

Розділ 5

ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ ТВЕРДИХ ТІЛ

§ 5.1. Основні поняття. Види деформації

Деформація твердого тіла є результатом зміни під дією зовнішньої сили взаємного розміщення атомів або молекул, з яких тіло складається, і відстаней між ними.

Залежно від величини прикладеної сили тверді тіла можуть бути деформовані пружно і пластично.

***Пружною деформацією** називають оборотну деформацію, за якої після припинення дії зовнішніх сил об'єм і форма тіла набувають попередніх значень.*

***Пластична деформація** – необоротна деформація, за якої об'єм і форма тіла не відновлюються після припинення дії на них зовнішніх сил.*

Зміна взаємного розміщення частинок і відстаней між ними спричиняє появу ***внутрішніх сил***, які порушують рівновагу, що існувала до накладення деформуючої сили. За пружної деформації внутрішні сили напрямлені проти зовнішньої сили і зрівноважують її, тому виникнення деформації не приводить до порушення рівноваги між окремими частинками тіла, до появи прискорень. Внутрішні сили після припинення дії зовнішньої сили відновлюють форму і розміри тіла.

*Деформація визначається величиною σ , яка числово дорівнює відношенню деформуючої сили до площі поперечного перерізу поверхні, яка перпендикулярна до напрямку прикладення сили і яка називається механічною **напругою**, тобто*

$$\sigma = \frac{F}{S_{\perp}}, \quad [\sigma] = 1 \frac{H}{m^2} = 1 \text{ Па}.$$

Величину, яка характеризує деформацію, позначають буквою ε . Для різних видів деформації це будуть різні величини.

Пружні властивості твердих тіл

Співвідношення між силою, яка спричинила пружну деформацію, і величиною деформації визначається **законом Гука**: *деформація пропорційна до деформуючої сили*.

Закон Гука можна записати у вигляді

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{const.}$$

Стала, яка дорівнює відношенню напруги до величини деформації, називається **модулем** відповідного виду пружної деформації.

§ 5.2. Деформація розтягу

Якщо сила, яка прикладена до поверхні тіла, перпендикулярна до неї, то вона спричиняє деформацію, яка називається **одностороннім розтягом**, або **стиском**. Цей вид деформації характеризується тим, що змінюється об'єм, але не змінюється форма тіла.

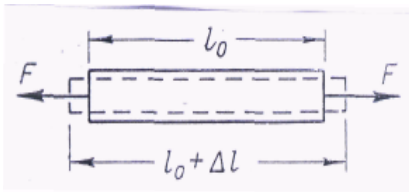


Рис.5.1

Нехай на металевий циліндричний стрижень завдовжки l_0 і площею поперечного перерізу S діє сила F (рис.5.1).

Під дією цієї сили стрижень видовжується. Відношення зміни довжини стрижня до його початкової довжини називається **відносним видовженням** і є величиною деформації під час розтягу:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Закон Гука можемо записати у такому вигляді:

$$\frac{\sigma}{\frac{\Delta l}{l_0}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E, [E] = 1 \frac{H}{m^2} = 1 \text{ Па}.$$

Пружні властивості твердих тіл

Величина E називається **модулем Юнга**. Він дорівнює числово напрузі, яка викликає одиничну деформацію або подвоює довжину розтягнутого зразка.

Вираз для закону Гука можна ще подати у такому вигляді:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon = k\sigma, \quad k = \frac{1}{E},$$

де $k = \frac{1}{E}$ – **коефіцієнт пружності**. За $\sigma = 1 \text{ Па}$ $k = \frac{1}{E}$. Отже, кое-

фіцієнт пружності числово дорівнює відносному видовженню стрижня, яке створюється напругою, що дорівнює одиниці.

