

Львівський державний університет безпеки
життєдіяльності

О.О. Карабин
О.Ю. Чмир
О.В. Меньшикова

Серія
“Математична статистика”

МАТЕМАТИЧНІ
МЕТОДИ
В ПСИХОЛОГІЇ
ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Львів - 2010

О.О. Карабин, О.Ю. Чмир, О.В. Меньшикова

Математичні методи в психології. - Лабораторний практикум.

У практикумі наведено опис та настанови до виконання лабораторних робіт з математичних методів у психології. Кожна лабораторна робота супроводжується коротким теоретичним матеріалом, необхідним для її виконання. Подаються індивідуальні завдання для виконання самостійних робіт.

Рецензент: доцент кафедри теорії функцій та теорії ймовірностей Львівського національного університету імені Івана Франка Бордуляк М.Т.; професор кафедри управління інформаційною безпекою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності Грицюк Ю.І.

Рекомендований до друку рішенням Вченої ради Львівського державного університету безпеки життєдіяльності (протокол № 2 від 29.09.2010 року).

© 2010 О.О. Карабин, О.Ю. Чмир, О.В. Меньшикова

ЗМІСТ

Лабораторна робота № 1. Побудова розподілу частот.....	4
Лабораторна робота № 2. Побудова гістограм та обчислення числових характеристик вибірових сукупностей.....	11
Індивідуальні завдання №1.	19
Лабораторна робота № 3. Перевірка гіпотези про рівномірний закон розподілу випадкової величини.	26
Індивідуальні завдання № 2.	34
Лабораторна робота № 4. Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу випадкової величини.	35
Індивідуальні завдання №3.	38
Лабораторна робота № 5. Порівняння двох вибірок за рівнем досліджуваної ознаки, вимірної в порядковій або інтервальній шкалі.....	42
Лабораторна робота № 6. Встановлення зв'язку між ознаками, вимірними у номінальній шкалі.	47
Лабораторна робота № 7. Встановлення зв'язку між ознаками, вимірних за шкалою інтервалів або відношень.	50
Лабораторна робота № 8. Встановлення зв'язку між ознаками, вимірних за шкалою інтервалів або відношень у випадку нелінійної залежності.	55
Лабораторна робота № 9-10. Вивчення впливу на результативну ознаку двох і більше взаємозв'язаних факторних ознак.	58
Індивідуальні завдання №4.	67
Лабораторна робота № 11. Використання однофакторного дисперсійного аналізу у психологічних дослідженнях.	81
Індивідуальні завдання № 5.	88
Лабораторна робота № 12. Використання двофакторного дисперсійного аналізу у психологічних дослідженнях.	92
Деякі статистичні таблиці	102
Література	113

Лабораторна робота № 1. Побудова розподілу частот.

Мета: навчитись будувати статистичний розподіл частот.

Теоретичні відомості

Нехай з генеральної сукупності зроблена вибірка, причому значення x_1 досліджуваної ознаки зафіксовано n_1 разів, $x_2 - n_2$ разів, ..., $x_k - n_k$ разів.

Число $n = \sum_{i=1}^k n_i$ називається обсягом вибірки. Величини $x_i, i = \overline{1, n}$ називають

варіантами, а записану у порядку зростання послідовність варіант – *варіаційним рядом*. Число n_i називають *частотою варіанти* x_i , а значення

$$\omega_i = \frac{n_i}{n} - \text{її відносною частотою.}$$

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант і їхніх відносних частот.

Ламану з вершинами в точках з координатами $(x_i, \omega_i), i = \overline{1, k}$, називають *полігоном відносних частот*.

Позначимо через n_x кількість спостережень, за яких значення спостережуваної ознаки було меншим, ніж x . Величину n_x називають *нагромадженою* або *кумулятивною частотою* варіанти x_i .

Функцію

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

називають *емпіричною функцією розподілу* ознаки (або *функцією розподілу за вибіркою*). Функцію розподілу генеральної сукупності називають *теоретичною функцією розподілу*. Відмінність між емпіричною і теоретичною функціями розподілу полягає в тому, що теоретична функція розподілу $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$, а $F^*(x)$ – її відносну частоту. Однак, на підставі закону Бернуллі вважається, що за великих n функція $F^*(x)$ практично мало відрізняється від $F(x)$. Це дає змогу знаходити наближені значення числових характеристик розподілу випадкової величини (медіани, квантилей, математичного сподівання, стандартного відхилення та ін.), використовуючи при цьому емпіричну функцію розподілу.

Якщо досліджувана ознака розподілена неперервно, то область зміни її значень дроблять на декілька однакових проміжків, які називають *класами*. Ширину класу визначають за формулою

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

де k – кількість класів. Кількість класів і їхні межі вибираються так, щоб вони були зручними для розрахунків. Оптимальною для вибірки обсягом 80 - 150 елементів є кількість 8 - 12 класів.

Класи $(x_{i-1}; x_i]$ разом з частотами n_i потрапляння значень у кожен клас утворюють *інтервальний варіаційний ряд*.

Завдання: для вибірки середньотижневої заробітної плати 100 співробітникам фірми

- а) побудувати інтервальний статистичний розподіл частот;
- б) побудувати дискретний статистичний розподіл;
- в) побудувати розподіл відносних частот, накопичених частот та накопичених відносних частот.

338	348	304	314	326	314	324	304	342	308
336	304	302	298	314	314	320	321	322	321
312	323	336	338	312	312	364	356	362	302
322	310	334	324	362	362	304	366	298	304
381	368	304	292	368	368	340	328	316	322
302	314	292	296	342	321	322	290	332	298
296	298	324	322	338	352	326	318	304	332
360	312	331	338	331	304	316	332	282	342
342	322	324	324	325	302	328	354	330	316
334	350	334	323	324	332	340	324	314	326

Хід роботи

а) Побудувати інтервальний статистичний розподіл частот.

1. Відкриваємо середовище Excel і називаємо робочий лист1 – «Інтервальний розподіл».
2. Об'єднуємо комірки **A1:J1** і вводимо назву «**Вибірка середньотижневої заробітної плати 100 співробітникам**».
3. Вводимо у комірки **A3:J12** числові дані задачі.
4. Вводимо у комірку **A15** назву «Інтервали заробітної плати», а у комірки **A16:A26** відповідні інтервали: 280-289, 290-299, 300-309 ..., 380-389.
5. Вводимо у комірку **E15** назву «Частоти», а у комірку **G15** назву «Кінці інтервалів».
6. У комірках **G16:G26** вводимо числа, що відповідають кінцям інтервалів заробітної плати, тобто 289, 299, 309, ..., 389.
7. Виділяємо комірки **E16:E27** (на одну більше, ніж у стовпці «Кінці інтервалів»). Входимо в меню **Вставка** → **Функция** → **Статистические** → **ЧАСТОТА** (рис. 1.1).

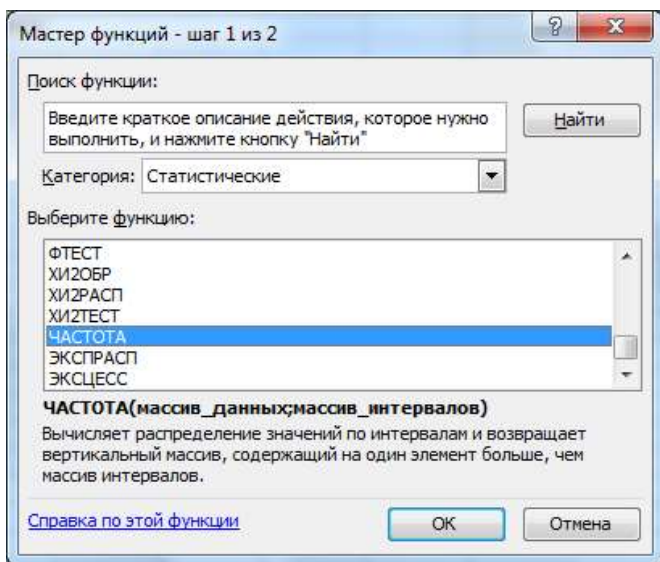


Рис. 1.1. Вибір статистичної функції «Частота»

У меню функції **ЧАСТОТА**, що з'явилося у вікні, вводимо адреси комірок: **Массив_данных** – комірки **A3:J12**; **Массив_интервалов** – комірки **G16:G26**. Натискаємо комбінацію клавіш **<Ctrl + Shift + Enter>** (в деяких інших версіях Excel – натискаємо клавішу **F2**, а потім комбінацію клавіш **Ctrl + Shift + Enter**). В результаті у комірках **E16:E26** отримаємо розподіл частот за інтервалами.

8. Стовпці «**Частоти**» і «**Кінці інтервалів**» пов'язані між собою. Це призводить до незручностей під час копіювання вмісту цих стовпців у інший робочий лист. Щоб їх позбутися, потрібно виділити і скопіювати комірки **A15:I27**, а потім зайти в меню **Правка** → **Специальная вставка** → **Значения**.
9. Копіюємо вміст комірок **A15:A26**, **E15:E26** в робочий лист 2, який називаємо «**Підсумки**», відповідно в комірки **A2:A13**, **B2:B13**.

б) Побудувати дискретний статистичний розподіл.

1. Відкриваємо новий робочий лист і називаємо його «**Дискретний розподіл**».
2. Вводимо у комірку **A1** назву «**Заробітна плата**», у комірки **A2:A101** копіюємо вміст таблиці «**Вибірка середньотижневої заробітної**»

плати 100 співробітникам» з робочого листа «Інтервальний розподіл».

3. Впорядковуємо за зростанням вміст комірок **A2:A101**, виділивши їх і застосувавши меню **Данные** → **Сортировка ...** → **По возрастанию**.
4. Вводимо у комірку **C1** назву «Інтервали», а у **E1** назву «Частота».
5. Стовець «Інтервали» заповнюємо натуральними числами від 282 до 381. Для зручності користуємось маркером заповнення. Для цього необхідно ввести числа 282, 283, 284 у комірки **C2, C3, C4**, відповідно, виділити стовець **C2:C4**, виставити курсор мишки в правий нижній кут виділеного стовпчика і потягнути його вниз лівою клавішею миші, поки не отримаємо число, що відповідає максимальній заробітній платі (381).
6. Виділяємо стовець **E2:E102** (на одну комірку більше, ніж у стовпці «Інтервали»). Входимо в меню **Вставка** → **Функция** → **Статистическая** → **ЧАСТОТА** (аналогічно як в пункті 7 попередньої задачі). У меню функції **ЧАСТОТА**, що з'явилося у вікні вводимо адреси комірок: **Массив_данных** – комірки **A2:A101**; **Массив_интервалов** – комірки **C2:C101**. Натискаємо комбінацію клавіш **<Ctrl + Shift + Enter>**. В стовпці **E2:E101** отримуємо результат.
7. Зауважимо, що в масиві «Частота» трапляється велика кількість 0, це означає, що серед чисел стовпця «Інтервали» є такі, яких немає в масиві «Заробітна плата», саме їм відповідають нульові частоти. Усунути ці числа можна за допомогою фільтрації даних. Виділяємо масив **E1:E102**. Заходимо в меню **Данные** → **Фильтр** → **Автофильтр**. Натискаємо на трикутничок, що з'явився в правому верхньому куті виділеного стовпчика. Вибраємо в меню, що з'явилося, опцію «Условия ...» і заповнюємо меню «**Пользовательский автофильтр**», а саме вибираємо **не равно 0** (рис. 1.2).
8. Проробляємо дії, аналогічні до дій пункту 8 попередньої задачі, і копіюємо вміст комірок **C2:C101, E2:E101** в робочий лист «Підсумки» в комірки **H3:H42, I3:I42** відповідно.

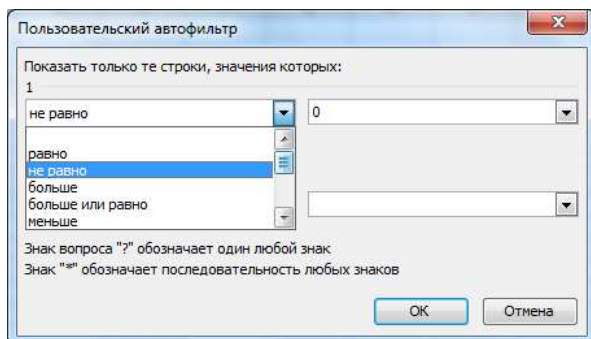


Рис. 1.2. Діалогове вікно вибору умови фільтру даних

в) Побудова розподілів відносних частот, накопичених частот та накопичених відносних частот.

1. Працюємо в робочому листі «Підсумки». Вводимо назви комірок: «Відносні частоти» – комірки **C2, J2**, «Накопичені частоти» – комірка **D2**, «Накопичені відносні частоти» – комірка **E2**. Для того, щоб текст повністю вмістився в комірку, змінюємо її висоту і ширину, а також ставимо маркер в опції **Формат** → **Ячейки** → **Вирівнювання** → **Переносить по словам**.
2. У комірці **J3** набираємо формулу = **I3/100** (рис. 1.3) і натискаємо клавішу **Enter**. Зауваження: 100 – це обсяг вибірки.

зар. пл.	Частоти	Відносні частоти
282	1	=I3/100
290	1	
292	2	
296	2	
298	4	
302	4	
304	8	
308	1	
310	1	
312	4	
314	6	
316	3	
318	1	
320	1	
321	3	
322	6	

Рис. 1.3. Побудова розподілу відносних частот

Ставимо курсор у правий нижній кут комірки **J3**; курсор змінює форму із стрілки на хрестик. Натискаємо ліву клавішу миші і, не відпускаючи її, протягуємо до кінця таблиці, тобто до **J42**. В результаті у стовпці **J** отримуємо ряд відносних частот.

3. Аналогічні дії виконуємо у стовпці **C3**.
4. Обчислимо накопичені частоти. Для цього скопіюємо вміст комірки **B3** в комірку **D3**. Введемо в комірку **D4** формулу: $=B4+D3$ (рис. 1.4) і натискаємо **Enter**. Робимо активною комірку **D4** і аналогічно, як і в пункті 2, відображаємо вміст формули на весь стовпець. У результаті виконання такої дії отримуємо розподіл накопичених частот.
5. Для отримання розподілу накопичених відносних частот проробляємо аналогічні дії із даними стовпців **C** та **E**.
6. Отримуємо підсумки обчислень (рис. 1.5).

	A	B	C	D
1				
2	зар. пл.	Частоти	Відносні частоти	Накопичені частоти
3	280-289	1	0,01	
4	290-299	9	0,09	$=B4+D3$
5	300-309	13	0,13	
6	310-319	15	0,15	
7	320-329	25	0,25	
8	330-339	16	0,16	
9	340-349	7	0,07	
10	350-359	4	0,04	
11	360-369	9	0,09	
12	370-379	0	0	
13	380-389	1	0,01	

Рис. 1.4. Обчислення накопичених частот

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	Зар. пл.	Частоти	Відносні частоти	Накопичені частоти	Накопичені відносні частоти			Зар. пл.	Частоти	Відносні частоти
3	280-289	1	0,01	1	0,01			282	1	0,01
4	290-299	9	0,09	10	0,1			290	1	0,01
5	300-309	13	0,13	23	0,23			292	2	0,02
6	310-319	15	0,15	38	0,38			296	2	0,02
7	320-329	25	0,25	63	0,63			298	4	0,04
8	330-339	16	0,16	79	0,79			302	4	0,04
9	340-349	7	0,07	86	0,86			304	8	0,08
10	350-359	4	0,04	90	0,9			308	1	0,01
11	360-369	9	0,09	99	0,99			310	1	0,01
12	370-379	0	0	99	0,99			312	4	0,04
13	380-389	1	0,01	100	1			314	6	0,06
14								316	3	0,03
15								318	1	0,01
16								320	1	0,01
17								321	3	0,03
18								322	6	0,06
19								323	2	0,02
20								324	7	0,07
21								325	1	0,01
22								326	3	0,03
23								328	2	0,02
24								330	1	0,01
25								331	2	0,02
26								332	4	0,04

Рис. 1.5. Підсумки побудови статистичних розподілів і обчислення частот

Лабораторна робота № 2. Побудова гістограм та обчислення числових характеристик вибірових сукупностей

Мета: навчитись будувати гістограму частот і відносних частот, обчислювати числові характеристики вибіркової сукупності.

Теоретичні відомості

Для того, щоб наочно мати уявлення про характер розподілу, застосовують графічне зображення рядів розподілу. Основними способами їх зображення є полігон частот, гістограма, кумулята.

Гістограму застосовують для зображення інтервальних варіаційних рядів. При її побудові на осі абсцис відкладають відрізки, які зображують інтервал. На кожному з відрізків будують прямокутник з висотою, яка дорівнює частоті, що відповідає інтервалу, поділеній на довжину інтервалу. В результаті площа фігури, що складається з прямокутників, дорівнює одиниці.

Полігон розподілу – це ламана лінія з вершинами в точках, координатами яких є варіанти (в інтервальних рядах середини інтервалів) і частоти, що відповідають цим варіантам. Полігон розподілу застосовують для зображення дискретних і інтервальних варіаційних рядів.

Кумулята – графічне зображення варіаційного ряду з накопиченими частотами (відносними частотами). Для її побудови на осі абсцис відкладають варіанти, а на осі ординат – накопичені частоти (відносні частоти). Кумулята має вигляд східчастої функції.

Основними числовими характеристиками вибірових сукупностей є вибірове середнє, вибірова дисперсія, вибірове середнє квадратичне відхилення.

Вибірковим середнім \bar{x}_g статистичного розподілу вибірки називається середнє арифметичне значення її варіант з урахуванням їх частот, тобто:

$$\bar{x}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i .$$

Вибірковою дисперсією D_g статистичного розподілу вибірки називають середнє арифметичне значення квадратів відхилень його варіант x_i від вибіркового середнього \bar{x}_g , тобто:

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_g)^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - (\bar{x}_g)^2 .$$

Дисперсія є мірою розсіювання випадкової величини відносно її середнього значення. Вимірність дисперсії дорівнює квадрату вимірності значень випадкової величини, що створює незручності у дослідженнях. Щоб їх усунути за характеристику розсіювання значень відносно середнього приймають вибірове середнє квадратичне відхилення, яке обчислюють за формулою:

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} .$$

Завдання: для вибірки середньотижневої заробітної плати 100 співробітникам фірми:

- побудувати гістограму частот;
- побудувати полігон частот;
- побудувати полігон накопичених частот;
- обчислити числові характеристики вибіркової сукупності.

338	348	304	314	326	314	324	304	342	308
336	304	302	298	314	314	320	321	322	321
312	323	336	338	312	312	364	356	362	302
322	310	334	324	362	362	304	366	298	304
381	368	304	292	368	368	340	328	316	322
302	314	292	296	342	321	322	290	332	298
296	298	324	322	338	352	326	318	304	332
360	312	331	338	331	304	316	332	282	342
342	322	324	324	325	302	328	354	330	316
334	350	334	323	324	332	340	324	314	326

Хід роботи

а) Побудувати гістограму частот.

- Відкриваємо робочий лист Excel і називаємо його «Гістограма».
- Вносимо дані задачі з ЛР №1, розбиваємо вибірку на інтервали і вводимо кінці інтервалів заробітної плати (рис. 2.1) (див. ЛР №1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Вибірka тижневої заробітної плати 100 співробітникам фірми											Кінці інтервалів	
2	338	348	304	314	326	314	324	304	342	308		289	
3	336	304	302	298	314	314	320	321	322	321		299	
4	312	323	336	338	312	312	364	356	362	302		309	
5	322	310	334	324	362	362	304	366	298	304		319	
6	381	368	304	292	368	368	340	328	316	322		329	
7	302	314	292	296	342	321	322	290	332	298		339	
8	296	298	324	322	338	352	326	318	304	332		349	
9	360	312	331	338	331	304	316	332	282	342		359	
10	342	322	324	324	325	302	328	354	330	316		369	
11	334	350	334	323	324	332	340	324	314	326		379	
12												389	
13													

Рис. 2.1. Таблиця числових даних до задачі

- Заходимо в меню **Сервіс** → **Аналіз даних** → **Гістограма**.
- У вікні з'явилося меню функції **Гістограма**, яке необхідно заповнити так, як це показано на рис. 2.2. **Входний інтервал** – це дані таблиці заробітної плати, **Інтервал карманов** – це дані стовпця

«Кінці інтервалів». Необхідно поставити позначку у віконечку **Вывод графики**, а також поставити позначку, куди вивести діаграму. В нашій роботі діаграму хочемо отримати в цьому ж робочому листі, тому ставимо позначку у віконечку **Выходной интервал**, і вводимо адресу комірки, до якої буде занесена гістограма. Заповнивши меню функції **Гистограмма**, натискаємо **ОК**.

- У полі екрану з'являється гістограма, яку необхідно відредагувати. Заберемо надпис **Гистограмма**. Для цього правою клавішею миші виділимо область надпису і видалимо його за допомогою клавіші **Delete**. Видалимо надпис легенди **Частота**. Для цього ставимо мишку на надпис, з'являється рамка з надписом «**Легенда**», натискаємо праву клавішу миші і в меню, що з'явилося, вибираємо опцію «**Очистить**» (рис. 2.3).

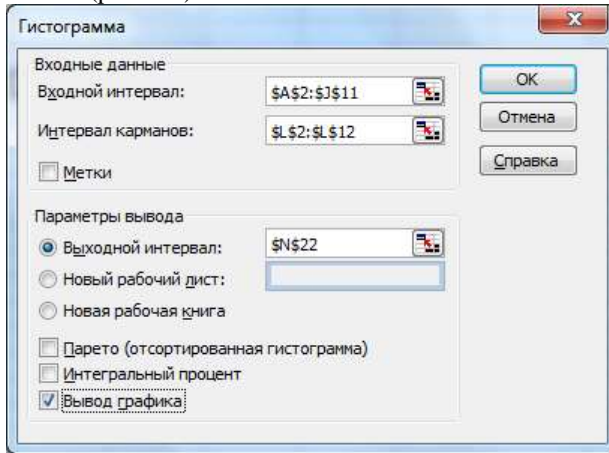


Рис. 2.2. Меню статистичної функції «Гистограмма»



Рис. 2.3. Редагування легенди гістограми

Змінимо напис **Карман** на напис **Заробітна плата**. Для цього виставимо курсор миші в поле напису і активізуємо його, двічі клацнувши лівою клавiшею миші, після чого введемо необхідний текст.

Знищимо щiлини між стовпцями гiстограми. Встановимо курсор на поле одного з прямокутників діаграми і натиснемо праву клавiшу миші. У меню, що з'явилося, вибираємо опцію «**Формат рядов данных**», а в ній опцію «**Параметры**». У вікні «**Ширина зазора**» встановлюємо значення **0**. У вікні меню бачимо потрібне зображення гiстограми і натискаємо <ОК>. Остаточний вигляд гiстограми зображено на рис. 2.4.

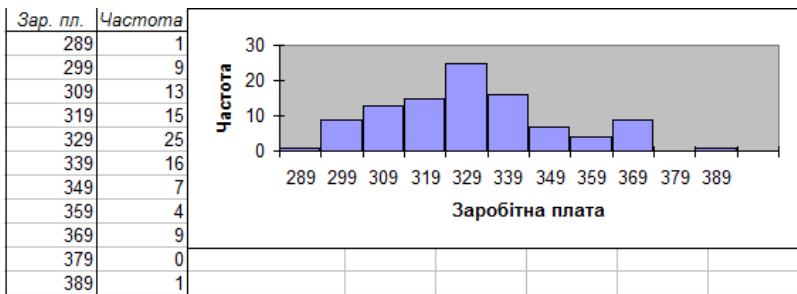


Рис. 2.4. Гiстограма частот

б) Побудувати полігон частот

1. Виконуємо кроки 3 та 4 послідовності дій із завдання **а**).
2. Виставляємо курсор миші в область діаграми і натискаємо її праву клавiшу. У меню, яке з'явилося, вибираємо опцію «**Тип даграммы...**», а в ньому – опції «**Стандартные**» та «**График**» (рис. 2.5). Натискаємо кнопку <ОК>.
3. Отримуємо діаграму полігону частот, яку необхідно відредагувати так, як це було зроблено у п. 5 завдання **а**). Після редагування діаграма набуває вигляду, показанного на рис. 2.6.

