К.С. Ясінська
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***І.В. Шевчук,*** *викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ. ВИЗНАЧНИК ВАНДЕРМОНДА

У математиці визначники є основною складовою частиною теорії лінійних рівнянь та лінійних перетворень. Вони відіграють ключову роль у великій кількості областей, включаючи алгебру, геометрію, фізику та інженерію.

Визначник — це число, яке обчислюється для квадратної матриці відомими методами (зведення до трикутного вигляду,розкладу за рядками або стовпцями та ін.). Визначник використовують в різних сферах математики, таких як:

– розв'язання систем лінійних рівнянь: Визначники використовуються для визначення, чи має система лінійних рівнянь одиничне рішення, багато рішень або немає рішень взагалі. Це допомагає у вирішенні проблем у багатьох областях, включаючи фізику, економіку, та ін.
– інженерні застосування: Визначники використовуються в інженерних розрахунках, наприклад, у механіці, електротехніці та сигнальній обробці для визначення властивостей систем та розв'язання проблем.
– графічне моделювання: Визначники можуть бути використані для визначення площі та орієнтації паралелограму, утвореного векторами, що представляють різні фізичні величини.
– криптографія: Визначники використовуються у криптографії для генерації ключів та захисту інформації.
– моделювання та оптимізація: У наукових дослідженнях визначники використовуються для моделювання різноманітних систем та оптимізації їхніх характеристик.
– геометрія: Визначники можуть використовуватися для вирішення геометричних задач, таких як визначення площі трикутника за координатами його вершин або визначення орієнтації фігур.
– фінанси: У фінансовій аналітиці визначники можуть використовуватися для оцінки фінансового ризику та прийняття рішень щодо інвестицій.

Один із найцікавіших та важливих визначників у математиці — це визначник Вандермонда, названий на честь французького математика Александра-Теодора Вандермонда. Визначник Вандермонда — це визначник виду

$$.\Delta=\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \cdots & x_n^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j).$$

Такий визначник використовують у теорії рівнянь, апроксимації функцій, криптографії. Для прикладу складемо апроксимуючий поліном для довільних точок (2;3) (3;5) (4;10) з використанням визначника Вандермонда. Для цього використаємо вигляд інтерполяційного полінома Лагранжа

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

де a_0, a_1, a_2 – коефіцієнти, які нам потрібно знайти. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 = 3 \\ a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 = 5 \\ a_0 + a_1 4 + a_2 4^2 = 10 \end{cases},$$

визначник Δ якої буде визначником Вандермонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(4-3) = 2 \neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, система має єдиний розв’язок, який знайдемо методом Крамера.

$$a_0 = 8;\ a_1 = -5{,}5;\ a_2 = 1{,}5$$

Тоді шуканий поліном матиме вигляд

$$f(x) = 8 - 5{,}5x + 1{,}5x^2.$$

Отже, визначники, зокрема визначник Вандермонда, є потужним математичним інструментом з широким спектром застосувань. Вони допомагають вирішувати різноманітні завдання в математиці та її застосуваннях, забезпечуючи розв’язки для складних проблем та відкриваючи нові можливості для досліджень.

Література:

1. Матричні обчислення та задачі лінійної алгебри: навч. посібник / В. Б. Головко, М. І. Стоян, А. Г. Чорній та ін. – К.: ІПМ ім. В. М. Глушкова, 2007.
2. Задачі з лінійної алгебри / В. Б. Головко, М. В. Курносов, В. М. Глібовець, Л. І. Гнатюк та ін. - К.: ВПЦ «Київський університет», 2005.
3. Курс лінійної алгебри / С. М. Ніколенко, В. В. Бардадим, О. М. Мельник. – К.: Видавничий дім «Ін Юре», 2008.