

Розділ 1

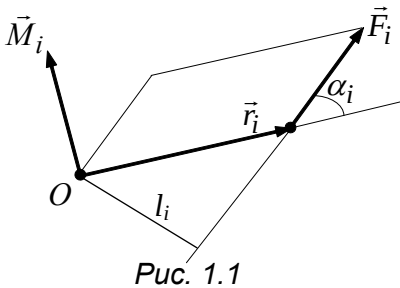
ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

§ 1.1. Момент сили

Для характеристики обертального руху тіла під дією зовнішньої механічної дії на нього введемо поняття моменту сили і моменту імпульсу.

Моментом сили $\vec{M}_i$ відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}_i$, який проведений з точки O у точку прикладання сили, на силу $\vec{F}_i$:

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$



Вектор $\vec{M}_i$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}_i$ і $\vec{F}_i$, і напрямлений так, що з його кінця поворот від вектора $\vec{r}_i$ до вектора $\vec{F}_i$ спостерігається проти руху годинникової стрілки (рис. 1.1).

Модуль моменту сили

$$M_i = F_i r_i \sin \alpha_i = F_i l_i,$$

де α_i – кут між $\vec{r}_i$ і $\vec{F}_i$, а $l_i = r_i \sin \alpha_i$ – плече сили – довжина перпендикуляра, опущеного з точки O на лінію дії сили $\vec{F}_i$.

Векторна сума моментів $\vec{M}_i$ всіх зовнішніх сил, які прикладені до тіла, називається **головним моментом $\vec{M}$ зовнішніх сил відносно точки O :**

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i], \quad [M] = 1\text{Н} \cdot \text{м}.$$

Динаміка обертального руху

Моментом сили відносно нерухомої осі OZ називається скалярна величина M_{iz} , яка дорівнює проекції на цю вісь вектора $\vec{M}_i$ моменту сили, який визначений відносно довільної точки O даної осі OZ (рис. 1.2).

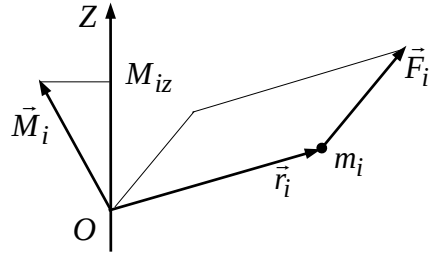


Рис. 1.2

Головний момент (результуючий момент) відносно нерухомої осі OZ системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно цієї осі:

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz}.$$

§ 1.2. Момент імпульсу

Іншою важливою динамічною характеристикою обертального руху є також і **момент імпульсу**.

Моментом імпульсу $\vec{L}_i$ матеріальної точки відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}_i$ матеріальної точки, який проведений із точки O на імпульс цієї матеріальної точки $m_i \vec{v}_i$ (рис. 1.3):

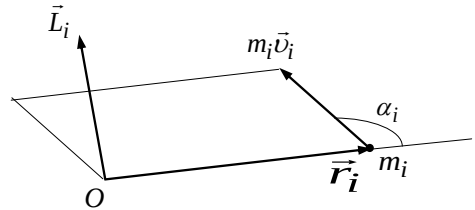


Рис. 1.3

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Вектор $\vec{L}_i$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}_i$ і $m_i \vec{v}_i$, і напрямлений у такий спосіб, що з його кінця поворот від

Динаміка обертального руху
вектора $\vec{r}_i$ до вектора $m_i \vec{v}_i$ спостерігається проти руху годинникової стрілки.

Модуль вектора моменту імпульсу:

$$L_i = r_i m_i v_i \sin \alpha_i .$$

Векторна сума моментів імпульсу $\vec{L}_i$ усіх матеріальних точок тіла називається **моментом $\vec{L}$ імпульсу тіла відносно точки O :**

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i], \quad [L] = 1 \text{ кг} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} .$$

Моментом імпульсу тіла відносно нерухомої осі називається скалярна величина L_z , яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу тіла відносно довільної точки O на осі OZ .

Проекція результуючого вектора на деяку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на цю вісь усіх складових векторів:

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz} .$$

Якщо абсолютно тверде тіло обертається навколо нерухомої осі OZ , орт $\vec{k}$ якої збігається з напрямком кутової швидкості $\vec{\omega}$ тіла, то вираз для моменту L_z імпульсу тіла відносно осі обертання записується у такому вигляді:

$$L_z = \omega_z \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 .$$

§ 1.3. Момент інерції. Теорема Штейнера

На відміну від поступального руху, де мірою інертності тіла є його маса, у випадку обертального руху інертність тіла визначається як

Динаміка обертального руху масою тіла, так і розподілом маси відносно осі обертання. Тому для кількісної характеристики інертності тіл за їх обертального руху вводить фізична величина – **момент інерції**.

