Розділ 2
МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

§ 2.1. Характеристики гармонічних коливань

Коливанням *називається усякий рух або зміна стану, що характеризується тим чи іншим ступенем повторюваності в часі значень фізичних величин, які визначають цей рух або стан.*

Коливання називаються ***періодичними***, якщо значення фізичних величин, які змінюються в процесі коливань, повторюються через однакові проміжки часу. Найпростішим типом періодичних коливань є так звані ***гармонічні коливання*** – коливання, за яких значення фізичної величини змінюється з часом за законом косинуса (синуса).

Коливання називаються ***вільними, або власними***, якщо вони здійснюються за рахунок енергії, яка була надана коливальній системі.

Нехай матеріальна точка здійснює вільні гармонічні коливання вздовж осі координат OX біля положення рівноваги, яке прийняте за початок координат. Тоді залежності координати x від часу t задаються рівняннями

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$

або

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\,,$$

де x – зміщення коливної точки; A – амплітуда коливання $\left(A = x_{max}\right)$; ω_0 – власна циклічна частота; φ_0 – початкова фаза коливань у момент часу $t = 0$; $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза коливань у момент часу t.

Найменший проміжок часу T, після проходження якого повторюються значення усіх фізичних величин, що характеризують коливання, називається ***періодом коливання***. За час T здійснюється одне повне коливання і фаза коливань отримує приріст 2π, тобто

$$\omega_0\left(t+T\right) + \varphi_0 = \left(\omega_0 t + \varphi_0\right) + 2\pi\,.$$

Звідси

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Частотою коливань називається кількість повних коливань, що здійснюються за одиницю часу:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T},\ [\nu] = 1\ c^{-1} = 1\ Гц.$$

Циклічна частота:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,\ \left[\omega_0\right] = 1\ рад/с\ .$$

Отже, циклічна частота дорівнює кількості повних коливань, що здійснюються за час $2\pi\, c.$

Коливальний процес характеризується швидкістю і прискоренням коливної точки. Нехай коливання здійснюються за законом $x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$. Тоді:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \upsilon_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a_x = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = a_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi\right) = -\omega_0^2 x\,.$$

Якщо розглядати коливання матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання під дією квазіпружної сили, то її ***кінетична енергія*** становить:

$$E_к = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{m}{2} A^2\omega_0^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

***а потенціальна енергія*:**

$$E_n = \frac{m}{2} A^2\omega_0^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Відповідно ***повна енергія*** такої точки дорівнює

$$E_{повн.} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

§ 2.2. Пружинний маятник

Пружинний маятник – це тіло масою m, яке підвішене на невагомій абсолютно пружній пружині і здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили $\vec{F} = -k\,\vec{x}$ (рис. 2.1), де k – коефіцієнт пружності, який у випадку пружини називається її жорсткістю. На тіло діє також сила тяжіння $m\vec{g}$.

Запишемо основне рівняння динаміки для цього випадку:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x + m\,g = -k\left(x - x_{cm}\right),$$

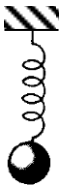

Рис. 2.1

де $x_{cm} = \dfrac{mg}{k}$ – статична деформація пружини під дією сили тяжіння mg.

Позначимо $x_1 = x - x_{cm}$, і враховуючи, що $\ddot{x} = \ddot{x}_1$, бо x_{cm} не залежить від часу, знайдемо рівняння руху тіла:

$$m\ddot{x} = -k\,x \text{ або } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

де $$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Отже, пружинний маятник здійснює вільні гармонічні коливання за законом

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$

або $$x = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$

з власною циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

і періодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Період коливань T не залежить від амплітуди A.

Ця формула справедлива для пружних коливань, у межах яких виконується закон Гука.

Потенціальна енергія пружинного маятника дорівнює

$$E_n = \frac{k x^2}{2}.$$

§ 2.3. Математичний маятник

Математичним маятником називається матеріальна точка, яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці (рис. 2.2). Якщо відхилити маятник із положення рівноваги так, щоб нитка утворювала кут α з вертикаллю, то він почне коливатися у вертикальній площині під дією сили тяжіння $m\vec{g}$.

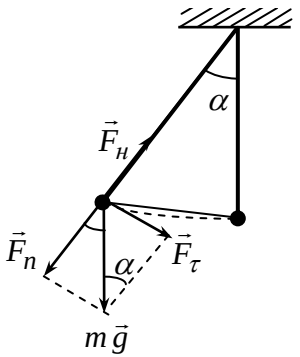

Рис. 2.2

Сила, що повертає математичний маятник у положення рівноваги, є складовою його сили тяжіння mg і називається тангенціальною силою:

$$F_\tau = -m g \sin\alpha.$$

Нормальна складова $\vec{F}_n$ зрівноважується силою натягу нитки $\vec{F}_н$.

Для малих кутів відхилення $\sin\alpha$ можна замінити кутом α, а дугу, вздовж якої рухається маятник, можна вважати відрізком прямої. Силу, що повертає маятник до положення рівноваги, можна вважати квазіпружною силою:

$$F_\tau = -\frac{m g}{l} x = -k x.$$

Отже, малі коливання математичного маятника є гармонічні.

Період цих коливань дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Період коливань математичного маятника не залежить від амплітуди коливань. Математичний маятник зберігає площину, в якій він коливається.

Спостереження над коливаннями маятників використовуються для визначення прискорення g сили тяжіння.

§ 2.4. Фізичний маятник

Фізичний маятник – абсолютно тверде тіло, що здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі O, яка не проходить через його центр мас C (рис. 2.3).

Нехай маятник відхилений із положення рівноваги на невеликий кут α. Складова сили тяжіння маятника $\vec{F}_n$, напрямлена вздовж осі OO', урівноважується реакцією осі O. Складова F_τ, яка перпендикулярна до OC, намагається повернути маятник у положення рівноваги.

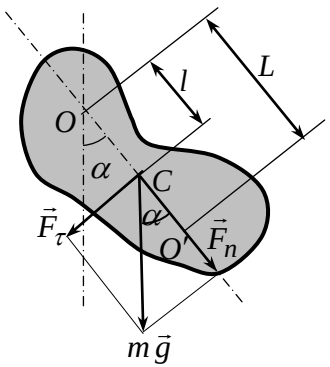

Рис. 2.3

Відповідно до рівняння динаміки обертального руху твердого тіла, момент M обертальної сили F_τ можна записати у вигляді

$$M = J\,\varepsilon = J\,\ddot{\alpha} = F_\tau\,l = -mg\,l\sin\alpha \approx -mg\,l\,\alpha\,,$$

де J – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку O; l – відстань між точкою підвісу і центром мас маятника, $\sin\alpha \sim \alpha$ відповідає малим коливанням маятника. Тоді

$$J\,\ddot{\alpha} + m\,g\,l\,\alpha = 0 \text{ або } \ddot{\alpha} + \frac{m\,g\,l}{J}\alpha = 0\,.$$

Позначивши

$$\frac{mgl}{J} = \omega_0^2,$$

отримаємо рівняння:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

Розв'язок цього рівняння такий:

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

За малих коливань фізичний маятник здійснює гармонічні коливання з частотою ω_0 і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{зв}}{g}},$$

де $L_{зв} = \frac{J}{ml}$ – зведена довжина фізичного маятника.

Точка O' на продовженні прямої OC, що перебуває від осі підвісу на відстані зведеної довжини L, називається центром гойдання фізичного маятника.

Точка підвісу O і центр гойдання O' мають властивість спряженості: якщо вісь підвісу проходить через центр гойдання, то точка O попередньої осі підвісу стане новим центром гойдання і період коливання фізичного маятника не зміниться.

За теоремою Штейнера матимемо:

$$J = J_c + ml^2,$$

де J_c – момент інерцій маятника відносно осі, що проходить через центр мас. Отже:

$$L_{зв} = \frac{J}{ml} = \frac{J_c}{ml} + l, \text{ тому } L_{зв} > l.$$

Порівнюючи формули

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_{зв}}{g}} \quad \text{і} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

бачимо, якщо зведена довжина $L_{зв}$ фізичного маятника дорівняє довжині l математичного маятника, то їх періоди коливань однакові.

