ДЕРЖАВНА СЛУЖБА УКРАЇНИ З НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Роман ТАЦІЙ
Оксана ТРУСЕВИЧ

РЯДИ

навчальний посібник

За загальною редакцією доктора фізико–математичних наук, професора Р.М. Тація

Львів-2024

УДК 51
ББК 22.11
Т 12

Рецензенти: Кузик А.Д., доктор сільськогосподарських наук, професор, завідувач кафедри екологічної безпеки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності
Сало Т.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики національного університету «Львівська політехніка»

Рекомендовано до друку Вченою радою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності
(протокол №5 від 14.12.2022 р.)

Тацій, Роман Мар'янович
Ряди: навчальний посібник / Роман ТАЦІЙ, Оксана ТРУСЕИВЧ – Львів: ЛДУ БЖД, 2024. – 109 с.

Важливим фактором у засвоєнні вищої математики й оволодінні її методами є самостійна робота. Система типових розрахунків сприяє більш глибокому вивченню вищої математики.

Навчальний посібник є третьою частиною серії «Математичний практикум» і не пов'язаний з програмами конкретних навчальних закладів. Він містить основні теоретичні відомості з курсу «Ряди», приклади розв'язування типових завдань та варіанти задач для самостійного розв'язування з відповідями. Посібник можна використовувати як довідник, збірник задач чи підручник для самостійного вивчення матеріалу

Присвячено світлій пам'яті професора
Михайла СУХОРОЛЬСЬКОГО

Розділ 1. Числові ряди

1.1. Поняття числового ряду та його збіжності

1.1.1.Визначення числового ряду

Нехай $\{u_n\}_{n\in N}=\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ – послідовність дійсних чисел.

Визначення 1.1.1. *Числовим рядом* називається нескінченна сума

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n . \qquad (1.1)$$

Число u_n називається n-м *членом ряду*.

Приклад 1.1.1. Дано формулу загального члена ряду $u_n=\dfrac{3^n}{n^2+6}$.Написати відповідний ряд у розгорнутому вигляді.

При $n=1$, $u_1=\dfrac{3^1}{1^2+6}=\dfrac{3}{7}$, $n=2$, $u_2=\dfrac{3^2}{2^2+6}=\dfrac{9}{10}$,

$n=3$, $u_2=\dfrac{3^3}{3^2+6}=\dfrac{27}{15}=\dfrac{9}{5}$ і т. д.

Тому розгорнутий вигляд ряду є:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+6}=\frac{3}{7}+\frac{9}{10}+\frac{9}{5}+\ldots$$

Приклад 1.1.2. Написати найпростішу формулу загального члена для ряду $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{8}{7}+\ldots$

Кожен член ряду є функцією свого номера.
Тому

при $n=1$, $u_1=\dfrac{2}{3}=\dfrac{2^1}{2\cdot 1+1}$, при $n=2$, $u_2=\dfrac{4}{5}=\dfrac{2^2}{2\cdot 2+1}$,

при $n=3$, $u_3=\dfrac{8}{7}=\dfrac{2^3}{2\cdot 3+1}$ і т. д.

Тому, формула загального члена цього ряду: $u_n = \frac{2^n}{2n+1}$. Відповідний згорнутий ряд матиме вигляд:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{8}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}.$$

1.1.2. Визначення збіжності числового ряду

Введемо поняття частинної суми ряду. Позначимо

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$\ldots$$

$$S_n = u_1+u_2+\ldots+u_n=\sum_{\kappa=1}^{n} u_k$$

Число S_n називається *частинною сумою ряду.* Частинні суми ряду утворюють числову послідовність $\{S_n\}_{n\in N}$.

Визначення 1.1.2. Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}_{n\in N}$ є збіжною, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, тоді ряд (1.1) називається *збіжним*, а число S – *сумою ряду*. В цьому випадку можемо записати

$$S = u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}_{n\in N}$ не має границі, або границя дорівнює нескінченності, тоді ряд (1.1) називається *розбіжним*.

Приклад 1.1.3. Показати, що ряд є розбіжним.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\ldots$$

Розглянемо n-у частинну суму $S_n = 1+1+\ldots+1 = n$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, то згідно з визначенням, ряд є розбіжним.

Приклад 1.1.4. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\ .$$

Розглянемо n-у частинну суму

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots =$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$, то, згідно з визначенням, цей ряд є збіжним, а його сума $S = 1$

Приклад 1.1.5. Показати, що ряд розбіжний.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-\ldots$$

Розглянемо послідовність частинних сум

$\underline{S_1}=1,\ S_2 = 1-1 = 0,\ S_3 = 1-1+1 = 1,\ \ldots, S_{2n} = 0,\ S_{2n+1} = 1,\ \ldots$

Якщо з послідовності частинних сум вибрати підпослідовність, що складається з елементів з парними номерами, тобто $\{S_{2n}\}_{n\in N}$, то її границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = 0$, а границя підпослідовності, що складається з елементів з непарними номерами, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = 1$. Таким чином, з послідовності частинних сум вибрано дві підпослідовності, які мають різні границі, а це означає, що послідовність частинних сум $\{S_n\}_{n\in N}$ границі не має, тобто ряд є розбіжним ■

Визначення 1.1.3. n-м *залишком ряду* (1.1) називається сума такого ряду, який залишився з даного після відкидання перших n його членів.

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k\ .$$

1.1.3. Необхідна умова збіжності ряду та достатня умова розбіжності ряду

Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ – збіжний, тоді $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. Необхідна умова збіжності не є достатньою. Це означає, що є розбіжні ряди, загальний член яких прямує до нуля.

Приклад 1.1.6. Показати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжним.

Розглянемо n-ну частинну суму заданого ряду

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\ .$$

Для того, щоб її оцінити, використаємо нерівність

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e,\ n\in N,$$

яка випливає з важливої границі $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, і прологарифмуємо її обидві частини

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\ln e\Rightarrow n\ln\frac{n+1}{n}<1\Rightarrow\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}.$$

Використаємо останню нерівність для оцінювання частинної суми заданого ряду:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} =$$
$$= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Отже, $S_n > \ln(n+1) \to \infty$, $n \to \infty$, тобто заданий ряд має нескінченну суму і тому є розбіжним, хоча його загальний член $\frac{1}{n}$ прямує до нуля, коли $n \to \infty$

Достатня умова розбіжності ряду. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – розбіжний.

Ця властивість є наслідком необхідної умови збіжності ряду.

1.1.4. Властивості збіжних числових рядів

1. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним і має суму S, тоді збіжним є ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ і його сума дорівнює CS, де C – константа.

2. Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – збіжні, а їхні суми відповідно дорівнюють S та σ, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ є збіжним, і його сума відповідно дорівнює $S \pm \sigma$.

3. Якщо від ряду відкинути або приєднати до нього скінченну кількість членів, то це не вплине на збіжність ряду.

4. Якщо ряд збіжний, то його залишок прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок.

1.1.5. Геометрична прогресія

Визначення 1.1.4. Ряд вигляду називається *геометричною прогресією* з першим членом a і знаменником q.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \tag{1.2}$$

Знайдемо частинні суми ряду (1.2):

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k =$$

$$\frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Знайдемо границю послідовності частинних сум

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{q-1}, |q|<1, \\ \infty, \quad |q|>1. \end{cases}$$

Якщо $q = 1$, тоді частинна сума ряду

$$S_n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} = na$$

$$\text{і } \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Якщо $q=-1$, тоді частинна сума ряду

$$S_n = a - a + a - \ldots + a = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^n a = \begin{cases} a, \textit{ при непарному } n, \\ 0, \textit{ при парному } n. \end{cases}$$

Отже, геометрична прогресія є збіжною, якщо знаменник $-1 < q < 1$ і її сума обчислюється за формулою $S = \dfrac{a}{1-q}$, а якщо $|q| \geq 1$ – розбіжною.

Приклад 1.1.7. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$.

Заданий ряд є геометричною прогресією зі знаменником $q = \dfrac{1}{2}$ і першим членом $a = 1$. За формулою для знаходження суми геометричної прогресії одержуємо:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \blacksquare$$

1.1.6. Узагальнений гармонічний ряд

Визначення 1.1.4. Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots, \tag{1.3}$$

$\alpha > 0$ називається *узагальненим гармонічним рядом*.

Узагальнений гармонічний ряд є збіжним, коли $\alpha > 1$, і розбіжним, коли $\alpha \leq 1$. Доведення цього факту розглянемо пізніше.

Розглянемо ряд (1.3) при $\alpha = 1$.

Визначення 1.1.5. Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{1.4}$$

називається *гармонічним рядом*.

Загальний член $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$, тобто необхідна умова збіжності виконується, але як показано вище, цей ряд – розбіжний, $\alpha = 1$.

Теоретичні питання

1. Що називають числовим рядом?
2. Що таке сума ряду? Який її зв'язок з частинними сумами ряду?
3. Який ряд називають збіжним?
4. Що таке залишок ряду?
5. Сформулюйте основні властивості числових рядів.
6. Яка необхідна умова збіжності ряду?
7. Наведіть приклад ряду, що є геометричною прогресією.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Написати п'ять членів ряду, який заданий формулою його *n*-го члена.

1. $u_n = \dfrac{5^n + 1}{n^2 + 4}$.

2. $u_n = \dfrac{0,5^{n+1}}{n^2 - 1}$.

3. $u_n = \dfrac{3 + 4n}{2^{n^2}}$.

4. $u_n = \dfrac{\sin 2n}{n^2}$.

5. $u_n = \dfrac{4 + n}{n \operatorname{tg} n}$.

6. $u_n = \dfrac{5^{n+1}}{n^3 + 4}$.

7. $u_n = \dfrac{0,3^{n+1}}{(n^2 - 1)!}$.

8. $u_n = \dfrac{7^{n+2}}{n! 2^n}$.

9. $u_n = \dfrac{\cos(2n + 1)}{n^2}$.

10. $u_n = \dfrac{5^{n+1} \operatorname{ctg} n}{(n-1)!}$.

11. $u_n = \dfrac{e^{n+1}}{n!}$.

12. $u_n = \dfrac{4^{n+1} e}{n + 1}$.

13. $u_n = \dfrac{\operatorname{tg} n}{\cos(n + 2)}$.

14. $u_n = \dfrac{e^{n+5}}{n^2 + 4n}$.

15. $u_n = \dfrac{\cos n^2}{n^3 - 1}$.

16. $u_n = \dfrac{5n + 4}{n!}$.

17. $u_n = \dfrac{1}{(n^2 - 1)e^n}$.

18. $u_n = \dfrac{6^n}{(n-1)e^n}$.

19. $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$.

20. $u_n = \dfrac{2^{n+3}}{n^3 \operatorname{tg} n}$.

21. $u_n = \dfrac{0,5}{n^2 \operatorname{arctg} n}$.

22. $u_n = \dfrac{(\cos n)^{n+1}}{n!}$.

23. $u_n = \dfrac{\arcsin(2n)}{n!}$.

24. $u_n = \dfrac{3^n + 7}{n^2 + 1}$.

25. $u_n = \dfrac{5^{n+1}}{ctg(n^2 - 1)}$.

26. $u_n = e^{\frac{5^n}{n^2}}$.

27. $u_n = \operatorname{arctg} \dfrac{n}{n^2 + 5}$.

28. $u_n = \dfrac{7}{n^2 \sin(n+1)}$

29. $u_n = \dfrac{3^n n}{n^4 + 2}$.

30. $u_n = \dfrac{\operatorname{arcctg} n}{n}$.

Завдання 2. Написати найпростішу формулу загального члена ряду, якщо його розгорнутий вигляд є таким:

1. $1 + \dfrac{4}{3} + 2 + \dfrac{16}{5} + \ldots$.

2. $\sin 2 + \dfrac{\sin 4}{4} + \dfrac{\sin 8}{9} + \dfrac{\sin 16}{16} + \ldots$.

3. $e + \dfrac{e^2}{2} + \dfrac{e^3}{6} + \dfrac{e^4}{24} + \ldots$.

4. $\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{3} + \dfrac{27}{4} + \dfrac{81}{5} + \ldots$.

5. $\dfrac{2}{\arccos 1} + \dfrac{4}{\arccos 2} + \dfrac{6}{\arccos 3} + \dfrac{8}{\arccos 4} + \ldots$.

6. $\dfrac{e+1}{1} + \dfrac{e^2+1}{8} + \dfrac{e^3+1}{27} + \dfrac{e^4+1}{64} + \ldots$.

7. $\dfrac{\cos 7}{3} + \dfrac{\cos 49}{5} + \dfrac{\cos 343}{7} + \dfrac{\cos 2401}{9} + \ldots$.

8. $\dfrac{\operatorname{tg} 3 - 3}{1} + \dfrac{\operatorname{tg} 9 - 3}{2} + \dfrac{\operatorname{tg} 27 - 3}{6} + \dfrac{\operatorname{tg} 81 - 3}{24} + \ldots$.

9. $\dfrac{3}{\arcsin 1}+\dfrac{5}{\arcsin 2}+\dfrac{7}{\arcsin 3}+\dfrac{9}{\arcsin 4}+\ldots$.

10. $\dfrac{2}{\ln 2}+\dfrac{4}{2\ln 3}+\dfrac{8}{6\ln 4}+\dfrac{16}{24\ln 5}+\ldots$.

11. $e^{5}+e^{\frac{25}{4}}+e^{\frac{125}{9}}+e^{\frac{625}{16}}+\ldots$.

12. $\arcsin 3+\dfrac{\arcsin 5}{2}+\dfrac{\arcsin 7}{6}+\dfrac{\arcsin 9}{24}+\ldots$.

13. $\cos 1+\dfrac{\cos 4}{8}+\dfrac{\cos 9}{27}+\dfrac{\cos 16}{64}+\ldots$.

14. $\dfrac{\mathrm{tg}\,1}{\cos 3}+\dfrac{\mathrm{tg}\,2}{\cos 4}+\dfrac{\mathrm{tg}\,3}{\cos 5}+\dfrac{\mathrm{tg}\,4}{\cos 6}+\ldots$.

15. $\dfrac{\arccos 5}{2}+\dfrac{\arccos 25}{4}+\dfrac{\arccos 125}{6}+\dfrac{\arccos 625}{8}+\ldots$.

16. $\dfrac{36}{e^{3}}+\dfrac{216}{2e^{4}}+\dfrac{1296}{3e^{4}}+\ldots$.

17. $\sin 0,2+\dfrac{\sin 0,04}{2}+\dfrac{\sin 0,008}{6}+\dfrac{\sin 0,0016}{24}+\ldots$.

18. $\dfrac{\pi}{\sin 2}+\dfrac{\pi}{4\sin 3}+\dfrac{\pi}{9\sin 4}+\dfrac{\pi}{16\sin 5}+\ldots$.

19. $\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{2}{1}}{2^{2}}+\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{3}{4}}{2^{4}}+\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{4}{9}}{2^{6}}+\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{5}{16}}{2^{8}}+\ldots$.

20. $\dfrac{5^{\mathrm{tg}\,1}}{2^{2}\ln 2}+\dfrac{5^{\mathrm{tg}\,2}}{2^{4}\ln 2}+\dfrac{5^{\mathrm{tg}\,3}}{2^{6}\ln 2}+\dfrac{5^{\mathrm{tg}\,4}}{2^{8}\ln 2}+\ldots$.

21. $\dfrac{3\,\mathrm{ctg}\,1}{2}+\dfrac{9\,\mathrm{ctg}\,2}{3}+\dfrac{27\,\mathrm{ctg}\,3}{4}+\dfrac{81\,\mathrm{ctg}\,4}{5}+\ldots$.

22. $\dfrac{2\cos 1}{3}+\dfrac{4\cos 2}{5}+\dfrac{8\cos 6}{7}+\dfrac{16\cos 24}{9}+\ldots$.

