

# Моделювання поперечних коливань пилкового вала

Л.Ф. Дзюба

кафедра прикладної математики і механіки  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна  
lidadz111@gmail.com

О.Ю. Чмир

кафедра прикладної математики і механіки  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна  
o\_chmyr@yahoo.com

О.В. Меншикова

навчально науковий інститут цивільного захисту  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна  
helga.menshikowa@gmail.com

## Modeling of transverse oscillations of the saw shaft

L.F. Dziuba

Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine  
lidadz111@gmail.com

O.Yu. Chmyr

Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine  
o\_chmyr@yahoo.com

O.V. Menshykova

Educational and Scientific Institute of Civil Protection  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine  
helga.menshikowa@gmail.com

*Анотація* – У роботі запропоновано динамічну модель пилкового вала круглопилкового верстата. Динамічна модель містить розрахункову схему вала та диференціальне рівняння четвертого порядку в частинних похідних для дослідження поперечних коливань. Для такої розрахункової схеми пилкового вала записано відповідні крайові умови. У крайових умовах враховано розміщення на вільному кінці другої ділянки вала круглої пилки. Розв'язок диференціального рівняння виконано методом розділення змінних. Отримано трансцендентне частотне рівняння. З розв'язування рівняння частот визначено частотні коефіцієнти поперечних коливань пилкового вала з урахуванням його конструкційних параметрів. Досліджено вплив довжин ділянок вала на величину частотних коефіцієнтів.

*Abstract* – The paper proposes a dynamic model of the saw shaft of a circular saw machine. The dynamic model contains the

*calculation scheme of the shaft and the fourth-order partial differential equation for the study of transverse vibrations. For such a calculation scheme of the saw shaft, the corresponding boundary conditions are recorded. In the boundary conditions, placement at the free end of the second section of the circular saw shaft is taken into account. The differential equation was solved by the method of separation of variables. The transcendental frequency equation is obtained. From the solution of the frequency equation, the frequency coefficients of the transverse oscillations of the saw shaft are determined, taking into account its design parameters. The influence of the lengths of the shaft sections on the magnitude of the frequency coefficients was studied.*

*Ключові слова:* пилковий вал, рівняння частот, частота власних коливань, частотні коефіцієнти, круга пилка.

**Keywords:** saw shaft, frequency equation, own oscillation frequency, frequency coefficients, circular saw.

## I. ВСТУП

За високих швидкостей різання та подавання пилковий вал деревообробного верстата з розміщеною на ньому круглою пилкою значного діаметра та маси зазнає зовнішнього збурення навіть від незначного ексцентриситету в підшипникових опорах, від динамічної нерівноваженості круглої пилки тощо. Дія зовнішніх чинників на пилковий вал викликає його поперечні коливання. Змінні навантаження, що виникають унаслідок коливань, знижують довговічність опор вала та впливають на точність різання деревини, збільшуючи ширину пропилю. Тому дослідження поперечних коливань пилкового вала є актуальним завданням.

Для виконання такого дослідження побудовано динамічну модель пилкового вала, яка містить розрахункову схему та диференціальне рівняння поперечних коливань з долученими крайовими умовами. Розрахункову схему пилкового вала (рис. 1) подано у вигляді двоопорного стержня 1 з діаметром  $d$  та осьовим моментом інерції  $I_z$ , на консольному кінці якого розміщено круглу пилку 2 з масою  $M$  та осьовим моментом інерції  $I$ . Довжину першої ділянки пилкового вала між його шарнірними опорами позначено  $l_1$ , довжину другої ділянки від опори до місця розміщення пилки позначено  $l_2$ .

## II. ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ, ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ, ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

Диференціальне рівняння поперечних коливань стержня відповідно до розрахункової схеми має вигляд [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де  $w = w(x,t)$  – поперечні переміщення точок осі стержня;  $E$  – модуль пружності першого роду матеріалу стержня;  $I_z$  – осьовий момент інерції перерізу круглого стержня;  $\rho$  – густина матеріалу стержня;  $A$  – площа поперечного перерізу стержня.

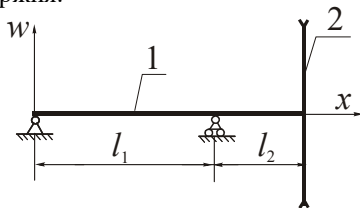


Рис. 1. Розрахункова схема пилкового вала.

Зважаючи на дві ділянки стержня, розв'язок диференціального рівняння (1) відповідно до методу розділення змінних подано у вигляді [1]:

$w_k(x,t) = \sum_{i=1}^n W_{k,i}(x) \cos \omega_i t$ ,  $k=1,2$ , де  $W_{k,i}(x)$  – амплітудні функції, які характеризують відхилення точок першої ( $k=1$ ) та другої ( $k=2$ ) ділянок стержня від положення рівноваги на  $i$ -ій резонансній частоті  $\omega_i$ .

