

## 7. ГІДРОДИНАМІКА

### Основні формули

#### 1. Рівняння неперервності струмину

$$Sv = \text{const},$$

де  $S$  - площа поперечного перерізу трубки течії;  $v$  - швидкість течії.

#### 2. Рівняння Бернуллі для нестискувальної рідини

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const},$$

де  $p$  - статичний тиск;  $\rho$  - густина рідини;  $v$  - швидкості рідини в цих перерізах;  $\frac{\rho v^2}{2}$  - динамічний тиск;  $\rho gh$  - гідростатичний тиск у довільному перерізі трубки течії.

#### 3. Витрати рідини у трубці течії:

а) об'ємна витрата	–	$Q_v = v S;$
б) витрата маси рідини	–	$Q_m = v S \rho .$

### Методичні вказівки і поради

Рівняння неперервності струмину і рівняння Бернуллі для нестискувальної рідини, згідно з якими певна комбінація величин залишається сталою вздовж трубки течії, зручно застосовувати, порівнюючи значення цієї комбінації величин у двох різних перерізах.

Формули рівняння неперервності струмину і рівняння Бернуллі стосуються випадку однієї рідини. Якщо ж розглядається суміш рідин, розташованих окремими шарами, то треба застосовувати ці формули до кожної рідини окремо.

Розглядаючи витікання рідини з невеликого отвору, зручно застосовувати рівняння Бернуллі до прошарків рідини, один з яких міститься у верхній частині посудини, а другий – біля отвору. Тиск в обох перерізах дорівнює атмосферному, оскільки обидва перерізи межують з навколишнім повітрям. Внаслідок того, що переріз отвору дуже малий порівняно з перерізом посудини, швидкість верхнього шару рідини  $v_1$  буде дуже малою порівняно з швидкістю її витікання з отвору, і тому можна наближено вважати, що  $v_1 = 0$ . Звичайно, це буде невірним, якщо величини перерізів отвору і посудини будуть порівнянними.

Приклади розв'язування задач

**7.1 . По горизонтальній трубці (рис.7.1) протікає рідина. Різниця рівнів  $\Delta h$  цієї рідини у трубках А і В дорівнює  $\Delta h = 10$  см. Діаметри трубок однакові. Знайти швидкість течії рідини у трубці.**

<b>Дано:</b>	<b>Розв'язування</b>
$\Delta h = 10$ см	Оскільки діаметри трубок однакові, то однакові також і площі поперечного перерізу трубок.
$v$ - ?	Таким чином, з рівняння нерозривності струмینی:

$$S_A v_A = S_B v_B$$

отримуємо, що

$$v_A = v_B = v .$$

З формули Бернуллі маємо:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_A = \rho g h_B .$$

Звідси швидкість течії рідини рівна:

$$v = \sqrt{2g(h_B - h_A)} = \sqrt{2g\Delta h} ,$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,1} = 1,4 \text{ м/с} .$$

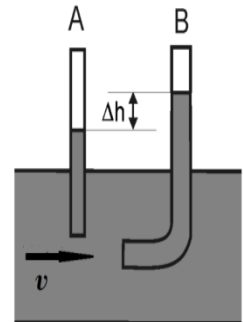


Рис.7.1

**7.2. Дві манометричні трубки встановлені на горизонтальній трубці змінного перерізу у місцях, де перерізи у трубці відповідно дорівнюють  $S_1 = 20$  см<sup>2</sup>,  $S_2 = 4$  см<sup>2</sup> (рис .7.2). По трубці тече вода. Різниця рівнів води у манометричних трубках дорівнює  $h = 40$  см. Знайти об'єм води, що протікає за одиницю часу через переріз труби.**

<b>Дано:</b>	<b>Розв'язування</b>
$S_1 = 20$ см <sup>2</sup>	Об'єм води, що протікає за одиницю часу через переріз труби
$S_2 = 4$ см <sup>2</sup>	$Q_v = \frac{V}{\Delta t} = \frac{S_2 v_2 \Delta t}{\Delta t} = S_2 v_2 . \quad (1)$
$h = 40$ см	З рівняння нерозривності струмینی:
$Q_v$ -?	

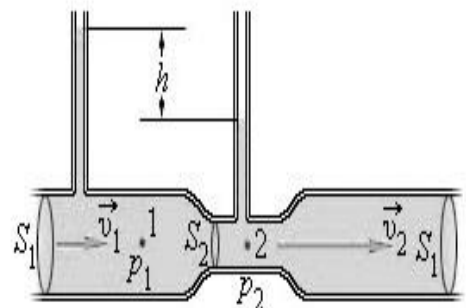


Рис .7.2

## Механіка

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1}. \quad (2)$$

Тиск рідини у різних частинах труби можна визначити за рівнянням Бернуллі:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left( 1 - \frac{S_2^2}{S_1^2} \right). \quad (3)$$

За висотою рівня рідини у манометричних трубках визначаємо тиски:

$$p_1 = \rho g h_1, \quad p_2 = \rho g h_2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2) \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho g h. \quad (4)$$