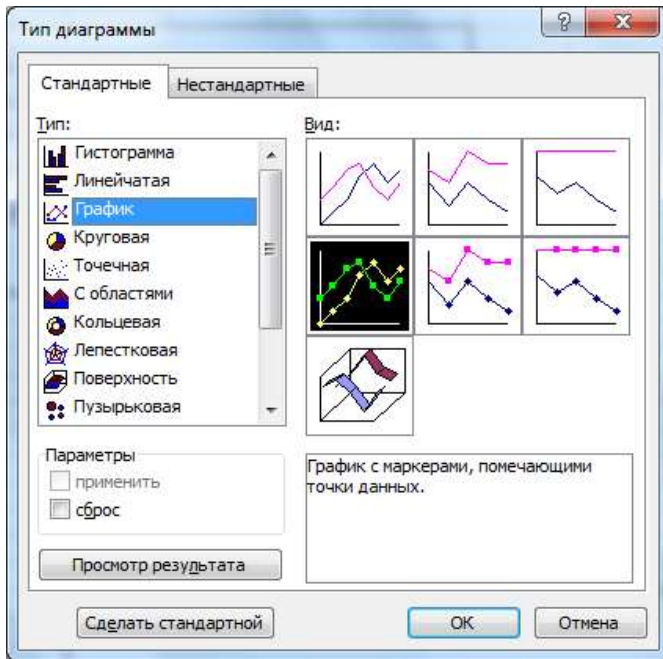


Рис. 2.5. Меню вибору типу діаграми

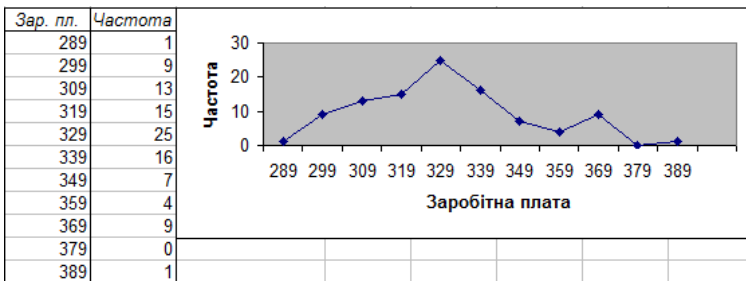


Рис. 2.6. Полігон частот

в) Побудувати полігон накопичених частот.

1. Виконуємо кроки 3 та 4 алгоритму із завдання **а)**, ставимо прапорець у вікні **Інтегральний процент (Cumulative Percentage)**. Отримуємо зображення графіка, яке вимагає редагування (рис. 2.7.)

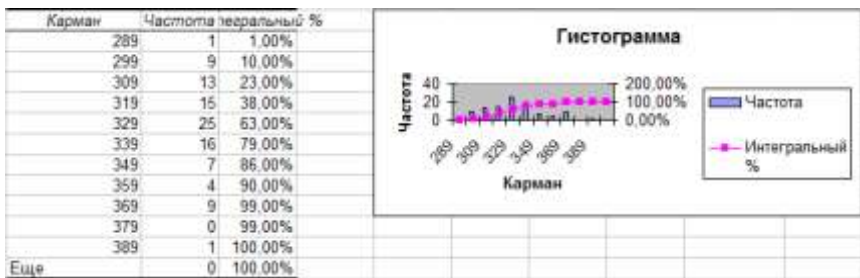


Рис. 2.7. Побудова полігону накопичених частот

На графіку одночасно зображені гістограма частот і полігон накопичених частот. Залишимо лише зображення полігону накопичених частот. Ставимо курсор миші в область діаграми і натискаємо праву клавішу. У меню, що з'явилось, вибираємо опцію «Исходные данные...», а в ньому вибираємо опцію «Ряд». У вікні «Ряд» вибираємо опцію «Частота» та натискаємо кнопку Удалить. Натискаємо ОК. (рис. 2.8).

2. На графіку залишається лише зображення полігону накопичених частот, який відредагуємо, як це описано в пункті 5 завдання а). Остаточний результат наведено на рис. 2.9.



Рис. 2.8. Видалення гістограми під час побудови полігону накопичених частот

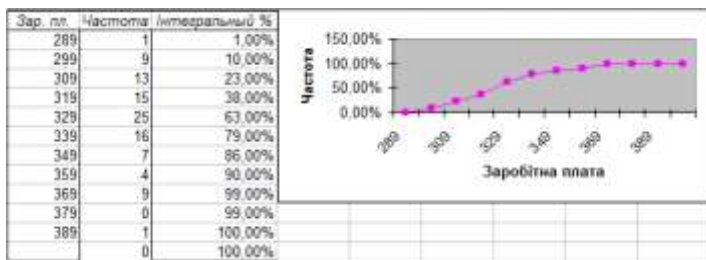


Рис. 2.9. Полігон накопичених частот

г) Обчислити числові характеристики вибіркової сукупності.

1. Відкриваємо новий робочий лист і називаємо його «**Числові характеристики**».
2. Копіюємо дані задачі з таблиці в комірки **A1:A100**.
3. Заходимо в меню **Сервис** → **Анализ данных** → **Описательная статистика**. Натискаємо **OK** і заповнюємо діалогове вікно так, як це показано на рис. 2.10. **Входной интервал** – комірки **A1:A100**, ставимо позначку на віконечку **Группирование: по столбцам**, вводимо адресу вихідного інтервала (комірка **C1**), ставимо позначки в опціях **Итоговая статистика** та **Уровень надежности**.

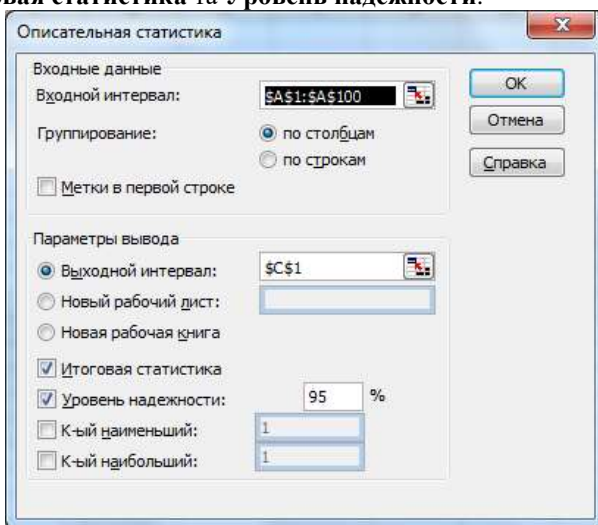


Рис. 2.10. Діалогове вікно описової статистики

Натискаємо ОК і отримуємо табличку з описовою статистикою. Для того, щоб було видно вміст таблички, розширюємо ширину стовпця С (рис. 2.11).

С	D
<i>Столбец1</i>	
Среднее	324,99
Стандартная ошибка	2,055468
Медиана	323,5
Мода	304
Стандартное отклонение	20,55468
Дисперсия выборки	422,4948
Эксцесс	-0,1061
Асимметричность	0,486063
Интервал	99
Минимум	282
Максимум	381
Сумма	32499
Счет	100
Уровень надежности(95,0%)	4,078494

Рис. 2.11. Описові статистики

4. Вводимо в комірки **C18:C23** такий текст:

Середня заробітна плата
 Середньоквадратичне відхилення
 Найчастіша заробітна плата
 Найвища заробітна плата
 Мінімальна заробітна плата
 Всього виплачено

5. Вводимо в комірки **D18:D23** відповідні наступні формули:

D18 = СРЗНАЧ(A1:A100).

D19 = СТАНДОТКЛОН(A1:A100).

D20 = МОДА(A1:A100).

D21 = МАКС(A1:A100).

D22 = МИН(A1:A100).

D23 = СУММ(A1:A100).

Отримуємо результати обчислень (рис. 2.12)

Середня заробітна плата	324,99
Середньоквадратичне відхилення	20,55468
Найчастіша заробітна плата	304
Найвища заробітна плата	381
Мінімальна заробітна плата	282
Всього виплачено	32499

Рис. 2.12. Результати обчислень описових статистик

Індивідуальні завдання №1

Для заданих вибірок виконати такі завдання.

- а) побудувати інтервальний статистичний розподіл частот;
- б) побудувати дискретний статистичний розподіл;
- в) побудувати розподіл відносних частот, накопичених частот та накопичених відносних частот.
- г) побудувати гістограму частот;
- д) побудувати полігон частот;
- е) побудувати полігон накопичених частот;
- є) обчислити числові характеристики вибіркової сукупності.

1. Проміжок часу (у секундах), витрачений кожним із 124 учнів сьомого класу на розв'язування задачі з фізики, становить:

52	62	69	129	75	65	11	41	22	27	52	46	106	14	49
73	84	73	47	81	193	119	87	17	24	55	37	56	62	131
69	66	47	60	76	71	91	104	61	59	55	31	52	61	45
53	42	47	53	25	48	87	85	30	40	85	49	54	24	52
33	51	49	42	54	30	53	32,8	58	37	42	38	28	23	24
28	40	41	29	39	28	30	25	30	23	23	35	32	34	21
39	10	23	22	42	27	39	39	46	60	102	22	44	90	53
98	67	49	142	71	30	41	144	50	28	28	27	38	40	35
53	40	158	135											

2. За одним із субтестів батареї Векслера на вибірці зі ста досліджуваних отримано такі суми балів:

15	20	14	13	10	9	24	17	11	16
12	15	16	5	15	15	7	9	25	23
20	16	14	17	21	15	10	19	22	25
18	16	10	20	24	11	15	15	17	15
10	11	22	22	22	19	17	20	14	11
14	12	24	16	9	23	13	11	18	17
18	23	22	19	23	26	19	14	22	19
17	21	21	18	16	20	21	15	23	16
15	24	18	14	18	12	20	16	15	20
22	23	16	15	14	5	20	22	20	22

3. У досліді з вивчення амплітудно-частотної характеристики руки людини-оператора значення амплітуд усталених коливань руки одного з досліджуваних становлять:

80	65	62	73	62	71	63	75	66	67	61	64	72	60	67
62	52	68	72	63	66	62	70	64	71	57	55	56	64	61
59	64	65	60	63	59	60	68	66	53	73	67	60	68	60
70	70	63	63	62	62	68	63	67	62	62	58	62	63	55
54	64	65	70	65	58	52	66	58	66	72	69	71	58	60
63	65	60	75	51	64	65	69	65	68	58	55	60	58	57
61	45	46	60	64	67	64	72	58	64	70	73	52	59	69

4. У досліді з вивчення амплітудно-частотної характеристики руки людини-оператора значення амплітуд усталених коливань руки одного з досліджуваних становлять:

56	55	60	54	59	71	63	55	55	58	66	62	82	54	74
55	62	75	62	70	64	63	65	70	65	56	58	56	65	62
62	60	63	68	64	60	71	61	62	55	51	44	73	52	66
62	60	57	60	58	62	58	52	62	61	61	67	60	53	50
42	57	51	66	51	56	55	56	54	53	41	55	54	58	51
58	71	65	62	65	73	66	55	68	62	60	67	57	62	62
49	59	48	52	54	58	62	62	51	62.					

5. Результати опитування групи студентів (80 осіб) за тестом Томаса поведінки в конфліктній ситуації (суперництво), мають такий вигляд:

6	4	4	0	4	3	4	0	8	3	1	2	0	4	0	9	4	0	3	12
2	5	8	0	7	8	3	12	0	0	1	5	5	1	10	2	10	11	3	1
1	1	1	11	10	4	4	7	1	0	3	3	8	1	6	1	6	6	4	9
0	3	5	4	0	1	2	8	5	4	3	2	6	1	8	0	7	1	4	1

6. Результати опитування групи студентів (80 осіб) за тестом Томаса поведінки в конфліктній ситуації (співробітництво), мають такий вигляд:

6	5	5	9	9	6	8	6	8	6	3	9	7	3	7	8	7	5	7	7
10	5	11	10	4	10	6	5	3	4	10	8	6	7	6	7	3	10	5	3
10	7	8	8	7	7	7	5	3	9	8	9	6	7	7	9	10	8	8	7
4	5	10	9	8	6	8	8	10	5	9	8	8	11	6	10	7	6	8	5

7. Результати опитування групи студентів (80 осіб) за тестом Томаса поведінки в конфліктній ситуації (компроміс), мають такий вигляд:

7	8	10	8	9	4	11	9	8	7	10	10	9	7	8	8	8	4	7	6
6	6	5	7	6	8	6	11	10	4	8	8	8	7	6	5	4	5	9	8
9	8	7	6	7	2	6	6	8	5	8	8	7	8	7	6	6	8	4	8
6	8	6	9	5	8	9	5	9	8	9	6	11	8	10	7	10	7	8	9

8. Результати опитування групи студентів (80 осіб) за тестом Томаса поведінки в конфліктній ситуації (уникнення) мають такий вигляд:

5	8	4	6	4	10	3	9	4	6	5	4	9	9	8	2	5	8	4	9
3	4	4	5	8	5	3	2	6	3	4	6	8	4	3	8	6	7	3	4
3	4	5	5	5	4	5	4	7	4	5	6	9	4	7	10	6	7	6	4
8	11	8	5	6	6	8	7	8	7	3	4	2	5	3	5	2	7	5	3

9. Результати опитування групи студентів (80 осіб) за тестом Томаса поведінки в конфліктній ситуації (приспосовання), мають такий вигляд:

9	5	3	4	10	4	3	6	11	4	4	4	9	7	8	10	4	8	8	8
2	8	3	4	6	8	4	6	5	8	8	7	11	10	9	7	6	3	4	3
5	8	10	10	6	2	11	7	5	8	7	5	9	1	4	2	6	5	5	4
9	2	2	8	6	7	2	6	3	9	4	3	7	7	6	8	7	4	4	7

10. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (конформізм), мають такий вигляд:

13	19	12	16	13	9	16	10	22	16	6	14	12	17	17	17
15	17	16	5	15	22	14	10	13	18	6	17	17	6	12	14
5	21	19	14	18	23	15	15	8	11	6	15	11	1	8	6
9	10	14	5	16	12	18	16	18	4	18	17	19	16	17	14
17	14	12	16	9	20	7	15	12	8	19	20				

11. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (алгоритмічна поведінка), мають такий вигляд:

16	14	15	17	15	15	17	15	18	14	18	20	15	17	18	12
16	25	20	11	19	18	15	16	15	23	15	12	17	20	20	14
12	14	16	16	22	19	20	17	18	17	19	14	17	17	14	15
17	19	14	17	16	17	21	18	19	16	20	19	23	20	14	20

19	14	18	22	15	16	18	25	18	19	13	12	14	11	13	19
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

12. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (нонконформізм), мають вигляд:

20	17	17	28	17	14	22	18	19	17	23	20	19	20	15	20
20	25	21	20	23	18	19	33	19	17	18	22	19	26	24	19
23	13	22	18	20	14	19	24	18	26	24	19	17	17	19	22
17	18	24	18	16	21	23	21	26	20	19	20	23	19	16	21
19	28	20	19	25	18	20	19	22	21	21	21	22	21	16	19
22	17	21	25												

13. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (свистична поведінка), мають такий вигляд:

22	22	16	24	20	15	24	18	24	23	21	14	18	19	21	21
16	21	21	18	15	19	24	23	22	24	15	19	16	18	18	17
23	16	17	16	16	14	16	20	20	20	21	13	16	16	17	17
21	22	17	18	19	18	16	17	22	15	23	23	17	23	24	17
19	27	22	14	22	20	21	21	22	23	19	17	13	18	15	15

14. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (спрямованість на відтворення), мають такий вигляд:

25	24	29	29	20	31	29	33	34	32	22	38	32	36	34	24
32	36	30	35	21	32	43	32	29	29	38	25	40	37	20	30
17	35	35	44	36	37	43	32	33	25	30	20	32	28	15	24
29	44	32	26	35	31	24	32	25	45	31	18	31	32	37	40
36	22	37	42	29	33	35	39	30	36	21	19	29	23	19	33

15. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (творча спрямованість), мають такий вигляд:

42	39	33	52	37	29	46	36	43	40	44	34	37	39	36	43
33	39	45	36	31	40	47	44	48	44	34	39	39	37	34	34
46	29	39	34	36	28	35	44	38	46	45	32	33	33	36	38
41	47	38	38	42	36	35	50	41	32	41	45	36	49	48	42
38	55	42	33	47	38	41	40	44	44	40	38	35	39	31	34

16. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (вік), мають такий вигляд:

35	32	33	47	31	35	28	46	35	28	32	34	36	35	35	27
36	23	61	43	57	36	47	59	38	45	40	53	50	53	55	38
37	37	37	41	49	36	42	30	45	44	29	41	36	34	43	38
40	27	39	37	35	33	48	33	29	58	35	36	33	40	37	37
31	34	46	52	32	33	40	36	47	31	35	25	45	27	30	44

17. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (стаж), мають такий вигляд:

12	12	11	21	12	15	7	23	14	4	20	15	17	15	15	3
17	4	40	24	34	16	23	37	14	24	21	31	31	36	36	16
20	17	17	22	26	15	23	10	23	24	9	23	14	14	20	16
19	7	19	15	15	12	26	14	8	40	16	15	13	17	18	17
12	14	17	31	13	12	12	18	29	12	15	6	23	7	10	21

18. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (конформізм), мають такий вигляд:

13	6	18	15	17	12	19	20	11	19	21	14	17	21	16	16
23	14	17	14	13	16	22	14	15	17	9	4	22	13	15	14
2	9	11	14	16	16	8	17	15	8	15	4	17	12	8	17
10	8	10	12	21	17	12	16	11	10	11	9	18	9	17	18
11	19	10	5	15	17	5	11	18	8	14	6	11	22	13	18

19. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (алгоритмічна поведінка), мають такий вигляд:

22	14	22	21	13	20	17	23	20	22	24	18	15	21	16	18
19	19	15	14	17	22	16	20	23	21	17	16	19	16	20	17
16	12	14	15	18	20	18	19	18	9	19	13	21	15	16	21
16	18	20	17	21	21	19	23	15	9	14	12	19	18	21	20
13	15	15	13	21	19	18	15	21	20	11	18	19	25	19	22

20. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (нонконформізм), мають такий вигляд:

20	20	21	17	22	20	22	25	22	22	23	20	22	20	19	27
13	20	19	18	19	15	17	18	23	19	23	19	19	22	16	20

20	23	18	18	21	24	17	18	22	18	19	16	12	24	23	27
21	22	24	21	21	27	19	24	26	19	23	21	26	18	23	23
20	26	25	21	14	23	17	15	10	16	26	24	19	21	15	21

21. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (евристична поведінка), мають такий вигляд:

20	24	25	15	23	22	15	22	20	19	21	19	17	16	10	23
15	17	19	21	19	18	15	19	29	23	19	15	18	21	11	22
23	21	21	16	17	23	19	20	20	15	20	20	12	22	20	28
21	18	19	22	21	22	19	24	28	19	18	19	21	19	26	25
21	23	23	19	15	15	19	11	19	17	22	19	18	20	20	14

22. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (спрямованість на відтворення), мають такий вигляд:

35	20	40	36	30	32	36	43	31	41	45	32	32	42	32	34
42	33	32	28	30	38	38	34	38	38	26	20	41	29	35	31
18	21	25	29	34	36	26	36	33	17	34	17	38	27	24	38
26	26	30	29	42	38	31	39	26	19	25	21	37	27	38	38
24	34	25	18	36	36	23	26	39	28	25	24	30	47	32	40

23. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (творча спрямованість), мають такий вигляд:

40	44	46	32	45	42	37	47	42	41	44	39	39	36	29	50
28	37	38	39	38	33	32	37	52	42	42	34	37	43	27	42
43	44	39	34	38	47	36	38	42	33	39	36	24	46	43	55
42	40	43	43	42	49	38	48	54	38	41	40	47	37	49	48
41	49	48	40	29	38	36	26	29	33	48	43	37	41	35	35

24. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (вік), мають такий вигляд:

33	31	49	40	30	59	47	50	33	60	55	61	53	57	25	24
43	38	46	30	44	24	48	43	34	35	28	30	49	36	28	40
46	38	34	36	41	37	28	47	64	30	35	39	38	34	40	51
44	36	51	59	56	59	52	54	63	51	53	37	53	37	37	30
30	34	44	25	34	41	51	37	48	36	44	57	35	47	49	41

25. Результати опитування групи вчителів стосовно творчої поведінки (стаж), мають такий вигляд:

14	16	21	23	9	35	25	23	15	40	35	44	27	44	5	16
24	19	27	8	24	3	28	14	14	11	9	9	24	13	4	20
26	16	12	17	21	18	5	25	43	5	15	19	18	11	17	28
17	13	29	40	30	40	32	33	45	30	12	13	20	12	15	9
8	14	21	5	14	19	20	12	22	19	22	38	12	25	25	14

26. Результати тестування групи молоді (64 чоловік) за шкалою, що характеризує рівень їх суспільно-політичної свідомості, мають такий вигляд:

6	7	7	6	8	6	5	7	5	8	7	7	6	5	6	6
5	7	7	7	6	5	6	6	5	7	6	9	8	6	7	4
4	7	6	7	6	7	7	5	6	7	6	6	9	6	6	5
6	5	7	7	7	6	6	8	5	7	9	7	6	6	6	5

27. Результати тестування групи молоді (64 чоловік) за шкалою, що характеризує рівень їх духовної зрілості, мають такий вигляд:

7	6	5	5	5	5	6	6	6	5	5	6	5	5	5	6
5	6	6	6	7	7	6	7	7	7	7	7	6	6	7	6
5	6	5	6	6	6	6	6	6	5	6	6	7	6	5	5
6	7	6	6	7	6	5	6	6	5	8	7	6	6	5	5

28. Результати тестування групи молоді (64 чоловік) за шкалою, що характеризує рівень їх емоційної зрілості, мають такий вигляд:

6	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	6	6	6	5	6	7	5	5	6	5	5	7	4
5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	4	5
5	6	6	6	5	6	7	5	5	6	5	5	7	4	5	5

Лабораторна робота № 3. Перевірка гіпотези про рівномірний закон розподілу випадкової величини

Мета: навчитись перевіряти статичні гіпотези щодо закону рівномірного розподілу випадкової величини.

Теоретичні відомості

Статистичною гіпотезою називають певне припущення про окремі властивості генеральної сукупності, що перевіряється на основі властивостей вибірки.

У математичній статистиці виділяють два основні типи статистичних гіпотез: гіпотези про закон розподілу ймовірності випадкової величини (ознаки генеральної сукупності) – **непараметричні статистичні гіпотези**; гіпотези про значення параметрів розподілу випадкової величини (ознаки генеральної сукупності) – **параметричні статистичні гіпотези**.

Основною (нульовою) гіпотезою називають висунуту гіпотезу, яку позначають H_0 .

Альтернативною гіпотезою називають гіпотезу, яка заперечує твердження, висловлене в нульовій гіпотезі. Її позначають H_a .

Статистичним критерієм називається випадкова величина K , за допомогою якого проводиться перевірка гіпотези. Значення випадкової величини K , яке обчислене на основі певної вибірки, називають **емпіричним (спостережуваним) значенням критерію** і позначають K_{emp} .

Сукупність значень критерію K (випадкової величини K), згідно з яким нульова гіпотеза приймається, називається **областю прийняття гіпотези**, а сукупність значень критерію K , згідно з яким гіпотеза відхиляється, називається **критичною областю**.

Якщо емпіричне (спостережуване) значення критерію K_{emp} належить критичній області, то нульову гіпотезу відхиляють, якщо K_{emp} попадає в область прийняття гіпотези, то нульову гіпотезу приймають.

Критична область відмежовується від області прийняття гіпотези точкою, яка називається критичною і позначається $k_{кр}$.

Перевірка статистичної гіпотези проводиться за таким планом:

1. Формулюють нульову гіпотезу H_0 , альтернативну гіпотезу H_1 і задають рівень значущості α для перевірки нульової гіпотези.
2. Визначають критерій K для перевірки гіпотези H_0 , який є випадковою величиною з відомим розподілом ймовірностей.
3. Визначають критичні області відносно даних критерію K та рівня значущості α . Для визначення критичної області достатньо знайти критичні точки $k_{кр}$.
4. Знаходять емпіричне (спостережуване) значення критерію K_{emp} на основі конкретної вибірки.

5. Приймають рішення: якщо емпіричне значення критерію $K_{емп}$ потрапляє в критичну область, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють; якщо ж значення $K_{емп}$ потрапляє в область прийняття гіпотези, то нульову гіпотезу H_0 приймають.

Критерії, які призначені для перевірки сформульованих гіпотез, називають *критеріями узгодженості*. Критерії узгодженості дають змогу відповідати на питання про те, чи розбіжність між емпіричними і теоретичними розподілами є настільки незначною, що вона може бути приписана впливу випадковості, чи ні.

Нехай дані вибірки згруповані і подані у вигляді дискретного або інтервального варіаційного ряду. Згідно з критерієм Пірсона, для перевірки гіпотези H_0 вводиться випадкова величина K :

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}, \quad (3.1)$$

де: m – кількість груп у статистичному розподілі вибірки; $n'_i = n \cdot p_i$ – теоретична частота; n_i – емпірична частота; p_i – імовірність того, що значення випадкової величини X належить до i -ої групи $[z_{i-1}, z_i)$, і вона розрахована за допомогою гіпотетичної функції розподілу $F(x)$ або густини розподілу $f(x)$,

$$p_i = F(z_i) - F(z_{i-1}) = \int_{z_{i-1}}^{z_i} f(x) dx \quad (3.2)$$

Для обчислення ймовірностей p_1 і p_m у формулі (3.2) записують, відповідно, $z_0 = -\infty$ і $z_m = +\infty$.