Розглянемо результати розтягу деякого однорідного зразка, подані у вигляді **діаграми розтягу** – залежності механічної напруги від відносної деформації (рис. 5.2):

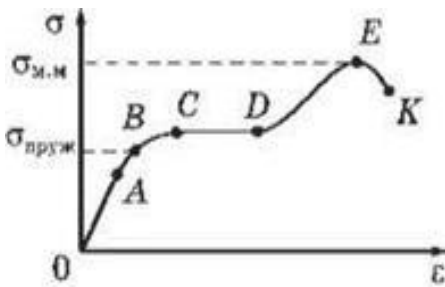


Рис.5.2

ється межею пружності $\sigma_{\text{пруж}}$.

- Ділянка BC: пластична деформація.
- Ділянка CD: ділянка плинності матеріалу. Видовження відбувається практично без збільшення навантаження.
- Ділянка DE: зміцнення матеріалу: видовження відбувається при значному збільшенні навантаження.

- Ділянка OA: при малих деформаціях напруга σ прямо пропорційна відносному подовженню ε . Виконується закон Гука: $\sigma = \varepsilon E$. Деформація пружна.

- Ділянка АВ: закон Гука не виконується, але деформація пружна. Максимальна напруга, за якої ще не виникає помітна залишкова деформація, назива-

Пружні властивості твердих тіл

- При досягненні максимального значення механічної напруги $\sigma_{\text{м.м.}}$ (межа міцності) матеріал розтягується без збільшення зовнішнього навантаження до самого зруйнування в точці К.

§ 5.3. Деформація зсуву

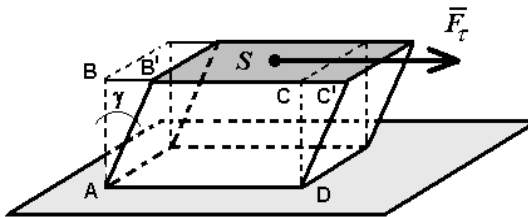


Рис. 5.3

Розглянемо брусок $ABCD$, закріплений нижньою гранню до нерухомої підставки, а до верхньої грані BC прикладена тангенціальна сила $\vec{F}_\tau$ (рис. 5.3). Під дією цієї сили брусок деформується, а величина зсуву характеризується зміщенням верхньої грані на величину BB' .

Відносною деформацією зсуву називається відношення BB' до AB , тобто $\text{tg} \gamma$ (γ – кут зсуву).

Тангенціальна напруга – величина, що числово дорівнює тангенціальній силі, прикладеній до одиниці площі грані BC :

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S}.$$

Якщо деформація пружна, то для неї виконується закон Гука:

$$\sigma_\tau = G \text{tg} \gamma,$$

де G – модуль зсуву.

Модуль зсуву – це величина, що числово дорівнює тангенціальній напрузі, за якої $\text{tg} \gamma = 1$, тобто кут зсуву $\gamma = 45^\circ$.

За малих деформацій $\text{tg} \gamma \approx \gamma$ і закон Гука запишеться у формі

$$\sigma_\tau = G \gamma.$$

§ 5.4. Деформація кручення

Нехай нижня основа циліндричного стрижня закріплена до нерухомої підставки, а до верхньої основи прикладена пара сил з моментом $\vec{M}$ (рис. 5.4).

Оскільки об'єм стрижня залишається незмінним, деформацію

кручення можна розглядати, як особливий вид деформації зсуву – так звану *неоднорідну деформацію зсуву*.

Кожен елемент стрижня деформується по-різному – зі збільшенням відстані елемента до осі деформація зростає.

З (рис. 5.4) зрозуміло, що

$$BB' = R\varphi, \text{ а } \operatorname{tg} \gamma = \frac{BB'}{AB'} = \frac{R}{L} \varphi,$$

де R – радіус стрижня, L – довжина

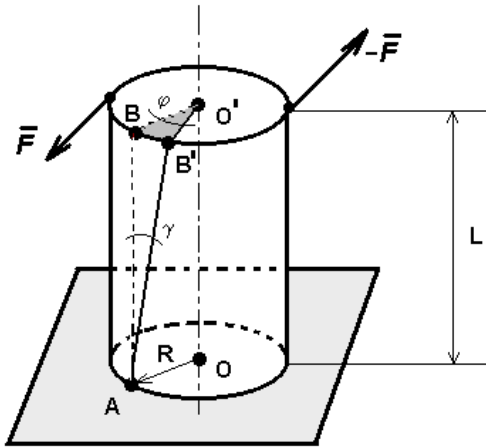


Рис. 5.4

стрижня.