Отже, ***зведена довжина фізичного маятника*** *– це довжина такого математичного маятника, період коливання якого дорівнює періоду коливань даного фізичного маятника.*

§ 2.5. Крутильний маятник

Крутильний маятник – це тверде тіло, закріплене на жорсткій підвісці, яке може здійснювати крутильні коливання під дією сил пружності деформації кручення підвіски (рис. 2.4).

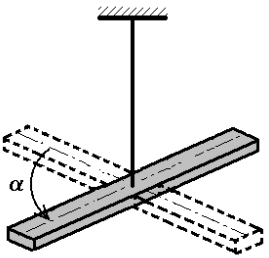

Рис. 2.4

Під час закручування маятника на кут α виникає момент пружної сили, який намагається повернути маятник у положення рівноваги:

$$M = -f\alpha,$$

де f – модуль кручення дротини, який залежить від розмірів і пружних властивостей матеріалу дротини.

Оскільки після закручування маятник здійснюватиме коливальний рух навколо своєї вертикальної осі, яка проходить через точку підвісу вздовж дротини, то

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha},$$

де J – момент інерції маятника відносно осі закручування.

Це рівняння запишемо у такому вигляді:

$$J\ddot{\alpha} + f\alpha = 0, \text{ або } \ddot{\alpha} + \frac{f}{J}\alpha = 0.$$

Увівши позначення

$$\omega_0^2 = \frac{f}{J},$$

отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань крутильного маятника:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0.$$

Розв’язком цього рівняння є рівняння гармонічних коливань:

$$\alpha = \alpha_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

або $\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Період коливань крутильного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{f}}.$$

§ 2.6. Згасаючі коливання

Енергія механічних коливань коливальної системи поступово витрачається на роботу проти сил опору. Тому вільні коливання завжди згасаючі – їх амплітуда поступово зменшується.

Для маятника масою m, що здійснює коливання під дією квазіпружної сили $F = -kx$, сила опору пропорційна до швидкості, тобто

$$F_{on} = -r\upsilon = -r\dot{x},\ \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

де r – коефіцієнт опору.

Другий закон Ньютона для згасаючих коливань має такий вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x},\ \ \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Введемо позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2,\ \frac{r}{m} = 2\delta,$$

де δ – коефіцієнт згасання, а ω_0 – власна частота, з якою здійснювались би вільні коливання за відсутності опору середовища.

Тоді другий закон Ньютона можна записати у вигляді

$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

де $A = A_0 e^{-\delta t}$ – амплітуда загасаючих коливань; A_0 – початкова амплітуда. Амплітуда згасаючих коливань зменшується з плином часу і тим швидше,

чим більший коефіцієнт опору і чим менша маса m коливного тіла.

Величина $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ називається власною частотою коливань дисипативної системи. Графік залежності *x* від часу показано на рис. 2.5.

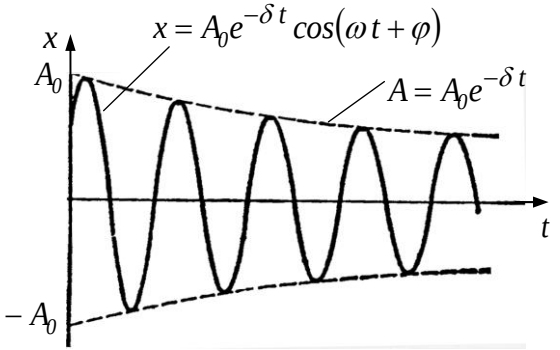

Рис. 2.5

За згасаючих коливань величина *x* перетворюється у нуль і досягає максимальних значень через однакові проміжки часу:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}.$$

Величину *T* називають ***періодом згасаючих коливань.***

Якщо $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, то відношення

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{e^{\delta t}}{e^{\delta(t+T)}} = e^{\delta T}$$

називається ***декрементом згасання***, а його натуральний логарифм

$$\lambda = \ln D = \delta T$$

– ***логарифмічним декрементом згасання.***

Позначимо τ проміжок часу, протягом якого амплітуда коливань зменшується в *e* разів. Тоді

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+\tau)}} = e^{\delta\tau} = e.$$

Звідси $\delta\tau = 1$, або $\delta = \frac{1}{\tau}$.

Коефіцієнт згасання δ є фізична величина, обернена до проміжку

часу, протягом якого амплітуда зменшується в *e* разів. Час τ називається часом релаксації.

Нехай *N* – кількість коливань, після яких амплітуда коливань зменшується в *e* разів. Тоді

$$\tau = NT\ ,\ \lambda = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}\ .$$

Логарифмічний декремент згасання λ є фізична величина, обернена до кількості коливань *N*, після закінчення яких амплітуда зменшується в *e* разів.

§ 2.7. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі

У місцях зустрічі хвиль коливання середовища, які викликані кожною із хвиль, додаються одне до одного. Результат додавання залежить від співвідношення фаз і амплітуд хвиль, що накладаються.

Дві хвилі називаються ***когерентними****, якщо мають однакову частоту і різниця їх фаз залишається постійною в часі.*

Інтерференцією хвиль *називається явище, яке відбувається при накладанні двох або кількох когерентних хвиль, за якого відбувається стійке в часі їх взаємне підсилення в одних точках простору й ослаблення в інших.*

Розглянемо накладання двох когерентних косинусоїдальних сферичних хвиль, які збуджуються точковими джерелами S_1 і S_2 (рис. 2.7).

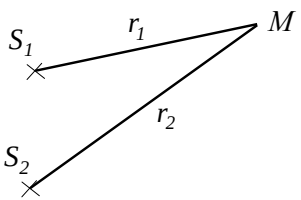

Рис. 2.7

Амплітуда *A* результуючої хвилі у точці *M* дорівнює.

$$A^2 = \left(\frac{A_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2}\right)^2 +$$

$$+2\frac{A_1}{r_1}\frac{A_2}{r_2}\cos\left[\ k\ (r_2 - r_1) - (\varphi_{02} - \varphi_{02})\right]\ .$$

Оскільки для когерентних джерел різниця початкових фаз (φ_{02} - φ_{01}) = const, то результат інтерференції двох хвиль у різних точках залежить від величини

$\Delta = r_2 - r_1$, яка називається ***геометричною різницею ходу*** хвиль.

У точках, де

$$k\left(r_2 - r_1\right) - \left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right) = \pm 2m\pi, \quad \left(m = 0,1,2,...\right),$$

спостерігається ***інтерференційний максимум:*** амплітуда результуючого коливання

$$A = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2}.$$

У точках, де

$$k\left(r_2 - r_1\right) - \left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right) = \pm\left(2m+1\right)\pi, \left(m = 0,1,2,...\right),$$

спостерігається ***інтерференційний мінімум***: амплітуда результуючого коливання

$$A = \left|\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2}\right|,$$

m – порядок інтерференційного максимуму або мінімуму.

Оскільки хвильове число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, де λ – довжина хвилі у цьому середовищі, то за різниці ходу хвиль

$$\Delta_г = \pm 2m\frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2\pi}\lambda$$

амплітуда результуючого коливання максимальна. Якщо $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0$, то ця умова набуває вигляду

$$\Delta_г = \pm 2m\frac{\lambda}{2}.$$

Амплітуда результуючого коливання мінімальна в усіх точках, для яких

$$\Delta_г = \pm\left(2m+1\right)\frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2\pi}\lambda.$$

Якщо $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0$, то ця умова набуває вигляду

$$\Delta_г = \pm\left(2m+1\right)\frac{\lambda}{2}.$$

Особливим випадком інтерференції є стоячі хвилі.

Стоячі хвилі *– це хвилі, які утворюються під час накладання двох біжучих хвиль, що поширюються назустріч одна одній з однаковими частотами і амплітудами.*

Нехай дві плоскі хвилі поширюються назустріч одна одній вздовж осі *OX* в середовищі без згасання. Рівняння цих хвиль

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx),\ \xi_2 = A\cos(\omega t + kx + \varphi),$$

де φ – різниця фаз хвиль у точці $x = 0$.

Додавши ці рівняння і враховуючи, що $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, отримаємо ***рівняння стоячої хвилі***:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Множник $\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$ показує, що у точках середовища виникає коливання з тією самою частотою ω, що і коливання зустрічних хвиль.

