

д-р физ.-мат. наук, профессор **Таций Р.М.** / prof. **Tacy R.M.**, Ph.D.<sup>1</sup>  
**Пазен О.Ю.** / **Pazen O.Yu.**

Przyjęty/Accepted/Принята: 09.12.2014;

Zrecenzowany/Reviewed/Рецензирована: 09.11.2015;

Opublikowany/Published/Опубликована: 31.12.2015;

## Расчет стационарного температурного поля в многослойной плите с учетом внутренних источников тепла при условиях неидеального теплового контакта между слоями<sup>2</sup>

Calculation of a Stationary Temperature Field in a Multi-Layered Panel with due regard to Internal Heat Sources Containing Non-Ideal Thermal Links Between Layers

Obliczenie stacjonarnego pola temperatury w wielowarstwowej płycie z uwzględnieniem wewnętrznych źródeł ciepła w warunkach nieidealnego kontaktu termicznego między warstwami

### АННОТАЦИЯ

**Цель:** В статье рассмотрена задача о распределении стационарного температурного поля в многослойной плите при наличии как распределенных, так и сосредоточенных внутренних источников тепла с учетом неидеального теплового контакта между слоями.

**Введение:** Задачи исследования температурных полей в многослойных конструкциях не теряют своей актуальности, поскольку такие конструкции используются, например, в строительной промышленности. Под действием высоких температур возникает угроза их разрушения, что связано с появлением, в процессе нагрева, больших температурных напряжений. Известно, что вычисления таких напряжений возможно лишь после решения соответствующих задач теплопроводности. В большинстве работ, посвященных определению температурных полей в многослойных структурах, исследование таких задач проводилось без учета источников тепла, при этом использовалась методика решения последовательных задач сопряжения. При количестве слоев  $n > 3$  объем проводимых при этом вычислений катастрофически возрастает. Кроме того, используется процедура дифференцирования коэффициентов квазидифференциальных уравнений, что неизбежно приводит к проблеме умножения обобщенных функций. Такая процедура вовсе не является обязательной, и ее легко избежать на пути использования концепции квазипроизвольных.

**Методология:** При постановке задачи коэффициент теплопроводности и интенсивность внутренних источников тепла записываются в виде сплатнов с помощью характеристических функций полуинтервалов, а учет интенсивностей сосредоточенных источников проводится с помощью  $\delta$ -функций Дирака путем внесения их в правые части соответствующего квазидифференциального уравнения (КДУ). К такому КДУ прибавляются известные условия сопряжения и начальные условия, к которым, однозначно могут быть сведены любые двухточечные (краевые) условия. Далее, с использованием концепции квазипроизвольных, поставленная задача сводится к эквивалентной задаче Коши для соответствующих систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

**Выводы:** В данной работе в замкнутом виде получено конструктивное решение задачи о распределении стационарного температурного поля в многослойной плите с учетом как распределенных, так и сосредоточенных внутренних источников тепла при условиях существования неидеального теплового контакта между слоями. Приведен пример расчета температурного поля в восьмислойной плите при различных вариантах теплового контакта между слоями, а также одновременным либо неодновременным наличием распределенных и сосредоточенных источников. Исходя из физического смысла, соответствующее квазидифференциальное уравнение записывалось в декартовой системе координат, однако представленный здесь метод решения без каких-либо принципиальных трудностей распространяется на подобные задачи с использованием цилиндрической и сферической систем координат.

<sup>1</sup> Львовский государственной университет безопасности жизнедеятельности; Украина / Lviv State University of Life Safety; ldubsh@mns.gov.ua;

<sup>2</sup> Процентное соотношение участия в подготовке статьи / Percentage contribution: Tacy R.M. – 50%, Pazen O.Yu – 50%;

**Ключевые слова:** температура, плотность теплового потока, многослойная плита, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием

**Вид статьи:** оригинальная научная работа

## ABSTRACT

**Aim:** The article examines the issue of a stationary temperature field distribution for a multi-layered panel, in the presence of both dispersed and concentrated internal heat sources, taking into account imperfect heat transfer conditions between individual layers.

**Introduction:** Testing of temperature fields for multi-layered structures continues to be a target of interest for many studies, because structures of this type have many applications in the construction industry. High temperatures pose a threat of structural damage associated with the emergence of significant thermal stress during the heating process. It is commonly known, that the computation of this stress is only possible by solving appropriate heat conductivity equations. Many scientific papers are devoted to the determination of temperature fields in multi-layer structures. Majority of these studies do not take into account thermal sources or the application of coupled equation methods. When the number of layers becomes  $n > 3$  the allotted time to, and volume of calculations increases dramatically. Moreover, a procedure for deriving the coefficient for partial-differential equations inevitably leads to the problem of multiplicity in generalised distributions. This study established that such a procedure is not necessary, and can be substituted by applying a quasi-derived concept.