Гіпотетичні функції розподілу $F(x)$ та $f(x)$, як правило, характеризуються деякими чисельними параметрами, точні значення яких є невідомими. Тоді для обчислення теоретичних ймовірностей p_i ці невідомі параметри замінюються їх точковими оцінками, визначеними за допомогою даних вибірки.

Випадкова величина χ^2 характеризується *кількістю ступенів свободи*

$$k = m - s - 1, \quad (3.3)$$

де m – кількість інтервалів статистичного розподілу, s – кількість параметрів, що входять до гіпотетичного розподілу.

Якщо маємо повне узгодження теоретичного і статистичного розподілів, то $K = 0$, у протилежному випадку $K > 0$, тобто маємо правобічну критичну область. За формулою (3.1) обчислюємо $K_{емп} = \chi^2_{емп}$ і

визначаємо за рівнем значущості α та кількістю ступенів свободи з таблиці критичних точок розподілу χ^2 критичне значення $\chi_{кр}^2 = k_{кр}$. Якщо $K_{емп} > k_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляємо, інакше нульову гіпотезу приймаємо.

Застосування критерію χ^2 вимагає дотримання таких вимог:

- 1) експериментальні дані мають бути незалежними, тобто вибірка повинна бути випадковою;
- 2) обсяг вибірки має бути великим (практично не меншим 50 одиниць), а частота кожної групи не менша 5. Якщо остання умова не виконується, проводять об'єднання нечисленних груп.

Завдання: Групі учнів 10 - 11 класів (90 осіб) пропонували впорядкувати за важливістю такі риси ідеального учня: I – акуратність; II – самостійність; III – уважність; IV – творчість; V – допитливість; VI – активність; VII – обов'язковість; VIII – наполегливість; IX – сміливість; X – відкритість; XI – почуття гумору; XII – товариськість; XIII – рішучість; XIV – упевненість у своїх діях; XV – дружелюбність. Результати впорядкування наведено в такій таблиці:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	18	12	6	0	1	6	2	24	2	3	5	3	0	4	5
2	12	8	9	5	3	7	4	16	7	2	4	3	2	4	4
3	11	6	6	4	5	8	4	7	6	8	5	5	5	7	3
4	10	10	3	2	11	9	2	4	2	6	8	6	6	4	6
5	3	9	6	5	8	11	2	8	5	4	7	11	1	4	5
6	11	8	9	2	10	7	1	3	4	14	4	6	3	7	1
7	6	4	6	5	10	5	5	4	9	7	13	5	3	4	3
8	5	8	10	5	3	6	6	4	1	6	7	6	7	6	10
9	5	5	6	8	7	7	6	3	4	8	6	12	4	7	2
10	2	5	2	9	2	6	11	6	10	6	4	9	7	6	7
11	1	3	8	6	5	2	7	0	11	5	7	5	8	11	12
12	2	3	7	5	9	3	14	3	4	4	10	7	5	6	9
13	2	4	5	6	4	2	12	3	5	6	4	5	7	7	14
14	2	1	2	12	6	10	3	1	13	7	3	4	10	9	6
15	0	4	5	16	6	1	11	4	7	4	3	3	22	4	3

Чи можна стверджувати, що учні не надавали переваги уважності? Чи можна те ж саме стверджувати про наполегливість? Перевірити твердження для кожної з рис характеру.

Хід роботи

1. Відкриваємо робочий лист Excel і називаємо його «Риси ідеального учня».
2. Вводимо дані таблиці в комірки **A2:O16**. У комірки **A1:O1** вводим назви рис характеру.
3. Відкриваємо новий робочий лист і називаємо його «Результати».
4. Формуємо таблицю для проведення обчислень. Об'єднуємо комірки **A1:B1, C1:D1, E1:F1, ..., AC1:AD1** і вводим назви «Акуратність», «Самостійність», «Уважність», ..., «Дружелюбність». У комірках **A2, C2, E2, ..., AC2** вводим назву «бали», а у комірках **B2, D2, F2, ..., AD2** назву «частоти». Комірки **AE1:AF1** теж об'єднуємо і вводим назву «Теоретичні частоти». У відповідні комірки вносимо числові дані задачі.

Зауваження: якщо припущення задачі правильне, то вибір ознаки мав би рівномірно розподілитися між 15 місцями, тобто на кожне місце припало б по шість виборів ($90:15=6$, де 90 – обсяг вибірки, 15 – кількість рис характеру). Якщо рейтинг певної риси характеру розподілений за рівномірним законом, то це означає, що учні не надають переваги цій рисі характеру, якщо ж розподіл відмінний від рівномірного, то відповідній рисі характеру віддається перевага.

Сформулюємо дві гіпотези:

- H_0 : учні не надали переваги уважності (розподіл ознаки «уважність» є рівномірним);
 - H_1 : учні акцентують свою увагу на рисі характеру «уважність» (розподіл ознаки «уважність» є нерівномірним).
5. Вводимо в стовпець **AE3:AE17** число 6, що відповідає теоретичній частоті рівномірного розподілу для даної задачі $90:15=6$.
 6. Вводимо у комірку **F3** формулу $= (E3 - AE3)^2 / AE3$ і поширюємо її вміст за допомогою маркера на весь стовпець **F3:F17**.
 7. Вводимо у комірку **P3** формулу $= (O3 - AE3)^2 / AE3$ і поширюємо її вміст за допомогою маркера на весь стовпець **P3:P17**.
 8. Об'єднуємо комірки **A21:B21, A22:B22, ..., A35:B35** і вводим назви «Акуратність», «Самостійність», «Уважність», ..., «Дружелюбність».
 9. Об'єднуємо комірки **C20:D20** і вводим назву «хі-квадрат». Об'єднуємо комірки стовпця «хі-квадрат».
 10. Об'єднуємо комірки **E20:F20** і вводим назву «Розподіл для 0,05». Об'єднуємо комірки стовпця «Розподіл для 0,05». Об'єднуємо комірки **I20:J20** і вводим назву «Розподіл для 0,01». Об'єднуємо комірки стовпця «Розподіл для 0,01».

11. Об'єднуємо комірки **M20:N20, O20:P20, Q20:R20**, і вводимо назви «Рівні значущості», «Ступені свободи», «Критичні точки». Об'єднуємо комірки стовпців «Рівні значущості», «Ступені свободи», «Критичні точки», врахувавши, що кожен з них складається тільки з двох комірок.
12. У стовпець «Рівні значущості» вводимо числа 0,05 та 0,01. У стовпець «Ступені свободи» вводимо числа 14 та 14.
13. У комірку **Q21** вводимо статистичну функцію = **ХИ2ОБР** і заповнюємо її діалогове вікно (рис. 3.1).

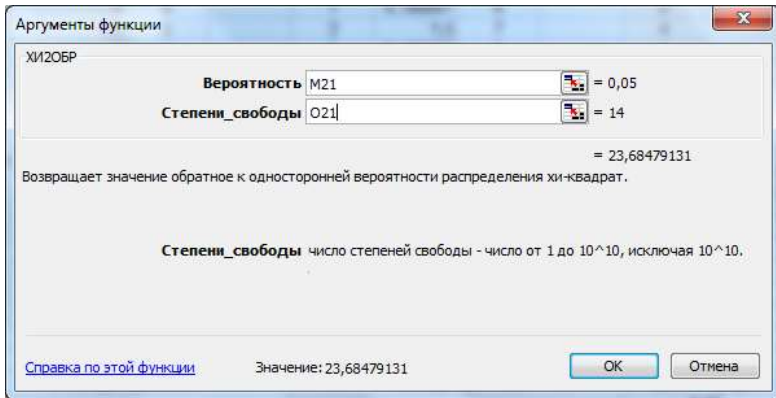


Рис. 3.1. Меню статистичної функції **ХИ2ОБР**

14. У комірці **R21** здійснюємо аналогічну операцію, але вже для рівня значущості 0,01.
15. У комірку **C23** вводимо формулу = **СУММ**, заповнюємо її діалогове вікно (рис. 3.2.). У рядок **Число 1** вводимо адреси комірок **F3:F17**, які відповідають частотам риси характеру «**Уважність**».

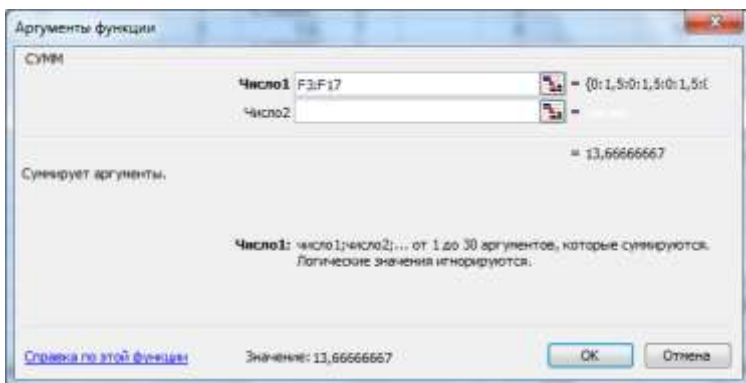


Рис. 3.2. Обчислення емпіричного значення критерію χ^2 -квдрат

16. Вводимо у комірку **E23** формулу **= ЕСЛИ (C23<Q21; "рівномірний розподіл"; "нерівномірний розподіл")**. Щоб ввести цю формулу, необхідно зайти в меню **Вставка** → **Функция** → **Логические** і заповнити діалогове вікно цієї функції (рис. 3.3).

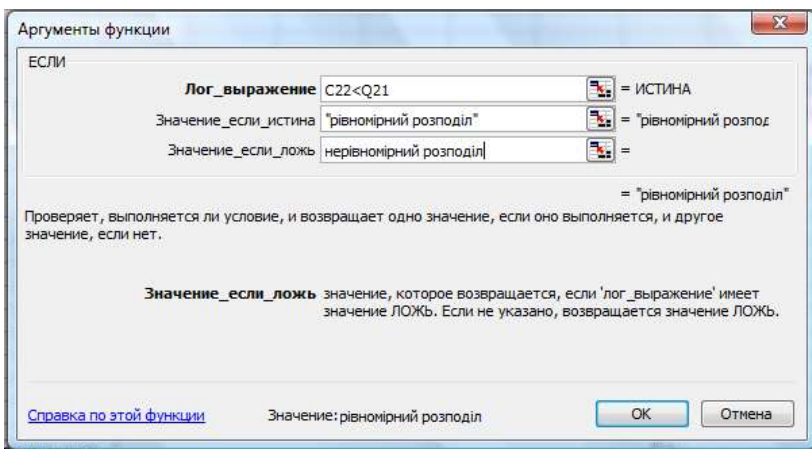


Рис. 3.3 Діалогове вікно логічної функції ЕСЛИ

17. У комірці **I23** повторюємо дії пункту 19, але вже для критичної точки при рівні значущості 0,01.
18. Виконуємо обчислення для всіх рис характеру.
Побудуємо гістограми для деяких рис характеру, наприклад, для уважності та наполегливості.

19. Виділяємо стовпець **E3:E17**. Заходимо в меню **Вставка** → **Діаграма...** → **Стандартні** і вибираємо з меню **Гістограма** (рис. 3.4).

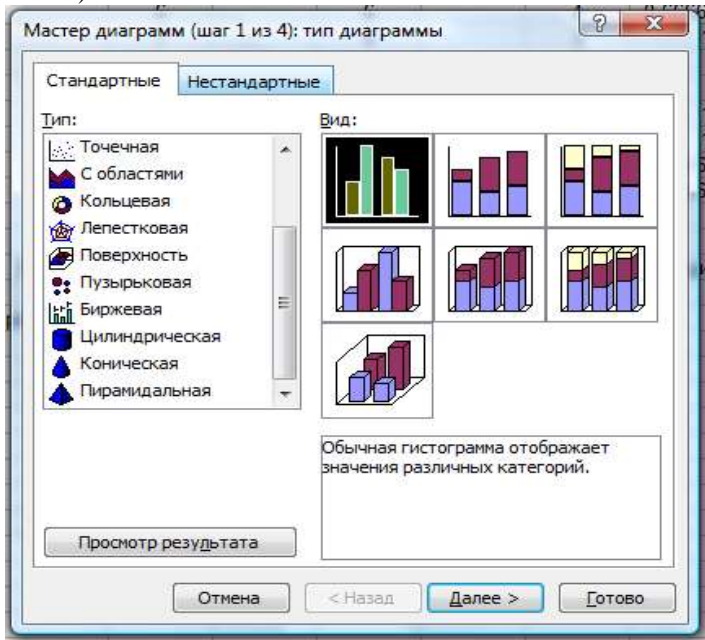


Рис. 3.4. Вибір виду гістограми

20. Натискаємо **Далее >** (крок 2 з 4), внаслідок чого з'явиться діалогове вікно (крок 3 з 4), в якому заповнюємо назву осі **X** – уважність (рис. 3.5).

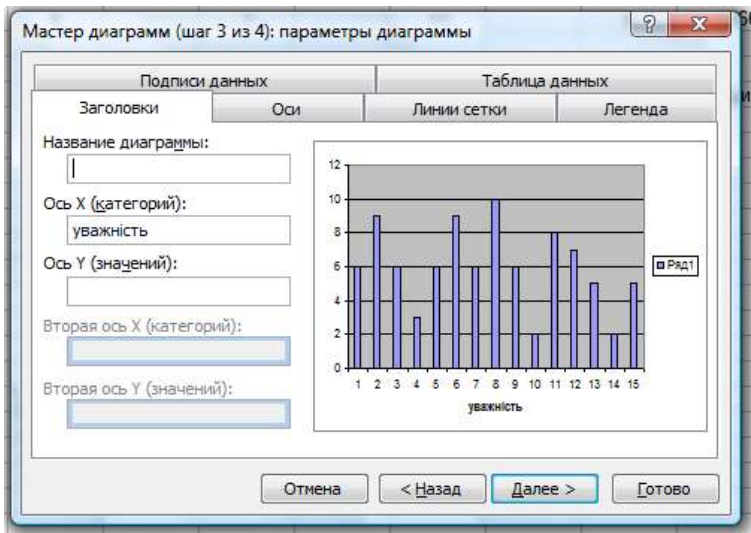


Рис. 3.5. Введення назв осей гістограми

21. Натискаємо **Далее >**. В діалоговому вікні ставимо позначку, яка вкаже куди помістити діаграму (рис. 3.6.), і натискаємо **Готово**.

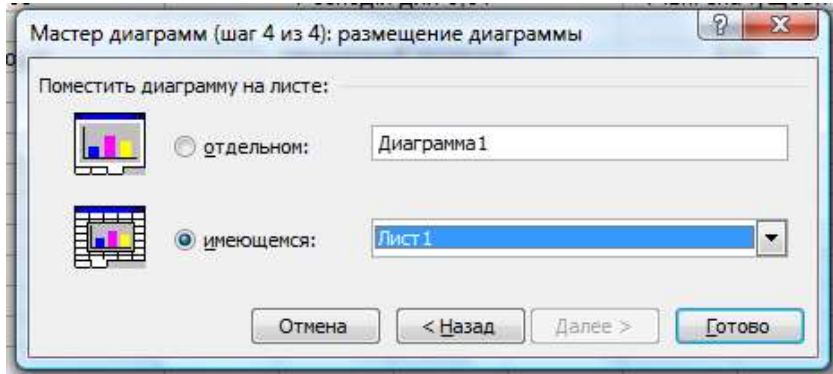


Рис. 3.6. Вибір місця розміщення діаграми

22. Переміщуємо діаграму під таблицю результатів обчислень, попередньо відредагувавши її.
23. Аналогічно будуємо решту діаграм.

Індивідуальне завдання № 2

Випадково не означає довільно: випадковість підпорядковується своїм суворим законам. Наприклад, на перший погляд здається, що запропонувати виписати випадкову послідовність цифр просто. Проте, насправді це мало хто може зробити. Послідовність випадкових цифр має задовольнити ряд вимог випадковості. Зокрема, від такої послідовності природно вимагати, щоб поява всіх цифр була рівно ймовірною. Перевірте свої здібності: випишіть випадкову (на ваш погляд) послідовність із 500-600 цифр і перевірте за допомогою критерію χ^2 , чи справді запропонована вами послідовність цифр є випадковою (чи розподіл цифр, виписаних вами є рівномірним). Якщо послідовність не є випадковою, то якій цифрі ви надаєте перевагу?

Примітка. Виписуючи послідовність, не передивляйтесь і не використовуйте в якій-небудь інший спосіб уже виписану частину послідовності: кожен наступну цифру виписуйте так, ніби ви пишете її вперше (ніби до цього нічого не записувалося).

Зауваження. Трапляються люди, в яких психологічні процеси настільки добре збалансовані, що вони можуть одержувати випадкові вибірки. Проте такі особи здебільшого вважають себе надзвичайно обдарованими. Більшість людей надають перевагу певним цифрам

Лабораторна робота № 4. Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу випадкової величини

Мета: навчитись перевіряти статичні гіпотези про нормальний закон розподілу випадкової величини.

Теоретичні відомості

Перевірку гіпотези здійснюємо за допомогою критерію хі-квадрат. Теоретичні частоти для нормального розподілу обчислюють за формулою:

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

де $z_i = \frac{x_i - \bar{x}_g}{\sigma^*}$, $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_g}{\sigma^*}$, x_i, x_{i+1} – початок та кінець інтервалу в інтервальному розподілі вибірки, $\Phi(z)$ – інтегральна функція Лапласа, значення якої наведено в таблицях (див. додаток, таблиця 2), \bar{x}_g, σ^* – точкові оцінки математичного сподівання і середньоквадратичного відхилення.

Завдання: задано інтервальний статистичний розподіл випадкової величини X – маса новонароджених дітей.

$h=0,5$	1,0-1,5	1,5-2,0	2,0-2,5	2,5-3,0	3,0-3,5	3,5-4,0	4,0-4,5
n_i	10	20	50	35	28	15	12

При рівнях значущості $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ перевірити правильність гіпотези про нормальний закон розподілу ознаки.

Хід роботи

Сформулюємо дві гіпотези:

- H_0 : розподіл маси новонароджених дітей є нормальним.
 - H_1 : розподіл маси новонароджених дітей не є нормальним.
1. Вводимо у комірку **A1** назву «**Розподіл маси новонароджених дітей**». Вводимо у комірку **A2** «**Маса**», а у комірку **A3** – «**Частота**». Вводимо у комірку **B2:H3** дані таблиці. Називаємо робочий лист «**Результати**».
 2. Відкриваємо новий робочий лист, де введемо дані про вагу дітей у дискретному вигляді: в комірки **A1:A170** вводимо середини інтервалів, а саме: в **A1:A10** – 1,25; **A11:A30** – 1,75; **A31:A80** – 2,25; **A81:A115** – 2,75; **A116:A143** – 3,25; **A144:A158** – 3,75; **A159:A170** – 4,25. Введення даних здійснюємо за допомогою маркера заповнення. Називаємо робочий лист «**Чернетка**».
 3. У робочому листі «**Результати**» вводимо заголовки стовпців таблиці, в якій будуть проводитись обчислення: **A5** – X_i , **B5** – X_{i+1} , **C5** – n_i , **D5** – Z_i , **E5** – Z_{i+1} , **F5** – $\Phi(Z_i)$, **G5** – $\Phi(Z_{i+1})$, **H5** – n_i' , **I5** – середне, **J5** – σ .

4. Заповнюємо комірки **A6:A12** числами, що відповідають початкам інтервалів, комірки **B6:B12** – числами, що є кінцями інтервалів. У комірки **C6:C12** вводимо відповідні частоти. Редагуємо формат комірок у числовий із двома знаками після коми. Для цього виділяємо необхідні комірки і правою клавшею миші викликаємо меню, в якому заходимо в **Формат ячеек...**, де вибираємо числовий формат і необхідну кількість знаків після коми (Рис. 4.1).

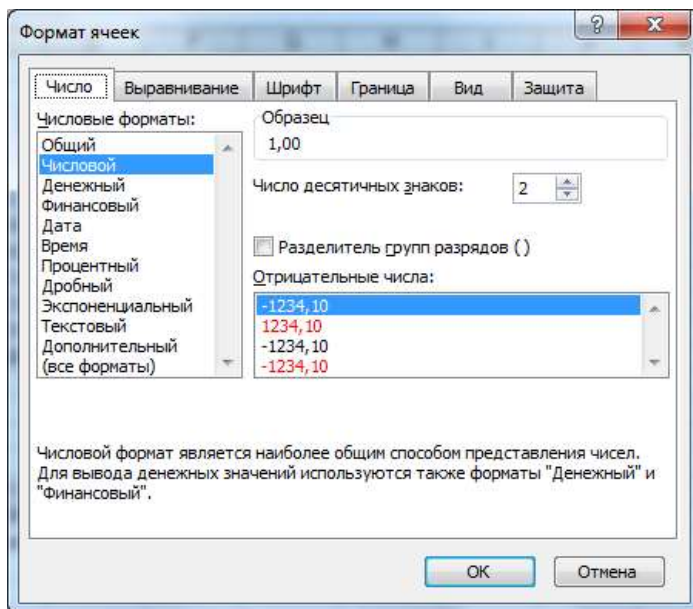


Рис. 4.1. Вибір числового формату комірок

5. Переходимо в робочий лист **«Чернетка»**, в якому обчислюємо середнє значення (**СРЗНАЧ**) і середнє квадратичне відхилення (**СТАНДОТКЛОН**). Результати обчислень копіюємо в робочий лист **«Результати»** в комірки **I6** та **J6** відповідно.
6. У робочому листі **«Чернетка»** будемо гістограму і копіюємо її в робочий лист **«Результати»**, розмістивши справа від таблиць (див. ЛР № 2).
7. Вводимо в комірку **A13** текст **«Всього дітей»** і в комірці **C13** за допомогою формули **= СУММ(C6:C12)** обчислюємо обсяг вибірки.
8. Редагуємо вміст комірок **A13:C13**, виконавши такі операції: виділяємо комірки, копіюємо їх вміст, викликаємо команду **Правка** → **Спеціальная вставка** і ставимо позначку **“•”** на **«Значения»**.

9. Вводимо у комірку **D6** формулу = $(A6 - I\$6)/J\6 , яку за допомогою маркера заповнення відображаємо на весь стовпець **D7:D12**.
10. Вводимо у комірку **E6** формулу = $(B6 - I\$6)/J\6 . Відображаємо за допомогою маркера заповнення цю формулу на весь стовпець **E7:E12**.
11. Вводимо у комірку **F6** формулу = $\text{НОРМСТРАСП}(D6) - 0,5$ і відображаємо її на стовпець **F7:F12**.
12. Вводимо у комірку **G6** формулу = $\text{НОРМСТРАСП}(E6) - 0,5$ і відображаємо її на весь стовпець **G7:G12**.
13. Вводимо в комірку **H6** формулу = $C\$13*(G6 - F6)$ і відображаємо її на весь стовпець **H7:H12**.
14. Вводимо у комірки **A17** – **Точність**, **A18** – **Імовірність**, **A19** – **Розподіл**, **C17** – 0,01, **D17** – 0,05.
15. У комірці **C18** викликаємо формулу = $\text{ХИ2ТЕСТ}(C6:C12;H6:H12)$
16. У комірці **C19** викликаємо формулу = $\text{ЕСЛИ}(C18>C17; "Норм"; "Не норм")$. У комірці **D19** викликаємо формулу = $\text{ЕСЛИ}(D18>D17; "Норм"; "Не норм")$.
17. Проведемо обчислення іншим способом. Для цього відредагуємо вміст таблиці **A5:H12** командами **Правка** → **Спеціальная вставка** → **Значения**. Скопіюємо вміст стовпців **C5:C12** та **H5:H12** у комірки **A22:A29** та **B22:B29**. Введемо в **C22** текст «**хі-квадрат**», а в **A30** – «**Сума**».
18. Викличемо в **C23** формулу = $(A23 - B23)^2/B23$ і відобразимо її у комірки **C24:C29**.
19. Обчислимо в комірці **C30** суму = $\text{СУММ}(C23:C29)$.
20. Вводимо у комірки **A32** – **Точність**, **A33** – **Свобода**, **A34** – **Хі-крит**, **A35** – **Розподіл**, **C32** – 0,01, **D32** – 0,05, **C33** – 4, **D33** – 4.
21. Обчислюємо критичну точку критерію хі-квадрат в комірці **C34** формулою = $\text{ХИ2ОБР}(C32; C33)$ і відображаємо її вміст у комірку **D34**.
22. У комірці **C35** викликаємо формулу = $\text{ЕСЛИ}(C\$30>C34; "Не норм"; "Норм")$ і аналогічні дії виконуємо в комірці **D35**.

Індивідуальні завдання №3

За даним статистичним розподілом вибірки потрібно висунути гіпотезу про закон розподілу ознаки генеральної сукупності та перевірити цю гіпотезу при рівнях значущості $\alpha=0,01$ та $\alpha=0,05$.

