

**ISSN 2078-4481**

Міністерство освіти і науки України  
Херсонський національний технічний університет

***ВІСНИК***

**Херсонського національного  
технічного університету**



Рекомендовано до друку Вченою радою  
Херсонського національного технічного університету  
(протокол № 7 від 30 червня 2016 року)

---

Журнал включено до Переліку наукових фахових видань України  
(Наказ МОН України № 820 від 11.07.2016 р.),  
у яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів  
доктора та кандидата технічних наук

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:  
Національна бібліотека імені В.І. Вернадського, Google Scholar, РИНЦ (російський індекс  
научного цитування)

**Херсон 2016**

## Редакційна рада

### Головний редактор

Бардачов Ю.М.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України,  
ректор Херсонського національного технічного університету

### Заступники головного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., професор

Савіна Г.Г.

д.е.н., професор

### Відповідальний секретар

Корнева А.О.

начальник відділу інформаційного забезпечення

## Редакційна колегія

Букетов А.В.

д.т.н., професор

Валько М.І.

д.т.н., професор

Гандель Ю.В.

д.ф.-м.н., професор

Гнатушенко В.В.

д.т.н., професор

Дімітрова В.Я. (Болгарія)

д.н., доцент

Коваленко М.А.

д.е.н., професор

Коган О.Г. (Білорусь)

д.т.н., професор

Костогриз О.П.

д.т.н., професор

Крічмар С.Й.

д.х.н., професор

Кузьміна Т.О.

д.т.н., професор

Литвиненко В. І.

д.т.н., професор

Мельник І. В.

д.т.н., професор

Миколайчук Н.С.

д.е.н., професор

Міщенко Г.В.

д.т.н., професор

Новіков О.О.

д.х.н., професор

Партицький С. (Польща)

д.с.н., професор

Повстяной М.В.

д.х.н., професор

Сарапіна О.А.

д.е.н., професор

Сарібєкова Д.Г.

д.т.н., професор

Сарібєкова Ю.Г.

д.т.н., професор

Семенченко Ф.Г.

д.політ.н., професор

Сошко О.І.

д.т.н., професор

Сусоров В.Д.

д.і.н., професор

Тіхосова Г.А.

д.т.н., професор

Тулученко Г.Я.

д.т.н., професор

Фомішина В.М.

д.е.н., професор

Ходаков В.Є.

д.т.н., професор

Хомченко А. Н.

д.ф.-м.н., професор

Чепелюк О.В.

д.т.н., професор

Чурсіна Л.А.

д.т.н., професор

Шарко М.В.

д.е.н., професор

**ISSN 2078-4481**

Министерство образования и науки Украины  
Херсонский национальный технический университет

# ***ВЕСТНИК***

**Херсонского национального  
технического университета**



Рекомендовано к печати Ученым советом  
Херсонского национального технического университета  
(Протокол № 7 от 30 июня 2016 года)

---

Журнал включен в Перечень научных профессиональных изданий Украины  
(Приказ МОН Украины № 820 от 11.07.2016 г.),  
в которых могут публиковаться результаты диссертационных работ на соискание ученых  
степеней доктора и кандидата технических наук

Журнал включен в наукометрические базы, электронные библиотеки и репозитории:  
Национальная библиотека имени В.И. Вернадского, Google Scholar, РИНЦ (российский индекс  
научного цитирования)

**Херсон 2016**

## Редакционный совет

### Главный редактор

Бардачев Ю.Н.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины,  
ректор Херсонского национального технического университета

### Заместители главного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., профессор

Савина Г.Г.

д.э.н., профессор

### Ответственный секретарь

Корнева А.А.

начальник отдела информационного обеспечения

## Редакционная коллегия

Букетов А.В.

д.т.н., профессор

Валько Н.И.

д.т.н., профессор

Гандель Ю.В.

д.ф.-м.н., профессор

Гнатушенко В.В.

д.т.н., профессор

Димитрова В.Я. (Болгария)

д.н., доцент

Коваленко Н.А.

д.э.н., профессор

Коган А.Г. (Беларусь)

д.т.н., профессор

Костогрыз А.П.

д.т.н., профессор

Кричмар С.И.

д.х.н., профессор

Кузьмина Т.О.

д.т.н., профессор

Литвиненко В.И.

д.т.н., профессор

Мельник И.В.

д.т.н., профессор

Миколайчук Н.С.

д.э.н., профессор

Мищенко А.В.

д.т.н., профессор

Новиков А.А.

д.х.н., профессор

Партицкий С. (Польша)

д.с.н., профессор

Повстяной М.В.

д.х.н., профессор

Сарапина О.А.

д.э.н., профессор

Сарибекова Д.Г.

д.т.н., профессор

Сарибекова Ю.Г.

д.т.н., профессор

Семенченко Ф.Г.

д.полит.н., профессор

Сошко А.И.

д.т.н., профессор

Сусоров В.Д.

д.и.н., профессор

Тихосова А.А.

д.т.н., профессор

Тулученко Г.Я.

д.т.н., профессор

Фомишина В.Н.

д.э.н., профессор

Ходаков В.Е.

д.т.н., профессор

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор

Чепелюк Е.В.

д.т.н., профессор

Чурсина Л.А.

д.т.н., профессор

Шарко М.В.

д.э.н., профессор

**ISSN 2078-4481**

Ministry of Education and Science of Ukraine  
Kherson National Technical University

**VISNYK**  
**of Kherson National**  
**Technical University**



Recommended for publication by the Academic Council of Kherson National  
Technical University  
(minutes No. 7 dated June 30, 2016)

---

The journal is included to the List of Scientific Specialized Publications  
(According to the Ministry of Education and Science of Ukraine Decree № 820 dated July 11, 2016)  
where the results of the Doctor and Candidate theses in Engineering Science can be published

The journal is included to the scientometric databases, e-libraries, repositories: Vernadsky National  
Library of Ukraine, Google Scholar and Russian Science Citation Index (RSCI)

**Kherson 2016**

## Editorial Board

### Editor-in-Chief

Bardachov Yu.N. Professor, Doctor of Engineering Science, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, Rector of Kherson National Technical University

### Deputy Editors-in-Chief

Rozov Yu.G.

Doctor of Engineering Science, Professor

Savina G.G.

Doctor of Economics, Professor

### Executive Secretary

Korneva A.A.

Head of Information Security Office

## Members of Editorial Board

**Buketov A.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Val'ko N.I.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Gandel' Yu.V.**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Hnatushenko V.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Dimitrova V. Ya.** (Bulgaria)

PhD, Associate Professor

**Kovalenko N.A.**

Doctor of Economics, Professor

**Kogan A.G.** (Belarus)

Doctor of Engineering Science, Professor

**Kostogryz A.P.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Krichmar S.I.**

Doctor of Chemistry, Professor

**Kuz'mina T.O.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Lytvynenko V.I.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Melnyk I.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Mikolaychuk N.S.**

Doctor of Economics, Professor

**Mishchenko A.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Novikov A.A.**

Doctor of Chemistry, Professor

**Партицький С.** (Poland)

Doctor of Social Sciences, Professor

**Povstyanoy M.V.**

Doctor of Chemistry, Professor

**Sarapina O.A.**

Doctor of Economics, Professor

**Saribekova D.G.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Saribekova Yu.G.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Semenchenko F.G.**

Doctor of Political Science, Professor

**Soshko A.I.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Susorov V.D.**

Doctor of Historical Sciences, Professor

**Tikhosova A.A.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Tuluchenko G.Ya.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Fomishina V.M.**

Doctor of Economics

**Khodakov V.Ye.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Khomchenko A.N.**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Chepelyuk Ye.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Chursina L.A.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Sharko M.V.**

Doctor of Economics

## ЗМІСТ

## ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

<b>Богачев В.Е., Беяева И.Н., Чеканов Н.А., Башкатов Б.М., Чеканова Н.Н., Кузнецова И.С.</b> Функция Грина и задача на собственные значения.....	15
<b>Вахненко В.О., Паркес Е.Дж.</b> Метод оберненої задачі розсіювання для еволюційного рівняння зі спектральним рівнянням третього порядку.....	20
<b>Войтик Т.Г., Полетаев Г.С., Яценко С.А.</b> Проекторный подход в задаче родственного Римана-Гильберта-Привалова типа для кольца рациональных функций.....	25
<b>Дубинко В.И., Мазманишвили А.С., Лаптев Д.В.</b> Квантовая динамика волновых функций в двумерном нестационарном параболическом потенциале.....	30
<b>Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І.</b> Розв'язання задачі дифузії тепла скінченним гібридним інтегральним перетворенням типу Лежандра-Бесселя-Фур'є на сегменті.....	35
<b>Пащенко В.О.</b> Гранично-элементне моделювання асимптотики електричної напруженості прямокутного контуру над неушкодженою поверхнею ортотропного композита.....	40
<b>Полетаев Г.С.</b> Необходимое и достаточное условие связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки – I.....	47
<b>Полетаев Г.С.</b> Необходимое и достаточное условие связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки – II.....	53
<b>Самойленко Є.Є.</b> Невизначені системи лінійних рівнянь.....	58

## ІНЖЕНЕРНІ НАУКИ

<b>Александрова Т.Е., Лазаренко А.А.</b> Математическое моделирование инерционных возмущений, действующих на танковую пушку в неравномерном криволинейном движении танка .....	62
<b>Гуменюк Ю.О., Човнюк Ю.В.</b> Використання моделі суттєво-нелінійної механічної системи у аналізі вільних коливань робочих органів на пружній підвісці при їх взаємодії з оброблюваним ґрунтом.....	66
<b>Дзензерский В.А., Радченко Н.А., Хачапуридзе Н.М., Звонарева О.В.</b> Колебания и устойчивость левитационного движения экипажа электродинамической транспортной системы нетрадиционной конструкции .....	73
<b>Долгов Н.А., Смирнов И.В., Заичко К.В., Бесов А.В., Вихирева-Цинаридзе Е.В., Андрейцев А.Ю.</b> Выбор материала для напыления износостойких покрытий .....	78
<b>Єдинович М.Б., Бобирь С.В., Кузьміна Т.О.</b> Моделювання процесу росяного мочіння соломи льону олійного .....	85
<b>Завадский А.А., Шуть В.Н.</b> Управление дорожным движением на перекрестках при помощи мультиагентных систем .....	90
<b>Защепкіна Н.М., Терентьєва Н.Р.</b> Розробка та контроль якості матеріалів для захисту людини від дії пилу .....	99
<b>Кагадий Т.С. Белова О.В., Щербина И.В.</b> Аналитический подход к решению некоторых контактных задач .....	104
<b>Ковч О.И.</b> Исследование растрескивания поверхностей при термосиловом нагружении .....	109
<b>Кравчук В.Т., Човнюк Ю.В.</b> Дискретно-континуальное моделирование при исследовании процесса взаимодействия вибрационной системы с обрабатываемой бетонной смесью: объёмное формование .....	114
<b>Лебеденко Ю.О., Омельчук А.А., Крайнов В.Є.</b> Протидія впливу високочастотного випромінювання на прилади обліку електричної енергії .....	118
<b>Любимова Н.А.</b> Последовательный контроль процесса дефеноляции сбросов коксохимического производства .....	123
<b>Мусій Р.С., Мельник Н.Б., Дрогомирецька Х.Т.</b> Термонапружений стан електропровідного циліндра з тонким електропровідним покриттям за нестационарної електромагнітної дії .....	129
<b>Погорелый Д.Ф., Малинский С.М., Усенко В.Г.</b> Колебание сферической оболочки с подкрепленным центральным отверстием .....	134
<b>Зевин А.А., Пославский С.Ю.</b> Анализ устойчивости процесса фрезерования.....	137
<b>Сивак И.Н., Човнюк Ю.В., Кравчук В.Т.</b> Исследование процесса взаимодействия рабочего органа вибромашины для поверхностного/объёмного уплотнения бетонной смеси с обрабатываемой средой.....	142
<b>Соколова Н.О.</b> Верификация сегментов зданий путем анализа геометрии .....	149
<b>Сохацький А.В., Іванисенко І.С., Романенко Є.М.</b> До питання оптимізації компоновальної схеми екраноплану .....	154

<b>Усов А.В., Кутяков Е.Ю.</b> Расчет вероятностных параметров функционирования зоны текущего ремонта автотранспортного предприятия с учетом информации об эксплуатационной надежности подвижного состава .....	159
<b>Човнюк Ю.В., Шутовский О.М.</b> Анализ динамического поведения упругих элементов машин и конструкций: эффекты волнообразования, вызванные движением источников.....	164

## ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

<b>Ахметшина Л.Г., Егоров А.А.</b> Адаптивная нечеткая сегментация изображений на основе комбинированного сингулярного разложения .....	171
<b>Баклан І.В., Хуссейн С.І., Очеретяний О.К.</b> Інтелектуальний аналіз даних від сучасних комп'ютерних маніпуляторів з використанням лінгвістичного моделювання .....	176
<b>Боков И.П., Стрельникова Е.А.</b> Коэффициенты интенсивности напряжений трещин для трансверсально-изотропной пластины при изгибе .....	181
<b>Вороненко М.О., Вороненко О.Б., Абрамов Г.С.</b> Моніторинг санітарно-епідемічної обстановки в регіоні .....	187
<b>Гвоздева И.М., Демиров В.В.</b> Трендовый контроль в современных системах диагностики судовых энергетических установок .....	191
<b>Гнатушенко В.В., Кавац О.О., Гальченко Е.Б., Кавац Ю.В.</b> Інформаційна технологія розпізнавання будівель на багатоканальних фотোগрамметричних зображеннях високої просторової здатності на основі морфологічних індексів .....	195
<b>Гнатушенко Вікт.В., Палтко О.О.</b> Дослідження впливу параметрів бездротової сенсорної мережі на час існування .....	199
<b>Гуда А.И., Михалёв А.И.</b> Синтез критерия для идентификации хаотической системы “Sprott A” с использованием мультимодельного адаптивно-поискового метода .....	204
<b>Денисюк О.Р.</b> Определение рациональных параметров численного решения систем дифференциальных уравнений некоторых классов .....	208
<b>Дмитрієва І.С., Карась Н.М.</b> Комбінаторний та генетичний алгоритми пошуку розкладу обслуговування багатоприборної системи .....	213
<b>Добровольский Г.А., Тодорико О.А.</b> Использование энтропии Шеннона для детекции голосовой активности в зашумлённых звукозаписях .....	218
<b>Кириченко Л.О., Иванисенко И.Н., Радивилова Т.А.</b> Анализ дисбаланса распределенной системы при самоподобной нагрузке .....	224
<b>Кобицкая Ю.А.</b> Распознавание фрактальных временных рядов с помощью пакетного вейвлет-преобразования .....	232
<b>Кондратець В.О., Мацуї А.М.</b> Моделювання формування піскового тіла механічного класифікатора в умовах спрацювання робочих елементів спіралі .....	238
<b>Лазурик В.М., Шаптала Ю.А., Салах Саван.</b> Программная реализация определения энергии электронов по экспериментальным данным, полученным методом дозиметрического клина .....	245
<b>Литвиненко В.І., Фефелов А.О., Бідюк П.І., Кожухівська О.В.</b> Гібридизація фільтра Калмана і алгоритму клонального відбору для прогнозування гетероскедастичних процесів.....	249
<b>Островська К.Ю., Островський Є.В.</b> Розробка модулю розширення функції користувача для Microsoft Excel засобами C# та Excel-DNA .....	258
<b>Реуга О.В.</b> Алгоритм візуалізації форми просторового об'єкта, поданого його матричною моделлю .....	263
<b>Романюк О.Н., Дудник О.О.</b> Підвищення реалістичності зафарбовування тривимірних графічних об'єктів .....	269
<b>Сафонова Г.Ф., Сафонов М.С., Рослякова С.В., Носов П.С.</b> Байесовська модель в експертній системі визначення типу крою фасону одягу за його зображенням .....	273
<b>Скорик С.Н.</b> Формальная модель ситуации угрозы безопасности облачных систем .....	277
<b>Сущевський Д.В.</b> Пошук оптимальних параметрів градієнтних фільтрів для виявлення контурів об'єктів на цифрових супутникових зображеннях високого просторового розрізнення .....	282
<b>Тимофієва Н.К.</b> Моделювання прикладних задач обчислювального інтелекту з використанням теорії комбінаторної оптимізації .....	287
<b>Трохимчук П.П.</b> Проблеми складності у сучасній кібернетиці та інформатиці та шляхи їх розв'язання .....	292

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

<b>Абрамов Г.С., Абрамов М.Г., Бардачѳ Ю.Н.</b> Коалесценция частиц окислов на асимптотической стадии процесса внутреннего окисления .....	297
--	-----



<b>Бабічев С.А.</b> Модель системи фільтрації профілів експресії генів нуклеотидів ДНК .....	304
<b>Белінський І.В., Лемешко В.А.</b> Фізичне моделювання процесу поширення збурень в двовимірному гранульованому середовищі в залежності від різних упаковок його структурних елементів .....	309
<b>Бердник М.Г.</b> Математичне моделювання температурних полів в порожнистому циліндрі, який обертається .....	314
<b>Блажевський С.Г.</b> Задача дифузії в тришаровому неоднорідному необмеженому середовищі з м'якими межами .....	319
<b>Бразалук Ю.В., Евдокимов Д.В., Шульга Р.А.</b> Сравнение эффективности методов конечных разностей и граничных элементов при решении эллиптических краевых задач в кольцевых областях .....	325
<b>Воцелка С.А., Рожков С.А.</b> Метод восстановления неизмеряемых координат ирригационного канала .....	331
<b>Гоман О.Г., Катан В.А.</b> Математическое моделирование ударного взаимодействия тела и жидкости со свободной поверхностью с использованием интегралов в смысле конечной части по Адамару .....	337
<b>Горovenko А.П.</b> Дифракція хвилі тиску на пружному включенні в рідині .....	342
<b>Карасв А.О., Стрельникова О.О.</b> Моделювання стадії гідродинамічного розширення центрального зіткнення важких йонів .....	347
<b>Кньш Л.И., Гоман О.Г.</b> Особенности моделирования энергомассопереноса в системе приёма тепла солнечной параболоцилиндрической станции .....	352
<b>Лазурик В.Т., Попов Г.Ф., Саван Салах, Зідек З.</b> Апробація методів диференціювання глибинного розподілу дози випромінювання, вимірюного методом дозиметричного клину .....	357
<b>Ляшенко В.П., Кобильская Е.Б., Демьянченко О.П.</b> Моделирование процесса распространения тепла в сферической области под действием импульсных источников .....	361
<b>Макаренков Е.А., Сясев А.В., Клим В.Ю.</b> Решение задачи теплопроводности для полого цилиндра .....	366
<b>Мачулянський О.В., Бабич Б.Б., Мачулянський В.О., Тарасовська Н.П.</b> Моделювання наноструктурних металодіелектричних систем для використання в якості оптичних фільтрів .....	371
<b>Меньшиков Ю.Л.</b> Синтез адекватной математической модели процесса выплавки стали .....	376
<b>Миргород В.Ф., Гвоздева И.М., Деренг Е.В.</b> Аналитическое решение систем интегральных уравнений Вольтерры с сепарабельными ядрами .....	380
<b>Петрик М.Р., Михалик Д.М., Петрик О.Ю., Шинкарик М.І.</b> Математичне моделювання двокомпонентної десорбції в нанопористому середовищі .....	384
<b>Поливода В.В., Литвинчук Д.Г., Гавриленко В.О.</b> Моделювання процесу вимірювання вологості в зерновій масі .....	388
<b>Поляков В.А., Хачапуридзе Н.М.</b> Модель тяги линейного синхронного двигателя .....	393
<b>Редчиц Д.А., Моисеенко С.В.</b> Численное моделирование обтекания турбулентным потоком транспортного средства вблизи экрана .....	398
<b>Рудакова А.В., Поливода О.В., Омельчук А.А.</b> Процедура идентификации параметров модели процесса перемещения крупногабаритного объекта .....	403
<b>Сметанкіна Н.В., Угрімов С.В., Шупіков О.М.</b> Математичне моделювання процесу нестационарного деформування багатопарового оскління при розподілених та локалізованих силових навантаженнях .....	408
<b>Тарасов С.В., Тарасов А.С.</b> Моделирование динамики консольных фрагментов упругих лопастей Н-роторов Дарье в потоке воздуха .....	414
<b>Топчий Д.О., Хомченко А.Н.</b> Компьютерное тестирование нестационарного температурного поля квадратной пластины с двенадцатью термоэлементами. Обзор результатов .....	421
<b>Тулученко Г.Я., Старун Н.В., Селюнова Т.А.</b> Про еквівалентність двох задач МСЕ .....	427
<b>Удовенко В.В., Стрельникова Е.А.</b> Сравнение экспериментальных аэродинамических характеристик профилей с результатами численного моделирования для режимов трансзвукового обтекания .....	433
<b>Фильштинський Л.А., Носов Д.Н., Еременко А.А.</b> Краевая задача механики разрушения новых магнитоэластоупругих материалов, ослабленных трещинами .....	438
<b>Хомченко А.Н., Астионенко И.А.</b> Гауссова кривизна серендиповых поверхностей или как прогнуть коноид .....	444
<b>Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И.</b> Нематричные схемы конденсации на серендиповых элементах ...	448
<b>Шермет Г.П., Венгрович Д.Б., Губар І.Н.</b> Моделювання еволюції поля напружень в неоднорідному геофізичному середовищі .....	452
<b>Шувалова Ю.С., Крютченко Д.В., Стрельникова Е.А.</b> Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах .....	455

## ЕКОНОМІЧНІ НАУКИ

<b>Абрамова Г.В., Абрамов Г.С.</b> Системний аналіз сільськогосподарського виробництва і його прибутковості.....	460
<b>Крижановська Т.В., Клецька Т.С., Андрейцев А.Ю.</b> Моделювання показників ринку праці за допомогою нейросітових методів .....	465

## ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

<b>Адоньєв С.О., Верещага В.М.</b> Застосування поверхонь відгуку при моделюванні сталого енергетичного розвитку міст.....	471
<b>Аушева Н.М., Педос Б.М.</b> Інтерактивне управління поверхнями засобами мобільних пристроїв.....	477
<b>Брайлов А.Ю., Панченко В.И., Устьянский В.А.</b> Геометрическая модель определения координат точек кровли исторического здания.....	482
<b>Воронцов О.В., Тулупова Л.О., Воронцова І.В.</b> Визначення одновимірних геометричних образів ланцюгом послідовних суперпозицій із врахуванням величини рекурентної залежності.....	487
<b>Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В., Пахаренко В.А.</b> Формирование геометрических характеристик монотонной кривой линии.....	492
<b>Гумен О.М., Лясковська С.Є., Мартин Є.В.</b> Багатовимірна геометрія у прикладних задачах.....	497
<b>Данилин А.Н., Комяк В.В., Комяк В.М., Соболев А.Н., Панкратов А.В.</b> Математическая модель индивидуально-поточного движения людских и транспортных потоков.....	501
<b>Корчинский В.М.</b> Информационно-графическая технология обработки многомерных цифровых данных дистанционного зондирования.....	506
<b>Лебедев В.А., Найдыш А.В., Рубцов Н.А.</b> Особенности вычислительной и программной реализации дискретной интерполяции на основе углов сгущения.....	510
<b>Літвінов А.І., Найдиш А.В., Балуба І.Г.</b> Геометричне моделювання торсових поверхонь із двома параболічними напрямними, в рамках апарату БН-числення.....	514
<b>Муквич М.М.</b> Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди.....	519
<b>Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю., Чепіжний А.В.</b> Динаміка частинки в стичній площині супровідного тригранника плоскої напрямної кривої.....	524
<b>Спиринцев В.В., Шитик Н.А.</b> Анализ современных архитектурных шаблонов, используемых при проектировании приложений в среде IOS .....	529
<b>Спірінцева О.В., Сухоруков П.С.</b> Застосування фрактального аналізу в обробці цифрових зображень.....	534
<b>Стеганцев Е.В.</b> Исследование зависимости между областями параметризованной поверхности и их прообразами на плоскости параметров .....	539
<b>Чопоров С.В., Гоменюк С.И., Лисняк А.А., Аль-Омари М.А.В., Алатамнех Х.Х.М.</b> Триангуляция поверхностей при гибридном параметрическом и неявном представлении.....	542

## ЕЛЕКТРОНІКА І ЕЛЕКТРОТЕХНІКА

<b>Довбня А.Н., Мазманишвили А.С., Решетняк Н.Г.</b> Использование спадающего магнитного поля соленоида для управления продольными и поперечными параметрами электронного пучка .....	550
<b>Мельник И.В.</b> Оценка времени увеличения тока высоковольтного тлеющего разряда в триодных источниках электронов с учетом влияния температуры электронов и их подвижности в анодной плазме .....	556
<b>Мельник И.В., Тугай Б.А., Тугай С.Б.</b> Моделирование зависимости тока электронных пушек высоковольтного тлеющего разряда от геометрических параметров электромагнитного натекателя .....	561

## CONTENS

## FUNDAMENTAL SCIENCES

<b>Bogachev V.E., Belyaeva I.N., Chekanov N.A., Bashkatov B.M., Chekanova N.N., Kuznetsova I.S.</b> Green's function and eigenvalue problem .....	15
<b>Vakhnenko V.O., Parkes E.J.</b> The inverse scattering problem for evolution equation with third order spectral equation .....	20
<b>Voytik T.G., Poletaev G.S., Yatsenko S.A.</b> Projector approach in the type relating to Riemann-Hilbert-Privolov problem for the ring of rational functions .....	25
<b>Dubinko V.I., Mazmanishvili A.S., Laptev D.V.</b> Quantum dynamics of wave functions in a two-dimensional nonstationary parabolic potential .....	30
<b>Lenyuk O.M., Nikitina O.M., Shynkaryk M.I.</b> Solving of the problem of heat diffusion by finite hybrid integral transform of Legendre-Bessel-Fourier type on the segment .....	35
<b>Pashchenko V.O.</b> The boundary-elements modelling of the electrical intensity asymptote of rectangular contour above the intact surface of orthotropic composite .....	40
<b>Poletaev G.S.</b> A necessary and sufficient condition for connection solutions paired integral equations of convolution type – I .....	47
<b>Poletaev G.S.</b> A necessary and sufficient condition for connection solutions paired integral equations of convolution type – II .....	53
<b>Samoilenko Ye.Ye.</b> Undeterminate systems of linear equations .....	58

## ENGINEERING SCIENCES

<b>Aleksandrova T.Ye., Lazarenko A.A.</b> Mathematical modeling of inertial perturbations Acting on tank gun in the irregular curvilinear tank motion.....	62
<b>Gumenyuk Yu.O., Chovnyuk Yu.V.</b> Using the model of the essentially nonlinear mechanical system for analysis of free vibrations of tillage tools in their interaction with cultivated soils .....	66
<b>Dzenzerskiy V.A., Radchenko N.A., Khatchapuridze N.M. Zvonarova O.V.</b> Oscillations and stability of levitating motion of electrodynamic transport system alternative construction .....	73
<b>Dolgov N.A., Smirnov I.V., Zayichko K.V., Vikhrieva-Tsynaridze O.V., Besov A.V., Andreytsev A.Yu.</b> Selection of material for the plasma spraying of wear-resistant coatings .....	78
<b>Yedynovych M.B., Bobyr S.V., Kuzmina T.O.</b> Simulation of dew retting processing oilseed straw .....	85
<b>Zavadski A.A., Shut Traffic V.N.</b> Management at the intersections using multi-agent system .....	90
<b>Zazhchepkina N.N., Terentieva N.R.</b> Development and quality control of materials for protection from the effects of dust .....	99
<b>Kagadiy T.S., Belova O.V., Sherbina I.V.</b> The analytical approach to a solution of some contact tasks .....	104
<b>Kovch O.I.</b> Researching the cracking surfaces at thermopower loading .....	109
<b>Kravchyuk V.T., Chovnyuk Y.V.</b> Discrete and continual modelling at research of interaction process between vibrational system and processable concrete's mixture: volume formation .....	114
<b>Lebedenko Y.O., Omelchuk A.A., Krainov V.E.</b> Opposition to the effect of high-frequency radiation on the accounting devices of electric energy .....	118
<b>Lyubimova N.</b> Sequential control for the distillation of phenol in watter discharges in the coke production .....	123
<b>Musiy R.S., Melnyk N.B., Drohomiretska H.T.</b> Thermostressed state of electroconductive cylinder with a thin electroconductive coating under non-stationary electromagnetic action .....	129
<b>Pogoriliy D.F., Malinskiy S.M., Usenko V.G.</b> Oscillation of spherical shell with reinforced central cutting .....	134
<b>Zevin A.A., Poslavskii S.Yu.</b> Stability analysis of milling .....	137
<b>Sivak I.N., Chovnyuk Y.V., Kravchyuk V.T.</b> The investigation of interaction process of the working organ of vibromachine for the surface/volume compaction of concrete's mixture with a processable medium.....	142
<b>Sokolova N.O.</b> Verification of the segments of the buildings by analyzing the geometry .....	149
<b>Sokhatsky A.V., Ivanysenko I.S., Romanenko Y.M.</b> To the problem of optimization of the configuration scheme on air-craft-in-ground-effect .....	154
<b>Usov A.V., Kutuyakov E.J.</b> The calculation of the probability parameters of the zone operation maintenance of motor transport enterprise, taking into account information on the operational reliability of rolling stock .....	159
<b>Chovnyuk Y.V., Shutovsky O.M.</b> Analysis of dynamic behavior of elastic elements of machines and constructions: effects of waves' formation caused by motion of generators.....	164

## INFORMATION TECHNOLOGIES

<b>Akhmetshina L.G., Yegorov A.A.</b> The image adaptive fuzzy segmentation based on the combined singular values decomposition .....	171
<b>Baklan I.V., Khussein S.I., Ocheretyany O.K.</b> Intellectual data analysis from mode RN computer manipulators using linguistic modelling .....	176
<b>Bokov I.P., Strelnikova E.A.</b> Stress intensity factors for split in transversely isotropic plates at bending .....	181
<b>Voronenko M.O., Voronenko O.B., Abramov G.S.</b> Monitoring sanitary-epidemic situation in the region .....	187
<b>Hvozdeva I.M., Demirov V.V.</b> Trend control methods in the modern ships power plants diagnostic systems .....	191
<b>Hnatushenko V., Kavats O., Galchenko E., Kavats Y.</b> Information technology of buildings recognition on multichannel photogrammetric high spatial resolution images based on morphological indices .....	195
<b>Hnatushenko Vikt.V., Paltko O.O.</b> Research of the parameters wireless sensor network for the duration the lifetime .....	199
<b>Guda A.I., Mikhalyov A.I.</b> Identification criteria synthesis for the "Sprott A" chaotic system with the aid of the multi-model adaptive-searching method .....	204
<b>Denysiuk O.R.</b> Determination of rational numerical solution parameters for some classes of systems of differential equations .....	208
<b>Dmytriieva I., Karas N.</b> Combinatorial and genetic algorithms for service schedule lookup in a multi-instrument system .....	213
<b>Dobrovolsky G.A., Todoriko O.A.</b> Application of Shannon entropy for voice activity detection in noisy sound recordings .....	218
<b>Kirichenko L., Ivanisenko I., Radivilova T.</b> Analysis of imbalance of distributed system with a self-similar load .....	224
<b>Kobytska Yu.</b> Recognition of fractal time series by using wavelet packet transform .....	232
<b>Kondratets V.A., Matsui A.N.</b> Modeling of the formation of the body of mechanical sand classifiers in wear conditions of work items spiral .....	238
<b>Lazurik V.M., Shaptala Ju.A., Sawan Salah.</b> Software development for determining of the electron energy from the experimental data obtained by the dosimetric wedge method .....	245
<b>Lytvynenko V.I., Fefelov A.O., Bidyuk P.I. Kozhukhivska O.V.</b> Hybridisation of Kalman filter and clonal selection algorithm for prediction of heteroscedastic processes .....	249
<b>Ostrovskaya K.YU., Ostrovskiy E.V.</b> Development of an expansion module for the user function for Microsoft Excel in C # and Excel-DNA .....	258
<b>Reuta O.V.</b> Algorithm of shape visualization of 3d object presented by its matrix model .....	263
<b>Romaniuk O.N., Dudnyk O.O.</b> Improving realistic of three-dimensional graphical objects shading .....	269
<b>Safonova A.F., Safonov M.S., Roslyakova S.V., Nosov P.S.</b> Bayes' model in the expert system for recognition of a clothes style cut according to its image .....	273
<b>Skorik S.</b> Formal model of situation security risks of cloud systems .....	277
<b>Sushchev'sky D.V.</b> Searching for optimal parameters of gradient filters to locate man-made objects' boundaries on high resolution satellite images .....	282
<b>Timofeeva N.K.</b> Modelling of the applied problems of calculable intellect is with the use of theory of combinatorial optimization .....	287
<b>Trokhimchuck P.P.</b> Problems of complexity in modern cybernetics and computing science and ways of their resolutions .....	292

## MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL AND TECHNOLOGICAL PROCESSES AND TECHNICAL SYSTEMS

<b>Abramov G.S., Abramov M.G., Bardachov Y.N.</b> Coalescence of oxide particles at the asymptotic stage of internal oxidation process .....	297
<b>Babichev S.A.</b> Model of filtration system of DNA nucleotides gene expression profiles .....	304
<b>Belinskiy I.V., Lemeshko V.A.</b> Physical modeling of the propagation process of disturbances in a two-dimensional granular medium for different packaging .....	309
<b>Berdnyk M.G.</b> Mathematical modeling of temperature fields in a hollow rotating cylinder .....	314
<b>Blazhevskiy S.G.</b> The diffusion problem in three-layered heterogeneous unbounded environment with soft limits .....	319
<b>Brazaluk IU.V., Yevdokymov D.V., Shulha R.O.</b> Effectiveness comparison of finite difference method and boundary element method in solution of elliptic boundary-value problems in ring-like domains .....	325
<b>Vocelka S.A., Rozhkov S.A.</b> Method recovery immeasurable coordinate irrigation canal .....	331

<b>Goman O.G., Katan V.A.</b> The mathematical model of the impact interaction of a body and a liquid with a free surface using the hadamard integrals .....	337
<b>Gorovenko A.P.</b> The diffraction wave a pressure on elastic inclusion in a liquid .....	342
<b>Karaiev A.O., Strelnikova O.O.</b> Modelling hydrodynamic expansion stage of the central heavy-ion collisions .....	347
<b>Knysh L., Goman O.</b> Modeling features of energy-mass transfer in the heat receiver system of the solar parabolic cylindrical plant .....	352
<b>Lazurik V.T., Popov G.F., Salah Sawan, Zimek Z.</b> Approbation methods of numerical differentiation the depth dose distribution measured with application dosimetry wedge method .....	357
<b>Lyashenko V.P., Kobilskaya E.B., Demyanchenko O.P.</b> Modeling of heat distribution in the spherical area under the influence impulsive heat sources .....	361
<b>Makarenkov E.A., Siasiev A.V., Klym V.Y.</b> The solving of heat exchange task for hollow cylinder .....	366
<b>Machulianshyi A.V., Babych B.B., Machulianshyi V.A., Tarasovskaya N.P.</b> Modelling of nanostructural metaldielectric systems for use as optical filters .....	371
<b>Menshikov Yu.L.</b> Synthesis of adequate mathematical model of steel production .....	376
<b>Myrhorod V.F., Hvozdeva I.M., Derenh E.V.</b> Analytical solutions of Volterra integral equations systems with separable kernels .....	380
<b>Petryk M.R., Mykhalyk D.M., Petryk O.Y., Shynkaryk M.I.</b> Mathematical modeling of binary desorption in nanoporous media .....	384
<b>Polivoda V.V., Litvinchuk D.G., Gavrilenko V.A.</b> Modeling of humidity measurement process in grain... ..	388
<b>Polyakov V.A., Hachapuridze N.M.</b> Model of linear synchronous motor's traction .....	393
<b>Redchys D.O., Moiseenko S.V.</b> Numerical simulation of turbulent flow around vehicle in ground proximity .....	398
<b>Rudakoda G.V., Polyvoda O.V., Omelchuk A.A.</b> Identification procedure of model parameters of large objects movement .....	403
<b>Smetankina N.V., Ugrimov S.V., Shupikov O.M.</b> Mathematical modeling of nonstationary deformation process of multilayer glazing at distributed and localized loadings .....	408
<b>Tarasov S.V., Tarasov A.S.</b> Modeling the dynamics of console fragments of elastic Darrieus rotor's blades in the airflow .....	414
<b>Topchy D.O., Khomchenko A.N.</b> Computer testing of a non-stationary temperature field of a square plate with twelve thermoelements. Review of the results .....	421
<b>Tuluchenko G.Ya., Starun N.V., Seluyanova T.A.</b> About equivalence of two problems by fem .....	427
<b>Udovenko V., Strelnikova E.</b> Comparison of profile experimental aerodynamic characteristics with numerical simulation results at transonic flow regimes .....	433
<b>Filshinskii L.A., Nosov D.M., Eremenko H.A.</b> The boundary-value problem of fracture mechanics of new magnetoelastoelectroelastic materials weakened by cracks .....	438
<b>Khomchenko A.N., Astionenko I.A.</b> Gaussian curvature of serendipity surfaces or how to deflect conoid .....	444
<b>Khomchenko A.N., Litvinenko Ye.I.</b> Non-matrix schemes of condensation on serendipity elements .....	448
<b>Sheremet G.P., Vengrovich D.B., Gubar I.N.</b> Modeling of stress evolution in inhomogeneous geophysical media .....	452
<b>Shuvalova Yu., Krutchenko D., Strelnikova E.</b> Integral equations in the problem of liquid free and forced vibrations in rigid reservoirs .....	455

### **ECONOMICAL SCIENCES**

<b>Abramova G.V., Abramov G.S.</b> System analysis of agricultural production and its profitability .....	460
<b>Kryzhanovska T.V., Kletska T.S., Andreytsev A.Yu.</b> Modeling of the labour market indicators using neural network methods .....	465

### **APPLIED GEOMETRY AND COMPUTER TECHNOLOGIES**

<b>Adon'yev Y.O., Vereshchyaga V.M.</b> Response surface using in modelling of sustainable energy development of cities .....	471
<b>Ausheva N.M., Pedos B.M.</b> Interactive surfaces control by means of mobile devices.....	477
<b>Brailov A.Yu., Panchenko V.I., Ustyanskiy V.A.</b> Geometrical model for the determination of points coordinates of the historical building roof .....	482
<b>Vorontsov O.V., Tulupova L.A., Vorontsova I.V.</b> Determination of one-dimesional geometric images by a chain of successive superpositions considering a value of recurrent dependence .....	487
<b>Gavrilenko E.A., Kholodnyak YU.V., Paharenko V.O.</b> Forming of geometric characteristics of monotonous curve .....	492

	497
<b>Gumen O.M., Lyaskovska S.E., Martyn E.V.</b> Multidimensional geometry in applied problems .....	501
<b>Danilin A.N., Komyak V.V., Komyak V.M., Sobol A.N., Pankratov A.V.</b> Mathematical model of individual-flow foot traffic and traffic flows .....	506
<b>Korchinsky V.M.</b> Informational-graphic technology of processing the multidimensional remote sensing data .....	510
<b>Lebedev V.O., Naydysh A.V., Rubcov N.A.</b> Features computers and software implementation discretionary interpolation based on the corner condensed .....	514
<b>Litvinov A.I., Naydysh A.V., Baluba I.G.</b> Geometric modeling of the torsion surfaces with two parabolic guides by the BN-calculus apparatus .....	519
<b>Mukvich M.M.</b> Analytical description of the minimal surface using isotropic curved, lying on the rotational surface of the cycloid .....	524
<b>Pylypaka S.F., Grischenko I.Y., Chepyzhniy A.V.</b> Dynamics of the corpuscle in the adjoining plane of the three – edge of the flat directing curve .....	529
<b>Spiritsev V.V., Shytik M.A.</b> The analysis of modern architectural patterns of the applications used for planning is in environment of IOS .....	534
<b>Spiritseva O.V., Sukhorukov P.S.</b> Fractal analysis application to digital images processing .....	539
<b>Stegantsev E.V.</b> The study of the correspondence between the domains on the parametrized surface and their inverse images on the parameter plane .....	542
<b>Choporov S.V., Gomenyuk S.I., Lisnyak A.A., Al-Omari M.A.V., Al-Athamneh H.K.M.</b> Surface triangulation using hybrid parametric and implicit representation .....	

### **ELECTRONICS AND ELECTRICAL**

<b>Dovbnya A.N., Mazmanishvili A.S., Reshetnyak N.G.</b> Use drop-down solenoid magnetic field for control of parameters longitudinal and transverse beam .....	550
<b>Melnyk I.V.</b> Estimation of the rasing time of high voltage glow discharge current in triode electron sources with taking into account influence of temperature of electrons and its mobility in anode plasma.....	556
<b>Melnyk I.V., Tahai B.A., Tahai S.B.</b> Simulation of depedences of high voltage glow discharge electron gun’s current from the geometrical parameters of electromagnetic valve.....	561

---



---

**ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ**


---



---

УДК 517.958:52/59; 519.711.3

В.Е. БОГАЧЕВ

Белгородский университет кооперации, экономики и права

И.Н. БЕЛЯЕВА, Н.А. ЧЕКАНОВ, Б.М. БАШКАТОВ

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Н.Н. ЧЕКАНОВА

Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ "Университет банковского дела"

И.С. КУЗНЕЦОВА

Алексеевский филиал Белгородского государственного национального исследовательского университета

**ФУНКЦИЯ ГРИНА И ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ**

*В работе описан алгоритм символьно-численного построения функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Получены собственные значения для конусообразного стержня и найдена величина внешней нагрузки, при которой стержень теряет устойчивость. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с аналогичными величинами, имеющимися в литературе.*

*Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, функция Грина, краевая задача, задача на собственное значение, компьютерное моделирование.*

V.E. BOGACHEV

Belgorod University of Cooperation, Economics and Law

I.N. BELYAEVA, N.A. CHEKANOV, B.M. BASHKATOV

Belgorod National Research University

N.N. CHEKANOVA

Kharkov University of Banking

I.S. KUZNETSOVA

Alexeevka branch of Belgorod research university

**GREEN'S FUNCTION AND EIGENVALUE PROBLEM**

*The paper describes the algorithm symbol-numerical construction of the Green's function of the boundary value problem for a second order differential equation. Get eigenvalues for the tapered rod and found the value of the external load, in which the rod loses stability. It is shown that the results are in good agreement with those values available in the literature.*

*Keywords: ordinary differential equations, Green's function, boundary value problem, eigenvalue problem, computer modeling.*

**Постановка проблемы**

Пусть дано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$\hat{L}_n y(x) = 0, \quad \hat{L}_n p_0 \frac{d^n}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + p_n \quad (1)$$

и граничные условия  $\sum_k \alpha_{i,k} y^{(k)}(a) + \sum_k \beta_{i,k} y^{(k)}(b) = 0, \quad \alpha_{i,k} + \beta_{i,k}$ .

В общей теории дифференциальных уравнений доказано, что функция Грина существует и единственна при условии, что однородные ОДУ имеют только тривиальное решение  $\hat{L}_n y(x) = \lambda y(x)$ . Это соответствует тому, что при рассмотрении задачи на собственные значения имеется собственное значение равное нулю  $\lambda = 0$ . Нетривиальные решения уравнения  $\hat{L}_n y(x) = \lambda y(x)$ , которые находятся из граничных условий для функции Грина, соответствуют собственным значениям  $\lambda \neq 0$ . Так как функция Грина строится при помощи всех линейно независимых решений соответствующего дифференциального уравнения, то возникает задача их поиска, что представляет собой достаточно сложную задачу.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Важнейшим понятием в теории дифференциальных уравнений является функция Грина [1-3]. Однако универсальных методов построения функции Грина не существует, в первую очередь, из-за трудности нахождения всех линейно независимых решений соответствующего обыкновенного

дифференциального уравнения. Поэтому возникает проблема построения функции Грина с применением современных компьютерных систем таких как Maple, Mathematica, Reduce и других.

**Формулирование цели исследования**

Целью статьи является разработка алгоритма и составление компьютерной программы для символично-численного построения функции Грина в том числе и в виде степенных рядов и применение ее для исследования устойчивости конусообразного стержня при наличии внешней осевой нагрузки.

**Изложение основного материала исследования**

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{2a}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0}y(a) + \alpha_{1,1}y'(a) + \beta_{1,0}y(b) + \beta_{1,1}y'(b) &= 0, \\ \alpha_{2,0}y(a) + \alpha_{2,1}y'(a) + \beta_{2,0}y(b) + \beta_{2,1}y'(b) &= 0, \end{aligned} \tag{2б}$$

где  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  есть непрерывные функции вместе с их производными на отрезке  $[a, b]$ , а  $\alpha_{1,0}$ ,  $\alpha_{1,1}$ ,  $\alpha_{2,0}$ ,  $\alpha_{2,1}$ ,  $\beta_{1,0}$ ,  $\beta_{1,1}$ ,  $\beta_{2,0}$ ,  $\beta_{2,1}$  – заданные числа.

Предположим, что в классе непрерывных решений вместе с производными данная задача на отрезке  $[a, b]$  имеет только тривиальное решение. Однако, если ослабить требование непрерывности первой производной, например, в точке  $x = \xi$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , то для краевой задачи (2) существует ненулевое решение, которое называется функцией Грина. Обозначим ее как  $G(x, \xi)$ .

Функция Грина имеет следующие свойства [1, 3-5]:

- 1) является непрерывной вместе со своими производными в точке  $x = \xi$ ;
- 2) ее производная в точке  $x = \xi$  терпит разрыв равный

$$\left. \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)};$$

- 3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2a);
- 4) удовлетворяет граничным условиям (2б).

При условии, что краевая задача (2) имеет только тривиальное решение  $y(x) \equiv 0$ , то существует, как указано выше, одна и только одна функция Грина [4].

Пусть  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  есть два линейно независимых решения исходного дифференциального уравнения II порядка (2), в этом случае функцию Грина ищем в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & a \leq x \leq \xi \leq b \\ G_R(x, \xi), & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases} \tag{3}$$

где

$$G_L(x, \xi) = \sum_{k=1}^2 (A(\xi) + B(\xi)) \cdot y_k(x), \tag{4a}$$

$$G_R(x, \xi) = \sum_{k=1}^2 (A(\xi) - B(\xi)) \cdot y_k(x). \tag{4б}$$

Здесь функция Грина на отрезке  $a \leq x \leq \xi \leq b$  обозначается  $G_L(x, \xi)$ , а на отрезке  $a \leq \xi \leq x \leq b$  –  $G_R(x, \xi)$ .

Из выражений (4) видно, что для построения функции Грина необходимо определить функции  $A_k(\xi)$ ,  $B_k(\xi)$ . Для их определения используем свойства функции Грина, в частности, ее непрерывность и скачок первой производной по  $x$  в точке  $x = \xi$ . В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} B_1(\xi)y_1(\xi) + B_2(\xi)y_2(\xi) = 0 \\ B_1(\xi)y_1'(\xi) + B_2(\xi)y_2'(\xi) = -\frac{1}{2p(\xi)}. \end{cases} \tag{5}$$

Определитель

$$W(\xi) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \tag{6}$$



неоднородной системы (6) не равен нулю, так как он есть вронскиан двух линейно независимых решений  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ . Поэтому система (6) определена и имеет единственное решение  $B_1(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$ , из которой находим эти решения.

Для определения коэффициентов-функций  $A_1(\xi)$  и  $A_2(\xi)$  используем краевые условия (26). В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1(\xi) [\alpha_{1,0}y_1(a) + \alpha_{1,1}y_1'(a) + \beta_{1,0}y_1(b) + \beta_{1,1}y_1'(b)] + \\ A_2(\xi) [\alpha_{1,0}y_2(a) + \alpha_{1,1}y_2'(a) + \beta_{1,0}y_2(b) + \beta_{1,1}y_2'(b)] = \\ B_1(\xi) [\alpha_{1,0}y_1(a) + \alpha_{1,1}y_1'(a) - \beta_{1,0}y_1(b) - \beta_{1,1}y_1'(b)] + \\ B_2(\xi) [\alpha_{1,0}y_2(a) + \alpha_{1,1}y_2'(a) - \beta_{1,0}y_2(b) - \beta_{1,1}y_2'(b)] \\ \\ A_1(\xi) [\alpha_{2,0}y_1(a) + \alpha_{2,1}y_1'(a) + \beta_{2,0}y_1(b) + \beta_{2,1}y_1'(b)] + \\ A_2(\xi) [\alpha_{2,0}y_2(a) + \alpha_{2,1}y_2'(a) + \beta_{2,0}y_2(b) + \beta_{2,1}y_2'(b)] = \\ B_1(\xi) [\alpha_{2,0}y_1(a) + \alpha_{2,1}y_1'(a) - \beta_{2,0}y_1(b) - \beta_{2,1}y_1'(b)] + \\ B_2(\xi) [\alpha_{2,0}y_2(a) + \alpha_{2,1}y_2'(a) - \beta_{2,0}y_2(b) - \beta_{2,1}y_2'(b)] \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что если краевая задача (2) является самосопряженной, то есть выполняются условия [6]:

$$p_0(b) \begin{vmatrix} \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} \end{vmatrix} = p_0(a) \begin{vmatrix} \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

тогда функция Грина является симметричной  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ .

Подставляя найденные коэффициенты функции  $A_1(\xi)$ ,  $A_2(\xi)$ ,  $B_1(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$  в выражение (5) находим функцию Грина в аналитическом виде. Если  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  представляют собой степенные ряды, то и функция Грина будет представлена в виде степенных рядов. В соответствии с приведенными выше формулами (3 – 8) был разработан алгоритм и составлена программа GRESA для символьно-численного построения функции Грина в среде Maple.