Під дією моменту сил $\vec{M}$ елементи стрижня обертаються навколо осі OO' , при цьому, згідно з законом Гука, кут закручування φ пропорційний до величини моменту сили:

$$M = f\varphi,$$

де f – коефіцієнт пропорційності (так званий *модуль кручення*).

Встановимо зв'язок між коефіцієнтом f і модулем зсуву G :

$$\sigma_\tau = \frac{2F}{S} = \frac{2F}{\pi R^2};$$

Пружні властивості твердих тіл

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{R}{L} \varphi = \frac{R}{L} \frac{M}{f} = \frac{R}{L} \frac{F R}{f} = \frac{R^2 F}{L f}.$$

Тоді:

$$\sigma_{\tau} = G \operatorname{tg} \gamma = G \frac{R^2 F}{L f} = \frac{2 F}{\pi R^2}.$$

Звідси

$$f = G \frac{\pi R^4}{2 L}.$$

Лабораторна робота № 11

ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ МЕТОДОМ ЗГИНУ

Мета роботи – визначити модуль пружності методом згину.

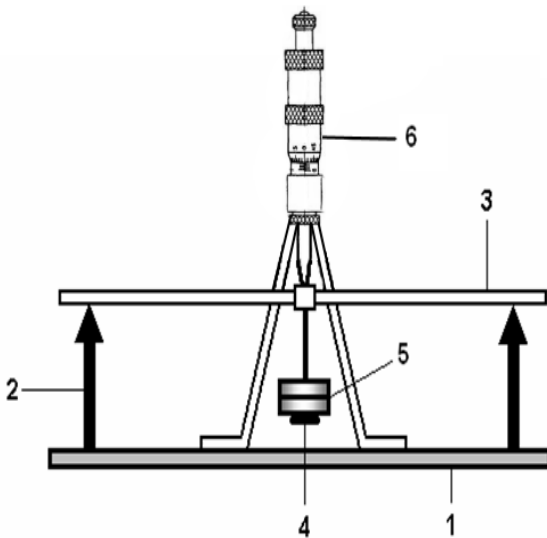
Прилади та обладнання: 1) вимірювальний пристрій; 2) тягарці; 3) лінійка; 4) штангенциркуль.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 5.1, § 5.2.

Опис вимірювального пристрою

На рис. 1 подано схематично вимірювальну установку.

До основи (1) прикріплені стійки (2), верхня частина яких закін-



чується тригранними призмами. Горизонтальні верхні ребра призм слугують опорами досліджуваного стрижня 3. На підставку 4, підвішену посередині до стрижня 3, можна накладати тягарці 5. Прогин навантаженого тягарцями стрижня вимірюється мікрометром 6 з точністю до 0,01 мм. Мікрометр фіксується у спеціальному гнізді на кронштейні; кронштейн прикріплений до середини основи.

Рис. 1

Виведення розрахункової формули

Розглянемо стрижень прямокутного перерізу, що лежить симетрично на двох тригранних призмах, відстань між якими становить L (рис. 2). До центра стрижня прикладена вертикально вниз сила F .

Під дією цієї сили нижні шари стрижня зазнають пружної деформації розтягу, а верхні шари – деформації стиску; при цьому виконується закон Гука. Середній (*нейтральний*) шар MN – не деформується. В описаному випадку величина деформації характеризується так званою *стрілою прогину* $\Delta\lambda$. Стріла прогину дорівнює зміщенню вниз точки прикладення сили або з доволі високою точністю – зміщенню середини верхньої грані стрижня.