Варіант 1.

h=4	30-34	34-36	36-40	40-44	44-46	46-50	50-54
n_i	7	10	16	25	10	8	6

Варіант 2.

h=2	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	32-34	34-36
n_i	8	10	15	20	11	8	6

Варіант 3.

h=3	11-14	14-17	17-20	20-23	23-26	26-29	29-32
n_i	12	20	25	30	24	18	10

Варіант 4.

h=5	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
n_i	10	15	25	29	23	18	11

Варіант 5.

h=4	18-22	22-26	26-30	30-34	34-40	40-44	44-48
n_i	9	12	18	16	11	7	6

Варіант 6.

h=2	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
n_i	7	10	14	18	15	11	8

Варіант 7.

h=3	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30	30-33	33-36
n_i	8	14	16	18	15	13	10

Варіант 8.

h=2	120-122	122-124	124-126
n_i	7	10	15

126-128	128-130	130-132	132-134
21	14	11	9

Варіант 9.

$h=5$	130-135	135-140	140-145
n_i	11	16	20

145-150	150-155	155-160	160-165
24	18	15	7

Варіант 10.

$h=3$	25-28	28-31	31-34	34-37	37-40	40-43	43-47
n_i	7	11	15	17	14	10	6

Варіант 11.

$h=4$	118-122	122-126	126-130
n_i	13	23	29

130-134	134-138	138-142	142-146
30	20	18	13

Варіант 12.

$h=2$	90-92	92-94	94-96	96-98	98-100	100-102	102-104
n_i	8	9	12	18	15	10	8

Варіант 13.

$h=3$	18-21	21-24	24-27	27-30	30-33	33-36	36-39
n_i	15	12	9	7	4	3	1

Варіант 14.

$h=3$	23-26	26-29	29-32	32-35	35-38	38-41	41-44
n_i	10	15	21	24	20	15	11

Варіант 15.

$h=3$	80-83	83-86	86-89	89-92	92-95	95-98	98-101
n_i	16	22	27	34	29	15	10

Варіант 16.

$h=4$	20-24	24-26	26-30	30-34	34-36	36-40	40-44
n_i	7	10	16	25	10	8	6

Варіант 17.

$h=2$	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26
n_i	8	10	15	20	11	8	6

Варіант 18.

$h=3$	21-24	24-27	27-30	30-33	33-36	36-39	39-42
n_i	12	20	25	30	24	18	10

Варіант 19.

$h=5$	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
n_i	10	15	25	29	23	18	11

Варіант 20.

$h=4$	8-12	12-16	16-20	20-24	24-30	30-34	34-38
n_i	9	12	18	16	11	7	6

Варіант 21.

$h=2$	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
n_i	7	10	14	18	15	11	8

Варіант 22.

$h=3$	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30	30-33	33-36
n_i	18	24	26	28	15	13	10

Варіант 23.

$h=2$	120-122	122-124	124-126
n_i	17	20	25

126-128	128-130	130-132	132-134
21	14	11	9

Варіант 24.

$h=5$	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
n_i	11	16	20	24	18	15	7

Варіант 25.

$h=3$	25-28	28-31	31-34	34-37	37-40	40-43	43-47
n_i	17	21	25	27	24	20	16

Варіант 26.

h=4	18-22	22-26	26-30	30-34	34-38	38-42	42-46
n _i	13	23	29	30	20	18	13

Варіант 27.

h=2	90-92	92-94	94-96	96-98	98-100	100-102	102-104
n _i	18	19	20	28	25	15	10

Варіант 28.

h=3	18-21	21-24	24-27	27-30	30-33	33-36	36-39
n _i	15	12	9	7	4	3	1

Варіант 29.

h=3	23-26	26-29	29-32	32-35	35-38	38-41	41-44
n _i	10	15	21	24	20	15	11

Варіант 30.

h=3	80-83	83-86	86-89	89-92	92-95	95-98	98-101
n _i	16	22	27	34	29	15	10

Лабораторна робота № 5. Порівняння двох вибірок за рівнем досліджуваної ознаки, вимірної в порядковій або інтервальній шкалі

Мета: навчитись перевіряти гіпотезу про статистичну відмінність двох вибірок за рівнем досліджуваної ознаки.

Теоретичні відомості

Для порівняння двох вибірок за рівнем досліджуваної ознаки, вимірної в порядковій або інтервальній шкалах, використовуємо непараметричний критерій Манна - Уїтні.

За об'єднаною вибіркою формують варіаційний ряд. Для кожного значення варіанти визначають її ранг — порядковий номер (або середнє арифметичне порядкових номерів) цієї варіанти у ряді. Для обидвох вибірок обчислюють суми рангів їхніх варіант.

Статистичні гіпотези формують так:

- H_0 : рівні досліджуваної ознаки у вибірках статистично не відрізняються;
- H_1 : в одній з вибірок рівень досліджуваної ознаки вищий, ніж в іншій.

Значення критерію Манна – Уїтні обчислюють за формулою

$$U = n_1 n_2 + \frac{1}{2} n^* (n^* + 1) - T^* \tag{5.1}$$

де n_1, n_2 – обсяги вибірок; T^* – більша рангова сума; n^* – обсяг вибірки з більшою ранговою сумою. Критерій має лівобічну критичну область. Критичні значення критерію U наведено в табл. 5 додатка. Зауважимо, що для $n_1 > 8, n_2 > 8$ статистика

$$Z = \frac{U - n_1 n_2 / 2}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) / 12}} \tag{5.2}$$

має розподіл, близький до стандартного нормального.

Завдання: за методикою Спілберга опитано дві групи віруючих - формально віруючі християни (ФВХ) – 26 осіб, та практикуючі християни (ПХ) – 25 осіб. Результати за шкалою ситуативної тривожності у цих групах мають такий вигляд:

ПХ	35	15	13	31	20	25	24	20	21	18	21	16	11	8	23	22	15	9	7	16	15	10	15	8	24
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	---	---	----	----	----	----	---	----

ФВХ	54	52	49	47	47	46	41	39	38	38	36	36	36	35	34	34	30	30	29	27	27	27	26	26	25	24
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Чи можна стверджувати, що рівень ситуативної тривожності в обох групах однаковий?

Хід роботи

Сформулюємо гіпотези:

- H_0 : рівні досліджуваної ознаки статистично не відрізняються між собою;
 - H_1 : рівень досліджуваної ознаки вищий у групі ФВХ.
1. Вводимо дані задачі в робочий лист. Стовпець **A** називаємо «**ПХ**», а стовпець **B** – «**ФВХ**». У комірки **A2:A26** вводимо бали для практикуючих християн, а у комірки **B2:B27** – для формально віруючих християн.
 2. Називаємо стовпець **C** – «**Об’єднана вибірка**» і копіюємо вміст стовпців **A** та **B** у стовпець **C**.
 3. Впорядковуємо вміст стовпця **C** за зростанням значень елементів. Для цього виділяємо комірки **C2:C52** і заходимо в меню **Данные** → **Сортировка...**, ставимо позначку “•” у вікні «**сортировать в пределах указанного выделения**», натискаємо **Сортировка...**, відзначаємо в новому діалоговому вікні маркером “•” «**по возрастанию**» і натискаємо клавішу <**ОК**> (рис. 5.1). Отримуємо впорядковану за зростання об’єднану вибірку.

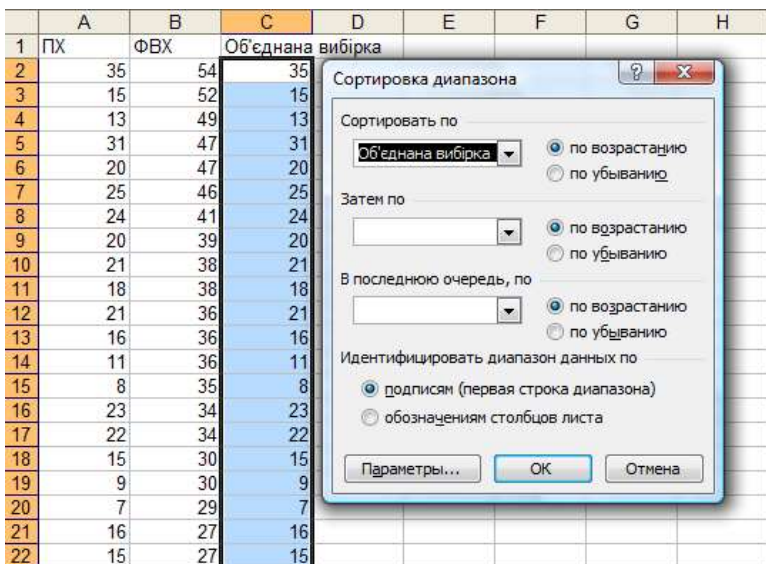


Рис. 5.1. Впорядкування за зростанням значень елементів

Визначимо ранги кожної варіанти з об'єднаної вибірки.

- У комірку **D1** вводимо назву «**Порядкові номери**». Змінюємо формат комірок **C1** та **D1**, збільшивши їх ширину так, щоб текст повністю поміщався у них; натискаємо праву клавішу миші, заходимо в меню **Формат ячеек ...** → **Выравнивание** і ставимо позначку в опції **переносить по словам**. Вводимо у комірки **D2:D52** цілі числа від 1 до 51. Щоб пришвидшити процес вводимо перших два номери, виділяємо вміст комірок **D2:D3**, наводимо курсор в правий нижній кут виділеного діапазону, щоб він змінив форму на хрестик і, тримаючи натисненою праву клавішу миші, тягнемо до комірки **D52**.
- Вводимо у комірку **E1** назву «**Ранги**». У стовпці **E** обчислюємо ранги кожної варіанти – порядковий номер (або середнє арифметичне порядкових номерів) цієї варіанти у ряді. Процес присвоєння рангів для перших дванадцяти елементів покажемо на прикладі. Першою є варіанта 7 і вона трапляється лише один раз, тому її ранг дорівнює 1. Вводимо в комірку **E2** число 1. Варіанта 8 трапляється два рази, обчислюємо середнє арифметичне її порядкових номерів. Для цього об'єднуємо комірки **E3:E4** і вводимо формулу $= (D3+D4)/2$. Варіанта 9 трапляється один раз і має порядковий номер 4, в комірку **E5** вводимо число 4. Аналогічно для варіант 10, 11, 13 отримуємо, відповідно, ранги 5, 6, 7, які вводимо в комірки **E6**, **E7**, **E8**. Варіанта

15 трапляється чотири рази і має порядкові номери 8, 9, 10, 11. Об'єднуємо комірки **E9:E12** і вводимо формулу $=(D9+D10+D11+D12)/4$. Знаходимо ранги решти варіант. Обчислюємо суму рангів елементів кожної групи.

6. Впорядковуємо за зростанням вміст стовпців **A** та **B**.
7. У комірку **F1** вводимо назву «**Ранги ПХ**», а у **G1** – назву «**Ранги ФВХ**».
8. У комірки **F2:F26** вводимо ранги елементів стовпця **A**, а **G2:G27** – ранги елементів стовпця **B** (рис. 5.2).

	A	B	C	D	E	F	G
	ПХ	ФВХ	Об'єднана вибірка	Порядкові номери	Ранги	Ранги ПХ	Ранги ФВХ
1							
2	7	24	7	1	1	1	22
3	8	25	8	2		2	24,5
4	8	26	8	3	2,5	2	26,5
5	9	26	9	4	4	4	26,5
6	10	27	10	5	5	5	29
7	11	27	11	6	6	6	29
8	13	27	13	7	7	7	29
9	15	29	15	8		9,5	31
10	15	30	15	9		9,5	32,5
11	15	30	15	10		9,5	32,5
12	15	34	15	11	9,5	9,5	35,5
13	16	34	16	12		12,5	35,5
14	16	35	16	13	12,5	12,5	37,5
15	18	36	18	14	14	14	40
16	20	36	20	15		15	40
17	20	36	20	16	15,5	15	40
18	21	38	21	17		17,5	42,5
19	21	38	21	18	17,5	17,5	42,5
20	22	39	22	19	19	19	44
21	23	41	23	20	20	20	45
22	24	46	24	21		22	46
23	24	47	24	22		22	47,5
24	25	47	24	23	22	24,5	47,5
25	31	49	25	24		34	49
26	35	52	25	25	24,5	37,5	50
27		54	26	26			51
28			26	27	26,5		

Рис. 5.2. Таблиця рангів

9. Обчислюємо рангові суми для кожної з груп. Об'єднуємо комірки **I1:J1** та вводимо назву «**Рангові суми**». У комірку **I2** вводимо назву «**ПХ**», а у **J2** – назву «**ФВХ**». У комірці **I3** викликаємо функцію = **СУММ(F2:F26)**, а у **J3** – функцію = **СУММ(G2:G27)**.
10. З таблиці значень критичних точок критерію Манна-Уїтні знаходимо критичні точки для рівнів значущості 0,05 та 0,01. Вони дорівнюють

відповідно 237 та 201. Об'єднуємо комірки **K1:L1**, вводим назву «**Критичні точки**». У комірку **K2** вводим рівень значущості 0,05, а у **L2** – рівень значущості 0,01. У комірки **K3:L3** вводим відповідні критичні точки (рис. 5.3).

Рангові суми		Критичні точки	
ПК	ФБК	0,05	0,01
348	976	237	201

Рис. 5.3. Рангові суми та критичні точки

- Обчислюємо спостережуване значення критерію за формулою (5.1). Критерій має лівобічну критичну область. Об'єднуємо комірки **M1:N1**, вводим назву «**Спостережуване значення критерію**». Об'єднуємо комірки **M2:N2**, вводим формулу = $25*26+26*27/2 - J3$. Об'єднуємо комірки **I6:N6** та вводим формулу = ЕСЛИ(M2>K3; "рівень тривожності однаковий"; "рівень тривожності вищий у формально віруючих"). Аналогічні дії проробляємо для рівня значущості 0,01 в комітках **I7:N7**.

Лабораторна робота № 6. Встановлення зв'язку між ознаками, вимірними у номінативній шкалі

Мета: навчитись перевіряти гіпотезу про зв'язок між ознаками.

Теоретичні відомості

Нехай одна з ознак A має r градацій номінативної шкали, які позначимо A_1, A_2, \dots, A_r відповідно, а ознака B має s градацій номінативної шкали, які позначимо B_1, B_2, \dots, B_s . Таблиця спряженості має такий вигляд:

	B_1	B_2	...	B_j	...	B_s
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1s}
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2s}
...
A_i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{is}
...
A_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rj}	...	n_{rs}

де n_{ij} – частота появи A_i , ознаки в парі з B_j ознакою в серії спостережень.

Якщо досліджувані ознаки незалежні, то незалежними мають бути і події $A = A_i$ та $B = B_j$, тобто

$$P(A = A_i \wedge B = B_j) = P(A = A_i) P(B = B_j). \quad (6.1)$$

Введемо позначення

$$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^s n_{ij}, \quad i = \overline{1, r}; \quad n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}, \quad j = \overline{1, s}; \quad n = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s n_{ij}. \quad (6.2)$$

Оскільки при достатньо великих n за законом Бернуллі

$$\frac{n_{i\bullet}}{n} \approx P(A = A_i), \quad \frac{n_{\bullet j}}{n} \approx P(B = B_j), \quad \frac{n_{ij}}{n} \approx P(A = A_i \wedge B = B_j), \quad (6.3)$$

то незалежність ознак A і B , забезпечуватиме виконання рівностей

$$n_{ij} \approx \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}, \quad (i = \overline{1, r} \quad j = \overline{1, s}). \quad (6.4)$$

Величини $\frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}$ називатимемо *сподіваними (або теоретичними)*

частотами розподілу випадкового вектора (A, B) .

Перевірку узгодженості емпіричного розподілу з теоретичним здійснимо за допомогою критерію χ^2 . Якщо виконується нульова гіпотеза (ознаки A і B – незалежні), то величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n} \right)^2}{\frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}} = n \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}} - 1 \right) \quad (6.5)$$

матиме розподіл χ^2 з $m=(r-1)(s-1)$ ступенями свободи. Великі значення χ^2 у конкретному експерименті свідчатимуть про залежність між ознаками A і B .

Для оцінки тісноти зв'язку між ознаками Карл Пірсон запропонував величину

$$P = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}, \quad (6.6)$$

яку називають *коефіцієнтом спряженості Пірсона*. Очевидно, що $0 \leq P \leq 1$, причому для незалежних ознак $P = 0$. Однак $P \neq 1$, коли таблиця спряженості діагональна (абсолютна залежність ознак A і B). Позбавлений цього недоліку коефіцієнт Крамера

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \min(r-1, s-1)}}. \quad (6.7)$$

Завдання: Розподіл 1725 школярів, класифікованих за їх розумовими здібностями (A – розумово відсталий або повільний і тупий; B – тупий; B – повільний але розумний; Γ – достатньо розумний; D – явно здібний; E – дуже здібний) та якістю одягу (одягнений: a – дуже добре; \bar{b} – добре; v – задовільно; z – погано), наведено в таблиці

Як одягається \ Здібності	Здібності					
	A	B	B	Γ	D	E
a	33	48	113	209	194	39
\bar{b}	41	100	202	255	138	15
v	39	58	70	61	33	4
z	17	13	22	10	10	1

Чи існує зв'язок між цими характеристиками?

Хід роботи

Сформулюємо статистичні гіпотези:

- H_0 : Ознаки незалежні одна з одною.
- H_1 : Ознаки пов'язані між собою.

1. Вносимо дані задачі в робочий лист Excel в блок комірок **A1:G5**. У комірки **H1** та **A6** вводимо назви «Сума». В блоці **H2:H5** обчислимо суми частот у рядках (якість одягу), а в рядку з номером 6 (блок **B6:G6**) – суми частот у стовпцях (розумові здібності). Для виконання обчислень використаємо функцію = СУММ. У комірці **H6** обчислимо суму всіх частот (рис. 6.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		A	Б	В	Г	Д	Е	Сума
2	а	33	48	113	209	194	39	636
3	б	41	100	202	255	138	15	751
4	в	39	58	70	61	33	4	265
5	г	17	13	22	10	10	1	73
6	Сума	130	219	407	535	375	59	1725

Рис. 6.1. Таблиця емпіричних частот

- Обчислимо теоретичні частоти в блоці **B7:G10**. У комірку **B7** внесемо формулу = **B2^2/B\$6/\$H2** і копіюємо її маркером заповнення на весь блок **B7:G10** (рис. 6.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		A	Б	В	Г	Д	Е	Сума
2	а	33	48	113	209	194	39	636
3	б	41	100	202	255	138	15	751
4	в	39	58	70	61	33	4	265
5	г	17	13	22	10	10	1	73
6	Сума	130	219	407	535	375	59	1725
7	теоретичні частоти	0,013171	0,016542	0,049329	0,128375	0,157803	0,040534	
8		0,017218	0,060802	0,133496	0,16184	0,067622	0,005078	
9		0,044151	0,057965	0,045431	0,026246	0,010958	0,001023	
10		0,030453	0,010571	0,01629	0,00256	0,003653	0,000232	
11								

Рис. 6.2.Обчислення теоретичних частот

- Обчислимо значення статистики χ^2 у комірці **H11**. У комірку **G11** вводим запис « χ^2 =». У комірці **H11** вводим формулу = **(СУММ(B7:G10) – 1)*H6**.
- У комірку **C12** вводим запис «**P** = », у комірку **E12** вводим запис «**C** = », у комірку **G12** – запис «**p** = ».
- У комірці **H12** обчислимо рівень значущості статистики χ^2 за допомогою статистичної формули = **ХИ2РАСП(H11;15)**, де 15 – це кількість ступенів свободи, обчислена за формулою $m=(r-1)*(s-1)$.
- У комірці **D12** знаходимо коефіцієнт **P** за формулою = **КОРЕНЬ(H11/(H6+H11))**.
- У комірці **F12** знаходимо коефіцієнт **C** за формулою = **КОРЕНЬ(H11/H6/3)**, де $3 = \min(r-1, s-1)$.
- Об'єднуємо комірки **A14:H14** і вводим в них формулу = **ЕСЛИ(H12>0,01;"ознаки незалежні";"ознаки залежні")**. Таким чином робимо висновки щодо висунутих гіпотез.

Лабораторна робота № 7. Встановлення зв'язку між ознаками, вимірних за шкалою інтервалів або відношень

Мета: навчитись перевіряти гіпотезу про зв'язок між ознаками.

Теоретичні відомості

Для емпіричних даних, вимірних за шкалою інтервалів або відношень тісноту зв'язку визначають за допомогою коефіцієнта лінійної кореляції Персона:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (7.1)$$

де: x_i і y_i – значення змінних X і Y ; \bar{x} і \bar{y} – середні X і Y ; n – обсяг вибірки.

Емпіричний коефіцієнт r_{xy} як вибіркова статистика є мірою оцінювання його генерального параметра ρ_{xy} і супроводжується похибкою s_r :

$$s_r = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}}. \quad (7.2)$$

Відношення вибіркового коефіцієнта кореляції r_{xy} до похибки s_r є критерієм (t_r) перевірки нульової гіпотези щодо генерального показника зв'язку ρ_{xy} , тобто $H_0: \rho_{xy} = 0$. Нульову гіпотезу відхиляють на рівні значущості α , якщо критичне значення t -критерію (t_{st}) не перевищує емпіричного значення t_r :

$$t_r = \frac{r_{xy}}{s_r} = r_{xy} \cdot \sqrt{\frac{n - 2}{1 - r_{xy}^2}} \geq t_{st}, \quad (7.3)$$


де t_{st} – критичне значення критерію Стьюдента при рівні значущості α і числі ступенів свободи $k = n - 2$.

Завдання: оцінити зв'язок між коефіцієнтом IQ (X) і успішністю виконання тестових завдань з фізики (Y) учнями загальноосвітньої школи, результати оцінювання яких мають такий вигляд:

i	1	2	3	4	5	6	7
X	116	112	110	118	103	120	113
Y	28	25	18	24	14	25	18

8	9	10	11	12	13	14	15
114	106	108	120	109	110	102	104
20	16	15	24	19	20	11	11

Хід роботи

1. Формуємо таблицю для виконання обчислень за зразком, який наведено на рис. 7.1. У комірки **A3:A17** вводим порядкові номери, у комірки **B3:B17** – коефіцієнти IQ, в комірки **C3:C17** – бали тестових завдань з фізики.
2. Побудуємо діаграму розсіювання. Вхидимо в меню **Вставка** →  **(Диаграмма)**, вибираємо закладку **Стандартные...**, а в ній обираємо тип діаграми (рис. 7.2). Натискаємо **Далее** і в діалоговому вікні, що з'явилося, вносимо діапазон комірок **B3:C17**. Натискаємо **Далее** і в діалоговому вікні вносимо заголовки осей: вісь X – “**Коефіцієнт IQ**”, вісь Y – “**Кількість виконаних завдань**”. Натискаємо **Далее** і в діалоговому вікні ставимо маркер, який вказує, де розмістити діаграму (в нашому випадку діаграму розміщуємо в цьому ж робочому листі), натискаємо **Готово**, редагуємо її і переміщуємо отриману діаграму під таблицю результатів.
3. Вилучаємо з діаграми легенду, і додаємо лінію тренду. Для цього необхідно виставити курсор миші в одну з точок діаграми і клікнути на ній лівою клавішею миші, після чого всі точки діаграми будуть виділені. Потім клікаємо правою клавішею миші і в діалоговому вікні вибираємо опцію **Добавить линию тренда...**, а в ній вибираємо вид лінії тренду – **Линейная**.
4. Відредагуємо лінію тренду, змінивши її товщину і зробивши її пунктирною. Для цього наводимо на лінію тренду курсор миші і виділяємо її правою клавішею. У меню, що випадає, вибираємо опцію **Формат линии тренда...**, а в ній вибираємо необхідну товщину і тип лінії. Відредагована діаграма розсіювання зображена на рис. 7.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Емпіричні дані			Розрахунки				
2	i	x_i	y_i	$(x_i - \bar{X})$	$(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(x_i - \bar{X}) \times (y_i - \bar{Y})$
3	1	116	28					
4	2	112	25					
5	3	110	18					
6	4	118	24					
7	5	103	14					
8	6	120	25					
9	7	113	18					
10	8	114	20					
11	9	106	16					
12	10	108	15					
13	11	120	24					
14	12	109	19					
15	13	110	20					
16	14	102	11					
17	15	104	11					
18	Суми:							
19	Середні:							
20	$r_{xy} =$							
21	$t_{xy} =$							
22	$t_{st} =$							

Рис. 7.1. Таблиця для проведення розрахунків теоретичних частот

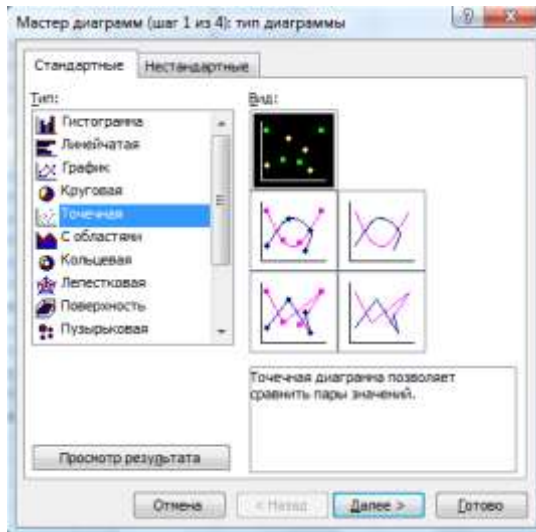


Рис. 7.2. Вибір типу діаграми

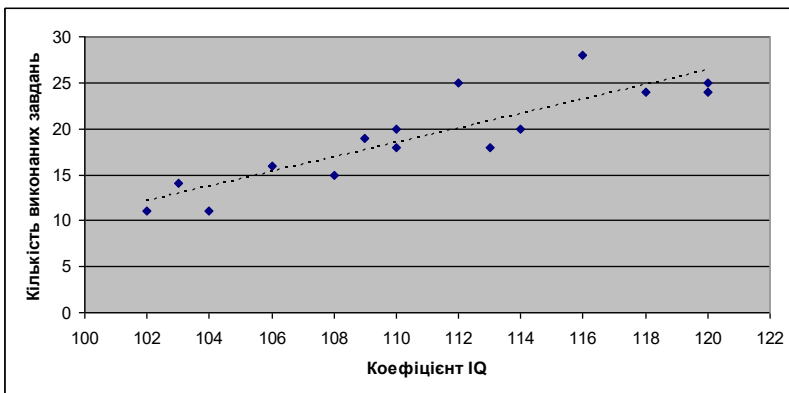


Рис. 7.3. Вигляд лінії тренду

5. Вводимо такі формули:
 - у комірку **B18** = СУММ(B3:B17);
 - у комірку **C18** = СУММ(C3:C17).
6. Вводимо такі формули:
 - у комірку **B19** = СРЗНАЧ(B3:B17);
 - у комірку **C19** = СРЗНАЧ(C3:C17).
7. У комірку **D3** вводимо формулу = **B3 – B\$19** і за допомогою маркера заповнення відображаємо її вміст на весь стовпець **D4:D17**.
8. У комірку **E3** вводимо формулу = **C3 – C\$19** і за допомогою маркера заповнення відображаємо її вміст на весь стовпець **E4:E17**.
9. У комірку **F3** вводимо формулу = **D3^2** і за допомогою маркера заповнення відображаємо її вміст на весь стовпець **F4:F17**.
10. У комірку **G3** вводимо формулу = **E3^2** і за допомогою маркера заповнення відображаємо її вміст на весь стовпець **G4:G17**.
11. У комірку **H3** вводимо формулу = **D3*E3** і за допомогою маркера заповнення відображаємо її вміст на весь стовпець **H4:H17**.
12. У комірку **D18** вводимо формулу = СУММ(D3:D17).
13. У комірку **E18** вводимо формулу = СУММ(E3:E17).
14. У комірку **F18** вводимо формулу = СУММ(F3:F17).
15. У комірку **G18** вводимо формулу = СУММ(G3:G17).
16. У комірку **H18** вводимо формулу = СУММ(H3:H17).
17. У комірку **B20** вводимо формулу = **H18/КОРЕНЬ(F18*G18)**.
18. У комірку **B21** вводимо формулу = **B20*КОРЕНЬ((СЧЁТ(A3:A17) – 2)/(1 – B20^2))**.
19. У комірку **B22** вводимо формулу = **СТЮДРАСПОБР(2*0,01;СЧЁТ(A3:A17) – 2)**.