Алгоритм построения функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений II порядка  
Ввод:

$p_0(x) \neq 0$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  – коэффициенты-функции в заданном дифференциальном уравнении второго порядка (2);

$a$ ,  $b$  – граничные точки отрезка  $[a, b]$ , на котором ищется функция Грина.

$\alpha_{1,0}$ ,  $\alpha_{1,1}$ ,  $\alpha_{2,0}$ ,  $\alpha_{2,1}$ ,  $\beta_{1,0}$ ,  $\beta_{1,1}$ ,  $\beta_{2,0}$ ,  $\beta_{2,1}$  – коэффициенты в граничных условиях (26) для конкретной краевой задачи.

Вывод:

$y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  – фундаментальная система решений заданного дифференциального уравнения (2а);

$G\_left(x, \xi) - G_L(x, \xi)$ , функция Грина на отрезке  $a \leq x \leq \xi \leq b$ ;

$G\_right(x, \xi) - G_R(x, \xi)$ , функция Грина на отрезке  $a \leq \xi \leq x \leq b$ .

Описание шагов алгоритма:

1. Нахождения двух линейно независимых решений заданного дифференциального уравнения второго порядка (2а).
2. Ввод матрицы начальных условий и вычисление ее ранга (2б).
3. Проверка краевой задачи на самосопряженность (8).
4. Вычисление и проверка коэффициентов-функций  $B_1(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$ , исходя из системы уравнений (6).
5. Вычисление и проверка коэффициентов-функций  $A_1(\xi)$ ,  $A_2(\xi)$ , исходя из заданных граничных условий (8).
6. Проверка существования функции Грина, то есть неравенство нулю детерминанта системы (7).
7. Построение функции Грина  $G\_left(x, \xi)$  ( $G_L(x, \xi)$ ,  $a \leq x \leq \xi \leq b$ ) и  $G\_right(x, \xi)$  ( $G_R(x, \xi)$ ,  $a \leq \xi \leq x \leq b$ ).

8. Проверка всех свойств функции Грина  $G(x, \xi)$ .

Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 + \alpha x)^4 \frac{dy}{dx} \right] + \lambda^2 y = 0 \quad (9)$$

с однородными краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Эта задача описывает продольный изгиб стержня, имеющего форму усеченного конуса [7]. В этой задаче необходимо определить наименьшую критическую силу, при которой стержень теряет устойчивость. Критическая сила равна произведению модуля Юнга на наименьшее собственное число. Параметр  $\alpha$  определяет различие диаметров усеченного конуса.

С помощью разработанной программы по описанному выше алгоритму была построена функция Грина и решена задача на собственные значения (9).

В этой задаче два линейно независимых  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  решения имеют вид:

$$y_1(x) = \alpha \cos \left[ \frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right] + \frac{\lambda}{1 + \alpha x} \sin \left[ \frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right], \quad (10a)$$

$$y_2(x) = -\alpha \sin \left[ \frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right] + \frac{\lambda}{1 + \alpha x} \cos \left[ \frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right]. \quad (10б)$$

Если значения параметра  $\lambda$  не равны собственным значениям, определяемых равенством нулю следующего определителя

$$U = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(L) & y_2(L) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (11)$$

то получена функция Грина в следующем виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq L \\ G_R(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq L \end{cases} \quad (12a)$$

где

$$G_L(x, \xi) = - \frac{\sin[z_1(x, \lambda)] \cdot \sin[z_2(\xi, \lambda)] (\alpha^2 + \alpha^3 x - \alpha^2 x \operatorname{ctg}[z_1(x, \lambda)] \lambda + \lambda^2)}{\sin[z(L, \lambda)] (1 + \alpha \xi) (1 + \alpha x) \lambda^3 (\alpha^2 + \alpha^3 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z(L, \lambda)] \lambda + \lambda^2)} \\ (\alpha^2 + \alpha^3 L + \xi \alpha^3 + \xi \alpha^4 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z_2(\xi, \lambda)] \lambda + \alpha^2 \xi \operatorname{ctg}[z_2(\xi, \lambda)] \lambda + \lambda^2), \quad (12б)$$

$$G_R(x, \xi) = - \frac{\sin[z_1(\xi, \lambda)] \cdot \sin[z_2(x, \lambda)] (\alpha^2 + \xi \alpha^3 - \alpha^2 \xi \operatorname{ctg}[z_1(\xi, \lambda)] \lambda + \lambda^2)}{\sin[z(L, \lambda)] (1 + \alpha \xi) (1 + \alpha x) \lambda^3 (\alpha^2 + \alpha^3 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z(L, \lambda)] \lambda + \lambda^2)} \\ (\alpha^2 + \alpha^3 L + x \alpha^3 + x \alpha^4 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z_2(x, \lambda)] \lambda + \alpha^2 x \operatorname{ctg}[z_2(x, \lambda)] \lambda + \lambda^2), \quad (12в)$$

$$\text{где } z(L, \lambda) = \frac{\lambda L}{1 + \alpha L}, \quad z_1(x, \lambda) = \frac{\lambda x}{1 + \alpha x}, \quad z_2(\xi, \lambda) = \frac{\lambda(-\xi + L)}{(1 + \alpha L)(1 + \alpha \xi)}.$$

Если детерминант (11) не равен нулю, то существуют собственные значения  $\lambda$ , которые определяются из решения следующего трансцендентного уравнения:

$$\lambda^2 - \alpha^2 L \operatorname{ctg} \left( \frac{\lambda L}{1 + \alpha L} \right) \lambda + \alpha^2 + \alpha^3 L = 0. \quad (13)$$

В книге [7] приведена приближенная формула (в случае  $a \ll 1$ ) для вычисления наименьшего собственного значения краевой задачи (10) в виде:

$$\frac{1}{\lambda^4} = L^4 \left( \frac{1}{90} - \frac{2}{45} \alpha \right), \quad (14)$$

которая дает отклонение от точного значения меньше, чем на 5%.

Для конкретных значений параметров  $L = 1$  и  $\alpha = 0.01$  нами было проведено сравнение значения наименьшего собственного значения, полученного по точной формуле (13) с результатами, следующими из

формулы Михлина (14). По формуле (13) была получена величина собственного значения равная  $\lambda = 3.17$ , а по формуле (14) –  $\lambda = 3.11$ , которые отличаются менее, чем на 2%.

Для наглядности на рис. 1 приведены графики двух функций

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^2 + \alpha^3 L, \quad f_2(\lambda) = -\alpha^2 L \operatorname{ctg} \left( \frac{\lambda L}{1 + \alpha L} \right) \lambda, \quad (15)$$

из точек пересечения которых можно также найти величины первых собственных значений, которые согласуются с полученными выше результатами.

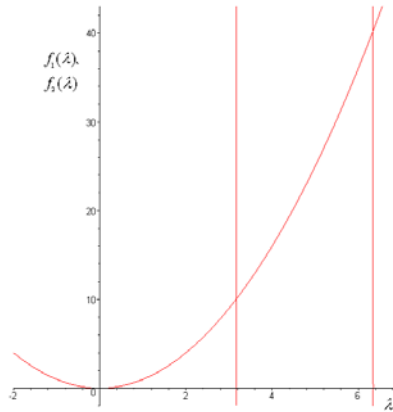


Рис 1. Графики функций (15)

### Выводы

В работе разработан алгоритм для символьно-численного построения функции Грина дифференциальных уравнений второго порядка, согласно которому составлена программа, с помощью которой исследована задача на устойчивость конусообразного стержня при наличии внешней нагрузки. В этой задаче найдены собственные значения и величина критической нагрузки, при которой стержень теряет устойчивость – происходит выпучивание стержня. Полученные результаты хорошо согласуются с известными из литературы.

В дальнейшем планируется решение других задач на собственные значения.

### Список использованной литературы

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Дж. Сансоне – М.: Изд-во иностранной литературы. – 1953. – Т.1. – 346 с.
2. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Дж. Сансоне. М.:ИЛ,1954. –Т.2. –416с.
3. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми. – М.: ИЛ, 1962. – 352 с.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1976. – 216 с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М. Ижевск: НИЦ РХД, 2005. – 176 с.
6. Привалов И.И. Интегральные уравнения / И.И. Привалов. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 248 с.
7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С.Г. Михлин. – М., Л.: ОГИЗ изд. тех.-теор. лит., 1947. – 304 с.

УДК 539.3

В.О. ВАХНЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна

Е.Дж. ПАРКЕС

Департамент математики та статистики, Страсклайдський університет, Глазго, Великобританія

## МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСПОВАННЯ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

*Грунтуючись на досвіді вивчення рівняння Вахненка (the Vakhnenko equation (VE)), ми знайомимо читача з низкою методів та підходів, які можуть бути використані для деяких нелінійних рівнянь. Ми відтворюємо шлях, по якому недосвідчений читач міг би дослідити нове нелінійне рівняння. Прямим інтегруванням VE отримано періодичні та усамітнені розв'язки на біжучих хвилях, зокрема петлеподібні. Альтернативна форма VE відома як рівняння Вахненка-Паркеса (the Vakhnenko-Parkes equation (VPE)). Метод Хіроти дозволив нам знайти N-солітонні розв'язки для VPE. Перетворення Беклунда, що випливає з бі-лінійної форми рівняння (форма Хіроти), веде до законів збереження. З отриманої пари Лакса ми формулюємо метод оберненої задачі розсіювання. Цей метод для третього порядку спектральної задачі ми використали для дослідження зв'язаного і неперервного спектрів. Це дозволило знайти N-солітонні розв'язки та M-модові періодичні розв'язки, відповідно. Досліджується взаємодія між цими типами розв'язків.*

*Ключові слова: нелінійне рівняння, метод Хіроти, метод оберненої задачі розсіювання, пара Лакса, N-солітонні розв'язки, M-модові періодичні розв'язки.*

В.А. ВАХНЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна

Е.Дж. ПАРКЕС

Департамент математики та статистики, Страсклайдський університет, Глазго, Великобританія

## МЕТОД ОБРАТНОЇ ЗАДАЧІ РАССЕЙАНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С СПЕКТРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

*Исходя из опыта изучения уравнения Вахненко (the Vakhnenko equation (VE)), мы знакомим читателя с рядом подходов и методов, которые могут быть применены к нелинейным уравнениям. Мы начерчиваем путь, по которому читатель мог бы исследовать новое нелинейное уравнение. Прямым интегрированием получены периодические и уединенные решения на бегущих волнах, некоторые из которых – петлеподобны. Альтернативная форма для VE известна как уравнение Вахненко-Паркеса (the Vakhnenko-Parkes equation (VPE)). Метод Хироты позволил нам найти N-солитонные решения для VPE. Преобразование Бäckлунда, вытекающее из би-линейной формы уравнения (форма Хироты), приводит к законам сохранения. Из полученной пары Лакса мы формулируем метод обратной задачи рассеяния. Этот метод для третьего порядка спектральной задачи применен для исследования связанных состояний и непрерывного спектра. Таким образом, получены N-солитонные решения и M-модовые решения, соответственно. Исследуется взаимодействие между указанными типами волн.*

*Ключевые слова: нелинейное уравнение, метод Хироты, метод обратной задачи рассеяния, пара Лакса, N-солитонные решения, M-модовые решения.*

V.O. VAKHNENKO

Subbotin Institute of Geophysics, Kyiv, Ukraine

E.J. PARKES

Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow, UK

## THE INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR EVOLUTION EQUATION WITH THIRD ORDER SPECTRAL EQUATION

*Based on experience of the study of the Vakhnenko equation (VE), we acquaint the reader with a series of methods and approaches which may be applied to certain nonlinear equations. Thus we outline a way in which an uninitiated reader could investigate a new nonlinear equation. By direct integrating of the VE we obtain the periodic and solitary traveling wave solutions some of which are loop-like in nature. An alternative form of the VE is known as the Vakhnenko-Parkes equation (VPE). The Hirota method enables us to find an N-soliton solution for the VPE. A Bäcklund transformation following from the be-linear form of equation (Hirota's form) is used to construct conservation laws. From the obtained Lax pair we formulate the inverse scattering transform (IST) method. The standard IST method for third-order spectral problems is applied to investigate solutions*

corresponding to bound states of the spectrum and to a continuous spectrum. This leads to  $N$ -soliton solutions and  $M$ -mode periodic solutions, respectively. Interactions between these types of solutions are investigated.

*Keywords:* nonlinear equation, Hirota method, inverse scattering transform method, Lax pair,  $N$ -soliton solutions,  $M$ -mode periodic solutions.

### Постановка проблеми

Фізичні явища та процеси, що мають місце в природі, у загальному носять нелінійний характер. Це приводить до нелінійних математичних моделей для реальних процесів, а також до ускладнення опису. Вивчення кожного нового нелінійного рівняння вважається важливим кроком. Мета доповіді надати загальні уявлення про методи та підходи, які розроблені в математичній фізиці для дослідження нелінійних еволюційних рівнянь. Ми вказуємо послідовний шлях, проходячи який, необізнаний читач може дослідити нове рівняння.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Нелінійним системам (рівнянням) притаманні унікальні властивості. До таких, в першу чергу, потрібно віднести солітони. Не претендуючи на строге означення, зазначимо, що солітон – це хвиля з властивостями частинки. Це – усамітнена стійка хвиля. Важливо, що після нелінійної взаємодії єдиним результатом буде набуття солітонами фазового зсуву. З математичної точки зору стійкість солітону зумовлена двома взаємо конкуруючими чинниками. З одного боку, нелінійність намагається перевернути хвилю, з іншого боку, дисперсія розмиває хвилю. Баланс цих двох процесів веде до можливості утворення стійких хвильових утворень – солітонів. Взаємодію двох солітонів для  $KdV$  рівняння (2) ілюструємо на рис. 1. Більший солітон наздоганяє менший, відбувається нелінійна взаємодія (перекачується енергія від більшого солітону до меншого), потім, відновивши початкову форму, солітони розходяться.

Різні методи вивчення властивостей нелінійних еволюційних рівнянь будемо пояснювати на прикладі рівняння Вахненка (the Vakhnenko equation) [1, 3]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u + u = 0. \quad (1)$$

Це рівняння моделює, зокрема, розповсюдження високочастотних хвиль у релаксівному середовищі. Крім того, неодноразово будемо звертатися до класичного рівняння Кортевега-де Вріза (the  $KdV$  equation) [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2)$$

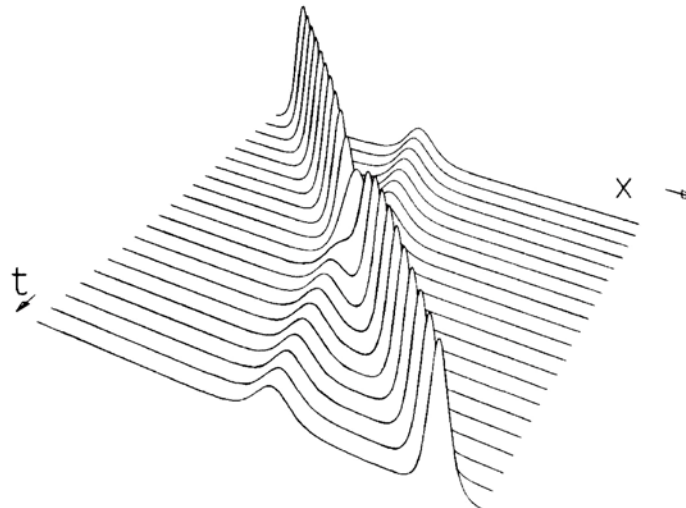


Рис. 1. Зіткнення двох солітонів для  $KdV$  рівняння.

Розпочинаючи вивчення нелінійного еволюційного рівняння, перш за все потрібно удатися до прямих методів. Отже, повинні бути досліджені, насамперед, розв'язки на біжучих хвилях. Для цього заміною  $z = u - v$ ,  $\eta = x - vt$  з  $v = \text{const}$  потрібне початкове рівняння зводимо до звичайного диференційного рівняння, певна річ, нелінійного. У нашому випадку маємо рівняння  $(zz_\eta)_\eta + z + v = 0$ , яке двічі інтегруємо [1]. Розв'язок набуває параметричної залежності з параметром  $\varphi$ :

$$\sin^2 \varphi = \frac{z_3 - z}{z_3 - z_2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{6}z_1}{\sqrt{z_3 - z_1}} F(\varphi|m) + \sqrt{6(z_3 - z_1)} E(\varphi|m), \quad (3)$$

де  $F(\varphi|m)$ ,  $E(\varphi|m)$  – еліптичні інтеграли першого і другого роду, відповідно,  $m = (z_3 - z_2)/(z_3 - z_1)$ , а  $z_1 \leq z_2 \leq z_3$  – корені рівняння  $z^3 + \frac{3}{2}\nu z^2 + A = 0$ ,  $A = \text{const}$ . Розв'язки подані на рис. 2 і 3. Виявилось, що усамітнена хвиля 1 з рис. 2 – солітон.

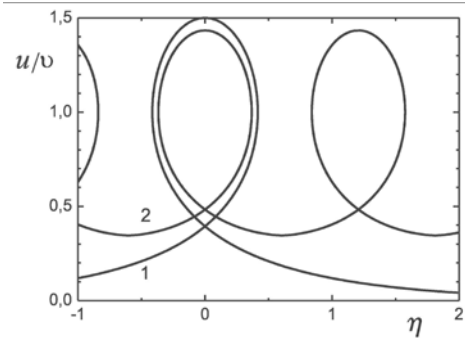


Рис. 2. Розв'язки рівняння (1) на біжучих хвилях для  $\nu > 0$ .

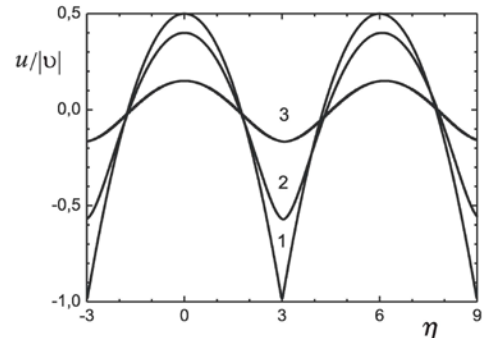


Рис. 3. Розв'язки рівняння (1) на біжучих хвилях для  $\nu < 0$ .

Одним з фундаментальних прямих методів без сумніву є метод Хіרותи [5], якому притаманні унікальні особливості. Зокрема, метод дозволяє знайти  $N$ -солітонні розв'язки, закони збереження, а також вказати на шлях для отримання пари Лакса та сформулювати обернену задачу розсіювання.

Записавши рівняння, що досліджується (1), у нових координатах  $x = T + W(X, T) + x_0$ ,  $t = X$  з  $u(x, t) = U(X, T) = W_X(X, T)$  маємо альтернативне рівняння, яке відоме як рівняння Вахненка-Паркеса (the Vakhnenko-Parkes equation (VPE)) [6]:

$$W_{XXT} + (1 + W_T)W_X = 0. \quad (4)$$

Це рівняння набуває такого вигляду у білінійній формі Хіרותи [7]:

$$(D_T D_X^3 + D_X^2) f \cdot f = 0, \quad W = 6(\ln f)_X. \quad (5)$$

За означенням оператор Хіרותи [5]:

$$D_T^n D_X^m a \cdot b = \left( \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial T'} \right)^n \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X'} \right)^m a(T, X) b(T', X') \Big|_{T=T', X=X'}. \quad (6)$$

Тут звертаємо особливу увагу на те, що зацікавлений читач повинен з білінійної форми рівняння, що вивчається, (в нашому випадку з рівняння (5)) отримати білінійну форму перетворення Беклунда

$$(D_X^3 - \lambda) f' \cdot f = 0, \quad (3D_X D_T + 1 + \mu D_X) f' \cdot f = 0 \quad (7)$$

та пару Лакса з  $\psi = f'/f$

$$\psi_{XXX} + W_X \psi_X - \lambda \psi = 0, \quad 3\psi_{XT} + (1 + W_T)\psi + \mu \psi_X = 0. \quad (8)$$

Білінійної форми рівняння (у нас це рівняння (5)) достатньо, щоб отримати  $N$ -солітонні розв'язки. Наприклад, двосолітонний розв'язок для (4) набуває вигляду

$$f = 1 + \exp(2\eta_1) + \exp(2\eta_2) + b \exp(2(\eta_1 + \eta_2)) \quad (9)$$

$$z \ b = \left( \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \right)^2 \frac{k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2} \text{ та } \eta_i = (k_i X - c_i T) + \alpha_i.$$

Три типи взаємодії показані для солітонів рівняння (1) на рис. 4–6.

Отеж, якщо читачеві вдалось отримати пару Лакса для рівняння, яке він вивчає, значить наполегливий читач досяг значного прогресу. Власне сумісність рівнянь в парі Лакса з необхідністю породжує початкове нелінійне рівняння. Перше рівняння з пари Лакса (8) визначає спектральні дані при заданих початкових умовах. За еволюцію спектральних даних відповідає друге рівняння (8), а така функціональна залежність виявляється досить простою. Часто вважається, що якщо пара Лакса вже отримана, тобто доведена інтегровність, то потрібне рівняння може бути розв'язане методом оберненої задачі розсіювання. Однак, щоб досягти цього, необхідно прикласти зусиль для реалізації відомої процедури. Для прикладу прослідкуємо реалізацію методу оберненої задачі розсіювання для VPE (4).

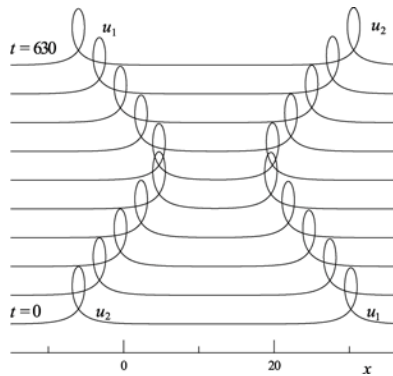


Рис. 4. Взаємодія солітонів для  $k_1 = 0.99, k_2 = 1.$

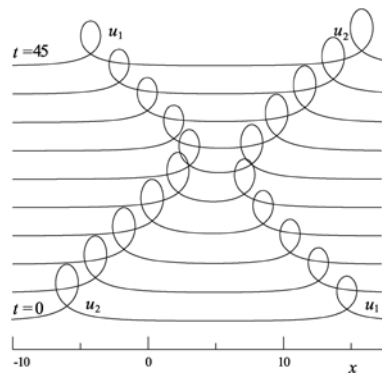


Рис. 5. Взаємодія солітонів для  $k_1 = 0.88867, k_2 = 1.$

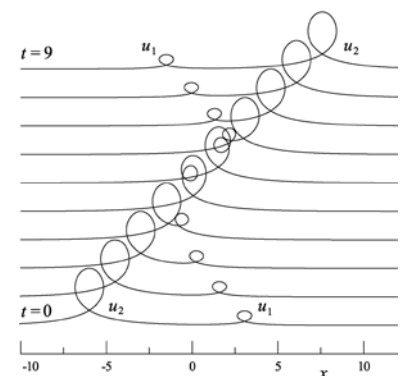


Рис. 6. Взаємодія солітонів для  $k_1 = 0.5, k_2 = 1.$

Ключовий момент в методі оберненої задачі розсіювання полягає в дослідженні спектрального рівняння (8), оскільки спектр (величина  $\lambda$ ), як доведено в [7], зберігається. Розв'язок лінійного рівняння (8) був здобутий Каудресем у [8] у вигляді функцій Йоста  $\phi_j(X, \zeta)$  через  $\Phi_j(X, \zeta) = \exp\{-\lambda_j(\zeta)X\} \phi_j(X, \zeta)$ ,  $\lambda_j(\zeta) = \omega_j \zeta$ ,  $\lambda_j^3(\zeta) = \lambda$ ,  $\omega_j = e^{2\pi i(j-1)/3}$ . Комплексна площина  $\zeta$  розбивається на декілька областей таких, всередині яких порядок числа  $\text{Re}(\lambda_j(\zeta))$  сталий (див. рис. 7). Функція Йоста  $\phi_j(X, \zeta)$  регулярна на площині  $\zeta$ , за виключенням полюсів і меж між виділеними областями (рис. 7). Всередині окремої області розв'язок спектрального рівняння (8) підпорядковується співвідношенню (2.12) з [8]. Це – пряма спектральна задача.

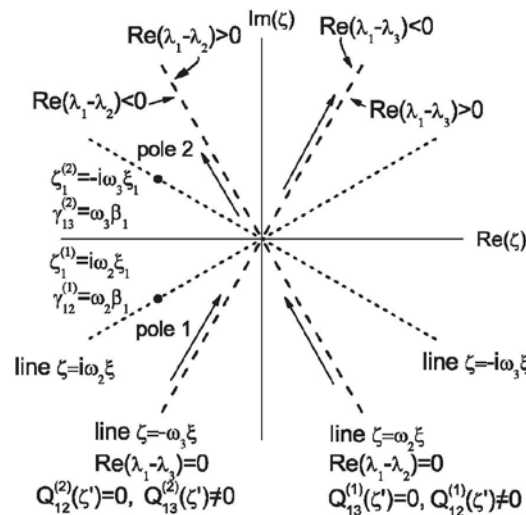


Рис. 7. Регулярна область для функцій Йоста  $\phi_j(X, \zeta)$  на комплексній площині  $\zeta$ .

Примітка. Пунктирні лінії визначають межі регулярних областей. На цих лініях задаються функції сингулярності  $Q_{1j}(\zeta')$ . На лініях з точок можуть появлятися полюси.

Реконструкція розв'язку  $W(X, T)$  зі спектральних даних становить суть оберненої спектральної задачі. У загальному випадку необхідно враховувати як дискретний спектр (полюси), так і неперервний (функції  $Q_{1j}(\zeta')$ ). У відповідності до співвідношення (6.20) з [8] розв'язок спектрального рівняння (8) подається у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_1(X, \zeta) = & 1 - \sum_{k=1}^K \sum_{j=2}^3 \gamma_{1j}^{(k)} \frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)} \Phi_1(X, \omega_j \zeta_1^{(k)}) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{j=2}^3 Q_{1j}(\zeta') \frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta') - \lambda_1(\zeta')]X\}}{\zeta' - \zeta} \Phi_1^\pm(X, \omega_j \zeta') d\zeta'. \end{aligned} \quad (10)$$

Рівняння (10) утримує спектральні дані, а саме,  $K$  полюсів і величин  $\gamma_{1j}^{(k)}$  для дискретного спектру, а також для неперервного спектру функції  $Q_{1j}(\zeta')$  на межах, де  $\text{Re}(\lambda_1(\zeta') - \lambda_j(\zeta')) = 0$  при  $j \neq 1$ .

Функція Йоста  $\Phi_1(X, \zeta)$  пов'язана з розв'язком таким чином (див. (5.11) у [8])

$$\Phi_1(X, \zeta) = 1 - \frac{1}{3\lambda_1(\zeta)} [W(X) - W(-\infty)] + O(\lambda_1^{-2}(\zeta)). \quad (11)$$

Як приклад, наводимо результат по взаємодії солітону та періодичної хвилі, отриманий з методу оберненої задачі розсіювання [9-11]

$$W(X, T) = 3 \frac{\partial}{\partial X} \ln(F(X, T)), \quad F = \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{b}} q_1 + \frac{1}{\sqrt{b}} q_2 + q_1 q_2 \right)^2, \quad (12)$$

$$\text{де } q_1 = \exp[\sqrt{3}\xi_1 X - (\sqrt{3}\xi_1)^{-1} T], \quad q_2 = \exp[-i\sqrt{3}\xi_2 X + (i\sqrt{3}\xi_2)^{-1} T], \quad b = \left( \frac{\xi_1 + i\xi_2}{\xi_1 - i\xi_2} \right)^2 \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2 + i\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - i\xi_1\xi_2}.$$

### Висновки

Ми познайомили читача з низкою методів та підходів, які можуть бути використані для вивчення еволюційних нелінійних рівнянь. Ми відтворили шлях (деталі в [11]), по якому допитливий читач може дослідити нове нелінійне рівняння.

### Список використаної літератури

1. Vakhnenko, V. A. Solitons in a nonlinear model medium / V.A. Vakhnenko // J. Phys.A: Math.Gen. – 1992. – V.25. – PP. 4181 – 4187.
2. Parkes, E. J. The stability of solutions of Vakhnenko's equation / E.J. Parkes // J. Phys.A: Math. Gen. – 1993. – V.26. – PP. 6469 – 6475.
3. Vakhnenko, V. O. High frequency soliton-like waves in a relaxing medium / V.O. Vakhnenko // J. Math. Phys. – 1999. – V.40, № 3. – PP. 2011 – 2020.
4. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Мир. – 1988. – 694 с.
5. Hirota, R. The direct method in soliton theory / R. Hirota, – Cambridge: University Press, Cambridge, UK, – 2004. – 200 p.
6. Vakhnenko, V. O. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Nonlinearity. – 1998. – V.11, № 6. – PP. 1457 – 1464.
7. Vakhnenko, V. O. The calculation of multisoliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2002. – V.13, N. 9. – PP. 1819 – 1826.
8. Caudrey, P. J. The inverse problem for a general NxN spectral equation / P.J. Caudrey // Physica D. – 1982. – V.6. – PP. 51 – 66.
9. Vakhnenko, V. O. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2012. – V.45, N. 6. – PP. 846 – 852.
10. Vakhnenko, V. O. Solutions associated with discrete and continuous spectrums in the inverse scattering method for the vakhnenko-parkes equation / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Progress of Theoretical Physics. – 2012. – V.127, № 4. – PP. 593 – 613.
11. Vakhnenko, V. O. Approach in theory of nonlinear evolution equations: the Vakhnenko-Parkes equation / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Advances in Mathematical Physics. – 2016. – V.2016, Article ID 2916582. – 39 p.



513.88:517.44: 539.3

Т.Г. ВОЙТИК

Одесский национальный морской университет

Г.С. ПОЛЕТАЕВ

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

С.А. ЯЦЕНКО

Одесская национальная морская академия

## ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ РОДСТВЕННОГО РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА ТИПА ДЛЯ КОЛЬЦА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

*Поставлена и решена задача с правильно факторизуемым рациональным коэффициентом, родственная задаче типа Римана-Гильберта-Привалова из теории аналитических функций. Метод основан на результатах, вытекающих из установленных вторым автором для соответствующих абстрактных уравнений в кольце со специальной факторизационной парой подколец. Используются проекторы на подкольца, факторизация коэффициентов, разложения в суммы простейших рациональных дробей. Приведено несколько конкретных иллюстративных примеров решения задачи. Процедура свободна от аппарата теории интеграла Фурье и интеграла типа Коши, требования гёльдеровости функций, индекса.*

*Ключевые слова: Задача Римана, уравнение, факторизация, кольцо, проектор, факторизационная пара.*

Т.Г. ВОЙТИК

Одеський національний морський університет,

Г.С. ПОЛЕТАЄВ

Одеська державна академія будівництва та архітектури

С.А. ЯЦЕНКО

Одеська національна морська академія

## ПРОЕКТОРНИЙ ПІДХІД В ЗАДАЧІ СПОРІДНЕНОГО РИМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА ТИПУ ДЛЯ КІЛЬЦЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

*Поставлена та розв'язана задача з правильно факторизуємим коефіцієнтом, споріднена задачі Римана-Гільберта-Привалова із теорії аналітичних функцій. Метод базується на теорії, що впливає із результатів другого автора для відповідних абстрактних рівнянь в кільці з спеціальною факторизаційною парою підкілець. Використовуються проектори на підкілля, факторизація коефіцієнтів, розклади раціональних функцій в суми простих раціональних дробів. Наведено декілька конкретних ілюстративних прикладів розв'язків задачі. Процедура вільна від апарату теорії інтеграла Фур'є та типу Коші, вимоги гольдеровості функцій, індекса.*

*Ключові слова: Задача Римана, рівняння, факторизація, кільце, проектор, факторизаційна пара.*

T.G. VOYTIK

Odessa National Maritime University

G.S. POLETAEV

Odessa State Academy of Buildings and Architecture

S.A. YATSENKO

Odessa National Maritime Academy

## PROJECTOR APPROACH IN THE TYPE RELATING TO RIEMANN-HILBERT-PRIVOLOV PROBLEM FOR THE RING OF RATIONAL FUNCTIONS

*A problem was posted and solved with correctly factorable rational coefficient. It was posed from the theory of analytical function such as Riemann-Hilbert-Privolov problem. The method is based on the theory, which is derived from the second author's result for corresponding of abstract equations in ring, with special factorization pair of subrings. The projections are used on a subrings and factorization of coefficient, decomposition into a sum of simple rational fractions. Several specific illustrative examples are given for problems solution. Procedure is free from Fourier integral and the Cauchy integral theory, Holder requirements, and index.*

*Keywords: the Riemann problem, equation, factorization, ring, projection, factorization pair.*

### Постановка проблемы

Известна важная роль теории задачи Римана (Римана-Гильберта, Римана-Гильберта-Привалова) и связанных с ней уравнений для аналитических функций. Эта задача возникает или используется в теоретических и прикладных разделах математики, механики, их приложениях. В том числе, в теории упругости, задачах о кручении. Возникает в теории некоторых видов дифференциальных и интегро-

дифференциальных уравнений, интегральных уравнений типа свёртки, при изучении соответствующих дифференциальных уравнений математической физики [1–12].

Важная роль теории уравнений, в частности, из задачи Римана–Гильберта и родственных обосновывает необходимость поиска и исследования новых задач и уравнений, которые могут использоваться для понимания свойств уже известных, а также при моделировании. Поиска общих упрощающих методов исследования, установления условий разрешимости, представления решений в замкнутой форме, при их существовании. В том числе, точных методов, минимально опирающихся на теорию функций комплексного переменного, свободных от аппарата теории интегралов Фурье и типа Коши. Таким образом, построение элементов метода нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по общему линейному уравнению, рассматриваемому ниже, является актуальным.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Существующие точные методы исследования задачи Римана–Гильберта восходят, в частности, к работам И.И. Привалова, Ф.Д. Гахова, Ю.И. Черского, М.Г. Крейна и другим. На связь теории интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов и этой задачей, впервые обратил внимание И.М. Рапопорт (1948). Среди работ, связанных с теорией задачи Римана–Гильберта, но посвящённых абстрактным уравнениям в ассоциативных кольцах со специальной парой подколец, а также реализациям их в конкретных кольцах, укажем [10–19]. В силу отмеченного в [1, С. 114], со ссылкой на книгу Н.И. Мухелишвили (1945), можно заключить, что, обычно, эту задачу решали, в основном, в предположении выполнения для соответствующих функций дополнительного условия Гёльдера на контуре. Часто применялся аппарат теории интеграла типа Коши, понятие индекса. В целом, основанные на применении теории функций комплексной переменной, аппарата теории интеграла типа Коши, подходы приводят к необходимости преодоления значительных аналитических трудностей. Не всегда оправданных. Новые идеи и результаты других возможных подходов к исследованию, в иных предположениях и без требования гёльдеровости функций, даны в [1]. Можно также пытаться применить соответствующие результаты из [10–14, 16, 17]. Публикации, в том числе [8], подтверждают сохранение интереса к использованию задачи Римана.

Наряду с другими, важен случай, когда в такого типа задаче Римана–Гильберта–Привалова коэффициенты являются рациональными функциями [1–5]. В [5], например, этот случай возникает в связи с исследованием дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами на оси и его редукцией. В рассматриваемой ситуации, от задачи Римана–Гильберта–Привалова можно перейти к родственной задаче, поставленной далее. При этом, считая искомые функции, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных. Однако, свободных от использования аппарата интегралов типа Коши, достаточно простых и исчерпывающих, подробно и строго изложенных методов исследования такого типа задач авторам не известно. До [19] отсутствовала, соответствующая предположениям, теорема существования с удобным представлением решений в замкнутой форме. Поэтому поиски путей упрощения элементов исследования рассматриваемой в статье ниже родственной задачи, поставленной в общем виде, актуальны. Актуально и накопление решений конкретных примеров, решений задачи с общим линейным уравнением – краевым условием.

#### Формулирование цели исследования

Целью работы является обоснование проекторного метода, упрощающего теорию родственной типа Римана–Гильберта–Привалова задачи, постановка которой сформулирована далее. А именно, задачи о нахождении двух рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по общему линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом на вещественной оси. Цель достигается посредством использования соответствующих общих результатов и общей теоремы существования с формулами решений из [10, 11, 15–19]. В качестве контура здесь выступает сомкнутая вещественная ось [1]. Положения работы развивают и дополняют [18, 19].

#### Изложение основного материала исследования

Общие положения, обозначения и определения. В сообщении к изучению рассматриваемой ниже задачи применяется решение нелинейной задачи факторизации по подкольцам и другие положения. Используя [10–14], напомним следующее.

*Определение.* Всякое кольцо  $R$  с единицей  $e$ , рассматриваемое вместе с его фиксированной факторизационной парой подколец  $(R^+, R^-) [\equiv (R^-, R^+)]$ , будем называть "кольцом с факторизационной парой". Кратко, кольцом с *ФП*.

Будем говорить, что элемент  $a \in R$  допускает в коммутативном кольце  $R$  факторизацию по факторизационной паре  $(R^+, R^-)$ , если существуют элементы  $r^+ \in R^+, s^0 \in R^0, t^- \in R^-$  такие, что:

$$a = r^+ s^0 t^- \quad (1)$$

Факторизация (1) называется:

- *правильной факторизацией (п.ф.)*, если  $r^+ \in R^+, s^0 \in R^0, t^- \in R^-$  – правильные элементы [10–14];
- *нормированной факторизацией (н.ф.)*, если  $t^0 = r^0 = e$ ;

– нормированной правильной факторизацией (н.п.ф.), если она является (п.ф.) и  $t^0 = r^0 = e$ .

Известно [12, 10,11,13,14], что правильную факторизацию элемента из  $R$  по ФП  $(R^+, R^-)$  можно нормировать.

Нормированная правильная факторизация единственна.

Кольцо  $\mathfrak{R}_r$  с факторизационной парой  $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$ . Обозначим через  $\mathfrak{R}_r$  совокупность всех рациональных функций, вообще, комплексного переменного  $z \in C$ , все полюсы которых конечны и не вещественны. Пределы функций из  $\mathfrak{R}_r$  на бесконечности конечны. Пусть  $\mathfrak{R}_r^+ (\mathfrak{R}_r^-)$  – совокупности функций из  $\mathfrak{R}_r$ , все полюсы которых расположены внутри нижней (верхней) полуплоскости  $\Pi_- (\Pi_+)$ , соответственно (Ср. [1]; С. 13–14). Проверяется, что  $\mathfrak{R}_r$  – кольцо с мультипликативной единицей  $e = f(z) := 1, z \in C$  относительно обычных операций сложения и умножения функций, а  $\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-$  – его подкольца с единицей. Проекторы на подкольца:  $\mathfrak{R}_r \rightarrow \mathfrak{R}_r^\mp$  обозначим  $P^\mp$ , соответственно. Эти проекторы коммутирующие. Проектор  $P^+$  (проектор  $P^-$ ) каждой функции из  $\mathfrak{R}_r$  ставит в соответствие часть её разложения в сумму простейших дробей первого и второго типов с полюсами лишь из  $\Pi_-$  (из  $\Pi_+$ ), соответственно. Полагаем:

$$P^0 = P^+P^-, P_+ = P^+ - P^0, P_- = P^- - P^0, \mathfrak{R}_r^{\mp,0} = P^{\mp,0}(\mathfrak{R}_r), \text{ где } \mathfrak{R}_r^0 = \mathfrak{R}_r^+ \cap \mathfrak{R}_r^-.$$

Можно показать, что  $\mathfrak{R}_r$  является кольцом с факторизационной парой  $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$ .

Постановка задачи и формулы решения.

Задача. Для заданных рациональных функций – коэффициентов  $A(x), B(x), -\infty < x < \infty$ , найти пару рациональных функций  $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_-(z) \in (\mathfrak{R}_r)_-$ , из  $\mathfrak{R}_r$  все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй – в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси общему линейному уравнению:

$$\alpha A(x)X^+(x) + \beta Y_-(x) = \gamma B(x); x \in \{-\infty; \infty\}; \alpha\beta \neq 0; \alpha, \beta, \gamma \in C. \tag{2}$$

Значения функций на бесконечности принимается равным соответствующим пределам.

При решении задачи в  $\mathfrak{R}_r$  будем исходить из очевидной возможности продолжения каждой из функций и, следовательно, всего соотношения (2) на всю комплексную плоскость заменой вещественного переменного  $x$  комплексной переменной  $z$ , не выходя из соответствующего подкласса рациональных функций. Так вместо (2) возникает уравнение:

$$\alpha A(z)X^+(z) + \beta Y_-(z) = \gamma B(z); z \in C; \alpha\beta \neq 0; \alpha, \beta, \gamma \in C. \tag{3}$$

где, в силу предположений:  $A(z), B(z) \in \mathfrak{R}_r, z \in C$  – известные функции, а  $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_-(z) \in (\mathfrak{R}_r)_-$ , – искомые.

Всякая, являющаяся решением (3), пара рациональных функций  $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_-(z) \in (\mathfrak{R}_r)_-$ , сужением на сомкнутую вещественную ось, порождает искомое решение уравнения (2) и рассматриваемой задачи. Учитывая возможность реализации в кольце  $R = \mathfrak{R}_r$  с ФП  $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$  результатов из [10–11] (см. также [19]) и очевидные преобразования в соответствующих предположениях, получены такие формулы для построения решения уравнений (3), (2) и поставленной задачи [15–19]:

$$X^+(z) = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \tilde{A}^+(z)S^0P^+[T^-(z)B^+(z)], Y_-(z) = \frac{\gamma}{\beta} \{B_-(z) + [T^-(z)]^{-1} \cdot P_-[T^-(z)B^+(z)]\}; \tag{4}$$

где

$$X^+(x) = X^+(z) \downarrow_{z=x}, Y_-(x) = Y_-(z) \downarrow_{z=x}, -\infty < x < \infty; \tag{5}$$

$$A^{-1}(z) = \Gamma^+(z)S^0T^-(z); z \in C.$$

Иллюстративные примеры. Решим задачу, поставленную по краевому условию на сомкнутой вещественной оси, заданному уравнением (2):

$$1) \text{ при } A(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 + 1}; B(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4)(x + 5i)}; \alpha = 50, \beta = 25, \gamma = 7000.$$

Тогда,

$$A^{-1}(z) = \frac{z+i}{z+3i} \cdot 1 \cdot \frac{z-i}{z-3i}.$$

Отсюда, полагая  $\tilde{A}^+ \equiv \Gamma^+$ , имеем:

$$S^0 = 1; \tilde{A}^+(z) = \frac{z+i}{z+3i}; T^-(z) = \frac{z-i}{z-3i}; (T^-(z))^{-1} = \frac{z-3i}{z-i}.$$

Разложение для  $B(z)$  получаем в виде:

$$B(z) = -\frac{1}{4(z+2i)} + \frac{3}{28(z-2i)} + \frac{8}{7(z+5i)}.$$

Поэтому

$$B^+(z) = \frac{1}{28} \cdot \frac{25z+29i}{(z+2i)(z+5i)}; B_-(z) = \frac{3}{28(z-2i)}.$$

Реализуя формулы (4), находим выражение для решения:

$$X^+(z) = \frac{99z^2 + 234zi - 135}{z^3 + 10z^2i - 31z - 30i}, Y_-(z) = 2 \cdot \frac{41z - 67i}{z^2 - 3zi - 2}. \quad (6)$$

Сравнительные решения, подходами из [2] и предложенным в [15-17], привели в подобном примере к одинаковым результатам. Причём предложенный подход, основанный на результатах [10-11], проще.

В следующих примерах, рассмотренных в работе [18], установлено, что

$$2) \text{ при } A(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 + 1}; B(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \alpha = 5, \beta = 100, \gamma = 40, \text{ будет}$$

$$X^+(z) = 4 \cdot \frac{2z+i}{z+3i}; Y_-(z) = \frac{i}{z-i};$$

$$3) \text{ при } A(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 9}; B(x) = 1; \alpha = 5; \beta = 1; \gamma = 10, \text{ найдено}$$

$$X^+(z) = 2 \cdot \frac{z+3i}{z+i}; Y_-(z) = -\frac{20i}{z-3i};$$

$$4) \text{ при } A(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}; B(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x + 4i)}; \alpha = \beta = 1; \gamma = 210, \text{ получено}$$

$$X^+(z) = \frac{151z^2 + 380zi - 229}{(z+2i)(z+3i)(z+4i)}; Y_-(z) = \frac{59z - 97i}{(z-i)(z-3i)}.$$

### Выводы

При сделанных предположениях, от задачи Римана–Гильберта–Привалова можно перейти к родственной задаче, считая искомые функции, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных. Эта родственная задача с правильно факторизуемым рациональным коэффициентом поставлена и решена. Её решение, в соответствующих предположениях построено в явном виде. Построения проще. Свободны от опирающихся на теорию интеграла типа Коши, понятие индекса, условие Гёльдера, восходящих к Ф.Д. Гахову и другим. Не требуют, непосредственно, аппарат преобразований Фурье. Базируются на результатах второго автора для соответствующих уравнений в кольце со специальной факторизационной парой подколец. Используются основные положения теории колец и функционального анализа; - проекторы, а также возможность непосредственно провести требуемую для применения, установленного в [11, 12, 16, 17] факторизацию. Результаты имеют теоретическое и практическое (при решении конкретных примеров) значение.

Отметим в заключение, что возможности исследований и приложений для родственных задач, уравнений, открывающиеся приближением рациональными для коэффициентов из других классов функций, ещё ожидают своей реализации. В перспективе, в частности, остаются исследования случаев, когда факторизация не является правильной, а также связи решений, соответствующих произвольным и специальным правым частям. Накопление конкретных примеров создаёт часть базы дальнейшего изучения свойств задачи и её решений. Отметим, что большая часть материала статьи подготовлена профессором Г.С. Полетаевым, иллюстративные примеры и выводы подготовлены при участии всех соавторов.

#### Список использованной литературы

1. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М.Г. Крейн // Успехи мат. наук. — 1958. — № 13, Вып. 5(83). — С. 3—120.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1963. — 640 с.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
4. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. — М.: Наука, 1978. — 296 с.
5. Попов Г.Я. Метод факторизации и его численная реализация. Учебное пособие / Г.Я. Попов, П.В. Керекеша, В.Е. Круглов; под ред. проф. Г.Я. Попова. — Одесса: Одесский гос. университет, 1976. — 82 с.
6. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г.Я. Попов. — Киев-Одесса: ВШ, 1982. — 168 с.
7. Мхитарян С.М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учётом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях / С.М. Мхитарян // Изв. АН Армянской ССР. Серия: Механика. — 1968. — № XXI. — №5—6. — С. 3—20.
8. Акоюн В.Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом / В.Н. Акоюн, Л.Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тезисы докладов международной научной конференции (Одесса, 2013 г.). — Одесса, 2013. — С. 12.
9. Черский Ю.И., Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.
10. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев. — Киев, 1988. — 20 с. — (Препринт / АН УССР. Институт математики: 88.31).
11. Полетаев Г.С. Об однопроекторн. II порядка уравн. с правильно факторизуемыми коэфф. в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Вестник ХГТУ. — 2000. — № 2 (8). — С. 191—195.
12. McNabb A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples / A. McNabb, A. Schumitzky // J. Functional Analysis. — 1972. — Vol. 9. — № 3. — P. 262—295.
13. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Украинский математический журнал. — 1991. — Т. 43. — № 9. — С. 1201—1213.
14. Полетаев Г.С. Некоторые результаты о парных уравнениях в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев // Вісник Харківського національного ун-ту. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. — 2002. — Вып. 52. — № 582. — С. 143—149.
15. Полетаев Г.С. Нахождение двух рациональных функций с полюсами из полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Г.С. Полетаев, Т.Г. Войтик, С.А. Яценко // Глушковські читання: Всеукраїнська науково-практична конференція (Київ, 10-13 вересня 2013 р.). — К.: НТУУ "КПІ", 2013. — С. 74—77.
16. Полетаев Г.С. Подвид двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемым коэффициентом в кольце с факторизационной парой // XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation": Abstracts of conference reports (Kiev, Ukraine. May 27-29, 2015). — К.: НТУУ "КПІ", 2015. — С. 46.
17. Полетаев Г.С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары / Г.С. Полетаев // Математика в сучасному технічному університеті: Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 24-25 грудня 2015 р.) — К.: НТУУ "КПІ", 2015. — С. 85—88.
18. Войтик Т.Г. Проекторный поход к нахождению двух рациональных линейно связанных на оси функций с полюсами из разных полуплоскостей / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // Необратимые процессы в природе и технике: Труды 8-ой Всероссийской конференции. Часть II. (Москва, 27-29 января 2015 г.). — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. — С. 125—129.
19. Войтик Т.Г. Метод нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // Наукові нотатки. — Луцьк: Луцький НТУ, 2016. — Вып. 54. — С. 65 — 70.