23. $\dfrac{\arcsin 2}{\ln 2}+\dfrac{\arcsin 4}{2\ln 3}+\dfrac{\arcsin 6}{3\ln 4}+\dfrac{\arcsin 8}{4\ln 5}+\ldots$.

24. $\dfrac{3}{\sin e}+\dfrac{2\cdot 9}{\sin e^{2}}+\dfrac{3\cdot 27}{\sin e^{3}}+\dfrac{4\cdot 81}{\sin e^{4}}+\ldots$.

25. $\frac{2\cdot 1}{3}+\frac{4\cdot 2}{6}+\frac{8\cdot 6}{9}+\frac{16\cdot 24}{12}+\ldots$.

26. $e^{\cos 1}+2+\frac{e^{\cos 2}+4}{4}+\frac{e^{\cos 3}+6}{9}+\frac{e^{\cos 4}+8}{16}+\ldots$.

27. $\frac{e^2-4}{1}+\frac{e^4-4}{4}+\frac{e^6-4}{9}+\frac{e^8-4}{16}+\ldots$.

28. $\frac{\cos 0,5-3}{2!}+\frac{\cos 0,25-3}{4!}+\frac{\cos 0,125-3}{6!}+\frac{\cos 0,0625-3}{8!}+\ldots$.

29. $\frac{\ln|\arcsin 1|}{4}+\frac{\ln|\arcsin 2|}{7}+\frac{\ln|\arcsin 3|}{10}+\frac{\ln|\arcsin 4|}{13}+\ldots$.

30. $\frac{\operatorname{arcctg} 2}{1}+\frac{\operatorname{arcctg} 4}{2}+\frac{\operatorname{arcctg} 8}{3}+\ldots$.

Відповіді до завдання 2

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$. **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n}{n^2}$. **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$. **4.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}$. **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\arccos n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n+1}{n^3}$. **7.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 7^n}{2n+1}$. **8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg} 3^n-3}{n!}$. **9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\arcsin n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!\ln(n+1)}$. **11.** $\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{5^n}{n^2}}$. **12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin(2n+1)}{n!}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2}{n^3}$. **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg} n}{\cos(n+2)}$. **15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arccos 5^n}{2n}$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6^n}{(n-1)e^{n+1}}$. **17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 0,2^n}{n!}$. **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2\sin(n+1)}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{n+1}{n^2}}{2^{2n}}$. **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{\operatorname{tg} n}}{2^{2n}\ln 2}$. **21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\operatorname{ctg} n}{n+1}$. **22.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{2n+1}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin(2n)}{n\ln(n+1)}$. **24.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^n}{\sin e^n}$. **25.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{3n}$. **26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\cos n}+2n}{n^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}-4}{n^2}$. **28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 0,5^n-3}{(2n)!}$. **29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left|\arcsin n\right|}{3n+1}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg} 2n}{n}$.

1.2. Ряди з додатними членами

1.2.1. Ознака порівняння (перша ознака порівняння)

Якщо в ряді (1.1) всі його члени u_1, u_2, …, u_n ,… є додатними дійсними числами, то такий ряд називається числовим рядом з додатними членами. Як видно на попередніх прикладах, збіжність ряду можна досліджувати, складаючи послідовність частинних сум і досліджуючи границі цих послідовностей. Ця задача є доволі складною, оскільки не завжди вдається записати аналітичний вираз для частинної суми S_n. Тому на практиці користуються іншими прийомами, які дозволяють робити висновки про збіжність ряду, враховуючи збіжність (розбіжність) деякого відомого, більш простого ряду. Ці прийоми базуються на ознаках порівняння.

Теорема 1.2.1. (перша теорема порівняння) Нехай задано два ряди з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ і, починаючи з деякого номера n, виконується нерівність $u_n \le v_n$. Тоді, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжним, то збіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є розбіжним, то розбіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Приклад 1.2.1. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}.$$

Порівняємо заданий ряд з геометричною прогресією $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, яка є збіжним рядом, бо її знаменник $q = \frac{1}{2} < 1$. Використаємо першу ознаку порівняння. Оскільки $\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ є збіжним

Приклад 1.2.2. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+5}.$$

Порівняємо заданий ряд з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Згідно означення ряду (1.3), він збіжний, при $\alpha=3>1$. Використаємо першу ознаку порівняння. Оскільки, $\frac{1}{n^3+5}<\frac{1}{n^3}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+5}$ є збіжним ■

Приклад 1.2.3. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}+2}.$$

Аналогічно, як у прикладі *1.2.2* заданий ряд є розбіжним, бо $\alpha=\frac{3}{4}<1$

1.2.2. Гранична ознака (друга ознака порівняння)

Теорема 1.2.2. (друга ознака порівняння). Нехай задано два ряди з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ і існує скінченна, відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=p$. Тоді ряди $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Зауваження. Для використання ознак порівняння рядів найчастіше використовують порівняння з розглянутими в пункті 1.1 геометричною прогресією (1.2) та узагальненим гармонічним рядом (1.3).

Приклад 1.2.4. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{3n^3-n^2+1}.$$

Порівняємо заданий ряд із рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який є збіжним як узагальнений гармонічний ряд, в якого $\alpha=2>1$. Використаємо другу ознаку порівняння та обчислимо границю $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{3n^3-n^2+1}\cdot\frac{n^2}{1}=\frac{1}{3}$. Оскільки границя є скінченною, то заданий ряд також є збіжним

1.2.3. Ознака Д'Аламбера

Теорема 1.2.3 (Ознака Д'Аламбера). Нехай для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l\text{, тоді:}$$

- якщо $l<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збіжний;
- якщо $l>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ розбіжний;
- якщо $l=1$, то про збіжність нічого сказати не можна (ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).

Приклад 1.2.5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1}n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}<1.$$

Оскільки границя є меншою за одиницю, то за ознакою Д'Аламбера, ряд є збіжним

Приклад 1.2.6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^3}.$$

Аналогічно, як у попередньоиу прикладі, застосувавши ознаку Д'Аламбера, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^3}:\frac{n!}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty>1.$$

Оскільки границя є більшою за одиницю, то за ознакою Д'Аламбера, ряд є розбіжним

1.2.4. Ознака Коші

Теорема 1.2.4 (Ознака Коші). Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l\text{, то}$$

- якщо $l<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збіжний;
- якщо $l>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ розбіжний;
- якщо $l=1$, то про збіжність нічого сказати не можна (ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).

Приклад 1.2.7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n.$$

Для дослідження на збіжність використаємо ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Оскільки границя є меншою за 1, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ є збіжний

Приклад 1.2.8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n-10}\right)^{2n}.$$

Аналогічно попередньому прикладу, використовуючи ознаку Коші, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{n-10}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n-10}\right)^2 = 9 > 1$$

Оскільки границя є більшою за 1, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n-10}\right)^{2n}$ є розбіжний

1.2.5. Інтегральна ознака Коші

Теорема 1.2.5. (інтегральна ознака Коші). Нехай задано числовий ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

члени якого є значеннями функції натурального аргумента, тобто $u_n = f(n)$. Нехай $f(x)$ - додатна неперервна функція, що монотонно спадає в інтервалі $[1,\infty)$ коли $x\to\infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, і розбігається, якщо розбігається цей інтеграл.

Приклад 1.2.9. Дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд (1.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Цей ряд ми вже розглядали (пункт 1.1.), але не обґрунтували за яких умов він збіжний, а за яких – розбіжний. Скористаємось інтегральною ознакою Коші. Запишемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, $\alpha > 0$. Вона є неперервною, додатною і монотонно спадною в інтервалі $[1, \infty)$. Розглянемо невласний інтеграл при $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{A\to\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^A = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Якщо $\alpha = 1$, маємо інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x} dx = \lim_{A\to\infty} \ln|x| \Big|_1^A = \infty.$$

Таким чином, узагальнений гармонічний ряд (1.3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{збігається}, & \text{якщо } \alpha > 1, \\ \text{розбігається}, & \text{якщо } \alpha \leq 1. \end{cases} \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 3. Використовуючи першу ознаку порівняння, дослідити на збіжність такі ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 + 5\sqrt{n} + 3}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n} + 5\sqrt{n}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^3 + 5\sqrt{n^7} + 6}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{10}{9n^3 + \sqrt{n} + 3n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{7n^5 + 5\sqrt{n^9} + 4}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3} + 3n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2\sqrt{n}+3}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11}{\sqrt[3]{n}+5+\sqrt{n}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+n^3+5\sqrt{n^3}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{9n^3+\sqrt{n}+3n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7+n^3+5\sqrt{n^9}}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}+3n+9}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{15}+5\sqrt{n^9}}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\sqrt[3]{n^4}+5+\sqrt{n}}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11}{\sqrt[3]{n^2}+5+\sqrt{n^5}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\sqrt[3]{n}+5+n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11}{\sqrt[3]{n}+5n^6+\sqrt{n}}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11}{n^4+5+\sqrt{n}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}+8+n\sqrt{n}}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+5\sqrt{n}}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{15}+5\sqrt{n^7}}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{13}+5n^9}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^5+11+\sqrt{n^3}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+15+\sqrt{n^3}}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+5\sqrt{n^{11}}}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[4]{n}+5n\sqrt{n^9}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n^{13}}}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^5+5\sqrt{n^{11}}+n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{15}+\sqrt{n}+5\sqrt{n^9}}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{15}+5n+21}$.

Відповіді до завдання 3

1. збіжний**. 2.** розбіжний**. 3.** збіжний**. 4.** збіжний**. 5.** збіжний**.**
6.розбіжний**. 7.**ро збіжний**. 8.** розбіжний**. 9.** розбіжний.
10. збіжний. **11.** збіжний. **12.** розбіжний. **13.** збіжний.
14. збіжний. **15.** розбіжний. **16.** розбіжний.**17.** збіжний.
18. збіжний**. 19.** збіжний**. 20.** розбіжний**. 21.** збіжний**.**
22. збіжний**. 23.** збіжний. **24.** розбіжний**. 25.** збіжний**.**
26. збіжний**. 27.** збіжний**. 28.** збіжний**. 29.** збіжний**.**
30. збіжний**.**

Завдання 4. Використовуючи граничну ознаку порівняння (другу ознаку порівняння), дослідити на збіжність такі ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^4+5n+3}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt[5]{n}+n-5}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-5}{4n+5\sqrt{n^3}+6}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n}{9n^4+\sqrt{n}+3}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-n^5}{7+5\sqrt{n^9}+4n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{\sqrt[4]{n}^3+3n+4}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2\sqrt{n}+3n^2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^7}+5+\sqrt{n}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11n}{6+5n^3+5\sqrt{n^3}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+n}{9n^3+\sqrt{n}+3n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7+n^3+\sqrt{n^{23}}}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}+3n+9}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^{15}+5\sqrt{n^7}}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^4}{\sqrt[4]{n}+5+\sqrt{n}}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7-n}{\sqrt[3]{n^8}+5+\sqrt{n^5}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6-n}{\sqrt[3]{n}+9-n^4}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11n^7}{\sqrt[3]{n}+3-\sqrt{n^5}}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9-n}{n^5+2-\sqrt{n}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+8+n\sqrt{n}}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{\sqrt[3]{n^{11}}+5\sqrt{n}}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-2}{n^{15}+5\sqrt{n^7}+7}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-5}{n^{13}+5n^9+\sqrt{n}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n^5+11+\sqrt{n}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-\sqrt[3]{n}}{n^5+\sqrt[3]{n}+4}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n^7}{n+5\sqrt{n^{11}}}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt[4]{n}+5n\sqrt{n^9}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6+1}{n+\sqrt{n^{13}}-8}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n^5}}{n^5+5+n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n^3}}{n^{11}+\sqrt{n}+5}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n^6+5n+1}$.

Відповіді до завдання 4

1. збіжний**. 2.** розбіжний**. 3.** розбіжний**. 4.** збіжний**.**
5. розбіжний**. 6.** розбіжний**. 7.** розбіжний**. 8.** збіжний**.**
9. збіжний. **10.** збіжний. **11.** збіжний. **12.** розбіжний.
13. збіжний. **14.** розбіжний. **15.** збіжний**. 16.** збіжний.
17. розбіжний. **18.** збіжний**. 19.** розбіжний**. 20.** збіжний**.**
21. збіжний**. 22.** збіжний**. 23.** збіжний**. 24.** збіжний**.**
25. розбіжний**. 26.** збіжний**. 27.** розбіжний**. 28.** збіжний**.**
29. збіжний**. 30.** збіжний**.**

Завдання 5. Використовуючи ознаку Д’Аламбера, дослідити на збіжність такі ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!3^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^{n-1}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n n!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!6^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{4^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n+1}n!}{\sqrt{n+1}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{7^n\sqrt{n+4}}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^{n-1}\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n+6}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{5^n\sqrt[4]{n}}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{5^n\sqrt{n}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{\sqrt[3]{n}\cdot n!}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^{n+1}n^2}{\sqrt[3]{n}}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^3 2^{n-1}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{8^n n!}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n\sqrt{n+3}}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2}{n!5^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-5}{n^3 5^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n}}{11^n\sqrt{n-1}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt[3]{n}}{n!\sqrt[3]{n+4}}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{5^n\sqrt{n+4}}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{5n}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n+1)^2}{n+8}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n-1}}{n!n}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n\sqrt{n+3}}$. **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(n+1)!}$.

Відповіді до завдання 5

1. збіжний**. 2.** розбіжний**. 3.** збіжний. **4.** збіжний**. 5.** збіжний**.**
6. збіжний**. 7.** збіжний**. 8.** збіжний. **9.** розбіжний.
10. розбіжний. **11.** збіжний. **12.** розбіжний. **13.** збіжний.
14. збіжний. **15.** збіжний. **16.** збіжний. **17.** розбіжний.
18. розбіжний**. 19.** збіжний**. 20.** збіжний**. 21.** збіжний**.**
22. збіжний**. 23.** збіжний. **24.** збіжний**. 25.** розбіжний**.**
26. розбіжний. **27.** розбіжний**. 28.** збіжний. **29.** збіжний**.**
30. збіжний**.**

Завдання 6. Використовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність такі ряди:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}\right)^n$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5}+3}\right)^{\frac{n}{2}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n\sqrt{n}}{6n\sqrt{n}+13}\right)^{n^2}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+4}{2n+3}\right)^{3n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\sqrt{n}-5}{2\sqrt{n}+3}\right)^n$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4}{7n^2+3}\right)^n$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\frac{n+4}{n+3}\right)^{6n}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^5-1}{4n^5+3}\right)^{\frac{n}{2}}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{3n}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+4}{12n-9}\right)^{5n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{3n^2+9}\right)^n$. **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\frac{n+4}{n+3}\right)^{3n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+10}{2\sqrt{n}+3}\right)^{n}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n\sqrt{n}}{9n\sqrt{n}+1}\right)^{n^2}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{25}\frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5}+3}\right)^{\frac{n}{2}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\frac{n^4-4}{n^4+4}\right)^{n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+3}\right)^{3n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\sqrt{n}+9}{\sqrt{n}+3}\right)^{n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\sqrt{n}}{11\sqrt{n}+13}\right)^{n^2}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{5^n(n+3)^n}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+8}{4n^2-6}\right)^{7n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+4}{n+3}\right)^{3n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9\sqrt{n^5}-5}{\sqrt{n^5}+3}\right)^{\frac{3n}{2}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-6}{7n+13}\right)^{n^2}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}+13}\right)^{n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-1}{2n+3}\right)^{4n}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{6n-7}\right)^{n^2}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+4}{12n-3}\right)^{8n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{2n}\right)^{3n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2+2}{5n^2+3}\right)^{n}$.

Відповіді до завдання 6

1. збіжний. **2.** розбіжний. **3.** збіжний. **4.** розбіжний.
5. розбіжний. **6.** збіжний. **7.** розбіжний. **8.** розбіжний.
9. збіжний. **10.** збіжний. **11.** збіжний. **12.** збіжний.
13. збіжний. **14.** збіжний. **15.** збіжний. **16.** збіжний.