20. Об'єднуємо комірки **A25:H25** і вводимо формулу = **ЕСЛИ(B21>B22;"зв'язок між ознаками істотний";"зв'язок між ознаками неістотний")**.
21. Коефіцієнт кореляції r_{xy} можна обчислити значно простіше за допомогою статистичної функції **КОРРЕЛ**, виконаємо це обчислення в комірці **C20** ввівши в неї формулу = **КОРРЕЛ(B3:B17;C3:C17)**.
Робимо висновок про прийняття, чи відхилення нульової гіпотези.

Лабораторна робота № 8. Встановлення зв'язку між ознаками, вимірними за шкалою інтервалів або відношень у випадку нелінійної залежності

Мета: навчитись встановлювати характер та тісноту зв'язку між ознаками.

Теоретичні відомості

Емпіричний коефіцієнт кореляції Пірсона з усіх способів, що можуть зв'язувати дві змінні X і Y , оцінює лише їх лінійний зв'язок. Якщо деякі види зв'язків X і Y дають такі значення кореляції, що будуть необґрунтовано наближатись до нуля, їх необхідно інтерпретувати з урахуванням діаграми розсіювання і відповідних показників лінійності кореляційного відношення

$$\eta_{y,x}^2 = 1 - \frac{SS_{внутр}}{SS_{загал}}, \quad (8.1)$$

де $SS_{внутр} = \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_{групи})^2$ - внутрішньогрупова сума квадратів

відхилень y_i від середнього, а $SS_{загал} = (n-1) \cdot D_y$ (D_y - дисперсія ознаки Y).

Завдання: Оцінити зв'язок віку (X) 28 осіб із результатами допоміжного тесту «цифра – знак» (Y) шкали інтелекту дорослих Векслера. Упорядковані за віком дані мають такий вигляд:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x_i	10	10	10	10	10	14	14	14	14	18	18	18	18	22
y_i	7	8	9	9	10	8	9	10	11	9	10	11	12	11
i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
x_i	22	22	22	26	26	26	30	30	30	30	34	34	34	38
y_i	11	12	12	9	10	11	8	9	9	10	7	9	10	8

Хід роботи

1. Вводимо дані задачі в таблицю. Об'єднуємо комірки **A1:A2**, і вводимо назву « i »; об'єднуємо комірки **D1:D2** і вводимо назву « s_i ». У комірку **B1** вводимо назву «**Вік**», у комірку **B2** вводимо назву « x_i »; в комірку **C1** вводимо назву «**Тест**», а в комірку **C2** вводимо назву « y_i ». У відповідні стовпці вводимо дані задачі (рис. 8.1).
2. Будуємо діаграму розсіювання і додаємо лінію тренду (див. ЛР №7). Лінію тренду за виглядом діаграми розсіювання потрібно вибирати поліноміальну (рис.8.1).

3. Вводимо в комірку **D3** формулу $=(C3-CP3НАЧ(SC\$3:SC\$7))^2$. Поширюємо її вміст на комірки **D4:D7**.
4. Вводимо в комірку **D8** формулу $=(C8-CP3НАЧ(SC\$8:SC\$11))^2$. Поширюємо її вміст на комірки **D9:D11**.
5. Проробляємо аналогічні операції для інших вікових груп.
6. Об'єднуємо комірки **A31:C31**, **A32:C32**, **A33:C33** і вводимо назви «SS_{внутр}», «SS_{загал}», «кореляційне відношення».
7. У комірку **D31** вводимо формулу $=СУММ(D3:D30)$.
8. У комірку **D32** вводимо формулу $=(A30-1)*ДИСП(C3:C30)$.
9. У комірку **D33** вводимо формулу $=1-D31/D32$.
10. Об'єднуємо комірки **A34:B36** і вводимо назву «коефіцієнти кореляції для віку». У комірки **C34**, **C35**, **C36** вводимо назви «від 10 до 38», «від 10 до 22», «від 26 до 38», відповідно.
11. У комірці **D34** обчислюємо коефіцієнт кореляції Пірсона для всього масиву за допомогою функції $=КОРРЕЛ(B3:B30;C3:C30)$.
12. У комірках **D35**, **D36** розраховуємо аналогічно коефіцієнти кореляції для інших частин масиву.

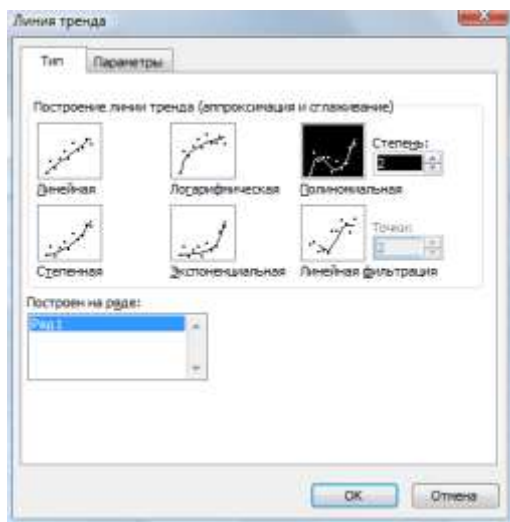


Рис. 8.1. Вибір лінії тренду

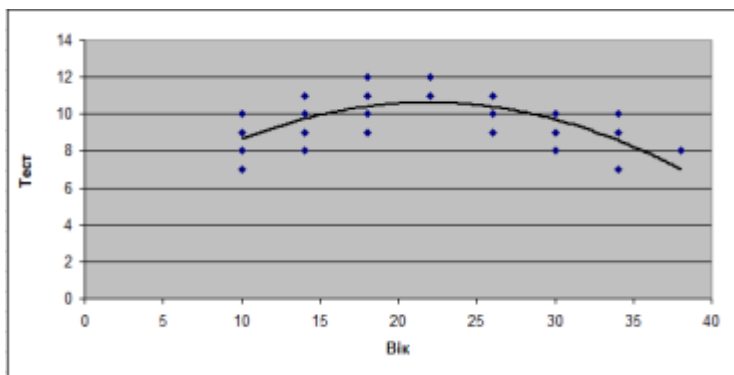


Рис. 8.2. Вигляд лінії тренду.

	A	B	C	D
1	i	Вік	Тест	
2		xi	yi	Si
3	1	10	7	2.56
4	2	10	8	0.36
5	3	10	9	0.16
6	4	10	9	0.16
7	5	10	10	1.96
8	6	14	8	2.25
9	7	14	9	0.25
10	8	14	10	0.25
11	9	14	11	2.25
12	10	18	9	2.25
13	11	18	10	0.25
14	12	18	11	0.25
15	13	18	12	2.25
16	14	22	11	0.25
17	15	22	11	0.25
18	16	22	12	0.25
19	17	22	12	0.25
20	18	26	9	1
21	19	26	10	0
22	20	26	11	1
23	21	30	8	1
24	22	30	9	0
25	23	30	9	0
26	24	30	10	1
27	25	34	7	2.777778
28	26	34	9	0.111111
29	27	34	10	1.777778
30	28	38	8	0
31			SSенутр=	24.86667
32			SSзагал=	54.67857
33			кореляційне відношення=	0.545221
34	коефіцієнти		від 10 до 38	-0.07424
35	кореляції для віку		від 10 до 22	0.749079
36			від 26 до 38	-0.55426

Рис. 8.3. Результати розрахунків кореляційного відношення

Лабораторна робота № 9-10. Дослідження впливу на результативну ознаку двох і більше взаємопов'язаних факторних ознак

Мета: навчитись знаходити параметри множинної лінійної регресії та інтерпретувати їх.

Теоретичні відомості

Кореляцію, за допомогою якої вивчається вплив на результативну ознаку двох та більше взаємозв'язаних факторних ознак, називають *множинною*.

Багатофакторні регресійні моделі дають змогу оцінювати вплив на досліджувану результативну ознаку кожного окремого із включених у рівняння факторів при фіксованому значенні (на середньому рівні) інших факторів. При цьому важливою умовою множинної кореляції є відсутність функціонального зв'язку між факторами.

Формула лінійного рівняння множинної регресії має такий вигляд

$$y_x = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n, \quad (9.1)$$

де: y_x – теоретичне значення результативної ознаки; $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ – параметри рівняння; x_1, x_2, \dots, x_n – факторні ознаки.

Окремі коефіцієнти регресії цього рівняння характеризують вплив відповідного фактора на результативний показник при фіксованому значенні інших факторів. Вони показують, наскільки зміниться результативний показник при зміні відповідного фактора на одиницю. Вільний член рівняння β_0 – це середнє значення.

Показниками тісноти зв'язку при множинній кореляції є парні, часткові та множинні (сукупні) коефіцієнти кореляції та множинний коефіцієнт детермінації.

Парні коефіцієнти кореляції використовують для вимірювання тісноти зв'язку між двома досліджуваними ознаками без урахування їх взаємодії з іншими ознаками, які включені у кореляційну модель. Кореляційний зв'язок між факторами в рівнянні множинної регресії називають *колінеарністю* або *мультиколінеарністю*. Мультиколінеарність ускладнює дослідження впливу окремих факторів на результативну ознаку, оскільки взаємодія колінеарних факторів у моделі подвоюватиметься та спотворюватиме результати. Чим вища колінеарність, тим менш надійними будуть показники впливу окремих факторів. *Допустимою колінеарністю* для практичних цілей, що не спотворює результати досліджень, вважають таку, при якій парні коефіцієнти кореляції між факторними та результативною ознаками більші за коефіцієнти кореляції між супутніми факторами.

Часткові коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв'язку результативної ознаки з однією факторною ознакою за умови, що інші факторні ознаки перебувають на постійному рівні.

Коефіцієнт множинної (сукупної) детермінації показує, яка частка зміни досліджуваного результативного показника зумовлена впливом факторів, включених у рівняння множинної регресії. Він може мати значення від 0 до +1. Чим ближчий коефіцієнт множинної детермінації до одиниці, тим більшою є зміна результативного показника під впливом відібраних факторів. Коефіцієнт множинної детермінації визначають за такою формулою:

$$R^2 = \frac{\sigma_{обч}^2}{\sigma_3^2}, \quad (9.2)$$

де $\sigma_{обч}^2$ – дисперсія результативного показника, обчислена за рівнянням множинної регресії; $\sigma_{обч}^2 = \overline{y_x^2} - \bar{y}^2$; σ_3^2 – загальна дисперсія результативного показника $\sigma_3^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$.

Основним показником тісноти зв'язку між декількома факторами є коефіцієнт множинної (сукупної) кореляції (коефіцієнт детермінації), який може мати значення від 0 до +1. Формула для його обчислення має такий вигляд:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_{обч}^2}{\sigma_3^2}}. \quad (9.3)$$

Коефіцієнт детермінації показує, яку частку зміни результативної ознаки зумовлюють введені у кореляційну модель фактори.

Середню помилку вибіркового коефіцієнта множинної кореляції визначають за такою формулою

$$m_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m - 1}}, \quad (9.4)$$

де: n – кількість спостережень; m – кількість факторів. Перевірку гіпотези про вірогідність коефіцієнта множинної детермінації здійснюють за допомогою критерію Стюдента.

Фактичне значення критерію Стюдента обчислюють за формулою

$$t_\phi = \frac{R}{m_R}. \quad (9.5)$$

Якщо фактичне значення критерію перевищує табличне при заданому рівні значущості і числі ступенів свободи $k = n - m - 1$, то можна зробити висновок про вірогідність коефіцієнта множинної кореляції (лівобічна критична область).

Важливими показниками кореляційного аналізу є коефіцієнти еластичності та нормовані коефіцієнти регресії. Потреба в їх застосуванні зумовлена тим, що коефіцієнти регресії, маючи різні фізичний зміст і одиниці вимірювання, не дають чіткого уявлення про те, які фактори мають найбільший вплив на результативну ознаку, тобто коефіцієнти регресії не можна безпосередньо порівнювати між собою.

Коефіцієнти еластичності (E_i) показують, на скільки відсотків змінюється результативна ознака при зміні факторної ознаки на 1%. Їх обчислюють за формулою

$$E_i = \beta_i \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}}, \quad (9.6)$$

де: β_i – коефіцієнт регресії при i – ому факторі, \bar{x}_i – середнє значення i -го фактора; \bar{y} – середнє значення результативної ознаки.

Нормовані коефіцієнти регресії показують, на скільки середніх квадратичних відхилень змінюється результативний показник при зміні відповідного фактора на одне значення середнього квадратичного відхилення. Вони характеризують вплив окремих факторів на результативну ознаку. Їх визначають за формулою

$$a_i = \beta_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y} \quad (9.7)$$

де: β_i – коефіцієнт регресії на i -му факторі; σ_{x_i} – середнє квадратичне відхилення i -го фактора; σ_y – середнє квадратичне відхилення результативного показника.

Завдання: Оцінити вплив на рівень політичної активності громадян таких показників, як вік, суспільно-політична свідомість, духовна зрілість, емоційна зрілість, соціальний інтелект. Дані опитування 64 осіб мають такий вигляд:

Вік	20	21	18	18	18	17	20	20
Суспільно-політична свідомість	6	7	7	6	8	6	5	6
Духовна зрілість	7	6	5	5	5	5	6	7
Емоційна зрілість	5	5	4	4	5	5	5	5
Соціальний інтелект	6	5	5	5	5	5	5	6
Рівень політичної активності	2	3	3	3	2	3	3	2

20	20	20	19	17	17	17	18	17	17	16	17	17	16	17
7	5	8	7	7	6	5	6	6	4	7	6	7	6	7
6	6	5	5	6	5	5	5	6	5	6	5	6	6	6
4	3	5	5	4	4	5	4	4	3	4	4	5	5	5
5	4	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	6	5	5
3	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2

17	16	17	17	17	16	17	17	18	18	18	18	18	18	17
7	5	6	7	6	6	9	6	6	5	5	7	7	7	6
6	6	6	5	6	6	7	6	5	5	5	6	6	6	7
4	4	5	5	5	4	5	5	6	3	5	4	4	5	4
5	5	5	5	5	5	6	6	6	4	5	5	5	6	6
3	3	3	3	3	3	2	3	3	3	3	2	3	2	3

18	17	17	18	18	17	18	18	17	18	18	18	18	19	18
5	6	6	5	7	6	9	8	6	7	4	6	5	7	7
7	6	7	7	7	7	7	6	6	7	6	6	7	6	6
5	4	4	6	4	4	5	4	4	7	3	3	4	3	2
6	5	6	7	5	5	6	5	5	7	4	5	5	5	4
3	3	3	3	3	3	2	2	3	2	3	3	3	3	3

17	18	18	18	18	19	18	18	18	18	17
6	6	8	5	7	9	7	6	6	6	5
6	5	6	6	5	8	7	6	6	5	5
4	4	4	4	5	5	5	4	5	4	3
5	5	5	5	5	6	6	5	5	4	4
3	3	3	3	3	2	2	3	3	3	3

Хід роботи

1. Вводимо дані в таблицю так, як це показано на рис. 9.1.

	А	В	С	Д	Е	Ф
	Вік	Суспільно-політична свідомість	Духовна зріпість	Емоційна зріпість	Соціальний інтелект	Рівень політичної активності
1						
2	20	6	7	5	6	2
3	21	7	6	5	5	3
4	18	7	5	4	5	3
5	18	6	5	4	5	3
6	18	8	5	5	5	2
7	17	6	5	5	5	3

Рис. 9.1. Зразок заповнення таблиці даними до задачі

Отож, вхідні дані містяться в блоках **A2:F65**, де **F2:F65** – результативна ознака.

2. Виділимо блок комірок розміром $5 \times (m + 1)$, де m – кількість змінних x_i , куди буде внесено результати обчислень параметрів $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$. У нашому випадку необхідно виділити блок розміром 5×6 . Нехай це буде блок комірок **H2:M6**. У виділеному блоці викликаємо «Вставити функцію» і в категорії «Статистические» обраємо функцію «ЛИНЕЙН». У вікні запиту необхідно вказати: у першому рядку – «відомі значення у», в нашому прикладі вони розташовані в блоці **F2:F65**, у другому – «відомі значення х» – це блок комірок **A2:E65**, у третьому рядку «константа» вводиться логічне значення «істина» (відповідає числу 1), що вказує на потребу розрахунку параметра β_0 . У останньому рядку «статистика» також має бути логічне значення «істина» (число 1) у тому випадку, коли необхідна додаткова статистична інформація (середні квадратичні відхилення параметрів регресії, коефіцієнт детермінації, кількість ступенів свободи, критична точка критерію Стьюдента, тощо) (рис. 9.2).

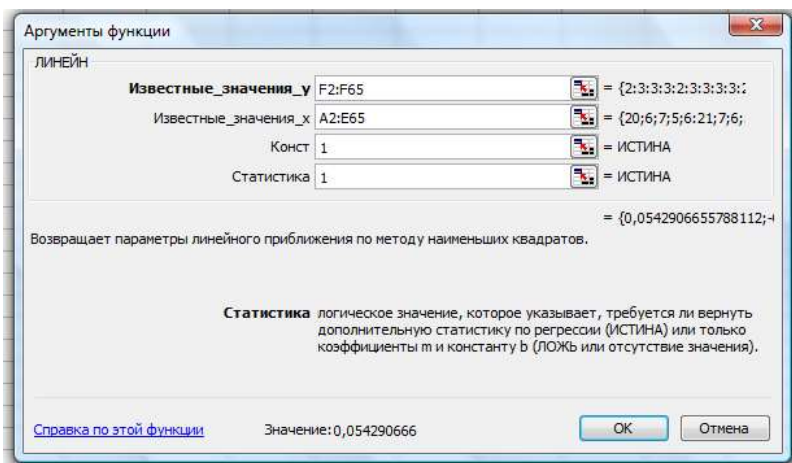


Рис. 9.2. Вікно статистичної функції **ЛИНЕЙН**

Натискаємо комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**, внаслідок чого у першому рядку блока **H2:M6** отримуємо значення всіх параметрів у зворотному порядку: у комірці **M2** – значення параметра β_0 , в **L2** – β_1 , в **K2** – β_2 , в **J2** – β_3 , в **I2** – β_4 , в **H2** – β_5 (рис. 9.3).

-0,008305	-0,1445843	-0,06987	-0,18158	-0,039669308	5,698148
0,125361	0,081644	0,0766573	0,042348	0,041680361	0,801262
0,430888	0,3431434	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
8,782618	58	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
5,170652	6,8293484	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д

Рис. 9.3. Обчислені параметри лінійної регресії

Додаткова регресійна статистика в масиві **H2:M6** подана в такому порядку (табл. 9.1).

β_5	β_4	β_3	β_2	β_1	β_0
σ_{β_5}	σ_{β_4}	σ_{β_3}	σ_{β_2}	σ_{β_1}	σ_{β_0}
R^2	Стандартна похибка				
Критерій Фішера	Ступені свободи				
Сума квадратів відхилень, що пояснюється регресією	Сума квадратів відхилень, що пояснюється похибкою				

Табл. 9.1. Розташування регресійної статистики

3. Відредагуємо отриману таблицю. Для цього виділимо діапазон комірок **H2:M6** і скопіюємо його. Зайдемо в меню «Правка», виберемо в ньому «Спеціальная вставка» і поставимо позначку навпроти «значення».
4. Створимо таблицю результатів обчислень. Об'єднуємо комірки **H8:M8** і вводимо назву «Коефіцієнти регресії». Об'єднуємо комірки **H11:M11** і вводимо назву «Середні квадратичні відхилення». Об'єднуємо комірки **H14:M14** і вводимо назву «Середні значення». Об'єднуємо комірки **H17:M17** і вводимо назву «Коефіцієнти еластичності». Об'єднуємо комірки **H20:M20** і вводимо назву «Нормовані коефіцієнти регресії».
5. У блок комірок **H9:L9** вводимо позначення $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$. У блок комірок **H12:M12** вводимо $\sigma_{\beta_1}, \sigma_{\beta_2}, \sigma_{\beta_3}, \sigma_{\beta_4}, \sigma_{\beta_5}, \sigma_u$.
6. У блок комірок **H15:M15** вводимо назви «Вік», «Суспільно-політична свідомість», «Духовна зрілість», «Емоційна зрілість», «Соціальний інтелект», «Рівень політичної активності».
7. У блок комірок **H18:L18** вводимо E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 . У блок комірок **H21:L21** вводимо a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .
8. У блок комірок **H10:L10** копіюємо вміст комірок **L2, K2, J2, I2, H2** в послідовності, описаній в таблиці 9.1.
9. У блок комірок **H13:L13** копіюємо вміст комірок **L3, K3, J3, I3, H3** в послідовності, описаній в таблиці 9.1.
10. У комірку **M13** вводимо формулу = СТАНДОТКЛОН(F2:F65).
11. У комірку **H16** вводимо формулу = СРЗНАЧ(A2:A65). Аналогічно обчислюємо середні значення в комірках **I16:M16**.
12. У комірку **H19** вводимо формулу = **H10*H16/\$M16** і за допомогою маркера заповнення поширюємо її на блок **I19:L19**.
13. У комірку **H22** вводимо формулу = **H10*H13/\$M13** і за допомогою маркера заповнення поширюємо її на блок **I22:L22**.
14. Отримуємо таблицю результатів (рис. 9.4).