УДК 621.384.6

В.И. ДУБИНКО, А.С. МАЗМАНИШВИЛИ

Национальный Научный Центр «ХФТИ» НАНУ

Д.В. ЛАПТЕВ

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАНУ

## КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ В ДВУМЕРНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

*Рассмотрено движение волновой функции частицы в параболическом потенциале, центр которого произвольным образом изменяется во времени. Построены одномерная и двумерная функции Грина эволюционного уравнения Шредингера. Для выбранных видов возмущения потенциала приведены примеры эволюции волновой функции.*

*Ключевые слова: уравнение Шредингера на плоскости, параболический потенциал, эволюция волновой функции.*

В.І. ДУБИНКО, О.С. МАЗМАНІШВІЛІ

Національний Науковий Центр «ХФТІ» НАНУ

Д.В. ЛАПТЕВ

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАНУ

## КВАНТОВА ДИНАМІКА ХВИЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ У ДВОВИМІРНОМУ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ПАРАБОЛІЧНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ

*Розглянуто рух хвильової функції частинки в параболическом потенциале, центр якого довільним чином змінюється з часом. Побудовані одномерна і двовимірна функції Гріна еволюційного рівняння Шредингера. Для обраних видів збурення потенціалу наведені приклади еволюції хвильової функції.*

*Ключові слова: рівняння Шредингера на площині, параболический потенциал, еволюція хвильової функції.*

V.I. DUBINKO, A.S. MAZMANISHVILI

National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology" NASU

D.V. LAPTEV

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering NASU

## QUANTUM DYNAMICS OF WAVE FUNCTIONS IN A TWO-DIMENSIONAL NONSTATIONARY PARABOLIC POTENTIAL

*Evolution of the wave function of a quantum particle in a two-dimensional parabolic potential with a center changing its place in time. One and two-dimensional Green functions for the corresponding Schrödinger equation are derived. Some examples of the wave function evolution are presented for the cases important for practical applications.*

*Keywords: Schrödinger equation on the plane, parabolic potential, wave function evolution.*

### Постановка задачи

Рассматривается квантово-механическая задача о движении частицы в квадратичном потенциале, центр которого произвольным образом изменяется во времени и описывается заданной квадратично-интегрируемой функцией  $f(t)$ . Подобная постановка возникает в задачах, когда смещение  $f(t)$  представляет собой траекторию одномерного или двумерного процесса, моделирующего изменения потенциала при движении частицы. Такое положение реализуется, в частности, при движении электрона вдоль кристаллической оси [1, 2]. В этом случае роль времени  $t$  в задаче играет глубина проникновения частицы, а функция же  $f(t)$ , описывающая смещение центра тяжести, описывает случайные или вынужденные колебания кристаллической решетки. Другой важный пример связан с вычислением скорости химической реакции вблизи локализованных ангармонических вибраций атомов, вызванных термическими флуктуациями или внешним воздействием [3, 4]. В этом случае, вследствие большой амплитуды локализованных ангармонических вибраций, положение центра потенциальной ямы, в которой находится частица, уже не может считаться неподвижным, что требует пересмотра задачи о вычислении волновой функции с учетом динамики центра потенциальной ямы.

Задача о динамике волновой функции в одномерном возмущенном параболическом потенциале была рассмотрена в [5]. В настоящей работе изучен двумерный случай, когда центр потенциальной ямы подвержен двумерным возмущениям на плоскости. Построена двумерная функции Грина эволюционного уравнения Шредингера в аналитическом виде. Для выбранного вида возмущения потенциала приведен пример эволюции волновой функции.

**Одномерный случай**

Математически в одномерном случае постановка задачи состоит в следующем. Для заданных частоты  $\omega_x$  и функции  $f_x(t)$  потенциал  $V(t)$  имеет вид

$$V(t) = \frac{1}{2} m \omega_x^2 [x - f_x(t)]^2. \tag{1}$$

Пусть далее  $G_x(x, t; x_0, t_0)$  – квадратично-интегрируемая функция, которая подчинена уравнению Шредингера ( $\hbar$  – постоянная Планка,  $m$  – масса частицы)

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} G_x = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_x + \frac{1}{2} m \omega_x^2 [x - f_x(t)]^2 G_x \tag{2}$$

и удовлетворяет начальному условию  $G_x(x, t_0; x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$ .

Функция  $G_x(x, t; x_0, t_0)$  является функцией Грина уравнения (2). С точки зрения квантовой механики эта функция представляет собой амплитуду вероятности перехода из состояния в момент времени  $t = t_0$ , характеризуемого координатой  $x_0$ , в состояние в момент  $t$ , характеризуемое координатой  $x$ .

Можно убедиться, что если решение уравнения (2) имеет гауссов вид для выбранного момента времени, то его гауссова форма относительно переменной  $x$  сохранится для любого другого момента времени. Поэтому будем искать решение уравнения (2) в виде

$$G_x(x, t; x_0, t_0) = \exp[C_0(t) + x C_1(t) + x^2 C_2(t)]$$

с некоторыми зависящими от времени функциями  $C_0(t), C_1(t), C_2(t)$ . Эти функции выбираются так, чтобы удовлетворить уравнению Шредингера и начальному условию. В силу единственности начально-краевой задачи, построенная таким образом функция будет искомым решением. Подстановка функции  $G_x$  в уравнение (2) приводит к выражению:

$$i\hbar(\dot{C}_0(t) + x\dot{C}_1(t) + x^2\dot{C}_2(t)) = \frac{\hbar^2}{2m} [(C_1(t) + 2xC_2(t))^2 + 2C_2(t)] - \frac{1}{2} m \omega_x^2 [x - f_x(t)]^2.$$

Требование тождественного совпадения получившихся в правой и левой частях этого выражения квадратных трехчленов, приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для вспомогательных функций  $C_0(t), C_1(t)$  и  $C_2(t)$ :

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{C}_0 &= \frac{\hbar^2}{2m} (2C_2 + C_1^2) - \frac{1}{2} m \omega_x^2 f_x^2(t), \\ i\hbar\dot{C}_1 &= \frac{2\hbar^2}{m} C_1 C_2 + m \omega_x^2 f_x(t), \\ i\hbar\dot{C}_2 &= \frac{2\hbar^2}{m} C_2^2 - \frac{1}{2} m \omega_x^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Система уравнений для функций  $C_0(t), C_1(t)$  и  $C_2(t)$  элементарно решается ввиду того, что допускает расщепление искомым функций. В результате приходим к решению уравнения (2):

$$\begin{aligned} G_x(x, t; x_0, 0) &= \left( \frac{m \omega_x e^{i \omega_x t}}{\pi \hbar (1 - e^{-2i \omega_x t})} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{m \omega_x}{2 \hbar} (x^2 - x_0^2) + i \frac{m \omega_x}{2 \hbar} \int_0^t f_x^2(\tau) d\tau \right) \times \\ &\times \exp \left( -i \frac{\hbar}{2m} \int_0^t F_x^2(\tau) d\tau + x F_x(t) + \frac{m \omega_x}{\hbar (1 - e^{-2i \omega_x t})} \left[ x - e^{-i \omega_x t} x_0 - i \frac{\hbar}{m} e^{-i \omega_x t} \int_0^t F_x(\tau) e^{i \omega_x \tau} d\tau \right]^2 \right), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$F_x(t) = -i \frac{m \omega_x^2}{\hbar} \exp(i \omega_x t) \int_0^t f_x(\tau) \exp(-i \omega_x \tau) d\tau. \tag{4a}$$

Решение уравнения (2) с произвольным начальным условием  $\psi(x_0, 0)$  в момент  $t = 0$  находится на основе найденной функции Грина по формуле, аналогичной формуле Смолуховского-Колмогорова. В частности, после вычисления интеграла с ядром  $G_x(x, t; x_0, 0)$  и начальной волновой функцией

$$\psi(x_0, 0) = \left( \frac{m \omega_x}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left[ -\frac{m \omega_x}{2 \hbar} (x_0 - S_x)^2 \right], \tag{5}$$

центрированной около заданной начальной координаты  $S_x$ , получим

$$\psi(x,t) = \left( \frac{m\omega_x}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left( -\frac{m\omega_x}{2\hbar} \left[ x - S_x \cos(\omega_x t) - \omega_x \int_0^t f_x(\tau) \sin(\omega_x t - \omega_x \tau) d\tau \right]^2 + i \frac{\omega_x^2}{2\hbar} J_x \right), \quad (6)$$

где  $J_x$  – набег фазы результирующей волновой функции к моменту  $t$ .

Если при  $t=0$  частица находилась в состоянии с волновой функцией (5), то к моменту  $t$  для плотности распределения вероятностей  $p(x,t) = |\psi(x,t)|^2$  найдем

$$p(x,t) = \left( \frac{m\omega_x}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{m\omega_x}{\hbar} \left[ x - S_x \cos(\omega_x t) - \omega_x \int_0^t f_x(\tau) \sin[\omega_x(t-\tau)] d\tau \right]^2 \right). \quad (7)$$

### Двумерный случай

В случае двух переменных на плоскости можно получить точное решение соответствующего уравнения Шредингера, явный вид которого в таком потенциале и его обобщениях позволяет проанализировать динамику волновых функций и связанных с ней квантовомеханических средних. Далее рассмотрим потенциал

$$V(x,y,t) = \frac{1}{2} m\omega_x^2 [x - f_x(t)]^2 + \frac{1}{2} m\omega_y^2 [y - f_y(t)]^2 \quad (8)$$

с собственными частотами  $\omega_x, \omega_y$  и возмущениями  $f_x(t), f_y(t)$ .

В этом случае для волновой функции (функции Грина)  $G = G(x, y, t; x_0, y_0, 0)$  уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} G = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G + \frac{1}{2} m \left[ \omega_x^2 (x - f_x(t))^2 + \omega_y^2 (y - f_y(t))^2 \right] G. \quad (9)$$

Физическое содержание волновой функции  $G$  в том, что она описывает амплитуду перехода из состояния в момент  $t_0 = 0$ , характеризуемого координатами  $x_0$  и  $y_0$ , в состояние в момент  $t$ , характеризуемое координатами  $x$  и  $y$ . Далее примем, что для координат  $x$  и  $y$  остаются справедливыми уравнения Шредингера парциально для функций Грина  $G_x = G_x(x, t; x_0, 0)$  и  $G_y = G_y(y, t; y_0, 0)$ : Тогда убеждаемся в том, что

$$G(x, y, t; x_0, y_0, 0) = G_x(x, t; x_0, 0) \cdot G_y(y, t; y_0, 0). \quad (10)$$

Используя выражение (4) как  $x$ -ю часть функции Грина, аналогично можно (с помощью замены  $x$  на  $y$  в нужных местах) записать выражение для  $G_y(y, t; y_0, 0)$ . Объединяя выражения (4) для  $G_x$  и  $G_y$ , получим

$$\begin{aligned} G(x, y, t; x_0, y_0, 0) &= \left( \frac{m\omega_x e^{i\omega_x t}}{\pi\hbar(1 - e^{2i\omega_x t})} \right)^{1/2} \left( \frac{m\omega_y e^{i\omega_y t}}{\pi\hbar(1 - e^{2i\omega_y t})} \right)^{1/2} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{m\omega_x}{2\hbar} (x^2 - x_0^2) - \frac{m\omega_y}{2\hbar} (y^2 - y_0^2) + i \frac{m\omega_x^2}{2\hbar} \int_0^t f_x^2(\tau) d\tau + i \frac{m\omega_y^2}{2\hbar} \int_0^t f_y^2(\tau) d\tau \right) \times \\ &\times \exp \left( -i \frac{\hbar}{2m} \int_0^t F_x^2(\tau) d\tau + x F_x(t) + \frac{m\omega_x}{\hbar(1 - e^{-2i\omega_x t})} \left[ x - e^{-i\omega_x t} x_0 - i \frac{\hbar}{m} e^{-i\omega_x t} \int_0^t F_x(\tau) e^{i\omega_x \tau} d\tau \right]^2 \right) \times \\ &\times \exp \left( -i \frac{\hbar}{2m} \int_0^t F_y^2(\tau) d\tau + y F_y(t) + \frac{m\omega_y}{\hbar(1 - e^{-2i\omega_y t})} \left[ y - e^{-i\omega_y t} y_0 - i \frac{\hbar}{m} e^{-i\omega_y t} \int_0^t F_y(\tau) e^{i\omega_y \tau} d\tau \right]^2 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

при этом



$$F_x(t) = -i \frac{m\omega_x^2}{\hbar} \exp(i\omega_x t) \int_0^t f_x(\tau) \exp(-i\omega_x \tau) d\tau$$

$$F_y(t) = -i \frac{m\omega_y^2}{\hbar} \exp(i\omega_y t) \int_0^t f_y(\tau) \exp(-i\omega_y \tau) d\tau$$
(11a)

**Численные результаты и их обсуждение**

Пусть при  $t = 0$  частица находилась в состоянии с волновой функцией

$$\psi(x_0, y_0, 0) = \left(\frac{m\omega_x}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{m\omega_y}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega_x}{2\hbar}(x_0 - S_x)^2 - \frac{m\omega_y}{2\hbar}(y_0 - S_y)^2\right],$$
(12)

с центром в точке  $(S_x, S_y)$ . Тогда к моменту  $t$  для плотности вероятностей  $p(x, y, t) = |\psi(x, y, t)|^2$  найдем

$$p(x, y, t) = \left(\frac{m\omega_x}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \left(\frac{m\omega_y}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{m\omega_x}{\hbar} \left[x - S_x \cos(\omega_x t) - \omega_x \int_0^t f_x(\tau) \sin[\omega_x(t - \tau)] d\tau\right]^2 - \frac{m\omega_y}{\hbar} \left[y - S_y \cos(\omega_y t) - \omega_y \int_0^t f_y(\tau) \sin[\omega_y(t - \tau)] d\tau\right]^2\right)$$
(13)

Действие смещения потенциала на волновую функцию можно видеть на примере квантово-механических величин (среднего значения координат, дисперсии) и её общего вида.

Первые моменты плотности распределения  $p(x, y, t)$  следующие

$$\langle x(t) \rangle = S_x \cos(\omega_x t) + \omega_x \int_0^t f_x(\tau) \sin[\omega_x(t - \tau)] d\tau,$$

$$\langle y(t) \rangle = S_y \cos(\omega_y t) + \omega_y \int_0^t f_y(\tau) \sin[\omega_y(t - \tau)] d\tau,$$
(14)

а соответствующие им дисперсии

$$\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_x}, \quad \langle y^2(t) \rangle - \langle y(t) \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_y}.$$
(15)

Формула (15) показывает, что смещение центра не влияет на расплывание гауссового волнового пакета. Стартуя из точки  $(S_x, S_y)$ , центр отслеживает возмущающее действие двумерного фактора  $(f_x(t), f_y(t))$  согласно (11a). Также из (14) видно, что возможен эффект резонанса. Если  $f_x(t)$  или  $f_y(t)$  выбраны с частотой, близкой к соответствующей собственной частоте волновой функции, связанной с потенциалом  $V(x, y, t)$ , то будет иметь место линейное нарастание амплитуды колебаний центра пакета. Например, при  $f_x(t) = 2A \cos(\omega_x t)$  имеем  $\langle x(t) \rangle = S_x \cos(\omega_x t) + A \omega_x t \sin(\omega_x t)$  и аналогично для  $\langle y(t) \rangle$ , т.е. наличие гармоники в вынуждающей силе приводит к неограниченному размаху колебаний пакета как целого.

Рассмотрим пример функций, возмущающих центр потенциала, следующего вида  $f_x(t) = \sin(1.002\omega_x t)$ ,  $f_y(t) = 1.5 \cos(0.998\omega_y t)$ . В качестве начального условия принято, что центр пакета находится в начале координат,  $S_x = S_y = 0$ . Расчеты выполнены для интервала  $0 \leq t \leq 15$ , при этом было принято  $\hbar = m = 1$ .

На рис. 1 приведены функции возмущения  $f_x(t), f_y(t)$ .

На рис. 2 показаны отклики  $\Phi_x(t) = \omega_x \int_0^t f_x(\tau) \sin[\omega_x(t - \tau)] d\tau$  и  $\Phi_y(t) = \omega_y \int_0^t f_y(\tau) \sin[\omega_y(t - \tau)] d\tau$ , описывающие смещение центра волнового пакета согласно (14) при  $\omega_x = \omega_y = 1$ .

На рис. 3 приведена фазовая карта откликов  $\Phi_x(t)$  и  $\Phi_y(t)$ .

На рис. 4 показана последовательность из 40 плотностей распределения вероятностей  $p(x, y)$  на временном интервале  $0 \leq t \leq 15$  для моментов времени, взятых с шагом  $\Delta t = 0.36$ .

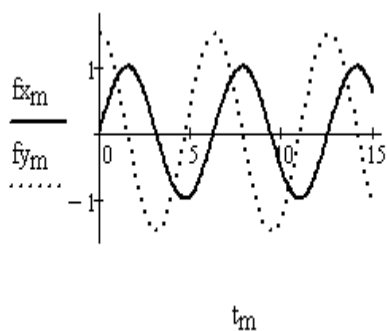


Рис. 1. Воздействие  $f_x(t), f_y(t)$

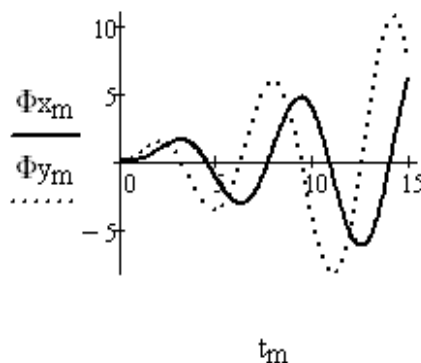


Рис. 2. Движение центра волнового пакета  $\Phi_x(t), \Phi_y(t)$

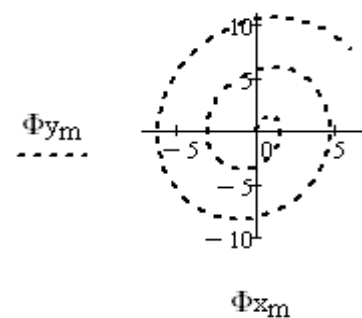


Рис. 3. Фазовая карта центра эволюции волнового пакета  $\Phi_x(t), \Phi_y(t)$

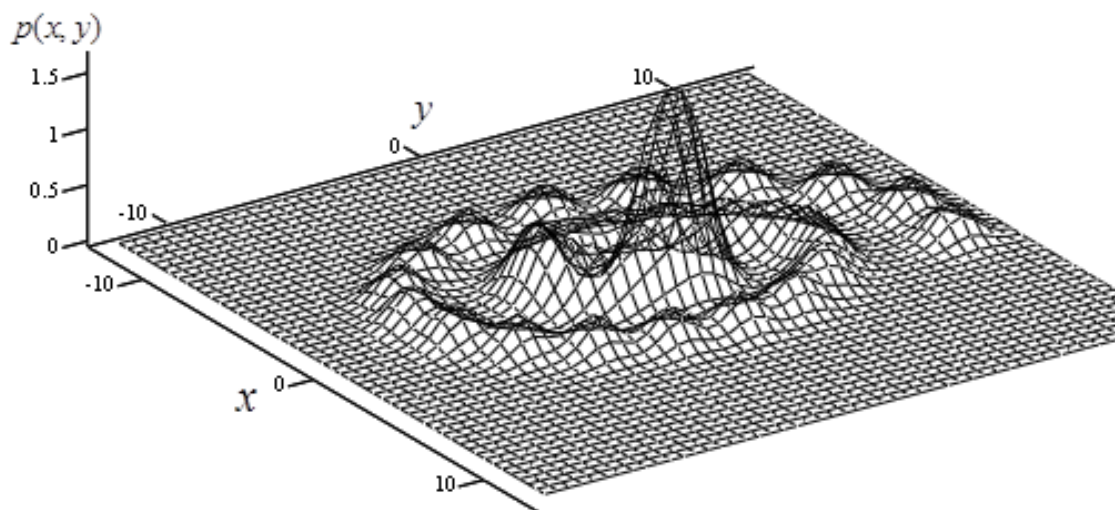


Рис. 4. Эволюция плотности распределения вероятностей

### Выводы

В работе рассмотрен двумерный параболический потенциал, центр которого произвольным образом возмущается с течением времени, и движение волновой функции частицы в нем. Построено аналитическое выражение для решения уравнения Шредингера в одномерном и двумерном случае. Проанализирована эволюция волновой функции частицы. Приведен численный пример.

### Список использованной литературы

1. Соколов А.А., Лоскутов Ю.Т., Тернов И.М. Квантовая механика / М.: Наука, 1962. – 581 с.
2. Ахиезер А.И. Электродинамика высоких энергий в веществе / М.: Наука. 1993. – 344 с.
3. Dubinko V.I., Selyshchev P.A., Archilla J.F.R. Reaction-rate theory with account of the crystal anharmonicity, Phys. Rev. E 83 (4), 2011. – 041124-13.
4. Барышевский В.Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях / Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.
5. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / К.: Наукова Думка, 1987. – 224 с.

УДК 517.91:532.2

О.М. ЛЕНЮК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

О.М. НІКІТИНА

Чернівецький факультет НТУ «ХПІ»

М.І. ШИНКАРИК

Тернопільський національний економічний університет

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ ТЕПЛА СКІНЧЕННИМ ГІБРИДНИМ ІНТЕГРАЛЬНИМ ПЕРЕТВОРЕННЯМ ТИПУ ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ-ФУР'Є НА СЕГМЕНТІ

*Розв'язана задача дифузії тепла на трискладовому сегменті  $(0, R_3]$ . Розв'язок побудовано за допомогою скінченного гібридного інтегрального перетворення, породженого на даному сегменті з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра-Бесселя-Фур'є.*

*Ключові слова: гібридний диференціальний оператор, задача дифузії тепла, гібридне інтегральне перетворення.*

О.М. ЛЕНЮК

Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

О.М. НИКИТИНА

Черновицкий факультет НТУ «ХПИ»

Н.И. ШИНКАРИК

Тернопольский национальный экономический университет

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ ТЕПЛА КОНЕЧНЫМ ГИБРИДНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ТИПА ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ-ФУРЬЕ НА СЕГМЕНТЕ

*Решена задача диффузии тепла на трехсоставном сегменте  $(0, R_3]$ . Решение построено при помощи конечного гибридного интегрального преобразования, порожденного на данном сегменте с двумя точками сопряжения гибридным дифференциальным оператором Лежандра-Бесселя-Фурье.*

*Ключевые слова: гибридный дифференциальный оператор, задача диффузии тепла, гибридное интегральное преобразование.*

O.M. LENYUK

Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych

O.M. NIKITINA

Chernivtsi department of National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

M.I. SHYNKARYK

Ternopil National Economic University

### SOLVING OF THE PROBLEM OF HEAT DIFFUSION BY FINITE HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF LEGENDRE-BESSEL-FOURIER TYPE ON THE SEGMENT

*The problem of heat diffusion on three-part segment  $(0, R_3]$  is solved. The solution is constructed by finite hybrid integral transform generated on the given segment with two points of conjugation by hybrid differential Legendre-Bessel-Fourier operator.*

*Key words: hybrid differential operator, problem of heat diffusion, hybrid integral transform.*

#### Постановка проблеми

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба у вивченні фізико-технічних характеристик даних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1 – 3], зокрема задача дифузії тепла математично приводить до побудови розв'язку системи рівнянь з частинними похідними параболічного типу. Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень. В [4] побудовано скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГП), породжене на сегменті  $(0, R_3]$  з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Лежандра-Бесселя-Фур'є.

**Мета статті**

У даній роботі побудовано розв'язок задачі дифузії тепла на трискладовому сегменті  $(0, R_3]$  з двома точками спряження за допомогою скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра-Бесселя-Фур'є.

**Основна частина**

Задача дифузії тепла в трискладовому сегменті математично приводить до побудови в області

$$D_2 = \{(t, r) : t > 0, r \in I_2\}, \quad I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty\}$$

обмеженого розв'язку системи рівнянь параболічного типу [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[u_1] &= f_1(t, r), \quad r \in (0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{v, \alpha}[u_2] &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}[u_3] &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2, R_3), \end{aligned} \quad (1)$$

за початковими умовами

$$\begin{aligned} u_1(t, r)|_{t=0} &= g_1(r), \quad r \in (0, R_1), \\ u_2(t, r)|_{t=0} &= g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ u_3(t, r)|_{t=0} &= g_3(r), \quad r \in (R_2, R_3), \end{aligned} \quad (2)$$

умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]_{r=R_k} = 0, \quad j, k = 1, 2, \quad (3)$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r \rightarrow 0} [r^\gamma u_1] = 0, \quad \left( \alpha_{22}^3 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^3 \right) u_3 |_{r=R_3} = 0. \quad (4)$$

Тут беруть участь узагальнений диференціальний оператор Лежандра  $\Lambda_{(\mu)}$ , диференціальний оператор Бесселя  $B_{v, \alpha}$ , диференціальний оператор Фур'є другого порядку (одновимірний диференціальний оператор Лапласа)  $d^2/dr^2$  [4].

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти:  $2\alpha + 1 > 0$ ,  $v \geq \alpha$ ;  $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$ ,  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$ ;  $\alpha_{22}^3 \geq 0$ ,  $\beta_{22}^3 \geq 0$ ,  $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0$ ;  $\alpha_{jm}^k \geq 0$ ,  $\beta_{jm}^k \geq 0$ ,  $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$ ,  $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$ ;  $j, m, k = 1, 2$ .

В [4] побудовано пряме  $H_{v, \alpha}^{(\mu)}$  й обернене  $H_{v, \alpha}^{-(\mu)}$  СГП, породжене на множині  $I_2$  ГДО

$$M_{v, \alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{v, \alpha} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 d^2/dr^2 :$$

$$H_{v, \alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r) v_{v, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n, \quad (5)$$

$$H_{v, \alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{v, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \equiv g(r) \quad (6)$$

та виведена основна тотожність СГП ГДО  $M_{v, \alpha}^{(\mu)}$ :

$$\begin{aligned} H_{v, \alpha}^{(\mu)}[M_{v, \alpha}^{(\mu)}[g(r)]] &= -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \tilde{g}_{in} + (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{v, \alpha; 3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) g_R + \\ &+ \sum_{k=1}^2 d_k [Z_{v, \alpha; 12}^{(\mu); k}(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{v, \alpha; 22}^{(\mu); k}(\beta_n) \omega_{1k}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $\theta(x)$  – одинична функція Гевісайда [1],  $\{v_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) : \|V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\|_{n=1}^{\infty} = 1\}$  – ортонормована система власних функцій відповідної задачі Штурма-Ліувілля [4],

$$\begin{aligned}
 V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta) &= \sum_{k=1}^3 \theta(r - R_{k-1}) \theta(R_k - r) V_{v,\alpha;k}^{(\mu)}(r, \beta), \quad R_0 = 0, \\
 V_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n) &= q_{\alpha}(\beta_n) c_{22} b_{3n}, \quad q_{\alpha}(\beta_n) = \frac{2}{\pi} \frac{c_{21}}{b_{2n}^{2\alpha} R_1^{2\alpha+1}}, \\
 V_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n) &= c_{22} b_{3n} [Z_{v_{1n};21}^{(\mu);11}(chR_1) \psi_{v,\alpha;12}^1(b_{2n}R_1, b_{2n}r) - Z_{v_{1n};11}^{(\mu);11}(chR_1) \psi_{v,\alpha;22}^1(b_{2n}R_1, b_{2n}r)], \\
 V_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n) &= \omega_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n) \cos(b_{3n}r) - \omega_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n) \sin(b_{3n}r), \\
 \psi_{v,\alpha;j}^1(b_{2n}R_1, b_{2n}r) &= u_{v,\alpha;j}^{11}(b_{2n}R_1) N_{v,\alpha}(b_{1n}r) - u_{v,\alpha;j}^{12}(b_{2n}R_1) J_{v,\alpha}(b_{1n}r), \\
 \delta_{v,\alpha;jk}(b_2R_1, b_2R_2) &= u_{v,\alpha;j}^{11}(b_2R_1) u_{v,\alpha;k}^{22}(b_2R_2) - u_{v,\alpha;j}^{12}(b_2R_1) u_{v,\alpha;k}^{21}(b_2R_2), \quad j, k = 1, 2, \\
 \delta_{j2}(b_3R_2, b_3R_3) &= v_{j2}^{21}(b_3R_2) v_{22}^{32}(b_3R_3) - v_{j2}^{22}(b_3R_2) v_{22}^{31}(b_3R_3), \quad j = 1, 2, \\
 a_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta) &= Z_{v_1;11}^{(\mu);11}(chR_1) \delta_{v,\alpha;2j}(b_2R_1, b_2R_2) - Z_{v_1;21}^{(\mu);11}(chR_1) \delta_{v,\alpha;1j}(b_2R_1, b_2R_2), \\
 b_{v,\alpha;j}(\beta) &= \delta_{22}(b_3R_2, b_3R_3) \delta_{v,\alpha;j1}(b_2R_1, b_2R_2) - \delta_{12}(b_3R_2, b_3R_3) \delta_{v,\alpha;j2}(b_2R_1, b_2R_2); \\
 \omega_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta_n) &= a_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n) v_{12}^{2j}(b_{3n}R_2) - a_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n) v_{22}^{2j}(b_{3n}R_2), \quad j = 1, 2, \\
 Z_{v,\alpha;m2}^{(\mu);k}(\beta_n) &= (\alpha_{m2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{m2}^k) v_{v,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r, \beta_n) |_{r=R_k}, \quad m, k = 1, 2, \\
 d_1 &= a_1^2 \sigma_1 shR_1 : c_{11}, d_2 = a_2^2 \sigma_2 R_2^{2\alpha+1} : c_{12}, b_j = a_j^{-1} (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, \quad k_j^2 \geq 0, \quad j = \overline{1,3}, \\
 a_1^2 \sigma_1 &= \frac{c_{11} c_{12} R_1^{2\alpha+1}}{c_{21} c_{22} R_2^{2\alpha+1}} \frac{1}{shR_1}, \quad a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{1}{R_1^{2\alpha+1}}, \quad a_3^2 \sigma_3 = 1,
 \end{aligned}$$

$P_{v_1}^{(\mu)}(chr)$  та  $L_{v_1}^{(\mu)}(chr)$  – узагальнені приєднані функції Лежандра, які утворюють фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра,  $v_1^* = -1/2 + ib_1$ ,  $J_{v,\alpha}(b_2r)$  та  $N_{v,\alpha}(b_2r)$  – дійсні функції Бесселя першого роду та другого роду відповідно, які утворюють фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя [4].

Знайдемо інтегральне зображення аналітичного розв'язку задачі (1) – (4) методом СГПІ типу Лежандра-Бесселя-Фур'є на трискладовому сегменті  $(0, R_3]$  з двома точками спряження, запровадженого правилами (5) – (7).

Запишемо систему (1) та початкові умови (2) у матричній формі:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)} \right) u_1(t, r) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 B_{v,\alpha} \right) u_2(t, r) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3^2 - a_3^2 \frac{d^2}{dr^2} \right) u_3(t, r) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(t, r) \\ f_2(t, r) \\ f_3(t, r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \\ u_3(t, r) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Інтегральний оператор  $H_{v,\alpha}^{(\mu)}$  згідно правила (5) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{v,\alpha}^{(\mu)}[\dots] = \left[ \int_0^{R_1} \dots v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_1 sh r dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \dots v_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_2 r^{2\alpha+1} dr \quad \int_{R_2}^{R_3} \dots v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_3 dr \right]. \quad (9)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (9) за правилом множення матриць до задачі (8). Внаслідок основної тотожності (7) отримуємо задачу Коші [6]:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta_n^2\right)\tilde{u}_n(t, \beta_n) + (k_1^2 + \gamma_1^2)\int_0^{R_1} u_1(t, r)v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n)\sigma_1 sh r dr + (k_2^2 + \gamma_2^2)\int_{R_1}^{R_2} u_2(t, r)v_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha+1} dr + (k_3^2 + \gamma_3^2)\int_{R_2}^{R_3} u_3(t, r)v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n)\sigma_3 dr = \tilde{f}_n(t),$$

$$\tilde{u}_n|_{t=0} = \tilde{g}_n(\beta_n).$$

Припустимо, що  $\max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\} = \gamma_1^2$ . Покладемо всюди  $k_1^2 = 0$ ,  $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0$ ,  $k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geq 0$ . Одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta_n^2 + \gamma_1^2\right)\tilde{u}_n(t) = \tilde{f}_n(t), \tag{10}$$

$$\tilde{u}_n(t)|_{t=0} = \tilde{g}_n,$$

$$\tilde{g}_n \equiv \int_0^{R_1} g_1(r)v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n)\sigma_1 sh r dr + \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)v_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha+1} dr + \int_{R_2}^{R_3} g_3(r)v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n)\sigma_3 dr.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (10) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = e^{-(\beta_n^2 + \gamma_1^2)t} \tilde{g}_n + \int_0^t e^{-(\beta_n^2 + \gamma_1^2)(t-\tau)} \tilde{f}_n(\tau) d\tau. \tag{11}$$

Інтегральний оператор  $H_{v,\alpha}^{-(\mu)}$  згідно правила (6), як обернений до (9), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{v,\alpha}^{-(\mu)}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} [\dots] v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} [\dots] v_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} [\dots] v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (12) за правилом множення матриць до матриці-елемента  $[\tilde{u}_n(t)]$ , де функція  $\tilde{u}_n(t)$  визначена формулою (11), одержуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1) – (4):

$$u_j(t, r) = \int_0^t \int_0^{R_1} H_{v,\alpha;j1}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho)[f_1(\tau, \rho) + g_1(\rho)\delta_+( \tau)]\sigma_1 sh \rho d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} H_{v,\alpha;j2}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho)[f_2(\tau, \rho) + g_2(\rho)\delta_+( \tau)]\sigma_2 r^{2\alpha+1} d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_2}^{R_3} H_{v,\alpha;j3}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho)[f_3(\tau, \rho) + g_3(\rho)\delta_+( \tau)]\sigma_3 d\rho d\tau, \quad j = 1, 2, 3. \tag{13}$$

У рівностях (13) беруть участь породжені неоднорідністю системи функції впливу:

$$H_{v,\alpha;jk}^{(\mu)}(t, r, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2 + \gamma_1^2)t} v_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(r, \beta_n) v_{v,\alpha;k}^{(\mu)}(r, \beta_n), \quad j, k = 1, 2, 3. \tag{14}$$

При цьому  $\delta_+(t)$  – дельта-функція Дірака, зосереджена в точці  $t = 0 +$ .

*Зауваження.* При  $\max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\} = \gamma_m^2$ ,  $k_j^2 = \gamma_m^2 - \gamma_j^2 \geq 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $m = 2, 3$ , й у формулі (14) вираз  $(\beta_n^2 + \gamma_1^2)$  міняється на вираз  $(\beta_n^2 + \gamma_m^2)$ .

**Висновок**

Побудований розв'язок (13) параболічної задачі (1) – (4) має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

**Список використаної літератури**

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. - К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
3. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.
4. Нікітіна О.М., Шинкарик М.І. Скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра-Бесселя-Фур'є на сегменті з двома точками спряження / О.М. Нікітіна, М.І. Шинкарик // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2015. Вып. 3 (54). – С. 47 – 51.
5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

УДК 519.28:620.179

В.О. ПАЩЕНКО

Дніпропетровський національний університет

### ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АСИМПТОТИКИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ НАПРУЖЕНОСТІ ПРЯМОКУТНОГО КОНТУРУ НАД НЕУШКОДЖЕНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ОРТОТРОПНОГО КОМПОЗИТА

*Застосовуючи асимптотичне розкладання функції Кельвіна щодо дійсної й уявної частин  $x, y$ -проекції характеристики відбиття ортотропного провідного композита, отримані аналітичні вирази для активної й реактивної складових тангенціальних проекцій усередненої за часом нормованої електричної напруженості прямокутного контуру (НЕНПК), зокрема, пилкоподібного збурення. Для таких виразів знайдені спрощені асимптотичні наближення, за допомогою яких – методом граничних елементів у безрозмірних координатах – чисельно модельовані розподілення активної складової  $x$ -проекції НЕНПК в площині, паралельній неушкодженій поверхні композита; отримані результати корисні, зокрема, при розміщенні вимірювальних контурів електромагнітного датчика.*

*Ключові слова: ортотропний провідний композит, прямокутний струмовий контур, електрична напруженість, характеристика відбиття, гранично-елементне моделювання.*

В.А. ПАЩЕНКО

Днепропетровский национальный университет

### ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КОНТУРА НАД НЕПОВРЕЖДЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ОРТОТРОПНОГО КОМПОЗИТА

*Применяя асимптотическое разложение функций Кельвина к действительной и мнимой частям  $x, y$ -проекций характеристики отражения ортотропного проводящего композита, получены аналитические выражения для активной и реактивной составляющих тангенциальных проекций усредненной по времени нормированной электрической напряженности прямоугольного контура (НЭНПК), в частности, пилоподобного возбуждения. Для таких выражений найдены упрощенные асимптотические приближения, с помощью которых – методом граничных элементов в безразмерных координатах – численно моделированы распределения активной составляющей  $x$ -проекций НЭНПК в плоскости, параллельной неповрежденной поверхности композита; полученные результаты полезны, в частности, при размещении измерительных контуров электромагнитного датчика.*

*Ключевые слова: ортотропный проводящий композит, прямоугольный токовый контур, электрическая напряженность, характеристика отражения, гранично-элементное моделирование.*

V.O. PASHCHENKO

Dnipropetrovsk National University

### THE BOUNDARY-ELEMENTS MODELLING OF THE ELECTRICAL INTENSITY ASYMPTOTE OF RECTANGULAR CONTOUR ABOVE THE INTACT SURFACE OF ORTHOTROPIC COMPOSITE

*Thanks to a using of Thomson's functions asymptotic approaches to real and imaginary parts of reflection characteristic  $x, y$ -projection of orthotropic composite analytical expressions for time averages of tangential projections of active and reactive component of normalized electrical intensity of rectangular contour (NEIRC) in particular of saw-tooth excitation have been obtained. For such expressions simplified asymptotic approaches have been found and with their help –the numerical modelling by the boundary elements method in dimensionless coordinates –of  $x$ -projections active component of NEIRC-distribution has been fulfilled in the plane that is parallel to the intact composite's surface; receipted result are useful in particular at disposal of measuring contours of electromagnetic gauge.*

*Keywords: orthotropic conductive composite, rectangular current-carrying contour, electrical intensity, reflection characteristic, boundary elements modelling.*

#### Постановка проблеми

Поширені композити з односпрямованим армуванням володіють – відносно його напрямку – симетрією властивостей і характеристик, зокрема, електропровідності, а тому називаються ортотропними (ортогонально-анізотропними). Основні дефекти структури ортотропних композитів – розриви (джгутів)



волоконин, які є найзагрозливішими для конструкційної цілісності виробів при розташуванні на поверхні, в разі досягнення критичних розмірів.

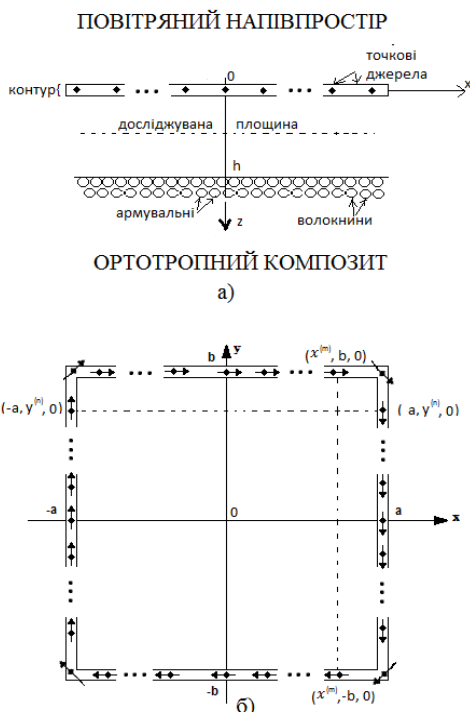
При зберіганні й експлуатації неруйнівний контроль їхньої цілісності доцільно проводити електромагнітним методом, який забезпечує простоту й локальність процедури, її оперативність і реалізованість у труднодоступних місцях. Поверхневі тріщини композита локально зменшують електричну напруженість, зокрема, в повітрі, що й реєструється електромагнітним датчиком, який сканує поверхню виробу.

Однак попередньо необхідно дослідити асимптотичне розподілення електричної напруженості над неушкодженою поверхнею.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Серед підходів до математичного моделювання просторово-часових розподілень характеристик електромагнітних полів переваги має метод граничних елементів (МГЕ) [1–3], який використовує вимірність, меншу на одиницю, ніж у розв’язуваній задачі, коли обчислення виконуються лише на частині границі, а не в усій області дослідження, зокрема, безконечній, як при застосуванні методу скінченних елементів. Необхідна умова застосування МГЕ – перехід від змішаної крайової задачі для диференціальних рівнянь до відповідних граничних інтегральних розв’язків. Тому на відміну від методів скінченних різниць і скінченних елементів МГЕ використовує інтегрування замість чисельного диференціювання, що зменшує інтенсивність шуму округлення, підвищує точність і ефективність обчислень.

Для розширюваної з часом області присутності нестационарного електромагнітного поля в повітрі,



**Рис. 1.** Електромагнітний контроль ортотропного композита прямокутним струмовим контуром, представленим точковими джерелами (  $\bullet \rightarrow$  ): а) поперечний перетин композита, вигляд збоку б) вигляд зверху

над плоскою поверхнею ортотропного композита, в роботі [4] отримані аналітично просторово-часові розподілення тангенціальних проекцій елементного векторного потенціалу. Виходячи з них, в [5] знайдено аналітичний вираз для просторово-часового розподілення  $x, y$ -проекцій електричної напруженості точкового джерела над поверхнею ортотропного композита. В безрозмірних координатах, індивідуальних для кожної тангенціальної проекції, аналітично отримані відповідні складові нормованої електричної напруженості [6], що дозволило коректно дискретизувати задачу моделювання, співмірити подання просторово-часових змінних і приховати фізичні константи в виразах для кроків дискретизації; також, використовуючи 6 типів 2-вимірних перетинів повітряного напівпростору, обґрунтувати для них засади гранично-елементного моделювання, яке стає реалізованим не лише на границі області дослідження.

**Формування мети дослідження**

Створення аналітичної моделі просторово-часового розподілення тангенціальних проекцій електричної напруженості прямокутного контуру стороннього струму над неушкодженою поверхнею ортотропного провідного композита та чисельне моделювання асимптотики усередненої в часі нормованої електричної напруженості пилкоподібного збурення в рівновіддалених точках горизонтального перетину повітряного напівпростору за допомогою метода граничних елементів у безрозмірних індивідуальних координатах.

**Викладання основного матеріалу дослідження**

1. Отримаємо аналітичні вирази для тангенціальних проекцій електричної напруженості, що створюється в  $(x, y, z < h)$ -точці повітряного напівпростору стороннім струмом густини  $J(t) = J_0 f(t)$ , де  $J_0$  – амплітуда,  $f(t)$  – обвідна ( $|f(t)| \leq 1$ ), прямокутного контуру. Контур – паралельний плоскій поверхні композита, від якого віддалений зазором  $h$ . Сторони контуру довжиною  $2a$  та  $2b$  орієнтовані, як і осі абсцис та ординат, поперек і вздовж напрямку армування відповідно (рис. 1).

$x$ -проекція електричної напруги, яка створюється парами однойменних точкових джерел, що належать протилежним сторонам контуру з координатами  $(x^{(m)}, -b, 0)$  і  $(x^{(m)}, b, 0)$ , де  $m \in \{0, M\}$ , дорівнює:

$$e_x(x, y, z, t) = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r_x^{(1)}(x^{(m)}, -b)} - \frac{1}{r_x^{(1)}(x^{(m)}, b)} \right] \cdot \frac{df}{dt} + \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \left[ \frac{h_x^R(t - r_x^{(2)}(x^{(m)}, -b)/c)}{r_x^{(2)}(x^{(m)}, -b)} - \frac{h_x^R(t - r_x^{(2)}(x^{(m)}, b)/c)}{r_x^{(2)}(x^{(m)}, b)} \right] \cdot \frac{df}{dt} \Big|_{t=0}, \quad (1)$$

причому  $\mu_0$  та  $c$  – магнітна проникність та швидкість розповсюдження поля в повітрі,  $t$  – час;

$$r_x^{(1)}(x^{(m)}, -b) = \sqrt{(x^{(m)} - x)^2 + (b + y)^2 + z^2}, \quad r_x^{(2)}(x^{(m)}, -b) = \sqrt{(x^{(m)} - x)^2 + (b + y)^2 + (2h - z)^2}, \quad (2)$$

$$r_x^{(1)}(x^{(m)}, b) = \sqrt{(x^{(m)} - x)^2 + (b - y)^2 + z^2}, \quad r_x^{(2)}(x^{(m)}, b) = \sqrt{(x^{(m)} - x)^2 + (b - y)^2 + (2h - z)^2}, \quad (3)$$

– віддаленості  $(x, y, z)$ -точки повітряного напівпростору від двох пар як фактичних, так і фіктивних елементарних джерел з координатами  $(x^{(m)}, -b, 0)$ ,  $(x^{(m)}, -b, 2h)$  й  $(x^{(m)}, b, 0)$ ,  $(x^{(m)}, b, 2h)$  для  $x$ -проекції.

У формулі (1)  $x$ -проекція характеристики відбиття поверхнею ортотропного композита задається так:

$$h_x^R(t - r_x^{(2)}/c) = U(t - r_x^{(2)}/c) \left\{ 1 - \frac{2}{I_0 \sqrt{-i\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0}} \right\}, \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (4)$$

де  $U(t)$  – симетрична ступінчаста функція,  $\sigma_x$  – електропровідність композита вздовж  $x$ -координати,  $\varepsilon_0$  – діелектрична провідність повітря,

а модифікована функція Беселя 0-го порядку

$$I_0 \left[ \sqrt{-i\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0} \right] = ber \left[ \sqrt{\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0} \right] - i \cdot bei \left[ \sqrt{\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0} \right] \quad (5)$$

має в якості дійсної і уявної частин функції Кельвіна 0-го порядку. Тому дійсна та уявна частини  $x$ -проекції характеристики відбиття задаються наступними виразами:

$$\operatorname{Re} \left\{ h_x^R \left( t - \frac{r_x^{(2)}}{c} \right) \right\} = \left[ 1 - \frac{2ber \sqrt{\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0}}{ber^2 \sqrt{\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0} + bei^2 \sqrt{\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0}} \right], \quad (6)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ h_x^R \left( t - \frac{r_x^{(2)}}{c} \right) \right\} = - \frac{2bei \sqrt{\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0}}{ber^2 \sqrt{\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0} + bei^2 \sqrt{\sigma_x(t - r_x^{(2)}/c) / \pi\varepsilon_0}}. \quad (7)$$

Щоб отримати аналітичні вирази для тангенціальних проєкцій електричної напруженості прямокутного точкового контуру, до виразу (1) застосуємо (при  $M \rightarrow \infty$ ) табличне інтегрування в інтервалі  $x^{(m)} \in [-a, a]$ :

$$E_x(x, y, z, t) = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \left\{ \frac{df}{dt} \ln \left| \frac{\rho_x^{(1)}(a, -b)}{\rho_x^{(1)}(a, b)} \right| - \frac{df}{dt} \Big|_{t=0} \cdot \left[ \ln \left| \rho_x^{(2)}(a, -b) \right| \cdot h_x^R \left( t - r_x^{(2)}(a, -b)/c \right) - \ln \left| \rho_x^{(2)}(a, b) \right| \cdot h_x^R \left( t - r_x^{(2)}(a, b)/c \right) \right] \right\}, \quad (8)$$

де координатні фактори сторін прямокутного контуру задаються так ( $i=1, 2$ ):

$$\rho_x^{(i)}(a, -b) = \frac{a - x + r_x^{(i)}(a, -b)}{-a - x + r_x^{(i)}(-a, -b)}, \quad \rho_x^{(i)}(a, b) = \frac{a - x + r_x^{(i)}(a, b)}{-a - x + r_x^{(i)}(-a, b)}, \quad (9)$$

причому враховуються вирази (2), (3) при  $x^{(m)} = a, -a$ .

Другий рядок формули (8) описує частину  $x$ -проекції електричної напруженості, внесеної ортотропним композитом.

Аналогічним чином доводиться вираз для  $y$ -проекції електричної напруженості.

Нехай обвідна  $f(t)$  стороннього току лінійно наростає від 0 до 1 протягом сусідніх часових періодів довжини  $t_0$ , починаючи з моменту часу  $t=0$ . Така пилкоподібна форма обвідної задається виразом  $f^{II}(t) = (t/t_0 - [t/t_0]) \cdot U(t)$ , де  $[x]$  – знак цілої частини числа  $x$ , а функція  $[t/t_0]$  отримується з  $t/t_0$  шляхом фіксації її значення на лівому кінці інтервалу  $(n, n+1)$  довжини  $t_0$ , причому  $n$  – ціле число. Оскільки  $df^{II}/dt = t_0^{-1}$  при  $nt_0 \leq t < (n+1) \cdot t_0$ , активна і реактивна складові  $x$ -проекції електричної напруженості пилкоподібного збурення над неушкодженою поверхнею ортотропного композита мають вид:

$$\operatorname{Re}\{E_x^{\Pi}(x, y, z, t)\} = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi t_0} \left\{ \ln \left| \frac{\rho_x^{(1)}(a, -b)}{\rho_x^{(1)}(a, b)} \right. - \right. \\ \left. - \ln \left| \rho_x^{(2)}(a, -b) \right| \cdot \operatorname{Re}\{h_x^R [t - r_x^{(2)}(a, -b)/c]\} + \ln \left| \rho_x^{(2)}(a, b) \right| \cdot \operatorname{Re}\{h_x^R [t - r_x^{(2)}(a, b)/c]\} \right\}, \quad (10)$$

$$\operatorname{Im}\{E_x^{\Pi}(x, y, z, t)\} = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi t_0} \times \\ \times \left[ \ln \left| \rho_x^{(2)}(a, -b) \right| \cdot \operatorname{Im}\{h_x^R [t - r_x^{(2)}(a, -b)/c]\} - \ln \left| \rho_x^{(2)}(a, b) \right| \cdot \operatorname{Im}\{h_x^R [t - r_x^{(2)}(a, b)/c]\} \right], \quad (11)$$

де координатні фактори сторін контуру задаються формулами (9) з урахуванням виразів (2), (3) при  $x^{(m)} = a$ . Дійсна та уявна частини  $x$ -проекції характеристики відбиття визначаються формулами (6), (7).