**Methodology:** At the equation formulation stage, the coefficient of thermal conductivity and intensity of internal sources of heat were recorded as splines using characteristic functions of half-length intervals and inclusion of the intensity of concentrated sources is accomplished by using the Dirac  $\delta$ -function, which is introduced on the right hand side of the corresponding quasi differential equation (QDE). To such an equation are added known stress conditions and starting position, and further augmented by discretionary two-point boundary conditions. Subsequently, with the aid of the quasi-derived concept, the described equation is linked with the Cauchy equation of equivalence for appropriate arrangement of differential equations concerning impulses.

**Conclusions:** The study identifies a solution to the equation dealing with the issue of a stationary temperature field distribution for a multi-layered panel, by taking account of dispersed as well as concentrated sources of heat produced in imperfect heat transfer conditions between layers. The paper articulates an example of temperature field calculations for an eight layered panel, which is exposed to different thermal influences between layers as well as simultaneous or non concurrent sources of dispersed and concentrated heat. Based on assumptions from physics, appropriate differential equations were identified for the Cartesian coordinate arrangements. However, the proposed method can be adopted, without difficulty, to similar exercises involving cylindrical or spherical coordinate arrangements.

**Keywords:** temperature, heat flux, quasi-derived, multi-layer panels, the Cauchy matrix, the Dirac delta function, differential equations concerning impulses

**Type of article:** original scientific article

## ABSTRAKT

**Cel:** W artykule omówiono zagadnienie równania rozkładu stacjonarnego pola temperatury w wielowarstwowej płycie przy obecności zarówno rozłożonych, jak i skupionych wewnętrznych źródeł ciepła z uwzględnieniem nieidealnego kontaktu termicznego między warstwami.

**Wprowadzenie:** Badanie pól temperatury w wielowarstwowym konstrukcjach jest wciąż aktualne, ponieważ konstrukcje tego typu wykorzystywane są na przykład w budownictwie. Wysokie temperatury stwarzają zagrożenie zniszczenia konstrukcji, wskutek pojawienia się znacznych naprężeń cieplnych w związku z procesem nagrzewania. Powszechnie wiadomo, że wyliczenie takich naprężeń możliwe jest tylko poprzez rozwiązanie odpowiednich równań przewodnictwa cieplnego. Zagadnieniom określania pól temperatury w wielowarstwowym strukturach poświęconych jest wiele prac. W większości tych prac rozwiązanie takich zadań odbywało się bez uwzględnienia źródeł ciepła, przy czym używano metodę równań sprzężonych. Przy liczbie warstw równej  $n > 3$  objętość przeprowadzanych obliczeń dramatycznie wzrasta. Ponadto wykorzystywana jest procedura różniczkowania współczynników równań quasi-różniczkowych, co prowadzi do problemu zwielokrotnienia funkcji uogólnionych. Taka procedura nie jest konieczna i łatwo ją zastąpić koncepcją quasi-pochodnych.

**Metodologia:** Podczas formułowania zadania współczynnik przewodzenia ciepła i intensywność wewnętrznych źródeł ciepła zapisywane były w postaci splajnów za pomocą charakterystycznych funkcji przedziałów, a uwzględnienia intensywności skupionych źródeł dokonywano z wykorzystaniem funkcji Diraca ( $\delta$ ) poprzez prowadzenie po prawej stronie odpowiedniego równania quasi-różniczkowego. Do takiego równania dodawane są znane warunki naprężenia i warunki początkowe, do których, jednoznacznie można sprowadzić dowolne dwupunktowe warunki brzegowe. Następnie z wykorzystaniem koncepcji quasi-pochodnych przedstawione zadanie sprowadza się do ekwiwalentnego zagadnienia Cauchy'ego dla odpowiednich systemów równań różniczkowych z oddziaływaniem impulsowym.

**Wnioski:** W danym opracowaniu otrzymano rozwiązanie równania rozkładu stacjonarnego pola temperatury w płycie wielowarstwowej z uwzględnieniem zarówno rozłożonych, jak i skupionych źródeł ciepła w warunkach nieidealnego kontaktu cieplnego (termicznego) między warstwami. Podano przykład obliczenia pola temperatury w ośmiowarstwowej płycie poddawanej różnym kontaktom cieplnym między warstwami, jak również równoczesnym lub nierównoczesnym rozłożonym i skupionym źródłem ciepła. Bazując na założeniach fizyki, odpowiednie równanie różniczkowe zapisywane było w kartezjańskim układzie współrzędnych, jednak przedstawiona metoda bez większych trudności może znaleźć zastosowanie w podobnych zadaniach z użyciem cylindrycznych lub sferycznych układów współrzędnych.