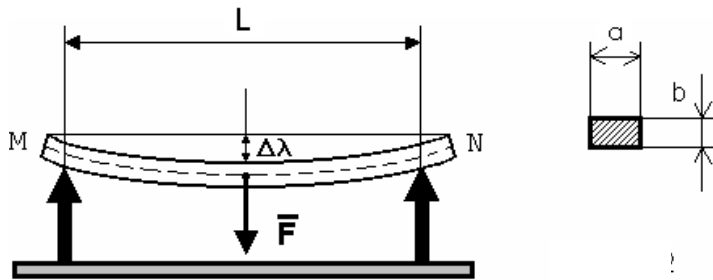


Рис. 2

Стріла прогину визначається за формулою:

$$\Delta\lambda = \frac{FL^3}{4Eab^3}, \quad (1)$$

де E – модуль пружності матеріалу стрижня; a і b – відповідно ширина і товщина стрижня.

Зауважимо, що застосування формули (1) можливе лише для стрижнів прямокутного перерізу за виконання умови: $L \gg a, b$, коли деформуюча сила паралельна до сторони перерізу, яка входить у

Пружні властивості твердих тіл
знаменник (1) у третьому степені.

З формули (1) одержимо вираз для визначення модуля пружності:

$$E = \frac{FL^3}{4\Delta\lambda ab^3}. \quad (2)$$

Послідовність виконання роботи

1. Лінійкою провести триразове вимірювання відстані між верхніми ребрами призм стійок L .

2. Виміряти штангенциркулем у трьох різних місцях ширину a і товщину b стрижня.

3. Дані вимірювань п.п. 1, 2 занести в табл. 1, розрахувати середні значення й абсолютні похибки.

4. Встановити на призмах досліджуваний стрижень. Тримач підставки для тягарців повинен бути розміщений посередині стрижня, а стрижень – симетрично до ребер опор.

5. Обережно покласти на тримач один тягарець, тобто прикласти до центра стрижня силу $F = mg$ (m – маса тягарця). Підвести наконечник мікрометричного гвинта до стрижня, щоб засвітилась лампочка, зняти відлік λ_{1H} і записати його у табл. 2.

6. Продовжуючи навантажувати тримач тягарцями, тобто діючи на стрижень силами $2F$, $3F$, $4F$, $5F$, зробити відповідні цим силам відліки: λ_{2H} , λ_{3H} , λ_{4H} , λ_{5H} і записати їх у табл. 2.

7. Зняти один тягарець, зробити відлік λ_{4P} і занести його напроти відліку λ_{4H} .

8. Продовжуючи розвантажувати стрижень, зробити відліки λ_{3P} , λ_{2P} , λ_{1P} і також записати їх у табл. 2.

9. Для одного і того самого значення діючої сили за формулою (3) знайти середні величини відліків під час навантаження і розвантаження:

$$\lambda_i = \frac{\lambda_{iH} + \lambda_{iP}}{2} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \lambda_{5P} = \lambda_{5H} \quad . \quad (3)$$

Пружні властивості твердих тіл

10. Віднімаючи від кожного наступного значення λ_i попереднє значення λ_{i-1} , визначити стрілу прогину $\Delta\lambda_i$, викликану одним тягарцем, що відповідає дії сили F . (Наприклад: $\Delta\lambda_3 = \lambda_3 - \lambda_2$). Значення $\Delta\lambda_i$ записати у табл. 2.

11. Визначити середнє значення стріли прогину $\Delta\lambda$, що відповідає дії сили F .

12. Розрахувати модуль пружності матеріалу стрижня.

13. Визначити абсолютну і відносну похибки.

$$F = mg = 0,981 \text{ Н}$$

Таблиця 1

№ з/п	L , м	ΔL , м	a , 10^{-3} м	Δa , 10^{-3} м	b , 10^{-3} м	Δb , 10^{-3} м
1						
2						
3						
Сер.						

Таблиця 2

№ з/п	F , Н	λ_{iH} , 10^{-3} м	λ_{iP} , 10^{-3} м	λ_i , 10^{-3} м	$\Delta\lambda_i$, 10^{-3} м	$\Delta(\Delta\lambda_i)$, 10^{-3} м	E , 10^{11} Н/м	ΔE , 10^{11} Н/м^2	δE , %
1	0	0	0	0					
2	F								
3	$2F$								
4	$3F$								
5	$4F$								
6	$5F$								
Сер.									