Отже, у випадках дійснозначних збурень, наприклад, пилкоподібного, – реактивні складові тангенціальних проекцій електричної напруги лише вносяться композитом, а тому можуть вимірюватися безпосередньо при натурних випробуваннях.

2. Визначимо активну і реактивну складові  $x, y$ -проекції нормованої електричної напруженості пилкоподібного збурення (НЕНПЗ) шляхом ділення обох частин рівностей (10), (11) на  $\mu_0 J_0 / 4\pi t_0$ . Перехід до безрозмірних координат здійснимо для  $x$ -проекції, поділивши просторові і часову змінні на узгоджені кроки  $\Delta_x$  і  $\Delta_x^t$ : ( $\Delta_x = c\Delta_x^t$ ).

У матеріалах [5] представлені величини часових кроків, що задовольняють критерію дискретизації Найквіста:

$$\Delta_x^t = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\sigma_x}, \quad \Delta_y^t = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\sigma_y}. \quad (12)$$

Узгоджені з ними просторові кроки задаються так:

$$\Delta_x = \frac{4\pi}{\sigma_x \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}}, \quad \Delta_y = \frac{4\pi}{\sigma_y \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}}, \quad (13)$$

де  $\sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120\pi [Ом]$  – хвильовий опір повітря.

**Приклад.** Для ортотропного композита з провідностями  $\sigma_x \cong 133$  См/м і  $\sigma_y \cong 185$  См/м – упоперек і вздовж напрямку армування, відповідно, значення кроків просторової та часової дискретизації такі:

$$\Delta_x = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \Delta_x^t = 0.833 \cdot 10^{-12} \text{ с}; \quad \Delta_y = 0.18 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \Delta_y^t = 0.600 \cdot 10^{-12} \text{ с}.$$

Застосувавши для кожної тангенціальної проекції індивідуальні безрозмірні координати:

$(X_x = x/\Delta_x, Y_x = y/\Delta_x, Z_x = z/\Delta_x, T_x = t/\Delta_x^t)$  та  $(X_y = x/\Delta_y, Y_y = y/\Delta_y, Z_y = z/\Delta_y, T_y = t/\Delta_y^t)$ , отримаємо вирази для активних і реактивних складових  $x, y$ -проекцій НЕНПЗ, зокрема:

$$\operatorname{Re}\{\varepsilon^{\Pi}(X_x, Y_x, Z_x, T_x)\} = -\ln \left| \frac{P_x^{(1)}(A_x, -B_x)}{P_x^{(1)}(A_x, B_x)} \right| + \quad (14)$$

$$+ \ln \left| P_x^{(2)}(A_x, -B_x) \right| \cdot \operatorname{Re}\{h_x^R [T_x - R_x^{(2)}(A_x, -B_x)]\} - \ln \left| P_x^{(2)}(A_x, B_x) \right| \cdot \operatorname{Re}\{h_x^R [T_x - R_x^{(2)}(A_x, B_x)]\},$$

$$\operatorname{Im}\{\varepsilon^{\Pi}(X_x, Y_x, Z_x, T_x)\} = \\ -\ln \left| P_x^{(2)}(A_x, -B_x) \right| \cdot \operatorname{Im}\{h_x^R [T_x - R_x^{(2)}(A_x, -B_x)]\} + \ln \left| P_x^{(2)}(A_x, B_x) \right| \cdot \operatorname{Im}\{h_x^R [T_x - R_x^{(2)}(A_x, B_x)]\}, \quad (15)$$

де безрозмірні константи і зазор визначені наступним чином:

$$A_x = \frac{a}{\Delta_x}, \quad B_x = \frac{b}{\Delta_x}, \quad H_x = \frac{h}{\Delta_x}. \quad (16)$$

Координатні фактори сторін прямокутного контуру задаються так ( $i=1, 2$ ):

$$P_x^{(i)}(A_x, -B_x) = \frac{A_x - X_x + R_x^{(i)}(A_x, -B_x)}{-A_x - X_x + R_x^{(i)}(-A_x, -B_x)}, \quad P_x^{(i)}(A_x, B_x) = \frac{A_x - X_x + R_x^{(i)}(A_x, B_x)}{-A_x - X_x + R_x^{(i)}(-A_x, B_x)}, \quad (17)$$

а віддаленості точки  $(X_x, Y_x, Z_x)$  повітряного напівпростору від вершин як фактичного (при  $i=1$ ), так і фіктивного (при  $i=2$ ) контурів дорівнюють:

$$R_x^{(1)}(A_x, -B_x) = \sqrt{(A_x - X_x)^2 + (B_x + Y_x)^2 + Z_x^2}, \quad R_x^{(2)}(A_x, -B_x) = \sqrt{(A_x - X_x)^2 + (B_x + Y_x)^2 + (2H_x - Z_x)^2}, \quad (18)$$

$$R_x^{(1)}(-A_x, -B_x) = \sqrt{(A_x + X_x)^2 + (B_x + Y_x)^2 + Z_x^2}, \quad R_x^{(2)}(-A_x, -B_x) = \sqrt{(A_x + X_x)^2 + (B_x + Y_x)^2 + (2H_x - Z_x)^2}, \quad (19)$$

$$R_x^{(1)}(A_x, B_x) = \sqrt{(A_x - X_x)^2 + (B_x - Y_x)^2 + Z_x^2}, \quad R_x^{(2)}(A_x, B_x) = \sqrt{(A_x - X_x)^2 + (B_x - Y_x)^2 + (2H_x - Z_x)^2}, \quad (20)$$

$$R_x^{(1)}(-A_x, B_x) = \sqrt{(A_x + X_x)^2 + (B_x - Y_x)^2 + Z_x^2}, \quad R_x^{(2)}(-A_x, B_x) = \sqrt{(A_x + X_x)^2 + (B_x - Y_x)^2 + (2H_x - Z_x)^2}. \quad (21)$$

Активна і реактивна складові характеристики відбиття представляються перетвореними формулами:

$$\operatorname{Re}\{h_x^R(T_x - R_x^{(2)})\} = 1 - \frac{2ber(2\sqrt{T_x - R_x^{(2)}})}{ber^2(2\sqrt{T_x - R_x^{(2)}}) + bei^2(2\sqrt{T_x - R_x^{(2)}})}, \quad (22)$$

$$\operatorname{Im}\{h_x^R(T_x - R_x^{(2)})\} = -\frac{2bei(2\sqrt{T_x - R_x^{(2)}})}{ber^2(2\sqrt{T_x - R_x^{(2)}}) + bei^2(2\sqrt{T_x - R_x^{(2)}})}. \quad (23)$$

Відзначимо, що діелектрична проникність і хвильовий опір повітря, а також провідності ортотропного композита приховані у виразах для кроків дискретизації (12) і (13), а тому спрощені формули, за допомогою яких буде виконане гранично-елементне моделювання.

З метою дослідження усередненої за часом НЕНПЗ, представленої в індивідуальних безрозмірних координатах, до активної (22) і реактивної (23) складових характеристики відбиття застосуємо асимптотичне розкладання функцій Томсона при  $V = \sqrt{T_x - R_x^{(2)}}$ :

$$ber(V) = \frac{\exp[\alpha(V)]}{\sqrt{2\pi V}} \cos \beta(V), \quad bei(V) = \frac{\exp[\alpha(V)]}{\sqrt{2\pi V}} \sin \beta(V), \quad (24)$$

$$\text{де } \alpha(V) \approx \frac{V}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2V}} - \dots, \quad \beta(V) \approx \frac{V}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2V}} - \dots, \quad (25)$$

Обмежившись першими членами безкінечних рядів, маємо перше наближення асимптотичного представлення активної і реактивної складових  $x$ -проекції характеристики відбиття:

$$\operatorname{Re}\{h_x^R(V)\} \approx 1 - 2\sqrt{2\pi V} \exp(-V/\sqrt{2}) \cos(V/\sqrt{2}), \quad (26)$$

$$\operatorname{Im}\{h_x^R(V)\} \approx 2\sqrt{2\pi V} \exp(-V/\sqrt{2}) \sin(V/\sqrt{2}). \quad (27)$$

Якщо  $T_0$  – достатньо довгий безрозмірний часовий інтервал спостереження, інтегруючи (26) і (27) за допомогою табличних інтегралів з нескінченною верхньою межею, отримуємо усереднені за часом значення активної та реактивної складових характеристики відбиття:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \operatorname{Re}\{h_x^R(V)\} dV \approx 1 - \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{2}/2)\pi}{T_0}, \quad \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \operatorname{Im}\{h_x^R(V)\} dV \approx \frac{(1 - \sqrt{2}/2)\pi}{T_0}. \quad (28)$$

Тоді усереднені за часом активна та реактивна складові НЕНПЗ в безрозмірних координатах такі:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \operatorname{Re}\{\varepsilon^{\Pi}(X_x, Y_x, Z_x, T_0)\} dT_0 \approx -\frac{1}{T_0} \ln \left| \frac{P_x^{(1)}(A_x, -B_x)}{P_x^{(1)}(A_x, B_x)} \right| + \ln \left| \frac{P_x^{(2)}(A_x, -B_x)}{P_x^{(2)}(A_x, B_x)} \right| \cdot \left[ 1 - \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{2}/2)\pi}{T_0} \right], \quad (29)$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_x^\infty} \text{Im} \left\{ \varepsilon^\Pi (X_x, Y_x, Z_x, T_0) \right\} dT_x \approx -\ln \left| \frac{P_x^{(2)}(A_x, -B_x)}{P_x^{(2)}(A_x, B_x)} \right| \frac{(1 - \sqrt{2}/2)\pi}{T_0}, \quad (30)$$

де координатні фактори сторін фактичного ( $i=1$ ) і фіктивного ( $i=2$ ) прямокутних струмових контурів задаються виразом (17), в яких безрозмірні віддаленості точки спостереження  $(X_x, Y_x, Z_x)$  від вершин контурів представлені формулами (18-21).

Таким чином, у безрозмірних координатах отримані асимптотичні вирази для усереднених за часом активної та реактивної складових проекцій НЕНПЗ над неушкодженою поверхнею ортотропного провідного композита.

3. Промодельюємо просторове розподілення асимптотичного представлення усереднених за часом значень  $x$ -проекцій НЕНПЗ над плоскою неушкодженою поверхнею ортотропного провідного композита, – методом граничних елементів у безрозмірних координатах, індивідуальних для тангенціальної проекції.

Проведений у роботі [8] аналіз густини Фур’є-спектра характеристики відбиття композита (4) обґрунтував коректність за Найквістом її дискретизації з часовими кроками (12). Також коректні узгоджені величини просторових кроків (13), тому достатньо моделювати активну і реактивні складові НЕНПЗ тільки в вузлах дискретизації. Крім того, коректно припустити, що через відповідні вузли дискретизації  $(X_x, Y_x, Z_x = 0)$ -площини проходить прямокутний  $M \cdot \Delta_x \times N \cdot \Delta_x$  контур; цілими числами кроків дискретизації задаються також відстані до поверхні композита (зазори) від паралельної їй площини у повітрі.

Щоб оптимально розмістити вимірювальні контури електромагнітного датчика поблизу випромінюючого контуру в наближеній до поверхні композита  $(X_x, Y_x, Z_x = 1)$ -площині, промодельюємо в ній 2-вимірні розподілення часових асимптот активної складової  $x$ -проекції НЕНПЗ. Покриємо вертикальними граничними елементами (ГЕ) стовпці вузлів дискретизації для  $x$ -проекції як в табл. 1.

Таблиця 1

**Асимптотичні розподілення усереднених за часом активних складових  $x$ -проекції нормованої електричної напруженості квадратного контуру з пилкоподібним збуренням в площині  $Z=1$ , паралельній поверхні ортотропного композита при зазорі  $H=2$**

$Y_x$	ГРАНИЧНІ ЕЛЕМЕНТИ								
	$m = -4$	$m = -3$	$m = -2$	$m = -1$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
4	-0,24	<b>-0,32</b>	-0,39	-0,45	-0,47	-0,45	-0,39	<b>-0,32</b>	-0,24
3	-0,24	<b>-0,32</b>	<b>-0,42</b>	<b>-0,49</b>	<b>-0,52</b>	<b>-0,49</b>	<b>-0,42</b>	<b>-0,32</b>	-0,24
2	-0,19	-0,27	-0,37	-0,44	-0,47	-0,44	-0,37	-0,27	-0,19
1	-0,11	-0,16	-0,22	-0,26	-0,28	-0,26	-0,22	-0,16	-0,11
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
-1	0,11	0,16	0,22	0,26	0,28	0,28	0,22	0,16	0,11
-2	0,19	0,27	0,37	0,44	0,47	0,44	0,37	0,27	0,19
-3	0,24	<b>0,32</b>	<b>0,42</b>	<b>0,49</b>	<b>0,52</b>	<b>0,49</b>	<b>0,42</b>	<b>0,32</b>	0,24
-4	0,24	<b>0,32</b>	0,39	0,45	0,47	0,45	0,39	<b>0,32</b>	0,24

Вираз в правій частині рівності (29) перетворюється в асимптотичне представлення при  $T_0 \rightarrow \infty$ , коли реактивна складова (30) приймає нульове значення, тоді як активна (29) – суттєво спрощуються завдяки обнулінню члена, що задає первинне поле. Тоді часткові розв’язки задачі моделювання часової асимптотики активної складової  $x$ -проекції НЕНПЗ для, відповідно,  $m$ -ого вертикального граничного елемента задаються натуральним логарифмом відношення координатних факторів сторін прямокутного контуру в безрозмірних координатах:

$$\operatorname{Re}\left\{\varepsilon_x^{\Pi}(m, Y_x, Z_x, T_x)\right\} = \ln \left| \frac{A_x - m + \sqrt{(A_x - m)^2 + (B_x + Y_x)^2 + (2H_x - Z_x)^2}}{-A_x - m + \sqrt{(A_x + m)^2 + (B_x + Y_x)^2 + (2H_x - Z_x)^2}} \cdot \frac{A_x - m + \sqrt{(A_x - m)^2 + (B_x - Y_x)^2 + (2H_x - Z_x)^2}}{-A_x - m + \sqrt{(A_x + m)^2 + (B_x - Y_x)^2 + (2H_x - Z_x)^2}} \right|, \quad (31)$$

де параметризована змінна  $X_x \rightarrow m$ .

**Приклад (продовження).** Тоді квадратний струмовий контур  $(1.25 \times 1.25)10^{-3} [m^2]$  представлено як по горизонталі, так і по вертикалі за допомогою 5 кроків  $\Delta_x$  для  $x$ -проекції.

В табл.1 наведене часткове покриття граничними елементами області в площині  $Z_x=1$  не тільки під квадратним контуром (його  $z$ -проекція затінена), але і поблизу. Кожний ГЕ містить нульове значення, рівновіддалене від протилежних сторін контуру, в якому сторонній струм створює дану проекцію НЕНПЗ. При віддаленні від рядка  $Y_0=0$  модулі НЕНПЗ спочатку швидко зростають, досягаючи екстремальних значень за границями контуру (виділені жирним шрифтом), а потім повільно спадають.

Таким чином, вимірювальні контури електромагнітного датчика повинні розташовуватися ззовні контуру збурення, але по-можливості ближче до поверхні композита з метою підвищення чутливості процедури неруйнівного контролю.

### Висновки

Тангенціальні проекції електричної напруженості – це різниці частин: створеної прямокутним струмовим контуром і внесеної ортотропним провідним композитом (пропорційної його характеристики відбиття). У разі дійснозначних збурень, зокрема, пилкоподібного, реактивні складові тангенціальних проекцій задаються лише композитом, а тому можуть вимірюватись безпосередньо при натурних випробуваннях.

Реактивна складова асимптотичного наближення усереднених в часі тангенціальних проекцій нормованої електричної напруженості пилкоподібного збурення (НЕНПЗ) дорівнює нулю, а його активна складова задається виключно вторинним полем. За допомогою асимптотичного наближення здійснене гранично-елементне моделювання розподілення активної складової  $x$ -проекцій НЕНПЗ в площині, паралельній неушкодженій поверхні композита. Результати моделювання свідчать, що вимірювальні контури електромагнітного датчика потрібно розміщувати навколо контуру збурення, поближче до поверхні композита.

### Список використаної літератури

1. Бреббия К. Применение метода граничных элементов в технике / К. Бреббия, С. Уокер. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
2. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, П. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 498 с.
3. Ahmed M.T. A Unified Approach for Eddy Current Calculation in Induction and for skin Effect 2-D Problems / M.T. Ahmed, I.D. Zavers, P.E. Burke // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 1990. – V.4. – I.11. – PP.1055-1075.
4. Пащенко В.А. Вопросы теории электромагнитного контроля ортотропных композитов нестационарными полями. 1. Элементарный векторный потенциал первичного и отраженного полей в воздухе над плоской поверхностью композита / В.А. Пащенко, В.С. Хандецкий // Дефектоскопия. – 2012. – V. 48. – № 6. – PP. 357-372.
5. Pashchenko V.A. The subsurface sounding analytical description of orthotropic composite in dimensionless coordinates / V.A. Pashchenko // Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Conference on Mathematic Methods in Electromagnetic Theory (Kharkiv, Ukraine, 2012 p.). – PP. 176-179.
6. Пащенко В.О. Гранично-элементне моделювання становлення електричної напруженості над поверхнею ортотропного композита / В.О. Пащенко // Вестник ХНТУ. – 2014. – №3(50). – С. 81-87.

УДК 513.88: 517.948.3

Г.С. ПОЛЕТАЕВ

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

## НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ - I

*Рассмотрено существование и связь между решениями абстрактных парных интегральных уравнений типа свёртки с произвольной и равной дельта-функции Дирака правыми частями. При сделанных предположениях сформулирована теорема – критерий с необходимым и достаточным условием такой связи. Процедура свободна от аппарата теории интеграла типа Коши, гёльдеровости функций.*

*Ключевые слова: интеграл, уравнение, парное, свёртка, банахова, алгебра, факторизация, проектор.*

Г.С. ПОЛЕТАЄВ

Одеська державна академія будівництва та архітектури

## НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА ЗВ'ЯЗКУ РІШЕНЬ ПАРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ЗГОРТКИ - I

*Розглянуто існування та зв'язок між рішеннями абстрактних парних інтегральних рівнянь типу згортки з довільною та тією, що дорівнює дельта функції Дірака, правими частинами. При деяких припущеннях, сформульовано теорема – критерій з необхідною та достатньою умовою такого зв'язку. Процедура вільна від апарату теорії інтеграла типу Коші, умови Гельдера.*

*Ключові слова: інтеграл, рівняння, парне, згортка, банахова, алгебра, факторизація, проектор.*

G.S. POLETAEV

Odessa State Academy of Buildings and Architecture

## A NECESSARY AND SAFFICIENT CONDITION FOR CONNECTION SOLUTIONS PAIRED INTEGRAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE - I

*The connection between the solutions of the abstract convolution type paired integral equations is considered. Right-hand side of the equations can be arbitrary and equal Dirac's delta-function. The theorem - criterion for such a connection is formulated. Procedure is a free from the theory of Cauchy integral, Holder requirements.*

*Keywords: integral, equation, paired, convolution, Banach, algebra, factorization, projection.*

### Актуальность, постановка проблемы

Известна важная роль теории интегральных уравнений типа свёртки, в частности, парных, с ядрами от разности аргументов, а также круга проблем, связанных с их исследованием, для фундаментальных теоретических и прикладных вопросов. В том числе, в математике, механике, теории некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, теории упругости, в расчётах строительных элементов, в математической и теоретической физике [1-14]. Общие элементы этой тематики связываются положениями строящейся автором теории уравнений в кольцах с факторизационными парами. Решение такого рода уравнений и смежных задач, в существенном, сопряжено с необходимостью преодоления серьёзных аналитических барьеров. Выяснением самого факта существования решений, разработкой неизвестных, при соответствующих предположениях, подходов к решению и исследованию. Поэтому получение новых общих результатов о разрешимости таких уравнений, возможных путях построения решений, формул их представления через известные величины, изучение свойств решений, возможных связей между решениями является актуальной задачей. Актуальна и разработка элементов точных методов, минимально опирающихся на теорию функций комплексного переменного и на теорию интеграла Фурье. Причём, свободных от аппарата теории интеграла типа Коши, требования гёльдеровости функций.

### Анализ исследований и публикаций.

В рассматриваемом виде, изучаемые ниже обобщённые парные уравнения, при сделанных ниже предположениях, впервые, появились в работах автора. Они охватывают известные парные интегральные уравнения типа свёртки [1-4, 6, 10, 12-18]. Наиболее полная теория последних, в случае порождающих ядра функций  $k_{1,2}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ , в целом классе  $E$  банаховых пространств построена в [4]. В близкой к рассматриваемой в [12] и ниже постановке, но в других пространствах, эти парные интегральные уравнения изучались Черским Ю.И.; Черским Ю.И. и Гаховым Ф.Д. (1954, 1956; см. также [6]) при дополнительных ограничениях типа гёльдеровости функций. В этих исследованиях использован аппарат задачи Римана - Гильберта, на связь с которой впервые указал И.М. Рапопорт [1]. Наряду с этим, при изучении условия раз-

решимости некоторых видов уравнений разных классов, можно обнаружить существование свойства связи между решениями. При весьма общих предположениях, для них оказывается возможным, зная специальные решения, построить решения, соответствующие произвольной правой части. Это имеет место для ряда известных и новых классов уравнений. В том числе, важных при моделировании теоретических и прикладных задач [12 -18, 21]. Например, обнаруживается связь между решениями, соответствующими произвольной и равной единице кольца (функций, матриц или абстрактных элементов, в котором отыскивается решение) правым частям. Для парных уравнений, в том числе типа свёртки, до работ автора вопросы связи решений оставались не поставленными в общей форме и, в достаточно полном объёме, не были разрешены. База результатов установлена в [12]. Она связана с работами [1, 2, 4] - предшествующими составляющими замечательной истории исследования парных интегральных уравнений типа свёртки. В этих, а также иных работах, имеются и фрагменты историко-мотивационного характера [6].

**Цель статьи**

Целью статьи - первой части сообщения является формулировка теоремы - критерия связи решений абстрактных обобщённых парных интегральных уравнений типа свёртки относительно неизвестной функции  $\varphi(t)$  вида:

$$\begin{cases} \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)ds = \alpha\delta + f(t), & t < 0; \\ \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)ds = \beta\delta + g(t), & t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения (1) при  $\alpha=\beta=0$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  являются известными парными интегральными уравнениями типа свёртки [1, 2, 4, 6, 10, 12, 13]. Предполагается, что:  $k_1(t), k_2(t) \exp\{ct\} \in L_1(-\infty, \infty); c \in \mathbf{R}, c \geq 0$ ;

$$[1 - K_1(\lambda)][1 - K_2(\lambda - ic)] \neq 0, -\infty < \lambda < \infty; K_j(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} k_j(\zeta)e^{i\zeta t} dt; j = 1, 2.$$

**Основной материал и результаты**

Следуя [12], напомним используемые далее обозначения и положения. Для любой функции  $k(t), -\infty < t < \infty$ , положим:  $k_{\mp}(t) = k(t), \mp t \geq 0, k_{\mp}(t) = 0, \pm t < 0$ . Символом  $L_{(c)} = L_{(c)}(-\infty, \infty), c \in \mathbf{R}$ , будем обозначать банахову алгебру всех комплекснозначных измеримых функций  $k(t), -\infty < t < \infty$ , таких, что  $e^{ct}k(t) \in L_1(-\infty, \infty) \equiv L$ . Норма в  $L_{(c)}$  вводится по формуле:

$$\|k\|_{L_{(c)}} = \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|e^{ct} dt < \infty; k \in L_{(c)}, \text{ а роль умножения играет свертка. Она обозначается символом } *.$$

Если  $a$  и  $b$  два любых вещественных числа, то через  $L_{a \cap b}$  обозначим пересечение  $L_{(a)}$  и  $L_{(b)}$ :

$$L_{a \cap b} := L_{(a)} \cap L_{(b)}. \text{ Устанавливается, что } L_{a \cap b} \text{ - банахова алгебра относительно нормы:}$$

$\|k\|_{L_{a \cap b}} := \|k_+\|_{L_{(\max(a,b))}} + \|k_-\|_{L_{(\min(a,b))}}$  и свертки в качестве умножения при обычном смысле сходимости интегралов. Через  $L^{\mp}, L_{(c)}^{\mp}, L_{a \cap b}^{\mp}$  обозначим подалгебры функций из  $L, L_{(c)}, L_{(a \cap b)}$ , соответственно, которые обращаются в нуль при  $\pm t > 0$ .

Пусть  $\delta (= \delta(t))$  формальный элемент ( $\delta$  - функция Дирака [2]) такой, что  $\delta * \delta = \delta, \delta * k = k * \delta = k, k \in L_{(-|c|)}^+ \oplus L_{(|c|)}^-$ , а  $A$  - любая из алгебр  $L, L^{\mp}, L_{(c)}, L_{(c)}^{\pm}, L_{a \cap b}, L_{a \cap b}^{\mp}$ . Элемент  $\delta$  играет роль мультипликативной единицы алгебры  $A$ , при этом  $\delta \notin A$ . Формальным присоединением этой единицы к  $A$ , образуем банахову алгебру  $\tilde{A}$ . Норма в  $\tilde{A}$  вводится по формуле:  $\|g\|_{\tilde{A}} = |\alpha| + \|g\|_A, g = \alpha\delta + k; \alpha \in \mathbf{C}, k \in A$ . Алгебра  $\tilde{L}(-\tilde{L}_{(c)})$  не имеет радикала и, следовательно, изоморфна некоторому кольцу непрерывных функций [19, 12]. Поэтому элементы рассматриваемых множеств часто будем называть функциями. Обратный для обратимого в  $\tilde{A}$  элемента  $g \in \tilde{A}$  будем обозначать



$g'$ . Возможен случай, когда элемент  $g \in \tilde{A}$ , обратимый в  $\tilde{A}$  или нет, имеет обратный в некоторой другой алгебре. Тогда, чтобы уточнить, какой именно обратный для  $g$  рассматривается, будем применять индексы, ассоциированные с алгеброй, содержащей этот обратный. Например, для  $g^+ \in \tilde{L}_{0 \cap c}^+$  символ  $[g^+]_{0 \cap c}'$  обозначает обратный, принадлежащий  $\tilde{L}_{0 \cap c}$ .

Введем коммутирующие проекторы,  $p^\mp : \tilde{L}_{\langle -|c \rangle}^+ + \tilde{L}_{\langle |c \rangle}^- \rightarrow \tilde{L}_{\langle \pm|c \rangle}^\mp$ , действующие по формуле:  $p^\mp(\alpha\delta + k) = \alpha\delta + k_\mp, \alpha \in \mathbf{C}, k \in (L_{\langle -|c \rangle}^+ \oplus L_{\langle |c \rangle}^-)$ , а также проекторы  $p^0 = p^+p^- (= p^-p^+), p_\pm = p^\pm - p^0, p_* = p_+ + p_-$ . Ради краткости полагаем [20]:  $x^+ := p^+x, x^- := p^-x, x^0 := p^0x; x_\pm := p_\pm x, (x \in (\tilde{L}_{\langle -|c \rangle}^+ \oplus \tilde{L}_{\langle |c \rangle}^-))$ . Для любой функции  $h = \alpha\delta + k, k \in A$ , положим,  $h^\mp = p^\mp h$ . Очевидно,  $h^\mp = \alpha\delta + k_\mp$ . Если  $k \in A$ , то через  $K(\zeta)$  будем обозначать интеграл,  $\int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{i\zeta t} dt$ , рассматриваемый при тех  $\zeta$ , для которых он существует.

Обратимость и факторизация элементов в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$ . Следующие утверждения вытекают из общих результатов [19, см.2;12] о кольцах абсолютно интегрируемых функций с весом.

Вариант теоремы Винера в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$ . Для обратимости в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$  элемента  $\alpha\delta + k, \alpha \in \mathbf{C}, k \in L_{\langle c \rangle}$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:  $\alpha[\alpha + K(\zeta)] \neq 0, \text{Im } \zeta = -c; -\infty < \text{Re } \zeta < \infty$ .

Вариант теоремы Винера в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}^\mp$ . Для обратимости в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}^\mp$  элемента  $\alpha\delta + k_\mp, \alpha \in \mathbf{C}, k_\mp \in L_{\langle c \rangle}^\mp$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:  $\alpha[\alpha + K_\mp(\zeta)] \neq 0, \mp \text{Im } \zeta \geq \pm c; -\infty < \text{Re } \zeta < \infty$ .

Пусть  $g = \alpha\delta + k, \alpha \in \mathbf{C}, k \in L_{a \cap b}$  такова, что при некотором  $c \in [a, b]$  выполняется условие  $\alpha[\alpha + K(\lambda - ic)] \neq 0, -\infty < \lambda < \infty$ . Тогда, индексом  $g$ , как элемента  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$  (кратко  $\chi[g, c]$  либо  $\text{ind}[g]_c$ ) назовем число, равное индексу функции  $\alpha + K(\lambda - ic)$  переменной  $\lambda$  вдоль сомкнутой вещественной оси  $\{-\infty, \infty\}$ , получающейся из  $[-\infty, \infty]$  отождествлением концов [2], т.е.

$$\chi[g, c] := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda [\arg\{\alpha + K(\lambda - ic)\}].$$

В частности, если  $g = \delta - k, k \in L$ , и

$$1 - K(\lambda) \neq 0, -\infty < \lambda < \infty, \text{ то } \chi[g, 0] := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda [\arg\{1 - K(\lambda)\}].$$

Под факторизацией функции  $g = \delta - k, k \in L_{\langle c \rangle}$ , в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$  будем понимать представление её в виде:

$$g = [\delta + \gamma_+] * [\delta + \gamma_-], \gamma_\mp \in L_{\langle c \rangle}^\mp. \tag{2}$$

Эту факторизацию назовем «правильной в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$ », если хотя бы один из  $\pm$  факторов  $\delta + \gamma_\mp$  обратим в своей подалгебре  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}^\mp$ . Если оба фактора таковы, то (2) назовем «канонической в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$ » факторизацией.

Учитывая, что банахова алгебра  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$  – полупростая, можно обнаружить, что, в силу изоморфизма соответствующих колец, из факторизационных теорем М.Г. Крейна ([2], § 2)), непосредственно, вытекают следующие факторизационные теоремы в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$ .

Теорема 1 [12]. Для того, чтобы функция  $g = \delta - k$  ( $k \in L_{\langle c \rangle}, c \in \mathbf{R}$ ) допускала каноническую в

$\tilde{L}_{\langle c \rangle}$  факторизацию (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$1 - K(\zeta) \neq 0 \quad (\text{Im } \zeta = -c; \quad -\infty < \text{Re } \zeta < \infty), \quad \chi[g, c] = 0.$$

Если функция  $g$  допускает каноническую в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$  факторизацию, то последняя является для неё единственной правильной в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$  факторизацией.

**Теорема 2 [12].** Пусть для функции  $g = \delta - k$  ( $k \in L_{\langle c \rangle}, c \in \mathbf{R}$ ) выполнены условия:

$$1 - K(\zeta) \neq 0 \quad (\text{Im } \zeta = -c; \quad -\infty < \text{Re } \zeta < \infty), \quad \chi[g, c] \neq 0.$$

Если, при этом,  $\chi[g, c] > 0$  ( $\chi[g, c] < 0$ ), то, как бы ни были выбраны различные точки  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  ( $m \leq |\alpha[g, c]|$ ) внутри верхней полуплоскости  $\Pi[-c, \infty]$  (нижней полуплоскости  $\Pi[-c, -\infty]$ ) и натуральные числа  $p_1, \dots, p_m$  такие, что  $\sum_{i=1}^m p_i = |\chi[g, c]|$ , будет существовать един-

ственная правильная в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$  факторизация (2), при которой функция

$$1 + \Gamma_+(\zeta) = \left( 1 + \int_0^{\infty} \gamma_+(t) e^{i\zeta t} dt \right), \quad \left( 1 + \Gamma_-(\zeta) = \left( 1 + \int_{-\infty}^0 \gamma_-(t) e^{i\zeta t} dt \right) \right)$$

будет иметь внутри верхней полуплоскости  $\Pi[-c, \infty]$  (нижней полуплоскости  $\Pi[-c, -\infty]$ ) своими нулями кратностей  $p_1, \dots, p_m$  точки  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и никаких других нулей иметь не будет. Указанными факторизациями исчерпываются все правильные в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$  факторизации функции  $g$  в  $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$ .

Необходимое и достаточное условие - критерий связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки. Используя подготовленную базу, сформулируем условия и приведём формулы связи решений парных интегральных уравнений (1) с произвольной и равной  $\delta(t)$  правыми частями, при сделанных предположениях, непосредственно.

Теорема 3. Пусть  $k_1(t), k_2(t) \exp(ct) \in L_1(-\infty, +\infty); c \geq 0$ , т.е.  $k_1 \in L, k_2 \in L_{\langle c \rangle}; c \geq 0$ , и выполнено условие:

$$[1 - K_1(\lambda)] \cdot [1 - K_2(\lambda - ic)] \neq 0, \quad -\infty < \lambda < +\infty, \tag{3}$$

а парное интегральное уравнение с (1) с правой частью равной  $\delta$  (т.е. при  $\alpha\delta = \beta\delta = \delta; f(t) = g(t) = 0$ ) имеет решение  $\varphi_\delta \in \tilde{L}_{0 \cap c}$ , причём,  $\varphi_\delta \equiv \varphi_\delta(t) = \delta + x_1; x_1(t) \in L_{0 \cap c}$  и

$$[1 + X_1(\lambda)] \bullet [1 + X_1(\lambda - ic)] \neq 0, \quad -\infty < \lambda < +\infty. \tag{4}$$

Тогда для существования решений  $\varphi(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  парного интегрального уравнения (1) с произвольной из всевозможных правых частей  $\alpha\delta + f(t), -\infty < t < 0; \beta\delta + g(t), 0 < t < \infty$ ; где  $\alpha, \beta \in C$ ;

$f, g \in L_{0 \cap c}, c \geq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\alpha = \beta. \tag{5}$$

При его выполнении, решение  $\varphi(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  обобщённого парного интегрального уравнения типа свёртки (1) с произвольной правой частью  $\alpha\delta + f(t), -\infty < t < 0; \alpha\delta + g(t), 0 < t < \infty; \alpha \in C; f, g \in L_{0 \cap c}; c \geq 0$  в  $\tilde{L}_{0 \cap c}$  можно определить по формуле:

$$\varphi(t) = \varphi_{\delta} * \{p_{-}([\varphi_{\delta}]'_0 * [\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_{-}]) + p^{+}([\varphi_{\delta}]'_c * [\delta + k_2^1] * [\alpha\delta + g_{+}])\}(t), \quad (6)$$

где  $[\varphi_{\delta}]'_0, \delta + k_1^1 (:= [\delta - k_1]_0) \in \tilde{L}$ ;  $[\varphi_{\delta}]'_c, \delta + k_2^1 (:= [\delta - k_2]_c) \in \tilde{L}_{<c>}$  - обратные в  $\tilde{L}, \tilde{L}_{<c>}$ , для решения  $\varphi_{\delta} \in \tilde{L} \cap \tilde{L}_{<c>}$  и для коэффициентов  $[\delta - k_1(t)] \in \tilde{L}, [\delta - k_2(t)] \in \tilde{L}_{<c>}, c \geq 0$  уравнения (1) (трактуемого как реализация абстрактного парного уравнения в кольце с факторизационной парой [15]).

Результаты о парных интегральных уравнениях освещались автором, в частности, в рамках Международной конференции имени академика М. Кравчука в Киеве, КПИ-2010, 2012, а также Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», в Москве, МГТУ-2013.

#### Выводы и перспективы

Имеются важные положения исследований по теории интегральных уравнений типа свёртки, которые можно получать единым подходом. При нём, среди прочих, используются элементы строящейся теории уравнений в кольцах с факторизационными парами. Впервые, по сравнению с известными до работ автора элементами теории парных интегральных уравнений типа свёртки, удаётся, не опираясь на теорию задачи Римана, сократить использование преобразований Фурье, снять условие гёльдеровости функций, охарактеризовать разрешимость уравнений и связь решений соответствующих произвольным и специальным правым частям. При весьма общих условиях, без требований гёльдеровости функций, сформулирована теорема с, необходимым и достаточным, условием (- критерием) связи их решений, соответствующих произвольной и равной присоединенной единице, исходных банаховых алгебр, правым частям. Доказательство теоремы будет приведено в продолжении этой статьи. Продолжение под названием «Необходимое и достаточное условие связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки – II» представляется для опубликования одновременно. При установлении вида формулы связи существенно использовались варианты теоремы Н. Винера и факторизационных теорем [2, 4, 12 – 14, 19, 20]. В статье–продолжении приведены также пример и дополнительные общие замечания, выводы, перспективы.

#### Список использованной литературы

1. Рапопорт И.М. О некоторых «парных» интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях // Сборник трудов института математики АН УССР. - Киев: Институт математики АН УССР. -1949. -12. - С. 102-118.
2. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М.Г. Крейн // Успехи мат. наук. — 1958. — № 13, Вып. 5(83). — С. 3—120.
3. Попов Г.Я. О спаренных интегро-дифференциальных уравнениях изгиба лежащей на упругом основании неограниченной плиты кусочн-постоянной жесткости// Изв. высш. учебн. завед., Матем. - №1, 1957. - С. 195-209.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. О парном интегральном уравнении и его транспонированном I // Теорет. и прикл. математика. – Изд.-во Львовского ун.-та, 1958. - Вып. 1. - С. 58-81.
5. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1963. — 640 с.
7. Попов Г.Я. Метод факторизации и его численная реализация. Учебное пособие / Г.Я. Попов, П.В. Керекеша, В.Е. Круглов; под ред. проф. Г.Я. Попова. — Одесса: Одесский гос. университет, 1976. — 82 с.
8. Учебное пособие. Редактор: проф. Попов Г.Я. - Одесса: Одесский гос. университет, 1976. - 82 с.
9. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г.Я. Попов. — Киев-Одесса: ВШ, 1982. —168 с.
10. Мхитарян С.М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учётом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях / С.М. Мхитарян // Изв. АН Армянской ССР. Серия: Механика. — 1968. — № XXI. — №5—6. — С. 3—20.
11. Черский Ю.И. Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.
12. Акоюян В.Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом / В.Н. Акоюян, Л.Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тезисы докладов международной научной конференции (Одесса, 2013 г.). — Одесса, 2013. — С. 12.
13. Полетаев Г.С. Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 6. — С. 803—813.
14. Полетаев Г.С. Парні рівняння типу згортки з ядрами з різних банахових алгебр абсолютно інтегрованих з вагою функцій// НАУКОВІ ВІСТІ Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». - №4(24), 2002. - С. 143-148.

15. Полетаев Г.С. Парные уравнения типа свёртки с ядрами из разных банаховых алгебр абсолютно интегрируемых по весу функций// Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 16 – 19 травня 2002 р., Київ. Матеріали конференції. – Київ, 2002. - С. 349.
16. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 9. — С. 1201—1213.
17. Poletaev G.S. Connection of solutions of the abstract paired equations in the rings with factorization pairs// Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 191. - 2009. - P. 479 - 484.
18. Полетаев Г.С. Критерий связи решений абстракт. парного уравнения в кольце с факторизационной парой// XIII МНК ім. акад. М. Кравчука. - НТУУ (КП) травень 2010 р., Київ. Матеріали конф. – Київ, 2010. - С.-220.
19. Полетаев Г.С. Связь решений парных интегральных уравнений типа свёртки// XIV МНК ім. академіка М. Кравчука. - НТУУ (КП) квітень 2012 р., Київ. Матеріали конференції II. – Київ, 2012. - С.-193.
20. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. Коммутативные нормир. кольца. - М.: Физматгиз, 1960. — 316 с.
21. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators - I: Algebraic Theory and Examples// J. Funct. Anal. - 1972. - Vol. 9, №3. - P. 262-295.
22. Полетаев Г.С. Критерий связи решений парных матричных уравнений с проекторами// ВІСНИК ОДАБА. – Одеса, 2013. – вип. 50, ч. 1. – С. 229 - 244.

УДК 513.88: 517.948.3

Г.С. ПОЛЕТАЕВ

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

## НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ - II

*Рассмотрено существование и связь между решениями абстрактных парных интегральных уравнений типа свёртки с произвольной и равной дельта-функции Дирака правыми частями. При сделанных предположениях доказана теорема – критерий с необходимым и достаточным условием такой связи. Процедура свободна от аппарата теории интеграла типа Коши, гёльдеровости функций.*

*Ключевые слова: интеграл, уравнение, парное, свёртка, банахова, алгебра, факторизация, проектор.*

Г.С. ПОЛЕТАЕВ

Одеська державна академія будівництва та архітектури

## НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА ЗВ'ЯЗКУ РІШЕНЬ ПАРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ЗГОРТКИ - II

*Розглянуто існування та зв'язок між рішеннями абстрактних парних інтегральних рівнянь типу згортки з довільною та тією, що дорівнює дельта-функції Дірака, правими частинами. При деяких припущеннях доведено теорема – критерій з необхідною та достатньою умовою такого зв'язку. Процедура вільна від апарату теорії інтеграла типу Коші, умови Гельдера.*

*Ключові слова: інтеграл, рівняння, парне, згортка, банахова, алгебра, факторизація, проектор.*

G.S. POLETAEV

Odessa State Academy of Buildings and Architecture

## A NECESSARY AND SAFFICIENT CONDITION FOR CONNECTION SOLUTIONS PAIRED INTEGRAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE - II

*The connection between the solutions of the abstract convolution type paired integral equations is considered. Right-hand side of the equations can be arbitrary and equal Dirac's delta-function. The theorem - criterion of this connection is proved. Procedure is a free from the theory of Cauchy integral, Holder requirements.*

*Keywords: integral, equation, paired, convolution, Banach, algebra, factorization, projection.*

### Актуальность, постановка проблемы

Известна важная роль теории интегральных уравнений типа свёртки, в частности, парных, с ядрами от разности аргументов, а также круга проблем, связанных с их исследованием, в фундаментальных теоретических и прикладных вопросах математики, механики, теории некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, теории упругости, расчётов строительных элементов, математической и теоретической физики [1-14]. Общие элементы этой тематики связываются положениями строящейся автором теории уравнений в кольцах с факторизационными парами. Решение такого рода уравнений и смежных задач, в существенном, сопряжено с необходимостью преодоления серьёзных аналитических барьеров. Выяснением самого факта существования решений, разработкой неизвестных, при соответствующих предположениях, подходов к решению и исследованию. Поэтому получение новых общих результатов о разрешимости таких уравнений, возможных путях построения решений, формул их представления через известные величины, изучение свойств решений, возможных связей между решениями является актуальной задачей. Актуальна и разработка элементов точных методов, минимально опирающихся на теорию функций комплексного переменного и на теорию интеграла Фурье. Причём, свободных от аппарата теории интеграла типа Коши, требования гёльдеровости функций.

### Анализ исследований и публикаций

В рассматриваемом виде, изучаемые ниже обобщённые парные уравнения типа свёртки, при сделанных ниже предположениях, впервые, появились в работах автора. Они охватывают известные парные интегральные уравнения типа свёртки [1-4, 6, 10, 12-18]. Наиболее полная теория последних, в случае порождающих ядра функций  $k_{1,2}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ , в целом классе  $E$  банаховых пространств построена в [4]. В близкой к рассматриваемой в [12] и ниже постановке, но в других пространствах, эти парные интегральные уравнения изучались Черским Ю.И.; Черским Ю.И. и Гаховым Ф.Д. (1954, 1956; см. также [6]) при дополнительных ограничениях типа гёльдеровости функций. В этих исследованиях использован аппарат задачи Римана - Гильберта, на связь с которой впервые указал И.М. Рапопорт [1]. Наряду с этим, при изучении условия разрешимости некоторых видов уравнений разных классов, можно обнаружить существование свойства связи между решениями. При весьма общих предположениях, для них оказывается возмож-

ным, зная специальные решения, построить решения, соответствующие произвольной правой части. Это имеет место для ряда известных и новых классов уравнений. В том числе, важных при моделировании теоретических и прикладных задач [12 – 18, 21]. Например, обнаруживается связь между решениями, соответствующими произвольной и равной единице кольца (функций, матриц или абстрактных элементов, в котором отыскивается решение) правым частям. Для парных уравнений, в том числе типа свёртки, до работ автора, вопросы связи решений оставались не поставленными в общей форме и, в достаточно полном объёме, не были разрешены. База результатов установлена в [12]. Она связана с работами [1, 2, 4] - предшествующими составляющими замечательной истории исследования парных интегральных уравнений типа свёртки. В этих, а также иных работах, имеются и фрагменты историко-мотивационного характера [6].

**Цель статьи**

Целью статьи – второй части сообщения является доказательство сформулированной в представленной одновременно первой части: «Необходимое и достаточное условие связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки – I», теоремы - критерия связи решений абстрактных обобщённых парных интегральных уравнений типа свёртки относительно неизвестной функции  $\varphi(t)$  вида:

$$\begin{cases} \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)ds = \alpha\delta + f(t), & t < 0; \\ \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)ds = \beta\delta + g(t), & t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения (1) при  $\alpha=\beta=0$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  являются известными парными интегральными уравнениями типа свёртки [1, 2, 4, 6, 10, 12, 13]. Предполагается, что:

$$k_1(t), k_2(t) \exp\{ct\} \in L_1(-\infty, \infty); c \in \mathbb{R}, c \geq 0; \quad (2)$$

$$[1 - K_1(\lambda)][1 - K_2(\lambda - ic)] \neq 0, -\infty < \lambda < \infty; K_j(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} k_j(\zeta)e^{i\zeta t} dt; j = 1, 2. \quad (3)$$

**Основной материал и результаты**

Доказательство необходимого и достаточного условия - критерия связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки. Будем использовать обозначения, определения и общие положения из первой части сообщения. Для удобства, повторим формулировку доказываемой теоремы, а затем приведём, при рассматриваемых предположениях, доказательство теоремы-критерия непосредственно.

Теорема 3. Пусть  $k_1(t), k_2(t) \exp\{ct\} \in L_1(-\infty, +\infty); c \geq 0$ , т.е.  $k_1 \in L, k_2 \in L_{<c>}; c \geq 0$ , и выполнено условие (3), а парное интегральное уравнение с (1) с правой частью равной  $\delta$  (т.е. при  $\alpha\delta=\beta\delta=\delta; f(t)=g(t)=0$ ) имеет решение  $\varphi_\delta \in \tilde{L}_{0 \cap c}$ , причём,  $\varphi_\delta \equiv \varphi_\delta(t) = \delta + x_1; x_1(t) \in L_{0 \cap c}$  и

$$[1 + X_1(\lambda)] \bullet [1 + X_1(\lambda - ic)] \neq 0, -\infty < \lambda < +\infty. \quad (4)$$

Тогда для существования решений  $\varphi(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  парного интегрального уравнения (1) с произвольной из всевозможных правых частей  $\alpha\delta+f(t), -\infty < t < 0; \beta\delta+g(t), 0 < t < \infty$ ; где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}; f, g \in L_{0 \cap c}, c \geq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\alpha = \beta. \quad (5)$$

При его выполнении, решение  $\varphi(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  обобщённого парного интегрального уравнения типа свёртки (1) с произвольной правой частью  $\alpha\delta+f(t), -\infty < t < 0; \alpha\delta+g(t), 0 < t < \infty; \alpha \in \mathbb{C}; f, g \in L_{0 \cap c}; c \geq 0$  в  $\tilde{L}_{0 \cap c}$  можно определить по формуле:

$$\varphi(t) = \varphi_\delta * \{ p_-([\varphi_\delta]'_0 * [\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-]) + p^+([\varphi_\delta]'_c * [\delta + k_2^1] * [\alpha\delta + g_+]) \}(t), \quad (6)$$

где  $[\varphi_\delta]'_0, \delta + k_1^1 (:= [\delta - k_1]_0) \in \tilde{L}; [\varphi_\delta]'_c, \delta + k_2^1 (:= [\delta - k_2]_c) \in \tilde{L}_{<c>}$  - обратные в  $\tilde{L}, \tilde{L}_{<c>}$ ,

соответственно, для решения  $\varphi_\delta \in \tilde{L} \cap \tilde{L}_{<c>}$  и для коэффициентов  $[\delta - k_1(t)] \in \tilde{L}, [\delta - k_2(t)] \in \tilde{L}_{<c>}, c \geq 0$  парного уравнения (1).

Доказательство. Необходимость. Пусть при сделанных предположениях элемент  $\varphi \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  является решением уравнения (1). Тогда, используя введенные обозначения и проекторы, заключаем:

$$[(\delta - k_1) * \varphi(t)]^- = \alpha\delta + f_-(t), [(\delta - k_2) * \varphi(t)]^+ = \beta\delta + g_+(t). \tag{7}$$

Отсюда, применяя к обеим частям каждого из записанных равенств проектор  $p^0$ , получаем:

$$p^0 [(\delta - k_1) * \varphi] = p^0 [\alpha\delta + f_-] = \alpha\delta; p^0 [(\delta - k_2) * \varphi] = p^0 [\beta\delta + g_+] = \beta\delta.$$

Используя теперь гомоморфические свойства проектора  $p^0$ , заключаем, что  $\varphi^0 = \alpha\delta = \beta\delta$  и условие (5) действительно имеет место.