**Слова ключевые:** температура, гęстоść струмения ciepła, płyta wielowarstwowa, równania różniczkowe z oddziaływaniem impulsowym  
**Тип артыкулу:** oryginalny артыкул naukowy

## 1. Введение

Рассматривается задача о распределении температурного поля в  $n$ -слойной плите, разделена на  $n$  слоев различной толщины плоскостями  $x = x_i, i = 0, n$ , причем  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ . Предполагается, что температура распространяется только в направлении оси  $Ox$ , так, что задача является одномерной.

Предполагается также, что каждый слой наделен своим коэффициентом теплопроводности и внутренним распределенным источником тепла. На границах слоев (кроме внутреннего и внешнего) предполагается наличие сосредоточенных источников тепла и выполнения условий неидеального теплового контакта. Будем считать, что в некоторой точке  $x = x_m, (0 \leq m \leq n)$  известны («измерены») температура и тепловой поток, а температуру и тепловой поток в каждой точке промежутка  $[x_0, x_n]$  необходимо найти. Как следует из работ [1–6], поставленная задача сводится к решению квазидифференциального уравнения

$$\left( \left( \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i \right) t' \right)' = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i, \quad (1)$$

при условиях сопряжения

$$\begin{cases} t_{i+1}(x_i) - t_i(x_i) = \frac{1}{\alpha_i} t_i^{[1]}(x_i), \\ t_{i+1}^{[1]}(x_i) - t_i^{[1]}(x_i) = s_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $t_i(x)$ ,  $t_i^{[1]} \stackrel{df}{=} \lambda_i t_i'(x)$  – температура и квазипроизводная на  $[x_i, x_{i+1})$ .

Замечание: Выражение  $t_i^{[1]} = \lambda_i t_i'$  принято называть квазипроизводной [4]. Очевидно что  $t_i^{[1]} \stackrel{df}{=} -q_i$ , где  $q_i$  – плотность теплового потока на промежутке  $[x_i, x_{i+1})$  [5–6].

$t(x) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i(x) \theta_i$ ,  $t^{[1]}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot t_i'(x) \theta_i$ ,  $\theta_i$  – характеристическая функция полуоткрытого промежутка  $[x_i, x_{i+1})$ ,

то есть  $\theta_i = \begin{cases} 1, & \tilde{\delta} \in [\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_{i+1}) \\ 0, & \tilde{\delta} \notin [\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_{i+1}) \end{cases}$ ;  $\lambda_i > 0$  – коэффициент теплопроводности на промежутке  $[x_i, x_{i+1})$ ;  $\delta_i(x - x_i)$  – функция Дирака с носителем в точке  $x = x_i$ ;  $r_i, s_i$  – действительные числа, характеризующие интенсивности распределенных и сосредоточенных источников тепла в соответствии.

К этому следует добавить начальные условия

$$\begin{cases} t(x_m) = t^m, \\ t^{[1]}(x_m) = t^{[1]m} \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

## 2. Результат

### 2.1. Сведение к системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Введем векторы:

$$\bar{T} = (t, t^{[1]})^T, \quad \bar{T}_i = (t_i, t_i^{[1]})^T, \quad \bar{R}_i = (0, r_i)^T, \quad \bar{S}_i = (0, s_i)^T, \quad \bar{P}_m = \bar{T}(x_m) \stackrel{df}{=} (t_m, t_m^{[1]})^T, \quad i = \overline{0, n-1}$$

$$\text{и матрицы: } A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Тогда задача (1), (2), (3) сводится к решению эквивалентной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [6]:

$$\bar{T}' = \left( \sum_{i=0}^{n-1} C_i \theta_i \right) \cdot \bar{T} + \bar{R}_i, \quad (4)$$

$$\bar{T}_i(x_i) - \bar{T}_{i-1}(x_i) = A_i \cdot \bar{T}_{i-1}(x_i) + \bar{S}_i, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (5)$$

при начальном условии

$$\bar{T}(x_m) = \bar{P}_m. \quad (6)$$

Под решением системы (4), (5) понимаем кусочно-абсолютную непрерывную справа вектор-функцию  $\bar{T}(x)$ , удовлетворяющую системе (4) почти везде, а в точках  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  условиям скачков (5).

