

Розділ 7

ЕЛЕМЕНТИ ГІДРОДИНАМІКИ

§ 7.1. Основні поняття гідродинаміки

Розділ механіки суцільних середовищ, в якій вивчається рух нестисливих рідин під дією зовнішніх сил, а також сил, з якими рідини діють на тверді тіла, що переміщаються в них, називається **гідродинамікою**.

Характерною властивістю рідин є їхня **текучість**, тобто малий опір деформації зсуву. Рідини не мають форми – вони легко набувають форми тієї посудини, в якій перебувають.

Рух рідини називають **течією**, а сукупність частинок рухомої рідини – **поток**ом.

Якщо швидкість рідини у кожній точці простору, який займає рідина, не змінюється з часом, тобто $\vec{v}$ не залежить від t : $\vec{v} = f(\vec{r})$, то течію рідини називають **усталеною, або стаціонарною**.

Рух рідини зображають за допомогою **ліній течії**, які проводять так, що дотичні до них лінії збігаються за напрямком із векторами швидкостей рідини у відповідних точках простору. Лінії течії вказують не тільки напрямок швидкостей, а й дають змогу зробити висновок про величину швидкості частинок у цьому місці.

*Поверхню, утворену лініями течії, проведеними через усі точки малого замкнутого контуру, називають **трубкою течії**. Частину рідини, обмежену трубкою течії, називають **струминою**.*

Рідина, в якій немає внутрішнього тертя, називається **ідеальною рідиною**.

§ 7.2. Рівняння нерозривності струмини

За стаціонарної течії частинки рухаються так, що кожна з них увесь час залишається у межах певної струмини.

Розглянемо трубку течії, настільки тонку, що у кожному її перерізі швидкість можна вважати постійною (рис. 7.1).

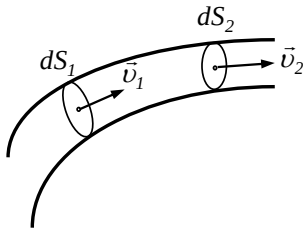


Рис. 7.1

Виберемо довільно два перерізи, площі яких дорівнюють dS_1 і dS_2 і перпендикулярні до напрямку швидкості рідини, відповідно, $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. За час Δt через переріз dS_1 протікатиме об'єм рідини, який дорівнює $v_1 \Delta t dS_1$, а через переріз dS_2 – $v_2 \Delta t dS_2$. Якщо рідина нестислива ($\rho = \text{const}$, де ρ – густина рідини), то за час Δt через перерізи dS_1 і dS_2 протікатимуть однакові об'єми

рідини:

$$v_1 dS_1 = v_2 dS_2.$$

Для нестисливої рідини добуток швидкості течії у довільному перерізі на площу цього поперечного перерізу має однакове значення:

$$v dS = \text{const}.$$

Це співвідношення називається **рівнянням нерозривності струмини**.

§ 7.3. Рівняння Бернуллі

Стаціонарний рух ідеальної нестисливої рідини у полі сил тяжіння описує рівняння Бернуллі. Нехай по нахиленій трубці течії змінного перерізу рухається ідеальна рідина – рідина, в якій немає внутрішнього тертя, – в напрямку зліва направо (рис. 7.2).

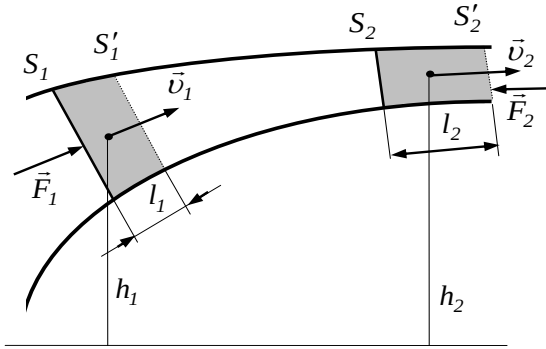


Рис. 7.2

Умовно виділимо область трубки, обмежену перерізами S_1 і S_2 . Нехай у місці перерізу S_1 швидкість рідини $\vec{v}_1$, тиск p_1 і висота, на якій розміщений цей переріз, h_1 . Аналогічно у місці перерізу S_2 швидкість рідини тиск p_2 і висота пере-

різу h_2 . За малий проміжок часу Δt рідина переміщається від перерізів S_1 і S_2 до перерізів S_1' і S_2' .

Визначимо зміну повної енергії, яка відбувається у цій області між перерізами S_1 і S_2 за час Δt . За цей час маса рідини між перерізами S_1 і S_1' поступає в область, а маса, що знаходиться між S_2 і S_2' , витікає з неї. Величина зміни повної механічної енергії, яка є сумою кінетичної і потенціальної енергій маси Δm рідини, дорівнює різниці повних енергій мас, які витікають і затікають,

$$(\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m):$$

$$\Delta E = (E_{\kappa_2} + E_{n_2}) - (E_{\kappa_1} + E_{n_1}) = \left(\frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 \right) - \left(\frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 \right).$$

За законом збереження енергії, енергія ΔE дорівнює роботі зовнішніх сил, що переміщують масу Δm рідини від перерізу S_1 до перерізу S_2 :

$$\Delta E = A.$$

Робота A дорівнює роботі, яка виконується під час переміщення усієї ділянки рідини, що знаходиться між перерізами S_1 і S_2 протягом такого часу Δt , за який через ці перерізи буде перенесена маса рідини

Елементи гідродинаміки

Δm . Робота зовнішніх сил із переміщення маси Δm :

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t .$$

За законом нерозривності струмینی

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \Delta V .$$

В результаті

$$A = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V .$$

Враховуючи, що $\Delta E = A$, отримаємо

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta m g h_1 .$$

Оскільки густина рідини $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$, то

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 .$$

Перерізи S_1 і S_2 вибрані довільно, тому

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} .$$

Це співвідношення називається **рівнянням Бернуллі**. Величина p називається статичним тиском, величина $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамічним тиском, а величина $\rho g h$ – гідростатичним тиском.