Моментом інерції тіла відносно осі OZ називається сума добутків мас усіх матеріальних точок тіла на квадрати їх відстаней до осі OZ:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2, \quad [J_z] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

де m_i – маса i -ї частинки тіла, яке умовно “розбивається” на N частинок, настільки малих, що для кожної з них можна однозначно вказати R_i – відстань частинки від осі OZ.

Момент імпульсу тіла відносно осі дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно тієї самої осі на кутову швидкість обертання навколо цієї ж осі:

$$L_z = J_z \omega_z.$$

Щоб обчислити момент інерції тіла, його поділяють на нескінченно велику кількість нескінченно малих елементів з масами dm . Тому суму $\sum_{i=1}^n m_i R_i^2$ замінюють інтегралом:

$$J = \int_0^m R^2 dm,$$

де R – відстань від елемента dm до осі OZ. Момент інерції тіла залежить від матеріалу, форми і розмірів тіла, а також від розміщення тіла відносно осі OZ.

Моменти інерцій для тіл правильної геометричної форми:

- **момент інерції тонкостінного кільця завтовшки b і радіусом основи R ($R \gg b$) відносно його осі симетрії (геометричної осі):**

$$J_z = mR^2;$$

- **момент інерції суцільної кулі радіусом R відносно осі, що проходить через її центр:**

Динаміка обертального руху

$$J_z = \frac{2}{5} mR^2;$$

- момент інерції тонкого стрижня з перерізом довільної форми відносно осі, що проходить через середину стрижня перпендикулярно до нього:

$$J_z = \frac{1}{12} ml^2,$$

де l – довжина стрижня, набагато більша від його максимального поперечного розміру;

- момент інерції суцільного однорідного циліндра відносно його геометричної осі:

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2.$$

Якщо відомий момент інерції тіла відносно осі C , яка проходить через його центр мас – J_C , то момент інерції J_z відносно осі Z , що паралельна до вказаної, визначається за теоремою **Штейнера**:

момент інерції J_z тіла відносно осі Z дорівнює сумі моменту інерції J_C тіла відносно паралельної до неї осі C , що проходить через центр маси тіла, і добутку маси тіла m на квадрат відстані d між цими осями (рис. 1.4):

$$J_z = J_C + md^2.$$

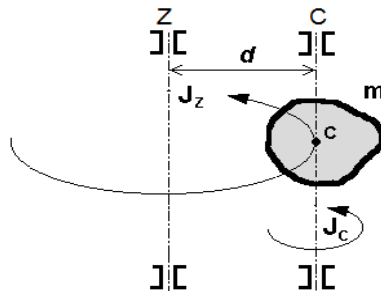


Рис. 1.4

Динаміка обертального руху
**§ 1.4. Основний закон динаміки
обертального руху твердого тіла**

Співвідношення, що пов'язує між собою момент сили, який діє на тіло, і момент імпульсу цього тіла у випадку обертального руху навколо нерухомої точки O , має вигляд

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

де $\vec{L}$ – момент імпульсу тіла відносно точки O , а $\vec{M}$ – головний момент зовнішніх сил відносно точки O .

Отже, *швидкість зміни моменту імпульсу тіла, що обертається навколо нерухомої точки, дорівнює головному моменту відносно цієї точки усіх зовнішніх сил, які прикладені до тіла.*

Цей результат називається **основним законом динаміки обертального руху тіла, закріпленого в одній нерухомій точці**.

Спроекуємо вектори рівняння $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ на довільну вісь Z , що проходить через точку O . Тоді

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

де L_z і M_z – проекції на вісь OZ обертання тіла векторів моменту імпульсу тіла і результуючого моменту зовнішніх сил відносно точки O . Це **рівняння динаміки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі OZ** .

Отже, *швидкість зміни моменту імпульсу тіла відносно нерухомої осі обертання дорівнює головному моменту усіх зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно цієї осі.*

Враховуючи, що $L_z = J_z \omega_z$, отримаємо

$$J_z \varepsilon_z = M_z$$

або

$$\varepsilon_z = \frac{M_z}{J_z}.$$

Отже, кутове прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі OZ , прямо пропорційне до головного моменту відносно цієї осі всіх зовнішніх сил, що діють на тіло, і обернено пропорційне до моменту інерції тіла відносно тієї ж самої осі.