-0,008305	-0,1445843	-0,06987	-0,18158	-0,039669308	5,698148
0,125361	0,081644	0,0766573	0,042348	0,041680361	0,801262
0,430888	0,3431434	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
8,782618	58	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
5,170652	6,8293484	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
Коефіцієнти регресії					
β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	
-0,020984	-0,1894647	-0,079728	-0,18343	0,054290666	
Середньоквадратичні відхилення					
$\sigma_{\beta 1}$	$\sigma_{\beta 2}$	$\sigma_{\beta 3}$	$\sigma_{\beta 4}$	$\sigma_{\beta 5}$	σ_y
0,041673	0,0413647	0,0761907	0,081324	0,129691636	0,436436
Середні значення					
Вік	Суспільно-політична свідомість	Духовна зрілість	Емоційна зрілість	Соціальний інтелект	Рівень політичної активності
18	6	6	4	5	3
Коефіцієнти еластичності					
E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	
-0,135918	-0,4359841	-0,172141	-0,29287	0,101794998	
Нормовані коефіцієнти регресії					
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
-0,002004	-0,0179572	-0,013919	-0,03418	0,016133061	

Рис. 9.4. Таблиця результатів регресійної статистики

15. Перевіримо надійність отриманих результатів. Об'єднуємо комірки **I24:L24** і вводимо назву «**Критерій Стьюдента**». Об'єднуємо комірки **I26:L26** і вводимо назву «**Критерій Фішера**».
16. У комірку **I25** вводимо t_{em} , у **K25** вводимо t_{kp} , у **I27** вводимо F_{em} , у **K27** вводимо \dot{y}_{mov} .
17. У комірку **J25** вводимо формулу = **КОРЕНЬ(Н4*15)/(1 – Н4)**.
18. У комірку **L25** вводимо формулу = **СТЬЮДРАСПОБР(2*0,01;58)**.
19. У комірку **J27** копіюємо вміст комірки **H5**.
20. У комірку **L27** вводимо формулу = **ФРАСП(J27;63-I5-1;I5)**.
21. Обчислимо парні коефіцієнти кореляції. Для цього сформуємо кореляційну таблицю в блоці комірок **H30:N36**. У комірки **I30:N30** вводимо назви «**Вік**», «**Суспільно-політична свідомість**», «**Духовна зрілість**», «**Емоційна зрілість**», «**Соціальний інтелект**», «**Рівень політичної активності**». Вводимо ці ж самі назви в блок комірок **H31:N36**.

22. Вводимо формули в комірки таблиці в такій послідовності:

- у комірку **J31** =КОРРЕЛ(B2:B65;A2:A65)
- у комірку **K31** =КОРРЕЛ(C2:C65;A2:A65)
- у комірку **L31** =КОРРЕЛ(D2:D65;A2:A65)
- у комірку **M31** =КОРРЕЛ(E2:E65;A2:A65)
- у комірку **N31** =КОРРЕЛ(F2:F65;A2:A65)
- у комірку **K32** =КОРРЕЛ(C2:C65;B2:B65)
- у комірку **L32** =КОРРЕЛ(D2:D65;B2:B65)
- у комірку **M32** =КОРРЕЛ(E2:E65;B2:B65)
- у комірку **N32** =КОРРЕЛ(F2:F65;B2:B65)
- у комірку **L33** =КОРРЕЛ(D2:D65;C2:C65)
- у комірку **M33** =КОРРЕЛ(E2:E65;C2:C65)
- у комірку **N33** =КОРРЕЛ(F2:F65;C2:C65)
- у комірку **M34** =КОРРЕЛ(F2:F65;C2:C65)
- у комірку **N34** =КОРРЕЛ(F2:F65;E2:E65)

Результати виконання обчислень подано на рис. 9.5.

парні коефіцієнти кореляції						
	Вік	Суспільно-політична свідомість	Духовна зрілість	Емоційна зрілість	Соціальний інтелект	Рівень політичної активності
Вік	1	0,1362792	0,10366	0,120071034	0,043051	-0,20448
Суспільно-політична свідомість		1	0,219778	0,243741546	0,309933	-0,56168
Духовна зрілість			1	0,192359116	0,573299	-0,28968
Емоційна зрілість				1	0,712655	-0,42805
Соціальний інтелект					1	-0,42108
Рівень політичної активності						1

Рис. 9.5. Парні коефіцієнти кореляції

Індивідуальні завдання №4

Залежність між коефіцієнтом IQ (ознака Y) та результатами тесту з української мови (ознака X_1), результатами тесту з математики (ознака X_2), швидкістю реакції (ознака X_3), середнім балом атестату (ознака X_4) наведено у таблицях. Обчислити коефіцієнти рівняння регресії, коефіцієнти еластичності, нормовані коефіцієнти регресії, парні коефіцієнти кореляції та зробити відповідні висновки щодо впливу ознак X_1, X_2, X_3, X_4 на результативну ознаку Y .

Варіант 1.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	14,85	60	30	0,15	5,0
2	11,94	48	19	0,02	3,1
3	8,03	39	8	0,14	4,7
4	7,11	28	18	0,11	2,5
5	9,50	45	9	0,12	4,9
6	9,40	37	23	0,10	2,6
7	11,60	58	15	0,13	4,6
8	8,14	27	17	0,09	3,4
9	15,62	58	28	0,07	4,8
10	11,12	47	16	0,12	4,9
11	7,34	38	7	0,08	3,2
12	10,58	44	15	0,11	4,7
13	7,37	23	25	0,15	2,7
14	10,63	57	8	0,13	5,0
15	10,63	38	24	0,07	2,0

Варіант 2.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	11,12	47	16	0,12	4,9
2	7,34	38	7	0,08	3,2
3	10,58	44	15	0,11	4,7
4	7,37	23	25	0,15	2,7
5	10,63	57	8	0,13	5,0
6	10,63	38	24	0,07	2,9
7	7,85	22	15	0,12	4,6
8	5,73	29	7	0,09	2,8
9	14,84	56	27	0,02	3,5
10	10,30	45	15	0,14	4,9
11	7,85	34	9	0,10	4,1
12	9,68	51	14	0,11	3,3
13	9,49	55	5	0,13	4,8
14	12,53	43	26	0,08	4,0
15	10,29	44	27	0,15	2,9

Варіант 3.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	7,85	60	30	0,15	5,0
2	5,73	48	19	0,02	3,1
3	14,84	39	8	0,14	4,7
4	10,30	28	18	0,11	2,5
5	7,85	45	9	0,12	4,9
6	9,68	37	23	0,10	2,6
7	9,49	58	15	0,13	4,6
8	12,53	27	17	0,09	3,4
9	10,29	58	28	0,07	4,8
10	8,99	47	16	0,12	4,9
11	12,28	38	7	0,08	3,2
12	8,00	44	15	0,11	4,7
13	7,27	23	25	0,15	2,7
14	7,47	57	8	0,13	5,0
15	10,86	38	24	0,07	2,0
16	5,23	26	12	0,13	3,4

Варіант 4.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	8,00	25	18	0,02	2,9
2	7,27	29	4	0,07	3,5
3	7,47	53	13	0,14	2,7
4	10,86	41	9	0,08	4,9
5	5,23	26	12	0,13	3,4
6	12,16	32	23	0,10	4,8
7	9,19	59	11	0,13	3,9
8	10,12	48	3	0,09	4,8
9	6,86	51	8	0,12	2,9
10	11,02	43	22	0,15	3,7
11	7,77	29	9	0,02	3,5
12	10,62	37	12	0,08	5,0
13	7,40	49	5	0,14	4,1
14	10,55	57	11	0,11	3,6
15	12,30	46	15	0,06	4,7
16	7,83	29	21	0,15	2,8

Варіант 5.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	10,55	57	11	0,11	3,6
2	12,30	46	15	0,06	4,7
3	7,83	29	21	0,15	2,8
4	11,10	35	18	0,05	4,9
5	7,66	38	10	0,14	3,6
6	9,26	30	22	0,06	3,1
7	11,50	45	6	0,02	5,0
8	14,51	60	20	0,05	4,2
9	6,33	39	7	0,09	2,8
10	12,94	50	21	0,06	4,7
11	13,13	49	15	0,04	4,8
12	7,28	25	13	0,07	5,1
13	5,10	31	10	0,05	5,0
14	12,01	28	11	0,09	4,9
15	13,05	15	7	0,10	4,4
16	9,20	40	9	0,11	4,1

Варіант 6.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	14,85	60	30	0,15	5,0
2	8,03	39	8	0,14	4,7
3	9,50	45	9	0,12	4,9
4	11,61	58	15	0,13	4,6
5	15,62	58	28	0,07	4,8
6	7,34	38	7	0,08	3,2
7	7,37	23	25	0,15	2,7
8	10,63	38	24	0,07	2,9
9	5,73	29	7	0,09	2,8
10	10,30	45	15	0,14	4,9
11	9,68	51	14	0,11	3,3
12	12,53	43	26	0,08	4,0
13	8,99	37	8	0,06	4,3
14	8,00	25	18	0,02	2,9
15	7,47	53	13	0,14	2,7

Варіант 7.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	5,73	29	7	0,09	2,8
2	7,85	34	9	0,10	4,1
3	12,53	43	26	0,08	4,0
4	12,28	33	24	0,12	5,0
5	7,47	53	13	0,14	2,7
6	5,23	26	12	0,13	3,4
7	12,16	32	23	0,10	4,8
8	6,86	51	8	0,12	2,9
9	11,02	43	22	0,15	3,7
10	7,77	29	9	0,02	3,5
11	10,62	37	12	0,08	5,0
12	7,40	49	5	0,14	4,1
13	10,55	57	11	0,11	3,6
14	12,30	46	15	0,06	4,7
15	7,83	29	21	0,15	2,8

Варіант 8.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	10,58	44	15	0,11	4,7
2	7,37	23	25	0,15	2,7
3	10,63	38	24	0,07	2,9
4	7,85	22	15	0,12	4,6
5	5,73	29	7	0,09	2,8
6	14,84	56	27	0,02	3,5
7	10,30	45	15	0,14	4,9
8	9,68	51	14	0,11	3,3
9	9,49	55	5	0,13	4,8
10	12,53	43	26	0,08	4,0
11	10,29	44	27	0,15	2,9
12	12,28	33	24	0,12	5,0
13	8,00	25	18	0,02	2,9
14	7,27	29	4	0,07	3,5
15	7,47	53	13	0,14	2,7

Варіант 9

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	8,99	37	8	0,06	4,3
2	12,28	33	24	0,12	5,0
3	8,00	25	18	0,02	2,9
4	7,27	29	4	0,07	3,5
5	7,47	53	13	0,14	2,7
6	10,86	41	9	0,08	4,9
7	5,23	26	12	0,13	3,4
8	12,16	32	23	0,10	4,8
9	9,19	59	11	1,13	2,9
10	10,12	48	3	0,09	3,7
11	6,86	51	8	0,12	3,5
12	11,02	43	22	0,15	5,0
13	7,77	29	9	0,02	4,1
14	10,62	37	12	0,08	4,3
15	7,40	49	5	0,14	3,3

Варіант 10.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	5,23	26	12	0,13	3,4
2	12,16	32	23	0,10	4,8
3	9,19	59	11	0,13	3,9
4	10,12	48	3	0,09	4,8
5	6,86	51	8	0,12	2,9
6	10,62	37	12	0,08	5,0
7	10,55	57	11	0,11	3,6
8	7,83	29	21	0,15	2,8
9	11,10	35	18	0,05	4,9
10	7,66	38	10	0,14	3,6
11	9,26	30	22	0,06	3,1
12	11,50	45	6	0,05	5,0
13	6,33	39	7	0,09	2,8
14	12,94	50	21	0,06	4,7
15	13,13	49	15	0,04	4,8

Варіант 11.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	9,50	45	9	0,12	4,9
2	8,14	27	17	0,09	3,4
3	7,34	38	7	0,08	3,2
4	7,37	23	25	0,15	2,7
5	10,63	38	24	0,07	2,9
6	5,73	29	7	0,09	2,8
7	10,30	45	15	0,14	4,9
8	9,68	51	14	0,11	3,3
9	12,53	43	26	0,05	4,0
10	8,99	37	8	0,14	4,3
11	7,27	29	4	0,06	3,5
12	11,10	35	18	0,02	4,9
13	7,47	53	13	0,09	2,7
14	9,26	30	22	0,06	3,1
15	12,16	32	23	0,04	4,8
16	9,19	59	11	0,13	3,9

Варіант 12.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	13,13	49	15	0,04	4,8
2	6,33	39	7	0,09	2,8
3	11,50	45	6	0,02	5,0
4	7,66	38	10	0,14	3,6
5	7,83	29	21	0,15	3,8
6	10,55	57	11	0,11	3,6
7	7,40	49	5	0,14	4,1
8	10,72	37	12	0,08	5,0
9	7,77	29	9	0,02	3,5
10	6,86	51	8	0,12	2,9
11	10,12	48	3	0,09	4,8
12	9,19	59	11	0,13	3,9
13	14,85	60	30	0,15	5,0
14	8,03	39	19	0,02	3,1
15	7,11	28	18	0,11	2,5

Варіант 13

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	10,29	44	27	0,15	2,9
2	12,53	43	26	0,08	4,0
3	9,49	55	5	0,13	4,8
4	9,68	51	14	0,11	3,3
5	7,85	34	9	0,10	4,1
6	10,30	45	15	0,14	4,9
7	14,84	56	27	0,02	3,5
8	5,73	29	7	0,09	2,8
9	7,85	22	15	0,12	4,6
10	10,63	57	8	0,13	5,0
11	7,37	23	25	0,15	2,7
12	10,58	44	15	0,11	4,7
13	7,34	38	7	0,08	3,2
14	11,12	47	16	0,12	4,9
15	15,62	58	28	0,07	4,8

Варіант 14.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	7,83	29	21	0,15	2,8
2	12,30	46	15	0,06	4,7
3	10,55	57	11	0,11	3,6
4	7,40	49	5	0,14	4,1
5	10,62	37	12	0,08	5,0
6	7,77	29	9	0,02	3,5
7	11,02	43	22	0,15	3,7
8	5,86	51	8	0,12	2,9
9	10,12	48	3	0,09	4,8
10	9,19	59	11	0,13	3,9
11	10,30	45	15	0,14	4,9
12	7,85	34	9	0,10	4,1
13	9,68	51	14	0,11	3,3
14	9,49	55	5	0,13	4,8
15	12,53	43	26	0,08	4,0
16	10,29	44	27	0,15	2,9

Варіант 15.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	36	16	83	460	250
2	45	18	240	503	262
3	37	13	125	496	256
4	40	21	86	548	279
5	43	17	221	472	267
6	42	12	201	484	284
7	44	23	217	537	271
8	47	24	97	461	263
9	41	18	144	493	257
10	44	19	205	539	261
11	41	20	156	526	283
12	40	15	175	467	269
13	45	17	189	542	269
14	38	21	86	472	253
15	43	18	204	483	278
16	39	20	105	5000	230

Варіант 16.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	439	17	221	472	267
2	448	23	217	537	271
3	419	18	144	493	257
4	418	20	156	526	283
5	451	17	189	542	269
6	381	21	86	472	253
7	439	15	110	538	267
8	423	17	210	523	259
9	396	21	125	539	254
10	412	20	93	501	268
11	402	15	125	463	254
12	413	22	87	542	273
13	389	17	216	498	263
14	418	18	173	498	281
15	405	15	214	480	257
16	399	21	92	460	273

Варіант 17.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	393	15	110	538	262
2	396	21	125	492	282
3	402	15	125	539	254
4	413	22	87	501	273
5	389	17	216	463	263
6	389	18	173	542	281
7	399	21	92	498	273
8	403	23	89	483	272
9	396	17	140	523	252
10	377	15	96	499	279
11	427	20	180	471	281
12	412	17	200	483	258
13	453	19	171	511	280
14	404	22	163	476	261
15	397	24	103	516	264
16	360	25	120	520	259

Варіант 18.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	393	15	110	538	262
2	396	21	125	492	282
3	402	15	125	539	254
4	413	22	87	501	273
5	389	17	216	463	263
6	399	18	173	542	281
7	403	21	92	498	273
8	396	23	89	483	271
9	377	17	140	523	272
10	427	15	96	499	252
11	412	20	180	471	279
12	453	17	200	483	281
13	404	19	171	511	258
14	397	22	163	476	280
15	380	24	103	516	261
16	420	29	120	510	264

Варіант 19.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	371	15	170	493	264
2	478	18	217	510	257
3	377	17	154	475	254
4	452	22	180	518	280
5	439	21	143	478	256
6	401	17	130	523	251
7	429	19	160	468	265
8	366	15	126	474	262
9	424	26	90	493	252
10	371	20	115	521	282
11	429	21	220	464	273
12	391	18	97	547	255
13	407	15	225	472	271
14	449	24	239	517	274
15	408	25	184	492	278
16	420	20	190	500	254

Варіант 20.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	14,85	60	30	0,15	5,0
2	11,94	48	19	0,02	3,1
3	8,03	39	8	0,14	4,7
4	7,11	28	18	0,11	2,5
5	9,50	45	9	0,12	4,9
6	9,40	37	23	0,10	2,6
7	11,60	58	15	0,13	4,6
8	8,14	27	17	0,09	3,4
9	15,62	58	28	0,07	4,8
10	11,12	47	16	0,12	4,9
11	7,34	38	7	0,08	3,2
12	10,58	44	15	0,11	4,7
13	7,37	23	25	0,15	2,7
14	10,63	57	8	0,13	5,0
15	10,63	38	24	0,07	2,0

Варіант 21.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	11,12	47	16	0,12	4,9
2	7,34	38	7	0,08	3,2
3	10,58	44	15	0,11	4,7
4	7,37	23	25	0,15	2,7
5	10,63	57	8	0,13	5,0
6	10,63	38	24	0,07	2,9
7	7,85	22	15	0,12	4,6
8	5,73	29	7	0,09	2,8
9	14,84	56	27	0,02	3,5
10	10,30	45	15	0,14	4,9
11	7,85	34	9	0,10	4,1
12	9,68	51	14	0,11	3,3
13	9,49	55	5	0,13	4,8
14	12,53	43	26	0,08	4,0
15	10,29	44	27	0,15	2,9

Варіант 22.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	7,85	60	30	0,15	5,0
2	5,73	48	19	0,02	3,1
3	14,84	39	8	0,14	4,7
4	10,30	28	18	0,11	2,5
5	7,85	45	9	0,12	4,9
6	9,68	37	23	0,10	2,6
7	9,49	58	15	0,13	4,6
8	12,53	27	17	0,09	3,4
9	10,29	58	28	0,07	4,8
10	8,99	47	16	0,12	4,9
11	12,28	38	7	0,08	3,2
12	8,00	44	15	0,11	4,7
13	7,27	23	25	0,15	2,7
14	7,47	57	8	0,13	5,0
15	10,86	38	24	0,07	2,0
16	5,23	26	12	0,13	3,4

Варіант 23.

№ з/п	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	8,00	25	18	0,02	2,9
2	7,27	29	4	0,07	3,5
3	7,47	53	13	0,14	2,7
4	10,86	41	9	0,08	4,9
5	5,23	26	12	0,13	3,4
6	12,16	32	23	0,10	4,8
7	9,19	59	11	0,13	3,9
8	10,12	48	3	0,09	4,8
9	6,86	51	8	0,12	2,9
10	11,02	43	22	0,15	3,7
11	7,77	29	9	0,02	3,5
12	10,62	37	12	0,08	5,0
13	7,40	49	5	0,14	4,1
14	10,55	57	11	0,11	3,6
15	12,30	46	15	0,06	4,7
16	7,83	29	21	0,15	2,8

Варіант 24.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	10,55	57	11	0,11	3,6
2	12,30	46	15	0,06	4,7
3	7,83	29	21	0,15	2,8
4	11,10	35	18	0,05	4,9
5	7,66	38	10	0,14	3,6
6	9,26	30	22	0,06	3,1
7	11,50	45	6	0,02	5,0
8	14,51	60	20	0,05	4,2
9	6,33	39	7	0,09	2,8
10	12,94	50	21	0,06	4,7
11	13,13	49	15	0,04	4,8
12	7,28	25	13	0,07	5,1
13	5,10	31	10	0,05	5,0
14	12,01	28	11	0,09	4,9
15	13,05	15	7	0,10	4,4
16	9,20	40	9	0,11	4,1

Варіант 25.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	14,85	60	30	0,15	5,0
2	8,03	39	8	0,14	4,7
3	9,50	45	9	0,12	4,9
4	11,61	58	15	0,13	4,6
5	15,62	58	28	0,07	4,8
6	7,34	38	7	0,08	3,2
7	7,37	23	25	0,15	2,7
8	10,63	38	24	0,07	2,9
9	5,73	29	7	0,09	2,8
10	10,30	45	15	0,14	4,9
11	9,68	51	14	0,11	3,3
12	12,53	43	26	0,08	4,0
13	8,99	37	8	0,06	4,3
14	8,00	25	18	0,02	2,9
15	7,47	53	13	0,14	2,7

Варіант 26.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	5,73	29	7	0,09	2,8
2	7,85	34	9	0,10	4,1
3	12,53	43	26	0,08	4,0
4	12,28	33	24	0,12	5,0
5	7,47	53	13	0,14	2,7
6	5,23	26	12	0,13	3,4
7	12,16	32	23	0,10	4,8
8	6,86	51	8	0,12	2,9
9	11,02	43	22	0,15	3,7
10	7,77	29	9	0,02	3,5
11	10,62	37	12	0,08	5,0
12	7,40	49	5	0,14	4,1
13	10,55	57	11	0,11	3,6
14	12,30	46	15	0,06	4,7
15	7,83	29	21	0,15	2,8

Лабораторна робота № 11. Використання однофакторного дисперсійного аналізу у психологічних дослідженнях

Мета: навчитись за допомогою калькулятора Excel застосовувати дисперсійний аналіз для дослідження впливу як одного фактора, так і взаємодії кількох, на результативну ознаку.

Теоретичні відомості

Дисперсійний аналіз, запропонований Р. Фішером, є статистичним методом для виявлення впливу окремих факторів на результати проведеного експерименту. Цей метод ґрунтується на припущенні про те, що якщо на об'єкт (групу досліджуваних) впливає декілька незалежних факторів і їх вплив накладається, то загальну дисперсію результативної ознаки можна розкласти на суму дисперсії, що виникає внаслідок дії кожного окремого фактора та дисперсії, зумовленої впливом випадкових чинників (залишкова дисперсія). Порівняння дисперсій, зумовлених впливом різних факторів із випадковою (залишковою) дисперсією, дає змогу оцінити значущість внеску кожного з факторів.

Основою дисперсійного аналізу є припущення про те, що одні змінні можуть розглядатися як причини, а інші – як наслідки. В психологічних дослідженнях саме змінні, що розглядаються як причини, вважаються незалежними факторами (змінними). Суть дисперсійного аналізу полягає в розчленуванні загальної дисперсії залежної змінної на окремі компоненти, зумовлені впливом конкретних факторів, і в перевірці гіпотез про значущість впливу цих факторів на досліджувану ознаку. Порівнюючи компоненти дисперсії одна з одною за допомогою критерію Фішера, можна визначити, яка частка загальної варіації результативної ознаки зумовлена впливом факторів. За кількістю факторів дисперсійний аналіз може бути однофакторним (вивчається вплив одного фактора), двофакторним і багатофакторним.

Нехай потрібно дослідити вплив на ознаку X певного одного фактора. Результати експерименту ділять на певну кількість груп, які відрізняються між собою ступенем дії фактора. Для зручності проведення обчислень результати експерименту заносимо у таку таблицю:

Ступінь впливу фактора	1	2	3	...	p
Спостережані значення ознаки X	$x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots, x_{n11}$	$x_{12}, x_{22}, x_{32}, \dots, x_{n22}$	$x_{13}, x_{23}, x_{33}, \dots, x_{n33}$		$x_{1p}, x_{2p}, x_{3p}, \dots, x_{npp}$
Групові середні	$\bar{x}_1 = \frac{1}{n1} \sum_{i=1}^{n1} x_{i1}$	$\bar{x}_2 = \frac{1}{n2} \sum_{i=1}^{n2} x_{i2}$	$\bar{x}_3 = \frac{1}{n3} \sum_{i=1}^{n3} x_{i3}$		$\bar{x}_p = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{np} x_{ip}$
Загальна середня	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}, N = \sum_{j=1}^p n_j$				
Вид дисперсій	Сума квадратів відхилень	Число ступенів свободи	Статистичні оцінки дисперсій		
Внутрішньо-групова	$D_{внутр} = \sum_{i=1}^{n1} \sum_{j=1}^p (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$	$N-p$	$SS_{внутр} = \frac{D_{внутр}}{N-p}$		
Міжгрупова	$D_{міжгруп} = \sum_{j=1}^p n_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x})^2$	$p-1$	$SS_{міжгруп} = \frac{D_{міжгруп}}{p-1}$		
Загальна	$D_{заг} = \sum_{i=1}^{n1} \sum_{j=1}^p (x_{ij} - \bar{x})^2$	$N-1$	$SS_{заг} = \frac{D_{заг}}{N-1}$		

Формулюємо такі гіпотези:

- H_0 : фактор не впливає на досліджувану ознаку .
- H_1 : фактор впливає на досліджувану ознаку.