Розв'язками рівняння (1) є функції форм коливань

$$W_{k,i}(x) = C_{k,1} \sin(\beta_i x) + C_{k,2} \cos(\beta_i x) + C_{k,3} \operatorname{sh}(\beta_i x) + C_{k,4} \operatorname{ch}(\beta_i x), \quad (2)$$

де  $\beta_i$  – частотний коефіцієнт,  $\beta_i^4 = \omega_i^2 \frac{\rho A}{EI_z}$ , ( $i = \overline{1,n}$ ),  $C_{k,j}$  – постійні інтегрування ( $k = \overline{1,2}$ ,  $j = \overline{1,4}$ ).

Відповідно до прийнятої розрахункової схеми (рис. 1), де відстань між опорами дорівнює  $l_1$ , у крайових умовах, що відповідають шарнірному обпиранню вала з консольною ділянкою, ураховано розміщення на консольній ділянці ( $x = l_1 + l_2$ ) круглої пилки з масою  $M$  та моментом інерції маси  $I$  відносно осі, що проходить через її центр та є перпендикулярною до площини диску пилки:

$$\begin{aligned} w_1(x,t)|_{x=0} &= 0; \quad EI_z \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad w_1(x,t)|_{x=l_1} = 0; \\ \frac{\partial w_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_1} &= \frac{\partial w_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_1}; \\ EI_z \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1} &= EI_z \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1}; \\ EI_z \frac{\partial^3 w_1(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l_1} &= EI_z \frac{\partial^3 w_2(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l_1} - \frac{Mg(l_1 + l_2)}{l_1}; \\ EI_z \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1+l_2} &= -I \frac{\partial^3 w_2(x,t)}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=l_1+l_2}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI_z \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=l_1+l_2} &= -M \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=l_1+l_2} \end{aligned} \quad (3)$$

Після урахування крайових умов (3) в (2) отримано:  $C_{1,2} = C_{1,4} = 0$  та систему лінійних рівнянь відносно невідомих  $C_{1,1}$ ,  $C_{1,3}$ ,  $C_{2,1}$ ,  $C_{2,2}$ ,  $C_{2,3}$ ,  $C_{2,4}$ . З рівності нулю визначника цієї системи побудовано трансцендентне рівняння частот

$$D_1(\beta)\beta^4 + D_2(\beta)\beta^3 + D_3(\beta)\beta + D_4(\beta) = 0, \quad (4)$$

де  $D_i(\beta)$  – вирази, що залежать від  $\beta$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

З розв'язування рівняння (4) визначено перші два частотні коефіцієнти поперечних коливань пилкового вала за різної довжини його ділянок. Один з розв'язків показано на рис. 2 за таких геометричних та фізико-механічних параметрів: діаметр пилкового вала –  $d = 60$  мм; маса та момент інерції пилкового диска  $M = 24$  кг,  $I = 2,98$  кг·м<sup>2</sup>; діаметр пилкового диска  $D = 1,3$  м; модуль пружності першого роду та густина матеріалу вала (сталь) –  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

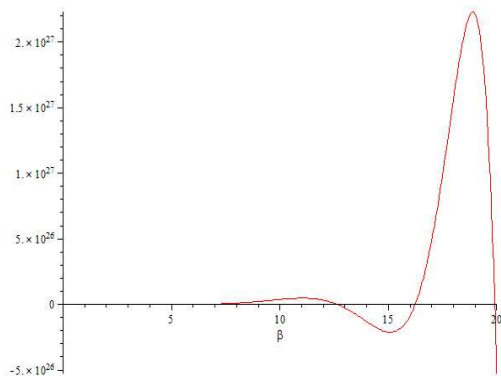


Рис. 2. Розв'язок трансцендентного рівняння частот.

#### Висновки

Розроблено динамічну модель поперечних коливань пилкового вала з урахуванням його розміщення на двох опорах і круглої пилки на консольному кінці вала; визначено величини частотних коефіцієнтів з урахуванням довжин ділянок вала та маси й моменту інерції круглої пилки; досліджено залежність частотних коефіцієнтів при поперечних коливаннях пилкового вала від довжин його ділянок.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Chelomey, V. N. (Ed.) (1978). *Vibrations in Engineering: Handbook*. (Vols. 1-6). Bolotin, V. V. (Ed.) Vol. 1. Oscillations of linear systems. Moscow: Mashinostroyeniye [in Russian].
- [2] Дзюба Л. Ф., Чмир О. Ю., Меньшикова О. В., Ліщинська Х. І. Моделювання поперечних коливань механізму різання круглопилкового верстата. Науковий вісник НЛТУ України, 2022, Т. 32, №4. – С. 55 - 59. <https://doi.org/10.36930/40320409>