17. розбіжний. **18.** розбіжний**. 19.** збіжний**. 20.** збіжний**.**
21. збіжний**. 22.** розбіжний**. 23.** розбіжний**. 24.** збіжний**.**
25. розбіжний**. 26.** розбіжний**. 27.** збіжний**. 28.** збіжний**.**
29. збіжний**. 30.** збіжний**.**

1.3. Знакозмінні ряди

1.3.1. Ряди з довільними членами

Розглянемо ряди з довільними членами, тобто ряди вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ , \tag{1.4}$$

де числа u_n мають будь-який знак. Поряд із такими рядами розглядаємо ряди, складені з модулів членів ряду (1.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \ . \tag{1.5}$$

Визначення 1.3.1. Ряд з довільними членами (1.4) називається *абсолютно збіжним*, якщо він є збіжним і збіжним є ряд (1.5), складений з модулів його членів.

Визначення 1.3.2. Ряд з довільними членами (1.4) називається *умовно збіжним*, якщо він є збіжним, а ряд (1.5), складений з модулів його членів, – розбіжним.

1.3.2. Ряди, знаки членів яких чергуються

Розглянемо ряди вигляду

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \ . \tag{1.6}$$

Ряди (1.6) називаються *знакопочережні ряди*, тобто ряди, сусідні члени яких мають різні знаки. Для дослідження збіжності таких рядів застосовується така ознака.

Теорема 1.3.2. (Ознака Лейбніца). Ряд (1.6) є збіжним, якщо виконуються дві умови:

$$u_{n+1} < u_n, \ n=1, 2, \ldots;$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \, .$$

Приклад 1.2.2. Дослідити на абсолютну (умовну) збіжність ряду такий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – це знакопочережний ряд. Розглянемо $u_n=\frac{1}{n}$, $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. Очевидним є, що $u_{n+1}<u_n$ і $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. Умови ознаки Лейбніца виконуються, тому ряд - збіжний. Складемо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ відповідний ряд, що складається з модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Як відомо він є розбіжний, як узагальнений гармонічний ряд (1.3) при $\alpha\leq 1$**.** Тому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

умовно збіжний.

Теоретичні запитання

1. Дайте визначення знакозмінного ряду та знакопочережного ряду.
2. Сформулюйте ознаку абсолютної збіжності рядів?
3. Який ряд називається умовно збіжним?
4. Сформулюйте ознаку Лейбніца для знакозмінних рядів.
5. Наведіть алгоритм дорслідження абсолютної (умовної) збіжності.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 8. Дослідити на абсолютну (умовну) збіжність ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n-1}}$ **.** **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ **..**

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \pi n}{(2n)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2n+1}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+3}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^5}+7}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^5}+4+7n^6}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5\sqrt{n}+3n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{n}+35}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[9]{n^5}+3\sqrt{n}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+3\sqrt{n}-1}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3\sqrt{n}-9}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4+3\sqrt{n}+6}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}+3\sqrt{n}-1}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}+3\sqrt{n}-\sqrt{n^5}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}+3\sqrt{n}-n^4}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+3\sqrt{n^7}-n^3}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-n^{0,4}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-n^{0,3}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+3\sqrt{n^7}+5n^8}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-n^{0,3}+8n^2}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}-n^{0,7}-4n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}-n^{0,7}-4\sqrt{n^5}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}-n^{1,7}-4n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-n^{0,9}-5}$. **26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+8\sqrt{n^5}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-n^{0,9}-5}$. **28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-n^{2,9}}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-n^{4,9}+15}$. **30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-n^5-7}$.

Відповіді до завдання 8

1. умовно збіжний**. 2.** абсолютно розбіжний**.**
3. абсолютно збіжний**. 4.** абсолютно розбіжний**.**
5. умовно збіжний**. 6.** абсолютно розбіжний**.**
7. абсолютно розбіжний**. 8.** абсолютно розбіжний**.**
9. умовно збіжний**. 10.** умовно збіжний**. 11.** абсолютно розбіжний**. 12.** умовно збіжний**. 13.** абсолютно збіжний.
14. умовно збіжний. **15.** умовно збіжний**. 16.** абсолютно збіжний. **17.** абсолютно збіжний. **18.** умовно збіжний.
19. умовно збіжний**. 20.** абсолютно збіжний**. 21.** абсолютно збіжний**. 22.** абсолютно збіжний**. 23.** абсолютно збіжний**.**
24. абсолютно збіжний**. 25.** умовно збіжний. **26.** абсолютно збіжний**. 27.** умовно збіжний. **28.** абсолютно збіжний**.**
29. абсолютно збіжний**. 30.** абсолютно збіжний**.**

Розділ 2. Функціональні ряди

2.1. Поняття функціонального ряду

2.1.1. Визначенняя функціонального ряду

Важливим і більш загальним класом рядів є функціональні ряди, що застосовують у різних галузях. Розглянемо у цьому розділі основи теорії функціональних рядів.

Нехай $u_1(x)$, $u_2(x)$, … $u_n(x)$, … – деякі функції, що визначені на проміжку $[a, b]$. ***Визначення 2.1.1.*** Ряд вигляду

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (x), \qquad (2.1)$$

називається *функціональним рядом*.

Якщо в ряді (2.1) замість змінної x підставити число $x_0\in [a, b]$, тоді отримаємо числовий ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (x_0), \qquad (2.2)$$

який, як відомо, може бути збіжним або розбіжним. Якщо числовий ряд (2.2) є збіжним в точці x_0, то x_0 називається *точкою збіжності* ряду (2.1), а у випадку розбіжності числового ряду (2.2) – *точкою розбіжності* функціонального ряду.

2.1.2. Визначення області збіжності функціонального ряду

Множина всіх точок збіжності функціонального ряду називається *областю збіжності*. Область збіжності функціонального ряду може або співпадати, або міститися в проміжку $[a, b]$.

Розглянемо частинну суму ряду (2.1). Це функція

$$S_n(x)=u_1(x)+\ldots+u_n(x).$$

В кожній точці збіжності функціонального ряду існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$. Функція $S(x)$ називається *сумою* *функціонального ряду* (2.1). Областю визначення функції $S(x)$ є область збіжності функціонального ряду.

2.1.3. Визначення n-ого залишку функціонального ряду

Визначення 2.1.2. Різницю

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)$$

називають n-м *залишком ряду* (2.1).

Очевидно, що в будь-якій точці x з області збіжності функціонального ряду

$$\lim_{n\to\infty} r_n\left(x\right)=0 .$$

Відомо, що сума скінченної кількості неперервних функцій є неперервною функцією, а скінченну суму можна диференціювати та інтегрувати. Для нескінченних сум ці властивості не завжди справедливі. Але такі властивості зберігаються для так званих рівномірно збіжних функціональних рядів.

2.1.4. Визначення рівномірної збіжності функціонального ряду

Визначення 2.1.3. Функціональний ряд (2.1) називається *рівномірно збіжним* на множині D, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $N=N(\varepsilon)\in\boldsymbol{N}$, незалежне від x, таке, що для всіх $n > N$ і для всіх $x\in D$ виконується нерівність

$$|r_n(x)|<\varepsilon.$$

2.1.5. Ознака Вейєрштрасса

Для дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність використовують *ознаку Вейєрштрасса*.

Теорема 2.1.1. (ознака Вейєрштрасса). Функціональний ряд (2.1) є абсолютно і рівномірно збіжним на відрізку $[a,b]$, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

такий, що для кожного $x \in [a, b]$

$$|u_n(x)| \le a_n,\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Приклад 2.1.1. Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} .$$

Оскільки $\left| \frac{\cos nx}{n!} \right| \le \frac{1}{n!}$, то маємо збіжний мажоруючий числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. За ознакою Вейєрштрасса заданий ряд є рівномірно збіжним

2.1.6. Теореми про почленне диференціювання та інтегрування функціональних рядів

Найважливішими є такі властивості, які дають змогу почленно диференціювати чи інтегрувати ряди.

Теорема 2.1.2. Якщо на відрізку $[a, b]$ функціональний ряд (2.1) є рівномірно збіжний, і члени ряду є неперервними на відрізку $[a, b]$, то його можна почленно інтегрувати на інтервалі (α, β), де $(\alpha, \beta) \in [a, b]$ і

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx .$$

Теорема 2.1.3. Якщо функціональний ряд (2.1) є рівномірно збіжний на відрізку $[a,b]$, а його члени мають неперервні похідні $u_n'(x)$, $x \in [a,b]$, $n \in \boldsymbol{N}$, то ряд можна почленно диференціювати, тобто

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x) .$$

Доведення теорем не наводимо.

Отже, рівномірно збіжні ряди можна почленно інтегрувати та диференціювати.

Теоретичні питання

1. Що таке функціональний ряд?
2. Що називається областю збіжності функціонального ряду?
3. Який ряд називається рівномірно збіжним на множині?
4. Сформулюйте ознаку Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.
5. Сформулюйте теореми про почленне інтегрування та диференціювання функціональних рядів.

2.2. Степеневий ряд

2.2.1. Визначення степеневого ряду

Розглянемо функціональні ряди, що мають найширше застосування

Визначення 2.2.1. *Степеневим рядом* за степенями змінної x називається функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \qquad (2.3)$$

де a_n – дійсні числа (коефіцієнти), x – змінна, $u_n(x)=a_n x^n$.

Наприклад, ряд

$$1 + x + x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

є степеневим рядом, що являє собою геометричну прогресію.

Якщо розглянути степеневий ряд не за степенями x, а за степенями $x–x_0$, то він матиме вигляд:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n . \qquad (2.4)$$

Зауваження. Ряд (2.4) заміною $t=x–x_0$ може бути зведений до ряду вигляду (2.3).

2.2.2. Визначення збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля

Очевидно, що в точці x=0 ряд (2.3) завжди збіжний, і його сума дорівнює коефіцієнту a_0. Область збіжності степеневого ряду можна встановити за такою теоремою.

Теорема 2.2.1. (теорема Абеля). Якщо ряд (2.3) збіжний в точці $x=x_1$ ($x_1\neq 0$), тоді цей ряд абсолютно збіжний для всіх значень x, які задовольняють нерівність $|x| < |x_1|$.

Якщо цей ряд розбіжний в точці $x=x_2$, тоді він розбіжний для всіх x, $|x| > |x_2|$.

2.2.3. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду

За допомогою теореми Абеля можна досліджувати ряд на збіжність на деякій множині. Наприклад, якщо ряд (2.3) збіжний в точці x_1, то він абсолютно збіжний на інтервалі $(-|x_1|;|x_1|)$, якщо ж ряд розбіжний в точці x_2, то він розбіжний на інтервалах $(-\infty; -|x_2|)$ і $(|x_2|; +\infty)$ (Рис. 3).

Рис. 3. Інтервали збіжності та розбіжності степеневого ряду

Тому існує таке число $R\geq 0$, що для всіх $x\in(-R, R)$ ряд (2.3) збіжний, а для $x\in(-\infty, -R)\cup(R, +\infty)$ – розбіжний. Таке число називають *радіусом збіжності степеневого ряду*. Існують три випадки збіжності степеневих рядів (2.3):

- Ряд збіжний лише в точці $x=0$ ($R=0$).
- Ряд збіжний на інтервалі $(-R, R)$ ($0<R<+\infty$).
- Ряд збіжний на всій числовій прямій ($R=\infty$).

Для знаходження радіуса збіжності використовують формули

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{2.5}$$

та

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.6}$$

які випливають, відповідно, з ознак Д'Аламбера та Коші збіжності числового ряду.

Приклад 2.2.1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневих рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$,

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2 2^n}$, г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n}$.

а) Коефіцієнти $a_n = 1$. Знайдемо за формулою (2.6) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{1}} = 1$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ є збіжним для всіх $x \in (-1;1)$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При x=-1 маємо

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. У прикладі (1.1.5) було показано, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ - розбіжний.

При x=1

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$. У прикладі (1.1.3) було показано, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$ - розбіжний.

Остаточно маємо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ є збіжним для всіх $x \in (-1;1)$.

б) Коефіцієнти ряду $a_n = \dfrac{1}{n!}$. За формулою (2.5) знайдемо радіус збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty .$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ є збіжним на всій числовій осі.

в) Коефіцієнти $a_n = \frac{1}{n^2 2^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}$. Знайдемо за формулою (2.5) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 2^n} : \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{n^2 2^n} = 2$

Отже, ряд є збіжним для всіх $x \in (-2;2)$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При x= -2 маємо

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Це знакопочережний ряд, за ознакою Лейбніца цей ряд збіжний, бо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

При x=2

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Це узагальнений гармонічний ряд, він збіжний при $\alpha = 2 > 1$.

Остаточно маємо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}$ є збіжним для всіх x $\in [-2;2]$.

г) Коефіцієнти $a_n = \frac{1}{4^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}}$. Знайдемо за формулою (2.5) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} : \frac{1}{4^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$. Отже, інтервал збіжності $-4 < x+3 < 4$ або $-7 < x < 1$.
Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При x= -7 маємо

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-7+3)^n}{4^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{4^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. У прикладі (1.1.5) було показано, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ –розбіжний.

При $x=1$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+3)^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4)^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}1^n$. У прикладі (1.1.3) було показано, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1^n$ – розбіжний.

Остаточно маємо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n}$ є збіжним для всіх $x\in(-7;1)$

2.2.4. Основні властивості степеневих рядів

Теорема 2.2.2. Степеневий ряд (2.3) абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку з інтервалу збіжності.

Наслідок (теорема 2.2.3.) Степеневий ряд (2.3) є неперервною функцією в кожній точці з інтервалу збіжності.

Наслідок (теорема 2.2.4.) Якщо ряд (2.3) збіжний на інтервалі $(-R, R)$, то його можна почленно диференціювати та інтегрувати, а одержані ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} \text{ та } \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt$$

є збіжними на тому ж інтервалі.

Наприклад, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, збіжний на відрізку (–1;1), після диференціювання перетворюється у ряд $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ з таким же інтервалом збіжності, а після інтегрування – у ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ з таким же інтервалом збіжності.

Теоретичні питання

1. Який ряд називається степеневим?
2. Які розглядаються види степеневих рядів?
3. Сформулюйте теорему Абеля.
4. Що таке інтервал та радіус збіжності степеневого ряду?
5. Що таке область збіжності комплексного степеневого ряду?
6. Як обчислюється радіус збіжності степеневого ряду?
7. Сформулюйте основні властивості степеневих рядів.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 9. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневих рядів:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}+3}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+4)^n}{n+13}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{7^n(n-6)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n+3}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(\sqrt{n^5}+7)5^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^5}\,7^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^5 3^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!\sqrt{n}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[9]{n^5}\,3^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^n}{n!}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n+1)!}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^n}{n^n}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)!}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}(n+1)}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^n}{(n+1)!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{n^2+1}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+3)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{n^4-5}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{3\sqrt[4]{n}}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7x^n}{\sqrt{n^5}\,8^n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-3)^n$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+6)^n}{\sqrt[4]{n^7}}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+3)!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3nx^n}{n+9}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+2)^n$.

Відповіді до завдання 9

1. $R=1,\ [0;2)$. **2.** $R=\frac{1}{3},\ \left[-\frac{13}{3};-\frac{11}{3}\right)$. **3.** $R=7,\ [-4;10)$.

4. $R=\frac{1}{2},\ [-4;10)$. **5.** $R=\infty,\ (-\infty;+\infty)$. **6.** $R=5,\ [0;10]$

. **7.** $R=7,\ [-7;7]$. **8.** $R=3,\ [-2;4]$. **9.** $R=\infty,\ (-\infty;+\infty)$.

10. $R=3,\ [-3;3)$. **11.** $R=\infty,\ (-\infty;+\infty)$.

