УДК 514.8

М.С.Гумен, д-р техн. наук
Є.В.Мартин, д-р техн. наук
А.Г.Ренкас, інженер

СФЕРИ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТОРУ

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”,
Національний університет “Львівська політехніка”

Розглянуто геометричні аспекти формування сфер у комплексному просторі K^n на основі аналізу виразів дійсних та уявних складових функцій комплексних змінних. Показана можливість формування *m*-сфер у дійсних та уявних *(m+1)*-вимірних підпросторах для випадку відповідної залежності *n+1* комплексних змінних параметрів.

Множина точок *n*-вимірного евклідового простору, що належать *(m+1)*-площині і рівновіддалені від деякої точки цього простору, визначає *m*-вимірну сферу [1]. Зокрема у двовимірному просторі *(n=2)*, така сфера являє коло при *m=1*, яке належить 2-площині. Його канонічне рівняння має вигляд [2]:

$$\omega^2 + z^2 = R^2. \qquad (1)$$

Рівність (1), що пов’язує обидві змінні ω і z, справедлива для усього ряду геометризованої системи комплексних чисел, зокрема, якщо усі змінні та постійні параметри в (1) – звичайні комплексні числа:

$$\omega = u + iv, \quad z = x + iy, \quad R = \iota + ir ,$$

де $i^2 = -1$ – уявна одиниця.

Введемо допоміжний параметр $\mathrm{T} = t + i\tau$ для визначення параметричних функцій

$$\begin{aligned} \omega &= u + iv = (\iota + ir)\sin(t + i\tau); \\ z &= x + iy = (\iota + ir)\cos(t + i\tau). \end{aligned} \qquad (2)$$

З урахуванням комплексних значень змінних параметрів підстановкою (2) в (1) одержимо:

$$(u+iv)^2+(x+iy)^2=(\iota+ir)^2. \qquad (3)$$

Знайдемо складові залежностей комплексних параметрів ω і z для формування сфер згідно [3]. З рівності (3) одержимо:

$$u^2+x^2-(v^2+y^2)+2i(uv+xy)=\iota^2-r^2+2i\iota r. \qquad (4)$$

Твердження. У просторі K^{2n} n комплексних змінних сфери формуються у n-площині дійсних та n-площині уявних складових комплексних параметрів.

Використовуючи (4), маємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} &u^2+x^2-(v^2+y^2)=\iota^2-r^2;\\ &uv+xy=ir\ . \end{aligned} \qquad (5)$$

Вирази дійсної та уявної складових u, v комплексної змінної ω одержимо, використовуючи залежності (5):

$$\begin{aligned} u&=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(y^2-x^2\right)+\left(\iota^2-r^2\right)\pm\sqrt{\left(x^2-y^2-\iota^2+r^2\right)+4(\iota r-xy)^2}};\\ v&=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(x^2-y^2\right)+\left(r^2-\iota^2\right)\pm\sqrt{\left(y^2-x^2+\iota^2-r^2\right)^2+4(\iota r-xy)^2}}\ . \end{aligned} \qquad (6)$$

Для побудови каркасу многовиду зручно використати частинні графіки комплексної функції дійсної змінної x чи y, які одержуємо при перетині цього многовиду проектуючими гіперциліндрами або гіперплощинами особливого положення із слідами в площині $oxiy$ значень аргументу z $y=y_0$, $x=x_0$ чи $y=kx+b$ (рис.1):

$$\omega=u+iv=\omega(z)=\omega(x_0+iy)=\omega(y). \qquad (7)$$

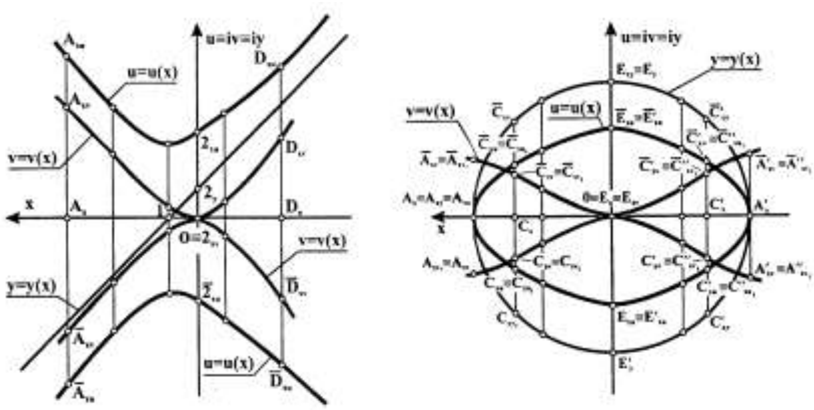

Рис. 1.

Перетнемо многовид $\omega = \omega(z)$, що описується згідно рівняння (1), координатною комплексною гіперплощиною $oxivu$ $(y = 0)$. Приймаємо також $r = 0$. Складові значення функції ω визначимо за формулами:

$$u = \pm\sqrt{\iota^2 - x^2}\ ;$$
$$v = \pm\sqrt{x^2 - \iota^2}\ , \qquad (8)$$

перша з яких визначає коло в площині дійсних змінних oxu. Уявна змінна v приймає скільки завгодно великі значення при достатньо великих $|x|$ і $\iota = const$.

