УДК 514.18

ПРО ВІДОБРАЖЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТОРУ ЩОДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

О. Гумен, д.т.н.,
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
С. Лясковська, к.т.н.,
Національний університет «Львівська політехніка»
Є. Мартин, д.т.н.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Тел. (0322)2212072

***Анотація* – розглядаються питання обґрунтування вибору та розбудови геометричної моделі конечновимірного лінійного комплексного простору, побудованого з використанням двовимірних чисел, стосовно розв'язування задач механіки із залученням комплексних параметрів.**

***Ключові слова*: лінійний простір, конечновимірний простір, безконечновимірний простір, комплексний простір, вектор, геометричне моделювання, механічна система, комплексні параметри.**

Постановка проблеми. Функції комплексних змінних використовують в якості ефективного математичного засобу розв'язування багатьох технічних задач із залученням поданих комплексними числами параметрів, зокрема, в галузі електронного машинобудування. У практиці побудови моделей об'єктів, процесів та явищ з використанням функцій комплексних змінних важливо мати прості й наочні інтерпретації результатів їх розрахунків та досліджень. Завдяки використанню способу подання параметрів технічних систем комплексними числами $z=x+iy$, де x, y – дійсні числа, $i^2 = -1$ – уявна одиниця, вдається в багатьох випадках спростити постановку і процес розв'язування задач динаміки багатопараметричних механічних систем конструюванням і аналізом геометричних моделей обхоплюючих комплексних просторів різних розмірностей. Поверхні Рімана слугують вагомим геометричним інструментарієм подання багатозначних функцій із комплексними параметрами у дослідженнях технічних систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Як один із засобів математичного і геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ комплексні числа використовуються в якості параметрів відображення прообразів $z = x+iy$ комплексної площини аргументів y комплексну площину образів функції комплексної змінної $\omega = u + iv = \omega\ (z) = u(x, y)+iv(x, y)$. Для зображення гіперповерхонь як графіків функціональної залежності двох комплексних параметрів ω і z використовують поняття рельєфа комплекснозначної функції [1], наприклад,

$$u = /\sin z\,/.$$

Зображення графіка функціональної залежності у вигляді рельєфа подається у тривимірному просторі. Подальший розвиток графічних засобів подання гіперповерхонь комплексного простору одержав у працях [2, 3], зокрема, стосовно розв'язування інтегралів та номограмування графіка функції комплексної змінної.

Базовим у поданні комплекснозначних функцій прийняте зображення комплексного числа у двовимірній площині.

Розвиток цієї моделі комплексного числа одержав у побудові моделі лінійного комплексного простору як узагальнення комплексної площини [4] з подальшою розбудовою конструкції геометричної моделі цього простору [5]. Це відповідає правилам формування моделей багатовимірних просторів [6].

В [7] приведений аналіз взаємозв'язку конечновимірних лінійних дійсних і комплексних просторів, використовуючи поняття ізоморфізму лінійних просторів, з поданням визначень конечновимірних і безконечновимірних просторів.

Мета статті полягає в аналізі та виборі геометричних засобів подання моделей комплексних просторів як лінійних конечновимірних просторів з розширеними комплексними площинами прообразів та образів одно - і багатозначних функціональних залежностей комплексних змінних параметрів стосовно аналізу багатопараметричних механічних об'єктів, процесів та явищ.

Основна частина. Один з способів формування моделі лінійного n - вимірного евклідового простору в багатовимірній прикладній геометрії полягає у “замітанні” відрізка прямої [6]. Одновимірний простір утворює множина точок чи векторів прямої, для яких справедлива аксіома лінійного простору, зокрема, множення для двох дійсних векторів **A, B** на дійсний коефіцієнт α (рис.1):

