УДК 514.18

Є.В.Мартин, А.Г.Ренкас

ВІДОБРАЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ У КОМПЛЕКСНОМУ ПРОСТОРІ

Тригонометричні функції комплексного аргументу одержують заміною дійсного значення x аргументу комплексним значенням $z = x + iy$. При цьому основні співвідношення між тригонометричними функціями дійсного аргументу зберігаються і в комплексному просторі [1]. Наявність комплексних змінних вносить свої особливості, зокрема для випадку графічного представлення такої функції. Функція комплексної змінної

$$\omega = u + iv = \omega(z) = \sin z = \sin(x + iy) \tag{1}$$

являє частинний випадок простої функції [2]

$$\omega = u + iv = \omega(z) = \omega(x + iy). \tag{2}$$

Її можна представити як многовид комплексного простору з вимірами складових x, iy, u, iv [3,4]. Зауважимо, що в прийнятих для аналізу залежностях тригонометричних функцій, наприклад, (1), перед знаком синуса знаходиться співмножник – одиниця – тобто дійсне число. Взаємозв’язок двох звичайних комплексних чисел ω і z у вигляді аналітичного виразу (2) обумовлює формування фазового простору з вимірами складових цих комплексних чисел розмірності чотири. Весь простір складає неперервна сукупність точок, яка утворює чотирипараметричну множину. Положення довільної точки однозначно визначене, якщо задані чотири параметри, наприклад, x_1, y_1, u_1, v_1. Проте, однаково, у якій послідовності задавати вказані параметри. Виділимо з чотирипараметричної множини підмножину точок, провівши, наприклад, гіперплощину рівня $y = y_j$. Це означає постійність координати в аналітичному виразі комплексної змінної

$$\omega = u + iv = \omega(x + iy_j). \tag{3}$$

Положення точок одержаної підмножини однозначно задане координатою x і визначає лінію як частинний випадок графіка комплексної функції дійсної змінної x. Для заданої функції комплексної змінної (1) можна провести безліч таких ліній. Допоміжні побудови можна виконати при використанні гіперплощини довільного положення, наприклад, розташованої ортогонально в комплексному просторі до розглядуваної гіперплощини рівня $x = x_j$. Кожна з ліній знаходиться у одному з двох

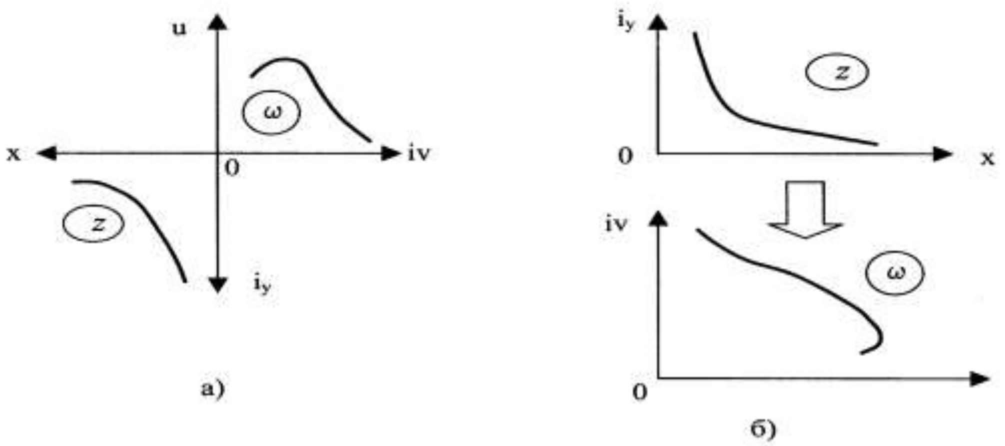

Рис.1.

розташованих ортогонально тривимірних комплексних підпросторів, що мають спільну комплексну площину $oxiy$. Перетин обох ліній визначає точку, координати якої відповідають значенню функції комплексної змінної. Будь-яка точка, що належить многовиду як графіку функції комплексної змінної, визначена одразу двома значеннями параметрів x_1, iy або u_1, iv. Множина таких точок, що відповідає значенням (1,2), є двовимірною і утворює двовимірну поверхню як графік функції комплексної змінної $\omega = \sin z$ у чотиривимірному комплексному просторі.