Перетнемо многовид $\omega = \omega(z)$ січною координатною комплексною гіперплощиною $oiyivu\,(x = 0)$, ортогональною до $oxivu$. Приймемо також $\iota = 0$. Складові значення функції ω визначимо за формулами:

$$u = \pm\sqrt{y^2 - r^2}\ ;$$
$$v = \pm\sqrt{r^2 - y^2}\ , \qquad (9)$$

друга з яких визначає коло в площині уявних змінних $oiyiv$. Дійсна змінна u приймає скільки завгодно великі значення при достатньо великих $|y|$ і $r = const$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію формування залежності $\omega = \omega(z)$ за умови, що її складові залежні від параметра Т згідно виразу (2).

У шестивимірному комплексному просторі $oti\tau xiyuiv$ залежності $\omega = \omega(T)$ відповідає двовимірний многовид (поверхня) чотиривимірного комплексного підпростору $oti\tau uiv$ (рис.2). Значення дійсної та уявної частини ω визначені правою частиною (2):

$$\omega = u + iv = (\iota + ir)(\sin tch\,\tau + i\cos tsh\,\tau) \tag{10}$$

і при $|\tau| \to \infty$ з урахуванням зміни складових тригонометричних залежностей $[4,5]$

$$|\omega| = |v + iv| \sim (\iota + ir)\exp|\tau| \tag{11}$$

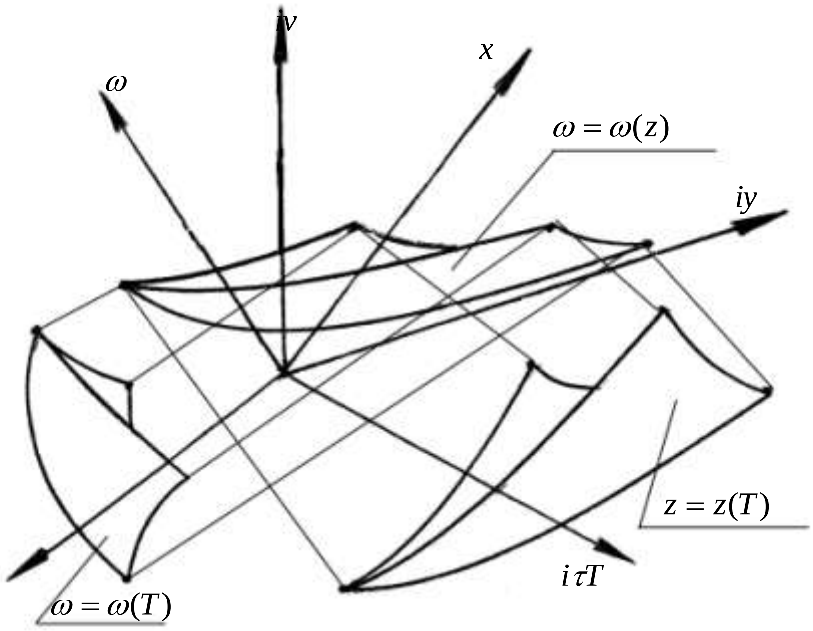

Рис. 2.

Залежності $z = z(T)$ відповідає двовимірний многовид (поверхня) чотиривимірного комплексного підпростору $oti\tau xiy$ (див. рис.2).

Значення дійсної та уявної частини визначені правою частиною (2):

$$z = x + iy = (\iota + ir)(\cos tch\,\tau - i\sin tsh\,\tau) \tag{12}$$

і при $|\tau| \to \infty$

$$|z| = |x + iy| \sim (\iota + ir)\exp|\tau| \tag{13}$$

Отже, складові ω і z залежності (1) приймають скільки завгодно великі значення при достатньо великих значенях $|\tau|$.

Двовимірні многовиди $\omega = \omega(T),\ z = z(T)$ являють направляючі чотиривимірних гіперциліндрів, для яких твірними слугують площини, паралельні площинам $oxiy$ та $ouiv$ відповідно. На взаємному перетині $\omega = \omega(T)\ i\ z = z(T)$ знаходиться шуканий многовид як геометричне місце точок комплексного простору $oti\tau xiyuiv$, що відповідають умовам (1). Розмірність многовиду складає:

$$n = m_1 + m_2 - K = 2\,, \qquad (14)$$

де $m_1 = m_2 = 4$ - розмірність гіперциліндрів;

$K=6$ - розмірність комплексного простору.

Інтерпретація сфер у підпросторах різної розмірності загального многовиду, координати неперервної сукупності точок якого відповідають поставленим вимогам, узагальнюється подібним чином на випадок $n+1$ комплексних змінних:

$$\omega^2 + z_1{}^2 + z_2{}^2 + \ldots + z_n{}^2 = R^2. \qquad (15)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства − М.: Наука, 1966. – с. 215 -220.

2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. –М.: Наука,1975. – с. 83-89.

3. Гумен М.С., Мартин Є.В. До графічного відображення фазового простору функцій комплексних змінних // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КДТУБА, 1998 . – Вип.63. - с.41- 43.

4. Маркушевич А.М. , Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. - М.: Просвещение, 1977. – с.92-97.

5. Янке Е., Эмде Ф., Лем Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. - М.: Наука, 1977. – 342 с.

SPHERES OF THE COMPLEX SPACE

M.Gumen, E.Martyn, A.Renkas

Summary

The geometrical aspects of formation of spheres in complex spacious are considered on the basis of the analysis of expressions of the appropriate validity and mental compound functions complex replaceable. The shown opportunity of formation of m-spheres in the appropriate validity and mental (m + 1)-measurable underspaces for a case of the appropriate dependence n + 1 complex replaceable parameters.