## 2.2. Структура решения задачи (4), (5), (6)

На промежутке  $[x_i, x_{i+1})$ ,  $m \leq i \leq n-1$ , рассмотрим систему

$$\bar{Y}'_i = C_i \cdot \bar{Y}_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (7)$$

которую будем называть определяющей.

Будем считать известной матрицу-функцию Коши  $B_i(x, s)$  этой системы, обладающую следующими свойствами [4]:

1.  $B_i(x, s)$  по переменной  $x$  является решением матричного уравнения;

$$\frac{\partial B(x, s)}{\partial x} = C_i \cdot B_i(x, s);$$

2.  $B_i(x, x) = E$ , где  $E$  – единичная матрица;

3.  $\forall x_1, x_2, x_3 \in [x_i, x_{i+1})$  выполняется равенство  $B(x_3, x_2) \cdot B(x_2, x_1) = B(x_3, x_1)$ ;

4.  $B_i^{-1}(x, s) = B_i(s, x)$ .

Решение  $\bar{Y}_i(x)$  соответствующей неоднородной системы на промежутке  $[x_i, x_{i+1})$

$$\bar{Y}'_i = C_i \cdot \bar{Y}_i + \bar{R}_i, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (8)$$

будем искать в виде

$$\bar{Y}_i(x) = B_i(x, x_i) \cdot \bar{P}_i + \int_{x_i}^x B_i(x, s) \cdot \bar{R}_i(s) ds, \quad (9)$$

где  $\bar{P}_i$  – пока что неизвестный вектор. Подставляя в (9)  $x = x_i$ , получаем, что

$$\bar{P}_i = \bar{Y}_i(x_i) = \bar{Y}^i. \quad (10)$$

В частности,  $\bar{P}_m = \bar{Y}^m$ , где  $\bar{Y}^m$  определенный начальным условием (6).

Аналогично, на промежутке  $[x_{i+1}, x_{i+2})$  имеем

$$\bar{Y}_{i+1}(x) = B_{i+1}(x, x_{i+1}) \cdot \bar{P}_{i+1} + \int_{x_{i+1}}^x B_{i+1}(x, s) \cdot \bar{R}_{i+1}(s) ds. \quad (11)$$

В точке  $x = x_{i+1}$  должно выполняться условие сопряжения (5), то есть

$$\bar{Y}_{i+1}(x_{i+1}) - \bar{Y}_i(x_{i+1}) = A_{i+1} \cdot \bar{Y}_i(x_{i+1}) + \bar{S}_{i+1}. \quad (12)$$

Применение условия (12) к равенствам (9) и (10) приводит к рекуррентному соотношению

$$\bar{P}_{i+1} = (E + A_{i+1}) \left[ B_i(x_{i+1}, x_i) \cdot \bar{P}_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} B_i(x_{i+1}, s) \bar{R}_i(s) ds \right] + \bar{S}_{i+1}. \quad (13)$$

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{A}_k \stackrel{df}{=} E + A_k, \quad k = \overline{1, n-1};$$

$$B(x_p, x_q) \stackrel{df}{=} \tilde{A}_p \cdot B_{p-1}(x_p, x_{p-1}) \cdot \tilde{A}_{p-1} \cdot B_{p-2}(x_{p-1}, x_{p-2}) \cdots \tilde{A}_q \cdot B_{q-1}(x_q, x_{q-1}), \quad B(x_p, x_p) \stackrel{df}{=} E; \quad (14)$$

$$\bar{Z}_j \stackrel{df}{=} \tilde{A}_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_j, s) \bar{R}_{j-1}(s) ds + \bar{S}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \bar{S}_n = 0, \quad \bar{Z}_0 \stackrel{df}{=} 0. \quad (15)$$

На основе соотношения (13) и обозначений (15) для произвольного  $k > 0$  методом математической индукции по индексу  $k$  получаем соотношения

$$\bar{P}_{m+k} = B(x_{m+k}, x_m) \cdot \bar{P}^m + \sum_{i=1}^k B(x_{m+k}, x_{m+i}) \cdot \bar{Z}_{m+i}, \quad (16)$$

которое позволяет найти начальный вектор справа точки  $x = x_m$ .