Множник $2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right)$, який не залежить від часу, виражає амплітуду $A_{ст}$ результуючих хвиль, точніше – амплітуда, як величина додатна, дорівнює абсолютному значенню цього множника:

$$A_{ст} = \left|2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right)\right|.$$

Амплітуда результуючого коливання залежить від координати *x*, що визначає положення точок середовища.

У точках середовища, де

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} = \pm m\pi,\ (m = 0, 1, 2, ...),$$

амплітуда $A_{ст}$ досягає максимального значення 2*A*. Точки, в яких $A_{ст}$ максимальна, називаються ***пучностями стоячої хвилі.***

У точках середовища, де

$$\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{\varphi}{2}=(2m+1)\frac{\pi}{2},\ (m=0,1,2,...),$$

$A_{ст}=0$. Ці точки називаються ***вузлами стоячої хвилі.*** Точки середовища, що перебувають у вузлах, не коливаються.

Виберемо початок відліку *x* так, щоб φ дорівнювало нулю. Тоді координати пучностей

$$x_п=\pm m\frac{\lambda}{2},$$

а вузлів:

$$x_в=\pm(2m+1)\frac{\lambda}{4}.$$

Відстань між двома сусідніми вузлами (або пучностями) стоячої хвилі називається ***довжиною стоячої хвилі,*** $\lambda_{ст}=\frac{\lambda}{2}$.

Відстань між сусідніми вузлом і пучністю стоячої хвилі дорівнює

$$(2m+1)\frac{\lambda}{4}-m\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{4}.$$

У стоячій хвилі енергія не переноситься – повна енергія коливань кожного елемента об'єму середовища, обмеженого сусідніми вузлами, не залежить від часу. Вона лише переходить із кінетичної енергії у потенціальну енергію пружно деформованого середовища, і навпаки. Відсутність перенесення енергії стоячою хвилею є результатом того, що падаюча і відбита хвилі, які утворюють цю стоячу хвилю, переносять енергію у рівних кількостях і в протилежних напрямках.

Лабораторна робота № 16

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Мета роботи – визначити коефіцієнт жорсткості пружини статичним і динамічним методами.

Прилади та обладнання: 1) вимірювальний пристрій; 2) набір тягарців і пружин; 3) секундомір; 4) штангенциркуль.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 2.1, § 2.2.

Опис вимірювального пристрою

Вимірювальний пристрій складається з П-подібного кронштейна (2), закріпленого на масивній підставці (1). На гачки (3) в перекладині кронштейна підвішуються досліджувані пружини, до них – тягарці.

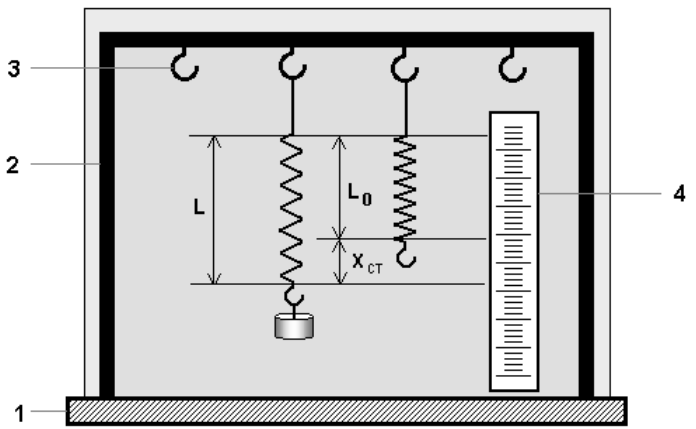

Рис.1

Вертикально закріплена масштабна лінійка (4) дає змогу вимірювати довжину пружини у навантаженому (L) та ненавантаженому (L_0) станах і визначати величину статичного розтягу ($x_{ст}$).

Час, протягом якого здійснюється певна кількість коливань

тягарців, визначають секундоміром.

Виведення розрахункових формул

Визначення коефіцієнта жорсткості статичним методом

Умова рівноваги підвішеного на пружині тягарця масою m (рис. 1):

$$k(L - L_0) = mg. \quad (1)$$

Позначивши $k = k^C$ – коефіцієнт жорсткості, визначений статичним методом, $L - L_0 = x_{cm}$ – статичний розтяг пружини, одержимо

$$k^C = \frac{mg}{x_{cm}}. \quad (2)$$

Визначення коефіцієнта жорсткості динамічним методом

З формули для періоду коливань пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

одержимо:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m \ . \quad (4)$$

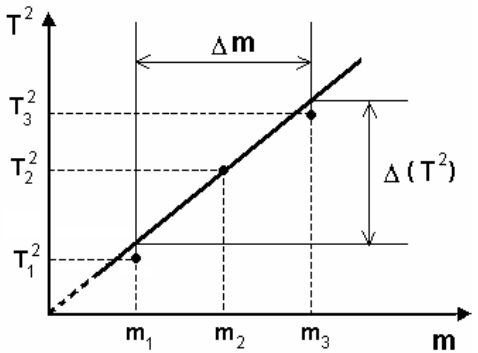

Рис.2

Це означає, що квадрат періоду коливань T^2 є лінійною функцією маси тягарця (m), а величина $\frac{4\pi^2}{k}$ – кутовим коефіцієнтом графіка $T^2 = f(m)$ (рис. 2).

З рис. 2 бачимо, що

$$\frac{4\pi^2}{k} = \frac{\Delta(T^2)}{\Delta m}, \quad (5)$$

де Δm – різниця мас тягарців, наприклад: $\Delta m = m_3 - m_1$; $\Delta(T^2)$ – визначений з графіка приріст квадрата

періоду коливань.

Отже, вимірявши періоди коливань системи з різними масами тягарців і побудувавши графік залежності $T^2 = f(m)$, можна визначити коефіцієнт жорсткості пружини динамічним методом:

$$k^{Д} = 4\pi^2 \frac{\Delta m}{\Delta(T^2)}. \qquad (6)$$

Послідовність виконання роботи

Визначення маси тіл:

1. Виміряти діаметр D і висоту тягарців H. Результати записати у табл. 1.

2. За формулою $m = \rho \frac{\pi D^2}{4}$, де ρ – густина матеріалу тягарців, розрахувати масу тягарців.

Таблиця 1

Тягарець	D, 10^{-3} *м*	H, 10^{-3} *м*	ρ, *кг*/*м*^{3}	m, *кг*
№ 1				
№ 2				
№ 3				

Визначення k^C*:*

1. Підвісивши пружину № 1, зафіксувати поділку, що відповідає кінцю недеформованої пружини, L_0.
2. Навантаживши пружину тягарцем № 1, визначити поділку, що відповідає кінцю деформованої пружини, L. Далі знайти $x_{ст}$.
3. Дії, зазначені в п.2, повторити для решти тягарців.
4. Результати вимірювань записати у табл. 2.
5. За формулою (2) розрахувати k^C і визначити $k^C{}_{сер}$ (табл. 2).
6. Підвісити пружину № 2 і повторити дії, зазначені в п.п. 1 – 5.

Таблиця 2

Пружини	m, *кг*	L_0, 10^{-3} *м*	L, 10^{-3} *м*	$x_{ст}$, 10^{-3} *м*	k^C, *Н/м*	$k^C_{сер.}$, *Н/м*
№ 1						
№ 2						

Визначення $k^Д$*:*

1. Підвішений на пружині тягарець відвести на 30 – 40 *мм* вниз, відпустити і виміряти секундоміром час t, протягом якого тягарець здійснить 10 повних коливань.

2. За формулою $T = \dfrac{t}{10}$ визначити період коливань і розрахувати величину T^2.

3. Вказані у п.п. 1, 2 вимірювання і розрахунки провести для решти тягарців, результати записати у табл. 3.

4. Замінити пружину і повторити дії, зазначені в п.п. 1 - 3.

5. Для кожної пружини побудувати графік залежності $T^2 = f(m)$ і за формулою (6) розрахувати коефіцієнт жорсткості $k^Д$, визначений динамічним методом.

6. Для кожної пружини оцінити розбіжність одержаних результатів як:

$$\delta k = \frac{k^C_{сер} - k^Д}{k^C_{сер}} 100\%. \qquad (7)$$

Таблиця 3

Пружини	m, *кг*	t, *с*	T, *с*	T^2, $с^2$	$k^Д$, *Н/м*
№ 1					
№ 2					

Контрольні питання

1. Які коливання називаються гармонічними?
2. Записати диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань.
3. Якою є умова рівноваги підвішеного на пружині тягарця?
4. Вивести формулу для розрахунку коефіцієнта жорсткості пружини.
5. Записати вираз періоду коливань пружинного маятника.