Такий графік як двовимірну поверхню комплексного простору можна представити наочно та у вигляді комплексного креслення [5,6]. З урахуванням частинного випадку представлення функції $\omega = \sin z$ у двовимірній площині oux як графіка функції $u = \sin x$ використаємо ортогональну систему координат. Положення довільної точки на комплексному кресленні однозначно визначене чотирма проекціями на координатні осі, тому для її відображення можна використати дві або три площини проекцій. Зауважимо, що у першому випадку таким площинам належать області значень z і ω функції (рис. 1, а).

Площини $oxiy$ та $ouiv$ (рис.1,б) використовують для наглядного представлення функції комплексної змінної [1].

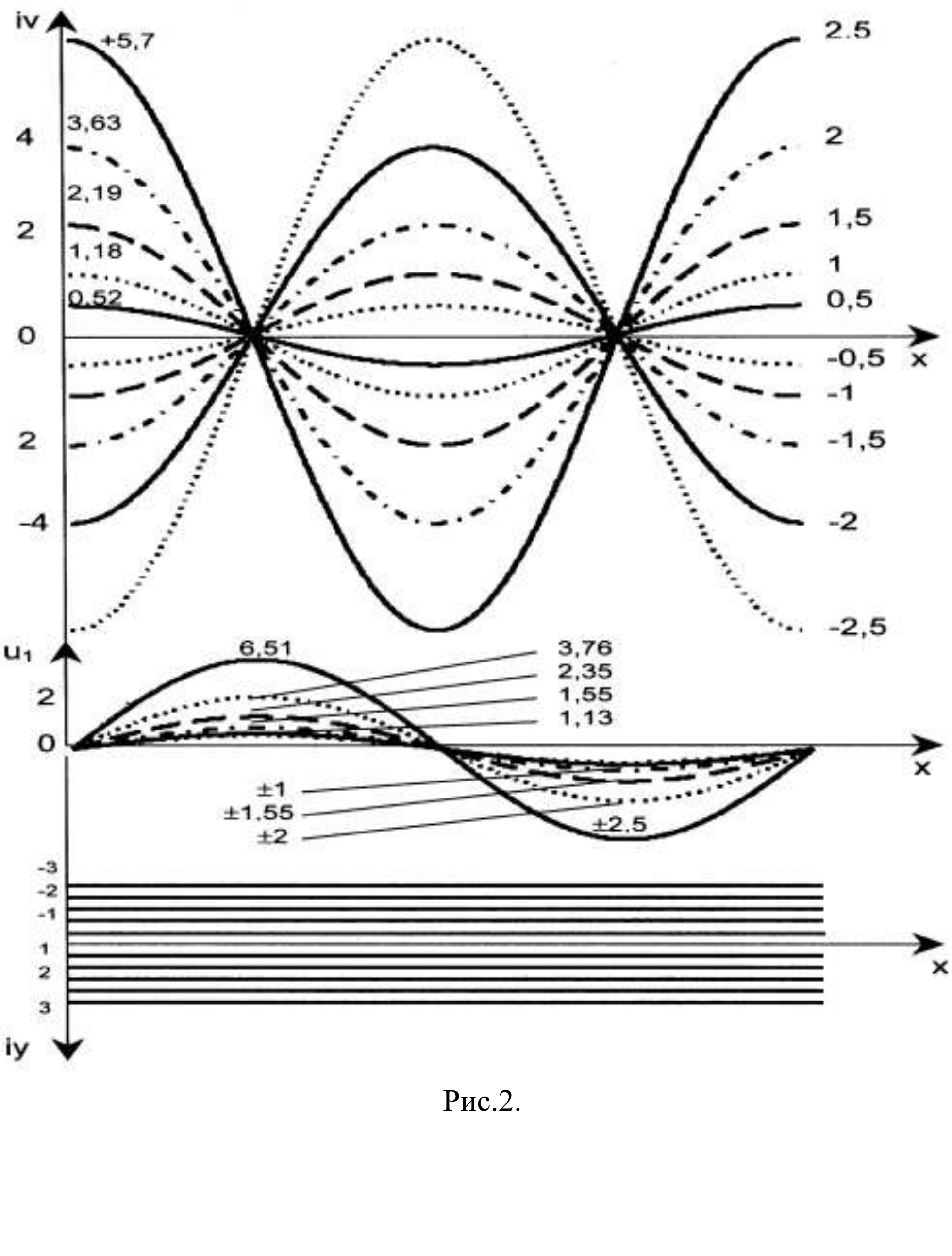

Рис.2.