Момент інерції тіла є його мірою інертності за обертального руху.

§ 1.5. Кінетична енергія тіла, що обертається

Кінетична енергія тіла, що рухається довільно, дорівнює сумі кінетичних енергій усіх n матеріальних точок, на які це тіло можна умовно поділити:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі OZ з кутовою швидкістю ω , то лінійна швидкість руху окремих точок становитиме

$$v_i = \omega R_i,$$

де R_i – відстань від i -ї точки до осі обертання. Отже:

$$E_k^{об} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Якщо тверде тіло рухається поступально зі швидкістю v і одночасно обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через його центр інерції, то його кінетична енергія:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}.$$

§ 1.6. Закон збереження моменту імпульсу

Закон збереження моменту імпульсу випливає із закону зміни моменту імпульсу тіла, закріпленого в нерухомій точці, і полягає в такому:

якщо головний момент зовнішніх сил, прикладених до тіла, відносно нерухомої точки, дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла відносно цієї точки з плином часу не змінюється.

$$\text{Якщо } \vec{M} = 0, \text{ то } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ і } \vec{L} = \text{const}.$$

Цей закон справедливий і для системи тіл: *момент імпульсу замкненої системи тіл відносно будь-якої нерухомої точки постійний у часі.*

З рівняння динаміки тіла, що обертається навколо нерухомої осі OZ , випливає **закон збереження моменту імпульсу тіла відносно цієї осі:**

якщо момент зовнішніх сил відносно нерухомої осі обертання тіла дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла відносно цієї осі не змінюється під час руху:

$$M_z = 0 \text{ і } \frac{dL_z}{dt} = 0, \quad \vec{L}_z = \text{const}$$

або

$$J_z \omega_z = \text{const},$$

де ω_z – кутова швидкість тіла; J_z – його момент інерції відносно осі обертання.

Цей закон можна узагальнити для будь-якої *незамкненої* системи тіл: *якщо результуючий момент усіх зовнішніх сил, прикладених до системи, відносно будь-якої нерухомої осі дорівнює нулю, то момент імпульсу системи відносно цієї самої осі з часом не змінюється.*

Лабораторна робота № 2

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Мета роботи – визначити експериментально і розрахувати теоретично момент інерції маятника Максвелла.

Прилади та обладнання: 1) маятник Максвелла; 2) змінні кільця; 3) штангенциркуль; 4) секундомір.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 1.1, § 1.2, § 1.3, § 1.5.

Опис вимірювального пристрою

Маятник Максвелла – це маховик (1), закріплений на валу (2) і підвішений на підвісці (3) до кронштейна (рис. 1).

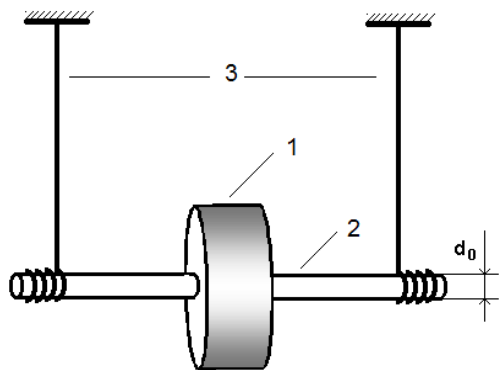


Рис. 1

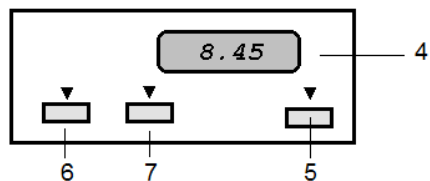


Рис. 2

Момент інерції маятника можна змінювати за допомогою кілець, які накладаються на маховик. Кронштейн прикріплений до стійки; на

Динаміка обертального руху
кронштейні розміщений фотоелектричний давач і електромагніт для утримання маятника у верхньому положенні. Стійка прикріплена до основи, на якій розміщений електронний блок.

На передній панелі блока керування вимірювального пристрою знаходиться: секундомір (4) і клавіші (5), (6), (7) (рис. 2).

Виведення розрахункових формул

Маятник Максвелла, піднятий на деяку висоту h , має потенціальну енергію mgh . Якщо маятник з такого положення відпустити, то він, опускаючись вниз, здійснює складний поступально-обертальний (плоский) рух. Під час руху вниз потенціальна енергія маятника зменшується і перетворюється у кінетичну енергію поступального руху $\frac{mv^2}{2}$, кінетичну енергію обертального руху $\frac{J\omega^2}{2}$ та частково йде на роботу проти сил тертя. Якщо тертям знехтувати, то згідно із законом збереження енергії

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (1)$$

Знаючи кінцеву лінійну швидкість v точок ободу вала маятника та кінцеву кутову швидкість ω , можна з формули (1) визначити момент інерції маятника Максвелла.