Лабораторна робота № 14

ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Мета роботи – використовуючи оборотний маятник, визначити прискорення вільного падіння.

Прилади та обладнання: 1) оборотний маятник; 2) лінійка; 3) секундомір.

Під час підготовки до виконання роботи використати**:** § 2.1, § 2.4.

Опис вимірювального пристрою

Застосований у цій роботі оборотний маятник складається із стрижня Ст та вантажів A_1 і A_2, які можна переміщати вздовж стрижня. На невеликих відстанях від кінців стрижня закріплені опорні призми $П_1$ і $П_2$, за горизонтальні ребра яких маятник можна почергово підвішувати на кронштейн К. Під дією сили земного тяжіння маятник може здійснювати гармонічні коливання.

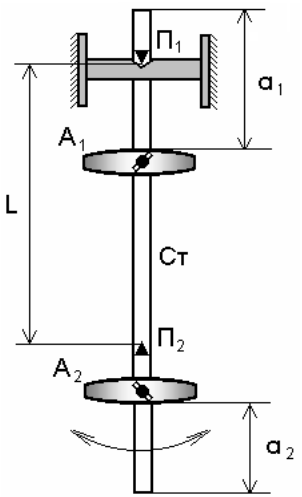

Рис. 1

Виведення розрахункової формули

Якщо переміщенням вантажу A_2 досягати такого взаємного розташування вантажів A_1 і A_2, що періоди коливань маятника під час підвішування за призми $П_1$ і $П_2$ зрівнюються між собою, то зведена

довжина фізичного маятника дорівнюватиме відстані між опорними ребрами призм: $L_{зв} = L$. Визначивши експериментально період коливань маятника T для вказаного розташування вантажів, за відомої величини L з формули

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1}$$

знайдемо

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}. \tag{2}$$

Послідовність виконання роботи

1. Підвісити маятник на призму $П_1$ і закріпити вантаж $А_1$ на відстані $a_1 = 25$ *см* від верхнього кінця стрижня (див. рис. 1).

2. Закріпити вантаж $А_2$ на відстані $a_2 = 12$ *см* від нижнього кінця стрижня (див. рис. 1).

3. Відхилити маятник від положення рівноваги на кут, не більший ніж 10°, відпустити його і визначити час t_1 здійснення 10 повних коливань.

4. Почергово закріплюючи вантаж $А_2$ на відстанях $a_2 = 14, 16, 18, 20, 22$ *см*, повторити вимірювання, зазначені у п. 3.

5. Попередньо знявши зі стрижня вантаж $А_2$, підвісити маятник на призму $П_2$ і, не змінюючи відстані a_1, визначити час t_2 здійснення 10 повних коливань під час повторного закріплення вантажу $А_2$ на відстанях a_2, вказаних у п. 2 і п. 4.

6. Результати вимірювань записати у табл. 1, 2, визначити величини відповідних періодів коливань, як: $T_i = \frac{t_i}{10}$.

7. Побудувати графіки залежностей:

$T_1 = f(a_2)$ – маятник, підвішений на призму $П_1$;

$T_2 = f(a_2)$ – маятник, підвішений на призму $П_2$.

Графік будувати на одних і тих самих координатних осях.

8. Точка перетину графіків визначає величину періоду T. Підставивши це значення у формулу (2), знайдемо величину прискорення вільного падіння g.

9. Розрахувати похибки величини g, вважаючи, що абсолютна похибка визначення періоду коливань маятника**:**

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{10} = \pm\frac{0{,}2}{10}\,c = \pm 0{,}02\,c.$$

Зведена довжина маятника: $L_{зв} = (100 \pm 0{,}05)$ *см.*

Таблиця 1

a_2, *см*	12	14	16	18	20	22
t_1, *с* ($П_1$)						
T_1, *с*						
t_2, *с* ($П_2$)						
T_2, *с*						

Таблиця 2

T, *с*	g, $м/с^2$	Δg, $м/с^2$	δg, %

Контрольні питання

1. Що називається фізичним маятником?
2. У чому полягає різниця між фізичним і математичним маятниками?
3. Що називається зведеною довжиною фізичного маятника?
4. Яка властивість оборотного маятника використана у цій роботі для визначення прискорення вільного падіння?
5. Записати вираз диференціального рівняння коливань фізичного маятника.

Лабораторна робота № 8

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Мета роботи – визначити момент інерції крутильного маятника.

Прилади та обладнання: 1) крутильний маятник; 2) секундомір; 3) штангенциркуль; 4) металеві циліндри.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 1.3, § 2.5.

Опис вимірювального пристрою

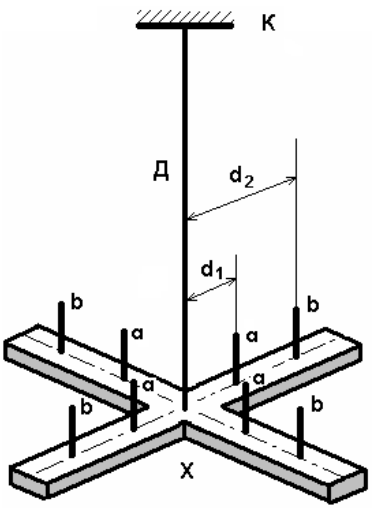

Рис. 1

Крутильний маятник складається з вертикальної дротини Д, нерухомо закріпленої верхнім кінцем у кронштейні К, і горизонтальної хрестовини Х, прикріпленої у геометричному центрі до нижнього кінця дротини (рис. 1).

На відстані d_1 від осі дротини у хрестовині закріплені чотири шпильки a, а на відстані d_2 – чотири шпильки b. На шпильки можна насаджувати металеві циліндри.

Виведення розрахункової формули

Період коливань крутильного маятника визначається із формули

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{f}}, \qquad (1)$$

де J – момент інерції маятника, f - модуль кручення дроту.

Для визначення J за формулою (1), крім виміряного T, необхідно знати модуль кручення дроту f. Це ускладнення можна обійти, навантажуючи крутильний маятник тілами правильної геометричної форми, момент інерції яких легко обчислити. У цій роботі – це вісім металевих циліндрів, сумарна маса яких становить m.

Якщо циліндри насадити на шпильки a (по два циліндри на кожну шпильку), то період коливання одержаної системи

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J + J_1}{f}}, \tag{2}$$

де J_1 – сумарний момент інерції циліндрів відносно осі обертання маятника.

Якщо ж циліндри насадити на шпильки b (також по два на кожну шпильку), то період коливання системи

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J + J_2}{f}}, \tag{3}$$

де J_2 – сумарний момент інерції циліндрів відносно осі обертання маятника у новому положенні циліндрів.

З формул (2) і (3) в результаті нескладних перетворень одержимо

$$J = \frac{J_2 T_1^2 - J_1 T_2^2}{T_2^2 - T_1^2}. \tag{4}$$

Для визначення J_1 і J_2 використаємо теорему Штейнера, згідно з якою

$$J_1 = J_0 + md_1^2; \quad J_2 = J_0 + md_2^2, \tag{5}$$

де J_0 – сумарний момент інерції усіх циліндрів відносно осі, що проходить через їх геометричний центр паралельно до осі обертання.

Підставивши J_1 і J_2 з (5) в (4), одержимо

$$J = \frac{m(T_1^2 d_2^2 - T_2^2 d_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} - J_0 . \qquad (6)$$

Якщо сумарна маса дисків m, а діаметр циліндра D, то J_0 визначиться як

$$J_0 = \frac{1}{8} mD^2 . \qquad (7)$$

Отже:

$$J = \frac{m(T_1^2 d_2^2 - T_2^2 d_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} - \frac{1}{8} mD^2 . \qquad (8)$$

Послідовність виконання роботи

1. Вимірявши d_{01}, $d_{шп}$, $d_{др}$ (рис. 2), знайти d_1 і Δd_1 за такими формулами:

$$d_1 = d_{01} - \frac{d_{др}}{2} - \frac{d_{шп}}{2}; \quad \Delta d_1 = \Delta d_{01} + \frac{1}{2}\Delta d_{др} + \frac{1}{2}\Delta d_{шп}.$$

(d_{01} – відстань між зовнішніми краями дротини Д і шпильки *а*).