З рівнянь (3) і (4) маємо:

$$\frac{\rho}{2} v_2^2 \left( 1 - \frac{S_2^2}{S_1^2} \right) = \rho g h \Rightarrow v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}. \quad (5)$$

Підставивши (5) в (1), отримаємо кінцевий вираз:

$$Q_V = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}. \quad (6)$$

Знаходимо числові значень шуканої величини згідно (6):

$$Q_V = 20 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{(20^2 - 4^2) 10^{-4}}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}.$$

**7.3. Діаметр горизонтального трубопроводу  $D = 10$  см (рис.7.3). Вода підніметься на висоту  $h = 3,5$  м, якщо об'ємна витрата рідини  $Q_V = 6$  л/с. Визначити діаметр  $d$  звуженої частини трубопроводу.**

**Дано:**

$$h = 3,5 \text{ м}$$

$$Q_V = 6 \text{ л/с}$$

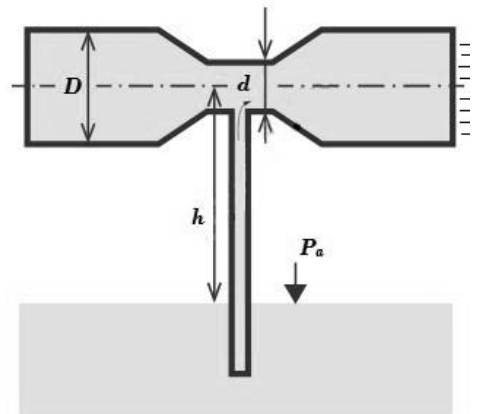
$$D = 10 \text{ см}$$

$$d - ?$$

### Розв'язування

На виході з широкої частини трубопроводу тиск  $p_2$  рівний атмосферному  $p_a$ . Оскільки трубопровід горизонтальний, то  $h_1 = h_2$  (рис.7.3). Згідно рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_a, \quad (1)$$



де  $v_1$  — швидкість води у вузькій частині трубопроводу, **Рис.7.3**

$v_2$  — швидкість води в широкій частині трубопроводу. Для того, щоб вода піднялась з резервуара на висоту  $h$ , тиск на поверхні води в резервуарі  $p_a$

## Механіка

повинен бути більшим від тиску у вузькій частині трубопроводу на величину  $\rho gh$ :

$$p_a = p_1 + \rho gh. \quad (2)$$

Підставивши вираз (2) в рівняння (1), отримаємо:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh. \quad (3)$$

Швидкість можна виразити через об'ємну витрату рідини, враховуючи,

$$\text{що } S_1 = \frac{\pi d^2}{4}, S_2 = \frac{\pi D^2}{4}: \quad v_1 = \frac{4Q_V}{\pi d^2}, \quad v_2 = \frac{4Q_V}{\pi D^2}.$$

Підставляємо вирази швидкостей в (3), попередньо скоротивши на  $\rho$ :

$$\frac{8Q_V^2}{\pi^2 d^4} = \frac{8Q_V^2}{\pi^2 D^4} + gh.$$

Звідси:

$$d = \sqrt[4]{\frac{8Q_V^2}{\pi^2 \left( \frac{8Q_V^2}{\pi^2 D^4} + gh \right)}}.$$

Підставимо числові значення:

$$d = \sqrt[4]{\frac{8 \cdot 0,006^2}{3,14^2 \left( \frac{8 \cdot 0,006^2}{3,14^2 \cdot 0,1^4} + 9,81 \cdot 3,5 \right)}} = 0,03 \text{ м.}$$

**7.4. Через конічну насадку брандспойта (рис.7.4), що розташована на землі під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до горизонту, подається вода під тиском  $p_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$  з швидкістю  $v_1 = 6 \text{ км/год}$ . Довжина насадки  $l = 30 \text{ см}$ . Знайти швидкість  $v_2$  витікання води через конічну насадку без врахування втрат напору.**

### Розв'язування

Дано:

$$p_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$v_1 = 6 \text{ км/год}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$l = 30 \text{ см}$$

$$v_2 - ?$$

Використаємо рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2.$$

Тиск виході з насадки рівний атмосферному  $p_2 = p_a$ . Оскільки насадка розташована на землі та під кутом  $60^\circ$  до горизонту, то

$$h_1 = 0, \text{ а } h_2 = l \sin \alpha.$$

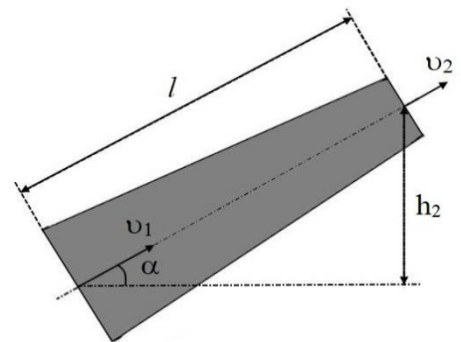


Рис.7.4

## Механіка

Підставимо ці дані у рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g l \sin \alpha + p_2.$$