Лінійну швидкість v точок ободу вала маятника можна визначити, знаючи висоту h , на яку піднятий маятник, і час t опускання його з цієї висоти:

$$h = \frac{at^2}{2}; \quad a = \frac{v}{t}. \quad (2)$$

Вилучивши з рівнянь (2) лінійне прискорення a , з яким опускається маятник, отримаємо вираз для швидкості v :

$$v = \frac{2h}{t}. \quad (3)$$

Динаміка обертального руху

Лінійна швидкість v точок ободу вала маятника, його кутова швидкість ω і радіус R зв'язані між собою співвідношенням

$$v = \omega R. \quad (4)$$

На основі (3) і (4) отримаємо співвідношення для кутової швидкості:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2h}{Rt} = \frac{4h}{td_0}, \quad (5)$$

де d_0 – діаметр вала маятника.

Визначаючи із (1) момент інерції маятника

$$J = \frac{2m}{\omega^2} \left[gh - \frac{v^2}{2} \right] \quad (6)$$

і підставляючи значення v з (3) та ω із (5) у формулу (6), отримаємо вираз для моменту інерції маятника Максвелла:

$$J = \frac{1}{4} m d_0^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (7)$$

Врахувавши, що загальна маса маятника

$$m = m_0 + m_M + m_K,$$

де m_0 – маса вала маятника; m_M – маса маховика; m_K – маса допоміжного кільця, одержимо:

$$J = \frac{1}{4} (m_0 + m_M + m_K) d_0^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (8)$$

Момент інерції маятника Максвелла як тіла правильної геометричної форми, можна також обчислити і теоретично за формулою

$$J_T = J_0 + J_M + J_K, \quad (9)$$

де J_0 – момент інерції вала маятника; J_m – момент інерції маховика, J_K – момент інерції допоміжного кільця.

Значення моментів інерції окремих складових маятника визначаються за такими формулами:

Динаміка обертального руху

$$J_0 = \frac{1}{8} m_0 d_0^2; \quad J_M = \frac{1}{8} m_M (d_M^2 + d_0^2); \quad J_K = \frac{1}{8} m_K (d_K^2 + d_M^2), \quad (10)$$

де d_M – зовнішній діаметр маховика; d_K – зовнішній діаметр допоміжного кільця. Отже:

$$J_T = \frac{1}{8} [m_0 d_0^2 + m_M (d_M^2 + d_0^2) + \frac{1}{8} m_K (d_K^2 + d_M^2)]. \quad (11)$$

Відносна похибка при визначенні моменту інерції:

$$\delta J = \frac{J - J_T}{J_T} 100 \%. \quad (12)$$

Послідовність виконання роботи

1. Увімкнути пристрій в електромережу 220 В.
2. Закріпити на маховику маятника перше допоміжне кільце.
3. Рівномірно намотати з двох кінців на вал маятника нитки і зафіксувати маятник у верхньому положенні за допомогою електромагніту.
4. Короткочасно натиснути на клавішу 7 та визначити час опускання маховика.
5. Використавши прикріплену до стійки пристрою лінійку, визначити висоту h опускання маятника як відстань між крайніми нижніми точками допоміжного кільця у верхньому і нижньому положеннях маятника.
6. Дії, зазначені в п.п. 3, 4, 5, повторити п'ять разів, а результати вимірювань записати у табл. 1.
7. У табл. 2 занести величини мас вала маятника, маховика і мас кілець № 1 та № 2.
8. Виміряти штангенциркулем діаметри вала d_0 , маховика d_M і зовнішній діаметр кільця d_K . Вимірювання діаметрів здійснити по три рази у різних напрямках, а результати записати у табл. 3.

Динаміка обертального руху

9. За формулою (7) розрахувати величину J , а за формулою (10) – J_T . Отримані величини записати у табл. 4.

10. Замінити кільце і повторити усі зазначені вище вимірювання та розрахунки.

Таблиця 1

№ кільця	t_1, c	t_2, c	t_3, c	t_4, c	t_5, c	$t_{сер}, c$	h, m
1							
2							

Таблиця 2

$m_0,$ кг	$m_M,$ кг	$m_{K1},$ кг	$m_{K2},$ кг

Таблиця 3

№ вимір.	$d_0,$ $10^{-3} m$	$d_M,$ $10^{-3} m$	$d_{K1},$ $10^{-3} m$	$d_{K2},$ $10^{-3} m$
1				
2				
3				
Сер.				