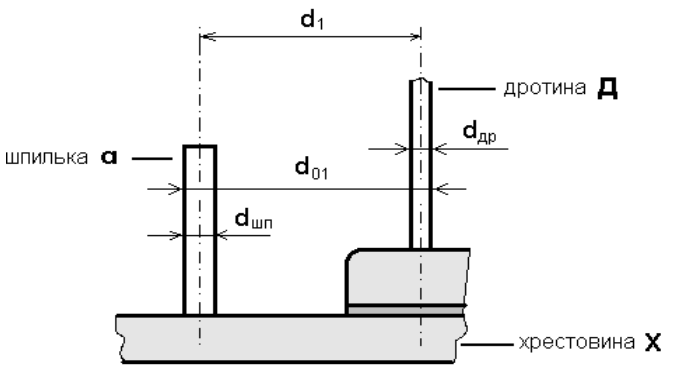

Рис.2

Вимірювання провести один раз для кожної шпильки *а*.

2. Аналогічно визначити d_2 і Δd_2 для кожної шпильки *b* :

$$d_2 = d_{02} - \frac{d_{др}}{2} - \frac{d_{шп}}{2};$$

$$\Delta d_2 = \Delta d_{02} + \frac{1}{2}\Delta d_{др} + \frac{1}{2}\Delta d_{шп..}$$

3. Насадити циліндри на шпильки *а* (по два циліндри на кожну шпильку), привести систему в коливальний рух, закрутивши маятник на

кут, не більший за 90° і виміряти час t_1 п’яти повних коливань. Визначити період T_1 за формулою:

$$T_1 = \frac{t_1}{5}.$$

4. Переставивши циліндри на шпильки *b*, аналогічно визначити T_2.
5. Вимірювання, зазначені в п.п. 3 і 4, провести по чотири рази.
6. Виміряти діаметри *D* чотирьох, довільно вибраних циліндрів.
7. Результати вимірювань записати у таблиці; за формулою (8) розрахувати *J*.
8. Визначити абсолютну і відносну похибки (табл. 1 – 3).

Сумарна маса циліндрів: $m = (1{,}347 \pm 0{,}006)$ *кг.*

Таблиця 1

№ з/п	$d_{шп}$, $10^{-3}м$	$\Delta d_{шп}$, $10^{-3}м$	$d_{др}$, $10^{-3}м$	$\Delta d_{др}$, $10^{-3}м$	d_{01}, $10^{-3}м$	Δd_{01}, $10^{-3}м$	d_{02}, $10^{-3}м$	Δd_{02}, $10^{-3}м$
1								
2								
3								
4								
Сер.								

Таблиця 2

№ з/п	d_1, $10^{-3}м$	Δd_1, $10^{-3}м$	d_2, $10^{-3}м$	Δd_2, $10^{-3}м$	D, $10^{-3}м$	ΔD, $10^{-3}м$
1						
2						
3						
4						
Сер.						

Таблиця 3

№ з/п	t_1, *с*	T_1, *с*	ΔT_1, *с*	t_2, *с*	T_2, *с*	ΔT_2, *с*	J, $кг \cdot м^2$	ΔJ, $кг \cdot м^2$	δJ, %
1									
2									
3									
4									
Сер.									

Контрольні питання

1. Що називається моментом інерції тіла?
2. Записати вираз диференціального рівняння гармонічних коливань крутильного маятника.
3. Чому дорівнює період коливань системи, якщо циліндри насаджені на шпильки?
4. Записати формулу для періоду коливань крутильного маятника.
5. Сформулювати і записати теорему Штейнера.

Лабораторна робота № 9

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ ТІЛА НЕПРАВИЛЬНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ

Мета роботи – використовуючи крутильний маятник, визначити момент інерції тіла неправильної геометричної форми.

Прилади та обладнання: 1) крутильний маятник; 2) тіло неправильної геометричної форми; 3) секундомір; 4) штангенциркуль.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 1.3, § 2.1, § 2.5.

Опис вимірювального пристрою

Крутильний маятник складається з вертикальної дротини, нерухомо закріпленої верхнім кінцем у кронштейні К, і горизонтального однорідного суцільного диска Д, закріпленого у центрі до нижнього кінця дротини. На диск можна накладати тіло неправильної геометрричної форми. В такий спосіб вісь маятника проходитиме через центр мас тіла (рис. 1).

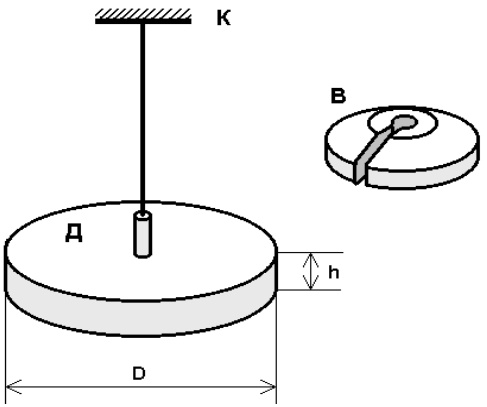

Рис. 1

Виведення розрахункової формули

Період коливань ненавантаженого тілом В крутильного маятника описує формула

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{f}}\,, \qquad (1)$$

де f – модуль кручення дротини; J_0 – момент інерції маятника.

Величину J_0 достатньо точно можна визначити, як момент інерції суцільного диска Д:

$$J_0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mD^2 = \frac{1}{8}\rho VD^2 = \frac{1}{32}\pi\rho D^4 h\,, \qquad (2)$$

де $m = \rho V$ – маса диска (ρ – густина матеріалу диска); $V = \frac{1}{4}\pi D^2 h$ – об'єм диска (D, h – діаметр і висота диска, відповідно).

Період коливань маятника, навантаженого тілом В:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J}{f}}\,, \qquad (3)$$

де J – момент інерції тіла В.

Нескладними перетвореннями з (1) і (3) можна одержати

$$J = J_0\frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2}\,, \qquad (4)$$

а врахувавши (2), – кінцевий вираз для визначення J:

$$J = \frac{1}{32}\pi\rho D^4 h\frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2}\,. \qquad (5)$$

Послідовність виконання роботи

1. Виміряти у трьох різних напрямах діаметр D диска.
2. Виміряти у трьох різних місцях висоту h диска.
3. Привести систему у коливальний рух, закрутивши маятник на кут, не більший за 45°, і виміряти час t_1 п'яти повних коливань.
4. Визначити період T_1 за формулою

$$T_1 = \frac{t_1}{5}\,.$$

5. Навантажити маятник тілом В, і аналогічно до п. 3, визначити період коливань T_2. Вимірювання періодів, зазначені в п.п. 3 і 4, провести тричі.

6. Результати вимірювань записати у табл.1.

7. Перевівши результати вимірювань усіх величин в одиниці СІ, за формулою (5) розрахувати J.

8. Визначити абсолютну і відносну похибки (табл. 1, 2).

Густина матеріалу диска – $\rho = (1{,}40 \pm 0{,}005)10^3$ *кг/м*^{3}.

Таблиця 1

№ з/п	D, 10^{-3}*м*	ΔD, 10^{-3} *м*	h, 10^{-3}*м*	Δh, 10^{-3}*м*	t_1, *с*	T_1, ***с***	ΔT_1, *с*	t_2, *с*	T_2, *с*	ΔT_2, *с*
1										
2										
3										
Сер										

Таблиця 2

J, *кг·м*^{2}	δJ, %	ΔJ, *кг·м*^{2}

Контрольні питання

1. Що називається моментом інерції тіла?
2. Записати вираз диференціального рівняння гармонічних коливань крутильного маятника.
3. Чому дорівнює період коливань системи, якщо диски насаджені на шпильки?
4. Записати формулу для періоду коливань крутильного маятника**.**
5. Сформулювати і записати теорему Штейнера.

Лабораторна робота № 15

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ЗГАСАЮЧИХ КОЛИВАНЬ

Мета роботи – визначити основні параметри згасання коливань механічної системи.

Прилади та обладнання: 1) коливна система; 2) секундомір.