12. $R=1,\ (-1;+1)$. **13.** $R=\infty,\ (-\infty;+\infty)$.

14. $R=\infty,\ (-\infty;+\infty)$. **15.** $R=1,\ (-3;-1)$.

16. $R=2,\ \ (-1;3)$.**17.** $R=\infty,\ \ (-\infty;+\infty)$.

18. $R=1,\ \ (-1;+1)$ **. 19.** $R=\infty,\ \ (-\infty;+\infty)$ **.**

20. $R=0,5,\ \left[-1;0\right)$**. 21.** $R=1,\ \ (-3;-1)$**.**

22. $R=\infty,\ \ (-\infty;+\infty)$ **. 23.** $R=1,\ \ (-3;-1)$**.**

24. $R=1,\ \left[4;6\right)$**. 25.** $R=8,\ \left[-8;8\right]$**. 26.** $R=2,\ \ (1;5)$ **.**

27. $R=1,\ \left[-7;-5\right)$**. 28.** $R=\infty,\ \ (-\infty;+\infty)$ **.**

29. $R=1,\ \ (-1;1)$ **. 30.** $R=1,\ \ (-3;-1)$**.**

2.3. Розвинення функції в степеневий ряд

2.3.1. Ряд Тейлора

Розглянемо деяку функцію і з'ясуємо, за яких умов її можна подати у вигляді степеневого ряду і як побудувати цей ряд. Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ \ldots \tag{2.7}$$

в інтервалі $(x_0-R,\ x_0+R)$. *У* цьому разі кажуть, що функція $f(x)$ розвинена в степеневий ряд в околі точки x_0, або за степенями $x-x_0$.

Коефіцієнти ряду (2.7) знаходитимемо таким чином: згідно з властивістю степеневих рядів, послідовно диференціюватимемо ряд (2.7) і підставлятимемо в знайдені похідні значення $x=x_0$:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots,$$

$$f(x_0)=a_0,$$

$$f'(x)=1\cdot a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+4a_4(x-x_0)^3+\ldots,$$

$$f'(x_0)=1\cdot a_1,$$

$$f''(x)=1\cdot 2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^n+\ldots,$$

$$f''(x_0)=1\cdot 2a_2,$$

$$f'''(x_0)=1\cdot 2\cdot 3\,a_3,$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x_0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n\,a_n$$

Звідси знаходимо коефіцієнти

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots$$

Підставивши значення цих коефіцієнтів у рівність (2.7), отримаємо

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots.$$

Визначення 2.3.1. Ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (2.8)$$

називається *рядом Тейлора функції* $f(x)$ у точці x_0 з *коефіцієнтами Тейлора* $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

2.3.2. Достатні умови розвинення функції в степеневий ряд

Тепер розглянемо *достатні умови розвинення функції в степеневий ряд.* Нехай $f(x)$ – довільна нескінченну кількість разів диференційовна функція. Складемо для неї ряд (2.7). Виявляється, що сума ряду (2.7) не завжди збігається з функцією $f(x)$. Інакше кажучи, ряд (2.7) може збігатися до іншої функції, а не до функції $f(x)$, для якої його формально складено. Встановимо умови, за яких сума ряду (2.7) є функцією $f(x)$.

Теорема 2.3.1. Для того щоб ряд Тейлора (2.8) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0–R; x_0+R)$, тобто

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

необхідно і достатньо, щоб у цьому інтервалі функція мала похідні всіх порядків і залишковий член її ряду Тейлора прямував до нуля при $n\to\infty$ для всіх x з інтервалу $(x_0–R; x_0+R)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\ \forall x\in(x_0-R;\,x_0+R),$$

де $R_n(x)=f(x)-S_n(x)$ - залишковий член ряду Тейлора, $S_n(x)$ – частинна сума ряду Тейлора.

Таким чином, функцію $f(x)$ можна розвинути в ряд Тейлора в інтервалі $(x_0–R; x_0+R)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

- вона має похідні всіх порядків;

- залишковий член ряду Тейлора (2.8) прямує до нуля при $n\to\infty$ і всіх $x\in(x_0-R;\ x_0+R)$.

Теорема 2.3.2. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що

$$|f^{(n)}(x)|<M,\quad x\in(x_0-R;\ x_0+R),\ n=0,\ 1,\ 2\ldots,$$

де $f^{(0)}(x)=f(x)$, то функцію $f(x)$ можна розвинути в ряд Тейлора.

Приклад 2.3.1. Розвинути функцію $f(x)=e^x$ в ряд Тейлора в точці $x_0=1$.

Знайдемо коефіцієнти Тейлора

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=\frac{e^1}{n!}=\frac{e}{n!}.$$

Одержуємо ряд Тейлора розвинення функції

$$e^x=e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\ldots+\frac{e}{n!}(x-1)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(x-1)^n.$$

2.3.3. Ряд Маклорена функції $f(x)$

Визначення 2.3.1. *Рядом Маклорена функції $f(x)$* називають степеневий ряд за степенями x, який одержуємо з ряду Тейлора (2.8) при $x_0=0$:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2.9)$$

Щоб розкласти функцію $f(x)$в ряд Маклорена, потрібно:

- знайти похідні $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ...;
- обчислити значення похідних в точці x0=0;
- записати ряд Маклорена (2.9) для цієї функції і знайти інтервал його збіжності;

- визначити інтервал (–R; R), в якому залишковий член ряду Маклорена $Rn(x)\to 0$ при $n\to\infty$, де $Rn(x) = f(x) - Sn(x)$, $Sn(x)$ – частинна сума ряду Маклорена.

Наведемо розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in (-\infty; \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$x \in (-\infty; \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$
$$x \in (-\infty; \infty);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ x \in (-1;1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n},$$
$$x \in (-1;1];$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$x \in [-1;1].$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n, m \in R, \ \ x \in (-1;1).$$

Отже, ряди Тейлора та Маклорена дають змогу замінити функцію степеневим рядом.

Приклад 2.3.2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=x^2\cos 2x$.

Використаємо ряд Маклорена функції $\cos x$. Тоді

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{2n!} + \ldots,$$

остаточно

$$x^2 \cos 2x = x^2 - \frac{2^2 x^4}{2!} + \frac{2^4 x^6}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n+2}}{2n!} + \ldots . \blacksquare$$

Теоретичні питання

1. Що називається рядом Тейлора функції $y=f(x)$?
2. Які умови збіжності повинна задовольняти функція, щоб її можна було розвинути в ряд Тейлора?
3. Що таке ряд Маклорена?
4. Запишіть ряди Маклорена для елементарних функцій. Які інтервали збіжності цих рядів?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 10. Розвинути в ряд Маклорена функції:

1. $f(x) = xe^{-x}$.

2. $f(x) = \cos^2 x$.

3. $f(x) = x\sin x$.

4. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

5. $f(x) = xe^{2x}$.

6. $f(x) = x^2 e^x$.

7. $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$.

8. $f(x) = \ln(1+x^3)$.

9. $f(x) = \dfrac{x}{2} e^{4x}$.

10. $f(x) = x^3 \cos 3x$.

11. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x}$.

12. $f(x) = x^2 \cos \dfrac{x}{2}$.

13. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-8)}{x}$.

14. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^3}$.

15. $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(x^4-1)}{x}$.

16. $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x^2}$.

17. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^4)}{x}$.

18. $f(x)=\sqrt{e^x}$.

19. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$.

20. $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{x}$.

21. $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(x+5)}{x}$.

22. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$.

23. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$.

24. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

25. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

26. $f(x)=\sin x^2$.

27. $f(x)=x^2\operatorname{arctg}x$.

28. $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x}$.

29. $f(x)=\sqrt{e^{\frac{x}{3}}}$.

30. $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(x-4)}{x^3}$.

Відповіді до завдання 10

1. $xe^{-x}=x-x^2+\dfrac{x^3}{2!}-\dfrac{x^4}{3!}+\dfrac{x^5}{4!}-\ldots$.

2. $\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^8}{8!}-\ldots$.

3. $x\sin x=x^2-\dfrac{x^4}{3!}+\dfrac{x^6}{5!}-\dfrac{x^8}{7!}+\dfrac{x^{10}}{9!}-\ldots$.

4. $\dfrac{e^x}{x^2}=x^{-2}+x^{-1}+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^3}{4!}-\ldots$.

5. $xe^{2x}=x+2x^2+\dfrac{4x^3}{2!}+\dfrac{8x^4}{3!}+\dfrac{16x^5}{4!}+\ldots$.

6. $x^2e^x = x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \ldots$.

7. $\operatorname{arctg} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7} + \ldots$.

8. $\ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} + \ldots$.

9. $\frac{x}{2}e^{4x} = \frac{x}{2} + \frac{4x^2}{2\cdot 1!} + \frac{16x^3}{2\cdot 2!} + \frac{64x^4}{2\cdot 3!} + \ldots$.

10. $x^3\cos 3x = x^3 - \frac{9x^5}{2!} + \frac{81x^7}{4!} - \frac{729x^9}{6!} + \ldots$.

11. $\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x} = \frac{x-1}{x} - \frac{(x-1)^3}{3x} + \frac{(x-1)^5}{5x} - \frac{(x-1)^7}{7x} + \ldots$.

12. $x^2\cos\frac{x}{2} = x^2 - \frac{x^4}{4\cdot 2!} + \frac{x^6}{16\cdot 4!} - \frac{x^8}{32\cdot 6!} + \ldots$.

13. $\frac{\operatorname{arctg}(x^2-8)}{x} = \frac{x^2-8}{x} - \frac{(x^2-8)^3}{3x} + \frac{(x^2-8)^5}{5x} - \frac{(x^2-8)^7}{7x} + \ldots$.

14. $\frac{\ln(1+x^3)}{x^3} = 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^9}{4} + \ldots$.

15. $\frac{\operatorname{arctg}(x^4-1)}{x} = \frac{x^4-1}{x} - \frac{(x^4-1)^3}{3x} + \frac{(x^4-1)^5}{5x} - \frac{(x^4-1)^7}{7x} + \ldots$.

16. $\frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x^2} = \frac{x+2}{x^2} - \frac{(x+2)^3}{3x^2} + \frac{(x+2)^5}{5x^2} - \frac{(x+2)^7}{7x^2} + \ldots$ ..

17. $\frac{\ln(1+x^4)}{x} = x^3 - \frac{x^8}{2x} + \frac{x^{12}}{3x} - \frac{x^{16}}{4x} + \ldots$.

18. $\sqrt{e^x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + \ldots$.

19. $\frac{1}{\sqrt{e^x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} - \frac{x^4}{384} + \ldots$.

20. $\dfrac{\cos 2x}{x} = \dfrac{1}{x} - 2x + \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{4x^5}{45} + \ldots$.

21. $\dfrac{\operatorname{arctg}(x+5)}{x} = \dfrac{x+5}{x} - \dfrac{(x+5)^3}{3x} + \dfrac{(x+5)^5}{5x} - \dfrac{(x+5)^7}{7x} + \ldots$.

22. $\dfrac{\ln(1+x^3)}{x} = x^2 - \dfrac{x^5}{2} + \dfrac{x^8}{3} - \dfrac{x^{11}}{4} + \ldots$.

23. $x^3 e^x = x^3 + \dfrac{x^4}{1!} + \dfrac{x^5}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^7}{4!} + \ldots$.

24. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + .x^4 - \ldots$.

25. $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$.

26. $\sin x^2 = x^2 - \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^{10}}{5!} - \dfrac{x^{14}}{7!} + \ldots$.

27. $x^2 \operatorname{arctg} x = x^3 - \dfrac{x^5}{3} + 0{,}2x^7 - \dfrac{x^9}{7} + \ldots$.

28. $\dfrac{e^{x^2}}{x} = \dfrac{1}{x} + x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{x^7}{24} + \ldots$.

29. $\sqrt{e^{\frac{x}{3}}} = e^x = 1 + \dfrac{x}{6} + \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x^3}{36} + \dfrac{x^4}{144} + \ldots$.

30. $\dfrac{\operatorname{arctg}(x-4)}{x^3} = \dfrac{x-4}{x^3} - \dfrac{(x-4)^3}{3x^3} + \dfrac{(x-4)^5}{5x^3} - \dfrac{(x-4)^7}{7x^3} + \ldots$.

2.4. Застосування степеневих рядів

2.4.1. Наближене обчислення значень функції

Для наближених обчислень значень функції використовується поняття диференціала. Проте точність обчислення можна значно збільшити, якщо застосувати ряди.

Приклад 2.4.1. Обчислити $\sin\frac{\pi}{8}$ з точністю до 0,01.

Використаємо розвинення у ряд Маклорена функції $\sin x$.

$$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^7+\ldots$$

Отримали ряд Лейбніцового типу (які задовольняють ознаку Лейбніца), для якого

$$\frac{\pi}{8}>0,01,\ \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^3>0,01,\ \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5<0,01.$$

Тоді з заданою точністю

$$\sin\frac{\pi}{8}\approx\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^3\approx 0,38$$

Приклад 2.4.2. Обчислити e^2 з точністю до 0,01.

За розвиненням у степеневий ряд функції e^x маємо

$$e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots$$

Оцінимо n-й залишок ряду

$$R_n(2)=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{2^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{2^{n+3}}{(n+3)!}+\ldots=$$
$$=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{2}{n+2}+\frac{2^2}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right)<$$
$$<\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{2}{n+2}+\left(\frac{2}{n+2}\right)^2+\ldots\right)=$$
$$=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{n+2}}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n}.$$

Підберемо найменше число n, для якого залишок оцінюється числом 0,01. Для цього розв’яжемо нерівність

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n}\le 0{,}01.$$

Підбором одержимо, що n=7.

Тоді для обчислень маємо

$$e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+\frac{2^7}{7!}\approx 7{,}38$$

Отже, для наближеного обчислення значення функції в точці потрібно:

- розвинути функцію в степеневий ряд;
- оцінити похибку обчислення з допомогою залишку ряду;
- обчислити значення частинної суми, що відповідає заданому значенню похибки.

2.4.2. Наближене обчислення визначених інтегралів

Визначені інтеграли обчислюють за допомогою формули Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

для якої необхідно знайти первісну.

Якщо потрібно наближено обчислити інтеграл $\int_a^x f(x)dx$, первісна для якого не виражається через елементарні функції, або інтеграл складний для обчислень, використовують розвинення функції в степеневий ряд, рівномірно збіжний на деякому відрізку. Такий ряд можна почленно інтегрувати за формулою

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\right).$$

Похибка обчислюється так само, як і при наближених обчисленнях функції, оцінюванням залишку ряду.

Приклад 2.4.3. Обчислити з точністю 0,01 інтеграл

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx.$$

Первісна для цього інтеграла не виражається через елементарні функції. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи розклад експоненти:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Такий ряд є рівномірно збіжним на всій числовій осі, тому його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, зокрема, на $[0, \frac{1}{3}]$. Тому

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1^3}{3 \cdot 1! 3^3} + \frac{1^5}{5 \cdot 2! 3^5} - \frac{1^7}{7 \cdot 3! 3^7} + \ldots \right).$$

Одержаний ряд є рядом Лейбніцевого типу. Знайдемо кількість членів ряду *n*, при яких задовольняється задана точність. Маємо

$$\frac{1}{3} > 0,01, \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 3^3} = \frac{1}{81} > 0,01, \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0,01.$$

Таким чином n=2. Тому з точністю до 0,01 маємо

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0,321$$

Якщо у визначеному інтегралі взяти змінну верхню межу, тоді ми знайдемо первісну у вигляді степеневого ряду.

Таким чином, за допомогою степеневих рядів можна обчислювати визначені інтеграли та наближено знаходити первісні.