Вместо этого, считая вектор  $\bar{P}_{m+k}$  известным, находим из (16)

$$\bar{P}_m = B^{-1}(x_{m+k}, x_m) \left[ \bar{P}_{m+k} - \sum_{i=1}^k B(x_{m+k}, x_{m+i}) \cdot \bar{Z}_{m+i} \right] \quad (17)$$

для нахождения начального вектора слева от точки  $x = x_{m+k}$ . Отметим, что при этом требуется существование  $B^{-1}(x_{m+k}, x_m)$ .

### 3. Решение исходной задачи

Чтобы решить задачу (4), (5), (6) на каждом из промежутков  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  необходимо вычислить все компоненты правой части формулы (9). Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$B_i(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

На основе обозначений (14), методом математической индукции устанавливаем, что

$$B(x_p, x_q) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=0}^{p-q-1} \left( \frac{x_{q+j+1} - x_{q+j}}{\lambda_{q+j}} + \frac{1}{\alpha_{q+j+1}} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Подставляя в (18) последовательно  $p = m+k$ ,  $q = m$  та  $p = m+k$ ,  $q = m+i$ , получаем, что

$$B(x_{m+k}, x_m) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{x_{m+j+1} - x_{m+j}}{\lambda_{m+j}} + \frac{1}{\alpha_{m+j+1}} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$B(x_{m+k}, x_{m+i}) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=0}^{k-i-1} \left( \frac{x_{m+i+j+1} - x_{m+i+j}}{\lambda_{m+i+j}} + \frac{1}{\alpha_{m+i+j+1}} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Нужно подчеркнуть, что поскольку  $\det B(x_{m+k}, x_m) = 1$ , то  $B^{-1}(x_{m+k}, x_m)$  всегда существует, причем

$$B^{-1}(x_{m+k}, x_m) = \begin{pmatrix} 1 & -\sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{x_{m+j+1} - x_{m+j}}{\lambda_{m+j}} + \frac{1}{\alpha_{m+j+1}} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Вычислим еще выражения для  $\bar{Z}_{m+i}$  та  $B(x_{m+k}, x_{m+i}) \cdot \bar{Z}_{m+i}$  (здесь не приводятся элементарные промежуточные вычисления):

$$\bar{Z}_{m+i} = \tilde{A}_{m+i} \int_{x_{m+i-1}}^{x_{m+i}} B_{m+i-1}(x_{m+i}, s) \bar{R}_{m+i-1}(s) ds + \bar{S}_{m+i} = \begin{pmatrix} r_{m+i-1}(x_{m+i} - x_{m+i-1}) \left( \frac{x_{m+i} - x_{m+i-1}}{2\lambda_{m+i-1}} + \frac{1}{\alpha_{m+i}} \right) \\ r_{m+i-1}(x_{m+i} - x_{m+i-1}) + s_{m+i} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$B(x_{m+k}, x_{m+i}) \cdot \bar{Z}_{m+i} = \begin{pmatrix} r_{m+i-1}(x_{m+i} - x_{m+i-1}) \left( \frac{x_{m+i} - x_{m+i-1}}{2\lambda_{m+i-1}} + \frac{1}{\alpha_{m+i}} \right) + (r_{m+i-1}(x_{m+i} - x_{m+i-1}) + s_{m+i}) \times \\ \times \sum_{j=0}^{k-i-1} \left( \frac{x_{m+i+j+1} - x_{m+i+j}}{\lambda_{m+i+j}} + \frac{1}{\alpha_{m+i+j+1}} \right) \\ r_{m+i-1}(x_{m+i} - x_{m+i-1}) + s_{m+i} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Формулы (18)–(23) исчерпывающе и однозначно описывают структуру решения исходной задачи на произвольном промежутке  $[x_i, x_{i+1}] \subset [x_0, x_n]$ .