Під час підготовки до виконання роботи використати**:** § 2.1, § 2.6.

Опис вимірювального пристрою

Стрижень (1) підвішений на кронштейні (3) так, що нижнє ребро призми (2) спирається на кронштейн і є віссю обертання стрижня (рис.1).

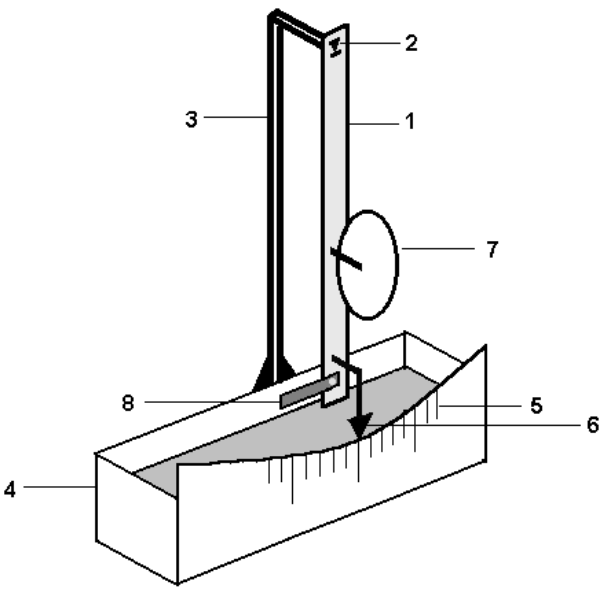

Рис.1

Кронштейн прикріплений до резервуара з водою (4). Шкала (5) і стрілка (6) дають змогу вимірювати амплітуду коливань системи.

До стрижня прикріплені два заспокоювачі:

- повітряний заспокоювач (7) у позиції, показаній на рис.1, збільшує силу опору середовища (повітря).

Заспокоювач не діє, якщо його повернути навколо горизонтальної осі на кут 90°;

- рідинний заспокоювач (8) у позиції, показаній на рис. 1, не діє, а після повороту на кут 90° рухатиметься у воді.

Виведення розрахункових формул

З рівняння згасаючих коливань $x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$ випливає залежність амплітуди коливань від часу:

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t}. \quad (1)$$

Логарифмуючи (1), одержимо вираз для коефіцієнта згасання:

$$\delta = \frac{1}{t} \ln \frac{A_0}{A(t)}. \quad (2)$$

Позначивши $t = n_Z T$ – час, протягом якого амплітуда зменшиться у $Z = \frac{A_0}{A(t)}$ разів (n_Z – кількість повних коливань, що здійснилися за час t; T – період коливань), одержимо

$$\delta = \frac{\ln Z}{n_Z T}. \quad (3)$$

Наприклад, якщо після здійснення системою n_2 коливань амплітуда коливань зменшилася у $Z = 2$ рази, то

$$\delta = \frac{\ln 2}{n_2 T}. \quad (4)$$

З формули (3)

$$\ln Z = \delta T n_Z. \quad (5)$$

Врахувавши, що логарифмічний декремент згасання

$$\lambda = \delta T,$$

одержимо з (5):

$$\ln Z = \lambda n_Z. \quad (6)$$

Отже, $\ln Z$ є лінійною функцією n_Z, а λ – кутовим коефіцієнтом

графіка цієї функції.

Побудувавши графік залежності $\ln Z = f(n_Z)$, визначимо логарифмічний декремент згасання як

$$\lambda = \frac{\Delta(\ln Z)}{\Delta n_Z}, \tag{7}$$

де $\Delta(\ln Z)$ і Δn_Z – визначені з графіка прирости відповідних величин.

Розрахунок добротності коливної системи проведемо за формулою

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \tag{8}$$

Послідовність виконання роботи

1. Встановити обидва заспокоювачі у вертикальне положення.
2. Відхилити стрижень на 10 – 15 поділок шкали, і відпустити; визначити і записати в табл. 1 час t, протягом якого здійсниться десять коливань.
3. За формулою $T = t/10$ розрахувати період коливань і записати результат у табл. 1.
4. Дії, зазначені в п.п. 1 – 3, повторити ще двічі.
5. Встановити повітряний заспокоювач у вертикальне, а рідинний – у горизонтальне положення і повторити тричі дії, зазначені в п.п. 2, 3.
6. Встановити повітряний заспокоювач у горизонтальне, а рідинний заспокоювач - у вертикальне положення і повторити тричі дії, зазначені в п.п. 2, 3.
7. Встановити заспокоювачі у вертикальне положення, відхилити стрижень на 12 поділок, відпустити і визначити кількість коливань, протягом яких початкова амплітуда зменшиться у 2, 3 і 4 рази: n_2, n_3, n_4. Результати записати у табл. 1.

8. Дії, зазначені в п. 7, повторити ще двічі.
9. Для кожного із заспокоювачів повторити три рази дії, зазначені в п.п. 7, 8.
10. Використовуючи середні значення n_2 і T для усіх трьох випадків, визначити за формулою (4) коефіцієнти згасання δ.
11. Розрахувати абсолютну і відносну похибки величин δ
12. Для усіх трьох випадків побудувати графіки $\ln Z = f(n_Z)$ і визначити логарифмічні декременти згасання λ.
13. За формулою (8) визначити добротність коливної системи за наявності і відсутності заспокоювачів.
14. Результати розрахунків, виконаних у п.п. 10 – 13, записати у табл. 2.

Таблиця 1

Заспокоювач		t, c	T, c	ΔT, c	n_2	Δn_2	n_3	n_4
повітряний + рідинний	1							
	2							
	3							
	Сер.							
повітряний	1							
	2							
	3							
	Сер.							
рідинний	1							
	2							
	3							
	Сер.							

Таблиця 2

Заспокоювач	δ, c^{-1}	$\Delta\delta$, c^{-1}	$\delta\ (\delta)$, %	λ	Q
повітряний + рідинний					
повітряний					
рідинний					

Контрольні питання

1. Записати вираз сили опору, що діє на коливну систему.
2. Записати диференціальне рівняння згасаючих гармонічних коливань.
3. Записати розв'язок диференціального рівняння згасаючих гармонічних коливань.
4. Як залежить період згасаючих коливань від коефіцієнта згасання?
5. У чому полягає фізичний зміст коефіцієнта згасання?

Лабораторна робота № 18

ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТИ ЗВУКОВИХ КОЛИВАНЬ МЕТОДОМ СТОЯЧОЇ ХВИЛІ

Мета роботи – визначити частоту звукових коливань.

Прилади та обладнання: 1) скляна трубка; 2) лінійка; 3) поршень; 4) телефон; 5) генератор низькочастотних коливань.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 2.7, § 2.8.

Опис вимірювального пристрою

Вимірювальний пристрій складається зі скляної трубки (1), закріпленої на підставках (2), в якій може переміщатися поршень (3). Один кінець трубки закриває джерело звуку – динамік (5). Положення лівого краю поршня, тобто відстань між мембраною динаміка і поршнем, визначають лінійкою, прикріпленою до трубки (1). Динамік з'єднаний з низькочастотним генератором електричних коливань (4); генератор під'єднують до мережі 220*В* і вмикають клавішею (6), а зміну частоти сигналу, що подається на динамік, здійснюють

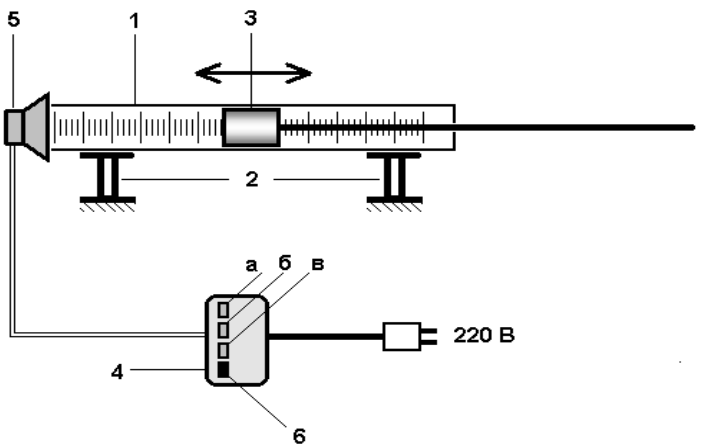

Рис.1

обертанням ручки (рис. 1).