2.4.3 Наближене інтегрування диференціальних рівнянь

Інтегрування диференціальних рівнянь, як відомо, зводиться до знаходження інтегралів. Якщо інтеграли не виражаються елементарними функціями, тоді для наближеного інтегрування використовуємо розвинення підінтегральних функцій в ряди Тейлора та Маклорена.

Нехай треба знайти частинний розв’язок диференціального рівняння першого порядку

$$y'=f(x, y)$$

з заданою початковою умовою $y(x_0)=y_0$.

Припустимо, що розв’язок рівняння в околі точки x_0, в якій задано початкову умову, можна розвинуи в ряд Тейлора

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{y''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots$$

Знайдемо похідні $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, …. Для знаходження $y(x_0)$ використаємо початкову умову $y(x_0)=y_0$. Для знаходження значення похідної підставимо в рівняння $x=x_0$, та $y=y_0$. Таким чином знайдемо $y'(x_0)=y'_0$.

Для знаходження похідної $y''(x_0)$ продиференціюємо обидві частини рівняння по змінній x і покладемо $x=x_0$, $y=y_0$. Аналогічно продовжуємо для похідних вищих порядків.

Процес завершується, або обриванням на деякому кроці, або знаходиться закономірність у записі коефіцієнтів ряду Тейлора.

Зауваження. За вказаним методом можна знаходити наближений розв’язок диференціального рівняння будь-якого порядку

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$$

з початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}_0.$$

Приклад 2.4.4. Знайти п’ять перших членів розвинення в ряд розв’язку рівняння

$$y''=xy'+y,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$$

Розв’язок шукаємо у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots .$$

Оскільки $y(0)=0$, $y'(0)=1$, то для знаходження $y''(0)$ використаємо рівняння, підставивши в нього $x=0$, $y=0$, $y'=1$

$$y''(0)=0\cdot 1+0=0.$$

Для знаходження інших коефіцієнтів ряду продиференціюємо праву та ліву частини рівняння та знайдемо значення похідних у точці $x=0$:

$$y'''=xy''+y'+y'=xy''+2y', \quad y'''(0)=2,$$
$$y^{(4)}=3y''+xy''' \quad y^{(4)}(0)=0,$$
$$y^{(5)}=4y'''+xy^{(4)}, \quad y^{(5)}(0)=8.$$

Одержуємо ряд Маклорена

$$y(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 + \dots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \dots,$$

розв’язку диференціального рівняння.

Теоретичні питання

1. Які ряди називають рядами Лейбніцевого типу?
2. Як наближено обчислити значення функції за допомогою степеневого ряду?
3. Як наближено інтегрують функцію, для якої відомий розклад у степеневий ряд?
4. Як використати степеневі ряди про наближеному інтегруванні диференціальних рівнянь?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 11. Наближено обчислити з точністю 0,001 значення виразу:

1. $e^{1,5}$**.** **2.** $\sqrt[4]{8}$ **.**

3. $\sin 15^\circ$ **.** **4.** $\ln 2,4$**.**

5. $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. **6.** $\sqrt[5]{e^{-1}}$.

7. $\cos 0,25$. **8.** $\sin\frac{1}{5}$.

9. $\operatorname{arctg}\frac{1}{9}$. **10.** $\cos 0,11$.

11. $\ln 1,3$. **12.** $\cos 0,5$.

13. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **14.** $\ln 1,01$.

15. $\cos 1$. **16.** $e^{\frac{-1}{3}}$.

17. $\ln 1,1$. **18.** $\sin 0,3$.

19. $\cos 0,2$ **20.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{11}$.

21. $e^{\frac{-1}{7}}$. **22.** $e^{\frac{-2}{3}}$.

23. $\cos 0,4$. **24.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{12}$.

25. $e^{\frac{-1}{2}}$. **26.** $\ln 1,8$.

27. $\sin 0,9$. **28.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

29. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. **30.** $\cos 0,1$.

Відповіді до завдання 11

1. 4,482. **2.** 1,683. **3.** 0,259. **4.** 0,876. **5.** $0,197$. **6.** $0,819$. **7.** $0,969$. **8.** $0,199$. **9.** $0,105$. **10.** $0,994$. **11.** $0,262$. **12.** $0,878$. **13.** $0,142$. **14.** $0,01$. **15.** $0,54$. **16.** $0,741$. **17.** $0,097$. **18.** $0,296$ **19.** $0,98$. **20.** $0,091$. **21.** $0,867$. **22.** $0,511$. **23.** $0,921$. **24.** $0,083$. **25.** $0,607$. **26.** $0,588$. **27.** $0,783$. **28.** $0,463$. **29.** $0,245$. **30.** $0,995$.

Завдання 12. Наближено обчислити визначені інтеграли з точністю 0,001:

1. $\int_0^1 e^{x^2}dx$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}dx$.

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^4+1}dx$.

4. $\int_0^{\frac{1}{3}} x\ln(x+1)dx$.

5. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

6. $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}dx$.

7. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}dx$.

8. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x}dx$.

9. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\sin x}{x}dx$.

10. $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

11. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

12. $\int_0^{0,2} \sqrt{x}\cos x dx$.

13. $\int_0^{0,5} x^2\cos 3x dx$.

14. $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx$.

15. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$.

16. $\int_0^{0,5} \ln(1+x^2)dx$.

17. $\int_0^{0,5} \frac{x-arctgx}{x^2}dx$.

18. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$.

19. $\int_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx$

20. $\int_0^{0,5} x^2\cos x dx$.

21. $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)dx$.

22. $\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$.

23. $\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{e^x - 1}{x} dx$.

24. $\int_0^{0,5} x^2 \sin x dx$.

25. $\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx$.

26. $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

27. $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx$.

28. $\int_0^{0,5} \ln(1+x^3)dx$.

29. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx$.

30. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$.

Відповіді до завдання 12

1. 1,488. **2.** 0,758. **3.** 0,494. **4.** 0,011. **5.** 0,748. **6.** 1. **7.** 0,488. **8.** 0,250. **9.** 0,231. **10.** 8,041. **11.** 0,822. **12.** 0,427. **13.** 0,039. **14.** 0,321. **15.** 0,927. **16.** 0,038. **17.** 0,407. **18.** 1,605. **19.** 0.994. **20.** 0,039. **21.** 0,357. **22.** 0,189. **23.** 0,103. **24.** 0,016. **25.** 0,071. **26.** 0,905. **27.** 2,835. **28.** 0,016. **29.** 0,507. **30.** 0,337.

Завдання 13. Знайти три перших члени розкладу в ряд Маклорена розв'язку диференціального рівняння, для якого задані початкові умови

1. $y' = xy^2 + \sin(x-y)$, $y(0)=1$.

2. $y'' = y\ln(y+1) + e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. **3.** $y' = xy + e^y, y(0)=1$

4. $y' = x^2 + 2y^2, y(0)=2$.

5. $y' = x^2 + y^2 + 1, y(0)=1$.

6. $y' = x^2 + y^2 + xy, y(0)=3$.

7. $y' = x + e^{\sin y}, y(0)=1$.

8. $y' = x^3 - y^2 + 2, y(0) = -1$. **9.** $y' = xy + y^2, y(0) = 0,2$.

10. $y' = x\sin y + y^2, y(0) = 1$. **11.** $y' = xe^x - 3y + 1, y(0) = 0$.

12. $y' = x^2y^2 + \sin x, y(0) = \frac{1}{2}$. **13.** $y' = x + y^2, y(0) = -1$.

14. $y' = x^3 - xy^2 + 4, y(0) = 1$. **15.** $y' = \cos x + yx, y(0) = -1$.

16. $y' = x + e^{2y}, y(0) = 1$. **17.** $y' = e^{3x} + 3y^2x + 1, y(0) = 1$.

18. $y' = x^2 + e^y, y(0) = -2$. **19.** $y' = xy + 2\sin x, y(0) = 2$.

20. $y' = x^2 + e^y, y(0) = 1$. **21.** $y' = e^x + 2y^2x + 1, y(0) = 1$.

22. $y' = 4\cos x + yx, y(0) = 1$.

23. $y' = x + y^2 + y, y(0) = 1$. **24.** $y' = xe^x + 3y^2, y(0) = -2$.

25. $y' = e^x + y^2 + 2x, y(0) = 1$. **26.** $y' = xy^3 + \sin y, y(0) = 1$.

27. $y' = 2x^4 - xy^2 + 4\cos x, y(0) = 1$.

28. $y' = e^{4x} + 3y^3 + 2x, y(0) = 0$.

29. $y' = xy^3 + 2\sin x - 2, y(0) = 1$. **30.** $y' = xy^2 + y + 3, y(0) = 1$.

Відповіді до завдання 13

1. $y(x) = 1 - \frac{\sin 1}{1!}x + \frac{1 + \cos 1 + \sin 1 \cos 1}{2!}x^2 + \dots$.

2. $y(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$.

3. $y(x) = 1 + \frac{e}{1!}x + \frac{(1 + e^2)}{2!}x^2 + \dots$. **4.** $y(x) = 2 + \frac{8}{1!}x + \frac{16}{2!}x^2 + \dots$.

5. $y(x) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \dots$. **6.** $y(x) = 3 + \frac{9}{1!}x + \frac{57}{2!}x^2 + \dots$.

7. $y(x) = 1 + \frac{e^{\sin 1}}{1!}x + \frac{(1 + \cos 1 \cdot e^{2\sin 1})}{2!}x^2 + \dots$.

8. $y(x)=-1+\frac{1}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\dots$. **9.** $y(x)=\frac{1}{5}+\frac{1}{25}x+\frac{27}{250}x^2+\dots$. **10.** $y(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{2+\sin 1}{2!}x^2+\dots$.

11. $y(x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\dots$. **12.** $y(x)=\frac{1}{2}+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\dots$.

13. $y(x)=-1+\frac{1}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\dots$.

14. $y(x)=1+\frac{4}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\dots$. **15.** $y(x)=-1+\frac{1}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\dots$. **16.** $y(x)=1+\frac{e^2}{1!}x+\frac{1+2e^4}{2!}x^2+\dots$. **17.** $y(x)=1+\frac{2}{1!}x+\frac{6}{2!}x^2+\dots$. **18.** $y(x)=-2+\frac{e^{-2}}{1!}x+\frac{e^{-4}}{2!}x^2+\dots$.

19. $y(x)=2+\frac{2\sin 2}{1!}x+\frac{2+2\cos 2}{2!}x^2+\dots$.

20. $y(x)=1+\frac{e}{1!}x+\frac{e^2}{2!}x^2+\dots$.

21. $y(x)=1+\frac{2}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\dots$. **22.** $y(x)=1+\frac{4}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\dots$.

23. $y(x)=1+\frac{2}{1!}x+\frac{7}{2!}x^2+\dots$. **24.** $y(x)=-2+\frac{12}{1!}x+\frac{-143}{2!}x^2+\dots$.

25. $y(x)=1+\frac{2}{1!}x+\frac{7}{2!}x^2+\dots$.

26. $y(x)=1+\frac{\sin 1}{1!}x+\frac{1+\sin 1\cos 1}{2!}x^2+\dots$.

27. $y(x)=1+\frac{4}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\dots$. **28.** $y(x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{6}{2!}x^2+\dots$.

29. $y(x)=1-\frac{2-2\sin 1}{1!}x+\frac{1+2\cos 1}{2!}x^2+\dots$.

30. $y(x)=1+\frac{4}{1!}x+\frac{5}{2!}x^2+\dots$.

Розділ 3. Ряди Фур'є

3.1. Тригонометричний ряд Фур'є, коефіцієнти Фур'є

У природі та техніці відбуваються періодичні процеси, тобто такі процеси, які повторюються через деякі проміжки часу. Вони описуються періодичними функціями.

Визначення 3.1. Функція $f(x)$ називається *періодичною* з додатнім періодом T, якщо ця функція визначена на всій дійсній осі і для всіх $x\in \boldsymbol{R}$ виконується рівність $f(x+T)=f(x)$.

Розглянемо періодичні ряди, а саме тригонометричні ряди.

Визначення 3.2. яд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+$$

$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots \qquad (3.1)$$

називається *тригонометричним рядом,* де a_0, a_n та b_n – коефіцієнти ряду..

Визначення 3.3. Тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ ,$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\ ,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx, \qquad (3.2)$$

де n=1, 2,… називається *рядом Фур'є* даної функції, що інтегровна на відрізку $[-\pi,\ \pi]$.

Приклад 3.1.1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=2x+1$ на відрізку $(-\pi,\ \pi)$, періодично продовжену на всю числову пряму з періодом 2π (рис. 4).

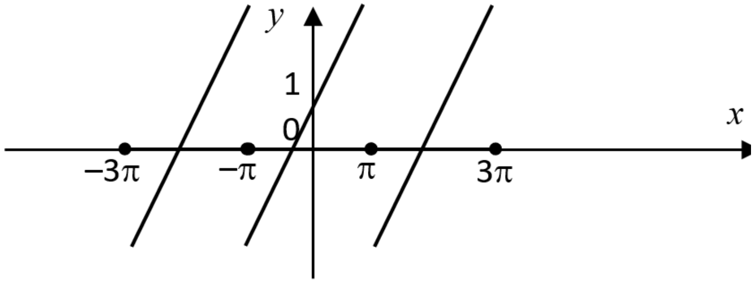


Рис. 4.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є за формулами (3.2). Маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left(x^2+x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\cos nx dx = \frac{1}{\pi n}(2x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\sin nx dx = -\frac{1}{\pi n}(2x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(2\pi+1)\cos \pi n + \frac{1}{\pi n}(-2\pi+1)\cos \pi n + \frac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{4}{n}\cos \pi n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n},\ n=1, 2,\ldots$$

Одержуємо ряд Фур'є $f(x) = 2x+1 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n}\sin nx$

3.2. Ряди Фур'є для парних та непарних функцій

Нехай функцію $f(x)$ на відрізку $[-\pi, \pi]$ можна розвинути в ряд Фур'є. Якщо функція $f(x)$ парна чи непарна, то обчислення коефіцієнтів Фур'є значно спрощується.

Якщо $f(x)$ – парна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx, \tag{3.3}$$

а коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx \tag{3.4}$$

Якщо $f(x)$ – непарна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin nx, \tag{3.5}$$

а коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx \tag{3.6}$$

Таким чином, ряди Фур'є для парних функцій містять лише косинуси (парні функції), для непарних – лише синуси (непарні функції).

Приклад 3.2.1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$ на відрізку $[0, \pi]$, періодично продовживши на всю числову вісь з періодом 2π (рис. 5).

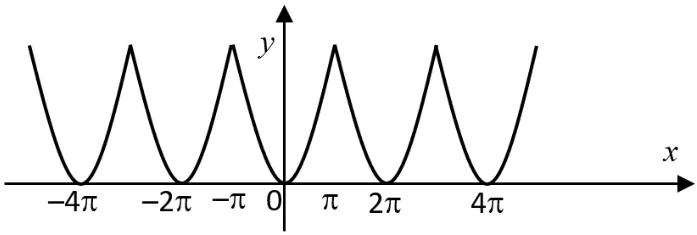


Рис. 5.

Функція є парною, тому використаємо формулу (3.4). Знайдемо коефіцієнти Фур'є за формулами (3.4). Маємо

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{1}{n}x^2 \sin nx\right|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \left.\frac{2}{n^2}x\cos nx\right|_0^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n^2}\pi\cos n\pi - \left.\frac{2}{n^3}\sin nx\right|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n 4}{n^2}.$$

Одержуємо розклад в ряд Фур'є

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Приклад 3.2.2. Розвинути в ряд Фур'є функцію *f(x)=x* на відрізку $[0, \pi]$, періодично продовживши на всю числову вісь з періодом 2π (рис. 6).