Таблиця 4

$J_1,$ $кг \cdot м^2$	$J_{T1},$ $кг \cdot м^2$	$\delta J_1,$ %	$J_2,$ $кг \cdot м^2$	$J_{T2},$ $кг \cdot м^2$	$\delta J_2,$ %

Контрольні питання

1. Що називається моментом інерції тіла?
2. Що називається моментом сили відносно нерухомої осі обертання?
3. За якою формулою можна розрахувати момент інерції тіла?
4. Записати закон збереження енергії для маятника Максвелла.
5. За якою формулою можна розрахувати лінійну швидкість точок вала маятника?

Лабораторна робота № 7

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ ТІЛА ДИНАМІЧНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи – визначити момент інерції тіла динамічним методом.

Прилади та обладнання: 1) вимірювальний пристрій; 2) секундомір; 3) штангенциркуль; 4) міліметрова лінійка.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 1.1, § 1.3, § 1.5.

Опис вимірювального пристрою

Пристрій для визначення моменту інерції складається з вала А, закріпленого у підшипниках до вертикального стійки, шківів В, махового колеса С і досліджуваного тіла у вигляді додаткового диска G. Диск можна знімати з вала А. До шківів В прикріплена нитка з вантажем відомої маси m ; положення вантажу визначається міліметровою лінійкою L (рис. 1). Якщо нитку намотати на шків і тим самим підняти вантаж на висоту

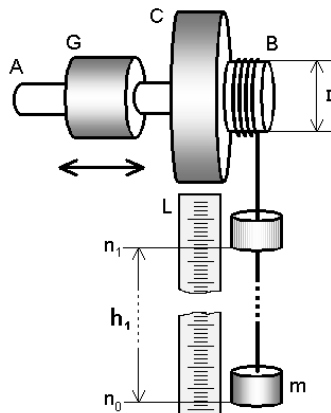


Рис. 1

h_1 , то вантаж отримає запас потенціальної енергії mgh_1 . Під дією сили тяжіння звільнений вантаж рівноприскорено опускається, при цьому система (вал із диском, шківом і маховиком) здійснює також рівноприскорений обертовий рух (рис. 1).

Завдання 1. Знаходження моменту інерції системи, що обертається

У процесі опускання вантажу масою m з висоти h_1 його потенціальна енергія mgh_1 перетворюється у кінетичну енергію поступального руху вантажу $\frac{mv^2}{2}$ та кінетичну енергію обертального руху системи $\frac{J\omega^2}{2}$ і частково витрачається на виконання роботи $F_T h_1$ проти сил тертя F_T .

Згідно з законом збереження енергії:

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + F_T h_1. \quad (1)$$

За інерцією система продовжуватиме обертатися і внаслідок намотування нитки на шків вантаж підніметься на висоту h_2 ($h_2 < h_1$) і на мить зупиниться. У цьому положенні він має потенціальну енергію mgh_2 . Втрата потенціальної енергії вантажу порівняно з початковим положенням дорівнює роботі проти сил тертя на шляху $h_2 + h_1$, тобто $mgh_1 - mgh_2 = F_T (h_1 + h_2)$.

Звідси знаходимо силу тертя:

$$F_T = \frac{mgh_1 - mgh_2}{h_1 + h_2}. \quad (2)$$

Оскільки вантаж опускається з висоти h_1 рівноприскорено без початкової швидкості, то у нижній точці траєкторії справедливі співвідношення:

$$h_1 = \frac{at^2}{2} \text{ і } v = at,$$

де t – час опускання тіла.

З цих рівнянь отримаємо кінцеву швидкість вантажу:

$$v = \frac{2h_1}{t}. \quad (3)$$

Динаміка обертального руху

Швидкість вантажу дорівнює швидкості v точок на поверхні шківів і пов'язана з радіусом шківів R та його кутовою швидкістю ω співвідношенням

$$v = \omega R,$$

тому

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2h_1}{tR}. \quad (4)$$

Підставивши значення F_T , v , ω з формул (2), (3), (4) у формулу (1) та виразивши радіус шківів через його діаметр D , після відповідних перетворень отримаємо для моменту інерції обертальної системи формулу

$$J = \frac{mD^2}{4} \left[\frac{h_2 g t^2}{h_1 (h_1 + h_2)} - 1 \right]. \quad (5)$$

Формула (5) спочатку використовується для експериментального визначення моменту інерції J_1 системи разом із додатковим диском, а потім, коли диск знято, – для вимірювання моменту інерції J_2 системи без додаткового диска.