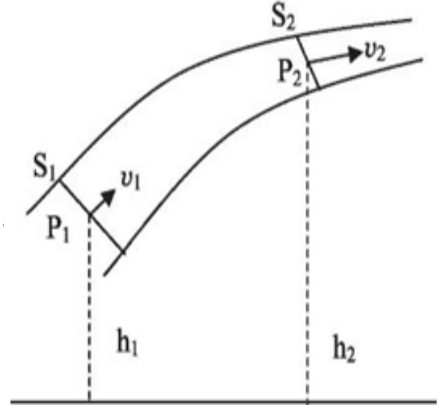
Звідси знайдемо швидкість витікання води через конічну

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} - 2gl \sin \alpha}.$$

Підставимо числові значення:

$$v_2 = \sqrt{1,67^2 + \frac{2 \cdot (6 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5)}{1000} - 2 \cdot 9,81 \cdot 0,3 \cdot 0,5} = 33,2 \text{ м/с}.$$

**7.5 . У широкій частині труби, що знаходиться на висоті  $h_1 = 0,1$  м вода тече зі швидкістю  $v_1 = 0,5$  м/с (рис.7.5) Вузька частині труби знаходиться на висоті  $h_2 = 0,5$  м , і різниця тисків в широкій і вузькій частинах труби становить  $\Delta p = 1,33$  кПа. Знайти швидкість течії рідини у вузькій частині труби.**

<p><b>Дано:</b></p> <p><math>h_1 = 0,1 \text{ м}</math></p> <p><math>v_1 = 0,5 \text{ м/с}</math></p> <p><math>h_2 = 0,5 \text{ м}</math></p> <p><math>\Delta p = 1,33 \text{ кПа}</math></p> <p><math>a</math></p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> <p><math>v_1 - ?</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>Розв'язування</b></p> <p>Згідно рівняння Бернуллі:</p> $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$ <p style="text-align: center;">Перепишемо рівняння</p> $\frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 - \rho g h_1 + p_2 - p_1.$	
--	---	---

Знайдемо  $v_1$  , враховуючи, що  $p_2 - p_1 = \Delta p$  : **Рис.7.5**

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 + 2g(h_2 - h_1) + \frac{2\Delta p}{\rho}}.$$

Підставимо числові значення:

$$v_1 = \sqrt{0,5^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot (0,5 - 0,1) + \frac{2 \cdot 1330}{1000}} = 3,28 \text{ м/с}.$$

**7.6.** На столі стоїть посудина з водою, у бічній поверхні якої є малий отвір, розташований на відстані  $h_1 = 25$  см від дна посудини і на відстані  $h_2 = 16$  см від рівня води (рис.7.6). Рівень води у посудині підтримується постійним. На якій відстані від отвору по горизонталі струмина падає на стіл?

**Розв'язування**

Дано:

$$h_1 = 25 \text{ см}$$

$$h_2 = 16 \text{ см}$$

$$l - ?$$

Дальність польоту тіл в полі сили тяжіння напрямлених горизонтально рівна:

$$l = v t. \quad (1)$$

Згідно рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_2 = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Скоротивши рівняння на  $\rho$  отримаємо:

$$v_1^2 + 2gh_2 = v^2, \quad (2)$$

де  $v_1$  – швидкість зниження рівня води в посудині,  $v$  – швидкість витікання води через отвір. За умовою  $v_1 = 0$ , відповідно, з рівняння (2)

$$v_2 = \sqrt{2gh_2}. \quad (3)$$

Висота падіння струмини з отвору, під дією сили тяжіння, на стіл рівна:

$$h_2 = \frac{gt^2}{2}.$$

Звідси знайдемо час падіння:

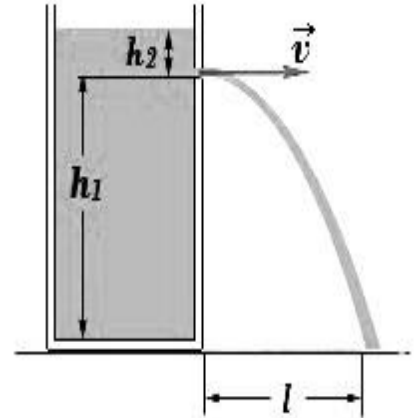
$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}. \quad (4)$$

Підставивши рівняння (3) та (4) у рівняння (1) отримаємо:

$$l = \sqrt{\frac{4gh_2h_1}{g}} = \sqrt{4h_2h_1}.$$

Підставимо числові значення:

$$l = \sqrt{4 \cdot 0,16 \cdot 0,25} = 0,4 \text{ м.}$$



**Рис.7.6**

## Механіка

**7.7. Діаметр поршня в шприці  $d_1 = 0,05$  м, а діаметр отвору  $d_2 = 0,01$  м, хід поршня  $l = 0,25$  м. На поршень діють з силою  $F = 10$  Н. Густина мастила в шприці  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>. Скільки часу  $t$  буде витікати мастило з горизонтально розмішеного шприца ?**

### Розв'язування

**Дано:**

$$d_1 = 0,05 \text{ м}$$

$$d_2 = 0,01 \text{ м}$$

$$F = 10 \text{ Н}$$

$$\rho = 900 \text{ кг/м}^3$$

$$t - ?$$

Згідно рівняння нерозривності струмینی:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (1)$$

$$S_1 v_1 t = S_2 v_2 t, \quad S_1 l = S_2 v_2 t,$$

де  $v_1$  – швидкість мастила у шприці,  $v_2$  – швидкість масти-

ла через отвір,  $S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ ,  $S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$ ,  $t$  – час витікання

мастила.