Достаточность. Пусть предположения теоремы 3 выполнены, имеют место условия (3) - (5) и в формуле (6):  $\varphi_\delta \equiv \varphi_\delta(t) = \delta + x_1$ ;  $x_1(t) \in L_{0 \cap c}$  ( $c \geq 0$ ), - удовлетворяющее условию (4) решение парного интегрального уравнения (1) с правой частью равной присоединенной единице  $\delta (= \delta(t))$ ; а  $[\varphi_\delta]_0', [\varphi_\delta]_c'$ ;  $\delta + k_j^1, j = 1, 2$  - обратные в банаховых алгебрах  $\tilde{L}, \tilde{L}_{(c)}$ , соответственно, элементы. Их существование гарантирует вариант теоремы Н. Винера, так как выполнены условия (3), (4). Знаками «+», «-» при функциях отмечено применение используемых проекторов [12]. Тогда:

$$([\delta - k_1] * \varphi_\delta)^- = ([\delta - k_2] * \varphi_\delta)^+ = \delta. \text{ Поэтому, } [\delta - k_1] * \varphi_\delta = \delta + a_+, [\delta - k_2] * \varphi_\delta = \delta + a_-;$$

где  $a_+ \in L^+, a_- \in L_{(c)}^-$  - некоторые элементы и справедливы представления:

$$[\varphi_\delta]_0' = [\delta + a_+]_0' * [\delta - k_1], [\varphi_\delta]_c' = [\delta + a_-]_c' * [\delta - k_2]. \tag{8}$$

Используя свойства представления Гельфанда элементов банаховых алгебр функциями на максимальных идеалах, получаем ещё такие представления:  $[\varphi_\delta]_0' = \delta + x_0^1 (x_0^1 \in L)$ ;  $[\varphi_\delta]_c' = \delta + x_c^1 (x_c^1 \in L_{<c>})$ , а с помощью (8) заключаем, что

$$p^0 [[\delta + a_+]_0'] = p^0 [[\delta + a_-]_c'] = \delta. \tag{9}$$

Легко видеть, что при любой правой части уравнения (1) с  $\alpha = \beta; \alpha, \beta \in C; f, g \in L_{0 \cap c}, c \geq 0$  правая часть формулы (6) определяет некоторую функцию (элемент)  $y(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$ . Переписывая уравнение (1) с помощью введенных обозначений в краткой форме (7) и подставляя этот элемент  $y(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  в левую часть (1) вместо  $\varphi(t)$ , в результате преобразований с учетом сделанных замечаний, включая (9), получим:

$$\begin{aligned} p^- [ \{ (\delta - k_1) * \varphi \} (t) ] &= \\ &= p^- [ \{ (\delta - k_1) * \{ \varphi_\delta * \{ p_- ([\varphi_\delta]_0' * [\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-]) + p^+ ([\varphi_\delta]_c' * [\delta + k_2^1] * [\alpha\delta + g_+]) \} \} (t) \} ] = \\ &= p^- [ \{ (\delta - k_1) * \varphi_\delta * \{ [\varphi_\delta]_0' * [\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-] - p^+ ([\varphi_\delta]_0' * [\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-]) \} \} (t) \} + \\ &+ p^- [ \{ (\delta + \dot{a}_+) * \{ p^+ ([\varphi_\delta]_c' * [\delta + k_2^1] * [\alpha\delta + g_+]) \} \} (t) \} ] = \\ &= \alpha\delta + f_-(t) - p^0 [ \{ [\delta + \dot{a}_+]_0' * [\alpha\delta + f_-] \} (t) ] + p^0 [ \{ (\delta + \dot{a}_+) * \{ p^+ ([\delta + \dot{a}_+]_c' * [\alpha\delta + g_+]) \} \} (t) ] = \\ &= \alpha\delta + f_-(t) - \alpha p^0 [ [\delta + \dot{a}_+]_0'(t) ] + \alpha p^0 [ [\delta + \dot{a}_+]_c'(t) ] = \alpha\delta + f_-(t) - \alpha\delta + \alpha\delta = \alpha\delta + f_-(t). \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что  $p^+ [ \{ (\delta - k_2) * \varphi \} (t) ] = \alpha\delta + g_+$ . Стало быть, действительно, формула (6) определяет решение уравнения (1) в рассматриваемой ситуации. Достаточность, а с нею и теорема доказана.

Общая формула представления решения  $\varphi_\delta$ , в предположении существования соответствующего типа факторизаций некоторых элементов, строящихся по ядрам парного интегрального уравнения вида (1) при  $c > 0$ , имеется в [12].

Иногда нахождение решения  $\varphi_\delta$  упрощается [17]. В частности, так может оказаться в случаях, когда порождающие ядра уравнения вида (1) функции  $k_j(t), j = 1, 2$  принадлежат соответствующим подалгебрам  $L^{\bar{+}}, L_{(c)}^{\bar{+}}$ . Например, если при условиях теоремы 3 будет  $k_1(t) = k_{1+}(t) \in L^+, k_2(t) = k_{2-}(t) \in L_{(c)}^-$ , решением уравнения (1) с правой частью равной  $\delta (= \delta(t))$  оказывается сама функция  $\delta (= \delta(t))$ . Для такого решения  $\varphi_\delta = \delta(t)$ , условие (4), очевидно, выполняется; формула связи решений (6) упрощается и принимает вид:

$$\varphi(t) = \{p_-([\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-]) + p^+([\delta + k_2^1] * [\alpha\delta + g_+])\}(t). \tag{10}$$

Укажем, что ряд положений к теореме 3 и аналогичным, для рассматриваемого случая  $c \geq 0$ , можно получить, используя факторизационные теоремы 1, 2 из результатов [15], установленных для абстрактных парных уравнений в кольцах с факторизационными парами:

$$(a_1x)^- = c^-, (a_2x)^+ = b^+. \tag{11}$$

Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение:

$$\begin{cases} x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)x(s)ds = c^-(t), t < 0, \\ x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)x(s)ds = b^+(t), t > 0; \end{cases} \tag{12}$$

где,  $k_1(t) = [e^{-2t}]_+; k_2(t) = [e^{5t}]_-; c^- = c^-(t) = c_-(t) \in L^-, b^+ = b^+(t) = b_+(t) \in L^+$ .

Полагаем,

$$a_1 = \delta(t) - k_1(t); a_2 = \delta(t) - k_2(t); \tag{13}$$

то есть:  $a_1 = \delta - [e^{-2t}]_+; a_2 = \delta - [e^{5t}]_-$ . Решением  $\varphi_\delta$  при  $c^- = c^-(t) = \delta, b^+ = b^+(t) = \delta, \delta \equiv \delta(t)$  очевидно, будет  $\varphi_\delta = \delta(t)$  - функция Дирака. Можно установить, что для функций (13), обратными в  $\tilde{L}$  будут:  $a'_1(t) = \delta + [e^{-t}]_+; a'_2(t) = \delta + [e^{4t}]_-$ . При любых  $c^- = c^-(t) = c_-(t) \in L^-, b^+ = b^+(t) = b_+(t) \in L^+$  условие (5), очевидно, выполнено:  $\alpha = \beta = 0$ . Следовательно, в силу **теоремы 3** решение  $\varphi(t) \in L$  уравнения (12) существует и допускает представление в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [a'_1 * c^-]_- + [a'_2 * b^+]^+ = \left[ (\delta + [e^{-t}]_+) * c^-(t) \right]_- + \left[ (\delta + [e^{4t}]_-) * b^+(t) \right]^+ = \\ &= c_-(t) + \left\{ [e^{-t}]_+ * c^-(t) \right\}_- + b^+(t) + \left\{ [e^{4t}]_- * b^+(t) \right\}^+. \quad \text{Отсюда, в } L : \\ \varphi(t) &= c_-(t) + b_+(t) + \left\{ (e^{-t})_+ * c_-(t) \right\}_- + \left\{ [e^{4t}]_- * b_+(t) \right\}_+. \end{aligned} \tag{14}$$

Результаты о парных уравнениях освещались автором, в частности, в рамках Международной конференции имени академика М. Кравчука в Киеве, КПИ-2010, 2012; - Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», в Москве, МГТУ-2013, а также в ОГАСА [21] и других.

### Выводы и перспективы

Имеются важные, в том числе ранее неизвестные положения исследований по теории интегральных уравнений типа свёртки, которые можно получать единым подходом. При нём, среди прочих, используются элементы строящейся теории уравнений в кольцах с факторизационными парами. Удаётся, не опираясь на теорию задачи Римана, сократить использование аппарата преобразований Фурье, снять условие гёльдеровости функций, охарактеризовать разрешимость уравнений и связь решений соответствующих произвольным и специальным правым частям. При весьма общих условиях, без требований гёльдеровости функций, доказана теорема с необходимым и достаточным условием (- критерием) связи их решений, соответствующих произвольной и равной присоединенной единице, исходных банаховых алгебр, правым частям. Использовались применяемые непосредственно к соответствующему случаю банаховых алгебр подходы, развиваемые для уравнений в абстрактных кольцах с факторизационными парами [15 - 17, 20]. При установлении вида формулы связи, существенно использованы варианты теоремы Н. Винера и факторизационных теорем [2, 4, 12 -14, 19, 20]. Результаты имеют теоретическое и практическое значение. Могут использоваться в соответствующих ситуациях при изучении конкретных примеров уравнений рассматриваемого вида (1). В перспективе возможно насыщение круга применимости новыми конкретными фактами для подклассов уравнений, исследование свойств связи для других специальных решений рассмотренного и иных классов уравнений.



## Список использованной литературы

1. Рапопорт И.М. О некоторых «парных» интегральных и интегро-диффер. уравнениях // Сборник трудов института математики АН УССР. - Киев: Институт математики АН УССР. -1949. -12. - С. 102-118.
2. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М.Г. Крейн // Успехи мат. наук. — 1958. — № 13, Вып. 5(83). — С. 3—120.
3. Попов Г.Я. О спаренных интегро-диффер. уравнениях изгиба лежащей на упругом основании неограниченной плиты кусочн-постоянной жесткости// Изв. высш. учебн. завед., Матем. - №1, 1957. - С. 195-209.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. О парном интегральном уравнении и его транспонированном I // Теорет. и прикл. математика. - Изд.-во Львовского ун.-та, 1958. - Вып. 1. - С. 58-81.
5. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1963. — 640 с.
7. Попов Г.Я. Метод факторизации и его численная реализация. Учебное пособие / Г.Я. Попов, П.В. Керекеша, В.Е. Круглов; под ред. проф. Г.Я. Попова. — Одесса: Одесский гос. университет, 1976. — 82 с.
8. Учебное пособие. Редактор: проф. Попов Г.Я. - Одесса: Одесский гос. университет, 1976. - 82 с.
9. Попов Г.Я. Контакт. задачи для лин.деформ. основан. Киев-Одесса: ВШ, 1982.-168 с.
10. Мхитарян С.М. О нектор. плоских контакт. задачах теор. упруг. с учётом сил сцепл. и связ. с ними интегр. и диффер. уравн. // Изв. АН Армянской ССР. Механика. - 1968. - XXI, №5-6. - С. 3-20.
11. Черский Ю.И. Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.
12. Акоюн В.Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом / В.Н. Акоюн, Л.Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тезисы докладов международной научной конференции (Одесса, 2013 г.). — Одесса, 2013. — С. 12.
13. Полетаев Г.С. Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 6. — С. 803—813.
14. Полетаев Г.С. Парні рівняння типу згортки з ядрами з різних банахових алгебр абсолютно інтегрованих з вагою функцій// НАУКОВІ ВІСТІ Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». - №4(24) , 2002. - С. 143-148.
15. Полетаев Г.С. Парные уравнения типа свёртки с ядрами из разных банаховых алгебр абсолютно интегрируемых по весу функций// Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 16 – 19 травня 2002 р., Київ. Матеріали конференції. – Київ, 2002. - С. 349.
16. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 9. — С. 1201—1213.
17. Poletaev G.S. Connection of solutions of the abstract paired equations in the rings with factorization pairs// Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 191. - 2009.- P. 479 - 484.
18. Полетаев Г.С. Критерий связи решений абстракт. парного уравн. в кольце с факторизационной парой// XIII МНК ім. акад. М. Кравчука.- НТУУ (КПІ) травень 2010 р., Київ. Матеріали конф. – Київ, 2010. - С.-220.
19. Полетаев Г.С. Связь решений парных интегральных уравнений типа свёртки// XIV МНК ім. академіка М. Кравчука. - НТУУ (КПІ) квітень 2012 р., Київ. Матеріали конференції II. – Київ, 2012. - С.-193.
20. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилев Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. - М.: Физматгиз, 1960. — 316 с.
21. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators - I: Algebraic Theory and Examples// J. Funct. Anal. - 1972. - 9, №3. - P. 262-295.
22. Полетаев Г.С. Критерий связи решений парных матричных уравнений с проекторами// ВІСНИК ОДАБА. – Одеса, 2013. – вип. 50, ч. 1. – С. 229 - 244.

УДК 510.8

Є.Є. САМОЙЛЕНКО

Чорноморський національний університет ім. Петра Могили

**НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ**

*Розглянуто алгоритм пошуку розв'язків невизначених звичайних, функціональних та операторних систем лінійних рівнянь методами оберненої матриці та редукції систем лінійних рівнянь.*

*Ключові слова: невизначені системи, лінійні рівняння, редукція, функціональні системи, операторні системи*

Е.Е. САМОЙЛЕНКО

Черноморский национальный университет им. Петра Могили

**НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Рассмотрен алгоритм поиска решений неопределённых обычных, функциональных и операторных систем линейных уравнений методами обратной матрицы и редукции систем линейных уравнений.*

*Ключевые слова: неопределённые системы, линейные уравнения, редукция, функциональные системы, операторные системы*

Ye.Ye. SAMOILENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

**UNDETERMINATE SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS**

*The algorithm of search solutions of undeterminate normal, functional and operational systems of linear equations by the inverse matrix method and the reduction method of system of linear equations was investigated.*

*Keywords: undefined systems, linear equations, reduction, functional systems, operator systems*

**Постановка проблеми**

Класичний метод оберненої матриці застосовується до визначених систем лінійних рівнянь, тобто якщо визначник основної матриці не дорівнює нулю. Виникає природне запитання: як модифікувати метод оберненої матриці так, щоб він був придатний для розв'язання невизначених систем лінійних рівнянь?

**Аналіз останніх досліджень**

Метод оберненої матриці є класичним методом, що входить у кожен підручник з вищої математики (див. [1 - 5]). Останнім часом з'явилося багато робіт, у яких виникають матричні оператори, елементами яких є числа, функції та оператори (див. [6 - 9]).

**Ціль дослідження**

Ціллю дослідження є модифікація методу оберненої матриці з метою його використання для невизначених звичайних, функціональних та операторних систем лінійних рівнянь.

**Основні результати**

Нехай задано систему  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими  $x_j \in \mathbf{R}$ ,  $j = \overline{1, n}$  (або  $x_j \in \mathbf{C}$ ) виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Числа  $a_{ij} \in \mathbf{R}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  (або  $a_{ij} \in \mathbf{C}$ ), також  $b_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$  (або  $b_i \in \mathbf{C}$ ). Таку систему лінійних рівнянь можна записати у матричній формі

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

або  $AX = B$ . Якщо визначник  $|A| \neq 0$ , тоді існує обернена матриця  $A^{-1}$  і розв'язок можна знайти

$$X = A^{-1}B,$$

або

$$X = \frac{1}{|A|} \tilde{A}B,$$

де  $\tilde{A}$  – матриця алгебраїчних доповнень.

Невірно стверджувати, що у випадку нульового визначника  $|A|=0$  систему лінійних рівнянь неможливо розв’язати методом оберненої матриці. Покажемо, що можна. Нехай ранг матриці  $A$  дорівнює  $n-1$ . Тоді існує ненульовий мінор порядку  $n-1$ , тобто  $M_{i_0 j_0} \neq 0$ . Тоді переходимо до редукованої системи лінійних рівнянь, тобто з системи (1) вилучаємо  $i_0$ -ве рівняння, а у рівняннях, що залишилися, з правої у ліву частину рівностей переносимо члени  $a_{ij_0} x_{j_0}$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{1(j_0+1)}x_{j_0+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 - a_{1j_0}x_{j_0}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{2(j_0+1)}x_{j_0+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 - a_{2j_0}x_{j_0}, \\ \vdots \\ a_{(i_0-1)1}x_1 + a_{(i_0-1)2}x_2 + \dots + a_{(i_0-1)(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{(i_0-1)(j_0+1)}x_{j_0+1} + \dots + a_{(i_0-1)n}x_n = b_{i_0-1} - a_{(i_0-1)j_0}x_{j_0}, \\ a_{(i_0+1)1}x_1 + a_{(i_0+1)2}x_2 + \dots + a_{(i_0+1)(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{(i_0+1)(j_0+1)}x_{j_0+1} + \dots + a_{(i_0+1)n}x_n = b_{i_0+1} - a_{(i_0+1)j_0}x_{j_0}, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{n(j_0+1)}x_{j_0+1} + \dots + a_{nn}x_n = b_n - a_{nj_0}x_{j_0}. \end{cases}$$

Відповідне матричне рівняння матиме вигляд

$$A(i_0, j_0)X(j_0) = B(i_0, j_0),$$

де

$$A(i_0, j_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j_0-1)} & a_{1(j_0+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j_0-1)} & a_{2(j_0+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i_0-1)1} & a_{(i_0-1)2} & \vdots & a_{(i_0-1)(j_0-1)} & a_{(i_0-1)(j_0+1)} & \vdots & a_{(i_0-1)n} \\ a_{(i_0+1)1} & a_{(i_0+1)2} & \vdots & a_{(i_0+1)(j_0-1)} & a_{(i_0+1)(j_0+1)} & \vdots & a_{(i_0+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j_0-1)} & a_{n(j_0+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X(j_0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j_0-1} \\ x_{j_0+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B(i_0, j_0) = \begin{pmatrix} b_1 - a_{1j_0}x_{j_0} \\ b_2 - a_{2j_0}x_{j_0} \\ \vdots \\ b_{i_0-1} - a_{(i_0-1)j_0}x_{j_0} \\ b_{i_0+1} - a_{(i_0+1)j_0}x_{j_0} \\ \vdots \\ b_n - a_{nj_0}x_{j_0} \end{pmatrix}.$$

Розв’язок такого рівняння існує за теоремою Кронекера-Капеллі і знаходиться

$$X(j_0) = A^{-1}(i_0, j_0)B(i_0, j_0)$$

Аналогічно знаходимо розв’язок системи для довільного рангу матриці  $A$ .

Нехай задано систему  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими виду

$$\begin{cases} \varphi_{11}(t)x_1 + \varphi_{12}(t)x_2 + \dots + \varphi_{1n}(t)x_n = b_1(t), \\ \varphi_{21}(t)x_1 + \varphi_{22}(t)x_2 + \dots + \varphi_{2n}(t)x_n = b_2(t), \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t)x_1 + \varphi_{n2}(t)x_2 + \dots + \varphi_{nn}(t)x_n = b_n(t). \end{cases} \quad (2)$$

І нехай функції  $\varphi_{ij}(t)$ ,  $x_j(t)$  та  $b_i(t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  неперервні на відрізку  $[0;1]$ . Аналогічно до системи (1) таку систему лінійних рівнянь можна записати у матричній формі  $\Phi(t)X(t) = B(t)$ . Якщо визначник  $|\Phi(t)| \neq 0$  для довільного  $t \in [0;1]$ , тоді існує обернена матриця  $\Phi^{-1}(t)$  і розв'язок можна знайти

$$X(t) = \Phi^{-1}(t)B(t),$$

або

$$X(t) = \frac{1}{|\Phi(t)|} \tilde{\Phi}(t)B(t).$$

Якщо ж існує лише одна точка  $t_0 \in [0;1]$  така, що  $|\Phi(t_0)| = 0$ , розв'язок може існувати, якщо  $X(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{|\Phi(t)|} \tilde{\Phi}(t)B(t)$  – неперервна функція на  $[0;1]$ . Зауважимо, що таких точок може бути і більше ніж одна – скінчена кількість, або навіть і злічена.

Нехай задано операторну систему  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими виду

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = y_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n = y_2, \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \dots + A_{nn}x_n = y_n. \end{cases} \quad (3)$$

Тут  $\hat{A} = \{ A_{ij} = A_{ij}^* \mid i, j = \overline{1, n} \}$ , – сім'я обмежених самоспряжених комутуючих операторів з  $L(L_2[0;1])$  та  $y_i, x_j \in L_2[0;1]$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Тоді сім'я  $\hat{A}$  відповідає сім'я спектральних мір  $E_{ij}$  та сумісна міра

$$E \left( \begin{matrix} n \\ \times \\ i, j=1 \end{matrix} \lambda_{ij} \right) = \prod_{i, j=1}^n E(\lambda_{ij}).$$

Спектральна теорема має вигляд

$$A_{ij} = \int_S \lambda_{ij} dE(\Lambda),$$

де  $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i, j=1, n} \in S$ , причому  $SuppE = \{ \cap \varphi \mid \varphi = \bar{\varphi} : E(\varphi) = I \}$  – сумісна міра,  $S$  – сумісний спектр,  $\sigma(A_{ij})$  – спектр оператора  $A_{ij}$  і має місце

$$S = SuppE \subseteq \prod_{i, j=1}^n SuppE_{ij} = \prod_{i, j=1}^n \sigma(A_{ij}).$$

Систему лінійних рівнянь (3) можна записати у матричній формі  $AX = B$ . Якщо  $\Delta(\Lambda) = \det \{ \lambda_{ij} \}_{i, j=1, n} \neq 0$  для довільного  $\Lambda \in S$ , тоді розв'язок можна знайти

$$X = \begin{pmatrix} \int_S \frac{\tilde{\lambda}_{11}}{\Delta(\Lambda)} dE(\Lambda) & \int_S \frac{\tilde{\lambda}_{12}}{\Delta(\Lambda)} dE(\Lambda) & \int_S \frac{\tilde{\lambda}_{1n}}{\Delta(\Lambda)} dE(\Lambda) \\ \int_S \frac{\tilde{\lambda}_{21}}{\Delta(\Lambda)} dE(\Lambda) & \int_S \frac{\tilde{\lambda}_{22}}{\Delta(\Lambda)} dE(\Lambda) & \int_S \frac{\tilde{\lambda}_{2n}}{\Delta(\Lambda)} dE(\Lambda) \\ \int_S \frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{\Delta(\Lambda)} dE(\Lambda) & \int_S \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{\Delta(\Lambda)} dE(\Lambda) & \int_S \frac{\tilde{\lambda}_{nn}}{\Delta(\Lambda)} dE(\Lambda) \end{pmatrix} \cdot B,$$

де матриця  $\{\tilde{\lambda}_{ij}\}_{i,j=1,n}$  – матриця алгебраїчних доповнень матриці  $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1,n}$ . Зауважимо, що при  $\Delta(\Lambda)=0$ , аналогічно до системи (1) виконується редукція системи операторних рівнянь.

#### Висновки

Метод оберненої матриці при незначній модифікації може використовуватися для розв'язування звичайних, функціональних та операторних систем лінійних рівнянь

#### Список літератури

1. Шкіль М. І. Вища математика / М. Л. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К.: Либідь, 1994. – 276 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.: Наука, 1985. – 383 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: Вища школа, 1993. – 647 с.
4. Барковський В. В. Основи елементарної математики / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К.: НАУ, 1999. – 236 с.
5. Самойленко Є. Є. Дослідження операцій / Є. Є. Самойленко. – К.: КСУ, 2008. – 76 с.
6. Samoilenko Ye.Ye., On Spectrum of Matrix-Valued Continuous Functions of a Family of Commuting Operators.// Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, – 2004. – 50, №3. – P. 1192–1194.
7. Самойленко Є.Є. Про спектр матричного оператора, елементами якого є тьопліцеві оператори з неперервними та кусково-неперервними символами на одиничному колі // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 1-2(13-14). – С. 129–137.
8. Мёрфи Д. С\*-алгебры и теория операторов / Д. Мёрфи. – М.: Факториал, 1997. – 336 с.
9. Крупник Н.Я. Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. – Кишинёв: Штиница, 1984. – 140 с.

## ІНЖЕНЕРНІ НАУКИ

УДК 539.3

Т.Е. АЛЕКСАНДРОВА, А.А. ЛАЗАРЕНКО

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ,  
ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТАНКОВУЮ ПУШКУ В НЕРАВНОМЕРНОМ  
КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТАНКА**

*Рассмотрена физическая картина и приведен анализ возмущений, действующих на основное вооружение танка в каналах горизонтального и вертикального наведения в условиях криволинейного неравномерного движения танка.*

*Ключевые слова: танковая пушка, инерционные внешние возмущения, неравномерное криволинейное движение.*

Т.Є. АЛЕКСАНДРОВА, А.О. ЛАЗАРЕНКО

Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут"

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ІНЕРЦІЙНИХ ЗБУРЕНЬ, ДІЮЧИХ НА ТАНКОВУ ГАРМАТУ  
В НЕРІВНОМІРНОМУ КРИВОЛІНІЙНОМУ РУСІ ТАНКА**

*Розглянута фізична картина і наведено аналіз збурень, діючих на основне озброєння танка в каналах горизонтального і вертикального наведення в умовах криволінійного нерівномірного руху танка.*

*Ключові слова: танкова гармата, інерційні зовнішні збурення, нерівномірний криволінійний рух.*

T.Ye. ALEKSANDROVA, A.A. LAZARENKO

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

**MATHEMATICAL MODELING OF INERTIAL PERTURBATIONS ACTING ON TANK GUN IN THE  
IRREGULAR CURVILINEAR TANK MOTION**

*The physical picture is considered and a perturbation analysis, acting on the main armament in the channels of horizontal and vertical guidance in a curvilinear irregular motion of the tank, is brought.*

*Keywords: tank gun, inertial external disturbances, irregular curvilinear motion.*

**Постановка проблеми**

Непрерывное повышение мощности силовых двигательных установок отечественных и зарубежных танков и, как следствие, рост показателей их подвижности и маневренности, привел к значительному возрастанию внешних возмущений, действующих на основное вооружение и обусловленных силами инерции, возникающими при криволинейном неравномерном движении танка. К таким силам относятся центробежные силы в повороте танка и силы инерции при изменении скорости его движения – ускорении или замедлении.

**Формулирование цели исследования**

Целью настоящей статьи является разработка методики расчета инерционных внешних возмущений, действующих на танковую пушку при неравномерном криволинейном движении танка.

**Изложение основного материала исследования**

Рассмотрим танковую башню с пушкой, представленную на рис. 1, в горизонтальной проекции при различных положениях башни относительно корпуса танка. Рис. 1а соответствует случаю, когда собственные продольные оси инерции корпуса и башни по направлению совпадают, а рис. 1б соответствует случаю, когда собственная продольная ось инерции башни повернута относительно собственной продольной оси корпуса танка на угол  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ . В первом случае поворот танка с текущим радиусом

$$R(t) = \frac{v(t)}{\dot{\psi}_k(t)}, \quad (1)$$

где  $v(t)$  – текущая скорость движения центра масс;  $\dot{\psi}_k(t)$  – угловая скорость поворота корпуса, вызывает появление центробежной силы  $F_y(t)$ , обусловленной центростремительным ускорением  $a_y(t)$  и приложенной к центру масс  $o_c$  башни с пушкой. Эта сила определяется зависимостью

$$F_y(t) = -m_{\sigma} a_y(t) = -\frac{m_{\sigma} v^2(t)}{R(t)} = -m_{\sigma} v(t) \dot{\psi}_k(t), \quad (2)$$

где  $m_{\sigma}$  – масса башни с пушкой, и является причиной увода оси канала ствола танковой пушки от направления на цель в горизонтальной плоскости наведения.

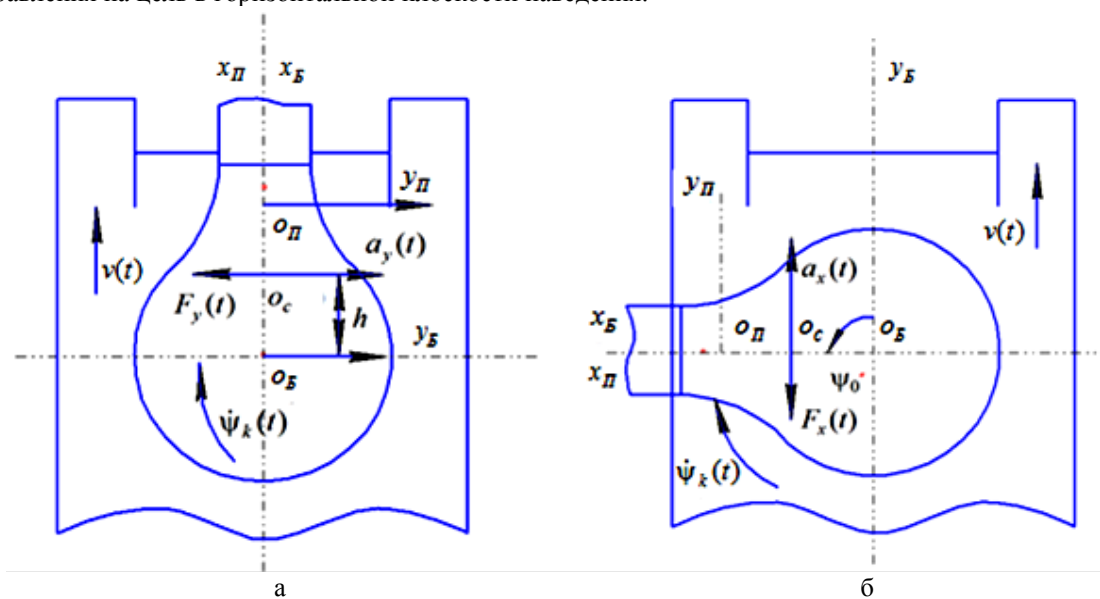


Рис. 1. К отысканию внешних воздействий на танковую башню.

Во втором случае, представленном на рис. 1б и соответствующем  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ , центробежная сила  $F_y(t)$  приложена вдоль продольной оси башни и не вызывает её поворота относительно оси поворота. Возмущающее воздействие на башню в этом случае оказывает инерциальная сила  $F_x(t)$ , обусловленная ускоренным (замедленным) движением корпуса танка, причем

$$F_x(t) = -m_{\sigma} a_x(t) = -m_{\sigma} \ddot{x}(t), \quad (3)$$

где  $a_x(t)$  – линейное ускорение (замедление) движение корпуса танка;  $x(t)$  – текущее линейное перемещение корпуса.

Очевидно, что при выполнении условия

$$0 \leq \psi_0(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

суммарный возмущающий момент, действующий на танковую башню определяется соотношением

$$M_{\psi}(t) = h[F_y(t) \cos \psi_0(t) + F_x(t) \sin \psi_0(t)] = -m_t h[\vartheta(t) \dot{\psi}_k(t) \cos \psi_0(t) + \ddot{x}(t) \sin \psi_0(t)], \quad (4)$$

где  $h$  – плечо приложения возмущающего усилия, равное расстоянию между центром тяжести и центром поворота башни.

При  $\psi_0 = 0$  соотношение (4) вырождается в формулу (2), а при  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  – в формулу (3).

Танковую пушку будем рассматривать в виде двухмассовой системы, схематически представленной на рис. 2.

Схема представляет собой массы  $m_c$  и  $m_k$ , связанными между собой жестким стержнем с шарниром в точке  $o_c$ , причем масса  $m_c$  равна массе ствола танковой пушки, а масса  $m_k$  равна массе казенной части танковой пушки, угол  $\varphi_0$  представляет собой текущий угол возвышения пушки, расстояния  $l_c$  и  $l_k$  соответствуют расстояниям от оси цапф до центров тяжести ствола и казенной части соответственно.

Рассмотрим схему танковой пушки в вертикальной плоскости, проходящей через продольную собственную ось корпуса танка, соответствующую случаю  $\psi_0(t) = 0$  и представленную на рис. 2а. Ускоренное (замедленное) движение танка с ускорением  $\ddot{x}(t)$  приводит к появлению инерционных сил  $F_{1x}(t)$  и  $F_{2x}(t)$ . Результирующие внешних сил, действующих на массы  $m_c$  и  $m_k$ , составляют

$$F_{1\varphi}(t) = F_{1x}(t) \sin \varphi_0(t) - G_c \cos \varphi_0(t); \quad (5)$$

$$F_{2\varphi}(t) = F_{2x}(t) \sin \varphi_0(t) - G_k \cos \varphi_0(t). \quad (6)$$

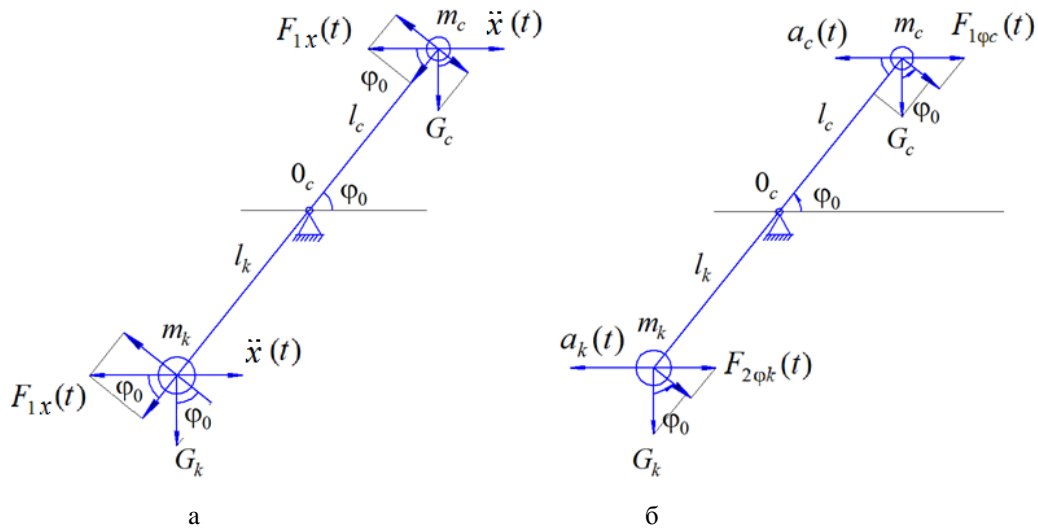


Рис. 2. К отысканию внешних воздействий на танковую пушку

Моменты внешних сил (5) и (6) направлены навстречу друг другу. Суммарный момент, действующий на пушку, определяется соотношением

$$\begin{aligned} M_{\varphi}(t) &= l_c F_{1\varphi}(t) - l_k F_{2\varphi}(t) = l_c [F_{1x}(t) \sin \varphi_0(t) - G_c \cos \varphi_0(t)] - \\ &- l_k [F_{2x}(t) \sin \varphi_0(t) - G_k \cos \varphi_0(t)] = -l_c m_c \ddot{x}(t) \sin \varphi_0(t) - l_c G_c \cos \varphi_0(t) + \\ &+ l_k m_k \ddot{x}(t) \sin \varphi_0(t) + l_k G_k \cos \varphi_0(t) = \ddot{x}(t) \sin \varphi_0(t) [l_k m_k - l_c m_c] + \\ &+ g \cos \varphi_0(t) [l_k m_k - l_c m_c]; \end{aligned} \quad (7)$$

Танковая пушка уравновешена относительно оси цапф. Условие равновесия можно записать в виде

$$G_c l_c = G_k l_k,$$

или

$$m_c l_c = m_k l_k. \quad (8)$$

С учетом уравнения (8) соотношение (7) записывается

$$M_{\varphi}(t) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, ускоренное (замедленное) движение танка не нарушает равновесия танковой пушки и не создает возмущающих моментов, приводящих к изменению положения пушки относительно оси цапф.

Рассмотрим влияние на танковую пушку центробежных сил, возникающих при повороте танка с угловой скоростью  $\psi_k(t)$ . Обозначим линейные скорости точек  $m_c$  и  $m_k$  соответственно через  $v_c$  и  $v_k$ , а радиус поворота оси цапф обозначим через  $R$ . Тогда линейные скорости точек  $m_c$  и  $m_k$  составляют

$$v_c(t) = \dot{\psi}_k(t) [R + l_c \cos \varphi_0(t)]; \quad (10)$$

$$v_k(t) = \dot{\psi}_k(t) [R - l_k \cos \varphi_0(t)]. \quad (11)$$

Центробежные силы, действующие на массы  $m_c$  и  $m_k$  определяются соотношениями:

$$F_{1\varphi c}(t) = m_c \dot{\psi}_k^2(t) [R + l_c \cos \varphi_0(t)]; \quad (12)$$

$$F_{2\varphi k}(t) = m_k \dot{\psi}_k^2(t) [R + l_k \cos \varphi_0(t)]. \quad (13)$$

Суммарный момент от действия моментов, создаваемых центробежными силами (12) и (13), составляет

$$\begin{aligned} M_{\varphi}(t) &= l_k F_{2\varphi k}(t) \sin \psi_0(t) - l_c F_{1\varphi c}(t) \sin \psi_0(t) = -\dot{\psi}_k^2(t) \sin \psi_0(t) \times \\ &\times \{m_c [R + l_c \cos \varphi_0(t)] l_c \sin \varphi_0(t) - m_k [R - l_k \cos \varphi_0(t)] l_k \sin \varphi_0(t)\} = \\ &= -\dot{\psi}_k^2(t) \sin \psi_0(t) \{ (m_c l_c - m_k l_k) R \sin \varphi_0(t) + m_c l_c^2 \cos \varphi_0(t) \sin \varphi_0(t) + \\ &+ m_k l_k^2 \cos \varphi_0(t) \sin \varphi_0(t) \}. \end{aligned} \quad (14)$$



С учетом условия равновесия (8) соотношение (14) принимает окончательный вид

$$M_{\varphi}(t) = -\dot{\psi}_k^2(t) \sin \psi_0(t) (m_c l_c^2 + m_k l_k^2) \cos \varphi_0(t) \sin \varphi_0(t). \quad (15)$$

Таким образом, соотношения (4) и (15) определяют моменты инерционных внешних возмущений, действующих на танковую башню и танковую пушку при криволинейном неравномерном движении танка.

Масса танковой башни с пушкой  $m_{\sigma}$  в современных танках составляет около трети общей массы танка, в связи с чем инерционный момент (4) может достигать значительных величин. Для повышения точности стабилизации оси канала ствола танковой пушки в канале горизонтального наведения украинских танков Т-64, Т-80УД и Т-84 вместо традиционного ПД-стабилизатора используется инвариантный стабилизатор, содержащий помимо гироскопических датчиков угла и угловой скорости еще и датчики линейных ускорений башни относительно её поперечной оси [1].

Анализ соотношения (15) показывает, что при малых значениях углов  $\psi_0(t)$  и  $\varphi_0(t)$  величина возмущающего момента  $M_{\varphi}(t)$  мала. Вместе с тем, при ведении танком боевых действий в гористой местности при значительных значениях углов  $\psi_0(t)$  и  $\varphi_0(t)$  момент (15) достигает высоких значений, что приводит к выводу о целесообразности использования инвариантного стабилизатора и в канале вертикального наведения танковой пушки [2].

### Выводы

Внешние инерционные возмущения, действующие на танковую башню с пушкой в канале горизонтального наведения, определяются действием центробежных сил, возникающих при повороте танка, и действием инерционных сил при ускорении или замедлении движения танка, а также текущим значением угла поворота башни относительно корпуса.

Внешние инерционные возмущения, действующие на танковую пушку в канале вертикального наведения, не зависят от ускорения или замедления движения корпуса танка, а определяются угловой скоростью поворота корпуса и текущим значением угла поворота башни относительно корпуса и угла возвышения пушки.

Для повышения точности стабилизации оси канала ствола танковой пушки относительно направления на цель целесообразно использование вместо традиционного ПД-стабилизатора инвариантного стабилизатора, как в канале горизонтального, так и в канале вертикального наведения.

### Список использованной литературы

1. Танк Т-64А. Техническое описание и инструкции по эксплуатации. – М.: МО СССР, 1973. – 332 с.
2. Пат. № 83903, Украина, МПК F41G 5/00. Стабілізатор танкової гармати / Т.Є. Александрова, А.О. Лазаренко. Заявник і патентоволодар Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут". – №U201300690; заявл. 21.01.2013; опубл. 10.10.2013. Бюл. №19. – 4 с.

УДК 631.313.02:531/534

Ю.О. ГУМЕНЮК, Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

### ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ СУТТЄВО-НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ У АНАЛІЗІ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ РОБОЧИХ ОРГАНІВ НА ПРУЖНІЙ ПІДВІСЦІ ПРИ ЇХ ВЗАЄМОДІЇ З ОБРОБЛЮВАНИМ ҐРУНТОМ

*Для аналізу вільних коливань у системі "робочий орган на пружній підвісці – оброблюваний ґрунт" використана модель суттєво нелінійної механічної системи. Розглянуті типові системи зі складними кусково-лінійними та поліноміальними пружними характеристиками симетричного/несиметричного кутів. Визначені періоди та власні частоти вказаних механічних систем, побудовані їх амплітудно-частотні характеристики.*

*Ключові слова: модель, суттєво-нелінійна система, механіка, аналіз, взаємодія, робочий орган, пружна підвіска, оброблюваний ґрунт, вільні коливання.*

Ю.О. ГУМЕНЮК, Ю.В. ЧОВНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ СУЩЕСТВЕННО-НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В АНАЛИЗЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАБОЧИХ ОРГАНОВ С УПРУГОЙ ПОДВЕСКОЙ ПРИ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ОБРАБАТЫВАЕМОЙ ПОЧВОЙ

*Для анализа свободных колебаний в системе "робочий орган на упругой подвеске – оброблювана ґрунт" использована модель существенно-нелинейной механической системы. Рассмотрены типовые системы со сложными кусочно-линейными и полиномиальными упругими характеристиками симметричного/несимметричного типов. Определены периоды и собственные частоты указанных механических систем, построены их амплитудно-частотные характеристики.*

*Ключевые слова: модель, существенно-нелинейная система, механика, анализ, взаимодействие, рабочий орган, упругая подвеска, оброблювана ґрунт, свободные колебания.*

Yu.O. GUMENYUK, Yu.V. CHOVNYUK

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

### USING THE MODEL OF THE ESSENTIALLY NONLINEAR MECHANICAL SYSTEM FOR ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF TILLAGE TOOLS IN THEIR INTERACTION WITH CULTIVATED SOILS

*For the analysis of free vibrations in the system "tillage tool – cultivated soil" the model of essentially-nonlinear mechanical system is used. The typical systems with difficult piecewise-linear and polynomial elastic characteristics with symmetrical/ nonsymmetrical types are considered. The period and the free vibrations of these mechanical systems are defined, their frequency response are constructed.*

*Keywords: model, essentially nonlinear system, mechanics, analysis, interaction, tillage tool, elastic suspension, cultivate the soil, free vibrations.*

#### Постановка проблеми

Одним із шляхів підвищення якості роботи ґрунтообробних знарядь та зниження енергомісткості обробки ґрунту є створення конструкцій пружних механізмів, які встановлюються між робочим органом і рамою машини (пружні механізми-пружні підвіски). Такі механізми сприяють появі самозбуджуваних коливань робочих органів, що покращує очищення робочих органів від нависань рослинних решток й ґрунту, а також знижує тяговий опір. Ефект самозбудження коливань може знайти широке застосування у багатьох технологічних процесах землеробської механіки. Зараз виробники ґрунтообробної техніки широко використовують цю ідею.

Пружні механізми використовуються у наступних варіантах: 1) триланцюговий механізм з одним пружним ланцюгом; 2) п'ятиланцюговий з одним пружним ланцюгом; 3) пружна стійка чи пружні елементи навіски.

Аналіз таких пружних механізмів показує, що незважаючи на широкий спектр конструктивних рішень всі вони мають нелінійну жорсткість. Однак сьогодні немає достатньо глибокого аналізу й методу розрахунку таких механізмів. На жаль, ці механізми, як правило, багатьма конструкторами розглядаються як запобіжні пристрої, а не джерела самозбудження коливань.

Дослідження характеристики жорсткості показують, що графіки силових характеристик усіх зазначених вище систем мають нелінійний характер [1-3].

При постановці задач механіки взаємодії робочих органів на пружній підвісці з оброблюваним середовищем треба враховувати всі джерела нелінійності: 1) особливості конструкції навіски; 2) нелінійне тертя (в'язкість) середовища; 3) приєднана до робочого органу маса ґрунту (змінна у часі); 4) нелінійна жорсткість підвіски.

Всі ці причини іноді вносять нездоланні труднощі у постановці задач механіки взаємодії робочих органів на пружній підвісці з ґрунтом. Нелінійні коливання мають широкий спектр специфічних механічних явищ і ефектів, використання яких у технологічних процесах дозволяє суттєво підвищити технологічну й енергетичну ефективності. Тому вивчення і дослідження подібних систем є актуальним й необхідним для оптимізації режимів їх функціонування.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз великої кількості точних розв'язків у нелінійних неавтономних коливних системах спонукав автора [4] до ствердження, про те, що основні нелінійні ефекти у цих системах є проявом внутрішніх коливних властивостей системи, тобто вільних коливань. Цієї точки зору у різних степенях притримуються автори ряду робіт по нелінійним коливанням [5-7], однак багато дослідників не враховують взаємні зв'язки вільних та вимушених резонансних коливань, що для низки випадків призводить до неточних якісних висновків, які здійснюються на основі результатів наближеного аналізу (наприклад, даних про залежність порядку можливих субгармонічних режимів у симетричних системах [8] чи про малість амплітуди супергармонічних коливань).

Зазначений у роботі [4] підхід передбачає, що у системах визначальну роль при коливаннях грають пружні відновлюючі сили. Тому з'являється можливість на основі аналізу вільних коливань системи і параметрів вимушеної сили передбачати можливість тих чи інших нелінійних ефектів без звичайних математичних викладок.

У даній роботі розглянуті вільні коливання у нелінійних недисипативних системах з одним ступенем вільності руху з типовими пружними характеристиками, для котрих справедливе рівняння:

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (1)$$

Основна увага приділена побудові амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) – кривих вільних коливань (скелетних кривих) та їх аналізу у системах з різними видами пружних характеристик  $f(x)$ , які моделюють взаємодію робочих органів на пружній підвісці з оброблюваним ґрунтом. Вільні коливання, як зазначено вище, характеризують внутрішні коливні властивості нелінійної системи, які проявляють себе при зовнішньому впливі на неї. За видом скелетної кривої й параметрами зовнішнього збудження можна прогнозувати появу різноманітних нелінійних ефектів, таких, як суб- та супергармонічні коливання, багаторежимність тощо.

У даній роботі розглянуті вільні коливання у системах з гладкими пружними характеристиками, котрі задані одним аналітичним виразом, а також у системах з кусково-неперервними характеристиками, котрі описуються кількома аналітичними виразами, у т.ч. у системах з різними кусково-лінійними характеристиками (з натягом, з триланцюговою, з поліноміальною) симетричного/несиметричного типів.

#### Формулювання мети дослідження

Мета роботи полягає у встановленні основних характеристик вільних коливань суттєво-нелінійних механічних систем, які мають типові пружні характеристики. Отримання точних розв'язків рівняння вільних коливань (1) дозволяє досліджувати нелінійні механізми взаємодії робочих органів на пружній підвісці з оброблюваним ґрунтом.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Використовуючи підхід роботи [4], визначимо період  $T$ , частоту власних коливань  $p$  та АЧХ для типових пружних характеристик системи  $f(x)$ .

Розглянемо спочатку симетричні пружні характеристики ( $f(x) = -f(-x)$ ).

1.  $f(x) = a \cdot x^3, a > 0$  (рис. 1, а). На рис. 1, б зображена АЧХ для цього випадку. Використовуючи результати робіт [4, 9], та за допомогою таблиць еліптичних інтегралів знаходимо:

$$T = \frac{7,4164}{a \cdot \sqrt{a}}; p = \frac{\pi \cdot a \cdot \sqrt{a}}{3,7082}.$$

Отже, частота вільних коливань у першому випадку лінійно зростає при зростанні їх амплітуди  $a$ .

2. Симетричні системи з натягом.

Система з достатньою жорсткістю,  $p_1^2 > 0$  зображена на рис. 2, а.

Для періоду  $T$  та частоти  $p$  вільних коливань знаходимо:

$$T = \frac{4}{p_1} \cdot \arccos \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{ap_1^2}{f}\right)} \right\}; \quad p = \frac{p_1 \cdot \pi}{2 \arccos \left\{ \left(1 + \frac{ap_1^2}{f}\right)^{-1} \right\}} \quad (2)$$



Рис.1. Поліноміальна пружна характеристика  $f(x)$  та АЧХ системи

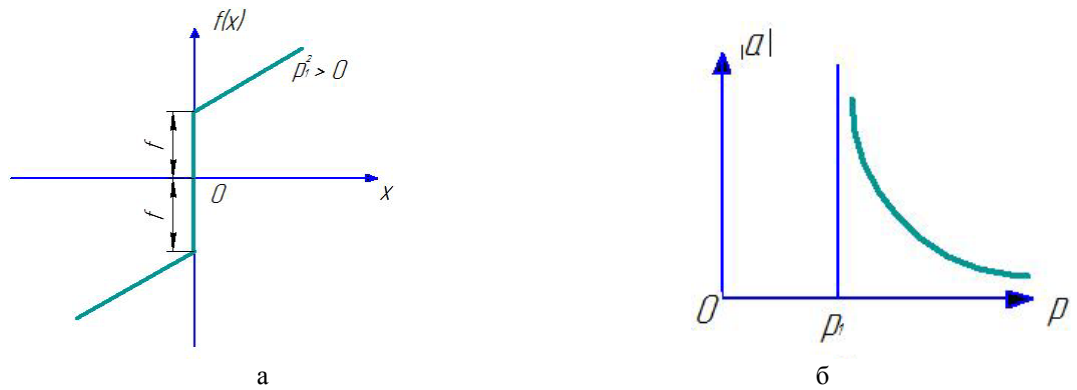


Рис. 2. Система (симетрична) з додатною жорсткістю  $p_1^2 > 0$  й натягом ( $f$ ):  
а - нелінійна характеристика; б - АЧХ системи

3. Несиметричні системи з натягом.