Завдання 2. Визначення моменту інерції додаткового диска

Момент інерції додаткового диска можна визначити двома способами:

1) на основі результатів проведених експериментів, як різницю вище виміряних значень J_1 і J_2 :

$$J_D = J_1 - J_2; \quad (6)$$

2) теоретично, враховуючи те, що додатковий диск є тілом правильної геометричної форми:

$$J'_D = \frac{1}{32} \pi H \rho (d_1^4 - d_2^4), \quad (7)$$

Динаміка обертального руху

де H – товщина диска; ρ – густина матеріалу диска; d_1 і d_2 – зовнішній і внутрішній діаметри диска.

Послідовність виконання роботи

1. Закріпити диск G на валу A.
2. Опустити вантаж масою m , закріплений на нитці, у найнижче положення. Зафіксувати, напроти якої поділки n_0 міліметрової шкали L перебуває його основа.

3. Намотуючи нитку на шків B, підняти вантаж у крайнє верхнє положення, зафіксувавши поділку $n_1 = 40$ мм. Висота h_1 , на яку піднято вантаж, виразиться як $h_1 = n_0 - n_1$.

4. Відпустити вантаж, увімкнувши одночасно секундомір. У момент, коли вантаж проходить нижнє положення, вимкнути секундомір, і продовжуючи спостерігати за підняттям вантажу, зафіксувати поділку n_2 , до якої піднялася основа вантажу. Висота підняття:

$$h_2 = n_0 - n_2.$$

5. Записати час t опускання вантажу. Дослід повторити три рази.
6. За допомогою штангенциркуля виміряти діаметр шківa B у трьох різних напрямках і визначити середнє значення його діаметра D .
7. За формулою (5) обчислити момент інерції J_1 системи з диском, використовуючи середні значення вимірених величин.
8. Зняти диск G з вала A.
9. Виконати усі операції, вказані в пунктах 3–5. За формулою (5) обчислити момент інерції J_2 системи без диску, використовуючи середні значення вимірених величин.
10. За формулою (6) обчислити момент інерції J_d диска.
11. Виміряти товщину диска H , його зовнішній і внутрішній діаметри d_1 і d_2 .

Динаміка обертального руху

12. За формулою (7) обчислити момент інерції диска J'_D .

13. Порівняти одержані значення J_D та J'_D і за формулою оцінити їх розбіжність:

$$\delta J = \frac{J_D - J'_D}{J_D}.$$

14. Визначити абсолютну і відносну похибки J'_D .

Густина матеріалу диска – $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$;

маса вантажу – $m = (250 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ кг}$.

Таблиця 1

Обертання системи з диском

№	$n_1,$ 10^{-3} м	$n_0,$ 10^{-3} м	$h_1,$ 10^{-3} м	$t,$ с	$n_2,$ 10^{-3} м	$h_2,$ 10^{-3} м	$D,$ 10^{-3} м
1							
2							
3							
Сер.							

Таблиця 2

Обертання системи без диску

№	$n_1,$ 10^{-3} м	$n_0,$ 10^{-3} м	$h_1,$ 10^{-3} м	$t,$ с	$n_2,$ 10^{-3} м	$h_2,$ 10^{-3} м	$D,$ 10^{-3} м
1							
2							
3							
Сер.							

Динаміка обертального руху

Таблиця 3

Геометричні розміри диску

№	$H,$ $10^{-3} м$	$\Delta H,$ $10^{-3} м$	$d_1,$ $10^{-3} м$	$\Delta d_1,$ $10^{-3} м$	$d_2,$ $10^{-3} м$	$\Delta d_2,$ $10^{-3} м$
1						
2						
3						
Сер.						

Таблиця 4

Значення моменту інерції диску

$J_1,$ $кг \cdot м^2$	$J_2,$ $кг \cdot м^2$	$J_D,$ $кг \cdot м^2$	$J'_D,$ $кг \cdot м^2$	$\delta J'_D,$ %	$\Delta J'_D,$ $кг \cdot м^2$

Контрольні питання

1. Що називається моментом інерції тіла?
2. Що називається моментом сили відносно нерухомої осі обертання?
3. Записати вираз модуля моменту сили.
4. Записати вираз закону збереження енергії під час опускання вантажу з висоти.
5. За якими формулами обчислюється кінетична енергія поступального й обертального рухів тіла?