Контрольні питання

1. У чому полягає різниця між пружною і пластичною деформаціями?
2. Чому дорівнює механічна напруга?
3. Записати закон Гука для деформації розтягу.
4. Розкрити фізичний зміст модуля пружності (модуль Юнга).
5. Нарисувати $\sigma - \varepsilon$ діаграму розтягу.

Лабораторна робота № 13

ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ЗСУВУ

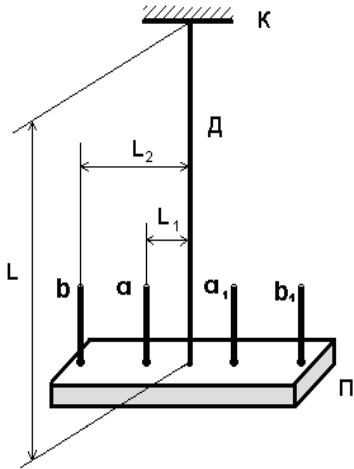
Мета роботи – використовуючи метод кручення, визначити модуль зсуву матеріалу дротини.

Прилади та обладнання: 1) крутильний маятник; 2) секундомір; 3) штангенциркуль; 4) тягарці.

Під час підготовки до виконання роботи використати: §1.1, §1.3, § 5.3, § 5.4.

Опис вимірювального пристрою

Крутильний маятник складається з вертикальної дротини D завдовжки L , нерухомо закріпленої верхнім кінцем у кронштейні K , і горизонтальної планки Π , симетрично прикріпленої до нижнього кінця дротини (рис. 1).



До планки прикріплені чотири шпильки: осі шпильок a і a_1 віддалені від осі дротини D на відстань L_1 , а осі шпильок b і b_1 віддалені від осі дротини на відстань L_2 . На шпильки можуть насаджуватися циліндричні тягарці масою m кожен.

Рис.1

Виведення розрахункової формули

Якщо планку Π закрутити на невеликий кут і відпустити, то

Пружні властивості твердих тіл
система почне здійснювати крутильні гармонічні коливання з періодом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{f}}, \quad (1)$$

де J – момент інерції системи; f – модуль кручення матеріалу дротини.

Для визначення f за відомим значенням виміряного T необхідно виключити невідомий момент інерції J . Тому в роботі визначають два періоди коливань маятника:

- T_1 – тягарці на шпильках a і a_1 ; момент інерції маятника – J_1 ;
- T_2 – тягарці на шпильках b і b_1 ; момент інерції маятника – J_2 ;

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{f}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{f}} \quad \text{звідси} \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \quad \text{або} \quad J_2 = J_1 \frac{T_2^2}{T_1^2}. \quad (2)$$

З врахуванням теореми Штейнера подамо J_1 і J_2 у вигляді

$$J_1 = J + J_0 + 2mL_1^2 \quad \text{і} \quad J_2 = J + J_0 + 2mL_2^2, \quad (3)$$

де J – момент інерції планки з дротиною і шпильками; J_0 – момент інерції тягарців відносно їх геометричної осі. Із співвідношень (3) випливає, що

$$J_2 - J_1 = 2m(L_2^2 - L_1^2). \quad (4)$$

Підставивши в (4) вираз (2) для J_2 , одержимо

$$J_1 = \frac{2m(L_2^2 - L_1^2)T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (5)$$

З формули для $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{f}}$ знайдемо

$$f = \frac{4\pi^2 J_1}{T_1^2} = \frac{8\pi^2 m(L_2^2 - L_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (6)$$

Використавши зв'язок між модулями кручення і зсуву $f = G \frac{\pi R^4}{2L}$,

отримаємо

$$\frac{8\pi^2 m (L_2^2 - L_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} = G \frac{\pi R^4}{2L}. \quad (7)$$

Позначивши діаметр дротини $D=2R$, отримаємо вираз для знаходження модуля зсуву:

$$G = \frac{256\pi m (L_2^2 - L_1^2) L}{(T_2^2 - T_1^2) D^4}. \quad (8)$$

Послідовність виконання роботи

1. Вимірявши L_{01} , $d_{\text{шп}}$, D (рис. 2), визначити L_1 і ΔL_1 за такими формулами:

$$L_1 = L_{01} - \frac{D}{2} - \frac{d_{\text{шп}}}{2}; \quad \Delta L_1 = \Delta L_{01} + \frac{1}{2} \Delta D + \frac{1}{2} \Delta d_{\text{шп}}.$$

Вимірювання провести для шпильок a і a_1 .