Система з несиметричною пружною характеристикою зображення рис. 3, а.

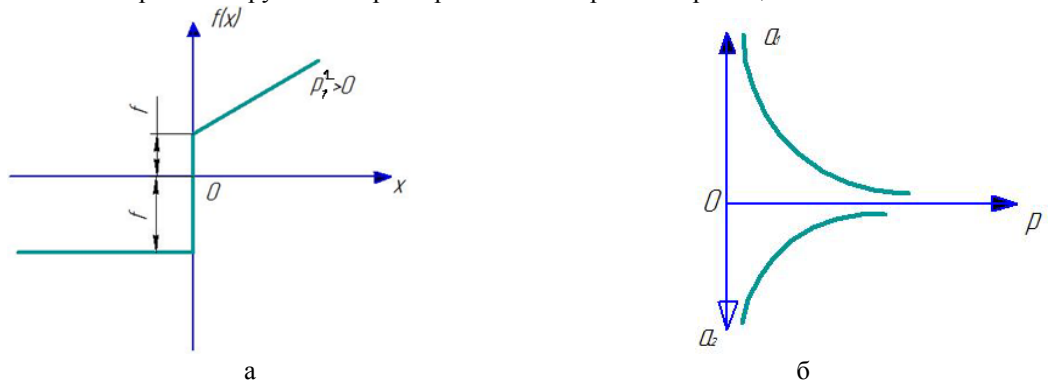


Рис. 3. Несиметрична система з натягом і додатною жорсткістю  $p_1^2 > 0$ :  
а - нелінійна пружна характеристика; б - АЧХ

Вирази для частоти  $p$  і періоду  $T$  власних коливань системи можна знайти зі співвідношення:

$$p = \frac{\pi}{\left\{ \frac{1}{p_1} \right\} \cdot \arccos \left( \left[ 1 + \frac{a_1 p_1^2}{f_1} \right]^{-1} \right) + \sqrt{\frac{2a_2}{f_2}}}, \quad T = \frac{2\pi}{p} \quad (3)$$

Максимальне значення змінної  $x$  при відхиленні вліво складає:

$$p = \frac{1}{f_2} \cdot \left( f_1 + \frac{p_1^2 \cdot a_1}{2} \right) \cdot a_1 . \tag{4}$$

4. Система з білінійною пружною характеристикою зображена на рис.4, а. Залежність між максимальними зміщеннями ( $a_1$  та  $a_2$ ) приймає наступний вид:

$$a_2 = \left( \Delta^2 - 2\Delta \cdot (a_1 - \Delta) + (a_1 - \Delta)^2 \cdot \frac{p_1^2}{p_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{5}$$

Частоту вільних коливань ( $p$ ) та період знаходимо наступним чином:

$$\tilde{p} = \frac{\pi}{\left\{ \frac{1}{p_2} \cdot \arccos \left[ \frac{1}{1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \cdot \left( \frac{a_1 - \Delta}{\Delta} \right)} \right] + \frac{1}{p_1} \cdot \arccos \left( \frac{\Delta}{a_2} \right) \right\}} , T = \frac{2\pi}{\tilde{p}} . \tag{6}$$

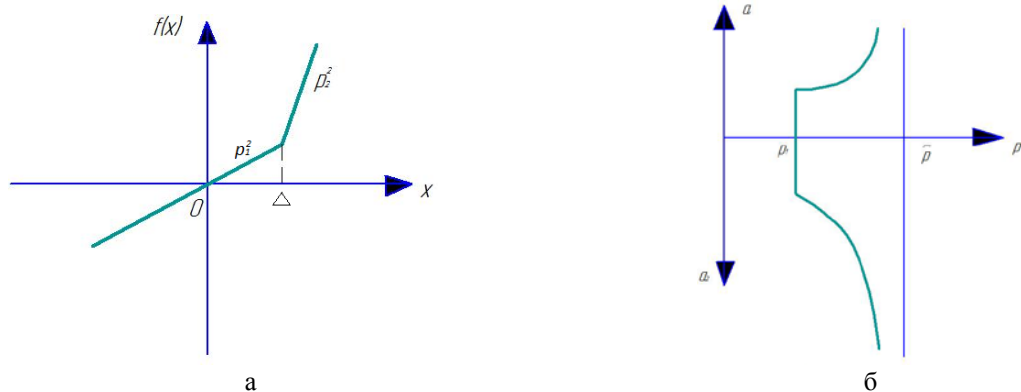


Рис. 4. Система з білінійною пружною характеристикою: а - нелінійна пружна характеристика; б - АЧХ.

Слід зазначити, що збільшення жорсткості пружного упору призводить лише до обмеженого зростання частоти вільних коливань; при  $p_2^2 = \infty$  (т.з. віброударна система з одностороннім обмежувачем ходу/руху) максимальне значення частоти вільних коливань  $p = 2p_1$ .

У випадку  $\Delta = 0$  (рис.5, а) з (6) маємо:

$$\tilde{p}^* = \frac{2p_1 \cdot p_2}{p_1 + p_2} , T = \frac{2\pi}{\tilde{p}^*} , \tag{7}$$

тобто частота вільних коливань у системі з білінійною характеристикою зі зломом у точці  $x=a$  є постійною і не залежить від початкових умов (рис. 5, б). Хоча, слід зазначити, що незважаючи на це деякі нелінійні ефекти у цій системі, наприклад, самозбудження субгармонійних коливань, проявляє себе найбільш потужно.

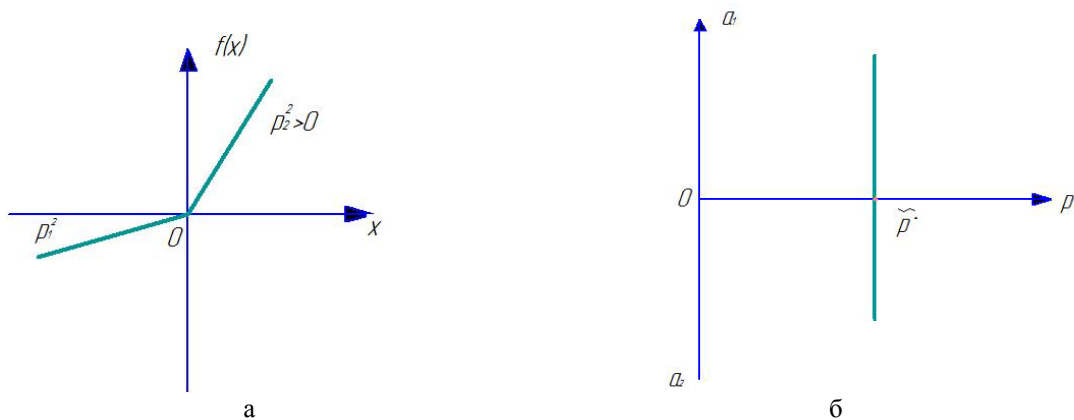


Рис. 5. Система з білінійною пружною характеристикою ( $\Delta = 0$ ): а - нелінійна пружна характеристика; б - АЧХ.

5. Система (симетрична, жорстка) з триланцюговою пружною характеристикою зображена на рис. 6, а.

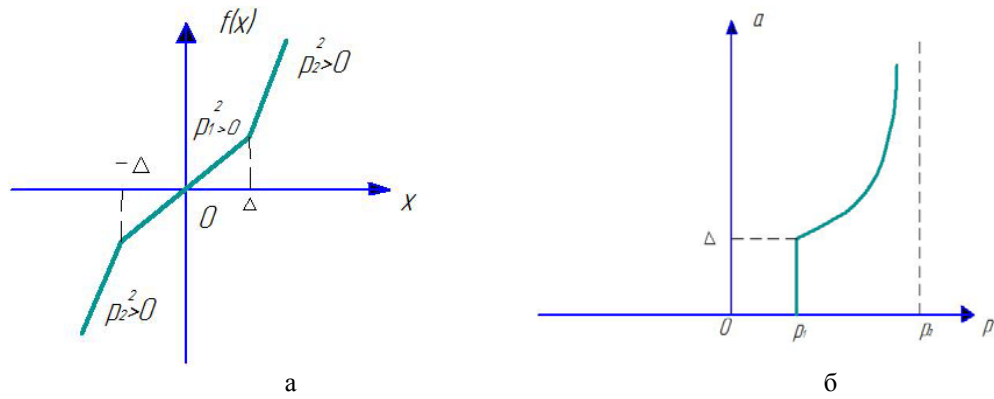


Рис.6. Система з симетричною жорсткою триланцюговою пружною характеристикою:

а - нелінійна пружна характеристика; б - АЧХ ( $p_2^2 > p_1^2$ ).

Аналітичний вираз для триланцюгової симетричної жорсткої пружної характеристики має вид:

$$f(x) = \begin{cases} p_1^2 x, & |x| \leq \Delta; \\ p_2^2 \cdot x - (p_2^2 - p_1^2) \cdot \Delta \cdot \text{sign } x, & |x| \geq \Delta. \end{cases} \quad (8)$$

Час руху на ділянці  $\Delta \leq x \leq a$  визначаємо, використовуючи співвідношення:

$$t_2 = \frac{1}{p_2} \cdot \arccos \left\{ \frac{p_1^2 \cdot \Delta}{p_1^2 \cdot \Delta + p_2^2 (a - \Delta)} \right\}. \quad (9)$$

Час руху на ділянці  $0 \leq x \leq \Delta$  знаходимо зі співвідношення:

$$t_1 = \frac{1}{p_1} \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctg \left[ \frac{(a - \Delta) \cdot p_2 \cdot \sqrt{1 + \frac{2p_1^2 \Delta}{(a - \Delta) \cdot p_1^2}}}{p_1 \cdot \Delta} \right] \right\}. \quad (10)$$

(Тут для визначення швидкості у точці  $x = \Delta$  використані залежності з [4].

Для періоду власних коливань  $T$  та частоти власних коливань  $\tilde{p}^*$  маємо:

$$T = 4 \cdot (t_1 + t_2); \tilde{p} = \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{p_2} \cdot \arccos \left( \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{p_1} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\left( \frac{a}{\Delta} - 1 \right) \cdot (1 + \beta)} \right) \right\}^{-1}, \quad (11)$$

$$\beta = 1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \cdot \left( \frac{a}{\Delta} - 1 \right).$$

б. Система (симетрична, м'яка) з триланцюговою пружною характеристикою зображена на рис.7, а.

Аналітичний вираз для триланцюгової симетричної м'якої пружної характеристики має вид (8), проте тепер  $p_2^2 < p_1^2$ . Період  $T$  та частота  $\tilde{p}$  власних коливань визначаються за формулами (9) – (11):

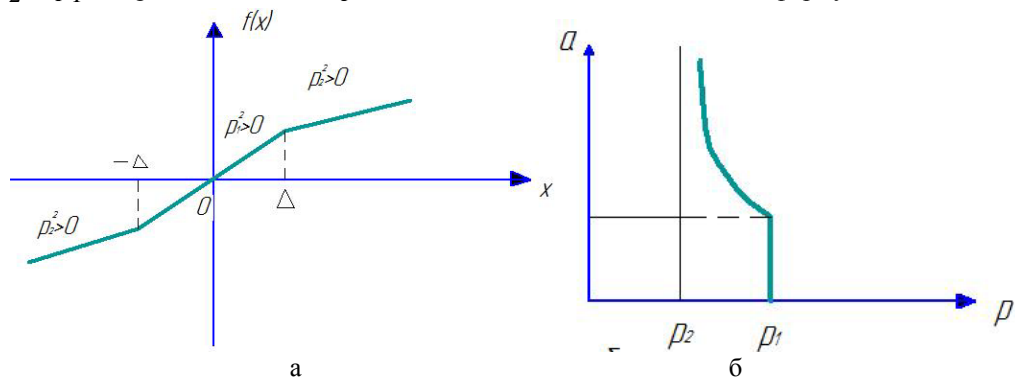


Рис.7. Система з симетричною м'якою триланцюговою пружною характеристикою:

а - нелінійна пружна характеристика; б - АЧХ ( $p_2^2 < p_1^2$ )

7. Система з несиметричною кривою триланцюговою пружною характеристикою зображена на рис.8, а. Аналітичний вираз для пружної характеристики вказаної системи має наступний вид:

$$f(x) = \begin{cases} p_2^2 \cdot x - (p_2^2 - p_1^2) \cdot \Delta_1, & X \geq \Delta_1; \\ p_1^2 \cdot x, & -\Delta_2 \leq x \leq \Delta_1; \\ p_3^2 \cdot x + (p_3^2 - p_1^2) \cdot \Delta_2, & x \leq -\Delta_2. \end{cases} \quad (12)$$

Якщо  $p_2^2 > p_1^2, p_3^2 > p_1^2$  тоді ця характеристика визначається як "жорстка", якщо  $p_2^2 < p_1^2, p_3^2 < p_1^2$ , тоді ця характеристика відповідає визначенню "м'яка". У випадку коли  $p_2^2 > p_1^2, p_3^2 < p_1^2$  – правостороння-жорстка й лівостороння м'яка; коли  $p_2^2 < p_1^2, p_3^2 > p_1^2$  – правостороння-м'яка й лівостороння жорстка. На рис. 8, а зображена право- й лівостороння-жорстка.

Період вільних коливань, котрі охоплюють всі три ділянки руху, має наступний вид:

$$\begin{cases} T = 2 \cdot (t_1 + t_2 + t_3), & t_1 = \frac{1}{p_1} \cdot \left\{ \pi - \arctg \left[ \sqrt{\left( \frac{a_1}{\Delta_1} - 1 \right) (1 - \beta_2)} \right] - \arctg \left[ \sqrt{\left( \frac{a_2}{\Delta_2} - 1 \right) (1 - \beta_3)} \right] \right\}, \\ t_2 = \frac{1}{p_2} \arccos \left( \frac{1}{\beta_2} \right); & t_3 = \frac{1}{p_3} \arccos \left( \frac{1}{\beta_3} \right). \end{cases} \quad (13)$$

У цих випадках:

$$\beta_i = 1 + \frac{p_i^2}{p_1^2} \cdot \left( \frac{a_{i-1}}{\Delta_{i-1}} - 1 \right), \quad i = \overline{(2,3)}. \quad (14)$$

Частота вільних коливань, з урахуванням (13), (14) набуває вигляду:

$$\tilde{p} = \pi \cdot \{t_1 + t_2 + t_3\}^{-1}. \quad (15)$$

Залежність між максимальними відхиленнями  $a_1$  та  $a_2$ , які відповідають рухам  $x > 0$  й  $x < 0$  відповідно, має вид:

$$a_2 = \left( 1 - \frac{p_1^2}{p_3^2} \right) \cdot \Delta_2; \quad a_1 = \left( \frac{p_1^4}{p_3^4} \Delta_2^2 - \frac{p_1^2}{p_3^2} \cdot (\Delta_2^2 - 2\Delta_1 a_1 + \Delta_1^2) + \frac{p_2^2}{p_3^2} (a_1 - \Delta_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Амплітудно-частотні залежності (АЧХ) для цієї системи наведені на рис. 8, б.

При збільшенні розкиду коливань частота вільних коливань прямує до  $\tilde{p}^* = \frac{2p_1 \cdot p_3}{p_1 + p_3}$ .

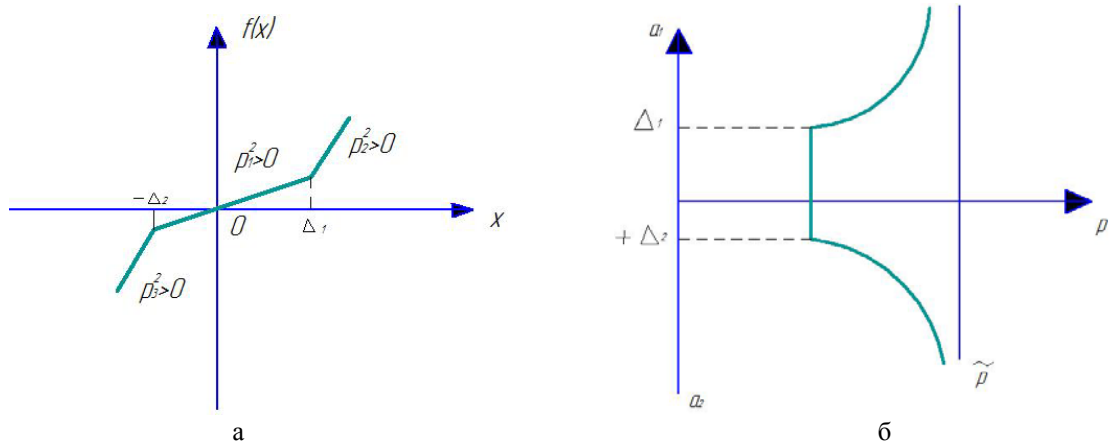


Рис. 8. Система з несиметричною жорсткою триланцюговою пружною характеристикою: а - нелінійна пружна характеристика; б - амплітудно-частотна характеристика (АЧХ),  $p_2^2 > p_1^2, p_3^2 > p_1^2$ .

### Висновки

1. Вид скелетних кривих грає суттєву роль при прогнозуванні можливих видів коливань у суттєво-нелінійних механічних системах з кусково-ламанною пружною характеристикою. У зв'язку з цим у даній роботі дана оцінка якості поведінки скелетних кривих для систем з типовими симетричними й несиметричними нелінійними пружними характеристиками, які моделюють взаємодію та вільні коливання

робочих органів на пружній підвісці, котрі обробляють ґрунт. При цьому детальний аналіз можливих вільних коливань здійснений на основі дослідження отриманих АЧХ і залежностей вказаних коливань.

2. Для пружних характеристик жорсткого типу скелетна крива має нахил вправо; для пружних характеристик м'якого типу – нахил вліво. Для цих характеристик АЧХ вільних коливань, тобто скелетна крива, є однозначною.

3. Збільшення жорсткості пружної характеристики на деякій ділянці призводить до викривлення скелетної кривої вправо (у бік високих частот). Зменшення жорсткості пружної характеристики викривляє скелетну криву вліво (в бік низької частоти).

4. Якщо жорсткість пружної характеристики  $df/dx = p_x^2$  при  $a_1 \rightarrow \infty$  (чи  $a_2 \rightarrow -\infty$ ) прямує до скінченної границі, тоді асимптотою скелетної кривої є вертикальна пряма. Зокрема, збільшення жорсткості одностороннього пружного упору до нескінченності (віброударна механічна система) призводить лише до обмеженого зростання частоти вільних коливань. Тому скелетні криві, які відповідають кусково-лінійним пружним характеристикам, завжди мають вертикальні асимптоти, на відміну від пружних характеристик поліноміального типу, для котрих асимптотами є похилі криві чи прямі.

5. Близькість скелетної кривої до вертикальної прямої не завжди свідчить про малу нелінійність пружної характеристики для несиметричних систем. Наприклад, білінійній пружній характеристиці  $f(x)$  зі зломом у точці  $x=0$ , яка є суттєво-нелінійною характеристикою, відповідає скелетна крива у вигляді вертикальної прямої (рис. 5, б).

6. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення інженерних розрахунків режимів коливань робочих органів на пружній підвісці при їх взаємодії з оброблювальним ґрунтом, як на стадіях проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

#### Список використаної літератури

1. Шевченко И.А. Экспериментально-теоретические обоснование параметров рабочих органов с упругими стойками культиваторов для предпосевной обработки почв: Дисс...канд. техн. наук / И.А. Шевченко. – М., 1988 – 176 с.
2. Кушнарёв С.А. Обоснование энергосберегающих технологических процессов обработки почвы и параметров упругих рабочих органов для условий южной степной зоны Украины: Дисс... канд. техн. наук / С.А. Кушнарёв. – Глеваха, 1988. – 194 с.
3. Кушнарёв А. Механика взаимодействия рабочих органов на упругой подвеске с почвой / А. Кушнарёв, И. Шевченко, В. Дюжаев, С. Кушнарёв // Техніка АПК. – 2008. – №8. – С. 22-25.
4. Закрижевский М.В. Колебания существенно-нелинейных механических систем / М.В. Закрижевский. – Рига: Зинатне, 1980. – 190 с.
5. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
6. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963. – 410 с.
7. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем / М.З. Коловский. – М.: Наука, 1996. – 318 с.
8. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
9. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.



УДК 001.5.629.11.534.143

В.А. ДЗЕНЗЕРСКИЙ, Н.А. РАДЧЕНКО, Н.М. ХАЧАПУРИДЗЕ

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины

О.В. ЗВОНАРЕВА

Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика Лазаряна

## КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕВИТАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ ЭКИПАЖА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ НЕТРАДИЦИОННОЙ КОНСТРУКЦИИ

*Предложена новая схема электродинамической транспортной системы, две пары из четырех полос путевых контуров которых уложены на разных половинках плоскостей относительно продольной оси путевой структуры, наклоненных к горизонтальной плоскости в поперечном направлении также как и плоскости двух рядов сверхпроводящих магнитов. Для экипажей этой системы оценены колебания и устойчивость левитационного движения в прямолинейных и криволинейных участках пути.*

*Ключевые слова: электродинамический транспорт, путевая структура, сверхпроводящие магниты, левитация*

В.А. ДЗЕНЗЕРСКИЙ, Н.А. РАДЧЕНКО, Н.М. ХАЧАПУРИДЗЕ

Институт транспортних систем і технологій НАН України

О.В. ЗВОНАРЕВА

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка Лазаряна

## КОЛИВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ЛЕВИТАЦІЙНОГО РУХУ ЕКІПАЖУ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНОЇ ТРАНСПОРТНОЇ СИСТЕМИ НЕТРАДИЦІЙНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

*Запропонована нова схема електродинамічної транспортної системи, дві пари з чотирьох полос шляхових контурів якої укладені на різних половинках площин відносно поздовжньої осі шляхової структури, що мають ухил до горизонтальної площини в поперечному напрямку також як і площини двох рядів надпровідних магнітів. Для екіпажу цієї системи оцінені коливання та стійкість левітаційного руху в прямолінійних та криволінійних ділянках шляху.*

*Ключові слова: електродинамічний транспорт, шляхова структура, надпровідні магніти, левітація*

V.A. DZENZERSKIY, N.A. RADCHENKO, N.M. KHATCHAPURIDZE

Institute of Transport Systems and Technologies of NASU.

O.V. ZVONAROVA

Dnipropetrovsk national university of railway transport.

## OSCILLATIONS AND STABILITY OF LEVITATING MOTION OF ELECTRODYNAMIC TRANSPORT SYSTEM ALTERNATIVE CONSTRUCTION

*A new scheme of electrodynamic transport system with four lanes of travel circuits on a flat track structure is proposed. The circuits, as well as the superconducting magnets, are inclined to the horizontal plane in the transverse direction. Oscillations and stability of levitation motion of this system in the rectilinear and curvilinear sections of the track are investigated.*

*Keywords: electrodynamic transport, track structure, superconducting magnets, levitation*

### Постановка проблемы

В предлагаемой конструктивной схеме электродинамической системы предусмотрена укладка 4-х полос контуров, каждые две пары которых уложены на полуплоских участках путевой структуры, наклоненных относительно горизонтальной плоскости в поперечном противоположном направлении ( $\gamma = 0,1$  рад) также как и две пары сверхпроводящих магнитов (см. рис. 1). Длина соленоидов сверхпроводящих магнитов и путевых контуров принята равной 1,2 и 1 м, а их ширина соответственно 0,5 и 0,3 м. Расстояние между соседними контурами в продольном направлении принято 1,2 м, а в поперечном – 0,04 м, диаметр прутков путевых контуров прямоугольного очертания в плане 0,13 м.

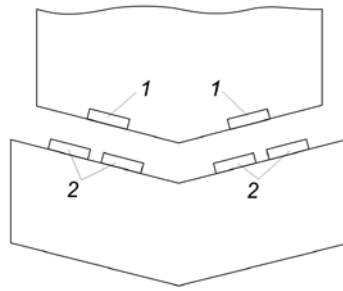


Рис.1 Схема взаимодействия магнитов (1) и путевых контуров (2)

**Анализ публикаций по теме исследования**

В институте транспортных систем и технологий НАН Украины выполнен большой цикл работ, посвященных данной тематике [1]. Однако, оговоренные выше особенности транспортной системы не принимались во внимание.

**Цель статьи**

Цель статьи: оценить устойчивость левитационного движения экипажа этой системы вдоль путевой структуры в случае, когда на каждой из двух тележек экипажа крепятся по 16 сверхпроводящих магнитов и четыре полосы путевых контуров.

**Основная часть**

Оценку левитационного движения экипажей будем проводить на основании исследований их пространственных колебаний при движении по прямолинейным и криволинейным участкам путевой структуры (постоянной и переменной кривизны). При этом считаем, что экипаж представляет собой электродинамическую систему, состоящую из трех твердых тел (кузова и двух тележек), к которым жестко прикреплены на их горизонтальных поверхностях сверхпроводящие магниты. В качестве обобщенных координат были выбраны вертикальные  $z$  и поперечные  $y$  перемещения твердых тел системы (координата  $z$  направлена сверху вниз), их угловые перемещения  $\theta, \varphi, \psi$ , соответствующие боковой качке, галопированию и вилянию, а также токи в путевых контурах.

Математическая модель движения каждого из исследуемых экипажей была представлена в виде связанных дифференциальных уравнений Лагранжа, описывающих пространственные перемещения твердых тел системы, и уравнений токов в токопроводящих контурах путевой структуры. Подробно математическая модель движения экипажа не приводится из-за ее громоздкости, поэтому приведем математическую модель движения экипажа в общем виде.

Уравнения движения экипажа и изменения токов можно получить с помощью уравнений Лагранжа II-го рода, которые можно представить в виде:

$$D_{qv} + \Pi_{qv} + \Phi_{qv} = Q_v, \quad (v = 1, 2, \dots, N), \tag{1}$$

и уравнений токов, которые в матричном виде имеют вид:

$$L \frac{dI}{dt} + rI = f, \tag{2}$$

где

$$D_{qv} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v}; \quad \Pi_{qv} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_v}; \tag{3}$$

$$\Phi_{qv} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_v}; \quad Q_v = \varphi(F_L, F_S);$$

$Q_v$  - обобщенные силы, являющиеся функцией электродинамических сил  $F_L, F_S$ , действующих на экипаж в поперечных вертикальных плоскостях вдоль нормалей и касательных к поверхностям сверхпроводящих магнитов;  $N$  - число степеней свободы;  $L = |L_{ik}|$  - матрица коэффициентов самоиндукции  $i = k$  и взаимной индукции  $i \neq k$  путевых контуров;  $r$  - активное сопротивление путевого контура,  $I$  - вектор столбец токов  $i_k$  в  $k$ -х путевых контурах,  $f$  - вектор э.д.с.  $f_k$  наводимых экипажными сверхпроводящими магнитами в  $k$ -х путевых контурах.

В выражениях (1, 2, 3):

$D_{qv}, \Pi_{qv}, \Phi_{qv}, Q_v$  – дифференциальные операторы и обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам  $q_v$ ;  $T, \Pi, \Phi$  – кинетическая, потенциальная энергия и функция рассеяния системы;  $F_L, F_S$  – нормальные и касательные электродинамические силы взаимодействия сверхпроводящих магнитов и путевых контуров, определяемых в соответствии с [1];  $N$  – число степеней свободы системы.

Величины  $f_k$  определяются выражением:

$$f_k = - \sum_{m=1}^n i_m^c \frac{\partial M_{km}}{\partial t}, \tag{4}$$

где  $M_{km}$  – коэффициенты взаимоиנדукции между  $m$ -м сверхпроводящим магнитом и  $k$ -м контуром;  $n$  – число поездных сверхпроводящих магнитов;  $i_m^c$  – ток в  $m$ -м сверхпроводящем магните.

$$\begin{aligned} F_{Lm} &= i_m^c \sum_{k=1}^p i_k \frac{\partial M_{km}}{\partial \Delta_m}; \\ F_{sm} &= i_m^c \sum_{k=1}^p i_k \frac{\partial M_{km}}{\partial \delta_m}, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\Delta_m$  и  $\delta_m$  – значения зазоров, т. е. смещений  $m$ -ых сверхпроводящих магнитов относительно контуров путевой структуры в вертикальном и поперечном направлениях;  $p$  – число учитываемых контуров.

Решая совместно системы уравнений вида (1) и (2) будем оценивать динамические качества экипажа в случае левитационного движения экипажа.

Необходимым условием обеспечения устойчивого левитационного движения экипажа является выполнение следующего требования: движущиеся вдоль оси пути два магнита, расположенные в одной поперечной плоскости относительно каждой из полос путевых контуров, при их поперечном перемещении должны иметь нисходящую зависимость касательных электродинамических сил взаимодействия с контурами, т.е. эти силы должны быть восстанавливающими против поперечного сдвига двух магнитов относительно контуров. Кроме этого нормальные электродинамические силы при таком взаимодействии двух магнитов с контурами должны иметь минимальное значение в положении, соответствующем их симметричному расположению относительно оси каждой из полос контуров.

Таким образом, для реализации устойчивого левитационного движения экипажа необходимо определить рациональные значения основных параметров системы, в первую очередь, размеры соленоидов сверхпроводящих магнитов и путевых контуров, а также условия их взаимного размещения в состоянии равновесия экипажа при достаточном значении намагничивающих сил в соленоидах магнитов.

Сравнение упомянутых выше электродинамических систем проводилось для значений масс кузова и каждой из тележек экипажей, равных 25т и 3,75т, значений коэффициентов жесткости и вязкости упруго-диссипативных элементов в продольном и поперечном направлениях, равных соответственно 200кН/м и 20 кНс/м.

Для экипажа, описанной транспортной системы было оценено левитационное движение вдоль пути  $S$ , имеющего следующее очертание в плане: прямолинейный участок пути протяженностью 150 м, входная переходная кривая длиной 500 м ( $S=150-650$  м), круговая кривая радиусом 8000 м с наклоном поверхности пути к горизонтальной плоскости на угол 0,1 рад в сторону центра кривизны ( $S=650-800$  м), выходная переходная кривая ( $S=800-1200$  м), прямая ( $S=800-1200$  м). Кривизна переходных кривых имеет зависимость от ее протяженности в соответствии с работой [2].

Оценка пространственных колебаний экипажей проводилась при значениях скорости движения 30 м/с и 100 м/с по значениям левитационных зазоров тележек, перемещениям всех твердых тел рассматриваемых систем, а также по значениям ускорений кузова экипажей в вертикальном и поперечном направлениях.

Рассмотрим приведенные результаты интегрирования уравнений движения (1) и (2) в виде графиков зависимостей величин перемещений от пройденного пути  $z$  кузова и тележек, углов галопирования  $\Phi$ , бокового отбоя  $u$ , боковой качки  $\theta$ , углов виляния  $\psi$  и ускорений кузова в вертикальном и поперечном направлениях  $\ddot{y}_k, \ddot{z}_k$  при скорости 100 м/с (рис.2,3,4), где линии 3а, 3б соответствуют кузову, а 1а, 1б и 2а, 2б – тележкам,  $S \leq 150$ м и  $S \geq 1200$ м – прямолинейным участкам пути,  $S=150-650$ м – входной переходной кривой,  $S=650-800$ м – круговой кривой и  $S=800-1200$ м – выходной переходной кривой.

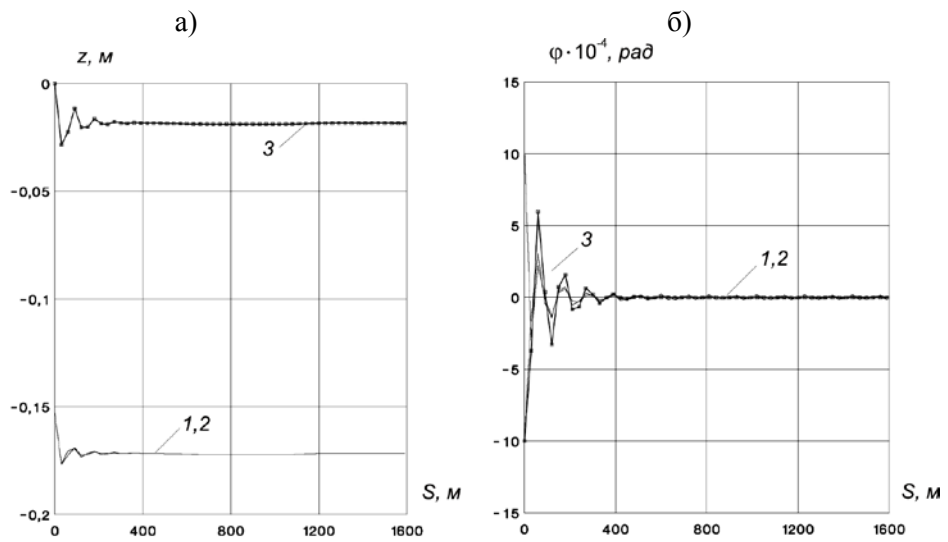


Рис.2 Зависимости перемещений подпрыгивания (а) и галопирования (б) от пройденного пути

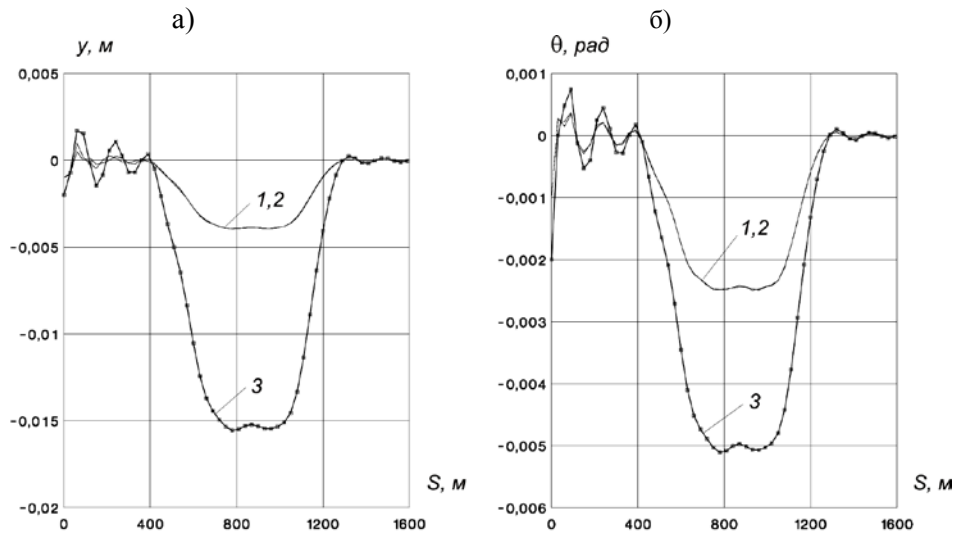


Рис.3 Зависимости перемещений бокового отбоя (а) и боковой качки (б) от пройденного пути

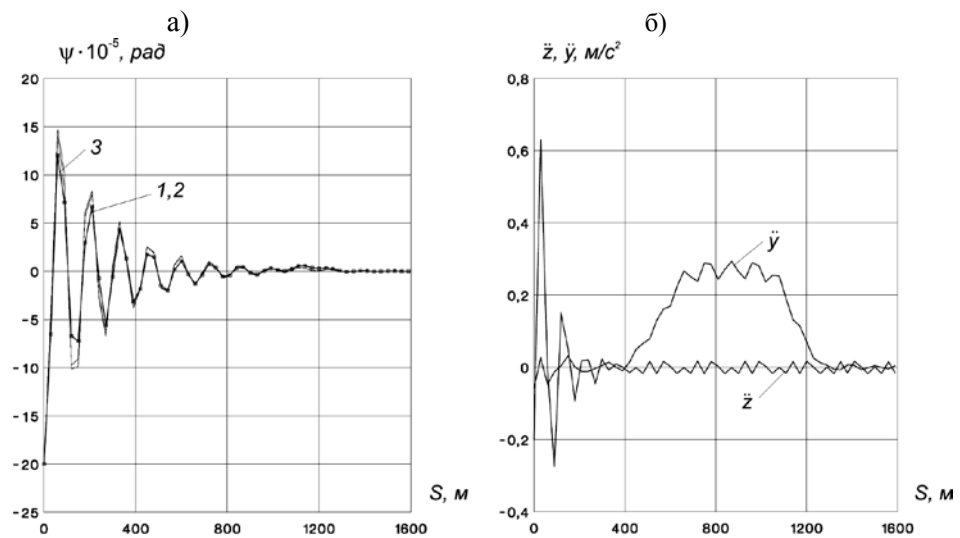


Рис.4 Зависимости углов виляния (а) и ускорений кузова (б) от пройденного пути

Результаты интегрирования уравнений движения показали, что на вертикальные перемещения кузова и тележек  $z_i$  ( $i = 1, 2$  – номера тележек), углы их галопирования и влияния практически не оказывает влияния кривизна пути, а перемещения бокового отбоя  $y_i$  и углы боковой качки  $\theta_i$  имеют максимальные значения в круговой кривой. Поэтому в дальнейшем будем оценивать левитационное движение экипажей по максимальным перемещениям его твердых тел. В частности, по поперечным перемещениям кузова и тележек  $y_k$  и  $y_i$ , углов их боковой качки  $\theta_k$ ,  $\theta_i$ , по вертикальным перемещениям тележек  $z_i$ , по значениям ускорений в поперечном и вертикальном направлениях кузова  $\ddot{y}_k$ ,  $\ddot{z}_k$  соответственно, и по значениям намагничивающих сил в соленоидах, обеспечивающих левитационное движение –  $N_i$ , равных в рассматриваемом случае 700000 ампер-витков

#### **Выводы и перспективы дальнейших исследований**

Как видно из приведенных графиков имеет место устойчивое левитационное движение экипажа в прямолинейных и криволинейных участках путевой структуры, а ускорения кузова в вертикальном и поперечном направлениях, характеризующие комфорт пассажиров и сохранность перевозимых грузов, имеют небольшие приемлемые значения. Аналогичные результаты получены также и при скорости 30 м/с. Таким образом, предложенная конструктивная схема может рассматриваться как один из вариантов при создании перспективных видов транспорта.

#### **Список использованной литературы**

1. Дзензерский В.А. Динамика экипажей нетрадиционных конструкций на сверхпроводящих магнитах / В.А. Дзензерский, Н.А.Радченко, В.В. Малый // Днепропетровск. – Арт-Пресс. – 2011. – 248 с.
2. Шахуняц Г.М. Железнодорожный путь. / Г.М. Шахуняц -М.: Транспорт 1969.-536 с.

УДК 621.791.9:519.81

Н.А. ДОЛГОВ  
 Інститут проблем прочності імені Г.С. Писаренка НАН України  
 І.В. СМІРНОВ  
 Національний технічний університет України «КПІ»  
 К.В. ЗАЙЧКО  
 Государственный научно-исследовательский институт  
 А.В. БЕСОВ  
 Інститут проблем матеріалознавства ім. І.Н. Францевича НАН України  
 Е.В. ВИХИРЕВА-ЦИНАРИДЗЕ  
 ООО «КБ Орловский»  
 А.Ю.АНДРЕЙЦЕВ  
 Государственный экономико-технологический университет транспорта

## ВЫБОР МАТЕРИАЛА ДЛЯ НАПЫЛЕНИЯ ИЗНОСОСТОЙКИХ ПОКРЫТИЙ

*Выбор материала для износостойкого плазменно-напыленного покрытия проведен методом принятия решений в условиях конфликтующих критериев. Исследованы механические свойства ряда покрытий, напыленных из порошков на основе  $Al_2O_3$  (в исходном состоянии и после плакирования двухслойными PVD тонкими пленками Ti и Al), а также самофлюсующихся сплавов с добавлением нанодисперсного  $Al_2O_3$ . Для выбора покрытия применен метод весовых характеристик в комбинации с методом цифровой логики и предложенным усовершенствованным подходом к методам линейной и нелинейной нормализации данных. Сделан вывод, что наиболее эффективными являются покрытия, полученные из плакированного порошка ( $Al_2O_3/Ti/Al$ ).*

*Ключевые слова: теория принятия решений, выбор материала, метод нелинейной нормализации данных, плазменно-напыленное покрытие, плакированный порошок, нанодисперсный порошок.*

М.А. ДОЛГОВ  
 Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України  
 І.В. СМІРНОВ  
 Національний технічний університет України «КПІ»  
 К.В. ЗАЙЧКО  
 Державний науково-дослідний інститут  
 О.В. ВИХИРЕВА-ЦИНАРИДЗЕ  
 ТОВ «КБ Орловський»  
 А.В. БЕСОВ  
 Інститут проблем матеріалознавства ім. І.Н. Францевича НАН України  
 А.Ю.АНДРЕЙЦЕВ  
 Державний економіко-технологічний університет транспорту

## ВИБІР МАТЕРІАЛУ ДЛЯ НАПИЛЕННЯ ЗНОСОСТІЙКИХ ПОКРИТТІВ

*Вибір порошку для плазмового напилення зносостійкого покриття проведено методом прийняття рішень в умовах конфліктних критеріїв. Досліджено механічні властивості ряду покриттів, які напилені з порошків на основі  $Al_2O_3$  (у початковому стані та після плакування двошаровими PVD тонкими плівками Ti та Al), а також самофлюсівних сплавів з додаванням нанодисперсного  $Al_2O_3$ . Для вибору покриття застосовано метод вагових характеристик у комбінації з методом цифрової логіки та запропоновано вдосконалений підхід до методів лінійної та нелінійної нормалізації даних. Зроблено висновок, що найефективнішими є покриття, які отримані з плакованого порошка ( $Al_2O_3/Ti/Al$ ).*

*Ключові слова: теорія прийняття рішень, вибір матеріалу, метод нелінійної нормалізації даних, плазмово-напилення покриття, плакований порошок, нанодисперсний порошок.*

N.A. DOLGOV  
 Pisarenko Institute for Problems of Strength, Nat. Ac. Sci. of Ukraine, Kiev, Ukraine  
 I.V. SMIRNOV  
 National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine  
 K.V. ZAYICHKO  
 State research institute, Kiev, Ukraine  
 O.V. VIKHIRIEVA-TSYNARIDZE  
 LTD "KB Orlovskiy", Kiev, Ukraine  
 A.V. BESOV  
 Frantsevich Institute for Problems of Materials Science, Nat. Ac. Sci. of Ukraine, Kiev, Ukraine  
 A.YU. ANDREYTSEV  
 State Economy and Technology University of Transport, Kiev, Ukraine

## SELECTION OF MATERIAL FOR THE PLASMA SPRAYING OF WEAR-RESISTANT COATINGS

*The selection of material for the wear-resistant plasma-sprayed coatings is carried out by decision-making under conflicting criteria. The mechanical properties of several coatings sprayed from powders based on  $Al_2O_3$  (in the initial state and after modification by the two-layer cladding with PVD of thin Ti and Al films), as well as from powders of self-fluxing alloys with the addition of nano- $Al_2O_3$ . A weight characteristics method in combination with the digital logic method and proposed is an improved approach for the linear and nonlinear data normalization methods were used for selection of coating. It was concluded that the most effective coating is obtained from a clad ( $Al_2O_3/Ti/Al$ ) powder.*

*Keywords: decision theory, material selection, non-linear data normalization method, plasma-sprayed coating, clad powder, nano powder.*

**Постановка проблемы**

Информационно-измерительные системы являются необходимым условием достижения высокого качества изделий, деталей, инструментов [1]. Важной и сложной частью технологического процесса по созданию износостойких деталей машин и механизмов является выбор наилучшего материала для нанесения покрытий. Выбор наиболее эффективного материала покрытия является важной научно-практической задачей при проведении исследований, которая должна решаться системным и наиболее рациональным подходом. Неверный выбор материала покрытия может привести не только к нежелательным последствиям, но и значительным материальным потерям.

Повышение характеристик прочности и трибологических свойств плазменно-напыленных покрытий возможно путем использования модификаторов, которые вводятся в покрытие вместе с порошком [2, 3]. Функции модификаторов обычно выполняют ультрадисперсные составляющие, которые обеспечивают создание в покрытии определенного структурного состояния, характерного твердым и износостойким материалам. При этом могут использоваться химические соединения простых оксидов типа  $Me_2O_3$  ( $Me - Al, Cr$ ),  $MeO_2$  ( $Me - Ti, Zr, Si$ ), а также чистые металлы, которые имеют высокую химическую активность. Модифицировать порошки целесообразно конгломерацией при помощи механохимического синтеза или плакированием частиц порошка методами физического осаждения в вакууме (PVD).

**Анализ последних исследований и публикаций**

Износостойкие покрытия широко используются в различных отраслях машиностроения. Технология плазменного напыления износостойких керамических покрытий занимает средний ценовой сегмент относительной себестоимости по сравнению с другими технологиями нанесения износостойких покрытий. В настоящее время отсутствуют исследования, связанные с анализом и применением методов принятия решений для выбора плазменно-напыленных покрытий. В то же время используется большое количество методов выбора материалов для различных элементов конструкций. Известные многокритериальные методы выбора материалов могут быть адаптированы и для выбора плазменно-напыленных покрытий. Для покрытий может быть использован также метод весовых характеристик в комбинации с методом нелинейной нормализации данных и модифицированным методом цифровой логики [4].

Плакирование частиц порошка PVD методами является перспективным направлением получения композиционных порошков. Ряд результатов по нанесению методом магнетронного распыления наноструктурных пленок из меди, титана и платины на порошок приведен в работе [5]. Хотя качество полученных порошков достаточно высоко, однако этот метод имеет относительно низкую скорость осаждения пленок, что значительно увеличивает время плакирования. Поэтому более эффективно использовать метод вакуумно-дугового испарения для получения тонких качественных пленок на керамических порошках.

За последнее время появилось большое количество работ, которые рассматривают вопросы модифицирования порошков для напыления наночастицами. Обработке порошков механохимическим синтезом посвящены работы [2, 3]. Так, например, при помощи высокоэнергетической планетарной шаровой мельницы получен наноконпозиционный порошок  $Al-Al_2O_3$  с размером частиц оксида алюминия 20 – 40 нм, что обеспечило повышения твердости и износостойкости напыленных покрытий [2]. В работе [3] рассматривается возможность поиска эффективных модификаторов для получения композиционных покрытий с антифрикционными свойствами. После анализа ультрадисперсных оксидов со структурой корунда и рутила, углерода и нитрида бора, металлов со структурами типа вольфрама и магния делается вывод об эффективности применения в качестве модификатора оксида алюминия. В работе [6] показано применение в качестве модификатора нанопорошка оксида алюминия, который вводится в плазменное покрытие на основе порошков ПГ-19М-01 и ПС-12НВК-01. На основании исследований сделан вывод, что добавление нанопорошка оксида алюминия приводит к дроблению структурных составляющих в плазменно-напыленных покрытиях, снижению остаточных напряжений и плотности дислокаций, а также повышению износостойкости покрытий.

### Формулирование цели исследования

Подбор, адаптация и обоснование применения многокритериального метода принятия решений для выбора наилучшего износостойкого покрытия.

### Материалы и оборудование

Для напыления покрытий использовали порошок  $Al_2O_3$  с фракций 40–63 мкм в исходном состоянии и после плакирования двухслойными пленками (Ti/Al) вакуумно-дуговым методом, а также композиционный самофлюсирующий порошок ПГ-CP2 (NiCrFeBSi) с добавлением в количестве 0,5–1% нанодисперсного порошка  $Al_2O_3$  фракцией 40–50 нм.

Пленки на частицах порошка  $Al_2O_3$  состояли из двух слоев: подслоя из Ti толщиной 70–160 нм и внешнего слоя из Al толщиной 2–3 мкм. Далее по тексту плакированный порошок обозначается как  $Al_2O_3/Ti/Al$ . Плакирование осуществляли на вакуумно-дуговой установке, которая оборудована специально разработанным вибрационным приспособлением для перемешивания порошка [7]. Оборудование и технологические процессы, которые происходят во время плакирования порошков вакуумно-дуговым методом, более подробно описаны в работе [8].

Приготовление гомогенной смеси порошка ПГ-CP2 с нанопорошком  $Al_2O_3$  осуществляли механохимической обработкой в планетарной шаровой мельнице XQM-2 с дополнительным вакуумированием рабочих емкостей. Применение такой обработки способствовало образованию прочных связей между микро- и наночастицами порошковой смеси, что обеспечивало перенос наночастиц в покрытие при последующем плазменном напылении.

Порошки напыляли плазмотроном с частично вынесенной дугой и дополнительным обдувом плазменной струи концентрическим потоком защитного газа. Ток дуги выбирали в пределах 80–90 А, напряжение – 50–60 В, расход плазмообразующего и защитного газа (аргона) составлял 2–3 л/мин при диаметре сопла 2 мм. Благодаря таким конструктивным особенностям и технологическим режимам, характер течения плазменной струи был близок к ламинарному, что также обеспечило благоприятные условия для сохранения и переноса в покрытие плакирующих металлических пленок, так и наночастиц. Покрытие толщиной 200–300 мкм напыляли на плоские образцы  $5 \times 10 \times 20$  мм<sup>3</sup> из стали Ст.3.

### Экспериментальные исследования

Выбор материалов для нанесения покрытий осуществлялся исходя из критериев:

- износостойкости,
- прочности сцепления,
- микротвердости,
- остаточных напряжений.

Для исследования прочности сцепления использовали метод нормального отрыва согласно ГОСТ 9.304-87. Микротвердость определяли путем вдавливания алмазной пирамидки Виккерса при нагрузке 0,98 Н на приборе ПМТ-3. Процесс износа покрытий исследовали в условиях сухого трения на машине СМЦ-2 по схеме ролик (закаленная сталь У8) – плоский образец с покрытием. Скорость вращения ролика составила 330 мин<sup>-1</sup> с приложенной нагрузкой 55 Н. При определении относительной износостойкости покрытий из плакированных порошков в качестве эталона принимали покрытие из чистого  $Al_2O_3$ , а для покрытий, модифицированных нанопорошком, – материал основы. Для исследования остаточных напряжений использовали образцы размером 0,2×9×85 мм<sup>3</sup> из низкоуглеродистой стали, которые подвергали абразивно-струйной обработке с двух сторон и жестко крепили на плоской поверхности для обеспечения невозможности деформирования во время процесса напыления. Остаточные напряжения определяли по изменению радиуса кривизны образца после напыления [9]. Модуль упругости плазменно-напыленных покрытий определяли после испытаний плоских образцов на растяжение по методике, которая приведена в работе [10]. Результаты испытаний приведены в табл. 1.