Запишемо для шприца рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h + p_2, \quad (2)$$

де

$$p_1 = \frac{F}{S_1} + p_a, \quad p_2 = p_a. \quad (3)$$

Визначимо з (1) швидкість

$$v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1} = v_2 \frac{d_2^2}{d_1^2} \quad (4)$$

і підставимо вирази (3), (4) в рівняння (2):

$$\frac{4F}{\pi d_1^2} = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_2^2 \frac{d_2^4}{d_1^4}) = \frac{\rho}{2} v_2^2 (1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}). \quad (5)$$

Звідси,

$$v_2 = \sqrt{\frac{4F}{\pi d_1^2} \frac{2}{\rho} \frac{d_1^4}{d_1^4 - d_2^4}}. \quad (6)$$

Тоді часу  $t$  витікання мастила

$$t = \frac{d_1^2}{d_2^2} \frac{l}{v_2} = \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 l \sqrt{\frac{\pi \rho}{8F} d_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right]} = l d_1 \sqrt{\frac{\pi \rho}{8F} \left[ \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right]}.$$

Підставивши числові значення, маємо  $t = 1,85\text{с}$ .

**7.8. В бак рівномірною струминою за одиницю часу поступає об'єм води  $Q_v = 2 \text{ дм}^3/\text{с}$ . У дні баку є отвір площею  $S = 2 \text{ см}^2$ . На якому рівні  $h$  буде втримуватись вода в баку?**

Дано:	Розв'язування
$Q_v = 2 \text{ дм}^3/\text{с}$	Вода в баку буде утримуватись на одному рівні, якщо кількість води, що поступає за одиницю часу, дорівнюватиме кількості води, що витікає з баку за одиницю часу
$S = 2 \text{ см}^2$	
$h - ?$	
	$Q_v = S v, \quad (1)$

де  $v$  – швидкість витікання води.

Згідно рівняння Бернуллі

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2} \quad (2)$$

З рівняння (2) знаходимо швидкість витікання:

$$v = 2 g h \quad (3)$$

Підставивши вираз (3) у рівняння (1), отримаємо формулу для обчислення висоти рівня води у баку:

$$h = \frac{Q_v}{2 g S}; \quad h = 0,5 \text{ м.}$$

**7.9. Широка посудина з невеликим отвором у дні наповнена водою і гасом. Висота шару води  $h_1 = 30 \text{ см}$ , а шару гасу  $h_2 = 20 \text{ см}$ . Густина води  $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$ , густина гасу  $\rho_2 = 800 \text{ кг/м}^3$ . Нехтуючи в'язкістю, визначити швидкість витікання води.**

Дано:	Розв'язування
$h_1 = 30 \text{ см}$	Розглянемо верхній шар і запишемо рівняння Бернуллі стосовно до двох перерізів у верхній і нижній частинах шару. Тиск у верхній частині збігається з атмосферним тиском $p_a$ , тиск у нижній частині позначимо $p_1$ . Оскільки отвір невеликий, швидкістю переміщення рідини наближено можна знехтувати, тому
$h_2 = 20 \text{ см}$	
$\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$	
$\rho_2 = 800 \text{ кг/м}^3$	
$v - ?$	

$$p_a + \rho_2 g h_2 = p_1. \quad (1)$$

Тепер розглянемо нижній шар. Тиск в його верхній частині буде  $p_1$ , а в нижній

## Механіка

частині, біля отвору  $p_a$ . У верхній частині знову вважаємо, що швидкість рідини дорівнює нулю. Отже,

$$p_1 + \rho_2 g h_1 = p_a + \frac{\rho_1 v^2}{2}. \quad (2)$$

Рівняння (1) і (2) утворюють систему двох рівнянь з двома невідомими  $p_1$  і  $v$ :

$$p_a + \rho_2 g h_2 + \rho_2 g h_1 = p_a + \frac{\rho_1 v^2}{2}.$$

Швидкість витікання води визначимо з рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho_1 v^2}{2} = g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2).$$

Звідки:

$$v = \sqrt{2g(h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2)}; \quad v = 3 \text{ м/с}.$$

**7.10. Циліндрична посудина діаметром  $D = 40$  см наповнена водою, висота якої  $h = 40$  см. В дні посудини зроблено круглий отвір діаметром  $d = 1$  см. Визначити швидкість пониження рівня води  $v_1$  у баку, вважаючи воду нев'язкою рідиною.**

Розв'язування	
<b>Дано:</b> $D = 40 \text{ см}$ $d = 1 \text{ см}$ $h = 40 \text{ см}$ $v_1 - ?$	Згідно рівняння Бернуллі: $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (1)$ де $v_1$ – швидкість зниження рівня води в посудині, $v_2$ – швидкість витікання води через отвір.