Виведення розрахункової формули

Звукова хвиля збуджується мембраною динаміка (5) і розповсюджується у повітрі в об'ємі трубки (1). Дійшовши до поршня, хвиля відбивається і в результаті накладання відбитої хвилі на падаючу утворюється стояча хвиля. Якщо початкові фази хвиль дорівнюють нулю, то рівняння стоячої хвилі

$$\xi = 2A \cos kx \cos\omega t, \qquad (1)$$

де $2\left|A\cos kx\right| = A_{cm}$ – амплітуда стоячої хвилі; A – амплітуда падаючої хвилі; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число; λ – довжина падаючої хвилі, ω – циклічна частота коливань.

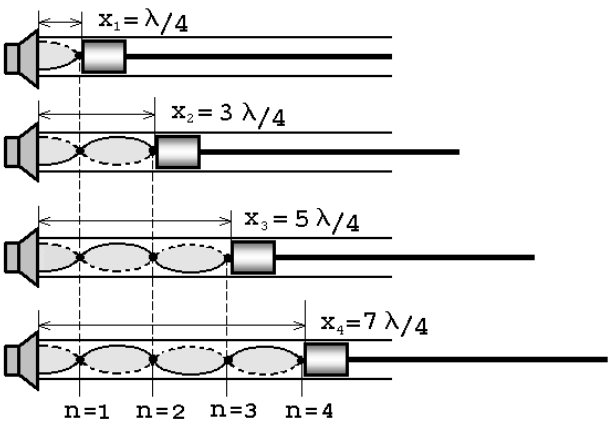

Рис. 2

Пересуваючи поршень уздовж трубки, спостерігаємо зміну гучності звуку. Максимальною сила звуку буде тоді, коли біля поверхні мембрани динаміка утворюється пучність, а біля поверхні поршня – вузол стоячої хвилі (рис. 2).

Розташування вузлів визначаємо з умови

$$2A\cos kx = 0. \qquad (2)$$

Звідси

$$kx = (2m+1)(\pi/2),$$

а враховуючи, що $k = 2\pi/\lambda$, для координат вузлів отримаємо вираз:

$$x_{вт} = (2m+1)(\lambda/4), \qquad (3)$$

де $m = 1, 2, \ldots$

Отже, за значень x_n, які задаються формулою (3) (звучання повітряного стовпа максимальне) між мембраною і поршнем вкладається непарна кількість чвертей довжин хвиль (рис. 2).

Різниця відстаней між двома сусідніми вузлами чисельно дорівнює довжині стоячої хвилі:

$$x_{вт+1} - x_{вт} = L = \lambda_{ст}. \quad (4)$$

Частота звукових коливань ν пов'язана з довжиною хвилі λ співвідношенням

$$\nu = \upsilon_t / \lambda, \quad (5)$$

де υ_t – швидкість поширення звуку у повітрі за температури навколишнього середовища.

Відомо, що:

$$\upsilon_t = \upsilon_0 \sqrt{1 + \alpha t}\ , \quad (6)$$

де υ_0 – швидкість поширення звуку у повітрі за температури t=0 °C, α – температурний коефіцієнт розширення повітря.

Врахувавши (6), а також зв'язок між довжинами падаючої і стоячої хвиль ($\lambda = 2\lambda_{ст} = 2L$), для частоти звуку одержимо розрахункову формулу

$$\nu = \frac{\upsilon_0 \sqrt{1 + \alpha t}}{2L}. \quad (7)$$

Послідовність виконання роботи

1. Виміряти температуру повітря і записати її у табл. 1.
2. Під'єднати генератор електричних коливань до мережі 220 B.
3. Увімкнути генератор.
4. Встановити ручку налаштування частоти у певне положення і отримати коливання з певною частотою ν_1.
5. Пересуваючи поршень із крайнього лівого положення вправо, виміряти і записати у табл. 1 відстані між мембраною динаміка і лівим

краєм поршня, для яких гучність звуку – максимальна (тобто визначити і записати координати вузлів x_n, де n = 1, 2, 3, 4) (див. рис. 2).

6. За формулою (4) розрахувати величини:

$$L_1 = x_2 - x_1, \quad L_2 = x_3 - x_2, \quad L_3 = x_4 - x_3,$$

і визначити середнє значення довжини стоячої хвилі як

$$L = \frac{1}{3}\left(L_1 + L_2 + L_3\right).$$

7. Розрахувати абсолютну похибку величини L як

$$\Delta L = \frac{1}{3}\left(\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3\right),$$

де $\Delta L_1 = |L - L_1|$, $\Delta L_2 = |L - L_2|$, $\Delta L_3 = |L - L_3|$.

8. Результати розрахунків, проведених у п.п. 6, 7, записати у табл. 2.

9. Повертаючи ручку налаштування частоти, отримати звуки певних частот ν_2, ν_3 і повторити дії, зазначені у п.п. 4 – 8.

10. За формулою (7) розрахувати частоти звуку ν_1, ν_2, ν_3 і записати одержані значення у табл. 3.

11. Визначити похибки отриманих значень частот.

Швидкість звуку в повітрі за температури t = 0 °C - υ_0 = 332 *м/с*;
температурний коефіцієнт розширення
повітря α = 0,00366 *град*$^{-1}$.

Таблиця 1

Положення ручки	x_1, 10^{-3} *м*	x_2, 10^{-3} *м*	x_3, 10^{-3} *м*	x_4, 10^{-3} *м*	t, °C
а					
б					
в					

Таблиця 2

Полож. ручки	L_1, 10^{-3} *м*	L_2, 10^{-3} *м*	L_3, 10^{-3} *м*	L, 10^{-3} *м*	ΔL_1, 10^{-3} *м*	ΔL_2, 10^{-3} *м*	ΔL_3, 10^{-3} *м*	ΔL, 10^{-3} *м*
а								
б								
в								

Таблиця 3

Положення ручки	v, *Гц*	Δv, *Гц*	δv, *%*
а			
б			
в			

Контрольні питання

1. Якими параметрами характеризується хвильовий рух?
2. Як утворюються стоячі хвилі?
3. Записати вираз для амплітуди стоячої хвилі.
4. Записати вираз координати вузлів.
5. Як залежить довжина стоячої хвилі від довжини падаючої хвилі?
6. Які точки називаються вузлами, а які – пучностями стоячої хвилі?

Лабораторна робота № 17
ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

Мета роботи – вивчити явище утворення стоячих хвиль у струні, знайти частоти власних коливань та швидкість поширення хвиль у струні за фіксованої сили натягу.

Прилади та обладнання: 1) звуковий генератор; 2) віброперетворювач; 3) струна; 4) нерухомий блок; 5) масштабна лінійка; 6) тягарці.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 2.7, § 2.8.

Опис вимірювального пристрою

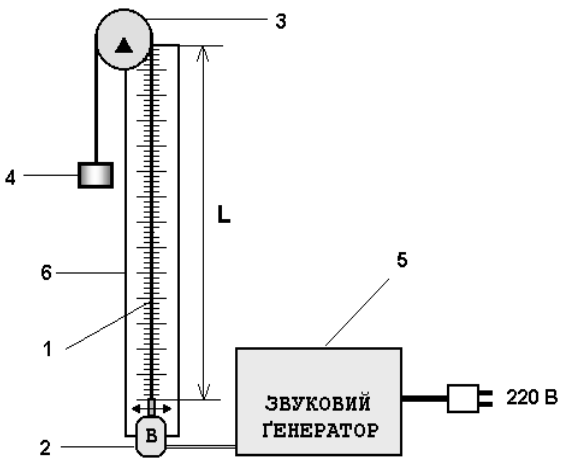

Рис. 1

Об’єктом дослідження є вертикальна натягнена струна (1), у якій можуть виникати стоячі хвилі (рис. 1).

Її нижній кінець прикріплений до вібратора віброперетворювача (2). Це пристрій, що перетворює електричні коливання, створені звуковим генератором (5), у механічні коливання тієї самої частоти і збуджує вимушені коливання струни.