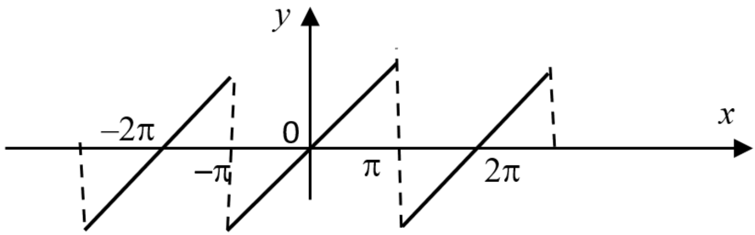


Рис. 6.

Функція є непарною, тому використаємо формулу (3.6). Знайдемо коефіцієнти Фур'є за формулами (3.6). Маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ \ du = dx \\ dv = \sin nx dx \\ v = \dfrac{-\cos nx}{n} \end{array} \right| = \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{-x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right) = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Одержуємо розвинення в ряд Фур'є

$$x = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

■

3.3. Ряди Фур'є для 2*l*-періодичних функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l,\ l]$ є $2l$ – періодичною та кусково-монотонною на цьому відрізку. Для розвинення її в ряд Фур'є зробимо заміну змінної $x = \frac{lt}{\pi}$.

Одержимо функцію $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$. Функція $\varphi(t)$ – визначена на $[-\pi,\ \pi]$, 2π – періодична та кусково-монотонна на ньому. Тоді її можна розвинути в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi,\ \pi]$:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right),$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами (3.4), (3.6)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt.$$

Повернемось до змінної x, замінивши змінні у визначених інтегралах: $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l}dx$, а відрізок $[-\pi,\ \pi]$ перейде у відрізок $[-l,\ l]$. Тоді розвинення в ряд має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right) \qquad (3.7)$$

з коефіцієнтами

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\ ,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\,,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\ . \tag{3.8}$$

Одержаний ряд (3.7) і є рядом Фур’є для функції $f(x)$ з періодом $2l$. Всі властивості та теореми для рядів Фур’є 2π-періодичних функцій (достатні умови розкладу в ряд, можливість обчислення коефіцієнтів з інтегруванням по довільному відрізку з довжиною в період та особливості рядів для парних та непарних функцій) справджуються і для $2l$ -періодичних функцій.

Приклад 3.3.1. Розвинути в ряд Фур’є функцію $f(x)=x^2$ на відрізку $[-1,1]$, періодично продовжену на всю числову вісь з періодом 2 (рис. 7).

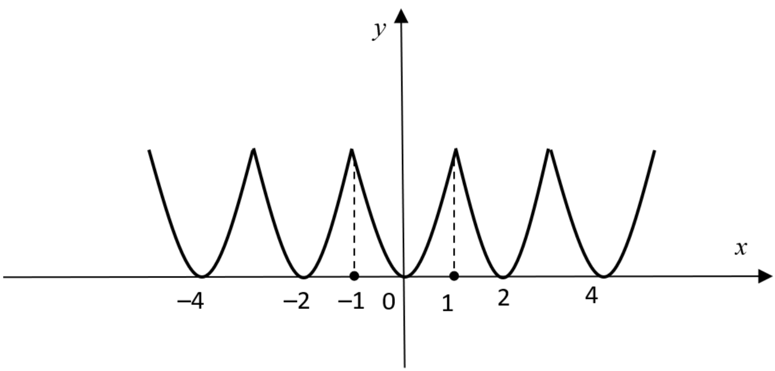


Рис. 7

Задана функція є неперервною на всій числовій осі, парною та періодичною з періодом 2. Подамо її у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти якого

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}, \quad a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x^2 \cos \pi n x dx = \frac{4\cdot(-1)^n}{\pi^2 n^2},$$

$$b_n = 0.$$

Одержуємо ряд

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos \pi n x$$

Приклад 3.3.2. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ на відрізку [–2; 2], періодично продовжену на всю числову вісь з періодом 4 (рис. 8).

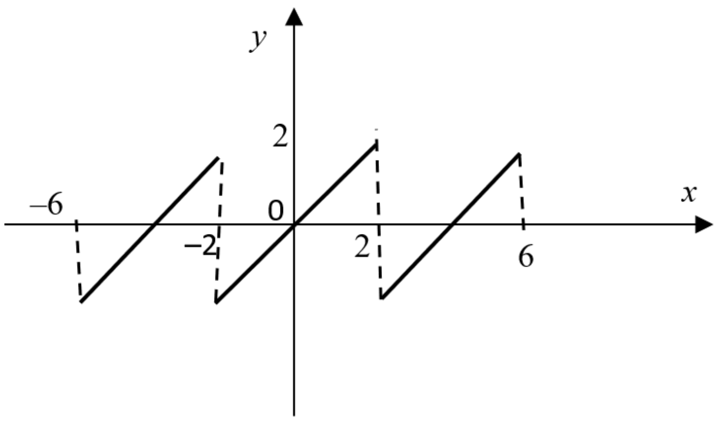


Рис. 8

Задана функція є непарною та періодичною з періодом 4. Розвинемо її у ряд Фур'є з коефіцієнтами

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{\pi nx}{2}dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ \ du = dx \\ dv = \sin\frac{\pi nx}{2}dx \\ v = \dfrac{-2\cos\frac{\pi nx}{2}}{\pi n} \end{array} \right| = \left.\frac{-2x\cos\frac{\pi nx}{2}}{\pi n}\right|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \cos\frac{\pi nx}{2}dx =$$

$$= 4\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} + \left.\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\right|_0^2 = 4\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Одержуємо розвинення в ряд Фур’є

$$x = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

3.4. Ряди Фур’є для функцій на заданому інтервалі

Розглянемо тепер можливість розкладу в ряд Фур’є функції $f(x)$ на довільному відрізку $[0, l]$, або $[a, b]$. Розглянемо спочатку функцію на відрізку $[0, l]$. Продовжимо (довизначимо) функцію на відрізок $[–l, 0]$ так, щоб вона збігалася з даною на $[0, l]$ і була кусково-монотонною. Найчастіше це роблять такими способами:

- Довільне довизначення, тобто будь-якою монотонною функцією. Найпростіше це зробити так:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-l, 0], \\ f(x), & x \in [0, l]. \end{cases}$$

Тоді до одержаної таким чином функції $F(x)$ можемо застосовувати розглянутий вище підхід, розклавши її в ряд Фур’є на $[–l, l]$.

- Довизначення *парним способом* описується такою функцією:

$$F(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-l, 0], \\ f(x), & x \in [0, l]. \end{cases}$$

Ряд Фур’є тоді складатиметься лише з косинусів.

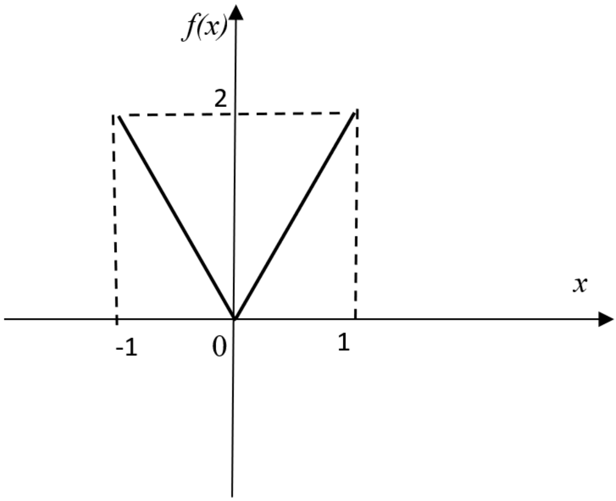
• Довизначення *непарним способом* описується такою функцією:

$$F(x)=\begin{cases}-f(-x), & x\in[-l,0],\\ f(x), & x\in[0,l].\end{cases}$$

У такому випадку одержимо ряд з синусів.

І нарешті, коли розглянемо функцію $f(x)$, задану на відрізку $[a,b]$, де $a<b$, тоді задача розкладу в ряд Фур’є може бути зведена до попередньої.

Приклад 3.4.1. Розвинути в ряд Фур’є функцію $f(x)=2x$ на відрізку [0; 1].



Довизначимо задану функцію парним способом

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1\\ -2x, -1\le x\le 0\end{cases},$$

Тоді коефіцієнти $b_n=0$. Розвинемо її в ряд Фур’є.

Одержуємо

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 2xdx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 2x\cos\pi nxdx = 2\left(\frac{2}{\pi n}x\sin\pi nx\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin\pi nxdx\right) =$$

$$\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\pi nx\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Ряд Фур'є заданої функції має вигляд

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1)\cos nx \ \blacksquare$$

3.5. Ряди Фур'є у комплексній формі

Нехай маємо ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$$

з коефіцієнтами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad .$$

Застосуємо формулу Ейлера

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \ .$$

Одержимо

$$a_n\cos nx + b_n\sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx},$$

де

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\; n = 1,2,\; \dots .$$

З формул коефіцієнтів Фур'є та цих формул одержимо

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

Враховуючи одержані формули, ряд Фур'є можемо записати у вигляді

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right),$$

або

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} . \tag{3.9}$$

Коефіцієнти ряду (3.9) обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)e^{-inx}dx,\; n\in\mathbf{Z}. \tag{3.10}$$

Ряд (3.9) називається *комплексною формою ряду Фур'є*, а числа c_n називаються комплексними коефіцієнтами Фур'є.

Якщо розглядати відрізок $[-l, l]$, тоді комплексна форма ряду Фур'є на цьому відрізку буде мати вигляд

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

з коефіцієнтами

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx,\; n\in\mathbf{Z}.$$

Члени ряду $c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$ називаються *гармоніками*, коефіцієнти c_n – *коефіцієнтами гармонік*, а числа $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$ – *хвильові числа* функції $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n x}$.

Сукупність хвильових чисел називається *спектром*. Якщо їх відкласти на числовій осі, одержимо дискретну множину точок. Відповідний цій множині спектр називається *дискретним спектром*.

Контрольні запитання

1. Яка функція називається періодичною?
2. Запишіть найпростіший вигляд періодичної функції та вкажіть основні її параметри.
3. Який ряд називається тригонометричним?
4. Який зв’язок між рядом Фур’є та тригонометричним рядом?
5. Яким умовам повинна задовольняти функція, щоб її можна було розвинути в ряд Фур’є?
6. Запишіть ряд Фур’є для 2π-періодичних функцій.
7. Які коефіцієнти ряду Фур’є у випадку $2l$-періодичних функцій?
8. Як записати ряд Фур’є для функції, заданої на деякому відрізку?
9. Як можна записати ряд Фур’є у комплексній області?
10. Що називають спектром функції?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 14. Намалювати графік функції та розкласти її в ряд Фур'є на проміжку $(-\pi, \pi)$.

1. $f(x) = x - \pi$ на $(-\pi, \pi)$.

2. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ -1, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ -1, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} -1, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 2, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} -1, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 1, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 0, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ -2, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} -2, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 0, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 2, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} -1, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 0, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \pi, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ \pi - x, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 3x, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 1, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 3x, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 1 - x, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 2, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ x - 1, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} -x, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ x, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 2, \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

18. $f(x)=x+1$ на $(-\pi, \pi)$.

19. $f(x)=\begin{cases}3, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ 1, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$ **20.** $f(x)=\begin{cases}1, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ 3, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

21. $f(x)=x+\pi$ на $(-\pi, \pi)$. **22.** $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ \frac{3}{2}, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}-1, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ -3, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$ **24.** $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ -\frac{3}{2}, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ 4, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$ **26.** $f(x)=\begin{cases}2x-1, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ 1+x, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ \frac{1}{2}, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$ **28.** $f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ 0, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ x, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$ **30.** $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } -\pi<x\le 0,\\ 1, \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

Відповіді до завдання 14

1. $f(x)=-2\pi+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin nx$. **2.** $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\frac{\left(-1\right)^{n}-1}{\pi n}\sin nx$.

3. $f(x)=\frac{-1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n}\sin nx$. **4.** $f(x)=\frac{3}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}3\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n}\sin nx$.

5. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{1-\left(-1\right)^{n}}{\pi n}\sin nx$. **6.** $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}-1}{\pi n}\sin nx$.

7. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{\left(-1\right)^{n}-1}{\pi n}\sin nx$. **8.** $f(x)=-1+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{1-\left(-1\right)^{n}}{\pi n}\sin nx$.

9. $f(x)=3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n}\sin nx$. **10.** $f(x)=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n}\sin nx$.

11. $f(x)=\frac{3\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n^{2}}\cos nx+\frac{(-1)^{n}}{n}\sin nx\right)$.

12. $f(x)=\frac{2-3\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\frac{1+(-1)^{n}}{2\pi n^{2}}\cos nx+\frac{6+(-1)^{n+1}}{2\pi n(-1)^{n+1}}\sin nx\right)$.

13. $f(x)=\frac{1-\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(4\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n^{2}}\cos nx+\frac{1+(-1)^{n}-2\pi}{\pi n(-1)^{n}}\sin nx\right)$.

14. $f(x)=\frac{-\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n^{2}}\cos nx-\frac{4-4\cdot(-1)^{n}+\pi}{\pi n(-1)^{n}}\sin nx\right)$.

15. $f(x)=\frac{2+\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n}-1}{\pi n^{2}}\cos nx-\frac{3\cdot(-1)^{n}+\pi-3}{\pi n(-1)^{n}}\sin nx\right)$.

16. $f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{n}-1}{\pi n^{2}}\cos nx$. **17.** $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n}\sin nx$.

18. $f(x)=1-\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{n}}{n}\sin nx$. **19.** $f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{n}-1}{\pi n}\sin nx$.

20. $f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n}\sin nx$. **21.** $f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin nx$.

22. $f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n}\sin nx$. **23.** $f(x)=-1+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{n}-1}{\pi n}\sin nx$.

24. $f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{(-1)^{n}-1}{\pi n}\sin nx$. **25.** $f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{1-(-1)^{n}}{\pi n}\sin nx$.

26. $f(x) = \frac{-\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-(-1)^n}{\pi n^2} \cos nx - \frac{2 - 2\cdot(-1)^n + 3\pi}{\pi n(-1)^n} \sin nx \right)$.

27. $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \sin nx$.

28. $f(x) = \frac{3}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \sin nx$.

29. $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right)$.

30. $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \sin nx$.

Завдання 15. Намалювати графік функції та розкласти її в ряд Фур'є на проміжку (0; π). Для непарних варіантів – по синусах, для парних – по косинусах.