З рівняння нерозривності струмینی:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

отримаємо:

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2} = v_1 \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}} = v_1 \frac{D^2}{d^2}. \quad (2)$$

## Механіка

Підставляючи (2) в (1), отримуємо:

$$v_1^2 + 2gh = \frac{v_1^2 D^4}{d^4} \Rightarrow v_1^2 \left( \frac{D^4}{d^4} - 1 \right) = 2gh \Rightarrow v_1^2 \left( \frac{D^4 - d^4}{d^4} \right) = 2gh.$$

Звідки:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2ghd^4}{D^4 - d^4}}.$$

Для висоти  $h = 40$  см швидкість рівна:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,4 \cdot 0,01^4}{0,4^4 - 0,01^4}} = 1,75 \text{ м/с}.$$

**7.11. Циліндричний бак висотою  $h = 1$  м повністю заповнений водою. Площа поперечного перерізу отвору у 400 разів менша за площу поперечного перерізу баку. За який час вся вода виліється через отвір, розташований біля дна баку?**

Дано:	Розв'язування
$h = 1 \text{ м}$	Згідно рівняння Бернуллі:
$S_1 = 400 S_2$	$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}.$
$t - ?$	

Скоротивши рівняння на  $\rho$  отримаємо:

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2, \quad (1)$$

де  $v_1$  – швидкість зниження рівня води в посудині,  $v_2$  – швидкість витікання води через отвір.

З рівняння нерозривності струмینی:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

отримаємо:

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2}, \quad (2)$$

де  $S_1$  – площа поперечного перерізу посудини,  $S_2$  – площа поперечного перерізу отвору. Підставляючи (2) в (1), отримаємо:

$$v_1^2 + 2gh = \frac{v_1^2 S_1^2}{S_2^2}, \quad v_1^2 \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right) = 2gh, \quad v_1^2 \left( \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2} \right) = 2gh.$$

Звідки:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2ghS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

Оскільки висота з часом змінюється, вона є функцією залежною від часу  $h(t)$ . За певний проміжок часу  $dt$  рівень води в баку знизиться на:

$$dh = v_1 dt = \sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{h} dt,$$

звідки

$$dt = \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} \frac{1}{\sqrt{h}} dh. \quad (3)$$

Інтегруючи рівняння (3), отримаємо:

$$t = \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} \int_0^h \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} 2\sqrt{h} \Big|_0^h = \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} 2\sqrt{h}.$$

Оскільки  $S_1 = 400 S_2$ , то

$$t = \sqrt{\frac{160000S_2^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} 2\sqrt{h} = \sqrt{\frac{159999}{2g}} 2\sqrt{h},$$

$$t = \sqrt{\frac{159999}{2 \cdot 9,81}} 2\sqrt{1} \approx 180 \text{ с} = 3 \text{ хв.}$$

**7.12. Вода подається у фонтан з великого циліндричного баку (рис.7.7) і б'є з отвору II зі швидкістю  $v_2 = 12 \text{ м/с}$ . Діаметр баку  $D = 2 \text{ м}$ , діаметр перетину II  $d = 2 \text{ см}$ . Визначити: 1) тиск  $p_1$  під яким вода подається у фонтан; 2) швидкість  $v_1$  зниження води у баку.**

Дано:

$$v_2 = 12 \text{ м/с}$$

$$D = 2 \text{ м}$$

$$d = 2 \text{ см}$$

$$p_1 - ?$$

$$v_1 - ?$$

### Розв'язування

1. Тиск  $p_1$ , під яким вода подається у фонтан, знайдемо із рівняння Бернуллі. У випадку горизонтальної трубки воно має вигляд:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (1)$$

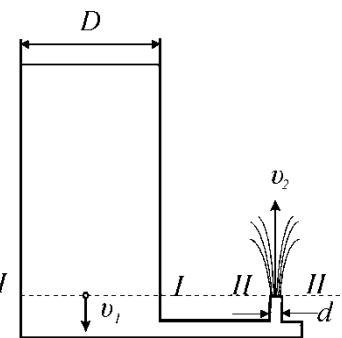


Рис. 7.7

З цього рівняння отримаємо

$$p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}. \quad (2)$$

Оскільки  $v_1 \ll v_2$ , то з рівняння (2) випливає  $p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} = 72 \text{ кПа}$ .

2. Проведемо перетин  $I$  в баку на рівні перетину  $II$  фонтану. Оскільки площа  $S_1$  перетину  $I$  набагато більша за площу  $S_2$  перетину  $II$ , то висоту  $h$  рівня води в баку можна вважати для малого проміжку часу постійною, а потік - усталеним. Для усталеного потоку справедливе рівняння нерозривності струменя  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ , звідки випливає, що

$$v_1 = \frac{v_2 S_2}{S_1}, \text{ або } v_1 = v_2 \left( \frac{d}{D} \right)^2. \quad (3)$$

Підставивши в (3) значення заданих величин, отримаємо:

$$v_1 = 0,0012 \text{ м/с}.$$

**7.13.** *Із брандспойта, діаметр отвору якого  $d_1 = 14 \text{ мм}$ , б'є вертикально вгору струмина води. За час  $t = 1 \text{ хв}$  витікає об'єм води  $V = 0,08 \text{ м}^3$ . Чому дорівнює діаметр  $d_2$  струмини на висоті  $H = 2 \text{ м}$ ?*