Таблица 1

### Механические характеристики плазменно-напыленных покрытий

Варианты покрытий	Материал покрытия	Прочность сцепления, МПа	Остаточные напряжения, МПа	Микротвердость, ГПа	Относительная износостойкость
1	$Al_2O_3$	16	-26	9,7	1
2	$Al_2O_3/Ti/Al$	37	-17	11,3	6,3
3	NiCrFeBSi	53	83	3,1	2,1
4	NiCrFeBSi+ $Al_2O_3$	58	67	4,3	3,9

### Методика выбора материала износостойких покрытий

Для выбора материалов использовали известные методы принятия решений. Определение производственных требований является первым шагом в процессе выбора. Основным требованием, которое предъявляется к покрытиям, является износостойкость. В процессе выбора покрытий использовали полученные значения механических характеристик (см. табл. 1). Бенефициарными являются такие характеристики как относительная износостойкость, микротвердость и прочность сцепления,



соответственно небенефициарными – остаточные напряжения. Так как характеристики заданы в числовой форме, то использовали метод для выбора материалов, который основан на определении весовых характеристик [4].

*Метод весовых характеристик.* Метод позволяет ранжировать материалы покрытий на основе показателей эффективности. Индекс эффективности  $\gamma$  определяется по формуле:

$$\gamma = \sum_{i=1}^n Y_i \alpha_i \quad (1),$$

где  $Y$  – нормированное значение характеристики  $i$ -го покрытия;  $\alpha$  – весовой коэффициент,  $n$  – общее количество вариантов покрытий.

Наилучшим является покрытие с наибольшим индексом эффективности. Для сравнения важности характеристик определяют весовой коэффициент  $\alpha$  с помощью методов цифровой логики. При сравнении характеристик с различными единицами измерения проводят нормирование, которое может быть как линейным, так и нелинейным.

*Метод цифровой логики.* Эксперты определяют важность характеристик с учетом всех возможных сочетаний, сравнивая их попарно. Наиболее важной характеристике присваивается значение «1», наименее важной – «0». Общее число возможных решений  $N$  определяется по формуле:  $N=n(n-1)/2$ , где  $n$  – число характеристик, которые сравнивают. Весовой коэффициент  $\alpha$  для каждой характеристики определяется путем отношения количества положительных решений к общему количеству возможных решений  $N$ . Сумма всех весовых коэффициентов равна единице ( $\sum \alpha = 1$ ). Весовой коэффициент  $\alpha$  определяется по формуле:

$$\alpha = N_{\text{полож.}} / N, \quad (2)$$

где  $N_{\text{полож.}}$  – количество положительных решений.

*Метод линейного нормирования.* Нормируем значения характеристик так, чтобы максимальное значение не превышало величины 100. Для бенефициарных характеристик – это отношение величины характеристики  $X$  к максимальному значению  $X_{\text{max}}$  данной характеристики, умноженное на 100:

$$Y = (X / X_{\text{max}}) \cdot 100 \quad (3)$$

Для небенефициарной характеристики – это отношение минимального значения характеристики,  $X_{\text{min}}$  к текущему значению данной характеристики, умноженное на 100:

$$Y = (X_{\text{min}} / X) \cdot 100 \quad (4)$$

*Метод модифицированной цифровой логики.* Недостатком метода цифровой логики является то, что наименее важной характеристике присваивается значение «0». Следовательно, ее весовой коэффициент будет равен нулю. Поэтому эта характеристика исключается из процесса выбора материала покрытия. В модифицированном методе предлагается присваивать значения «1» для наименее важной характеристики, «3» – для наиболее важной характеристики и «2» – в случае, когда характеристики одинаково важны. По сравнению с методом цифровой логики отличием в методике расчета будет определение количества возможных решений:

$$N = 2n(n-1).$$

*Метод нелинейной нормализации.* Данный метод использует нелинейную функцию при преобразовании значений бенефициарных и небенефициарных характеристик соответственно:

$$Y = a_1 \ln(b_1 X + c_1), \quad (5)$$

$$Y = a_2 \ln(b_2 / X + c_2), \quad (6)$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  и  $c_2$  – константы.

Для нелинейной нормализации необходимо определить указанные выше константы. При расчетах по формуле (5) необходимо учитывать следующие ограничения: 1)  $Y = -100$  (при  $X = 0$ ); 2)  $Y = +100$  (при  $X = X_{\text{max}}$ ). Параметр критического значения рассматриваемой характеристики  $X_{\text{к}}$  позволяет эксперту присвоить граничное значение, ниже которого нормируемая величина  $Y$  становится отрицательной и индекс эффективности  $\gamma$  снижается. Третье ограничение имеет вид  $Y = 0$  (при  $X = X_{\text{к}}$ ). Выполнение этих трех условий позволяет вычислить константы:

$$a_1 = -100 / \ln(X_{\text{к}} / (X_{\text{max}} - X_{\text{к}})); \quad b_1 = (X_{\text{max}} - 2X_{\text{к}}) / (X_{\text{к}}(X_{\text{max}} - X_{\text{к}})); \quad c_1 = X_{\text{к}} / (X_{\text{max}} - X_{\text{к}}). \quad (7)$$

В соответствии с (7) функция нормирования характеристики является неопределенной при  $X = X_{\text{max}}/2$ . С учетом данного условия функция имеет вид:  $Y = (200X/X_{\text{max}}) - 100$ . Окончательно, для этого случая:

$$\begin{cases} Y = a_1 \ln(b_1 X + c_1) \text{ при } X_k \neq X_{\max} / 2 \\ Y = (200X / X_{\max}) - 100 \text{ при } X_k = X_{\max} / 2 \end{cases} \quad (8)$$

Аналогичный подход можно применить и для небенифициарных характеристик. В случае имеем ограничения: 1)  $Y = +100$  (при  $X = X_{\min}$ ); 2)  $Y = -100$  (при  $X \rightarrow \infty$ ). Критической величиной для характеристики является значение  $X = X_k$  (при  $Y = 0$ ). Необходимые константы рассчитываются по следующим формулам:

$$a_2 = -100 / \ln(-X_k / (X_{\min} - X_k)); b_2 = (-X_k^2 + 2X_{\min} X_k) / (X_{\min} - X_k); c_2 = -X_{\min} / (X_{\min} - X_k). \quad (9)$$

Подобно предыдущему случаю такую же процедуру следует выполнить для определения формы нормирующей функции при  $X = 2X_{\min}$ . С учетом данного условия функция имеет вид:  $Y = (200X_{\min} / X_{\max}) - 100$ . Окончательно для этого случая:

$$\begin{cases} Y = a_2 \ln(\frac{b_2}{X} + c_2) \text{ при } X_k \neq 2X_{\min} \\ Y = \frac{200X_{\min}}{X_{\max}} - 100 \text{ при } X_k = 2X_{\min} \end{cases} \quad (10)$$

Экспертами были определены критические значения  $X_k$  характеристик покрытий (см. табл. 2).

Таблица 2

**Критические значения характеристик покрытий  $X_k$  для улучшенного метода нелинейной нормализации**

Критическое значение характеристики	Прочность сцепления, МПа	Остаточные напряжения*, МПа	Микротвердость, ГПа	Относительная износостойкость
$X_k$	20	86	3,0	1,5

\* с учетом пропорционального линейного преобразования значений в положительную область.

*Усовершенствование методов линейной и нелинейной нормализации характеристик.* Величина остаточных напряжений в исследуемых покрытиях варьируется от отрицательных (-17 МПа) до положительных значений (83 МПа) (см. табл. 1). В таком виде применение любого из рассмотренных выше методов нормализации будет ошибочно. Поэтому необходимо усовершенствование обоих методов для корректной нормализации характеристики. Проведем пропорциональное линейное преобразование данных в область положительных значений, при этом отсчет  $X_{\min}$  начнем со значения 10. Подобному преобразованию подлежат и определенные ранее экспертами критические значения  $X_k$  для остаточных напряжений (см. табл. 3)).

Таблица 3

**Значения остаточных напряжений для проведения расчетов улучшенными методами линейной и нелинейной нормализации**

Исходные значения остаточных напряжений	-26	-17	83	67
Преобразованные значения остаточных напряжений $X$	10	19	119	103

*Сравнение характеристик покрытий.* Применим описанные выше методы для сравнения характеристик покрытий. Результаты использования метода цифровой логики и весовой коэффициент  $\alpha$ , который рассчитан по формуле (2), представлены в табл. 4.

Таблица 4

**Определение весовых коэффициентов характеристик покрытий (метод цифровой логики)**

Характеристика	Количество возможных решений $N=n(n-1)/2$						$N_{\text{полож.}}$	Весовой коэффициент $\alpha$
	1	2	3	4	5	6		
1 Относительная износостойкость	1	1	1				3	1/2
2 Микротвердость	0			1	1		2	1/3
3 Прочность сцепления		0		0		1	1	1/6
4 Остаточные напряжения			0		0	0	0	0

Результаты применения улучшенного метода линейной нормализации с использованием формул (4), (5) и расчет индекса эффективности  $\gamma$  по формуле (1) приведены в табл. 5. Для нормализации значений остаточных напряжений использовали данные из табл. 5. Результаты применения модифицированной цифровой логики с привлечением экспертов представлены в табл. 6. Также в этой таблице приведены результаты расчета весового коэффициента  $\alpha$  по формуле (2).

В соответствии с улучшенным методом нелинейной нормализации рассчитаны константы  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  и  $c_2$ , по формулам (7) и (9). Проведена нелинейная нормализация характеристик покрытий  $Y$  по формулам (8) и (10), с использованием преобразованных данных из табл. 3 и критических значений  $X_k$  из табл. 2. Также по формуле (1) рассчитан индекс эффективности  $\gamma$ . Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 5

Результаты расчета параметров  $Y$  линейной нормализации и индекса эффективности  $\gamma$ 

Покрытие	Относительная износостойкость	Микротвердость	Прочность сцепления	Остаточные напряжения	Индекс эффективности $\gamma$
1	15,87	85,84	27,59	100	50,34
2	100	100	63,79	11,1	93,97
3	33,33	27,43	91,38	1,0	41,04
4	61,9	38,05	100	0,92	60,3

Таблица 6

Определение весовых коэффициентов характеристик покрытий (метод модифицированной цифровой логики)

Характеристика		Колич. возможных решений $N = 2n(n-1)$						$N_{\text{полож.}}$	Весовой коэф. $\alpha$
		1	2	3	4	5	6		
1	Относительная износостойкость	3	3	3				9	0,375
2	Микротвердость	1			1	3		5	0,208
3	Прочность сцепления		1		3		3	7	0,292
4	Остаточные напряжения			1		1	1	3	0,125

Таблица 7

Параметры  $Y$  нелинейной нормализации и индекса эффективности  $\gamma$ 

Покрытия	Относительная износостойкость	Микротвердость	Прочность сцепления	Остаточные напряжения	Индекс эффективности $\gamma$
1	-96,29	25,4	-4,52	12,51	-53,87
2	29,16	29,16	63,72	8,64	130,68
3	6,09	0,60	26,24	-1,69	30,95
4	18,6	7,0	29,16	-0,95	53,81

### Выводы

Особенности задачи по выбору материала покрытия, показывают необходимость применения методов многокритериальной оптимизации. Из рассмотренных вариантов покрытий взаимную конкуренцию друг другу могут составить только два варианта: №2 ( $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ti}/\text{Al}$ ) и №4 ( $\text{NiCrFeBSi} + \text{Al}_2\text{O}_3$ ). Анализ значений индекса эффективности позволяет сделать вывод, что плазменно-напыленное покрытие из плакированного порошка ( $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ti}/\text{Al}$ ) обладает лучшими характеристиками. В то же время наименее эффективным в соответствии с улучшенным методом нелинейной нормализации является керамическое покрытие из оксида алюминия. Указанный метод имеет ряд преимуществ, в т. ч. большую градацию распределения значений индекса эффективности в связи с использованием критических значений характеристик покрытий  $X_k$ , которые были определены экспертами.

Существующие методы принятия решений могут быть адаптированы и улучшены для использования при выборе материалов износостойких покрытий. Метод весовых характеристик в комбинации с улучшенным методом нелинейной нормализации данных и модифицированным методом цифровой логики для характеристик покрытий является оптимальным и системным подходом.

### Список использованной литературы

1. Хімичева Г.І. Інформаційні та вимірювальні системи: теорія і практика. Посібник / Г.І.Хімичева, О.В.Іванченко, М.А.Долгов, А.С.Зенкін. – К.: Основа, 2006. – 448 с.
2. Борисов Ю.С. Получение порошков для газотермических покрытий методами механического легирования и механохимического синтеза / Ю.С. Борисов, А.Л. Борисова, Л.И. Адеева и др. // Сварочное производство. – 2010. – № 12. – С. 18 – 22.
3. Mazaheri Y. Development of Al356–Al2O3 nanocomposite coatings by high velocity oxy-fuel technique/ Y. Mazaheri, F. Karimzadeh, M.H. Enayati // J. Mater. Sci. Technol. – 2013. – V. 29, No 9. – P. 813 – 820.
4. Dehghan-Manshadi B. A novel method for materials selection in mechanical design: Combination of non-linear normalization and a modified digital logic method / B. Dehghan-Manshadi, H. Mahmudi, A. Abedian, R. Mahmudi // Materials and Design. – V. 28. – 2007. – P. 8 – 15.

5. Schmid G.H.S. A method for uniformly coating powdery substrates by magnetron sputtering / G.H.S. Schmid, C. Eisenmenger-Sittner // *Surface and Coatings Technology*. – 2013. – V. 236. – P. 353 – 360.
6. Князьков К.В. Повышение свойств плазменно-порошковых покрытий модифицированием наноразмерными частицами / К.В. Князьков, М.В. Радченко, А.Н. Смирнов и др. // *Ползуновский вестник*. – 2012. – № 1/1. – С. 127 – 130.
7. Пат. № 89851 України, МПК (2014) B22F1/00 Пристрій для плакування порошків у вакуумі / Смирнов І.В., Селіверстов І.А., Чорний А.В., Ковальчук В.Ю.; заявл. 31.12.2013; опубл. 25.04.2014, Бюл. №8.
8. Копилов В.І. Процеси іонно-плазмового плакування порошків для газотермічних покриттів / В.І. Копилов, І.В. Смирнов, І.А. Селіверстов // *Наукові вісті НТУУ „КПІ”*. – 2009. – № 3. – С. 11 – 20.
9. Dong S. Study on the mechanism of adhesion improvement using dry-ice blasting for plasma-sprayed Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> coatings/ S. Dong, B. Song, B. Hansz, H. Liao, C. Coddet // *Journal of Thermal Spray Technology*. – V. 22(2-3). – 2013. – P. 213 – 220.
10. Dolgov N.A. Method for determining the modulus of elasticity for gas thermal spray coatings / N.A. Dolgov // *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*. – 2004. – V. 43, No. 7 – 8. – P. 423 – 428.

УДК 519.233.5:677.11.044.4

М.Б. ЄДИНОВИЧ, С.В. БОБИРЬ, Т.О. КУЗЬМИНА  
Херсонський національний технічний університет**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОСЯНОГО МОЧІННЯ  
СОЛОМИ ЛЬОНУ ОЛІЙНОГО**

*У статті розглянуто актуальну проблему розробки технології приготування трести із соломи льону олійного. В роботі наведено результати математичного моделювання в середовищі Mathcad 14 процесу росяного мочіння (розстилу) з використанням екологічно безпечного біологічно активного препарату «Триходермін». В результаті отримано математичні моделі, які дозволяють прогнозувати зміну якісних параметрів лляної сировини у процесі розстилу. Встановлено високу інтенсифікуючу дію нового біологічно активного препарату.*

*Використовуючи отримані математичні моделі, за раціоналізованими параметрами процесу розстилу можна одержувати тресту різного ступеня вилежування. Отримуване при подальшій механічній переробці трести лляне волокно, можна рекомендувати для застосування у виробництві продукції різного функціонального призначення.*

*Ключові слова: солома льону олійного, треста, біологічно активний препарат, росяне мочіння, математичне моделювання.*

М.Б. ЄДИНОВИЧ, С.В. БОБИРЬ, Т.О. КУЗЬМИНА  
Херсонский национальный технический университет**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РОСЯНОЙ МОЧКИ СОЛОМЫ ЛЬНА МАСЛИЧНОГО**

*В статье рассмотрена актуальная проблема разработки технологии приготовления тресты из соломы льна масличного. В работе приведены результаты математического моделирования в среде Mathcad 14 процесса росяной мочки (расстила) с использованием экологически безопасного биологически активного препарата «Триходермин». В результате получены математические модели, которые позволяют прогнозировать изменение качественных параметров льяного сырья в процессе расстила. Установлено высокое интенсифицирующее действие нового биологически активного препарата.*

*Используя полученные математические модели, с оптимизированными параметрами процесса расстила можно получать тресту разной степени вилежки. Получаемое при дальнейшей механической переработке тресты льяное волокно, можно рекомендовать для применения в производстве продукции различного функционального назначения.*

*Ключевые слова: солома льна масличного, треста, биологически активный препарат, росяная мочка, математическое моделирование.*

М.В. YEDYNOVYCH, S.V. BOBYR, T.O. KUZMINA  
Kherson National Technical University**SIMULATION OF DEW RETTING PROCESSING OILSEED STRAW**

*The article deals with the actual problem of dew retting processing oilseed straw. The paper presents results of mathematical modeling in the Mathcad14 software of using environmentally safe biological active preparation "Tryhodermine" in dew retting processing oilseed straw. Obtained mathematical models can use to predict change of linen quality parameters of raw materials in the dew retting. The new biologically active drug has a high ability to intensify the dew retting method.*

*Using these mathematical models for optimized process parameters of dew retting can get varying degrees of straw maturing. Further mechanical processing yielded flax fibers, can be recommended for use in organic production of geotextiles of different functional purposes.*

*Keywords: oilseed straw retted straw, biologically active drug, dew retting, mathematical modeling.*

**Постановка проблеми**

Виробничі та наукові дослідження свідчать про перспективність та економічну доцільність розширення посівних площ льону олійного. Але, на жаль, стебла цієї культури в Україні мало використовуються, оскільки вважається, що в них знаходиться низький вміст волокна і виділення його не є рентабельним. Однак, сьогодні країни Євросоюзу, Північної Америки, Китай та інші виявляють підвищений інтерес до використання стебел льону олійного для виготовлення різних видів продукції в багатьох галузях промисловості. Також слід зазначити, що до цього часу не розроблено достатньо ефективних технологій одержання трести із соломи льону олійного, не визначено оптимальні параметри та режими росяного

мочіння, не виявлено закономірностей зміни фізико-механічних характеристик у процесі перетворення лляної соломи в тресту. Вирішення цих питань дозволить визначити якісні характеристики лубу та волокна, отримуваних на різних стадіях процесу росяного мочіння соломи льону олійного і розробити рекомендації з їх використання в різних галузях промисловості.

Виходячи з вищевикладеного, актуальним завданням українських науковців є розробка теоретичних основ створення ресурсозберігаючих та екологічно безпечних технологій приготування трести із соломи льону олійного.

Методи математичної статистики дозволяють провести моделювання процесу приготування трести із соломи льону олійного з варіюванням основних факторів в необхідних інтервалах, що дає змогу прогнозувати зміни якісних показників льоносировини впродовж терміну розстилу і отримати волокно із заданими якісними показниками.

#### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

У науковій літературі дуже мало відомостей про процес одержання трести із соломи льону олійного [1]. Аналізуючи існуючі способи приготування лляної трести із соломи, можна зробити висновок, що найбільш перспективним способом одержання трести з соломи льону олійного є спосіб росяного мочіння (розстилання), який не потребує великих енерговитрат, спеціального обладнання та дорогих реагентів.

Порівняльний аналіз морфологічної і анатомічної будови та хімічного складу льону олійного й льону-довгунця свідчить, що термін розстилу льону олійного значно відрізняється від терміну розстилу льону-довгунця в бік його скорочення [1].

У південному регіоні України, де зосереджені найбільші посівні площі льону олійного, основною перешкодою для нормального перебігу процесу розстилу є несприятливі кліматичні умови в серпні місяці – достатньо висока денна температура повітря 30-35°C, низька відносна вологість повітря 28-31% та недостатня кількість атмосферних опадів (у середньому 22 мм). За таких умов біологічний процес перетворення лляної соломи в тресту проходити не буде, оскільки відсутність опадів унеможливує розвиток пектиноруйнівної мікрофлори на поверхні стебел. Цей процес відбувається під дією анаеробних та аеробних бактерій і грибів, що розвиваються при середньодобовій температурі 15-20 °C і відносній вологості повітря 60-80 % [1, 2, 4].

На основі теоретичних та експериментальних досліджень науковцями ХНТУ Г.А. Тіхосовою, О.О. Горач та ін. було зроблено висновок, що одним із шляхів створення на півдні України оптимальних умов для приготування трести з високими якісними показниками є застосування штучного зволоження [1].

Так, О.О. Горач був розроблений спосіб одержання трести зі стебел соломи льону олійного в кліматичних умовах степової зони України. Цей спосіб включає зволоження стебел луб'яної культури на льонищі водою терміном 8-10 хвилин через кожні 12 годин протягом п'яти діб до вологості розісланого шару стебел 100 %. Також аспірантами кафедри товарознавства, стандартизації та сертифікації було запропоновано способи приготування лляної трести, що передбачають зволоження соломи біологічним препаратом «Байкал-ЕМ-1-Р» через кожні 24 години протягом 10 діб та азотовмісними хімічними композиційними препаратами через кожні 12 годин протягом 3-х діб при тривалості обробки 8-10 хвилин до вологості 100 % [3].

#### **Формулювання мети дослідження**

Метою даних досліджень є розроблення нового екологічно чистого способу одержання трести зі стебел соломи льону олійного в умовах півдня України та отримання математичних моделей зв'язку якісних характеристик отриманого волокна від умов проведення розстилу, що дозволить визначити раціональні параметри процесу росяного мочіння.

#### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Відомо, що для одержання лляної трести з високими показниками якості необхідно забезпечити оптимальні умови для процесів життєдіяльності пектиноруйнівних грибів шляхом покращення їх мінерального живлення [4]. Для розвитку бажаної пектиноруйнівної мікрофлори потрібно створити умови азотного живлення мікроорганізмів, які є домінуючими в процесі розстилу соломи льону олійного, а саме: *Alternaria linicola* Glov, *Cladosporium herbarum* Link, *Colletotrichum lini*. У процесі вилежування трести також розвиваються целюлозоруйнівні й патогенні гриби: *Gonatotryps flava*, *Septoria linicola* та *Fusarium gibbosum*. Ферменти цих грибів за певних умов розкладають серединні пластинки луб'яних пучків. Це відбувається у разі довгого перебування стебел соломи на стелищі. Залежно від умов росту та розвитку той чи інший грибок може домінувати, тому в результаті розстилу можна отримати тресту різної якості [4].

З метою прискорення процесу приготування трести з високими та однорідними якісними показниками у даній роботі запропоновано застосовувати під час розстилу штучне зволоження соломи льону олійного розчином біологічно активного препарату «Триходермін» [5].

З метою вибору оптимальної концентрації біопрепарату «Триходермін» для обробки соломи льону олійного із застосуванням штучного зволоження в процесі розстилу було проведено дослідження впливу цього біологічно активного агенту при трьох рівнях концентрації 1,0; 1,5; 2,0 % і терміну вилежування від 1 до 9 діб на фізико-механічні показники трести та волокна для трьох сортів льону олійного: Віра, Південна ніч, Дебют. Результати досліджень свідчать, що застосування біопрепарату «Триходермін» під час розстилу сприяє інтенсифікації цього процесу при зволоженні стебел льону олійного до 80 % один раз на добу, 6-8

хвилини. Фізико-механічні показники лляної сировини визначали згідно з чинною нормативно-технічною документацією [6, 7]. На розроблену технологію одержання трести шляхом розстилу соломи льону олійного отримано патент України № 81140 МПК D01B 1/00 на корисну модель [8].

Для визначення раціональних параметрів проведення процесу розстилу стебел соломи льону олійного було проведено математичне моделювання в середовищі Mathcad 14.

За вихідні критерії для лляної соломи, було обрано:  $Y_1$  – розривне навантаження волокна, отриманого у процесі розстилу, даН;  $Y_2$  – гнучкість волокна, мм,  $Y_3$  – відокремлюваність, од. За фактори варіювання було обрано:  $T$  – тривалість процесу розстилу, дб;  $C$  – концентрація препарату, %. Рівні варіювання факторів процесу зберігання лляної сировини, подано у табл. 1.

Таблиця 1

Фактор та одиниці виміру		Тривалість зберігання		Концентрація біопрепарату «Триходермін»	
		натуральні значення, доба.	кодовані значення	натуральні значення, %	кодовані значення
Позначення факторів		$T$	$t$	$C$	$c$
Рівні варіювання	1	0	0	1	0
	2	5	0,556	1,5	0,25
	3	6	0,667	2	0,5
	4	7	0,778	0	0
	5	8	0,889	0	0
		9	1	0	0
Діапазон варіювання		9	1	2	1

У результаті моделювання в середовищі Mathcad14 було отримано відповідні рівняння регресії. Після чого було оцінено їхню значимість (за допомогою критерію Стьюдента) і перевірено адекватність моделей (за критерієм Фішера) [9]. Встановлено, що отримані моделі адекватні експериментальним даним з довірчою ймовірністю 0,95. Рівняння регресії для вихідних параметрів лляної трести, отриманої в процесі розстилу соломи льону олійного при обробці біопрепаратом «Триходермін» для сортів Віра та Південна ніч мають вигляд (1 – 6). Графічне відображення одержаних поверхонь відгуку залежності вихідних параметрів від вхідних факторів представлено на рис. 1 – 3.

Для розривного навантаження, даН (1, 2), рис. 1:

$$\text{Віра: } Y_1(t, c) = 21,039 - 3,525c + 1,128t - 3,68c^2 - 4,98ct - 2,853t^2 \quad (1)$$

$$\text{Південна ніч: } Y_1(t, c) = 18,502 - 4,638c - 0,652t - 1,836c^2 - 4,29ct - 0,4t^2 \quad (2)$$

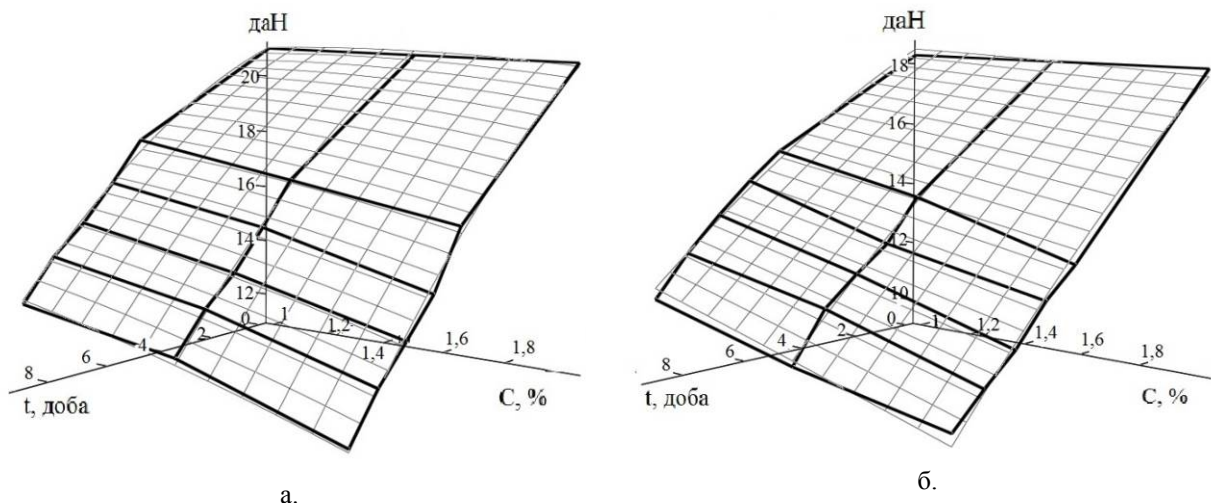


Рис. 1. Поверхні відгуку для розривного навантаження волокна, отриманого із сортів Віра (а) Південна ніч (б).

Для гнучкості, мм (3, 4), рис. 2:

$$\text{Віра: } Y_1(t, c) = 12,845 + 51,846c - 1,69t - 12,163c^2 + 8,675ct + 4,533t^2 \quad (3)$$

$$\text{Південна ніч: } Y_1(t, c) = 13,63 + 53,68c + 2,918t - 15,418c^2 + 9,384ct - 4t^2 \quad (4)$$

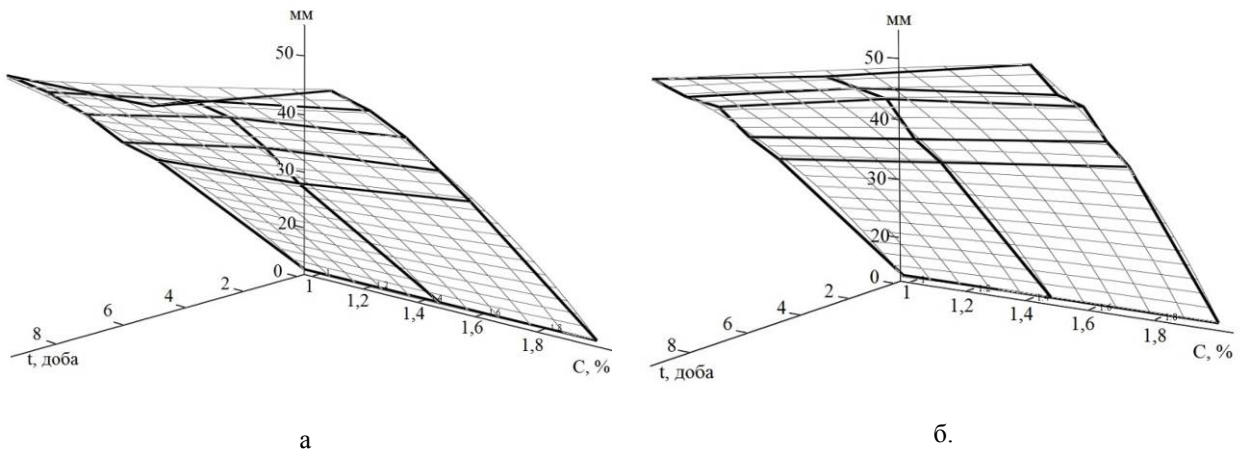


Рис. 2. Поверхні відгуку для гнучкості волокна, отриманого із сортів Віра (а) Південна ніч (б).

Для відокремлюваності, од. (5, 6), рис. 3:

$$\text{Віра: } Y_3(t, c) = 1,333 + 4,455c - 0,138t + 0,405c^2 + 2,372ct + 0,8t^2 \quad (5)$$

$$\text{Південна ніч: } Y_3(t, c) = 1,404 + 4,526c + 0,378t + 0,31c^2 + 2,142ct - 0,133t^2 \quad (6)$$

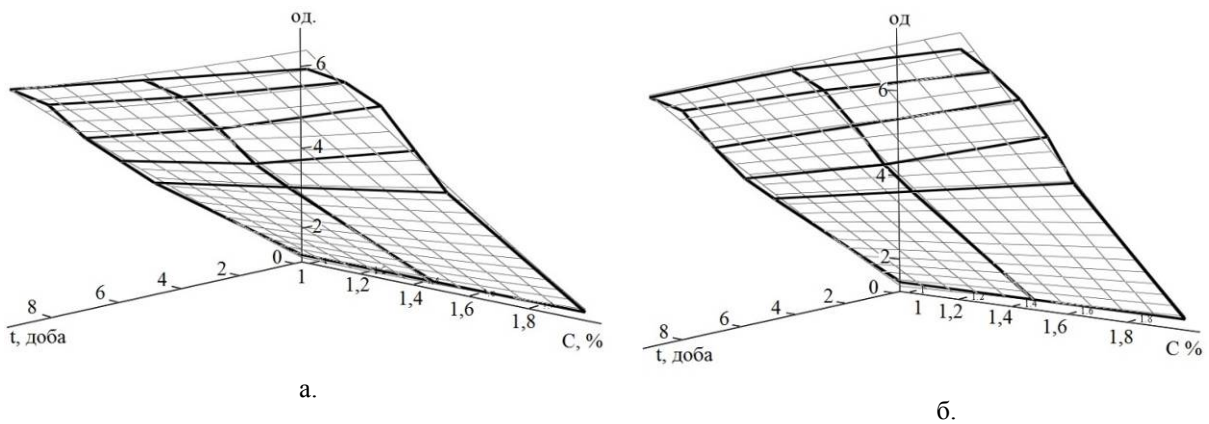


Рис. 3. Поверхні відгуку для відокремлюваності волокна сортів Віра (а) Південна ніч (б).

Одержані результати досліджень свідчать, що застосування запропонованого способу штучного зволоження лляної соломи розчином біопрепарату «Триходермін», дає можливість отримати високоякісну тресту за досить короткий термін і з найменшими витратами ніж в інших розглянутих вище способах.

Аналіз отриманих результатів показує, що найкращі значення, які характеризують інтенсивність процесу приготування трести, було отримано на 8-у й 9-у добу розстилу у варіанті, де стебла льону зволожувались 2,0 % розчином біопрепарату. Однак після комплексної органолептичної та інструментальної оцінки якості одержаної трести можна зробити висновок, що на 8-у добу розстилу треста має оптимальні якісні показники та цілком придатна для подальшої механічної переробки. Також, виходячи з економічної доцільності, скорочення тривалості процесу приготування лляної трести до 8-и діб є більш обґрунтованим, оскільки сприятиме зменшенню витрат на її виробництво.

Також у програмному середовищі Mathcad 14 було отримано графічне відображення оптимальної області значень вищезазначених вихідних параметрів (рис. 4). Лляна треста вважається вилежаною, якщо відокремлюваність становить від 4,1 до 7 од. при цьому розривне навантаження волокна льону олійного повинно бути не нижче ніж 15 даН. Можна вважати, що при отриманні водночас таких значень в процесі розстилу льоносировини є досягненням необхідного результату експерименту.

Таким чином, аналіз моделей рівнянь регресії (1 – 6) та графічних образів (рис. 1 – 3) свідчить, що при зволоженні до 80 % один раз на добу стебел соломи сорту Віра біологічно активним препаратом «Триходермін» концентрацією 2,0 % через 8-9 діб розстилу можна отримати лляну тресту нормального ступеня вилежування придатну для подальшої механічної переробки. Слід зазначити, що втрата міцності волокна сорту Віра в процесі розстилу йде більш повільно, ніж сорту Південна ніч (рис. 4), тому для сорту Південна ніч слід проводити розстил у термін не більше ніж 6 діб з концентрацією «Триходерміна» від 1,5



до 1,9 %, залежно від необхідних якісних показників трести. Для сорту соломи льону олійного Дебют процес розстилу в досліджуваних інтервалах варіювання вхідних факторів проходить аналогічно сорту Віра.

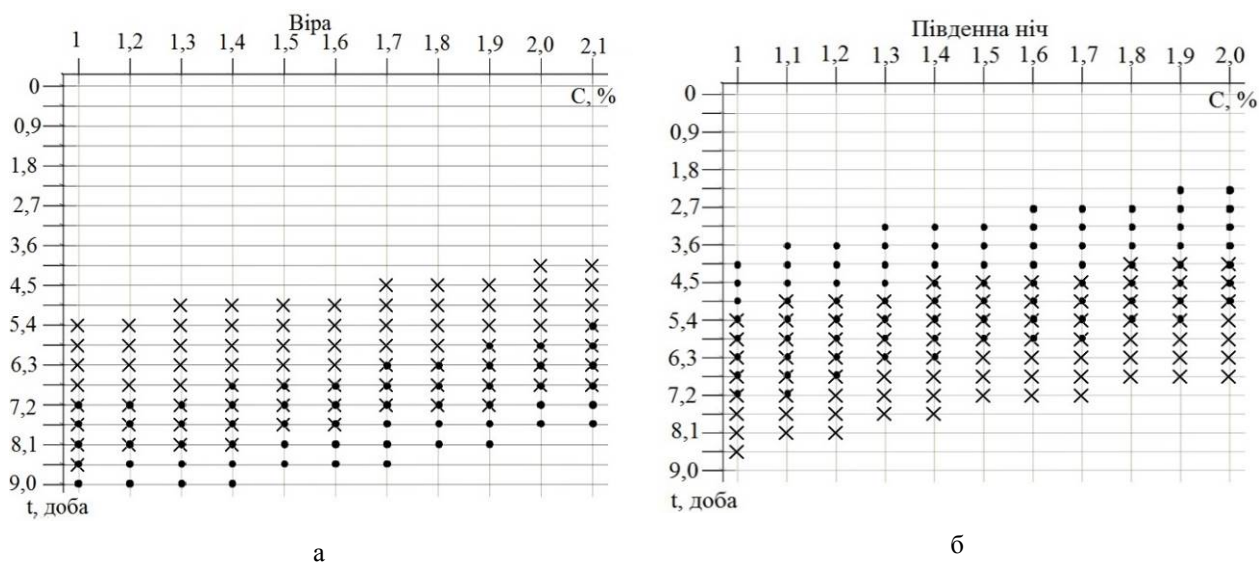


Рис. 4. Вплив вхідних факторів – t-тривалості розстилу, доби; С-концентрації препарату, %; на визначення оптимальних вихідних параметрів для трести і волокна: а) перетин областей розривного навантаження  $Y_1$  і відокремлюваності  $Y_3$  для сорту Віра б) перетин областей розривного навантаження  $Y_1$  і відокремлюваності  $Y_3$  для сорту Південна ніч.  
(• – розривне навантаження, x – відокремлюваність).

#### Висновки

У результаті проведених комплексних досліджень з використанням математичного моделювання визначено раціональні параметри процесу росяного мочіння соломи льону олійного для трьох сортів: Віра, Південна ніч, Дебют.

Аналіз отриманих математичних моделей свідчить, що використання біологічно активного препарату «Трихoderмін» в діапазоні концентрацій від 1,0 до 2,0 % під час процесу росяного мочіння соломи льону олійного на протязі від 1 до 9 діб дозволяє прогнозувати зміну фізико-механічних показників, особливо розривного навантаження, що є одним із основних показників якості льоносировини та відокремлюваності волокна як показника ступеня вилежування трести. Використання отриманих залежностей на практиці дасть змогу отримувати тресту і волокно з різними якісними показниками відповідно функціональному призначенню.

#### Список використаної літератури

1. Чурсіна Л.А. Наукові основи комплексної переробки стебел та насіння льону олійного: моногр. / Л.А. Чурсіна, Г.А.Тіхосова, О.О. Горач, Т.І. Янюк. – Херсон: Олді-плюс, 2011. – 356 с.
2. Кузьміна Т.О. Якість і стандартизація модифікованих лляних волокон: монографія / Т.О. Кузьміна, Л.А. Чурсіна, Г.А. Тіхосова. – Херсон: Олді-плюс, 2009. – 416 с.
3. Пат. 56846 U Україна, МПК D01 B 1/00, A01 D 45/06. Спосіб одержання трести з соломи льону олійного / Прохорова Н.І., Тіхосова Г.А. – № u 2010 09344; заявл. 26.07.10; опубл. 25.01.11, Бюл. № 2.
4. Возняковская Ю.М. Микробиология мочки льна / Ю.М. Возняковская. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. – 136 с.
5. Бобирь С.В. Екологічно чистий спосіб одержання трести з соломи льону олійного в умовах степової зони України / С.В. Бобирь // Проблемы легкой и текстильной промышленности Украины. – 2012. – № 2 (20). – С.130-136.
6. Треста лляна. Технічні умови: ДСТУ 4149:2003. – [Чинний від 2004-01-01]. – К.: Держстандарт України, 2004. – 17 с. (Національний стандарт України).
7. Волокно лляне коротке. Технічні умови: ДСТУ 5015:2008. – [Чинний від 2008-12-06]. – К.: Держспоживстандарт України, 2009. – 10 с. (Національний стандарт України).
8. Пат. № 81140 Україна, МПК D01B 1/00. Спосіб одержання трести з соломи льону олійного / Бобирь С.В., Островська А.В., Кузьміна Т.О. – № u 2012 14321; заявл.14.12.2012; опубл.25.06.2013, Бюл.№ 12.
9. Севостьянов А.Г. Методы и средства исследования механико-технологических процессов текстильной промышленности: учеб. пособие / А.Г. Севостьянов. – М.: Лёгкая индустрия, 1980. – 392 с.

УДК 656.11

А.А. ЗАВАДСКИЙ

Брестский государственный технический университет

В.Н. ШУТЬ

Брестский государственный технический университет

## УПРАВЛЕНИЕ ДОРОЖНЫМ ДВИЖЕНИЕМ НА ПЕРЕКРЁСТКАХ ПРИ ПОМОЩИ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМ

*Рассмотрены сущность и принципы работы мультиагентных систем, формирование пачек в рамках мультиагентных систем; подробно рассмотрен вариант шестиполосного перекрестка с разрешающими знаками поворота со второй полосы; описана работа системы по формированию равновесных пачек на перекрестке; сделаны прогнозы применения мультиагентной системы, а также дальнейшее развитие мультиагентной системы; сделаны выводы по внедрению мультиагентных систем в реальной жизни.*

*Ключевые слова: транспорт, перекресток, мультиагентная система, автомобиль, автомобильная пачка, дорожно-транспортные системы, автоматизация системы дорожного движения, затор.*

A.A. ZAVADSKI

Brest State Technical University

V.N. SHUT

Brest State Technical University

## TRAFFIC MANAGEMENT AT THE INTERSECTIONS USING MULTI-AGENT SYSTEM

*The matter and principles of multi agent system, the formation of pack as a part of multiagent systems are reviewed; the version of the six-lined intersection with permissive signs from the second lane is particularly scanned; system's function of formation equilibrium pack at the intersection is described. Forecasts of use of the multiagent system and the further development of the multiagent system are made; the conclusions about the implementation of multiagent systems in real life are made.*

*Keywords: transport, intersection, multi-agent system, car, car pack, traffic systems, traffic automation system, traffic congestions.*

### Постановка проблемы

В настоящее время транспортные системы играют важнейшую роль в мировой хозяйственной системе. Транспортные системы представляют собой сложные человеко-машинные комплексы, включающие в себя транспортные инфраструктуры, транспортные средства, водителей, пешеходов и другие составляющие дорожного движения, а также множество влияющих факторов. Поддержание высокого уровня безопасности дорожного движения требует постоянного контроля и модернизации транспортной системы.

Существующие попытки автоматизированного контроля дорожного движения рассматривают отдельные транспортные средства, но при этом они не позволяют конструктивно учитывать взаимосвязи между разнородными компонентами дорожного движения. Это делает актуальной разработку новых инструментов и методик контроля и автоматизации системы дорожного движения, позволяющих осуществлять комплексное регулирование в условиях различных дорожных ситуаций, особенно критических (в число которых входит и перекресток).

Современная система дорожного движения, несмотря на ее динамичное развитие, не совершенна, что проявляется, в первую очередь, в автомобильных пробках и заторах, ставших ежедневной реальностью мегаполисов. Несовершенство работы системы дорожного движения является ключевой причиной снижения продуктивности и потери времени.

Важнейшим узлом дорожно-транспортной системы является перекресток. Именно на перекрестках, как правило, формируются "пробки", причиной которых является увеличение количества автомобилей на дорогах и неспособность управления автомобильным потоком посредством существующего инструментария.

Кроме этого, по причине большого потока автомобилей водители часто разгоняются и резко тормозят, что приводит к дополнительному расходу топлива и снижению уровня безопасности.

Следует отметить, что развитие транспортной инфраструктуры крупных городов требует создания интегрированных систем управления нового поколения, позволяющих определять оптимальные режимы движения транспорта с учетом изменчивости дорожной обстановки, получаемой в ходе оперативного прогноза с использованием современных математических моделей с детализацией до уровня отдельных транспортных средств.

### Анализ последних исследований и публикаций

Система резервирования Техасского университета [12]. Система резервирования – это система, занимающаяся планированием движения транспортных средств через перекресток. Получив запрос резервации от транспортного средства, система резервирования вычисляет параметры в зависимости от текущего состояния перекрестка и высылает ответ для дальнейшего безопасного движения. В случае, если сделать резервацию невозможно, система высылает сообщение об отказе.

Система делит площадь перекрестка на сетку из  $N \times N$  клеток. Каждая клетка может иметь 2 состояния: свободно и занято. Время дискретно и также разделено на участки одинаковой продолжительности. Ресурс резервации представляет собой трехмерное пространство  $N \times N \times T$ . При резервации, количество резервированных клеток должно быть таким, чтобы их площадь могла покрывать площадь габаритов транспортного средства в соответствующем положении.

Резервирование местоположения транспортного средства в определенный момент времени:

Пример показан на рисунке ниже (см. рис. 1). Если хотя бы один кадр симуляции пересекает кадр ресурса резервирования, то резервация транспортного средства не может быть осуществлена на весь путь пересечения перекрестка. В этом случае "кадр" следует понимать, как состояние клеток перекрестка в определенный момент времени.

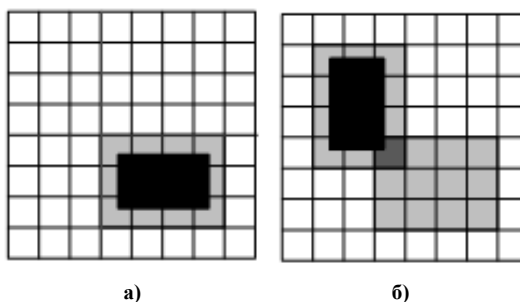


Рис. 1. Возможные результаты резервирования: а) успешная резервация; б) отказ в резервации

### Алгоритм резервирования.

Выделяют следующие пункты алгоритма резервирования:

1. Агент-менеджер на основе параметров агента-водителя симулирует движение транспортного средства через перекресток. В соответствии со всеми параметрами транспортного средства (ускорения, скорости и размеров транспортного средства) агент-менеджер прокладывает предполагаемый путь
2. Агент-менеджер проверяет необходимые для движения клетки в ресурсе резервации
3. Если все клетки симулированного движения свободны, то высылается предложение о резервации агенту-водителю. В противном случае - сообщение об отказе

Таким образом, система резервирования распределяет ресурс резервации для агентов-водителей. Каждая клетка может быть зарезервирована агентом-водителем на определенное время. Для каждой новой заявки на резервацию, агент-менеджер проверяет наличие возможности бронирования определенного пути. Обрабатываются заявки в очередном порядке FIFO (первый пришел, первый ушел).

Недостатки данной системы:

1. Необходимость остановки автомобиля перед перекрёстком в случае отказа в резервировании
2. Система предназначена только для автономных транспортных средств
3. Необходимость вычисления размерности клетки для каждого перекрёстка (размеров одной клетки)
4. Сложность вычислений маршрутов при высокой загрузке перекрёстка
5. Возможность появления коллизий.

### Формулирование цели исследования

Последние достижения в области информационных технологий позволяют предположить, что в скором времени автомобили будут оснащены приборами автономного управления.

Как указывает С.А. Алюшин в своей диссертационной работе "Модели, методы и программные средства построения сложных адаптивных систем дорожного движения", существующие сегодня методики имитации динамической дорожной обстановки не позволяют эффективно решать задачи комплексно; они выполняют исключительно точечные задачи данной области, не принимая при этом во внимание необходимость одновременного удовлетворения двум основным критериям: производительности и реалистичности [1, С. 4].

Как справедливо отмечает В. Шуть, значительные социально-экономические преобразования постоянно предъявляют новые требования к уровню согласованности всех сфер жизнедеятельности, в том числе, в системе дорожного движения. Кроме того, последние десятилетия отмечаются несбалансированностью между потребностями в транспортных услугах и реальными возможностями видов транспорта и дорожной системы. [9, С.193].

Подчеркивая недостатки существующих мер контроля движения, В. М. Маркелов, И.В. Соловьев, В.Я. Цветков говорят о том, что оптимальным подходом реструктуризации и модернизации дорожного движения должны стать качественно новые подходы, одним из которых является применение интеллектуальных транспортных систем. Применение данных систем продиктовано условиями технического развития общества и требованием качественного развития транспортных систем [5, С. 43].

Под интеллектуальными транспортными системами, как правило, понимают системную интеграцию информационных технологий и средств автоматизации с транспортной инфраструктурой, транспортными средствами и пользователями, направленную на повышение эффективности управления дорожным движением и обеспечение безопасности и комфорта участников дорожного движения.

Существенные недостатки имеющихся систем контроля вызывают необходимость изучения новейших технологий регулирования дорожного движения, среди которых наиболее эффективными являются мультиагентные. Поэтому, изучим сущность данных технологий и принцип их работы на примере конкретного перекрестка.

### **Изложение основного материала исследования Сущность и принцип работы мультиагентных технологий**

Мультиагентные технологии обозначают совокупность технологий разработки и использования мультиагентных систем (Multiagent Systems). В основе мультиагентного подхода лежит понятие мобильного программного агента, который функционирует в качестве самостоятельной специализированной компьютерной программы или элемента искусственного интеллекта.

Мультиагентный подход рассматривается сегодня во всех транспортных системах, даже в рамках управления ресурсами в целях обслуживания космических аппаратов – искусственных спутников Земли [7].