Використаємо співвідношення між тригонометричними і гіперболічними функціями [7] для формування многовиду як графіка функції $\omega = \sin z$:

$$\omega = u + iv = \sin x ch y + i \cos x sh y. \qquad (4)$$

Встановлено, що для побудови комплексного креслення функції $\omega = R\sin z$, де R – комплексне число, з урахуванням характеру зміни гіперболічних функцій shy та chy достатньо використати гіперплощини рівня зі слідами $y = 0 \ldots \pm 3$ паралельні комплексному тривимірному підпростору *oxuiv* (рис. 2), або гіперплощини рівня зі слідами $x = 0 \ldots 2\pi$, паралельні комплексному тривимірному підпростору *oiyuiv* (рис. 3).

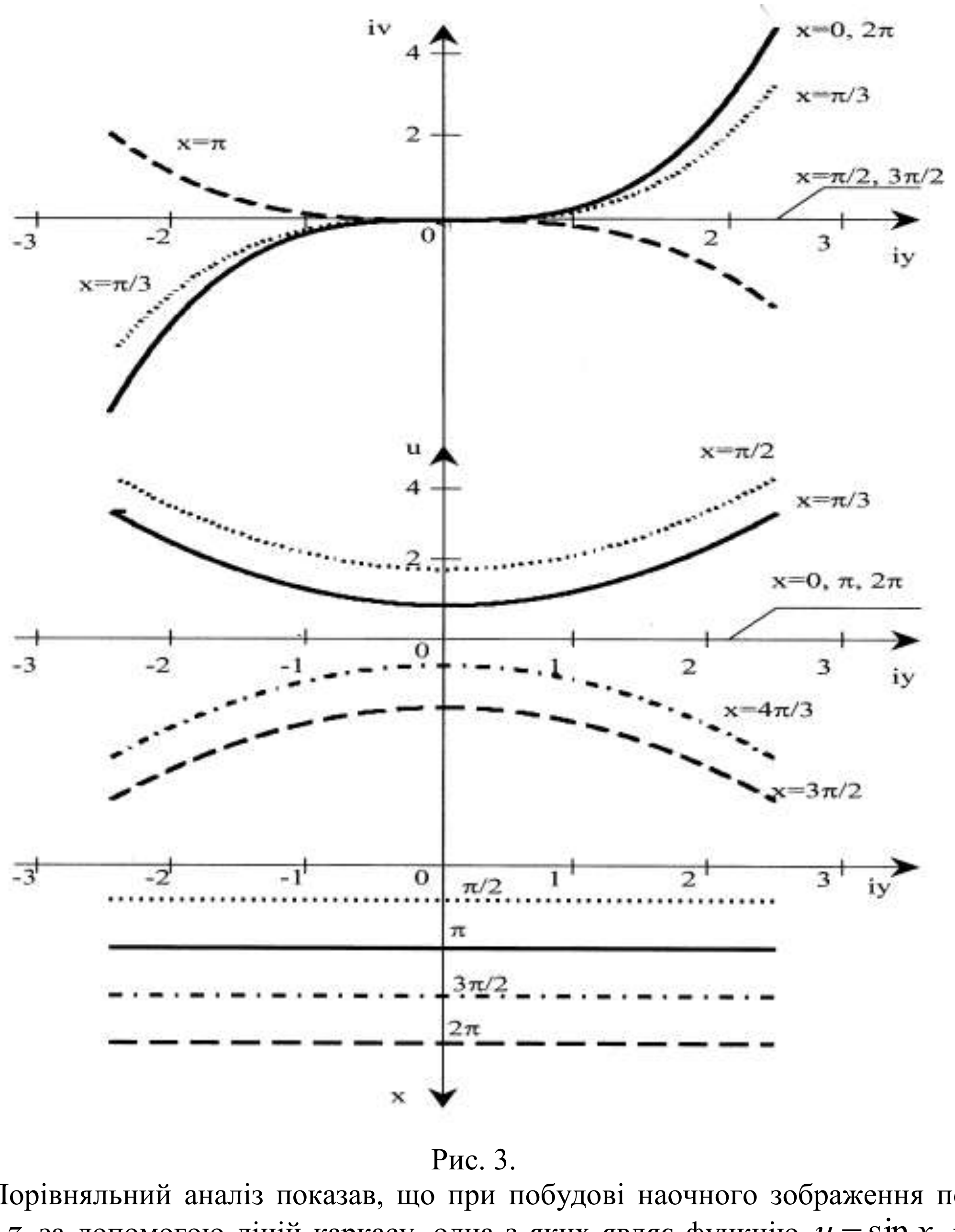

Рис. 3.