Критичну точку знаходимо з таблиці значень критерію Фішера, критична область є правобічною. Емпіричне значення критерію обчислюємо за такою формулою

$$F_{емп} = \frac{SS_{міжгруп}}{SS_{внутр}}. \quad (11.1)$$

Завдання

Трьом групам студентів промовляли з різною швидкістю (низькою, середньою, високою) десять слів. Довести (або спростувати) припущення про те, що фактор швидкості пред'явлення слів впливає на показники їх відтворення. Емпіричні дані наведені у таблиці.

№ п/п	Швидкість пред'явлення		
	Низька	Середня	Висока
1	7	5	5
2	8	5	4
3	7	6	5
4	6	5	3
5	5	4	4
6	7	6	5
7		4	4
8			3

Хід роботи

Сформулюємо такі гіпотези.

- H_0 : відмінності в обсязі відтворення слів не є вираженішими, ніж випадкові відмінності в середині групи (фактор «швидкість пред'явлення» не впливає на показник відтворення).
 - H_1 : відмінності в обсязі відтворення слів вираженіші, ніж випадкові відмінності всередині групи.
1. Формуємо таблицю для обчислень. Для цього об'єднуємо комірки **A1:A2**, куди вводимо назву «№» та комірки **B1:D1**, куди вводимо назву «Швидкість пред'явлення». В комірку **B2** вводимо назву «Низька», в комірку **C2** вводимо назву «Середня», в комірку **D2** вводимо назву «Висока». В сформовану таблицю вносимо дані задачі.
 2. Вводимо в комірку **A11** назву “ ni ”, а в комірки **B11**, **C11**, **D11** – числа, що відповідають обсягам відповідних груп, які обчислюємо за формулами:
B11: =СЧЁТ(В3:В8);
C11: =СЧЁТ(С3:С9);
D11: =СЧЁТ(Д3:Д10).
 3. У комірку **A12** вводимо назву “ $1/ni$ ”. У відповідних комірках проводимо обчислення:
B12: =1/В11;
C12: =1/С11;
D12: =1/Д11.

4. У комірку **A13** вводимо назву “**Суми**”. Проводимо потрібні обчислення у відповідних комірках:
 - **B13:** =СУММ(B3:B8);
 - **C13:** =СУММ(C3:C9);
 - **D13:** =СУММ(D3:D10).
5. В комірку **A14** вводимо назву «**Середні**». Проводимо потрібні обчислення у відповідних комірках:
 - **B14:** = СРЗНАЧ(B3:B8);
 - **C14:** =СРЗНАЧ(C3:C9);
 - **D14:** =СРЗНАЧ(D3:D10).
6. Об’єднуємо комірки **A15:B15**, вводимо назву “**Загальний обсяг**”. В комірці **C15** вводимо формулу **C15:** =B11+C11+D11.
7. Об’єднуємо комірки **A16:B16**, вводимо назву “**Загальна середня**”. В комірці **C16** вводимо формулу **C16:**=СРЗНАЧ(B3:B8;C3:C9;D3:D10), як показано на рис. 11.1.

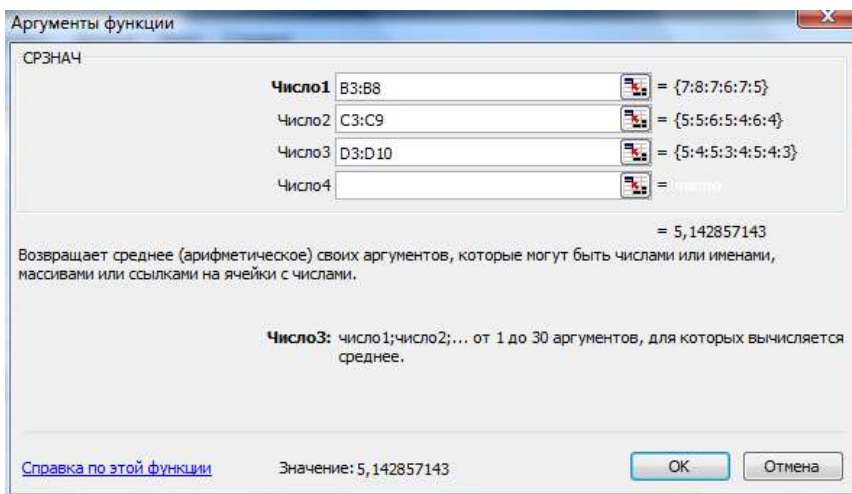


Рис. 11.1. Обчислення середнього значення

8. Об’єднуємо комірки **E1:G1**, вводимо назву “**Квадрати різниць по групах**”. У комірки **E2**, **F2**, **G2** вводимо назви «**Низька**», «**Середня**» і «**Висока**».
9. Об’єднуємо комірки **H1:J1**, вводимо назву “**Квадрати різниць із заг. сер.**”. У комірки **H2**, **I2**, **J2** вводимо назви «**Низька**», «**Середня**» і «**Висока**».

10. У комірці **E3** вводимо формулу $=(B3-B\$14)^2$. Поширюємо її на стовпець **E4: E8**.
11. У комірці **F3** вводимо формулу $=(C3-C\$14)^2$. Поширюємо її на стовпець **F4: F9**.
12. У комірці **G3** вводимо формулу $=(D3-D\$14)^2$. Поширюємо її на стовпець **G4: G10**.
13. У комірці **H3** вводимо формулу $=(B3-C\$16)^2$. Поширюємо її на стовпець **H4: H8**.
14. У комірці **I3** вводимо формулу $=(C3-C\$16)^2$. Поширюємо її на стовпець **I4: I9**.
15. У комірці **J3** вводимо формулу $=(D3-C\$16)^2$. Поширюємо її на стовпець **J4: J10**.

Результати обчислень показано на рис. 2. 11.

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	номери	Швидкість пред'явлення			Квадрати різниць по групах			Квадрати різниць із заг. сер.		
3		Низька	Середня	Висока	Низька	Середня	Висока	Низька	Середня	Висока
4	1	7	5	5	0,111111	0,000000	0,765625	3,44898	0,020408	0,020408
5	2	8	5	4	1,777778	0,000000	0,015625	8,163265	0,020408	1,306122
6	3	7	6	5	0,111111	1,000000	0,765625	3,44898	0,734694	0,020408
7	4	6	5	3	0,444444	0,000000	1,265625	0,734694	0,020408	4,591837
8	5	7	4	4	0,111111	1,000000	0,015625	3,44898	1,306122	1,306122
9	6	5	6	5	2,777778	1,000000	0,765625	0,020408	0,734694	0,020408
10	7		4	4		1,000000	0,015625		1,306122	1,306122
11	8			3			1,265625			4,591837
12	ni=	6	7	8						
13	1/ni=	0,166667	0,142857	0,125						
14	Суми	40	35	33						
15	Середні	6,666667	5	4,125						
16	Загальний обсяг		21							
17	Загальна середня		5,142857							

Рис. 2.11. Результати обчислень квадратів різниць

16. Об'єднуємо комірки **A18:V18; A19:V19; A20:V20; A21:V21**. Вводимо назви: «Вид дисперсії», «Внутрішньогрупова», «Міжгрупова», «Загальна».
17. Об'єднуємо комірки **C18:E18, F18:G18, H18:J18**. Водимо назви: «Сума квадратів відхилень», «Ступені свободи», «Статистичні оцінки дисперсії».
18. Об'єднуємо комірки **D19:E19, D20:E20, D21:E21, F19:G19, F20:G20, F21:G21, I19:J19, I20:J20, I21:J21**.
19. У комірки **C19, C20, C21** вводимо назви: «*Dвнутр*», «*Dміжгруп*», «*Dзаг*». В комірки **H19, H20, H21** вводимо назви «*SSвнутр*», «*SSміжгруп*», «*SSзаг*».
20. Об'єднуємо комірки **A22:V22** і вводимо назву «Критерій Фішера». У комірки **A22, A23, A24** вводимо назви «*F_{емп}*», «*F_{0,01}*», «*F_{0,05}*».

21. У комірку **DE19** вводимо формулу $=\text{СУММ}(\text{E3}:\text{E8};\text{F3}:\text{F9};\text{G3}:\text{G10})$. Введення даних в діалоговому вікні здійснюється, як у п. 7.
22. Виділяємо блок комірок **B11:D11**, копіюємо їх вміст за допомогою клавіш **Ctrl+C** та здійснюємо спеціальну вставку.
23. У комірку **DE20** вводимо формулу $=\text{B11}*(\text{B14}-\text{C16})^2+\text{C11}*(\text{C14}-\text{C16})^2+\text{D11}*(\text{D14}-\text{C16})^2$.
24. У комірку **DE21** вводимо формулу $=\text{СУММ}(\text{H3}:\text{H8};\text{I3}:\text{I9};\text{J3}:\text{J10})$, аналогічно, як у п. 7.
25. У комірки **FG19, FG20, FG21** вводимо формули
 - **FG19:** $=\text{C15}-3$;
 - **FG20:** $=3-1$;
 - **FG21:** $=\text{C15}-1$.
26. У комірки **IJ19, IJ20, IJ21** вводимо формули:
 - **IJ19:** $=\text{D19}/\text{F19}$;
 - **IJ20:** $=\text{D20}/\text{F20}$;
 - **IJ21:** $=\text{D21}/\text{F21}$.
27. У комірки **B23, B24, B25** вводимо формули:
 - **B23:** $=\text{I20}/\text{I19}$;
 - **B24:** $=\text{ФРАСПОБР}(0,05;\text{F20};\text{F19})$;
 - **B25:** $=\text{ФРАСПОБР}(0,01;\text{F20};\text{F19})$.
28. Робимо висновки на підставі отриманих числових результатів. Якщо емпіричне значення критерію є більшим за критичну точку, то нульову гіпотезу відхиляють (правобічна критична область). Результати обчислень наведено на рис. 11.3.

18	Вид дисперсії	Сума квадратів відхилень	Ступені свободи	Статистичні оцінки дисперсій
19	Внутрішньогрупова	$D_{внутр} = 14,208333$	18	$SS_{внутр} = 0,789351852$
20	Міжгрупова	$D_{міжгруп} = 22,36309524$	2	$SS_{міжгруп} = 11,18154762$
21	Загальна	$D_{заг} = 36,57142857$	20	$SS_{заг} = 1,828571429$
22	Критерій Фішера			
23	$F_{емп} =$	14,16548		
24	$F_{0,01} =$	3,554557		
25	$F_{0,05} =$	6,012905		
26				

Рис. 11.3. Результати дисперсійного аналізу

29. Задачу можна виконати значно швидше, застосувавши пакет «Анализ данных», розділ «Однофакторный дисперсионный анализ». Для цього необхідно внести дані в діалогове вікно так, як показано на рис. 11.4.

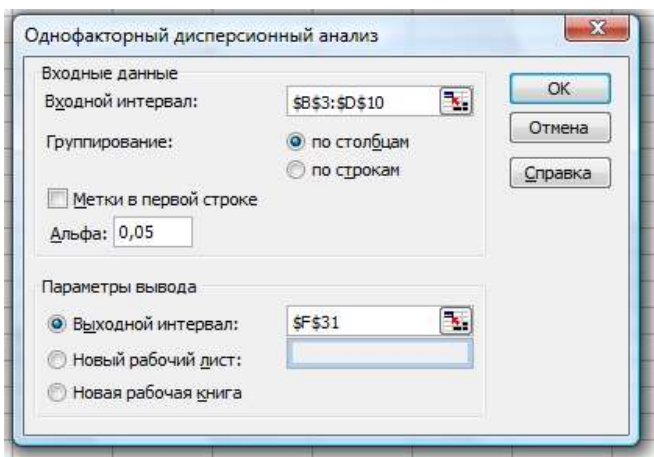


Рис. 11. 4. Вид данных для проведения дисперсионного анализа

Отримані результати наведені на рис.11. 5.

Однофакторный дисперсионный анализ						
ИТОГИ						
Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия		
Низька	6	40	6,666667	1,066667		
Середня	7	35	5	0,666667		
Висока	8	33	4,125	0,696429		
Дисперсионный анализ						
Источник вариации	SS	df	MS	F	P-Значение	F критическое
Между группами	22,3631	2	11,18155	14,16548	0,0002017	3,554557146
Внутри групп	14,20833	18	0,789352			

Рис. 11.5. Результаты дисперсионного анализа

Індивідуальні завдання № 5

При рівні значущості $\alpha=0,01$ перевірити гіпотези про те, чи існує вплив методики навчання (фактор А) на швидкість розв'язування задач.

1.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	9	8	10	12
A ₂	10	12	11	11
A ₃	8	16	10	18
A ₄	9	18	10	8

2.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	60	80	75	85
A ₂	75	66	85	80
A ₃	60	80	65	60
A ₄	95	85	100	80

3.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	25	28	20	22
A ₂	29	22	21	18
A ₃	19	25	30	22
A ₄	18	30	24	20

4.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	6	8	3	2
A ₂	5	4	10	11
A ₃	5	4	13	12
A ₄	18	16	21	20

5.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	28	26	21	25
A ₂	24	28	32	28
A ₃	23	24	20	24
A ₄	29	28	27	28

6.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	90	85	105	110
A ₂	80	110	115	90
A ₃	90	75	120	110
A ₄	75	120	110	85

7.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	10	7	8	6
A ₂	8	14	6	10
A ₃	15	12	11	9
A ₄	12	13	6	8

8.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	1	3	2	4
A ₂	1	2	5	3
A ₃	3	4	6	4
A ₄	2	4	4	5

9.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	2,2	2,6	2,8	3,1
A ₂	3,1	3,3	3,5	3,7
A ₃	2,4	2,6	2,8	2,6
A ₄	3,3	2,7	2,5	3,9

10.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	1,9	1,5	1,7	1,9
A ₂	2,1	2,2	2,5	1,8
A ₃	3	3,1	2,9	2,8
A ₄	3,1	3,3	2,9	2,8

11.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	10	12	15	11
A ₂	9	7	8	6
A ₃	11	9	8	10
A ₄	8	8	9	11

12.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	22	24	26	25
A ₂	27	24	26	23
A ₃	31	30	29	27
A ₄	29	29	25	30

13.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	0,9	0,8	0,5	1,1
A ₂	1,5	1,7	1,2	1,6
A ₃	2,2	1,9	2,1	2,2
A ₄	1,9	1,7	1,4	1,6

14.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	12	15	14	11
A ₂	18	19	21	23
A ₃	19	17	22	19
A ₄	21	23	22	23

15.

Рівень фактора	Спостережувані значення			
A ₁	5,5	5,7	6,1	6,5
A ₂	7,4	7,6	7,2	7,1
A ₃	6,3	6,9	6,5	6,6
A ₄	7,9	8,1	7,8	8,1

Лабораторна робота № 12. Використання двофакторного дисперсійного аналізу у психологічних дослідженнях

Мета: навчитись за допомогою калькулятора Excel застосовувати дисперсійний аналіз для дослідження впливу двох факторів на результативну ознаку.

Теоретичні відомості

Нехай необхідно визначити вплив двох факторів **A** та **B** на певну ознаку **Y**. Для цього необхідно, щоб дослід здійснювався при фіксованих рівнях факторів **A** та **B**, а також їх одночасній дії на ознаку. При цьому дослід здійснюємо однаково кількість разів (*n* разів) для кожного з рівнів факторів **A** та **B**. Загальну кількість експериментів позначимо буквою *N*.

Формулюємо три групи статистичних гіпотез.

Набір A:

- H_{0A} : розсіювання ознаки, зумовлене впливом фактора **A**, не більш виражене, ніж розсіювання, зумовлене впливом випадкових чинників (вплив фактора **A** відсутній);
- H_{1A} : розсіювання ознаки, зумовлене впливом фактора **A**, більш виражене, ніж розсіювання, зумовлене впливом випадкових чинників (фактор **A** впливає на результат експерименту).

Набір B:

- H_{0B} : розсіювання ознаки, зумовлене впливом фактора **B**, не більш виражене, ніж розсіювання, зумовлене впливом випадкових чинників (фактор **B** не впливає на результат експерименту);
- H_{1B} : розсіювання ознаки, зумовлене впливом фактора **B**, більш виражене, ніж розсіювання, зумовлене впливом випадкових чинників (фактор **B** впливає на результат експерименту).

Набір AB:

- H_{0AB} : вплив фактора **A** на результат експерименту однаковий при різних градаціях фактора **B**, і навпаки, вплив фактора **B** на результат експерименту не залежить від градацій фактора **A**;
- H_{1AB} : вплив фактора **A** різний при різних градаціях фактора **B**, і навпаки, вплив фактора **B** на результат експерименту залежить від градацій фактора **A**.

Цим гіпотезам відповідає статистичний критерій Фішера з правобічною критичною областю. Обчислюємо емпіричні значення критерію за формулами, наведеними в таблицях 12.1 та 12.2:

$$F_A = \frac{S_A^2}{S^2} - \quad (12.1)$$

характеризує варіативність ознаки, зумовлену дією фактора **A**,

$$F_B = \frac{S_B^2}{S^2} - \quad (12.2)$$

характеризує варіативність ознаки, зумовлену дією фактора **B**,

$$F_{AB} = \frac{S_{AB}^2}{S^2} - \quad (12.3)$$

характеризує варіативність ознаки, зумовлену взаємодією факторів **A** та **B**.

З таблиці критичних точок критерію Фішера, або за допомогою статистичної функції Excel **ФРАСПОБР**, на заданому рівні значущості α та знайдених ступенях свободи знаходимо критичні точки: $F_{крA}(\alpha; k_A; k)$, $F_{крB}(\alpha; k_B; k)$, $F_{крAB}(\alpha; k_{AB}; k)$.

Якщо $F_A > F_{крA}$, то нульову гіпотезу H_{0A} відхиляємо і приймаємо H_{1A} .

Якщо $F_B > F_{крB}$, то нульову гіпотезу H_{0B} відхиляємо і приймаємо H_{1B} .

Якщо $F_{AB} > F_{крAB}$, то нульову гіпотезу H_{0AB} відхиляємо і приймаємо H_{1AB} .

Таблиця 12.1

Фактор B	Рівні фактора A				Середня величина за рядками
	A_1	A_2	...	A_p	
B_1	$x_{111}, x_{211},$ $x_{311}, \dots, x_{n11},$ блочна середня: $\bar{x}_{11} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i11}$	$x_{121}, x_{221},$ $x_{321}, \dots, x_{n21},$ блочна середня: $\bar{x}_{21} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i21}$...	$x_{1p1}, x_{2p1},$ $x_{3p1}, \dots, x_{np1},$ блочна середня: $\bar{x}_{p1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ip1}$	$\bar{y}_1 = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p x_{ik}$
B_2	$x_{112}, x_{212},$ $x_{312}, \dots, x_{n12},$ блочна середня: $\bar{x}_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i12}$	$x_{122}, x_{222},$ $x_{322}, \dots, x_{n22},$ блочна середня: $\bar{x}_{22} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i22}$...	$x_{1p2}, x_{2p2},$ $x_{3p2}, \dots, x_{np2},$ блочна середня: $\bar{x}_{p2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ip2}$	$\bar{y}_2 = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p x_{i2k}$
...

Bq	$x_{11q}, x_{21q},$ $x_{31q}, \dots, x_{n1q},$ блочна середня: $\bar{x}_{1q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i1q}$	$x_{12q}, x_{22q},$ $x_{32q}, \dots, x_{n2q},$ блочна середня: $\bar{x}_{21} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ii2q}$		$x_{1pq}, x_{2pq},$ $x_{3pq}, \dots, x_{npq},$ блочна середня: $\bar{x}_{p1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ii1}$	$\bar{y}_q = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p x_{iqk}$
Середня величина за стовпцями	$\bar{z}_1 = \frac{1}{nq} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q x_{ij1}$	$\bar{z}_2 = \frac{1}{nq} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q x_{ij2}$		$\bar{z}_p = \frac{1}{nq} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q x_{ijp}$	
Загальна середня величина $\bar{x} = \frac{1}{npq} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^p x_{ijk}$					

Таблиця 12. 2

Джерело розсіювання	Сума квадратів відхилень	Ступені свободи	Виправлені дисперсії
Фактор А	$Q_A = nq \sum_{j=1}^p (z_j - \bar{x})^2$	$k_A = p - 1$	$S_A^2 = \frac{Q_A}{k_A}$
Фактор В	$Q_B = np \sum_{i=1}^q (\bar{y}_i - \bar{x})^2$	$k_B = q - 1$	$S_B^2 = \frac{Q_B}{k_B}$
Фактор АВ (одночасно)	$Q_{AB} = n \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^p (\bar{x}_{jk} - \bar{z}_k - \bar{y}_j + \bar{x})^2$	$k_{AB} = (p-1)(q-1)$	$S_B^2 = \frac{Q_{AB}}{k_{AB}}$
Випадкове	$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^p (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2$	$k = N - pq$	$S^2 = \frac{Q}{k}$

Завдання

Досліджувався вплив факторів А та В на рейтинг лівих партій у відсотках: фактор А – регіони (A_1 – західний, A_2 – південний, A_3 – східний); фактор В – віковий рівень опитаних (B_1 – до 30 років, B_2 – 30-55 років, B_3 – 55-70 років). При рівні значущості 0,01 перевірити вплив факторів А та В та їх сумісний вплив на досліджувану ознаку. Результати досліджень наведено у таблиці:

Фактор В	Фактор А		
	A_1	A_2	A_3
B_1	9,5; 5,5; 4,2; 6,7; 12,4; 16,8; 2,5; 10,2; 5,8; 6,4	4,2; 10,5; 8,9; 9,6; 12,4; 5,7; 7,3; 8,4; 13,4; 15,5	8,6; 7,5; 4,3; 19,8; 26,4; 3,2; 32,4; 3,8; 4,5; 3,6
B_2	2,5; 3,4; 7,8; 12,4; 2,8; 4,5; 3,9; 6,7; 2,3; 4,9	6,5; 7,2; 13,6; 22,4; 30,5; 4,2; 7,8; 4,8; 7,9; 12,4	12,5; 10,6; 22,4; 8,5; 4,3; 3,3; 7,8; 4,4; 5,6; 9,7
B_3	2,1; 3,3; 7,8; 2,2; 3,2; 4,6; 12,1; 13,1; 6,7; 8,5	4,5; 12,6; 22,5; 40,1; 3,6; 8,5; 31,6; 6,2; 3,2; 5,6	15,8; 35,6; 21,4; 3,2; 4,5; 3,6; 8,4; 9,1; 7,3; 4,2

Хід роботи

Сформулюємо гіпотези

- H_{0A} : відмінності в рейтингу лівих партій, зумовлені впливом регіону проживання виборців, не більш виражені, ніж випадкові відмінності між показниками рейтингу (фактор А не впливає на рейтинг лівих партій);
- H_{1A} : відмінності в рейтингу лівих партій, зумовлені впливом регіону проживання виборців, більш виражені, ніж випадкові відмінності між показниками рейтингу (рейтинг лівих партій зумовлений впливом фактора А);
- H_{0B} : відмінності в рейтингу лівих партій, зумовлені впливом віку виборців, не більш виражені, ніж випадкові відмінності між показниками рейтингу (фактор В не впливає на рейтинг лівих партій);
- H_{1B} : відмінності в рейтингу лівих партій, зумовлені впливом віку виборців, більш виражені, ніж випадкові відмінності між показниками рейтингу (рейтинг лівих партій зумовлений впливом фактора В);
- H_{0AB} : вплив регіону проживання виборців на рейтинг лівих партій однаковий при різних градаціях віку, і навпаки, вплив вікового

фактора на рейтинг лівих партій не залежить від градацій фактора регіону проживання;

- Н_{1AB}: вплив регіону проживання виборців на рейтинг лівих партій різний при різних градаціях віку, і навпаки, вплив вікового фактора на рейтинг лівих партій залежить від градацій фактора регіону проживання.