### 3.1. Пример

Восьмислойная плоская стенка состоит из известковой штукатурки –  $l_0 = 3\text{см}$ ,  $\lambda_0 = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , красного кирпича –  $l_1 = 24\text{см}$ ,  $\lambda_1 = 0,455 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , силикатного кирпича –  $l_2 = 12\text{см}$ ,  $\lambda_2 = 0,79 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , пенобетона –  $l_3 = 18\text{см}$ ,  $\lambda_3 = 0,14 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , сухого песка –  $l_4 = 10\text{см}$ ,  $\lambda_4 = 0,35 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , гипсоплиты –  $l_5 = 20\text{см}$ ,  $\lambda_5 = 0,35 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , шлакобетона –  $l_6 = 10\text{см}$ ,  $\lambda_6 = 0,58 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , известковой штукатурки –  $l_7 = 3\text{см}$ ,  $\lambda_7 = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ . Здесь очевидно, что  $x_0 = 0\text{м}$ ,  $x_1 = 0,03\text{м}$ ,  $x_2 = 0,27\text{м}$ ,  $x_3 = 0,39\text{м}$ ,  $x_4 = 0,57\text{м}$ ,  $x_5 = 0,67\text{м}$ ,  $x_6 = 0,87\text{м}$ ,  $x_7 = 0,97\text{м}$ ,  $x_8 = 1\text{м}$ . В слоях стенки существуют *внутренние* ( $r_k$ ) распределенные источники тепла  $r_0 = -80 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_1 = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_2 = -120 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_3 = -130 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_4 = -140 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_5 = -120 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_6 = -130 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_7 = -130 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ , а между слоями стенки возникают *точечные* ( $s_k$ ) источники тепла  $s_1 = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ,  $s_2 = -30 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ,  $s_3 = 70 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ,  $s_4 = -60 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ,  $s_5 = -80 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ,  $s_6 = -90 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ,  $s_7 = -110 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ,  $s_8 = 0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ . Кроме того, между слоями существуют неидеальные тепловые контакты. Коэффициенты теплообмена на границах слоев соответственно равны  $\alpha_1 = 110 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ,  $\alpha_2 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ,  $\alpha_3 = 120 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ,  $\alpha_4 = 220 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ,  $\alpha_5 = 270 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ,  $\alpha_6 = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ,  $\alpha_7 = 240 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ . Необходимо определить распределение температурного поля в каждом слое в случае, когда известна температура и тепловой поток в точке  $x_4$   $\bar{T}_4(x_4) = \begin{pmatrix} t_4(x_4) = 547,07^\circ\text{C} \\ t_4^{[1]}(x_4) = -380,96 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{pmatrix}$ .

### 3.2. Решение

Для получения значения вектора  $\bar{T}_5(x_5)$ , справа от точки  $x_4$ , используем рекуррентное соотношение (16):

$$\begin{aligned} \bar{T}_5(x_5) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_5 - x_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\alpha_5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_4(x_4) \\ t_4^{[1]}(x_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_4(x_5 - x_4) \cdot \left( \frac{x_5 - x_4}{2 \cdot \lambda_4} + \frac{1}{\alpha_5} \right) \\ r_4 \cdot (x_5 - x_4) + s_5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,67 - 0,57}{0,35} + \frac{1}{270} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 547,07 \\ -380,96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -140 \cdot (0,67 - 0,57) \cdot \left( \frac{0,67 - 0,57}{2 \cdot 0,35} + \frac{1}{270} \right) \\ -140 \cdot (0,67 - 0,57) + (-80) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 434,76^\circ\text{C} \\ -474,96 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для получения значения вектора  $\bar{T}_3(x_3)$ , слева от точки  $x_4$ , используем рекуррентное соотношение (17):

$$\begin{aligned} \bar{T}_3(x_3) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_4 - x_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} t_4(x_4) \\ t_4^{[1]}(x_4) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_3(x_4 - x_3) \cdot \left( \frac{x_4 - x_3}{2 \cdot \lambda_3} + \frac{1}{\alpha_4} \right) \\ r_3 \cdot (x_4 - x_3) + s_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,57 - 0,39}{0,14} + \frac{1}{220} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 547,07 \\ -380,96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -130 \cdot (0,57 - 0,39) \cdot \left( \frac{0,57 - 0,39}{2 \cdot 0,14} + \frac{1}{220} \right) \\ -130 \cdot (0,57 - 0,39) + (-60) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 946,15^\circ\text{C} \\ -297,56 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для определения распределения температурного поля на промежутке  $[x_4, x_5)$  используем (9):

$$\bar{T}_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_4}{\lambda_4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_4(x_4) \\ t_4^{[1]}(x_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_4 \cdot (x-x_4)^2}{2 \cdot \lambda_4} \\ r_4 \cdot (x-x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-0,57}{0,35} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 547,07 \\ -380,96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-140 \cdot (x-0,57)^2}{2 \cdot 0,35} \\ -140 \cdot (x-0,57) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200x^2 - 860,46x + 1102,51 \\ -140x - 301,16 \end{pmatrix}$$