Порівняльний аналіз показав, що при побудові наочного зображення поверхні $\omega = \sin z$ за допомогою ліній каркасу, одна з яких являє функцію $u = \sin x$ дійсних змінних, зручно враховувати координатні кути простору [8]. Тоді лінії каркасу можна одержати за допомогою двох з чотирьох координатних гіперплощин рівня: взаємно ортогональних гіперплощин рівня зі слідами $y = 0, -1.5, -2, -2.5$ та $x = 0 \ldots 2\pi$ (рис.4).

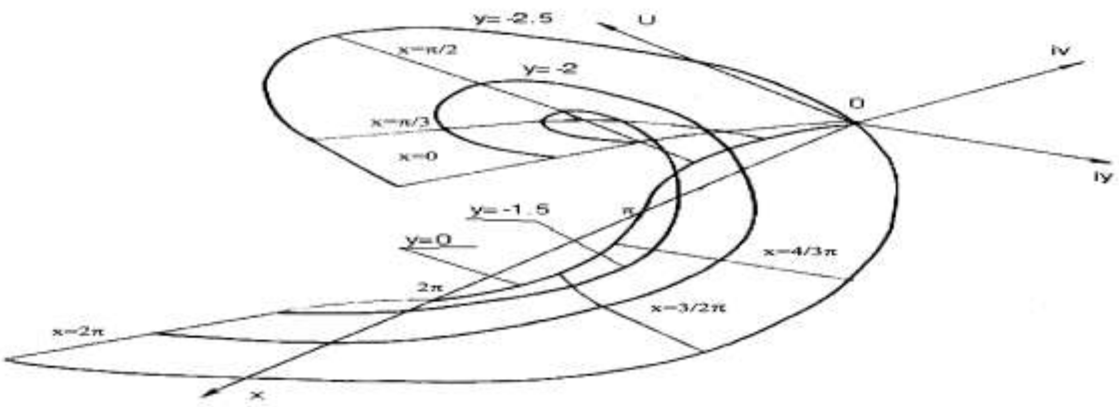

Рис.4.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977. – С.92-97.
2. Чередниченко Л.С., Гумен Н.С., Гумен В.С. Геометрическое моделирование некоторых многопараметрических систем химической технологии. – К. : Вища школа, 1977. – 108 с.
3. Гумен М.С., Мартин Є.В. Геометрична інтерпретація моделі комплексного простору. // Збірник праць Міжнародної науково-практичної конференції “Сучасні проблеми геометричного моделювання”. – Харків: ХІПБ МВС України, 1998. – Ч.1. – С. 139-143.
4. Мартин Є.В. Комплексне креслення для відображення функції комплексної змінної . // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Мелітополь: ТДАТА, 1998. - Вип. 4 . – Т.3. – С. 89-92.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лем Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. - М.:Наука, 1977. – 342 с.
6. Филиппов П.В. Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. – Л.: ЛГУ, 1979. – 280 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1. – М.: Наука, 1985. – С. 98-101.
8. Давиденко В.А. Об одном способе обозначения координатных углов многомерного пространства. // Прикладная геометрия и инженерная графика. К.: КГТУСА, 1991. Вып. 51. – с. 29-30.

МАРТИН Євген Володимирович – д.т.н., професор кафедри нарисної геометрії та графіки Національного університету “Львівська політехніка”.

Наукові інтереси:

- розроблення геометричних засобів відображення простору з вимірами змінних складових комплексних параметрів в якості основи формування областей раціональних параметрів систем.

РЕНКАС Андрій Гнатович – начальник кафедри пожежної автоматики та зв’язку Львівського інституту пожежної безпеки МВС України.

Наукові інтереси:

- підвищення ефективності діяльності Державної пожежної охорони засобами прикладної геометрії.