Лабораторна робота № 5

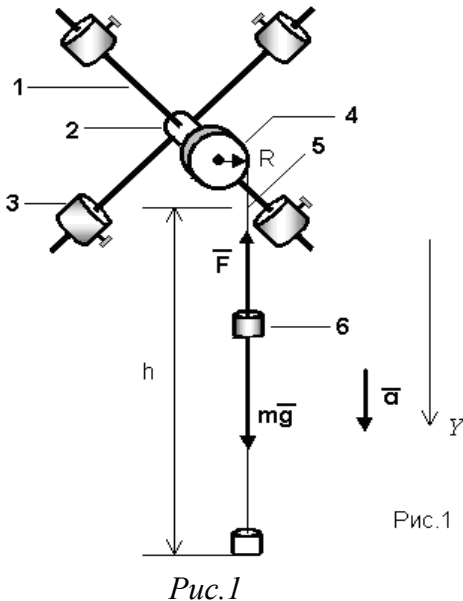
ВИВЧЕННЯ ОСНОВНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Мета роботи – експериментально перевірити основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

Прилади та обладнання: 1) маятник Обербека; 2) секундомір; 3) різноважки (тіла різної маси); 4) штангенциркуль; 5) міліметрова лінійка.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 1.1, § 1.2, § 1.3, § 1.4.

Опис вимірювального пристрою



Маятник Обербека (рис.1) складається з чотирьох стрижнів 1, закріплених на втулці 2 під прямими кутами. Вздовж стрижнів можуть фіксовано пересуватися чотири однакові циліндри 3.

Втулка і шків 4 радіуса R насаджені на спільний горизонтальний вал, що кріпиться у підшипниках до вертикальної стійки. На шків намотується нитка 5, до кінця якої прикріплюється основний тягарець масою m_{oc} , на який можна накладати один додатковий тягарець масою m_{d1} , а потім другий -

Динаміка обертального руху
масою m_{02} . Якщо обертальна система відцентрована, то поступальний рух тіла масою m і обертальний рух маятника будуть рівноприскореними.

Виведення розрахункових формул

Другий закон Ньютона для тіла, яке опускається на нитці, в проекції на вісь Y (рис.1):

$$mg - F = ma, \quad (1)$$

де F – сила натягу нитки.

Якщо експериментально виміряти час t проходження тілом відстані h , то з формули шляху рівноприскореного руху без початкової швидкості можна обчислити прискорення тіла:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (2)$$

Використавши зв'язок між тангенціальним прискоренням точок на ободі диску, яке дорівнює прискоренню вантажу m , і кутовим прискоренням диску:

$$a = \varepsilon R, \quad (3)$$

одержимо вираз для кутового прискорення маятника:

$$\varepsilon = \frac{2h}{Rt^2}. \quad (4)$$

Обертальний момент сили, що викликає це прискорення:

$$M_X = FR = m(g - a)R = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right)R, \quad (5)$$

або через кутове прискорення:

$$M = m(g - \varepsilon R)R. \quad (6)$$

Отже, виконуючи експерименти з маятником Обербека, можна знаходити моменти сил, що діють на обертальну систему, та кутові прискорення системи. Оскільки, крім моменту сили натягу нитки на

Динаміка обертального руху
систему діє ще момент сили тертя M_T , то експеримент зведеться до перевірки рівняння:

$$M - M_T = J \varepsilon, \quad (7)$$

яке можна подати у вигляді:

$$\varepsilon = \frac{M - M_T}{J}. \quad (8)$$

З формули (8) видно, що залежності, які випливають з рівняння (8), $\varepsilon = f(M)$ та $\varepsilon = \varphi(1/J)$, повинні мати лінійний характер.

Послідовність виконання роботи

Завдання1: експериментальна перевірка залежності кутового прискорення ε маятника Обербека від моменту зовнішніх сил

1. Тричі виміряти висоту опускання тіла h і дані записати у табл. 1.
2. Тричі виміряти діаметр шківів d і розрахувати радіус шківів. Результати записати у табл. 1.
3. Закріпити циліндри на мінімальній відстані від осі обертання. Тричі виміряти час опускання основного тягарця; результати записати у табл. 2.1.
4. Дії, вказані в п. 4, повторити ще двічі для більших мас m . Для цього на основний тягарець, прикріплений до нитки, треба накласти спочатку один додатковий тягарець, а потім два.
5. Перевішивши результати вимірювань всіх величин в одиниці СІ, за формулами (4), (5) розрахувати величини M і ε (для трьох значень мас m) Записати одержані значення в табл. 3.1.
6. Побудувати графіки залежності ε від M .
7. Обчислити похибки вимірювання кутового прискорення за формулою:

Динаміка обертального руху

$$\Delta \varepsilon = \left(\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta R}{R} + 2 \frac{\Delta t}{t} \right) \quad (9)$$

та записати їх в табл. 3.1.