Рівняння Бернуллі можна сформулювати так: у стаціонарному потоці ідеальної нестисливої рідини сума динамічного, гідростатичного і статичного тисків є сталою у довільному поперечному перерізі потоку.

Для трубки течії, яка розміщена горизонтально ($h_1 = h_2$), рівняння Бернуллі матиме такий вигляд:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const} .$$

Лабораторна робота № 19

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Мета роботи – у дослідний спосіб перевірити справедливості рівняння Бернуллі.

Прилади і матеріали: 1) вимірювальний пристрій;
2) секундомір; 3) вода.

Під час підготовки до виконання роботи використати: § 7.1, § 7.2, § 7.3.

Опис вимірювального пристрою



Вимірювальний пристрій складається з двох резервуарів А і В, які закріплені на штативі. У верхньому резервуарі у дні зроблено два отвори різних діаметрів і закріплена міліметрова шкала (рис.1).

Виведення розрахункової формули

Справедливість рівняння Бернуллі перевіряємо, порівнюючи час витікання води різних висот з резервуару А, визначений за допомогою секундоміра і розрахованого на основі формули. Нехай діаметр резервуара А і діаметр отвору у дні дорівнюють D і d , відповідні їм швидкості руху води – v_1 і v_2 , висота води

Рис.1

Елементи гідродинаміки
в резервуарі – H , густина води ρ . Тоді рівняння Бернуллі для горизонтальної трубки течії та умова нерозривності потоку матимуть такий вигляд:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g H = \frac{\rho v_2^2}{2}; \quad D^2 v_1 = d^2 v_2. \quad (1)$$

Розв'язавши систему рівнянь (1) відносно v_1 , отримаємо

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gHd^4}{D^4 - d^4}}. \quad (2)$$

Беручи до уваги, що $D^4 \gg d^4$, отримаємо

$$v_1 = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gH}. \quad (3)$$

Швидкість пониження рівня води v_1 в резервуарі А змінюється з часом, оскільки зменшується рівень води H . Однак, якщо взяти нескінченно малий інтервал часу dt , то протягом цього часу швидкість не встигне змінюватись, а рівень води понизиться на величину dh :

$$dh = v_1 dt = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh} dt. \quad (4)$$

Звідси,

$$dt = \frac{D^2}{d^2} \frac{dh}{\sqrt{2gh}}. \quad (5)$$

Проінтегруємо обидві частини виразу (5) і знайдемо вираз для часу витікання води з резервуару А:

$$\int_0^t dt = \frac{D^2}{d^2} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{2gh}}; \quad t = \frac{D^2}{d^2} \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad t = \frac{S}{S_1 + S_2} \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (6)$$

Послідовність виконання роботи

1. Виміряти штангенциркулем діаметр D резервуара А.
2. Налити в резервуар А воду на висоту $H = 7$ см.
3. Відкрити в дні резервуара А отвір більшого діаметра d і визначити час витоку води t_e .
4. Розрахувати час витоку води t на основі формули (6).
5. Результати вимірювань записати у табл. 1.
6. Аналогічні виміри повторити для висот $H = 5$ см і $H = 3$ см.
7. Такі ж визначення часів t_e і t виконати при відкритому отворі меншого діаметра і рівнях води $H = 7; 5; 3$ см.
8. Результати вимірювань записати у табл. 2.
9. Аналогічно визначити часи t_e і t при відкритих обох отворах у дні резервуара площею $S_1 + S_2$ і рівнях води $H = 7; 5; 3$ см.
10. Результати вимірювань записати у табл. 3.
11. Оцінити розбіжність одержаних результатів за формулою:

$$\delta t = \frac{|t - t_e|}{t} \cdot 100\%.$$

12. Побудувати графіки $t = f(H)$ для трьох випадків.

Таблиця 1

№ з/п	$D,$ см	$S = \frac{\pi D^4}{4},$ см ²	$d_1,$ см	$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4},$ см ²	$H,$ см	$t,$ с	$t_e,$ с	$\delta t,$ %
1			0,9		7			
2					5			
3					3			

Таблиця 2

№ з/п	$D,$ $см$	$S = \frac{\pi D^4}{4},$ $см^2$	$d_1,$ $см$	$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4},$ $см^2$	$H,$ $см$	$t,$ $с$	$t_e,$ $с$	$\delta t,$ $\%$
1			0,7		7			
2					5			
3					3			

Таблиця 3

№ з/п	$S, см^2$	$S_1 + S_2,$ $см^2$	$H,$ $см$	$t,$ $с$	$t_e,$ $с$	$\delta t,$ $\%$
1			7			
2			5			
3			3			

Контрольні питання

1. Яку рідину називають ідеальною?
2. Що називається лінією і трубкою течії?
3. Яку течію називають стаціонарною течією?
4. Сформулювати закон про нерозривність струменя.
5. Сформулювати рівняння Бернуллі.