Дано:

$$d_1 = 14 \text{ мм}$$

$$t = 1 \text{ хв}$$

$$V = 0,08 \text{ м}^3$$

$$H = 2 \text{ м}$$

$$v_1 - ?$$

Розв'язування

Об'єм води  $V$ , що протікає за час  $t$  через переріз струмини

$$\frac{V}{t} = \frac{S_2 v_2 t}{t} = S_2 v_2 = S_1 v_1.$$

Звідси швидкості

$$v_1 = \frac{V}{t S_1} = \frac{4V}{t \pi d_1^2}, \quad v_2 = \frac{V}{t S_2} = \frac{4V}{t \pi d_2^2}.$$

Запишемо рівняння Бернуллі

$$\frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g H.$$

і підставимо вирази для швидкостей:

$$\left( \frac{4V}{t \pi} \right)^2 \frac{1}{d_1^2} - 2gH = \left( \frac{4V}{t \pi} \right)^2 \frac{1}{d_2^2}.$$

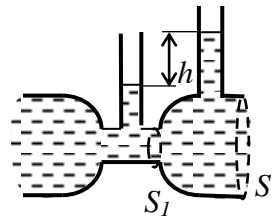
$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{1}{d_1^4} - 2gH\left(\frac{\pi t}{4V}\right)^2}}, \quad d_2 = 0,02 \text{ м.}$$

### Задачі для самостійного розв'язування

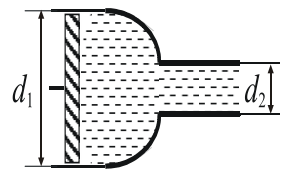
**7.1.** Вода тече у горизонтально розміщеній трубі змінного перерізу. Діаметр  $d_2$  вузької частини труби у 1,5 раза менший за діаметр  $d_1$  широкої частини труби. Швидкість води в широкій частині труби  $v_1 = 20$  м/с. Визначити швидкість води у вузькій частині труби. **(0,45 м/с)**

**7.2.** Радіус широкої частини труби, по якій тече вода,  $R = 30$  см. Швидкість води у вузькій частині труби у  $M = 9$  разів більша за швидкість у широкій частині. Визначити радіус вузької її частини. **(10 см)**

**7.3.** Через водомір протікає вода, густина якої  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Різниця рівнів у манометричних трубках  $\Delta h = 5$  см, а площі перерізів труби біля основ манометричних трубок  $S_1 = 5$  см<sup>2</sup>,  $S_2 = 15$  см<sup>2</sup>. Нехтуючи в'язкістю води, визначити масову витрату  $Q$  води – масу води, що протікає через переріз труби за одиницю часу. **(0,525 кг/с)**



**7.4.** Циліндр діаметром  $d_1 = 0,04$  м заповнений бензолом і розташований горизонтально. На поршень у циліндрі діє сила  $F = 15$  Н, а з отвору витікає струмінь бензолу діаметром  $d_2 = 0,01$  м. Густина бензолу  $\rho_6 = 850$  кг/м<sup>3</sup>. З якою швидкістю переміщається поршень? **(0,33 м/с)**.



**7.5.** У широкій частині горизонтально розміщеної труби нафта тече зі швидкістю  $v_1 = 2$  м/с. Різниця тисків у її широкій і вузькій частинах  $\Delta p = 6,65$  кПа. Густина нафти  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>. Визначити швидкість нафти  $v_2$  у вузькій частині труби. **(4,33 м/с)**

**7.6.** По трубопроводу змінного перерізу з діаметрами  $d_1 = 0,20$  м і  $d_2 = 0,12$  м за час  $t = 1$  с протікає вода об'ємом  $V = 0,03$  м<sup>3</sup>. Тиск в трубопроводі перед звуженням  $p_1 = 200$  кПа. Густина води  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Визначити тиск  $p_2$  в трубопроводі після звуження. **(197 кПа)**

## Механіка

**7.7.** Фарбопульт діаметром  $d_1 = 4 \text{ см}$  заповнений фарбою густиною  $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$  і розташований горизонтально. Компресор в фарбопульті створює тиск  $p = 250 \text{ кПа}$ , а з отвору діаметром  $d_2 = 1 \text{ см}$  витікає струмина фарби. З якою швидкістю  $U$  витікає фарба із фарбопульта? **(25 м/с)**

**7.8.** Об'єм води в горизонтально розташованому циліндрі становить  $V = 200 \text{ см}^3$ , а площа поперечного перерізу вихідного отвору циліндра  $S_2 = 5 \text{ мм}^2$  і набагато менша від площі поршня. Тертям і в'язкістю води знехтувати. Густина води  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . Яку роботу необхідно виконати, щоб, діючи із сталою силою на поршень, витиснути з нього всю воду за час  $t = 4 \text{ с}$ ? **(10 Дж)**

