С.І. Чемерис
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***І.В. Шевчук,*** *викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА ТА КОШІ У ПРИКЛАДНІЙ МАТЕМАТИЦІ

У курсі математичного аналізу одне з центральних місць займають теореми диференціального числення, до яких належать теореми Ролля, Лагранжа і Коші. В цих теоремах йдеться про те, що коли функція та її похідна першого порядку задовольняють певним умовам, то всередині інтервалу (a;b) знайдеться точка, в якій функція має певні властивості (про ці властивості йдеться в теоремі). Тому самі теореми називають теоремами про середнє.

За допомогою диференціального числення досліджуються властивості функцій, будуються їх графіки, вирішуються завдання на найбільше і найменше значення, обчислюються площі і об'єми геометричних фігур. Іншими словами, введення цього математичного апарату дозволяє розглянути ряд завдань, вирішити які не можна елементарними методами. Проте можливості методів математичного аналізу такими завданнями не вичерпується.

Багато традиційних елементарних завдань (доведення нерівностей, тотожностей, дослідження і розв'язання рівнянь та інші) ефективно вирішуються за допомогою похідної.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна на $(a;b)$ і $f(b)=f(a)$, то існує точка $c\in(a;b)$, де $f'(c)=0$. Дана теорема використовується для доведення існування коренів рівнянь та дає оцінку похибки для наближених значень похідної. Геометрично теорема Ролля означає, що серед усіх дотичних до графіка функції $y=f(x)$ знайдеться принаймні одна, паралельна осі *Ox*.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна в інтервалі $(a;b)$. Тоді існує точка c∈(a,b), що $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Теорема Лагранжа дає оцінку приросту $f(b)-f(a)$ функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ за допомогою її похідної в деякій точці $c\in(a;b)$. Дана теорема використовується для доведення властивостей функцій, для чисельного аналізу, для знаходження екстремальних значень функцій з обмеженнями.
Для прикладу розглянемо задачу: на дузі AB кривої $y=x^2+1$ знайти точку M, в якій дотична буде паралельна прямій AB , якщо A(-1;2) B(2;5).
За теоремою Лагранжа в інтервалі (-1;2) існуватиме точка c така, що

$$y'(c)=\frac{y(b)-y(a)}{b-a}\Rightarrow 2c=\frac{5-2}{2-(-1)}\Rightarrow c=\frac{1}{2}.$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{5}{4}.$$

Отже, шукана точка M $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$неперервні на відрізку $[a; b]$ та диференційовні в усіх внутрішніх точках цього проміжку і якщо, окрім того, $g(x) \neq 0$ скрізь у проміжку $[a; b]$, то на цьому проміжку знайдеться точка така $c \in (a; b)$, що має місце формула: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Теорема Коші про середнє є корисним інструментом для аналізу середніх значень функцій на певних проміжках, що знаходить своє застосування в багатьох галузях науки та техніки також вона використовується для доведення основної теореми інтегрального числення.

Дані теореми знайшли своє застосування в різних областях

Математика: Ці теореми є основою диференціального числення, яке використовується в багатьох галузях математики, таких як математичний аналіз, теорія чисел, геометрія.

Фізика: Теореми використовуються для опису та аналізу фізичних явищ, таких як поширення хвиль, теплообмін, електричні та магнітні поля.

Механіка: Теореми використовуються для аналізу траєкторій руху, знаходження швидкості та прискорення, а також для розв'язання задач про механічні коливання.

Економіка: Теореми використовуються для моделювання економічних систем, аналізу граничних величин та оптимізації ресурсів.

Обчислювальна математика: Теореми використовуються для розробки чисельних методів інтегрування, диференціювання та розв'язання диференціальних рівнянь.

Сучасність вимагає від людини прийняття швидких точних рішень, для яких необхідно проводити розрахунки та дослідження можливого результату. Використання основних теорем диференціального числення дозволяє вирішити цю проблему. Завдяки відомим поняттям і твердженням легко обчислити максимальні чи мінімальні витрати, гранично-допустимі значення певних величин та визначити різні економічні чи фізичні параметри.

Розглядаючи застосування основних теорем диференціального числення неможливо не помітити наскільки важливе дослідження функцій для прийняття оптимальних рішень, а також для вирішення інших економічних та фізичних задач.

Література:

1. Вища математика : збірник задач. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2006.- 648 с.
2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної: навчальний посібник / І. В. Абрамчук, Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко. – Вінниця : ВНТУ, 2010. - 152 с.
3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Функції однієї змінної. - К., Вища школа, 1990. – Ч.1.- 383 с.
4. Застосування похідної: Навч. посібник./ О.Є. Запорожченко, І.Л.Шинковська, І.П. Заєць – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 53 с.