1. $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x, \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$ **2.** $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x, \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ -1, \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$ **4.** $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ -1, \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} x, \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$ **6.** $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} x, \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 1, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 1, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 1, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos 2x, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} 1, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos 2x, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} \cos 3x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} \cos 3x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} x, \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

21. $$f(x)=\begin{cases}0,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

22. $$f(x)=\begin{cases}0,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

23. $$f(x)=\begin{cases}1,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ -1,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

24. $$f(x)=\begin{cases}1,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ -1,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

25. $$f(x)=\begin{cases}x,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

26. $$f(x)=\begin{cases}x,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

27. $$f(x)=\begin{cases}x,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ -1,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

28. $$f(x)=\begin{cases}x,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ -1,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

29. $$f(x)=\begin{cases}2x,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

30. $$f(x)=\begin{cases}2x,\text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0,\text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

Відповіді до завдання 15

1. $$f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\cos\frac{\pi(n+1)}{2}}{n+1}-\frac{2\cos\frac{\pi(n-1)}{2}}{n-1}+\frac{2n}{n^2-1}-\frac{2}{\pi n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right)\sin nx.$$

2. $$f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi(n-1)}{2}}{n-1}+\frac{\sin\frac{\pi(n+1)}{2}}{n+1}\right)\cos nx\cdot$$

3. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos\frac{\pi(n+2)}{2}}{2(n+2)}-\frac{\cos\frac{\pi(n-2)}{2}}{2(n-2)}+\frac{n}{n^2-4}+\frac{(-1)^n}{n}-\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n}\right)\sin nx.$

4. $f(x)=\frac{-1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi(n-2)}{2}}{2(n-2)}+\frac{\sin\frac{\pi(n+2)}{2}}{2(n+2)}-\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\right)\cos nx.$

5. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n}+\frac{2\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n^2}+\frac{\cos\frac{\pi(n+1)}{2}}{2(n+1)}+\frac{\cos\frac{\pi(1-n)}{2}}{2(1-n)}-\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}-\frac{(-1)^{1-n}}{2(1-n)}\right)\sin nx.$

6. $f(x)=\frac{\pi+4}{4\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}+\frac{2\cos\frac{\pi n}{2}}{\pi n^2}-\frac{2}{\pi n^2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}+\frac{\cos\frac{\pi(n+1)}{2}}{2(n+1)}-\frac{(-1)^{1-n}}{2(1-n)}+\frac{\cos\frac{\pi(1-n)}{2}}{2(1-n)}\right)\cos nx.$

7. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n}+\frac{1}{n}+\frac{\cos\frac{\pi(n+1)}{2}}{2(n+1)}+\frac{\cos\frac{\pi(1-n)}{2}}{2(1-n)}-\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}-\frac{(-1)^{1-n}}{2(1-n)}\right)\sin nx.$

8. $f(x)=\frac{\pi+2}{2\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}+\frac{\cos\frac{\pi(n+1)}{2}}{2(n+1)}-\frac{(-1)^{1-n}}{2(1-n)}+\frac{\cos\frac{\pi(1-n)}{2}}{2(1-n)}\right)\cos nx.$

9. $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos\frac{\pi(n+2)}{2}}{n+2}+\frac{4}{4-n^2}-\frac{\cos\frac{\pi(2-n)}{2}}{2-n}\right)\cos nx.$

10. $f(x)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos\frac{\pi(n+2)}{2}}{n+2}+\frac{4}{4-n^2}-\frac{\cos\frac{\pi(2-n)}{2}}{2-n}\right)\cos nx.$

11. $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi(1-n)}{2}}{1-n}-\frac{\sin\frac{\pi(n+1)}{2}}{n+1}-\frac{2(-1)^n}{n+1}+\frac{2\cos\frac{\pi n}{2}}{n}\right)\sin nx.$

12. $f(x)=\frac{\pi+2}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos\frac{\pi(n+1)}{2}}{2(n+1)}+\frac{2}{1-n^2}-\frac{\cos\frac{\pi(1-n)}{2}}{2(1-n)}-\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\right)\cos nx.$

13. $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{2\cos\frac{\pi n}{2}}{n}+\frac{(-1)^{n-2}}{n-2}+\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}-\frac{\cos\frac{\pi(n+2)}{2}}{n+2}-\frac{\cos\frac{\pi(2-n)}{2}}{2-n}\right)\sin nx.$

14. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}-\frac{\sin\frac{\pi(2-n)}{2}}{2(2-n)}+\frac{\sin\frac{\pi(n+2)}{2}}{2(n+2)}\right)\cos nx.$

15. $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n^2-9}-\frac{\cos\frac{\pi(n+3)}{2}}{n+3}-\frac{\cos\frac{\pi(n-3)}{2}}{n-3}\right)\sin nx$.

16. $f(x)=\frac{-1}{3\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi(3-n)}{2}}{3-n}+\frac{\sin\frac{\pi(n+3)}{2}}{3+n}\right)\cos nx$.

17. $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi(1-n)}{2}}{1-n}-\frac{\sin\frac{\pi(n+1)}{2}}{n+1}\right)\sin nx$.

18. $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1-n^2}-\frac{\cos\frac{\pi(n+1)}{2}}{n+1}-\frac{\cos\frac{\pi(1-n)}{2}}{1-n}\right)\cos nx.$.

19. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi\cos\frac{\pi n}{2}}{2n}+\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)\sin nx$.

20. $f(x)=\frac{\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi\sin\frac{\pi n}{2}}{2n}+\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)\cos nx.$.

21. $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi(n+1)}{2}}{n+1}-\frac{\sin\frac{\pi(n-1)}{2}}{n-1}\right)\sin nx$.

22. $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{\cos\frac{\pi(n+1)}{2}}{n+1}-\frac{(-1)^{1-n}}{1-n}+\frac{\cos\frac{\pi(1-n)}{2}}{1-n}\right)\cos nx.$.

23. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{n}-\frac{2\cos\frac{\pi n}{2}}{n-1}\right)\sin nx$.

24. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\cos nx.$

25. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cos\frac{\pi n}{2}}{\pi n}-\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n}+\frac{2\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n^2}-\frac{2(-1)^n}{\pi n}\right)\sin nx$.

26. $f(x)=\dfrac{\pi+4}{8\pi}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\pi\sin\frac{\pi n}{2}}{2n}+\dfrac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\right)\cos nx$ •

27. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{-2\cos\frac{\pi n}{2}}{\pi n}-\dfrac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n}+\dfrac{2\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n^2}+\dfrac{2(-1)^n}{\pi n}\right)\sin nx$ •

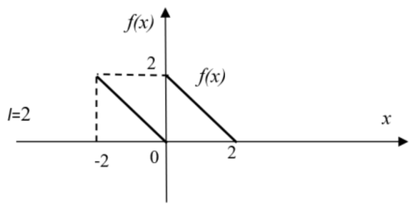
28. $f(x)=\dfrac{\pi-4}{8}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{\pi+2}{2n}\cdot\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)\cos nx.$ •

29. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{-2\cos\frac{\pi n}{2}}{n}+\dfrac{4\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n^2}\right)\sin nx$ •

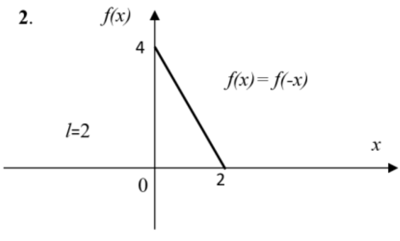
30. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{\pi}{2n}\cdot\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)\cos nx.$

Завдання 16. В інтервалі $2l$ розкласти в ряд Фур'є функцію, зображено графічно.

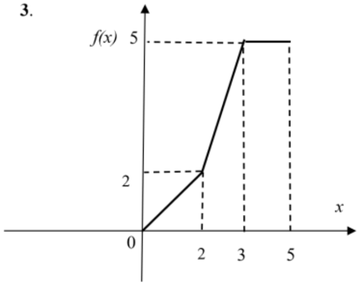
1.



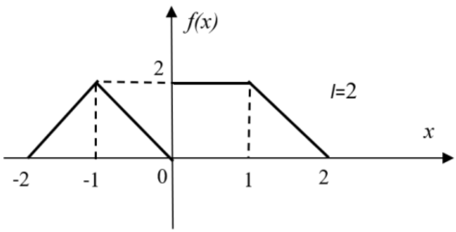
2.



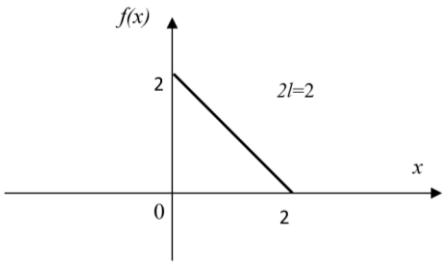
3.



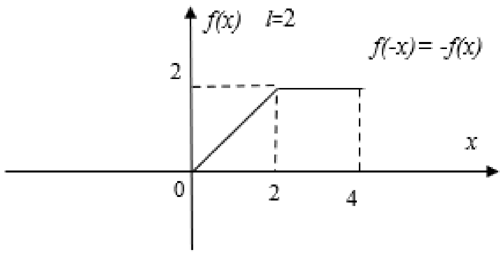
4.



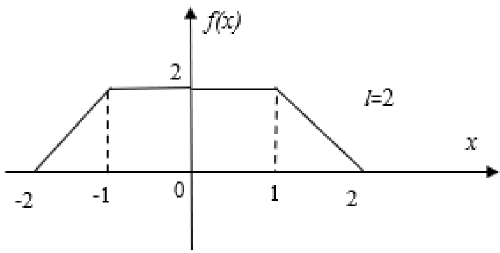
5.



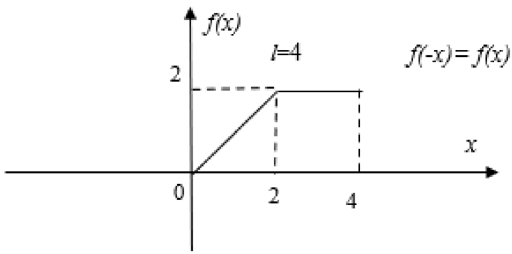
6.



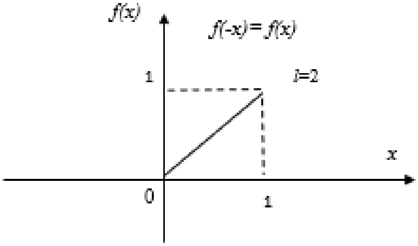
7.



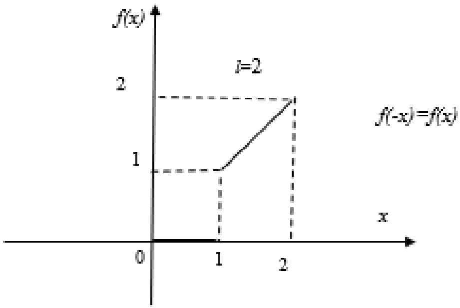
8.



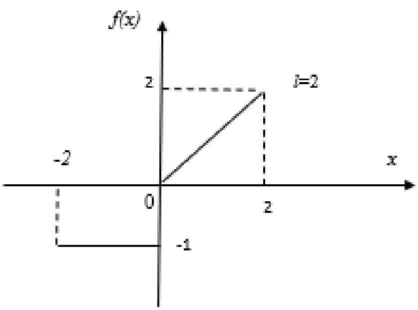
9.



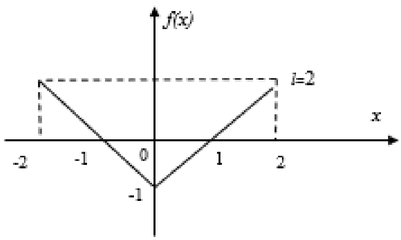
10.



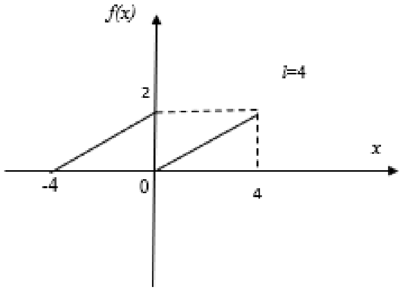
11.



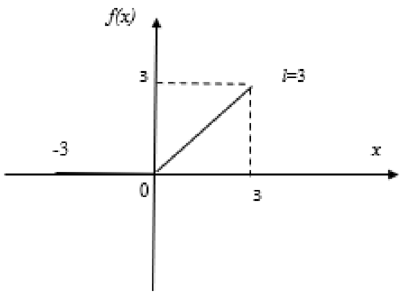
12.



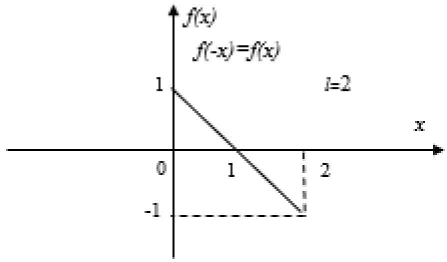
13.



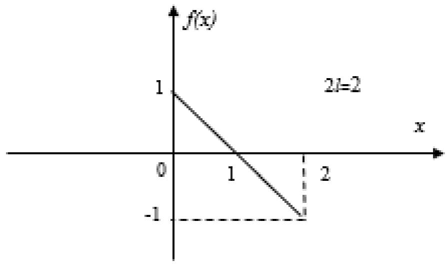
14.



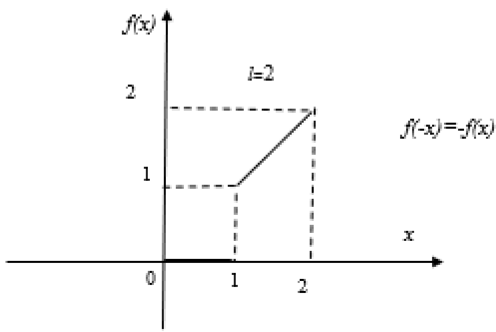
15.



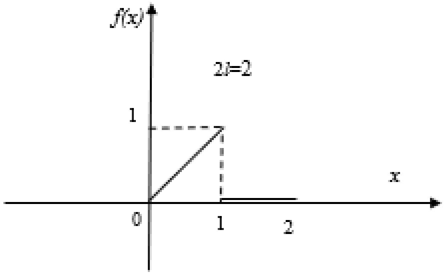
16.



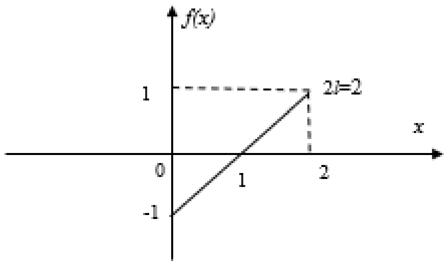
17.



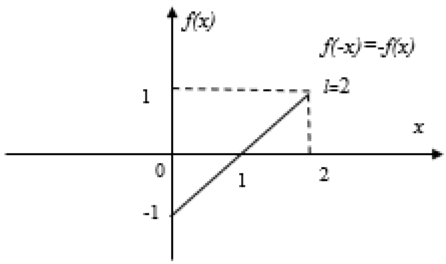
18.



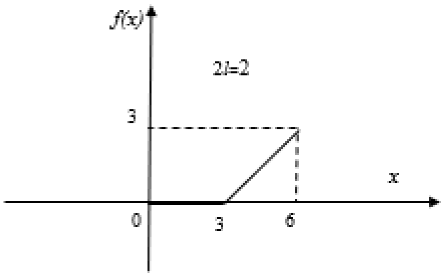
19.



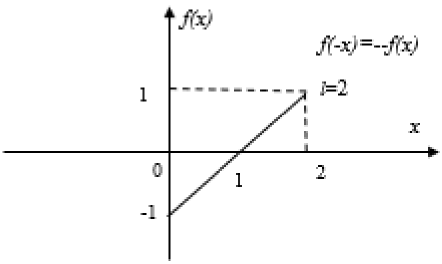
20.



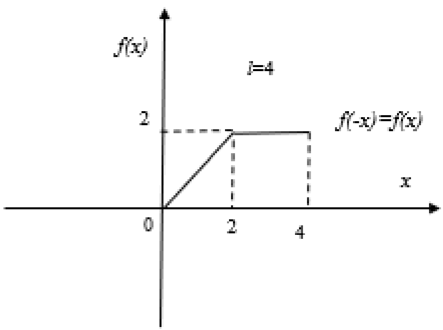
21.



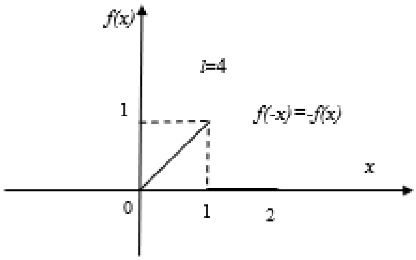
22.



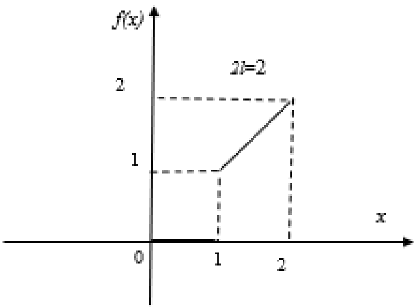
23.



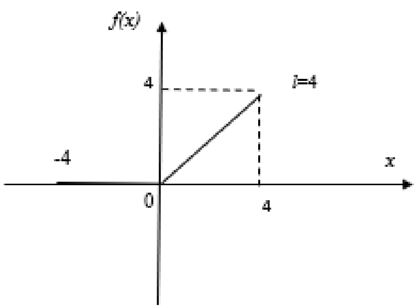
24.