$$\mathbf{B}=\alpha\mathbf{A}. \tag{1}$$

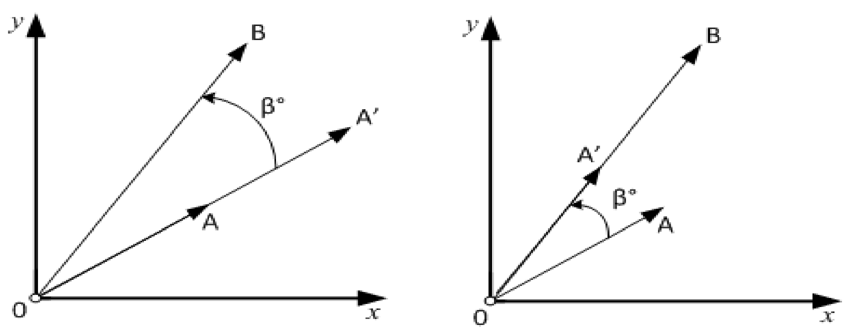
Рис.1. Операція множення в одновимірному дійсному просторі.

Одною з переваг комплексного простору є можливість використовувати комплексне значення коефіцієнта $\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2$ для перетворення його геометричних образів. Формування геометричної моделі власне комплексного простору в лінійній алгебрі виконується з урахуванням комплексного значення коефіцієнта α.

Зазначимо, що множення (1) при комплексному α відбувається у двовимірній площині дійсних змінних. Вихідним являє положення вектора **A** одновимірного евклідового простору. Для множення вектора **A** на комплексне значення α, результатом якого є вектор **B**

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}=(\alpha_1 + i\,\alpha_2)\mathbf{A} = \rho(\cos\beta + i\sin\beta)\mathbf{A}, \tag{2}$$

використовують площину дійсних змінних (рис.2), тобто накладається умова виконання процесу повороту вектора у площині навколо перпендикулярної до неї в точці **O** осі.



а) *б)*

Рис. 2. Операція множення на комплексне число у двовимірному дійсному просторі.

Таку операцію можна виконати множенням і обертанням (рис. 2, *а*), або обертанням і множенням (рис. 2, *б*). З аналізу рис. 2 маємо, що операція множення векторів на комплексне значення α виконується у дійсному двовимірному просторі. Зауважимо, що таку операцію можна здійснити також і в одновимірному просторі при дійсному значенні коефіцієнта (див. рис.1). В обох випадках операція множення на комплексне число відбувається у дійсному просторі, тобто за умови відсутності ізоморфізму лінійних просторів [7]. Отже, в площині *Oxy* використана операція із залученням комплексного числа, через те усі числа і вектори є комплексними.

Подальшим узагальненням двовимірної площини комплексних величин слугує лінійний комплексний простір розмірності *n*, який взаємно однозначно відображують у дійсний лінійний простір розмірності *2n* [7]. Тобто для графіка функції комплексної змінної (два змінних комплексних параметри z і ω)

$$\omega = u + iv = \omega\,(z)= \omega\,(x + iy)=u(x, y)+iv(x, y) \qquad (3)$$

фазовим простором відображення слугує одразу чотиривимірний лінійний дійсний простір (рис. *3а*), а для функції $(n\ -\ 1)$ – комплексних змінних z_j

$$\omega = u + iv = \omega\,(z_1, z, z_j,\dots, z_{n-1}) =$$
$$\omega\,(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2,\dots,x_{n-1}+iy_{n-1})=u(x_j ,y_j)+iv((x_j ,y_j) \qquad (4)$$

таким простором слугує *2n* - вимірний лінійний дійсний евклідовий простір (рис. 3, *б*).