**7.9.** Із брандспойта, який розміщений горизонтально на висоті  $H = 1,5 \text{ м}$  над поверхнею Землі, витікає струмина води діаметром  $d_1 = 0,01 \text{ м}$  і падає на поверхню Землі на віддалі  $l = 6,0 \text{ м}$ . Діаметр рукава  $d_2 = 0,05 \text{ м}$ . Густина води  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . Нехтуючи опором повітря рухові води, визначити надлишковий тиск  $p$  в рукаві. **(58,7 кПа)**

**7.10.** У дні посудини зроблено отвір перерізом  $S_1 = 0,2 \text{ см}^2$ . В посудину налита вода до висоти  $h$  і її рівень підтримується сталим. Визначити площу  $S_2$  поперечного перерізу струмини, що витікає із посудини на відстані  $3h$  від її дна. Силами тертя в рідині знехтувати. **(0,1 см<sup>2</sup>)**

**7.11.** У бак, дно якого має невеликий отвір площею  $S = 40 \text{ мкм}^2$ , рівномірним струменем вливається вода. Приплив води становить  $Q = 0,2 \text{ кг/с}$ . Густина води  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту  $H$  рівня води, який підтримуватиметься у баку. **(1,27 м)**

**7.12.** У дні цистерни, заповненої двома рідинами, висоти яких дорівнюють  $h_1 = 1,2 \text{ м}$  (нижня рідина) і  $h_2 = 0,6 \text{ м}$  (верхня рідина), а густини відповідно  $\rho_1 = 940 \text{ кг/м}^3$  і  $\rho_2 = 820 \text{ кг/м}^3$ , є невеликий отвір. Вважаючи рідини ідеальними і нестискувальними, знайти початкову швидкість витікання рідини з цистерни. **(5,88 м/с)**

**7.13.** Циліндрична посудина діаметром  $D = 0,40 \text{ м}$  наповнена водою. У дні посудини утворився круглий отвір діаметром  $d = 0,01 \text{ м}$ . Уся вода витекла за час  $t = 10 \text{ хв}$ . Знайти початковий рівень води в посудині. **(0,69 м)**

**7.14.** Посудина заповнюється водою. За  $t = 1 \text{ с}$  наливається об'єм  $V = 0,2 \text{ л}$ . Яким повинен бути діаметр  $d$  отвору у дні посудини, щоб вода у ньому затримувалась на рівні  $H = 8,3 \text{ см}$ ? Густина води  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . **(1,4·10<sup>-2</sup> м)**

## Механіка

**7.15.** Бак висотою  $H = 2 \text{ м}$  до країв заповнений водою. Густина води  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . На якій висоті  $h$  необхідно зробити отвір у стінці бака, щоб місце падіння струмини, що витікає з отвору було на максимальній відстані від бака? **(1 м)**

**7.16.** У стінці посудини з водою просвердлено один над одним два отвори з площею  $S = 0,2 \text{ см}^2$  кожний. Відстань між отворами  $\Delta h = 50 \text{ см}$ . У посудину щосекунди вливається  $V = 140 \text{ см}^3$  води. Густина води  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . Визначити на якій відстані від посудини по горизонталі струмини перетнуться. **(120 см)**

**7.17.** На столі стоїть посудина з водою, у бічній поверхні якої є малий отвір, розташований на відстані  $H_1 = 25 \text{ см}$  від дна посудини і на відстані  $H_2 = 16 \text{ см}$  від рівня води. Рівень води у посудині підтримується сталим. Густина води  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . На якій відстані  $\ell$  від отвору по горизонталі струмина падає на стіл? **(0,4 м)**

**7.18.** Із брандспойта, діаметр отвору якого  $d_1 = 14 \text{ мм}$ , б'є вертикально вгору струмина води. За час  $t = 1 \text{ хв}$  витікає об'єм води  $V = 0,08 \text{ м}^3$ . Чому дорівнює діаметр  $d_2$  струмини на висоті  $H = 2 \text{ м}$ ? **(20 мм)**

**7.19.** Зігнули трубку опустили у потік води. Швидкість потоку відносно трубки  $U = 2,5 \text{ м/с}$ . У верхньому кінці трубки зроблений невеличкий отвір, що знаходиться на висоті  $h_0 = 12 \text{ см}$ . На яку висоту  $h$  буде підійматися струмина води, що витікає з отвору? **(0,2 м)**

## Тести

**7.1.** Лініями течії називаються лінії:

- А) які з'єднують молекули рідини, що рухаються з однаковими швидкостями;
- Б) дотичні до яких збігаються за напрямком з векторами швидкостей рідини у відповідних точках простору;
- В) нормалі до яких збігаються за напрямком із силою тиску у відповідних точках простору;
- Г) дотичні до яких збігаються за напрямком із силою тиску у відповідних точках простору;
- Д) правильної відповіді тут немає.

**7.2.** Трубною течією називається поверхня:

- А) всередині якої рухається рідина;
- Б) утворена лініями течії, які проведені через усі точки довільного контуру;
- В) всередині якої всі частинки рідини рухаються з однаковою швидкістю;

## Механіка

Г) утворена лініями течії, які проведені через усі точки малого замкнутого контуру;

Д) всередині якої всі частинки рідини рухаються рівноприскорено.

7.3. Яке з наведених співвідношень виражає рівняння нерозривності струменя?