Верхній кінець струни перекинуто через нерухомий блок (3) і навантажено основним тягарцем (4). Накладаючи на тягарець (4) додаткові тягарці, можна

змінювати силу натягу струни. Довжина L частини струни, яка здійснює механічні коливання, дорівнює віддалі між нижньою точкою закріплення та точкою дотику струни до блока, і надалі буде вважатися довжиною струни. Частоту (у звуковому діапазоні) й амплітуду коливань вихідного сигналу звукового генератора можна регулювати за допомогою відповідних ручок на його передній панелі. Координати вузлів та пучностей стоячої хвилі, а також її довжину визначають масштабною лінійкою (6).

Виведення розрахункових формул

Збуджені вібратором поперечні коливання струни поширюються до верхньої точки закріплення струни. Тут хвиля відбивається і рухається у зворотному напрямку. У результаті у струні виникають стоячі хвилі. При цьому точки закріплення струни є одночасно вузлами стоячої хвилі, оскільки стоячі хвилі виникають тільки за таких частот, коли на довжині струни L вкладається ціле число півхвиль, тобто ціле число довжин стоячої хвилі.

Звідси випливає, що

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad \text{або} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \tag{1}$$

де $n = 1, 2, 3...$

Відповідні власні частоти коливань струни пов’язані з довжиною хвилі співвідношенням

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = a\frac{u}{2L}\cdot n, \tag{2}$$

де u – швидкість поширення хвиль у струні, однакова для всіх частот.

Найнижча частота $\nu_1 = u/2L$ називається *основним тоном* коливань, або *першою гармонікою*. Усі вищі частоти, кратні ν_1, називаються *обертонами*, наприклад: подвоєна частота $\nu_2 = 2\nu_1$ – це *перший обертон,* або *друга гармоніка*.

Вигляд струни у випадку спостереження основного тону та першого і другого обертонів показано на рис. 2.

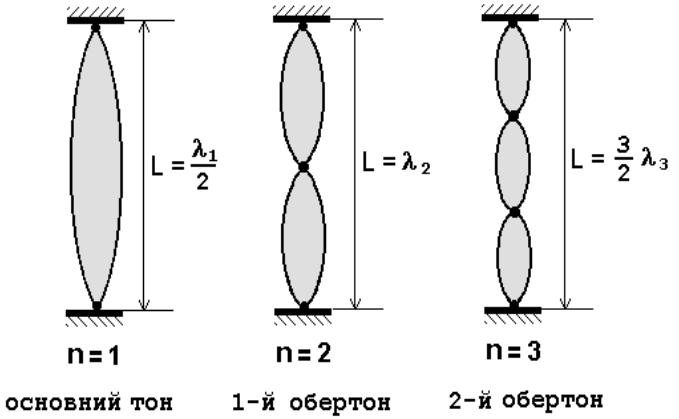

Рис. 2

Швидкість поширення поперечних хвиль у струні залежить від сили натягу струни:

$$u = \sqrt{\frac{F}{S \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{m_m g}{S \cdot \rho}} = \\ = \sqrt{\frac{m_T g V}{Sm}} = \sqrt{\frac{m_T g}{m/L}}, \quad (3)$$

де $F = m_m g$ – сила натягу струни (m_m – маса тягарця);

$\rho = \frac{m}{V}$ – густина матеріалу струни (m – маса струни, V – її об'єм); S – площа поперечного перерізу струни; L – довжина струни.

Позначивши $\frac{m}{L} = m_L$ – маса одиниці довжини струни, або лінійна густина струни, одержимо

$$u = \sqrt{\frac{m_T g}{m_L}}. \quad (4)$$

Враховуючи (4) для частот коливань струни, отримаємо вираз

$$\nu_n = \frac{n}{2L} u = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{m_T g}{m_L}}, \quad (5)$$

де n = 1, 2, 3...

Виберемо за початок відліку одну із точок закріплення струни і вісь X спрямуємо вздовж струни. Тоді рівняння стоячої хвилі, що виникає у струні за частоти ν_n, запишемо у вигляді

$$\xi_n = 2A \sin k(L - x) \cos(kL - \omega t) = A_{cm} \cos(\pi n - \omega t), \qquad (6)$$

де ξ_n – поперечне відхилення точки струни з координатою x у момент часу t; $k = 2\pi/\lambda_n$ – хвильове число;

$$A_{cm} = 2A|\sin 2\pi/\lambda_n (L - x)|$$

– амплітуда стоячої хвилі.

З умови $\frac{2\pi}{\lambda_n}(L - x_n) = (2m+1)\pi$ знаходимо координати пучностей ($A_{cm} = 2A$) стоячої хвилі:

$$x_n = [n - (m + \frac{1}{2})]\frac{\lambda_n}{2}. \qquad (7)$$

З умови $\frac{2\pi}{\lambda_n}(L - x_в) = m\pi$ знаходимо координати вузлів ($A_{cm} = 0$) стоячої хвилі:

$$x_в = (n - m)\frac{\lambda_n}{2}. \qquad (8)$$

У табл.1 наведено координати пучностей x_n і вузлів $x_в$ для основного тону ($n = 1$) і вищих гармонік ($n = 2, 3$).

Таблиця 1

n	m	x_n	$x_в$
1	0	$^1\!/_2 L$	L
	1		0
2	0	$^3\!/_4 L$	L
	1	$^1\!/_4 L$	$^1\!/_2 L$
	2		0
3	0	$^5\!/_6 L$	L
	1	$^1\!/_2 L$	$^2\!/_3 L$
	2	$^1\!/_6 L$	$^1\!/_3 L$
	3		0

Послідовність виконання роботи

1. Увімкнути звуковий генератор (ЗГ), прогріти його протягом 5 *хв*. Ручкою регулювання частоти встановити мінімальну частоту.

2. Збільшуючи частоту ЗГ, одержати стоячу хвилю, що відповідає основному тону коливань струни. Записати відповідну частоту ЗГ ($\nu_д$) у таблицю. (Частоту власних коливань струни можна вважати рівною частоті сигналу ЗГ при максимальній амплітуді коливань струни (резонанс) . Перевірити узгодження координат вузлів і пучностей з (7) та (8).

3. Поступово збільшуючи частоту ЗГ, одержати перший та другий обертони (n = 2, 3,). Провести вимірювання, аналогічні п. 2.

4. Накласти на основний тягарець один додатковий тягарець і повторити вимірювання п.п. 2, 3.

5. Додати другий додатковий тягарець і ще раз повторити вимірювання п.п. 2, 3.

6. За формулою (5) розрахувати частоти власних коливань струни ν_p, результати записати у табл. 2.

7. Визначити абсолютну і відносну похибки вимірювань, як:

$$\Delta\nu = \frac{1}{3}(\Delta\nu_1 + \Delta\nu_2 + \Delta\nu_3) = \frac{1}{3}(|\nu_р - \nu_{Д1}| + |\nu_р - \nu_{Д2}| + |\nu_р - \nu_{ДЗ}|);$$

$$\delta\nu = (\Delta\nu/\nu_p)\cdot 100\ \%.$$

8. За формулою (4) розрахувати швидкості поширення хвиль у струні за різних сил натягу; результати записати у табл. 3.

Лінійна густина струни – $m_L = 600 \cdot 10^{-6}$ *кг/м*;
маса основного тягарця $m_{ос}$ = …….. *г*;
маса основного і одного додаткового тягарців – $m_1 = m_{ос} + m_{1д}$;
маса основного і двох додаткового тягарців – $m_2 = m_{ос} + m_{1д} + m_{2д}$.

Таблиця 2

№ з/п	m, *г*	n =1				n =2				n =3				
		$\nu_д$, *Гц*	$\nu_р$, *Гц*	$\Delta\nu$, *Гц*	$\delta\nu$ %	$\nu_д$, *Гц*	$\nu_р$, *Гц*	$\Delta\nu$, *Гц*	$\delta\nu$ %	$\nu_д$, *Гц*	$\nu_р$, *Гц*	$\Delta\nu$, *Гц*	$\delta\nu$ %	u, *м/с*
Сер.	$m_{ос}$													
Сер.	m_1													
Сер.	m_2													

Контрольні питання

1. У якому випадку можливе виникнення стоячих хвиль?
2. Чому дорівнює амплітуда стоячої хвилі?
3. З яких умов знаходимо координати вузлів та пучностей?
4. У яких точках струни швидкість коливань буде максимальною?
5. Як впливає величина сили натягу на частоту власних коливань струни?