Проводя аналогичные расчеты, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(x_0) &= \begin{pmatrix} 1200^\circ\text{C} \\ -380,36 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix}, \bar{T}_0(x) = \begin{pmatrix} -57,14x^2 - 543,37x + 1200 \\ -80x - 380,36 \end{pmatrix}, \bar{T}_0(x_1) = \begin{pmatrix} 1183,65^\circ\text{C} \\ -382,76 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_1(x_1) &= \begin{pmatrix} 1180,17^\circ\text{C} \\ -332,76 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix}, \bar{T}_1(x) = \begin{pmatrix} 43,96x^2 - 733,98x + 1202,15 \\ 40x - 333,96 \end{pmatrix}, \bar{T}_1(x_2) = \begin{pmatrix} 1007,18^\circ\text{C} \\ -323,16 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_2(x_2) &= \begin{pmatrix} 1003,95^\circ\text{C} \\ -353,16 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix}, \bar{T}_2(x) = \begin{pmatrix} -75,95x^2 - 406,03x + 1119,11 \\ -120x - 320,76 \end{pmatrix}, \bar{T}_2(x_3) = \begin{pmatrix} 949,21^\circ\text{C} \\ -367,56 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_3(x_3) &= \begin{pmatrix} 946,15^\circ\text{C} \\ -297,56 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix}, \bar{T}_3(x) = \begin{pmatrix} -464,29x^2 - 1763,29x + 1704,44 \\ -130x - 246,86 \end{pmatrix}, \bar{T}_3(x_4) = \begin{pmatrix} 548,53^\circ\text{C} \\ -320,96 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_4(x_4) &= \begin{pmatrix} 547,07^\circ\text{C} \\ -380,96 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix}, \bar{T}_4(x) = \begin{pmatrix} -200x^2 - 860,46x + 1102,51 \\ -140x - 301,16 \end{pmatrix}, \bar{T}_4(x_5) = \begin{pmatrix} 436,22^\circ\text{C} \\ -394,96 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_5(x_5) &= \begin{pmatrix} 434,76^\circ\text{C} \\ -474,96 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix}, \bar{T}_5(x) = \begin{pmatrix} -171,43x^2 - 1127,31x + 1267,01 \\ -120x - 394,56 \end{pmatrix}, \bar{T}_5(x_6) = \begin{pmatrix} 156,49^\circ\text{C} \\ -498,96 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_6(x_6) &= \begin{pmatrix} 153,17^\circ\text{C} \\ -588,96 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix}, \bar{T}_6(x) = \begin{pmatrix} -112,07x^2 - 820,45x + 951,78 \\ -130x - 475,86 \end{pmatrix}, \bar{T}_6(x_7) = \begin{pmatrix} 50,5^\circ\text{C} \\ -601,96 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_7(x_7) &= \begin{pmatrix} 47,99^\circ\text{C} \\ -711,96 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix}, \bar{T}_7(x) = \begin{pmatrix} -92,86x^2 - 836,94x + 947,2 \\ -130x - 585,86 \end{pmatrix}, \bar{T}_7(x_8) = \begin{pmatrix} 17,4^\circ\text{C} \\ -715,86 \frac{Bm}{M^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

График распределения температурного поля восьмислойной плоской стенки изображен на рис. 1.