А)  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_1}{S_2}$ ;      Б)  $Sv = \text{const}$ ;      В)  $p + \rho gh = \text{const}$ ;

Г)  $\frac{S}{h} = \text{const}$ ;      Д)  $Sv = 0$ .

7.4. Яка з формул виражає роботу, що виконується під час переміщення ділянки рідини, яка знаходиться між перерізами  $S_1$  та  $S_2$  протягом часу  $\Delta t$ , за який через ці перерізи буде перенесена маса рідини  $\Delta m$ ?

А)  $A = p_2 S_2 v_2 \Delta t - p_1 S_1 v_1 \Delta t$ ;      Б)  $A = v_1 \Delta V_1 - v_2 \Delta V_2$ ;

В)  $A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$ ;      Г)  $A = p_1 S_1 v_1 - p_2 S_2 v_2$ ;

Д)  $A = p_1 S_1 v_1^2 \Delta t - p_2 S_2 v_2^2 \Delta t$ .

7.5. Яке з наведених рівнянь виражає рівняння Бернуллі для рідин?

А)  $\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = 0$ ;      Б)  $\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}$ ;

В)  $\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = 0$ ;      Г)  $\frac{\rho v^2}{2} - \rho gh - p = \text{const}$ ;

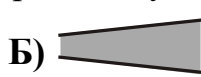
Д)  $-\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh - p = 0$ .

7.6. Яка з наведених величин є динамічним тиском?

А)  $\rho gh$ ;      Б)  $\frac{\rho v}{2} + p = \text{const}$ ;      В)  $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$ ;

Г)  $\frac{\rho v^2}{2}$ ;      Д)  $\frac{\rho v^2}{4}$ .

7.7. У якому випадку течія рідини буде стаціонарною?



7.8. У горизонтальній трубці швидкість течії ідеальної рідини збільшилась у  $k$  разів. Як змінився повний тиск?

А) збільшився у  $k$  разів;

Б) залишився без змін;

## Механіка

**В)** зменшився у  $k^2$  разів;

**Г)** збільшився у  $k^2$  разів;

**Д)** зменшився у  $k$  разів.

**7.9.** Через трубку неоднакового перерізу без тертя протікає нестислива рідина. Вибрати правильні співвідношення для швидкості та тиску рідини.

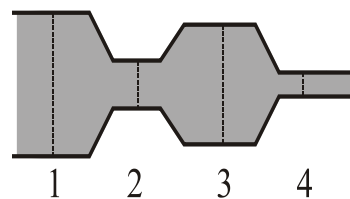
**А)**  $v_1 > v_3$ ;  $p_1 < p_3$ ;

**Б)**  $v_3 < v_4$ ;  $p_3 > p_4$ ;

**В)**  $v_2 < v_3$ ;  $p_2 > p_3$ ;

**Г)**  $v_2 = v_4$ ;  $p_2 < p_4$ ;

**Д)**  $v_1 = v_3$ ;  $p_1 > p_3$ .



№ завдання	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9
Варіант відповіді	<b>Б</b>	<b>Г</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Б</b>	<b>Г</b>	<b>Г</b>	<b>Б</b>	<b>Б</b>

Основні величини СІ і одиниці їх вимірювання

Величина	Одиниця	Позначення
довжина	метр	м
час	секунда	с
маса	кілограм	кг
сила струму	ампер	А
температура	кельвін	К
к-сть речовини	моль	моль
сила світла	кандела	кд

Префікси СІ для утворення кратних  
і часткових одиниць

Кратні			Часткові		
Префікс	Познач	Множни	Префікс	Познач	Множни
	.	к	с	.	к
<i>Екса</i>	Е	$10^{18}$	<i>Деци</i>	д	$10^{-1}$
<i>Пета</i>	П	$10^{15}$	<i>Сант</i>	с	$10^{-2}$
<i>Тера</i>	Т	$10^{12}$	<i>Мілі</i>	м	$10^{-3}$
<i>Гіга</i>	Г	$10^9$	<i>Мікро</i>	мк	$10^{-6}$
<i>Мега</i>	М	$10^6$	<i>Нано</i>	н	$10^{-9}$
<i>Кіло</i>	к	$10^3$	<i>Піко</i>	п	$10^{-12}$
<i>Гекто</i>	г	$10^2$	<i>Фемто</i>	ф	$10^{-15}$
<i>Дека</i>	да	10	<i>Атто</i>	а	$10^{-18}$

Механіка  
Навчальний посібник

Зачек Ігор Романович  
Каркульовська Мар'яна Савівна  
Семків Ігор Володимирович  
Горіна Олена Михайлівна

**МЕХАНІКА.**  
**ЗБІРНИК ЗАДАЧ З РОЗВ'ЯЗКАМИ**

*Віддруковано з готових діапозитивів*

Підписано до друку. Формат 70х100/16  
Папір офсетний. Гарнітура Times.  
Друк офсетний. Умов. друк. арк.  
Замовлення №

Друк ПП «Ощипок М.М. »  
Адреса: м.Львів, вул.С.Бандери , 45  
Свідоцтво серія Б №701155 від 30.05. 12 р.  
ел. пошта: ommzmirk@ukr.net

