарифмічний декремент загасання;
Г) добротність коливальної системи;
Д) коефіцієнт загасання.

6.27. Механічні коливання називаються вимушеними, якщо вони:
А) з плином часу згасають;
Б) відбуваються під дією зовнішніх сил, які періодично змінюються;
В) відбуваються лише під дією внутрішніх сил коливальної системи;
Г) мають дуже малу амплітуду коливань;
Д) правильної відповіді тут немає.

6.28. Що відбувається під час явища резонансу?

А) утворюється стояча хвиля; **Б)** зростає амплітуда коливань;

В) коливання згасають; **Г)** збільшується частота коливань;

Д) правильної відповіді тут немає.

6.29. В якому випадку відбувається резонанс?

А) за відсутності тертя;

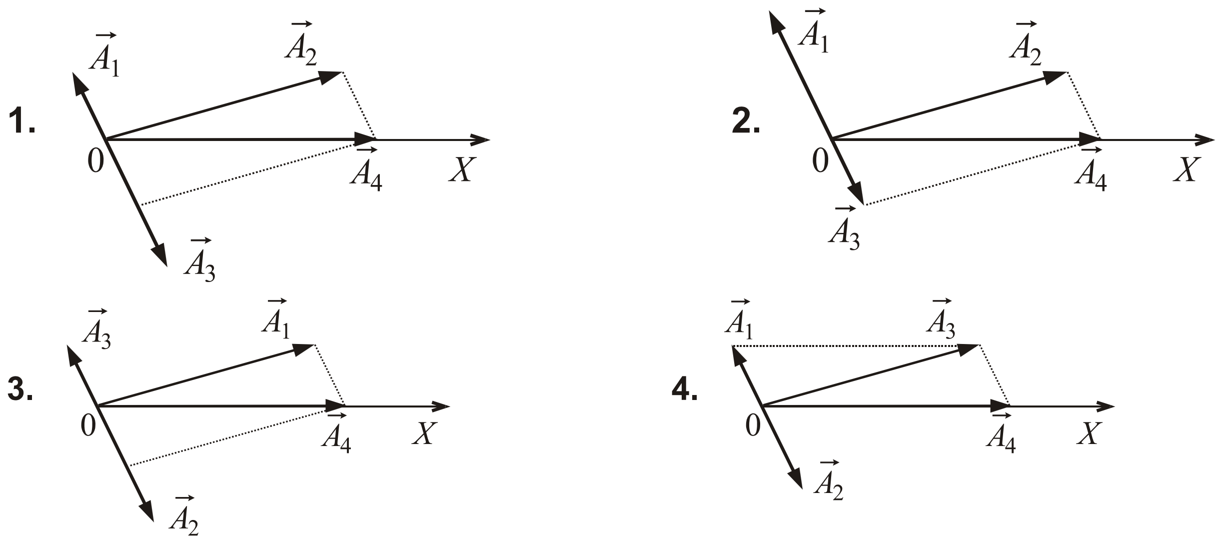
Б) коли збігається частота власних коливань з частотою зовнішньої сили;

В) коли діє будь-яка зовнішня сила;

Г) коли частота власних коливань не збігається з частотою зовнішньої сили;

Д) правильної відповіді тут немає.

6.30. Який з рисунків відповідає отриманню амплітуди усталених вимушених коливань?



А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** правильної відповіді тут немає.

6.31. Яка з формул визначає зсув фаз між зміщенням і вимушувальною силою?

А) $tg\varphi = \dfrac{\omega_0 - \Omega}{2\delta\Omega}$; **Б)** $tg\varphi = \dfrac{2\Omega}{\omega_0 - \Omega}$; **В)** $tg\varphi = \dfrac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$;

Г) $tg\varphi = \dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\delta}$; **Д)** $tg\varphi = \dfrac{\delta\Omega}{\omega_0^2 + \Omega^2}$.

6.32. Резонансною називається частота:

А) за якої амплітуда коливань досягає мінімального значення;

Б) за якої амплітуда коливань є статичною;

В) за якої амплітуда коливань досягає максимального значення;

Г) за якої амплітуда коливань зростає в *e* разів;

Д) за якої амплітуда коливань зменшується в *e* разів.

6.33. Яка з формул визначає резонансну частоту?

А) $\Omega_p = \omega_0 - 2\delta$; **Б)** $\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$;

В) $\Omega_p = \sqrt{2\delta^2 - \omega_0^2}$; **Г)** $\Omega_p = (\omega_0 - \delta)(\omega_0 + \delta)$;

Д) $\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

6.34. Амплітуда вимушених коливань під час резонансу залежить від:

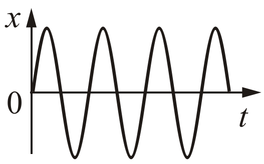
А) фази коливань;

Б) частоти зміни зовнішньої змушувальної сили і тертя у коливальній системі;

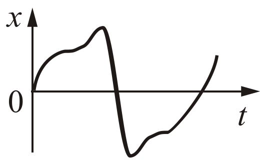
В) внутрішніх сил пружності, які діють у коливальній системі;

Г) прискорення вільного падіння; **Д)** правильної відповіді тут немає.

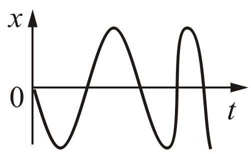
6.35. Вибрати графік вимушених коливань:



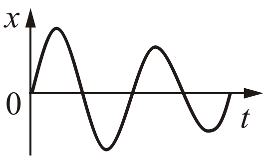
А)



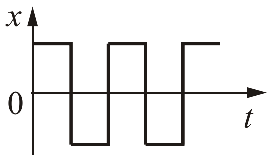
Б)



В)



Г)



Д)

№ завдання	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	6.10	6.11	6.12
Варіант відповіді	**В**	**А**	**Г**	**Б**	**А**	**Г**	**Б**	**Б**	**А**	**Б**	**Д**	**А**

№ завдання	6.13	6.14	6.15	6.16	6.17	6.18	6.19	6.20	6.21	6.22	6.23	6.24
Варіант відповіді	**Б**	**А**	**Г**	**Б**	**Г**	**Г**	**А**	**В**	**Б**	**Б**	**Г**	**А**

№ завдання	6.25	6.26	6.27	6.28	6.29	6.30	6.31	6.32	6.33	6.34	6.35
Варіант відповіді	**В**	**В**	**Б**	**Б**	**Б**	**А**	**В**	**В**	**Б**	**Б**	**А**