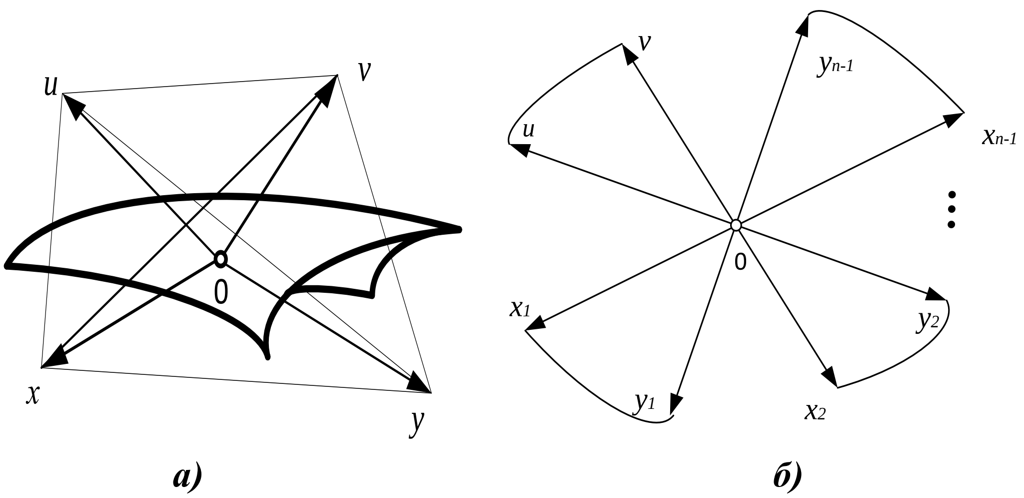


Рис.3. Моделі дійсних конечновимірних просторів відображення комплексних змінних.

Проаналізуємо двовимірний комплексний простір, моделлю якого слугує одразу чотиривимірний дійсний простір на рис.3,а. Такий простір з чотирма осями – одновимірними дійсними підпросторами містить множину комплексних, дійсних і уявних чисел. Моделлю функціональної залежності двох комплексних змінних (3) слугує гіперповерхня або двовимірна поверхня, яку визначає множина значень комплексних змінних *z* і *ω* з відповідними парами дійсних чисел осей *x, y* та *u, v*.

Зазначимо, що в чотиривимірному дійсному просторі двовимірна поверхня слугує багатовидом. Геометрично чотиривимірний евклідовий простір як модель двовимірного комплексного простору містить чотири лінійних тривимірних комплексних підпростори, шість лінійних двовимірних підпросторів - двовимірних площин, з яких одна площина *Oxu* дійсних змінних, одна площина *Oyu* уявних змінних і чотири площини *Oxy, Oyu, Oxv* та *Ouv* комплексних змінних. В [5] запропонована модель двовимірного комплесного простору з вимірами дійсних та уявних чисел, реалізована у чотиривимірному евклідовому просторі (рис. 4, а) і узагальнена на *n* - вимірний комплексний простір (рис. 4, б).

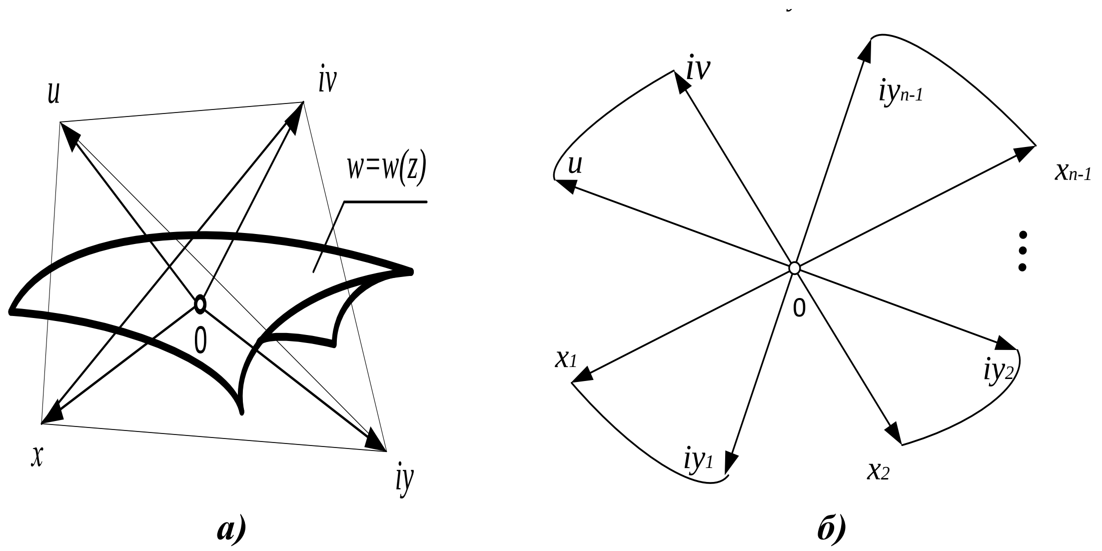


Рис. 4. Геометричні моделі конечновимірних комплексних просторів.