1. Формуємо таблицю для обчислень, як показано на рис. 12.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2	Фактор B	Фактор A - регіон										Ранги квадратів			
3	як опитанка	A1	середнє	випадков.	A2	середнє	випадков.	A3	середнє	випадков.			A	B	AB
4		Знайд.	по блоках	e	Підсумк.	по блоках	e	Середнє	по блоках	e					
5		9,5			4,2			8,6							
6		5,6			10,5			7,5							
7		4,2			8,9			4,3							
8	B1	6,7			9,8			19,8							
9	від 30	12,4			12,4			20,4			Середнє				
10	років	16,8			5,7			3,2			по B1				
11		2,5			7,3			32,4							
12		10,2			8,4			3,8							
13		5,8			13,4			4,5							
14		6,4			15,5			3,6							
15		2,5			6,5			12,5							
16		3,4			7,2			10,6							
17	B2	7,8			13,6			22,4							
18	від 30 до	12,4			22,4			8,5			Середнє				
19	55 років	2,8			30,5			4,3			по B2				
20		4,5			4,2			3,3							
21		3,9			7,8			7,8							
22		8,7			4,8			4,4							
23		2,3			7,9			5,6							
24		4,9			12,4			9,7							
25		2,1			4,5			15,8							
26		3,3			12,6			16,6							
27		7,8			22,5			21,4							
28	B3	2,2			40,1			3,2							
29	від 65 до	3,2			3,6			4,5			Середнє				
30	70 років	4,6			8,5			3,6			по B3				
31		12,1			31,6			8,4							
32		13,1			6,2			9,1							
33		6,7			3,2			7,3							
34		8,5			5,6			4,2							

Рис. 12.1. Таблиця для проведення двофакторного дисперсійного аналізу

- В комірку C4 вводимо формулу =СРЗНАЧ(B4:B13);
у комірку C14 вводимо формулу =СРЗНАЧ(B14:B23);
у комірку C24 вводимо формулу =СРЗНАЧ(B24:B33);
у комірку F4 вводимо формулу =СРЗНАЧ(E4:E13);
у комірку F14 вводимо формулу =СРЗНАЧ(E14:E23);
у комірку F24 вводимо формулу =СРЗНАЧ(E24:E33);
у комірку I4 вводимо формулу =СРЗНАЧ(H4:H13);
у комірку I14 вводимо формулу =СРЗНАЧ(H14:H23);
у комірку I24 вводимо формулу =СРЗНАЧ(H24:H33).
- В комірку L4 вводимо формулу =СРЗНАЧ(B4:B13;E4:E13;H4:H13);
у комірку L14 вводимо формулу

=СРЗНАЧ(В14:В23;Е14:Е23;Н14:Н23);
у комірку L24 вводимо формулу
=СРЗНАЧ(В24:В33;Е24:Е33;Н24:Н33).

Формули цього пункту вводимо, за зразком, наведеним на рисунку 12. 2 .

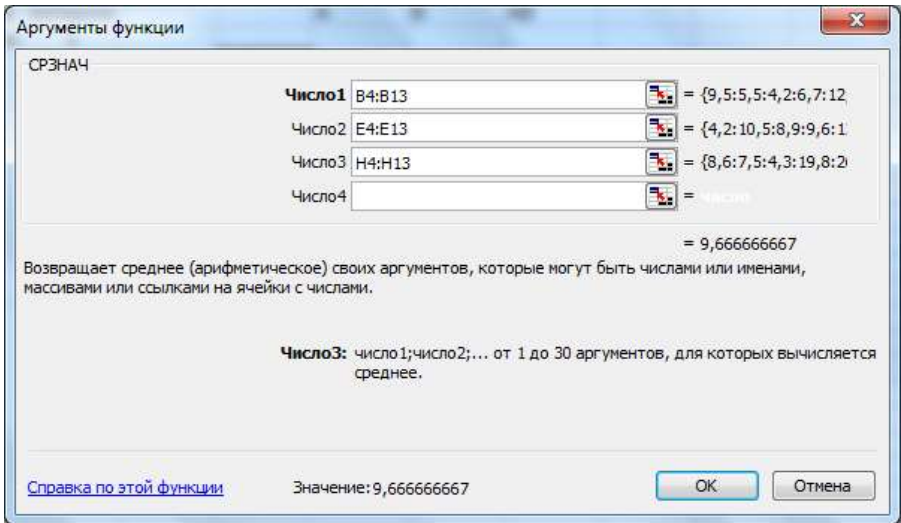


Рис. 12. 2. Ввід даних для обчислення середніх

4. Об'єднуємо комірки A34:A35 і вводимо назву «Середні по А».
5. У комірку B35 вводимо формулу =СРЗНАЧ(В4:В33);
у комірку E35 вводимо формулу =СРЗНАЧ(Е4:Е33);
у комірку H35 вводимо формулу =СРЗНАЧ(Н4:Н33).
6. У комірку A36 вводимо назву «Загальне середнє». В комірку C36 вводимо формулу =СРЗНАЧ(В4:В33;Е4:Е33;Н4:Н33), аналогічно як в пункті 3.
7. У комірку A37 вводимо назву «Загальний обсяг», а в комірку C37 вводимо формулу =СЧЁТ(В4:В33;Е4:Е33;Н4:Н33). Діапазон даних в цій формулу вводимо аналогічно, як в пункті 3.
8. У комірку A38 вводимо назву «Кількість експериментів», а в комірку C38 вводимо формулу =СЧЁТ(В4:В13).
9. У комірку A39 вводимо назву «Рівні фактора А», а в комірку C39 вводимо число 3.
10. У комірку A40 вводимо назву «Рівні фактора В», а в комірку C40 вводимо число 3.

11. Об'єднуємо комірки **M1:N1:O1** і вводимо назву «**Різниця квадратів**»; в комірку **M2** вводимо назву «**A**», в комірку **N2** вводимо назву «**B**», в комірку **O2** вводимо назву «**AB**».
12. У комірку **M4** вводимо формулу $=(B35-C36)^2$;
у комірку **M5** вводимо формулу $=(E35-C36)^2$;
у комірку **M6** вводимо формулу $=(H35-C36)^2$.
13. У комірку **N4** вводимо формулу $=(L4-C36)^2$;
у комірку **N5** вводимо формулу $=(L14-C36)^2$;
у комірку **N6** вводимо формулу $=(L24-C36)^2$.
14. У комірку **O4** вводимо формулу $=(C4-B35-L4+C36)^2$;
у комірку **O5** вводимо формулу $=(C14-B35-L14+C36)^2$;
у комірку **O6** вводимо формулу $=(C24-B35-L24+C36)^2$;
у комірку **O7** вводимо формулу $=(F4-E35-L4+C36)^2$;
у комірку **O8** вводимо формулу $=(F14-E35-L14+C36)^2$;
у комірку **O9** вводимо формулу $=(F24-E35-L24+C36)^2$;
у комірку **O10** вводимо формулу $=(I4-H35-L4+C36)^2$;
у комірку **O11** вводимо формулу $=(I14-H35-L14+C36)^2$;
у комірку **O12** вводимо формулу $=(I24-H35-L24+C36)^2$.
15. У комірку **D4** вводимо формулу $=(B4-C\$4)^2$ і поширюємо за допомогою маркера заповнення її вміст на весь блок **D4: D13**;
у комірку **D14** вводимо формулу $=(B14-C\$14)^2$ і поширюємо за допомогою маркера заповнення її вміст на весь блок **D14: D23**;
у комірку **D24** вводимо формулу $=(B24-C\$24)^2$ і поширюємо за допомогою маркера заповнення її вміст на весь блок **D24: D33**;
у комірку **G4** вводимо формулу $=(E4-F\$4)^2$ і поширюємо за допомогою маркера заповнення її вміст на весь блок **G4: G13**;
у комірку **G14** вводимо формулу $=(E14-F\$14)^2$ і поширюємо за допомогою маркера заповнення її вміст на весь блок **G14: G23**;
у комірку **G24** вводимо формулу $=(E24-F\$24)^2$ і поширюємо за допомогою маркера заповнення її вміст на весь блок **G24: G33**;
у комірку **J4** вводимо формулу $=(H4-I\$4)^2$ і поширюємо за допомогою маркера заповнення її вміст на весь блок **J4: J13**;
у комірку **J14** вводимо формулу $=(H14-I\$14)^2$ і поширюємо за допомогою маркера заповнення її вміст на весь блок **J14: J23**;
у комірку **J24** вводимо формулу $=(H24-I\$24)^2$ і поширюємо за допомогою маркера заповнення її вміст на весь блок **J24: J33**.
16. Сформуємо таблицю для підсумкових обчислень, як показано на рисунку 12. 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
43	Джерело розсіювання			Ступені свободи		Статистичні оцінки дисперсій		
44	Фактор А							
45	Фактор В							
46	Фактор АВ							
47	Випадкове							

Рис. 12. 3. Таблиця для підсумкових обчислень, пов'язаних з двофакторним дисперсійним аналізом

17. У комірки **C44**, **C45**, **C46**, **C47** вводимо відповідні формули:
 $=C38*C40*СУММ(M4:M6);$
 $=C38*C39*СУММ(N4:N6);$
 $=C38*СУММ(O4:O12);$
 $=СУММ(D4:D33;G4:G33;J4:J33).$
18. У комірки **D44**, **D45**, **D46**, **D47** вводимо відповідні формули:
 $=C39-1;$
 $=C40-1;$
 $=(C39-1)*(C40-1);$
 $=C37-C39*C40.$
19. У комірки **F44**, **F45**, **F46**, **F47** вводимо відповідні формули:
 $=C44/D44;$
 $=C45/D45;$
 $=C46/D46;$
 $=C47/D47.$
20. Сформуємо таблицю для обчислень емпіричних значень критерію та критичних точок критерію Фішера за зразком, наведеним на рисунку 12. 4.

	A	B	C	D
49	Критерій Фішера			
50	F _A		F _{0,01}	
51	F _B		F _{0,01}	
52	F _{AB}		F _{0,01}	

Рис. 12. 4. Таблиця для обчислення емпіричних значень критерію та критичних точок

21. У комірку **B50** вводимо формулу $=F44/F47;$
у комірку **B51** вводимо формулу $=F45/F47;$
у комірку **B52** вводимо формулу $=F46/F47;$
у комірку **D50** вводимо формулу $=ФРАСПОБР(0,01;D44;D47);$
у комірку **D51** вводимо формулу $=ФРАСПОБР(0,01;D45;D47)$

у комірці **D52** вводимо формулу
=FРАСПОБР(0,01;D46;D47). На рис. 12. 5 наведено отримані результати

	A	B	C	D
49	Критерій Фішера			
50	FA	3,661244	F0,01	4,877205
51	FB	0,449691	F0,01	4,877205
52	FAB	0,473713	F0,01	3,559973

Рис. 12. 5. Результати обчислень критичних точок критерію Фішера

- Висновки. Оскільки F_A є меншим за $F_{0,01}$, то потрапляємо в область прийняття гіпотези H_{01} . Оскільки F_B є меншим за $F_{0,01}$, то потрапляємо в область прийняття гіпотези H_{02} . Оскільки F_{AB} є меншим за $F_{0,01}$, то потрапляємо в область прийняття гіпотези H_{0AB} . Отже, жоден з факторів та їх сумісна дія не впливають на рейтинг лівих партій.
- Розрахунки двофакторної дисперсійної моделі можна провести за допомогою пакета «Анализ данных», розділ «Двофакторный дисперсионный анализ с повторениями». Для цього сформуємо нову таблицю даних, як показано на рис. 12. 6.

	A	B	C	D
	Фактор B	Фактор A: регион		
		Запад	Південь	Схід
54	Фактор B			
55	від			
56	до 30 років	9,5	4,2	8,6
57		5,5	10,5	7,5
58		4,2	8,9	4,3
59		6,7	9,6	19,8
60		12,4	12,4	26,4
61		16,8	5,7	3,2
62		2,5	7,3	32,4
63		10,2	8,4	3,8
64		5,8	13,4	4,5
65		6,4	16,5	3,6
66	від 30	2,5	6,5	12,5
67	до 55	3,4	7,2	10,6
68		7,8	13,6	22,4
69		12,4	22,4	8,5
70		2,8	30,5	4,3
71		4,5	4,2	3,3
72		3,9	7,8	7,8
73		6,7	4,8	4,4
74		2,3	7,9	5,6
75		4,9	12,4	9,7
76	від 55	2,1	4,5	15,8
77	до 70	3,3	12,6	35,6
78		7,8	22,5	21,4
79		2,2	40,1	3,2
80		3,2	3,6	4,6
81		4,6	8,5	3,6
82		12,1	31,6	8,4
83		13,1	6,2	9,1
84		6,7	3,2	7,3
85		8,5	5,6	4,2

Рис. 12. 6. Таблиця даних для проведення двофакторного дисперсійного аналізу

Заходимо в меню «Сервис» → «Анализ данных» → «Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями», і у діалоговому вікні, що з'явилося вводимо дані, як показано на рис. 12. 7.

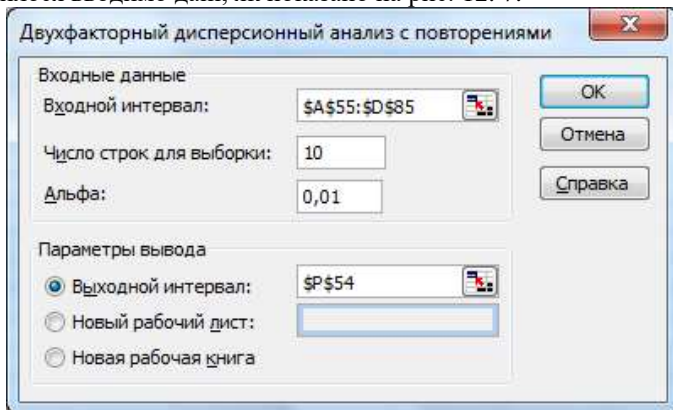


Рис. 12.7. Меню двофакторного дисперсійного аналізу

Порівнюємо результати, отримані двома методами.

Статистичні таблиці

Таблиця 1.

Щільність стандартного нормального розподілу

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002

3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблиця 2

Значення функції Лапласа

z	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Таблиця 3

Критичні значення розподілу χ^2

v	P			v	P		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
1	10,83	6,63	3,84	41	74,74	64,95	56,94
2	13,82	9,21	5,99	42	76,08	66,21	58,12
3	16,27	11,34	7,81	43	77,42	67,46	59,30
4	18,47	13,28	9,49	44	78,75	68,71	60,48
5	20,52	15,09	11,07	45	80,08	69,96	61,66
6	22,46	16,81	12,59	46	81,40	71,20	62,83
7	24,32	18,48	14,07	47	82,72	72,44	64,00
8	26,12	20,09	15,51	48	84,04	73,68	65,17
9	27,88	21,67	16,92	49	85,35	74,92	66,34
10	29,59	23,21	18,31	50	86,66	76,15	67,50
11	31,26	24,72	19,68	51	87,97	77,39	68,67
12	32,91	26,22	21,03	52	89,27	78,62	69,83
13	34,53	27,69	22,36	53	90,57	79,84	70,99
14	36,12	29,14	23,68	54	91,87	81,07	72,15
15	37,70	30,58	25,00	55	93,17	82,29	73,31
16	39,25	32,00	26,30	56	94,46	83,51	74,47
17	40,79	33,41	27,59	57	95,75	84,73	75,62
18	42,31	34,81	28,87	58	97,04	85,95	76,78
19	43,82	36,19	30,14	59	98,32	87,17	77,93
20	45,31	37,57	31,41	60	99,61	88,38	79,08
21	46,80	38,93	32,67	61	100,89	89,59	80,23
22	48,27	40,29	33,92	62	102,17	90,80	81,38
23	49,73	41,64	35,17	63	103,44	92,01	82,53
24	51,18	42,98	36,42	64	104,72	93,22	83,68
25	52,62	44,31	37,65	65	105,99	94,42	84,82
26	54,05	45,64	38,89	66	107,26	95,63	85,96
27	55,48	46,96	40,11	67	108,53	96,83	87,11
28	56,89	48,28	41,34	68	109,79	98,03	88,25
29	58,30	49,59	42,56	69	111,06	99,23	89,39
30	59,70	50,89	43,77	70	112,32	100,43	90,53
31	61,10	52,19	44,99	71	113,58	101,62	91,67
32	62,49	53,49	46,19	72	114,84	102,82	92,81
33	63,87	54,78	47,40	73	116,09	104,01	93,95
34	65,25	56,06	48,60	74	117,35	105,20	95,08
35	66,62	57,34	49,80	75	118,60	106,39	96,22
36	67,99	58,62	51,00	76	119,85	107,58	97,35
37	69,35	59,89	52,19	77	121,10	108,77	98,48
38	70,70	61,16	53,38	78	122,35	109,96	99,62
39	72,05	62,43	54,57	79	123,59	111,14	100,75
40	73,40	63,69	55,76	80	124,84	112,33	101,88

Таблиця 4

Критичні значення розподілу Фішера-Снедекора

Рівень значущості $p=0,01$										
k2	k1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30

Рівень значущості $p=0,05$										
k2	k1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54

Таблиця 5

Критичні значення критерію Манна-Уїтні

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p=0,05$									
3	-	0							
4	-	0	1						
5	0	1	2	4					
6	0	2	3	5	7				
7	0	2	4	6	8	11			
8	1	3	5	8	10	13	15		
9	1	4	6	9	12	15	18	21	
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62
$p=0,01$									
5	-	-	0	1					
6	-	-	1	2	3				
7	-	0	1	3	4	6			
8	-	0	2	4	6	7	9		
9	-	1	3	5	7	9	11	14	
10	-	1	3	6	8	11	13	16	19
11	-	1	4	7	9	12	15	18	22
12	-	2	5	8	11	14	17	21	24
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47

Таблица 5 (продовження)

<i>n</i>	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
<i>p</i> =0,05										
21	19	26	34	41	49	57	65	73	81	
22	20	28	36	44	52	60	69	77	85	
23	21	29	37	46	55	63	72	81	90	
24	22	31	39	48	57	66	75	85	94	
25	23	32	41	50	60	69	79	89	98	
26	24	33	43	53	62	72	82	93	103	
27	25	35	45	55	65	75	86	96	107	
28	26	36	47	57	68	79	89	100	111	
29	27	38	48	59	70	82	93	104	116	
30	28	39	50	62	73	85	96	108	120	
31	29	41	52	64	76	88	100	112	124	
32	30	42	54	66	78	91	103	116	129	
33	31	43	56	68	81	94	107	120	133	
34	32	45	58	71	84	97	110	124	137	
35	33	46	59	73	86	100	114	128	142	
36	35	48	61	75	89	103	117	132	146	
37	36	49	63	77	92	106	121	135	150	
38	37	51	65	79	94	109	124	139	155	
39	38	52	67	82	97	112	128	143	159	
40	39	53	69	84	100	115	131	147	163	
<i>p</i> =0,01										
21	10	16	22	29	35	42	49	56	63	
22	10	17	23	30	37	45	52	59	66	
23	11	18	25	32	39	47	55	62	70	
24	12	19	26	34	42	49	57	66	74	
25	12	20	27	35	44	52	60	69	77	
26	13	21	29	37	46	54	63	72	81	
27	14	22	30	39	48	57	66	75	85	
28	14	23	32	41	50	59	69	78	88	
29	15	24	33	42	52	62	72	82	92	
30	15	25	34	44	54	64	75	85	95	
31	16	26	36	46	56	67	77	88	99	
32	17	27	37	47	58	69	80	91	103	
33	17	28	38	49	60	72	83	95	106	
34	18	29	40	51	62	74	86	98	110	
35	19	30	41	53	64	77	89	101	114	
36	19	31	42	54	67	79	92	104	117	
37	20	32	44	56	69	81	95	108	121	
38	21	33	45	58	71	84	97	111	125	
39	21	34	46	59	73	86	100	114	128	
40	22	35	48	61	75	89	103	117	132	

Таблица 5 (продовження)

<i>n</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
<i>p</i> =0,05											
11	34										
12	38	42									
13	42	47	51								
14	46	51	56	61							
15	50	55	61	66	72						
16	54	60	65	71	77	83					
17	57	64	70	77	83	89	96				
18	61	68	75	82	88	95	102	109			
19	65	72	80	87	94	101	109	116	123		
20	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138	
21	73	81	89	92	105	113	121	130	138	146	154
22	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154	162
23	81	90	99	107	116	125	134	143	152	161	170
24	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179
25	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177	187
26	93	103	113	123	133	143	154	164	174	185	195
27	96	107	118	128	139	150	160	171	182	193	203
28	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200	212
29	104	116	127	139	150	162	173	185	196	208	220
30	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
31	112	124	137	149	161	174	186	199	211	224	236
32	116	129	141	154	167	180	193	206	219	232	245
<i>p</i> =0,01											
11	25										
12	28	31									
13	31	35	39								
14	34	38	43	47							
15	37	42	47	51	56						
16	41	46	51	56	61	66					
17	44	49	55	60	66	71	77				
18	47	53	59	65	70	76	82	88			
19	50	56	63	69	75	82	88	94	101		
20	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114	
21	56	63	70	77	84	91	98	105	113	120	127
22	59	66	74	81	89	96	104	111	119	127	134
23	62	70	78	86	94	102	109	117	125	133	141
24	66	74	82	90	98	107	115	123	132	140	149
25	69	77	86	95	103	112	121	130	138	147	156
26	72	81	90	99	108	117	126	136	145	154	163
27	75	85	94	103	113	122	132	142	151	161	171
28	78	88	98	108	118	128	138	148	158	168	178
29	82	92	102	112	123	133	143	154	164	175	185
30	85	95	106	117	127	138	149	160	172	182	192
31	88	99	110	121	132	143	155	166	177	189	200
32	91	103	114	126	137	149	160	172	184	195	207

Таблица 5 (продовження)

<i>n</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
<i>p</i> =0,05											
33	120	133	146	159	173	186	199	213	226	239	253
34	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247	261
35	128	142	156	170	184	198	212	226	241	255	269
36	132	146	160	175	189	204	219	233	248	263	278
37	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271	286
38	139	155	175	185	201	216	232	247	263	278	294
39	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286	302
40	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294	311
<i>p</i> =0,01											
33	95	106	118	130	142	154	166	178	190	202	214
34	98	110	122	134	147	159	172	184	197	209	222
35	101	114	126	139	152	164	177	190	203	216	229
36	104	117	130	143	156	170	183	196	210	223	236
37	108	121	134	148	161	175	189	202	216	230	244
38	111	125	138	152	166	180	194	208	223	237	251
39	114	128	142	157	171	185	200	214	229	244	258
40	117	132	146	161	176	191	206	221	236	251	266

Таблица 5 (продовження)

<i>n</i>	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
<i>p</i> =0,05											
22	171										
23	180	189									
24	188	198	207								
25	197	207	216	227							
26	206	216	226	237	247						
27	214	225	236	247	258	268					
28	223	234	245	257	268	279	291				
29	232	243	255	267	278	290	302	314			
30	240	252	265	277	289	301	313	326	338		
31	249	261	274	287	299	312	325	337	350	363	
32	258	271	284	297	310	323	336	349	362	375	389
33	266	280	293	307	320	334	347	361	374	388	402
34	275	289	303	317	331	345	359	373	387	401	415
35	284	298	312	327	341	356	370	385	399	413	428
36	292	307	322	337	352	367	381	396	411	426	441
37	301	316	332	347	362	378	393	408	424	439	454
38	310	325	341	357	373	388	404	420	436	452	467
39	318	335	351	367	383	399	416	432	448	462	481
40	327	344	360	377	394	410	427	444	460	477	494
<i>p</i> =0,01											
22	142										
23	150	158									
24	158	166	174								
25	165	174	183	192							
26	173	182	191	201	210						
<i>n</i>	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
27	180	190	200	209	219	229					
28	188	198	208	218	229	239	249				
29	196	206	217	227	238	249	259	270			
30	203	214	225	236	247	258	270	281	292		
31	211	223	234	245	257	268	280	291	303	314	
32	219	231	242	254	266	278	290	302	314	326	338
33	227	239	251	263	276	288	300	312	325	337	350
34	234	247	260	272	285	298	311	323	336	349	362
35	242	255	268	281	294	308	321	334	347	360	374
36	250	263	277	290	304	318	331	345	358	372	386
37	258	271	285	299	314	327	341	355	369	384	398
38	265	280	294	308	323	337	352	366	381	395	410
39	273	288	303	317	332	347	362	377	392	407	422
40	281	296	311	326	342	357	372	388	403	418	434

Таблиця 5 (продовження)

<i>n</i>	33	34	35	36	37	38	39	40
<i>p</i> =0,05								
33	415							
34	429	443						
35	442	457	471					
36	456	471	486	501				
37	470	485	501	516	531			
38	483	499	515	531	547	563		
39	497	513	530	546	562	579	595	
40	511	527	544	561	578	594	611	628
<i>p</i> =0,01								
33	362							
34	375	387						
35	387	400	413					
36	399	413	427	440				
37	412	426	440	454	468			
38	424	439	453	468	482	497		
39	437	452	467	482	497	512	527	
40	449	465	480	495	511	526	542	557

Література

1. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика у 2-ч. Ч. II. Математична статистика : навч.–метод. посібник. / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний, С.С. Савіна. — К.: КНЕУ, 2001. – 336с.
2. Бабенко В.В. Основи теорії ймовірностей і статистичні методи аналізу даних у психологічних і педагогічних експериментах: навч. посібник / В.В. Бабенко – Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 168 с.
3. Руденко В.М. Математичні методи в психології: підручник / В.М. Руденко, Н.М. Руденко. – К. : Академвидав, 2009. – 384 с.
4. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер.; перевод с англ. под ред. А.Н. Колмогорова. – М. : издательство « Мир», 1975. – 625 с.
5. Гаркавий В.К., Ярова В.В. Математична статистика: навч. Посібник / В.К. Гаркавий . – К. : Професіонал, 2004, - 384с.
6. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии/ Е.В. Сидоренко. – СПб. : ООО «Речь», 2000. 350 с.
7. Суходольский Г.В. Основы математической статистики для психологов / Г.В. Суходольский. – Л. : ЛГУ, 1972. 428 с.