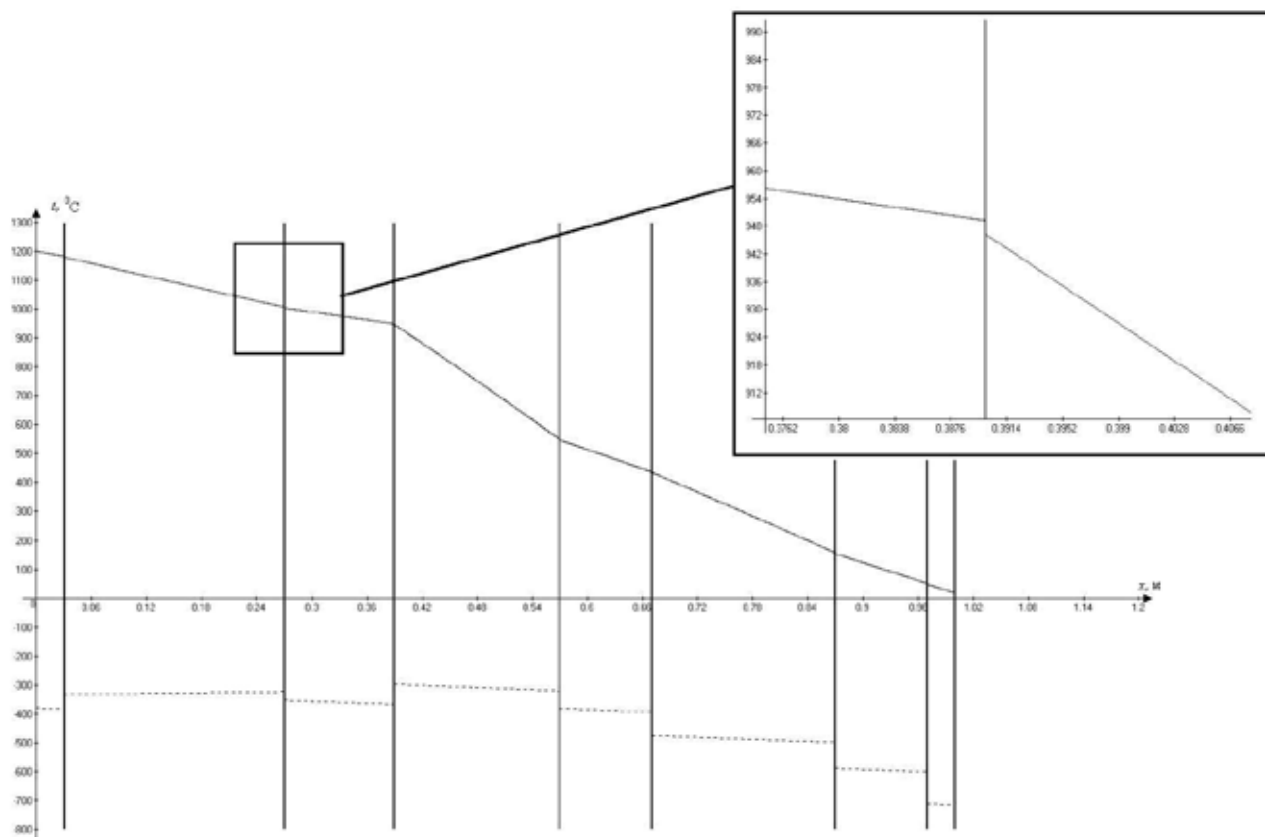


Рис. 1. График распределения температурного поля восьмислойной плоской стенки

Fig. 1. Temperature field distribution at the 8-layer flat wall

Источник: Собственная разработка.

Source: Own elaboration.

#### 4. Заключение

По мере усложнения математических моделей исследование процессов теплопередачи в многослойных структурах возникает проблема выбора соответствующего математического аппарата. В настоящей работе исходная задача сводится к системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, теория которой развита только в последние десятилетия. Это позволило решить поставленную задачу для многослойной плиты в замкнутом виде для произвольного количества слоев. Разработанная методика носит универсальный характер и применима, например, к расчету температурных полей в многослойных цилиндрах и шарах.

#### Литература

- [1] Tatiy R.M., Kusiy M.I., Pazen O.Yu., *Vyznachennay teploobminu v bagatosharovii neskinchennii plyti z diskretno-neperevnyim rozpodilom dzherela tepla*, „Pozhezhna bezpeka”, Issue 20, 2012, pp. 20-26.
- [2] Tatiy R.M., Pazen O.Yu., *Pryamyy metod rozrakhunku nestatsionarnogo temperaturnogo polya za umov pozhezhi*, „Pozhezhna bezpeka” Issue 26, 2015, pp. 156-166.
- [3] Tatiy R., Stasiuk M., Mazurenko V., Vlasi O., *Uzagalneni kvazidiferentsialni rivniannia*, Kolo, Drohobich 2011, 301.
- [4] Koshmarov Y.A., *Teplotekhnika*, М. ІКС „Академикнага”, 2006, 501.
- [5] Velichko L.D., Lozinskii R.Y., Semerak M.M., *Termodynamika ta teploperedacha v pozhezhnii spravi*, Soplom, Lviv 2011, 497.
- [6] Vlasii O.O., Stasiuk M.F., Tatiy R.M., *Struktura rozviazkiv uzagalnenykh system z kuskovo-zminnyimi koeffitsientamy*, „Lvivska politekhnika: Fiz.-mat. Nauky”, Issue 660, 2009, pp. 34–37.

\* \* \*

**Татий Роман Марьянович** – 1941 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики Львовского государственного университета безопасности жизнедеятельности. В 1970 г. окончил Бердянский государственный педагогический институт по специальности



«Математика». В 1978 году защитил кандидатскую диссертацию, а в 1995 году – докторскую диссертацию. Ученое звание профессора получил в 1997 году. Основные научные интересы: дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами и дискретно-непрерывные краевые задачи. Построение теории линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с мерами; Развитие концепции квазипоходных и построение линейной теории кдр.

**Пазен Олег Юрьевич** – 1989 года рождения, в 2012 году закончил Львовський государственной университет безопасности жизнедеятельности, с 2013 года по сегодняшний день адъюнкт Львовського государственного университета безопасности жизнедеятельности.