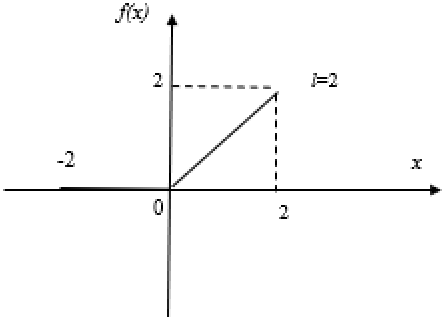
25.



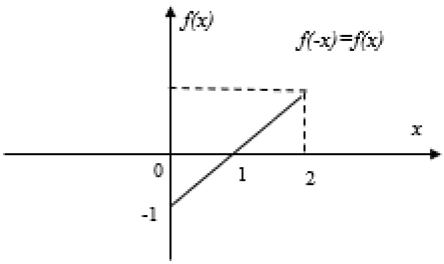
26.



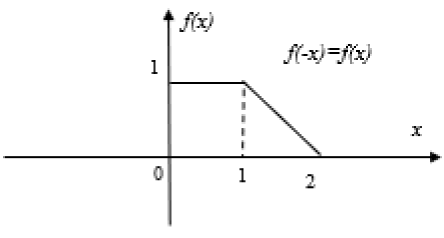
27.



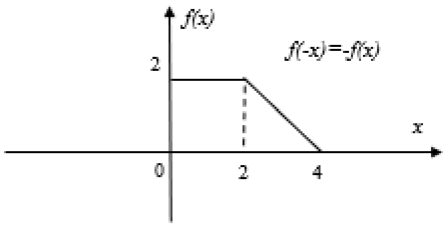
28.



29.



30.



3.5. Ортогональні системи функцій (додаток)

У попередніх викладах ми вже зустрічалися з частинними випадками ортогональних систем:

- з основною тригонометричною системою функцій — ортогональною на проміжку $[-\pi;\pi]$

$$1,\quad \cos x,\quad \sin x,\quad ...,\quad \cos nx,\quad \sin nx,\quad ...,\quad n=\overline{2,\infty};$$

- з загальною ортогональною системою

$$1,\quad \cos\frac{\pi x}{l},\quad \sin\frac{\pi x}{l},\quad ...,\quad \cos\frac{n\pi x}{l},\quad \sin\frac{n\pi x}{l},\quad ...,\quad n=\overline{2,\infty}.$$

З цими системами глибоко пов'язані ряди Фур'є. Однак, потреби розв'язування прикладних фізичних та інженерних задач призводять до вивчення більш загальних аналогій ортогональних систем.

Матеріал, який представлений тут стисло, детально і глибоко описаний, наприклад, в монографії [12].

3.5.1. Основні визначення. Ряди Фур'є за заданою ортогональною системою.

Визначення 3.5.1. Нескінченна система дійсних функцій

$$\varphi_0(x),\quad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad ...,\quad \varphi_n(x),\quad ... \qquad (3.11)$$

називається *ортогональною* на відрізку $[a,b]$ якщо

$$\int_a^b \varphi_n(x)\cdot\varphi_m(x)\,dx = 0,\quad n\neq m,\quad n=0,1,2,\ldots,\quad m=0,1,2,\ldots \quad (3.12)$$

Надалі припускатимемо, що

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx \neq 0,\quad n=0,1,2,\ldots \quad (3.13)$$

Умова (3.12) виражає попарну ортогональність функцій системи (3.11). З умови (3.13) випливає, що жодна з функцій цієї системи тотожно не дорівнює нулеві.

Визначення 3.5.2. Величину (число)

$$\|\varphi_n\| \overset{df}{=} \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx} \quad (3.14)$$

називатимемо *нормою* функції $\varphi_n(x)$.

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$ і може бути подана у вигляді суми ряду Фур'є за функціями ортогональної системи (3.11) тобто

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots, \quad (3.15)$$

де c_0, c_1, $\ldots, c_n$, $\ldots$ − коефіцієнти Фур'є. Для їх обчислення припустимо, що ряди

$$f(x)\cdot\varphi_n(x) = c_0\varphi_0(x)\varphi_n(x) + c_1\varphi_1(x)\varphi_n(x) + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x)\varphi_n(x) + c_n\varphi_n^2(x) +$$
$$+ c_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(x) + \cdots,\quad n=0,1,2,\ldots \quad (3.16)$$

(результат множення рівності (3.15) на функцію $\varphi_n(x)$) можна почленно інтегрувати на відрізку $[a,b]$. Тоді, на основі (3.12), після такого інтегрування маємо

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi_n(x)\,dx = c_n\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Тому

$$c_n = \frac{\int\limits_a^b f(x)\cdot\varphi_n(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\cdot\varphi_n(x)dx}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n = 0,1,2,... \tag{3.17}$$

Надалі коефіцієнти c_n з (3.17) називатимемо *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$ за системою (3.11), а відповідний ряд (3.15) — *рядом Фур'є за цією системою.*

Допоки не встановлено, що ряд Фур'є дійсно збігається до функції $f(x)$ будемо писати

$$f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots \tag{3.18}$$

Якщо функції системи (3.11) неперервні на відрізку $[a,b]$ і ряд в правій частині (3.15) збігається рівномірно, то цей ряд [12] є рядом Фур'є для функції $f(x)$.

Приклади найпростіших ортогональних систем

Приклад 3.5.1. Система

$1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx, ...$ ортогональнана на відрізку $[0,\pi]$. Дійсно, $\int\limits_0^\pi \cos nx dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^\pi = 0, \quad n = 1,2,3,...,$ що означає ортогональність функцій $\cos nx$ і 1. Далі,

$$\int\limits_0^\pi \cos nx\cdot cosmxdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \left[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right]dx =$$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]\Bigg|_0^\pi = 0, \quad n \neq m,$ що й доводить ортогональність системи 3.11.

Приклад 3.5.2. Система $\sin x,\ \sin 2x,\ ...,\ \sin nx,\ ...$ ортогональнана на відрізку $[0,\pi]$. Дійсно,

$$\int_0^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[cos(n+m)x-\cos(n-m)x\right]dx=0,\quad n\neq m.$$

Приклад 3.5.3. Система $\sin x,\ \sin 3x,\ \sin 5x,\ ...,\ \sin(2n+1)x,\ ...$ ортогональнана на відрізку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Дійсно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)x\cdot\sin(2m+1)x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos 2(n-m)x-\cos 2(n+m+1)x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(n-m)x}{2(n-m)}-\frac{\sin 2(n+m+1)x}{2(n+m+1)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=0,\quad n\neq m,$$

$$n,m=0,1,2,3,\ldots$$

Приклад 3.5.4. Система $1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ ...,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ ...$ ортогональнана на відрізку $[0,l]$. Дійсно, аналогічно, як і для системи 3.11, маємо

$$\int_0^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\left|\begin{matrix}\frac{\pi x}{l}=t, & dx=\frac{l}{\pi}dt,\\ x=0\Rightarrow t=0, & x=l\Rightarrow t=\pi\end{matrix}\right|=\frac{l}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nt dt=0,\quad n=1,2,3,\ldots;$$

$$\int_0^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\left|\begin{matrix}\frac{\pi x}{l}=t, & dx=\frac{l}{\pi}dt,\\ x=0\Rightarrow t=0, & x=l\Rightarrow t=\pi\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{l}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(n+m)t+\cos(n-m)t\right]dt=0,\quad n\neq m$$

і ортогональність системи доведена.

Приклад 3.5.5. Система

$\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \sin\frac{2\pi x}{l}, \quad \sin\frac{3\pi x}{l}, \quad ..., \quad \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad ...$ ортогональнана на відрізку $[0,l]$.

Як і для системи 3.14, доведення цього факту проводимо з допомогою підстановки $\frac{\pi x}{l}=t$ при обчисленні відповідних інтегралів.

Перелік таких простих ортогональних систем можна збільшити. Зауважимо лише, що в застосуваннях зустрічаються ортогональні системи для функцій більш складної природи, ніж тригонометричні. Це, в свою чергу, призводить до необхідності дещо модифікувати поняття ортогональності. Така модифікація розглянута в наступному параграфі.

3.5.2. Ортогональність з вагою

Визначення 5.2.1. Нескінченна система дійсних функцій

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad ..., \quad \varphi_n(x), \quad ... \tag{3.19}$$

називається ортогональною на відрізку $[a,b]$ вагою $r(x)>0$, якщо

$$\int_a^b \varphi_n(x)\cdot\varphi_m(x)r(x)dx=0, \quad n\neq m, \quad n=0,1,2,..., \quad m=0,1,2,... \tag{3.20}$$

Аналогічно, як для 3.11, завжди будемо припускати, що

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)r(x)dx\neq 0, \quad n=0,1,2,... \tag{3.21}$$

Величину

$$\|\varphi_n\|_r=\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)r(x)dx} \tag{3.22}$$

називатимемо нормою функції $\varphi_n(x)$.

Подальші аналогії — зрозумілі. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $[a,b]$ і може бути подана у вигляді суми ряду Фур'є за функціями системи (3.19)

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi\ (x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots \qquad (3.23)$$

Коефіцієнти Фур'є $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$, обчислюються за формулами, аналогічними до формул (3.17)

$$c_n=\frac{\int_a^b f(x)\cdot\varphi_n(x)r(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)r(x)dx}=\frac{\int_a^b f(x)\cdot\varphi_n(x)r(x)dx}{\|\varphi_n\|_r^2},\quad n=0,1,2,\ldots \qquad (3.24)$$

Розглянемо приклад, де природним чином з'являються ортогональні з вагою системи функцій.

При дослідженні процесів теплообміну всередині твердої кулі радіуса l виникає така задача: знайти ненульові розв'язки (так звані власні функції) диференціального рівняння

$$\left(x^2y'\right)'+\lambda^2x^2y=0 \qquad (3.25)$$

за умов:

$$y(0)=0, \qquad (3.26)$$

$$y(l)<\infty. \qquad (3.27)$$

Тут $\lambda-$ параметр. Ті його значення, при яких існують ненульові розв'язки задачі (3.25) — (3.27) називаються *власними значеннями* цієї задачі, а сама задача (3.25) — (3.27) називається *задачею на власні значення.*

Покажемо спочатку, що функції $\frac{\sin\lambda x}{x}$ і $\frac{\cos\lambda x}{x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (3.25). Перевіримо, наприклад, функцію $\frac{\sin\lambda x}{x}$.

Маємо

$$x^2\left(\frac{\sin\lambda x}{x}\right)' = x^2\,\frac{\lambda x\cos\lambda x-\sin\lambda x}{x^2} = \lambda x\cos\lambda x-\sin\lambda x,$$

$$\left(x^2\left(\frac{\sin\lambda x}{x}\right)'\right)' + \lambda^2 x^2\left(\frac{\sin\lambda x}{x}\right) = \left(\lambda x\cos\lambda x-\sin\lambda x\right)' + \lambda^2 x^2\left(\frac{\sin\lambda x}{x}\right) =$$

$$= \lambda\cos\lambda x-\lambda^2 x\sin\lambda x-\lambda\cos\lambda x+\lambda^2 x^2\left(\frac{\sin\lambda x}{x}\right) =$$

$$= -\lambda^2 x\sin\lambda x+\lambda^2 x\sin\lambda x = 0.$$

Аналогічно переконуємось, що функція $\dfrac{\cos\lambda x}{x}$ також справджує рівняння (3.25), однак цей розв'язок необхідно відкинути, бо він суперечить умові (3.27). Отже, загальний розв'язок (3.25) обмежений при $x=0,$ є функція $\dfrac{c\sin\lambda x}{x}$, де $c-$ довільна стала. З умови (3.26) випливає, що $\dfrac{c\sin\lambda l}{l}=0.$

Слід зауважити, що $c\neq 0,$ інакше ми отримали б розв'язок , який тотожно рівний нулеві і нам не цікавий. Отже, приходимо до рівняння

$$\sin\lambda l = 0, \tag{3.28}$$

яке називається *характеристичним рівнянням*. Рівняння (3.28) має безліч розв'язків $\lambda_n\cdot l = n\cdot\pi,\ \ n=1,2,3,...,$ звідки отримаємо безліч *власних значень* відповідно

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{l}. \tag{3.29}$$

Власним значенням (3.29) відповідає нескінченна система *власних функцій*

$$\frac{c\sin\frac{\pi x}{l}}{x},\quad \frac{c\sin\frac{2\pi x}{l}}{x},\quad ...,\quad \frac{c\sin\frac{n\pi x}{l}}{x},\quad .... \tag{3.30}$$

Покажемо, що система функцій (3.30) є ортогональною з вагою $r(x) \equiv x^2$ на відрізку $[0,l]$. Дійсно,

$$\int_0^l c\frac{\sin\frac{m\pi x}{l}}{x}\cdot c\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{x}\cdot x^2 dx = c^2\int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} \dfrac{\pi x}{l} = t, & dx = \dfrac{l}{\pi}dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, & x = l \Rightarrow t = \pi \end{array} \right| =$$

$$= \frac{c^2 l}{\pi}\int_0^l \sin mt\cdot\sin ntdt = 0, \quad m \neq n, \quad m = 1,2,..., \quad n = 1,2,...,$$

що випливає негайно з прикладу 3.5.2.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Розклад деяких елементарних функцій в ряд Маклорена

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty; \infty)$.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in (-\infty; \infty)$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in (-\infty; \infty)$.

4. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots +$
$+ \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n, m \in R, \; x \in (-1;1).$

5. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1;1)$.

6. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $x \in (-1;1]$.

7. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$
$x \in [-1;1]$.

Додаток 2. Таблиця деяких значень тригонометричних функцій

Функція	Аргумент (x)					
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin*x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos*x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tg*x*	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
ctg*x*	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞

Додаток 3. Таблиця похідних елементарних функцій

$$c' = 0$$

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Додаток 4. Таблиця невизначених інтегралів

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + c$$

Список літератури

1. Васильченко І. П. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник.Ч.2. К.: Либідь, 1992. 256 с.

2. Дубовик В. П. Вища математика: навч. Посібник. К.: АСК., 2001. 648 с.

3. Дубовик В. П. Вища математика: збірник задач. К.: АСК., 2001. 479 с.

4. Кузик А. Д. Вища математика: навч. посібник. Ч. 1. Л.: ЛДУ БЖД, 2014. 400 с.

5. Кузик А. Д. Вища математика: навч. посібник. Ч. 2 . Л.: ЛДУ БЖД, 2014. 200 с.

6. Кулініч Г. Л. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник.Ч.1. К.: Либідь, 1992. 288 с.

7. Овчинников П. П. Вища математика.Навч. посіб. Ч. 1, 2. К.: Техніка. 2000.

8. Овчинников П. П. Вища математика: Збірник задач. Ч. 1, 2. К.: Техніка. 2000.

9. Рудавський Ю. К. Теорія рядів. Навч. Посібник. Л.: Видав. Націон. університету «Львівська політехніка», 2001. 76 с.

10. Толстов Г. П. Ряды Фурье. Изд. «Наука». 1980. 392 с.

11. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Ч. 1, 2. К.: “Вища школа”. 1978.

Навчальне видання

Державна служба України з надзвичайних ситуацій

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Тацій Роман Мар'янович
Трусевич Оксана Мирославівна

РЯДИ

Навчальний посібник

За загальною редакцією доктора фізико–математичних наук, професора Р.М. Тація

Присвячено світлій пам'яті професора Михайла СУХОРОЛЬСЬКОГО

Літературний редактор **Галина Падик**
Комп'ютерна верстка **Андрій Беседа**

Підписано до друку 2024 р.
Формат 60×84/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 6.8