Така модель одержана одразу узагальненням розширеної двовимірної комплексної площини.

Вище приведені простори утворені за умови фіксованого числа *n* змінних параметрів і належать до класу конечновимірних просторів.

У протилежному випадку маємо клас безконечновимірних просторів як лінійних дійсних, так і комплексних просторів. Зокрема, раціональна функція

$$P_n(z) = a_0 z + a_1 z^{n-1} + \ldots \qquad (5)$$

при фіксованому значенні n, наприклад, $n=1$, відображується графіком лінійної функції у двовимірному комплексному просторі

$$P_n(z) = a_0 z + a_1 \,. \qquad (6)$$

У протилежному випадку графік (5) подається гіперповерхнею безконечновимірного лінійного простору.

Висновок. Проведений аналіз підтвердив ефективність використання у розв'язуванні багатьох задач механіки способу формування лінійного комплексного простору доцільного конечного числа n комплексних, дійсних та уявних змінних параметрів узагальненням комплексної площини. Показано, що геометричною моделлю n – вимірного комплексного простору являє одразу $2n$ – вимірний евклідовий простір. Вказані деякі особливості застосування при розв'язуванні багатьох механічних задач класів конечновимірних і безконечновимірних лінійних як комплексних, так і дійсних просторів. Перспективними являють застосування просторів у візуалізації фазових траєкторій в задачах дослідження динаміки багатопараметричних механічних систем.

Література

1. *Маркушевич О. М.* Курс теории аналитических функций / *О. М. Маркушевич, М. С. Маркушевич* . – М.: Наука, 1978. - С.45-48.
2. *Филиппов П. В.* Начертательная геометрия многомерного пространства и её приложения / *П. В. Филиппов*. – Л.: ЛГУ, 1979. - 280 с.
3. *Найдыш В. М.* Номографирование построений и реконструкции аксонометрических чертежей многомерных объектов / *В. М. Найдыш* // Прикладная геометрия и математика. – Мелитополь: МИМСХ, 1967. - Т. 5. Вып.1. – С. 67-75.
4. *Гумен М. С.* Комплексний багатовимірний простір як узагальнення комплексної площини / *М. С. Гумен, Є. В. Мартин*// Сучасні проблеми геометричного моделювання.Ч.1. – Мелітополь: ТДАТУ, 1997.-С.54 - 56.

5. *Гумен М. С.* Геометрична інтерпретація моделі комплексного простору / *М. С. Гумен, Є. В. Мартин* // Сучасні проблеми геометричного моделювання.Ч.1. – Харків: ХІПБ, 1998.-С.139 - 143.
6. *Годлевский Д. З.* Популярное введение в многомерную геометрию // *Д. З. Годлевский, А. С. Лейбин.*- Х.: ХГУ, 1964.- С.39.
7. *Ефимов Н. В.* Линейная алгебра и многомерная геометрия // *Н.В.Ефимов, Э. Р. Розендорн.* – М.: Наука, 1970. - С.12-47.

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РЕШЕНИЯМ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Е. Гумен, С. Лясковская, Е. Мартын

Аннотация

Рассматриваются вопросы обоснования выбора и конструирования геометрической модели конечномерного линейного комплексного пространства, построенного с использованием двумерных чисел, относительно решения задач механики с привлечением комплексных параметров.

ABOUT REFLECTION OF COMPLEX SPACE AS IT APPLIES TO DECISIONS OF TASKS OF MECHANICS

E.Gumen, S.Lyaskovska, E.Martyn

Summary

The questions of ground of choice and constructing of geometrical model of finite-dimensional linear complex space, built with the use of 2 - measure numbers are examined, in relation to the decision of tasks of mechanics with bringing in of complex parameters.