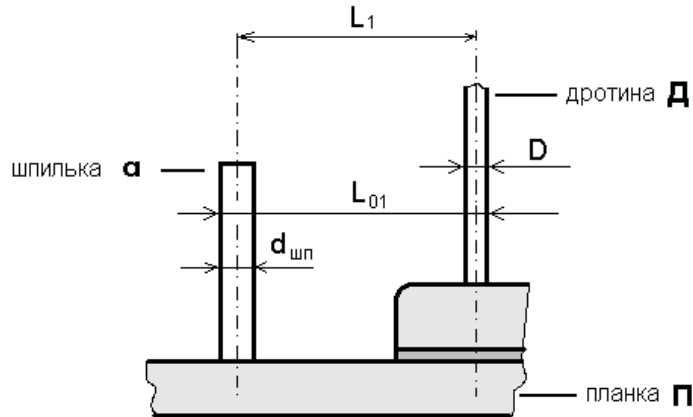


Рис. 2

2. Аналогічно визначити L_2 і ΔL_2 для шпильок b і b_1 :

Пружні властивості твердих тіл

$$L_2 = L_{02} - \frac{D}{2} - \frac{d_{un}}{2}; \quad \Delta L_2 = \Delta L_{02} + \frac{1}{2} \Delta D + \frac{1}{2} \Delta d_{un}.$$

(L_{02} – відстань між зовнішніми краями дротини D і шпильки b).

4. Насадити тягарці на шпильки a і a_1 , привести систему в коливальний рух, визначити час t_1 п'яти повних коливань і період T_1 за формулою

$$T_1 = \frac{t_1}{5}.$$

5. Переставити тягарці на шпильки b і b_1 і аналогічно визначити період T_2 .

6. Вимірювання, вказані у п.п. 3, 4, провести по три рази; вимірювання, вказані в п.п. 1, 2 провести один раз для кожної шпильки; результати вимірювань занести у табл. 1, 2, і за формулою (8) розрахувати G . Результати занести в табл. 3.

7. Визначити абсолютну і відносну похибки.

Маса тягарця – $m = (0,390 \pm 0,001) \text{ кг}$;

довжина дротини – $L = (1,12 \pm 0,005) \text{ м}$.

Таблиця 1

№ з/п	$D,$ 10^{-3} м	$\Delta D,$ 10^{-3} м	$d_{un i},$ 10^{-3} м	$\Delta d_{un i}$ 10^{-3} м	$L_{01},$ 10^{-3} м	$\Delta L_{01},$ 10^{-3} м	$L_{02},$ 10^{-3} м	$\Delta L_{02},$ 10^{-3} м
1								
2								
3								
4								
Сер.								

Пружні властивості твердих тіл

Таблиця 2

№ з/п	$L_1,$ 10^{-3} м	$\Delta L_1,$ 10^{-3} м	$L_2,$ 10^{-3} м	$\Delta L_2,$ 10^{-3} м	$t_1, \text{ с}$	$T_1, \text{ с}$	$\Delta T_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$T_2, \text{ с}$	$\Delta T_2, \text{ с}$
1										
2										
3										
Сер.										

Таблиця 3

$G,$ 10^{11} Н/м	$\Delta G,$ 10^{11} Н/м^2	$\delta G,$ %

Контрольні питання

1. Що називається деформацією? Які є види деформації?
2. Що називається деформацією зсуву?
3. Сформулювати закон Гука для однорідної деформації зсуву.
4. У чому полягає фізичний зміст модуля зсуву?
5. Записати формулу для періоду коливань крутильного маятника.