8. Відкласти в масштабі, вибраному для ε , відрізки $\pm \Delta \varepsilon$ навколо відповідних експериментальних точок графіку

9. Провести через експериментальні точки графіку найбільш оптимальним способом пряму та знайти числове значення моменту сил тертя M_T як точку перетину прямої з віссю моментів сил. Записати це значення в табл. 3.1.

10. Перемістити циліндри на середину кожного з чотирьох стрижнів, зафіксувати їх і виконати дії, вказані в пунктах 3-10. Записати це значення в табл. 2.2, 2.3.

11. Зафіксувати циліндри в крайніх положеннях і ще раз повторити дії, вказані в пунктах 3-10. Записати це значення в табл. 3.2, 3.3.

Графіки залежності ε від M , одержані для трьох розміщень циліндрів на стрижнях, будувати на одних і тих координатних осях.

Маса основного тягарця $m_{oc} = \dots\dots\dots 2$;

маса основного і одного додаткового тягарців $m_1 = m_{oc} + m_{1d}$;

маса основного і двох додаткового тягарців $m_2 = m_{oc} + m_{1d} + m_{2d}$.

Завдання 2: експериментальна перевірка залежності кутового прискорення ε від моменту інерції J маятника Обербека при постійному моменті сил

1. Обчислити моменти інерції маятника Обербека при різних положеннях циліндрів на стрижнях як відношення приростів ΔM до $\Delta \varepsilon$ графіків $\varepsilon = f(M)$, побудованих у завданні 1.

2. Для фіксованого значення моменту сили M_1 виписати значення кутового прискорення ε з трьох попередніх таблиць. Хоча теоретично, згідно з (6), момент сили залежить від кутового прискорення, однак в

Динаміка обертального руху

наших експериментах величина $\mathcal{E}$ дуже мала і момент сили практично дорівнює: $M = mgR$.

3. Побудувати графік залежності кутового прискорення $\mathcal{E}$ від величини, оберненої до його моменту інерції. Виконати аналогічні побудови для двох інших моментів сил M_2 і M_3 .

Таблиці результатів вимірювань і розрахунків

Таблиця 1

№	$h, \text{мм}$	$\Delta h, \text{мм}$	$d, \text{мм}$	$\Delta d, \text{мм}$	$R, \text{мм}$	$\Delta R, \text{мм}$
1						
2						
3						
Сер.						



Таблиця 2.1

№ з/п	$m_{oc}, \text{кг}$	$m_1, \text{кг}$	$m_2, \text{кг}$
	$t, \text{с}$	$t, \text{с}$	$t, \text{с}$
1			
2			
3			
Сер.			

Таблиця 3.1

$m, \text{кг}$	$\mathcal{E}, \text{с}^{-2}$	$M, \text{Н}\cdot\text{м}$	$\Delta \mathcal{E}, \text{с}^{-2}$	$M_T, \text{Н}\cdot\text{м}$
m_{oc}				
m_1				
m_2				

Динаміка обертального руху



Таблиця 2.2

№ з/п	$m_{oc}, кг$	$m_1, кг$	$m_2, кг$
	$t, с$	$t, с$	$t, с$
1			
2			
3			
Сер.			

Таблиця 3.2

$m, кг$	$\varepsilon, с^{-2}$	$M, Н·м$	$\Delta\varepsilon, с^{-2}$	$M_T, Н·м$
m_{oc}				
$m_1,$				
m_2				



Таблиця 2.3

№ з/п	$m_{oc}, кг$	$m_1, кг$	$m_2, кг$
	$t, с$	$t, с$	$t, с$
1			
2			
3			
Сер.			

Таблиця 3.3

$m, кг$	$\varepsilon, с^{-2}$	$M, Н·м$	$\Delta\varepsilon, с^{-2}$	$M_T, Н·м$
m_{oc}				
$m_1,$				
m_2				

Розміщення циліндрів	$J, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$\varepsilon, \text{ с}^{-2}$	$1/J, \text{ кг}^{-1}\cdot\text{м}^{-2}$
			
			
			

Контрольні питання

1. Що називається моментом інерції тіла?
2. Записати основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.
3. Що називається моментом сили відносно осі обертання?
4. Що називають плечем сили?
5. У чому полягає суть перевірки основного рівняння динаміки у цій лабораторній роботі?