В основе предлагаемой мультиагентной системы управления лежит распределённая система, состоящая из следующих основных компонентов:

- модель города, которая представляет собой электронную карту города, описывающую каждую дорогу в пространстве, с информацией о её форме, ширине и количестве полос;
- глобальная система управления, отвечающая за построение оптимальных маршрутов движения для автомобилей и хранение данных маршрутов с возможной корректировкой;
- подсистема управления перекрёстком, оценивающая дорожную обстановку для приближающихся автомобилей, и отвечающая за образование групп автомобилей для оптимального использования перекрёстка;
- агенты-водители – транспортные средства, взаимодействующие между собой и с вышеперечисленными системами.

Понятие агента используется как инструмент для анализа систем. Для создания транспортной системы на основе мультиагентной системы (далее МАС) необходимо выделить следующие агенты: агент-водитель и агент-менеджер. Агент-водитель – это транспортное средство, управляемое человеком, или автономное транспортное средство. Агент-менеджер – это система, установленная в светофор и осуществляющая управление агентами-водителями.

Основная цель для агента-водителя – достигнуть пункта назначения за минимальное время, при этом, по возможности, использовать самый короткий маршрут, чтобы затрачивать меньше топлива на поездку. Основная цель агента-менеджера – управление агентами-водителями, подъезжающими к перекрестку, их перестроение и создание на перекрестке бесконфликтного и непрерывного проезда транспортных средств.

Схема, представляющая примерное внутреннее устройство агента, а также его положение в среде и взаимодействие с другими агентами, приведена на рис. 2.

Автомобили, будучи агентами, осуществляют обмен сообщениями с навигационным устройством, расположенным на перекрестке и, состоящим из компьютера и беспроводного передатчика. При приближении к перекрестку транспортное средство налаживает контакт с таким устройством.

Для того, чтобы использовать систему, автомобиль посылает сообщение, содержащее несколько параметров:

- время, к которому транспортное средство прибудет к перекрёстку;
- скорость, с которой транспортное средство прибудет;
- направление движения автомобиля;
- максимальная скорость автомобиля;
- габариты автомобиля.

В свою очередь, подсистема управления перекрёстком оценивает дорожную обстановку, моделируя оптимальный разъезд групп транспортных средств для увеличения пропускной способности перекрёстка.

Ключевой характеристикой данной мультиагентной системы является самоорганизация, означающая совокупность динамических и адаптивных процессов, ведущих к возникновению и поддержанию структуры системы без внешнего управления.

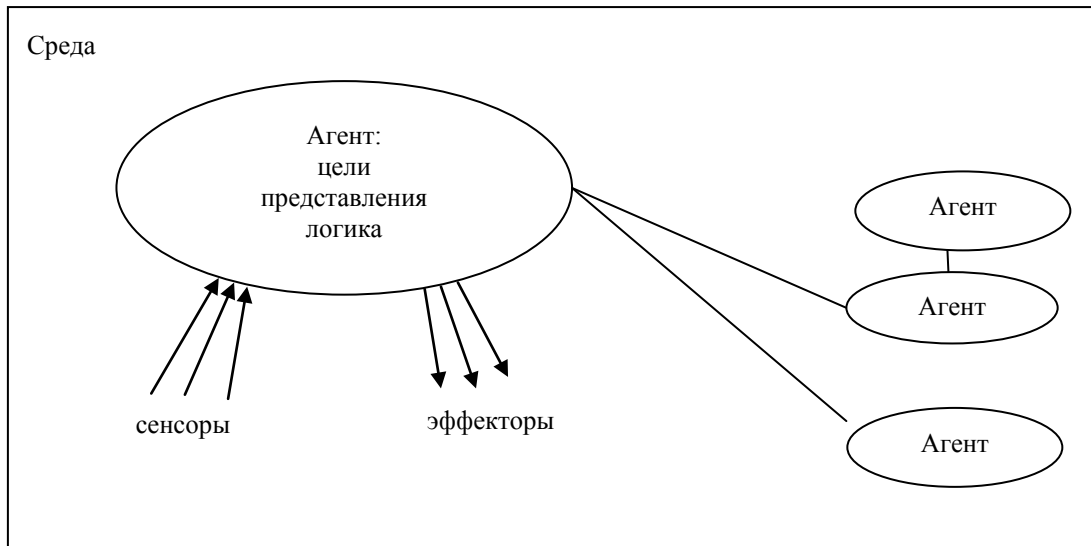


Рис. 2. Внутреннее устройство агента

**Формирование пачек в рамках мультиагентных систем**

Как было отмечено ранее, основной целью рассматриваемой системы управления дорожным движением является оптимизация разезда групп транспортных средств или "пачек".

Большинство исследователей под пачкой подразумевают группу из двух или большего числа взаимодействующих автомобилей, движущихся в одном направлении. Поведение пачки в значительной степени определяется движением ее головного автомобиля, то есть движение пачек подчиняется теории "следования за лидером". Для автомобилей пачки также свойственен динамический характер их взаимодействия – изменение расстояния между автомобилями внутри пачки.

Таким образом, под автомобильной пачкой будем понимать совокупность взаимодействующих транспортных средств, движущихся в одном направлении и принадлежащих к некоторому пространству, в котором определены конкретные интервалы расстояния между элементами.

Автомобильные пачки должны быть сформированы таким образом, чтобы автомобили могли преодолеть перекресток за наименьшее время. Рассмотрим отдельные случаи формирования пачек, а также критерии отнесения автомобилей к ним. На рис. 3 отражен случай приближения пачки автомобилей к пустому перекрестку.

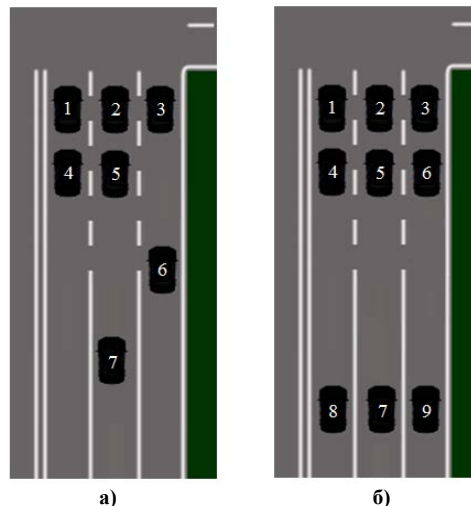


Рис. 3. Приближение автомобилей к пустому перекрестку

Итак, на рис. 3а наблюдается приближение к перекрестку пачки, состоящей из 5 автомобилей – от 1 до 5. При этом автомобили 6 и 7 являются внепачковыми, то есть движущимися по отдельной траектории вне линии безостановочного движения.

Внепачковые автомобили представляют собой автомобили, которые по определенным причинам приходят к стоп-линий на красный сигнал. Зачастую внепачковыми являются автомобили, выехавшие на координированное направление с боковых проездов, пересекающих улиц либо после стоянки-остановки.

Для оптимизации дорожного движения и эффективной работы системы данные автомобили должны войти в состав той или иной пачки. Как показано на рис. 3б, лучшим вариантом будет включение

автомобиля 6, расстояние между которым и пачкой невелико в состав пачки 1-5 путем повышения скорости его езды. Автомобиль 7 правильное отнести к следующей пачке и предложить снизить скорость.

Однако зачастую при приближении уже сформированной автомобильной пачки к перекрестку на нем уже есть автомобили, не успевшие за первый цикл пересечь перекресток (рис. 4).

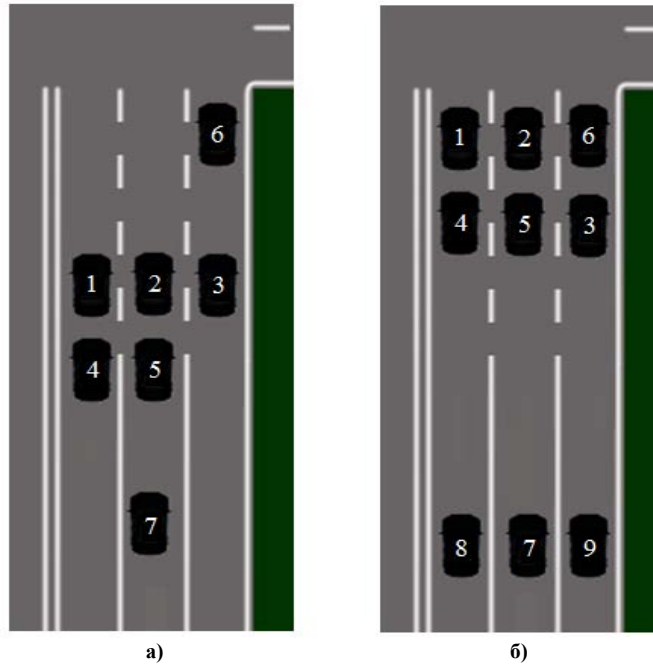


Рис. 4. Приближение автомобилей к перекрестку с автомобилем

В случае, изображенном на рисунке 4а, внепачковый автомобиль 6 становится частью пачки автоматически, причем занимает место "лидера". Автомобиль семь становится часть последующей пачки (рис. 3б). Если же на перекрестке находится несколько внепачковых автомобилей, правильным будет такое включение зеленого сигнала, который позволил бы данным транспортным средствам уйти от стоп-линий раньше приближения переднего фронта координированной пачки, набрать заданную скорость координации и без конфликтов и разрывов слиться с предыдущей координированной пачкой.

Таким образом, система при помощи имитации определяет место транспортного средства в пачке для прохождения перекрёстка с предоставленными параметрами, учитывая уже имеющиеся в пачке автомобили. Если автомобиль приведёт к переполнению пачки – система отклонит запрос автомобиля до следующей итерации создания пачки, в противном случае примет запрос.

**Исходные для изучения движения на перекрестке**

Наиболее полное изучение функционирования может быть проведено лишь при переносе ее действия на конкретный объект. Рассмотрим подробнее вариант шестиполосного перекрестка с разрешающими знаками поворота со 2 полосы.

Транспортные потоки на таком перекрестке отражены на рис. 4.

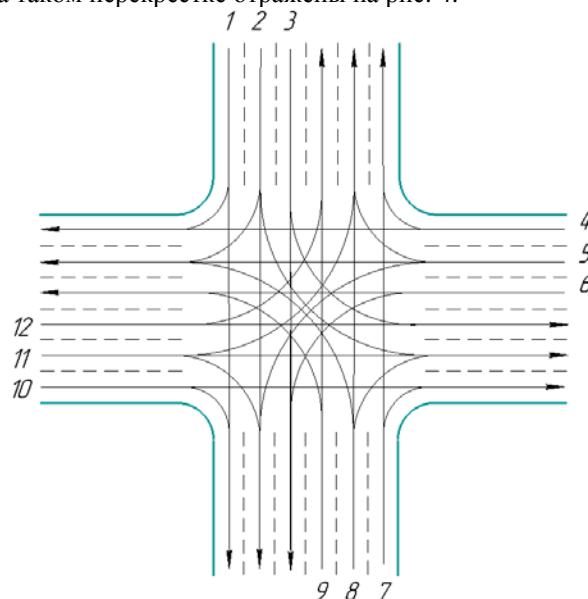


Рис. 4. Транспортные потоки перекрестка

Как видно на рис. 4, в рамках рассматриваемого перекрестка имеется множество конфликтных точек, потому представим граф транспортных потоков на рис. 5.

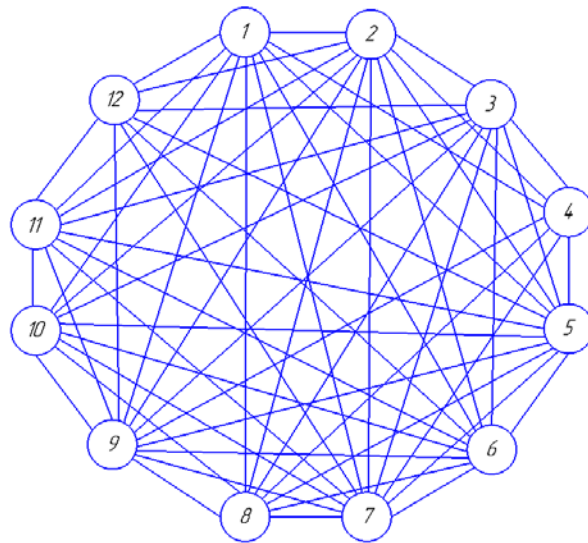


Рис. 5. Граф транспортных потоков

Таким образом, в рамках рассматриваемого перекрестка регулирование должно осуществляться исходя из следующего:

- в крайней правой полосе могут находиться автомобили, поворачивающие направо и едущие прямо;
- в крайней левой находятся автомобили, поворачивающие налево и едущие прямо;
- в центральной полосе могут находиться автомобили, движущиеся в любом направлении.

Отметим также, что при пересечении перекрестка скорость автомобиля уменьшается по формуле [2, С. 236]:

$$v = R \cdot 0,33 \tag{1}$$

Из представленной формулы видно, что скорость имеет прямую зависимость от радиуса окружности, описываемой автомобилем при повороте: чем больше радиус, тем больше и скорость. Из этого следует, что поворот налево сопровождается большей скоростью автомобиля, чем поворот направо. При транзитном движении (движении прямо) можно двигаться вовсе без потери скорости.

Радиусы поворотов автомобилей с разных полос наглядно проиллюстрированы на рис. 6.

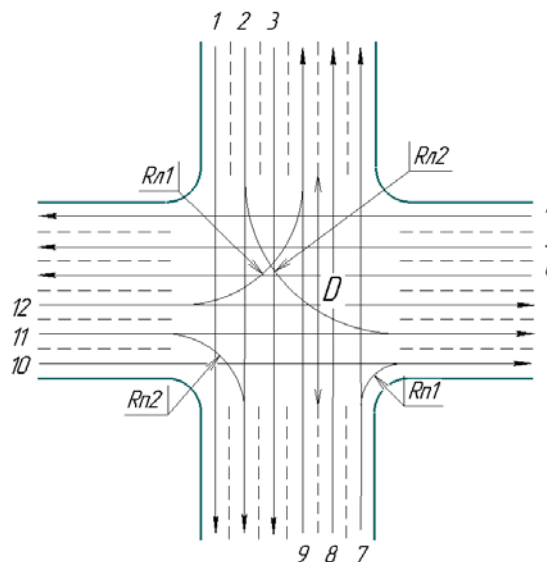


Рис. 6. Радиусы поворотов автомобилей с разных полос

Исходя из размеров радиусов, можно определить за какое время машина преодолет перекресток в каждом из направлений. Основываясь на этих данных, система и производит нормализацию автомобильной пачки.

**Работа системы по формированию равновесных пачек на перекрестке**

Считается, что если доля внепачковых автомобилей превышает величину 0,25, то даже при 100 % координации транзитного и поворотного координированного потоков система координированного регулирования будет считаться неэффективной [3, С. 62], потому рассмотрим подробнее принципы формирования равновесных пачек.

Для эффективной работы системы должно соблюдаться следующее условие: отношение длины пути пересечения перекрестка к скорости по каждой полосе должно быть одинаковым, то есть одинаковым должно быть время переезда перекрестка автомобилями пачки.

Исходя из этого, равновесная пачка автомобилей – это пачка, все автомобили последнего ряда которой пересекают перекресток в одно и то же время, то есть в начальных условиях должно соблюдаться условие:

$$\sum \frac{2\pi R_l}{4 \cdot V_l} \approx \sum \frac{D}{V_m} \approx \sum \frac{2\pi R_n}{4 \cdot V_n} \tag{2}$$

где  $R_l$  – радиус поворота для машин, поворачивающих на перекрестке налево;

$V_l$  – скорость машин, поворачивающих налево;

$D$  – длина пути машин, едущих прямо(транзитно);

$V_m$  – скорость машин, едущих прямо(транзитно);

$R_n$  – радиус поворота для машин, поворачивающих направо;

$V_n$  – скорость машин, поворачивающих направо.

Однако, в условиях ранее описанного перекрестка, позволяющего движение в различных направлениях, для формирования равновесных пачек данное условие должно быть усовершенствовано.

Так, для начала, введем совокупности переменных, выделяющих три основных направления следования автомобилей:  $X_l, X_m, X_p$ :

$X_l$  – совокупность автомобилей конкретной полосы, поворачивающих на перекрестке налево,  $X_l = [1 \dots i]$ ;

$X_m$  – совокупность автомобилей конкретной полосы, едущих прямо (транзитно)  $X_m = [1 \dots j]$ ;

$X_p$  – совокупность автомобилей конкретной полосы, поворачивающих на перекрестке направо  $X_p = [1 \dots p]$ .

Кроме того, согласно рис. 6, радиусы поворотов будут различны не только для движения направо или налево, но и для различных полос, а именно:

$R_{l1}$  – радиус поворота для машин крайней левой полосы (1-ой полосы), поворачивающих на перекрестке налево;

$R_{l2}$  – радиус поворота для машин центральной полосы (2-ой полосы), поворачивающих на перекрестке налево;

$R_{p1}$  – радиус поворота для машин крайней правой полосы (3-ей полосы), поворачивающих на перекрестке направо;

$R_{p2}$  – радиус поворота для машин центральной полосы (2-ой полосы), поворачивающих на перекрестке направо.

В таком случае, приведем формулы для расчета общего времени прохода заданного количества автомобилей, поворачивающих налево, едущих прямо (транзитно) и поворачивающих направо через перекресток для каждой из полос:

а) первая полоса:

$$\Pi_{t1} = \sum_{i=1}^n \frac{2\pi R_{l1}}{4 \cdot V_{li}} \cdot X_{li} + \sum_{j=1}^m \frac{D}{V_{mj}} \cdot X_{mj} \tag{3}$$

б) вторая полоса:

$$\Pi_{t2} = \sum_{j=1}^m \frac{D}{V_{mj}} \cdot X_{mj} + \sum_{i=1}^n \frac{2\pi R_{l2}}{4 \cdot V_{li}} \cdot X_{li} + \sum_{z=1}^p \frac{2\pi R_{n2}}{4 \cdot V_{nz}} \cdot X_{nz} \tag{4}$$

а) третья полоса:

$$\Pi_{t3} = \sum_{z=1}^p \frac{2\pi R_{n1}}{4 \cdot V_{nz}} \cdot X_{nz} + \sum_{j=1}^m \frac{D}{V_{mj}} \cdot X_{mj} \tag{5}$$



При этом для того, чтобы пачка автомобилей считалась равновесной необходимо соблюдение условия:

$$P_{t1} \approx P_{t2} \approx P_{t3} \quad (6)$$

Рассмотрим данное правило в рамках ранее изучаемого перекрестка на рис. 7.

На рис. 7а видно, что перекресток будет пересечен неравномерно. Последние автомобили из столбцов под номерами 1 и 2 начнут движение по перекрестку раньше, чем последний автомобиль из 3-его столбца, то есть отмеченный автомобиль пересечет перекресток последним

Учитывая ранее указанное условие, для эффективного движения необходимо перестроить данную автомобильную пачку так, как показано на рис. 7б.

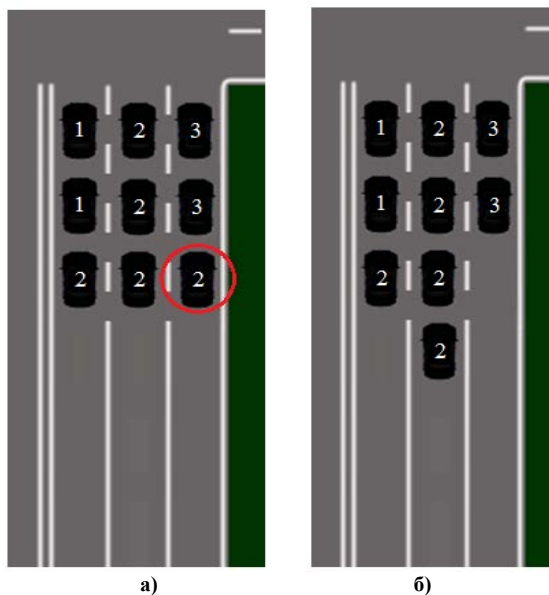


Рис. 7. Автомобильная пачка: а) сформировавшаяся; б) равновесная

Сбалансированная таким образом пачка будет равновесной и позволит всем автомобилям одновременно пересечь перекресток, что увеличит его пропускную способность.

Следовательно, предлагаемая схема движения автомобилей на перекрестке, а также ее регулирование по средствам многоагентной системы является наилучшим вариантом организации движения на перекрестке без светофора. В перспективе подобная схема движения станет лучшей альтернативой организации движения автомобильного транспорта на перекрестке.

#### Применение и дальнейшее развитие МАС

Описанная система является эффективным средством управления автономными транспортными средствами, но так или иначе даже при обширном ее распространении будет иметь место "переходный этап", когда часть автомобилей по крайней мере частично будет управляться людьми. В таком случае в программном обеспечении, установленном в автомобиле необходима организация интерфейса, отображающего текущую пачку, в которой находится автомобиль и команды для водителя указывающие полосу, в которую водителю необходимо перестроиться для создания равновесной пачки.

Если водитель не следует командам, отдаваемым ему подсистемой управления перекрестка, его штрафуют на определенное количество баллов. На перекрестках система управления использует алгоритм создания пачек с приоритетом, в котором в первую очередь обрабатываются агенты, у которых наименьшее количество штрафных баллов.

Дальнейшее развитие и совершенствование МАС должно развивать прежде всего адаптивность системы. Данная необходимость заключается главным образом в саморегуляции системы по средствам развития коммуникации "водитель-менеджер", когда водитель может сообщить о невозможности выполняемых команд менеджера. Выполнение данного условия необходимо в случаях, когда команда агента на формирование автомобильной пачки не возможна из-за наличия автомобиля, не оборудованного системой GPS и не является агентом системы. Для этого необходима разработка интерфейса программы, позволяющего передавать сообщения в разрезе коммуникации "водитель-менеджер".

Необходимым принципом дальнейшего развития МАС является принцип комплексности, который предполагает учет всех факторов дорожного движения, в том числе: погодных условий, скорости движения, работы светофоров и т.д.

### Заключення

В цілому, необхідно відзначити високий потенціал МАС в удосконаленні транспортної системи. В частині, рух автомобілів на перехрестках.

Ефективність запропонованої системи обумовлена в такому випадку не тільки енергетичними міркуваннями (економія палива і ресурсів автотранспорту), але і упорядкуванням всієї транспортної системи на основі самоорганізації.

Повсюдне впровадження МАС дозволить оптимізувати поведінку водіїв, підвищити їх дисциплінованість. При допомозі МАС зменшиться кількість ДТП; додатковими перевагами даного підходу вважаються також дешевизна і простота впровадження в існуючу дорожньо-транспортну інфраструктуру.

### Список використаної літератури

1. Алюшин, С. А. Модели, методы и программные средства построения сложных адаптивных систем дорожного движения: автореф. дис. На соискание учен. степени канд. техн. наук : спец. 05.13.11 "Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей"; 05.13.01 "Системный анализ, управление и обработка информации (в информационных системах)" / Сергей Александрович Алюшин. — Москва, 2011. — 22 с.
2. Врубель, Ю.А. Характеристики дорожного движения: учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-44 01 02 "Организация дорожного движения" / Ю.А. Врубель. — Минск.: БНТУ, 2007. — 268 с.
3. Капский, Д. В. Методика определения экономических потерь при координированном регулировании движения транспортных и пешеходных потоков / Д. В. Капский, Д. В. Навой // Вестник Белорусского национального технического университета: научно-технический журнал. - 2010. - №4. - С. 60-70.
4. Кухаренок, Г.М. Исследование механизма распада координированной пачки автотранспортных средств при движении на перегоне магистральной улицы / Г.М. Кухаренок, Д.В.Капский, Д.В. Навой, Д.В. Рожанский, В.Н. Шуть // Вестник Брестского государственного технического университета. — 2010. — №15. — С. 63—68.
5. Маркелов, В.М. Интеллектуальные транспортные системы как инструмент управления. Раскрывается содержание интеллектуальных транспортных систем как нового типа систем / В.М. Маркелов, И.В. Соловьев, В.Я. Цветков // Государственный Советник. — 2014. — № 3. — С. 42—49.
6. Портал искусственного интеллекта [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.aiportal.ru/articles/multiagent-systems/theory-agent.html>. — Дата доступа: 03.04.2016.
7. Скобелев, П.О. Мультиагентные технологии и сетевые системы для управления ресурсами в реальном времени / П.О. Скобелев, А.Н. Мочалкин, Д.Е. Новичков, С.И. Залогова, А.В. Рыкин // Радиопромышленность. — 2015. — № 1. — С.113—127.
8. Шуть, В.Н. Мультиагентное управление движением транспортных средств в улично-дорожной сети города / В.Н. Шуть // Искусственный интеллект. — 2014. — № 4. — С. 123—128.
9. Шуть, В.Н. Расширение возможностей оптимального управления транспортными потоками в улично-дорожной сети города / В. Шуть // Електроніка та інформаційні технології. — 2013. — № 3. — С. 193—201.
10. Agent Technology Center интеллекта [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.agents.felk.cvut.cz/>. — Дата доступа: 09.04.2016.
11. Cassenbaum, O. Supervisory control of hybrid powertrains / O. Cassenbaum // Proceedings of the International Congress of Heavy Vehicles, Road Trains and Urban Transport (Minsk, 6-9 October, 2010). — Minsk: BNTU, 2010. — P. 51—59.
12. Dresner, K.A Multiagent Approach to Autonomous Intersection Management / K.A. Dresner // Journal of Artificial Intelligence Research. — 2008. — Vol. 5(7). — P. 21—54.

УДК 677.01

Н.М. ЗАЩЕПКИНА

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

Н.Р. ТЕРЕНТЬЄВА

Київський національний університет технологій та дизайну

## РОЗРОБКА ТА КОНТРОЛЬ ЯКОСТІ МАТЕРІАЛІВ ДЛЯ ЗАХИСТУ ЛЮДИНИ ВІД ДІЇ ПИЛУ

*У статті розглянуто вплив пилу на здоров'я людини, запропоновано використовувати для захисту від пилу маски, виготовлені з текстильних матеріалів. Розроблені, досліджені матеріали для виготовлення масок, проведені дослідження, виготовлені готові вироби та проведений контроль їх якості.*

*Ключові слова: пил, дослідження, контроль, якість, матеріали, чарунка, маска.*

Н.Н. ЗАЩЕПКИНА

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Н.Р. ТЕРЕНТЬЄВА

Киевский национальный университет технологий и дизайна

## РАЗРАБОТКА И КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ЗАЩИТЫ ЧЕЛОВЕКА ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПЫЛИ

*В статье рассмотрено влияние пыли на здоровье человека, предложено использовать для защиты от пыли маски, изготовленные из текстильных материалов. Разработаны, исследованы материалы для изготовления масок, проведены исследования, изготовлены готовые изделия и произведен контроль их качества.*

*Ключевые слова: пыль, исследование, контроль, качество, материалы, ячейка, маска.*

N.N. ZAZHCHEPKINA

National technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"

N.R. TERENTIEVA

Kyiv national University of technologies and design

## DEVELOPMENT AND QUALITY CONTROL OF MATERIALS FOR PROTECTION FROM THE EFFECTS OF DUST

*In this paper, the influence of dust on human health, it is proposed to use for protection against dust a mask, made from textile materials. Developed, researched materials for making masks, studies made of the finished product produced and their quality control.*

*Key words: dust, research, control, quality, materials, cell, mask.*

### Постановка проблеми

Стан повітря навколишнього середовища завдає непоправної шкоди органам дихання людини. Небезпечні речовини можуть бути у формі твердих або рідких аерозольних часток, газів, парів або випарів. Чим менше розмір частинок пилу, тим довше вони знаходяться в повітрі у зваженому стані і тим вище ймовірність того, що вони проникнуть в легені.

Дуже небезпечні дрібнодисперсні частинки пилу, які здатні проникнути в легені і, маючи дуже велику площу контакту з тканиною легень, здатні швидко і у великій кількості всмоктуватися, викликаючи інтоксикацію організму. Ураження верхніх відділів дихального апарату пилом пов'язують з наявністю в ньому ліберину і гістаміну, які спричиняють вивільнення медіаторів запалення з тканинних базофілів і виникнення реакції запалення неімунної форми (атопічної).

Основним чинником дії пилу на організм є хімічний склад пилових часток. Вміст у них таких елементів, як свинець марганець, фтор, а також токсичних органічних сполук, надає пилу властивості виробничої отрути. Залежно від своїх фізико-хімічних властивостей пил спричиняє алергенну, мутагенну, канцерогенну і подразнюючу дію, а також радіоіндукційний ефект.

Тому людині потрібен захист від дії пилу. Таким захистом є маска, виготовлена із текстильних матеріалів.

Згідно з EN 132 і номенклатури складових частин EN 134 Маскою називається лицева частина, що покриває ніс, рот, підборіддя і забезпечує достатнє ізолювання обличчя користувача ЗІЗОД від навколишньої атмосфери за передбачуваних умов використання у разі вологої або сухої шкіри обличчя, під час рухів голови і розмови.

У загальному випадку фільтруючі матеріали для захисту органів дихання людини повинні мати такі властивості:

- високу ступінь уловлювання твердих частинок;
- в деталях масок класу 2 і 3, які можуть зазнати удару, повинно бути зведено до мінімуму використання алюмінію, магнію, титану або сплавів, що містять таку кількість цих металів, яка може під час удару і виникнення іскри бути причиною займання горючих газових сумішей;
- стійкість до температури;
- стійкість до теплового випромінювання;
- використані матеріали повинні витримувати дію чистильних і дезінфікуючих засобів та процедур;
- краї будь-якої частини маски, що можуть вступати в контакт з користувачем, не повинні мати гострих країв або відгалужень;
- легкість надягання і знімання наголовного гарнітуру;
- висока міцність;
- розтягувальне навантаження (50 Н);
- у разі випробування негативним тиском 10 мбар зміна тиску під маскою протягом 1 хв не повинна перевищувати 10 мбар;
- матеріали, що можуть контактувати зі шкірою користувача, не повинні бути причиною подразнення або чинити інший шкідливий вплив на здоров'я користувача;
- лицеві частини повинні відповідати вимогам:
  - одягнена маска повинна щільно прилягати до контуру обличчя. Підсос випробувальної речовини не повинен перевищувати в середньому 0,05 % об'єму вдихуваного повітря;
  - допустима площа зору.

Було обрано в якості матеріалу для масок двошаровий трикотаж. Основна ідея роботи полягає в розробці, теоретичному та експериментальному обґрунтуванні застосування двошарових трикотажних фільтрувальних матеріалів для захисту органів дихання людини. Завдяки змінній чарункоподібній структурі, а також поєднанню сировини на різних шарах трикотажу дозволяє підвищити комфорт при експлуатації, фільтрування від макро- та дрібнодисперсного пилу.

#### Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є розробка і контроль трикотажних матеріалів функціонального призначення з прогнозованими властивостями, оцінка споживчих властивостей (функціональності) розроблених зразків із змінною чарункоподібною структурою для захисту органів дихання людини.

Методи дослідження включають в себе аналітичне узагальнення відомих наукових і технічних результатів, стандартні методики дослідження властивостей текстильних матеріалів, аналізу результатів експерименту, обробку експериментальних даних методами математичної статистики.

#### Виклад основного матеріалу дослідження

Для виготовлення двошарового трикотажного полотна нами було обрано: круглов'язальну двофонтурну машину «Бентлі», яка призначена для вироблення полотна ластичним, дволастичним, пресовим, жакардовим та комбінованим переплетеннями. Машина має 24 в'язальні системи. Кожна система забезпечена відбираючим барабаном. Барабан має 32 ряди горизонтальних отворів для штифтів і 48 вертикальних. Сировина - поліпропіленова мультифіламентна комплексна нитка високої міцності з лінійною густиною 300 деньє, розривним навантаженням 3,5 – 5,5 г/деньє, подовженням при розриві 20 – 60%; вміст УФ стабілізатора 0 – 1%, кількість пневмоз'єднань 10 – 45 шт/м. Пряжа для машинного в'язання: склад пряжі бавовна 34%, льон 33%, віскоза 33%, номінальна лінійна густина пряжі 29 текс, коефіцієнт крутки 44,5, відносне розривне навантаження 11,7 сН/текс. Було виготовлено маски, які захищають обличчя людини. Процес відведення вологи, антибактеріальна обробка та збереження нормальної температури тіла див. рис. 1.

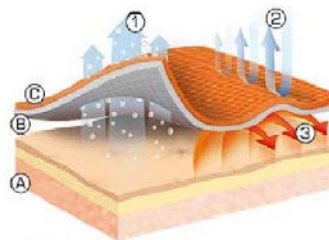


Рис. 1 Процес відведення вологи, антибактеріальна обробка та збереження нормальної температури: А – шкіра людини, В – внутрішній шар маски, С – зовнішній шар, 1 – відведення вологи на зовнішній шар, 2 – антибактеріальна обробка, 3 – збереження нормальної температури тіла

Математичне моделювання впливу параметрів в'язання на параметри структури бікомпонентного трикотажу. Довжина нитки в петлі залежить безпосередньо від глибини кулірування,

натягу нитки та сили відтягування полотна. В найбільшій мірі на її значення впливає глибина кулірування. З метою виявлення характеру впливу зміни заправної довжини нитки в петлі на показник якості трикотажу у процесі в'язання змінювалась глибина кулірування шляхом повороту регульовального гвинта на 0,75 оберту.

Середнє значення кількості петельних стовпчиків в 100мм трикотажу: заправна довжина нитки в петлі ґрунту, мм. – 5,1/7,1; щільність по горизонталі – 60,8, 60,4, 60,3/50,3, 50,5, 50,2.

При побудові лінійної однофакторної регресійної моделі застосовується метод найменших квадратів або регресійний аналіз. Вивчалась залежність кількості петельних стовпчиків у 100 мм трикотажу від заправної довжини нитки в петлі гладі. Графік залежності петельних стовпчиків від довжини петлі представлений на рис. 2.

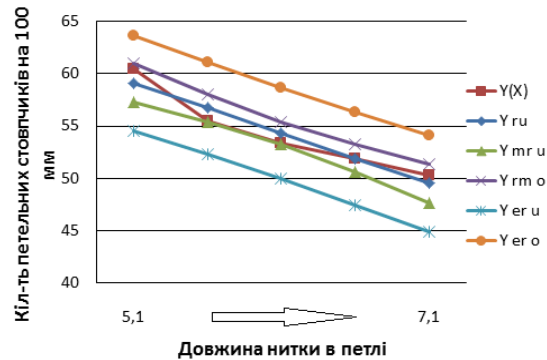


Рис. 2. Графік залежності кількості петельних стовпчиків від довжини нитки в петлі

**Дослідження параметрів петельної структури та лінійних розмірів зразків трикотажних полотен до та після прання:**

- довжина нитки в петлі базового переплетення гладь та відповідно пресового переплетення при середньому рівні довжини нитки в петлі зменшилась на 15,09 %;

- кількість петельних стовпчиків на 100 мм при середньому рівні довжини нитки в петлі не змінилась у зразку №1; у зразку №2 – зменшилась на 1,61%.

- кількість петельних рядів на 100 мм при середньому рівні довжини нитки в петлі зменшилась у зразку №1 на 15,78 %, у зразку №2 зменшилась – на 21,83%.

Це можна пояснити зміною лінійних розмірів петель по ширині (А, мм) та висоті (В, мм).

- товщина при середньому рівні довжини нитки в петлі зросла у зразка №1 на 3,58 %, у зразка №2 – не змінилась.

Зменшення довжини нитки в петлі, кількості петельних стовпчиків у 100 мм і збільшення кількості петельних рядів у 100 мм трикотажу та його товщини пояснюється усадкою полотна вздовж петельного стовпчика та притяжкою вздовж петельного ряду.

**Встановлення математичних залежностей, що описують вплив зміни довжини нитки в петлі на зміну лінійних розмірів зразків бікомпонентного трикотажу після прання.** Зміна лінійних розмірів після мокрих обробок встановлена у відповідності до ГОСТ 30157.0-95, ГОСТ 30157.1-95. На двох квадратних пробах розміром 150Ч150 мм, що викроєні з полотна за шаблоном, нанесли олівцем мітки у вигляді квадрату розміром 100Ч100 мм. Контрольні відстані між мітками заміряні з точністю до 1 мм. Перед пранням мітки були обведені фарбою, що не змивається. Проби прали у пральній машині при температурі 30 °С. Висушені та відлежані проби витримали 10 хвилин за нормальних умов, після чого виміряли контрольні відстані. Далі встановлено величину зміни лінійних розмірів та порівняно отримані значення з нормативними.

Визначено, що отримані рівняння показують, що зі збільшенням довжини нитки в петлі спостерігається зменшення лінійного розміру полотна вздовж петельного рядка. При зміні довжини нитки в петлі в межах від 5,1 мм до 7,1 мм (на 39,2%) відбувається усадка трикотажного полотна вздовж петельного рядка, яка змінюється: у зразка №1 в межах від -3,58 мм до 15,24 мм (зменшується на 525,32 %); у зразка №2 – від 4,81 мм до -0,06 мм (зменшується на 101,29 %).

Отримані рівняння показують, що зі збільшенням довжини нитки в петлі спостерігається зменшення лінійного розміру полотна вздовж петельного стовпчика. При зміні довжини нитки в петлі в межах від 5,1 мм до 7,1 мм (на 39,2%) відбувається усадка трикотажного полотна вздовж петельного стовпчика, яка змінюється: у зразка №1 в межах від -9,00 мм до -8,42 мм (зменшується на 167,46 %); у зразка №2 – від -6,16 мм до -14,81 мм (зростає на 140,52 %).

**Вплив довжини нитки в петлі на кількість петельних рядів ( $N_p$ ) у 100 мм трикотажу.** Підрахунок числа петельних рядів у 100 мм трикотажу здійснювався у напрямку одного петельного стовпчика. Математична обробка даних і побудова графіків залежності кількості петельних рядів у 100 мм трикотажу від зміни довжини нитки в петлі проводилась аналогічно попереднім розрахункам. Визначено,

що отримані рівняння показують, що зі збільшенням довжини нитки в петлі кількість петельних рядків на 100 мм зменшується. Це можна пояснити тим, що при збільшенні довжини нитки в петлі зростає висота петельного ряду. Таким чином, можна зробити висновок, що в одиниці площі розташовується менша кількість петельних рядків. При зміні довжини нитки в петлі в межах від 5,1 мм до 7,1 мм (на 39,2%) кількість петельних рядків у 100 мм трикотажу після його прання змінюється: у зразка №1 в межах від 96 пет.ряд. до 67 пет.ряд. (зменшується на 30,2 %); у зразка №2 – від 92 пет.ряд. до 54 пет.ряд. (зменшується на 41,3%).

**Вплив довжини нитки в петлі на кількість петельних стовпчиків ( $N_c$ ) у 100 мм трикотажу.** Підрахунок числа петельних стовпчиків у 100 мм трикотажу здійснювався у напрямку одного петельного ряду. Математична обробка даних і побудова графіків (рис. 2) залежності кількості петельних стовпчиків у 100 мм трикотажу від зміни довжини нитки в петлі проводилась аналогічно попереднім розрахункам. Визначено, що отримані рівняння показують, що зі збільшенням довжини нитки в петлі кількість петельних стовпчиків на 100 мм зменшується. Це можна пояснити тим, що при збільшенні довжини нитки в петлі зростає петельний крок. Таким чином, можна зробити висновок, що в одиниці площі розташовується менша кількість петельних стовпчиків. При зміні довжини нитки в петлі в межах від 5,1 мм до 7,1 мм (на 39,2%) кількість петельних стовпчиків у 100 мм трикотажу після його прання змінюється: у зразка №1 в межах від 61 пет.ст. до 50 пет.ст. (зменшується на 18 %); у зразка №2 – від 69 пет.ст. до 54 пет.ст. (зменшується на 21,7%).

**Встановлення математичних залежностей, що описують вплив зміни довжини нитки в петлі на товщину розроблених зразків трикотажних полотен після прання.** Значна кількість споживчих властивостей трикотажного полотна залежить безпосередньо від його товщини. До них належать повітропроникність, тепловий опір, зносостійкість. Товщина полотен визначалась за допомогою товщиноміру при п'яти повторних дослідах. Середні значення вимірів визначались як середнє арифметичне.

Визначено, що одержані рівняння показують, що зі збільшенням довжини нитки в петлі товщина трикотажного полотна зменшується. Це можна пояснити тим, що зі збільшенням довжини нитки в петлі міжпетельні проміжки збільшуються, структура трикотажу стає більш рихлою, що у свою чергу призводить до зменшення товщини. У ході досліджень виявлено характер впливу введення у структуру базового переплетення гладь протяжок пресового переплетення. У відповідності до одержаних результатів досліджень при збільшенні довжини нитки в петлі у заданих межах було встановлено певні залежності: у зразка №1 в межах від 2,33 мм до 1,92 мм (зменшується на 17,6 %); у зразка №2 – від 1,93 мм до 1,11 мм (зменшується на 42,5 %).

**Встановлення математичних залежностей, що описують вплив зміни довжини нитки в петлі на поверхневу густину трикотажного полотна після прання.** Математична обробка представлених експериментальних даних проводилась аналогічно попереднім математичним обробкам. За результатами побудовані відповідні графіки та отримані рівняння залежностей поверхневої густини зразків трикотажних полотен від довжини нитки в петлях гладі. Згідно отриманих результатів досліджень зміна довжини нитки в петлі в заданих межах на 39,2% призводить до зміни поверхневої густини: у зразка № 1 в межах від 372 г/м до 237,2 г/м (зменшується на 36,24 %); у зразка № 2 – від 367,33 г/м до 208,8 г/м (зменшується на 43,16 %).

**Дослідження споживчих властивостей бікомпонентного трикотажу. Дослідження гігроскопічності бікомпонентного кулірного трикотажу в залежності від довжини нитки в петлі.** Гігроскопічні властивості визначають здатність виробів поглинати і віддавати вологу. Характеристиками гігроскопічних властивостей являються гігроскопічність, вологовіддача, вологопоглинання, капілярність. Гігроскопічність трикотажу в основному визначається гігроскопічністю складових його волокон, а вологопоглинання і капілярність – структурою переплетення. Гігроскопічність розроблених зразків трикотажних полотен визначалась згідно ДСТУ 3998-2000. У ході досліджень вивчено вплив зміни параметрів в'язання, а саме довжини нитки в петлі на рівень гігроскопічності розроблених зразків трикотажних полотен. При побудові лінійної однофакторної регресійної моделі застосовано метод найменших квадратів або регресійний аналіз. Виявлено вплив рівня довжини нитки в петлі гладі на його гігроскопічність. Після проведення математичної обробки експериментальних даних встановлено рівняння залежності гігроскопічності  $H$  від зміни довжини нитки в петлі  $l$  та побудовано відповідні графіки залежності, що дозволяє з'ясувати характер впливу. Отримані рівняння показують, що зі збільшенням довжини нитки в петлі гігроскопічність трикотажних полотен зменшується. При зміні довжини нитки в петлях ґрунту  $l$  в межах від 5,1 мм до 7,1 мм (на 39,2%) гігроскопічність: зразка № 1 змінюється в межах від 16,88 % до 14,89 % (зменшується на 11,79 %); зразка № 2 – від 12,87 % до 11,67% (зменшується на 6,42%).

**Дослідження паропроникності бікомпонентного кулірного трикотажу.** Паропроникність характеризує здатність полотен пропускати водяні пари з середовища з підвищеною вологістю повітря в середовище з меншою вологістю. Цей показник у значній мірі визначає гігієнічність текстильного матеріалу. При недостатній паропроникності полотна людина відчуває задуху. Паропроникність прийнято характеризувати коефіцієнтом паропроникності, який визначається як маса водяних парів, що перейшли крізь одиницю площі матеріалу або виробу за одиницю часу у разі заданої товщини повітряного прошарку між поверхнею випаровування води та елементарною пробою. Коефіцієнт паропроникності трикотажних

полотен визначається згідно ДСТУ 3672-97 (ГОСТ 30568-98). Суть методу полягає у визначенні паропроникності полотен в умовах, близьких до умов експлуатації. Крім того, слід зазначити, що згідно цього стандарту паропроникність характеризується не ustalеним коефіцієнтом паропроникності, а вживається термін «показник паропроникності», якому надається визначення – «кількість парів поту, що пройшли крізь одиницю площини полотна чи виробу протягом одиниці часу». Паропроникність через текстильні полотна і вироби відбувається переважно через наскрізні пори (аналогічно проходженню повітря) та сорбцією пари волокнами полотна з внутрішнього шару, внутрішнім переносом вологи в структурі полотна та її десорбцією на зовнішній шар. Звідси витікає залежність паропроникності полотен від гігроскопічності складових його волокон та структури матеріалу. Для обробки результатів досліджень застосовувався метод регресійної однофакторної математичної моделі (РОФМ) на базі традиційного плану активного експерименту. Згідно отриманих результатів досліджень зміна довжини нитки в петлі в заданих межах на 39,2% призводить до зміни величини паропроникності полотна: у зразка № 1 – від 92,3 г до 74,5 г (зменшилась на 19,3%); у зразка № 2 – від 91,4 г до 84,1 г (зменшилась на 8%).

У ході досліджень виявлено, що значний вплив на паропроникність має пористість трикотажу, яка у свою чергу визначається параметрами структури та характеристиками сировини. Так, чим більша щільність в'язання, тим менша величина наскрізних пор, а отже і менший рівень паропроникності. На підставі проведеного однофакторного експерименту, де у якості фактора обрано довжина нитки в петлі, що змінювалась, одержано математичні залежності, що описують зв'язок між параметрами в'язання (у якості фактора обрано довжина нитки в петлі) та показником паропроникності. Виготовлені маски див. рис.3.



Рис. 3. Маски

### Висновки

Таким чином, у ході досліджень встановлено параметри структури до та після прання розроблених зразків інтегрованого трикотажу та величини зміни лінійних розмірів після прання. Виявлено, що величина усадки розроблених зразків інтегрованого трикотажу вздовж петельних стовпчиків перевищує рівень усадки вздовж петельних рядів, що можна пояснити тим, що у ході досягнення умовно-рівноважного стану нитка накиду перерозподіляється у протяжки. Це у свою чергу призводить до збільшення щільності трикотажу по довжині та зменшення щільності по ширині. Усадка трикотажу внаслідок мокрих обробок призводить до збільшення товщини полотна. На гігроскопічні властивості трикотажу у значній мірі впливає вид сировини лицьового (гідрофільного) шару трикотажу. У випадку використання поліпропіленових ниток рівень гігроскопічності значно збільшується.

### Список використаної літератури

1. Защепкіна Н.М., Дослідження респіраторного захисту людини за допомогою текстильних матеріалів / Н.М. Защепкіна, Н.Р. Терентьева // Тези доповідей на XIV Всеукраїнській науковій конференції молодих учених та студентів «Наукові розробки молоді на сучасному етапі». Київ. – 2015.– С.138-139.
2. Защепкіна Н.М. Контроль та оцінка гігієнічних властивостей тканин / Н.М. Защепкіна, А.О. Бурмистрова, Н.Р. Терентьева // Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасний стан легкої і текстильної промисловості: інновації, ефективність, екологічність». Херсон. – 2015. – С. 104.
3. Защепкіна Н. М., Використання нового способу для контролю пилоємності текстильних матеріалів / Н.М. Защепкіна, Я.О. Яшенко, Ю.С. Гречуха, Н.Р. Терентьева // IV Міжнародна науково-технічна конференція «Науково-прикладні аспекти автомобільної і транспортно-дорожньої галузей», Наукові нотатки. Вип.45.–2016. – С.163-167.
4. Патент на корисну модель № 98272. Терентьева Н.Р., Галавська Л.С., Защепкіна Н.М. Двошаровий кулірний трикотаж. Зареєстровано в державному реєстрі патентів України 27.04.2015.

УДК 539.3

Т.С. КАГАДИЙ  
 Национальный горный университет  
 О.В. БЕЛОВА, И.В. ЩЕРБИНА  
 Национальная металлургическая академия Украины

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

*Разработанный авторами метод возмущений позволил свести решение сложных задач теории упругости анизотропных сред к последовательному решению краевых задач теории потенциала. Исследован ряд сложных новых задач, в частности, о передаче нагрузки от жесткого штампа к круговому сектору с цилиндрической анизотропией.*

*Ключевые слова: штамп, взаимодействие, анизотропия, асимптотический.*

Т.С. КАГАДИЙ  
 Національний горний університет  
 О.В. БЕЛОВА, І.В. ЩЕРБИНА  
 Національна металургійна академія України

## АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ

*Розроблений авторами метод збурення дозволив звести розв'язання складних задач теорії пружності анізотропних середовищ до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу. Досліджено ряд складних нових задач, зокрема, про передачу навантаження від жорсткого штамп до криволінійного сектору з циліндричною анізотропією.*

*Ключові слова: штамп, взаємодія, анізотропія, асимптотичний.*

T.S. KAGADIY  
 National Mining University  
 O.V. BELOVA, I.V. SHERBINA  
 National Metallurgical University of Ukraine

## THE ANALYTICAL APPROACH TO A SOLUTION OF SOME CONTACT TASKS

*The elaborated by authors perturbation method is allowed to reduced the solution of complicated problems of linear elasticity to subsequently solved boundary problems of potential theory. New linear problems are investigated, in particular, problem on load transference from stamp to circular plate with curve.*

*Keywords: stamp, interaction, anisotropy, asymptotic.*

### Постановка проблеми

Высокие требования, предъявляемые к надежности конструкции, в настоящее время могут быть удовлетворены лишь при наличии оперативной и достоверной информации о ее напряженно-деформированном состоянии (НДС). Расчетные схемы исследуемых конструкций при этом должны быть максимально приближены к реальным объектам, необходимо учитывать сложность их конструктивных форм, структуры, характера нагружения и взаимодействия с окружающей средой, поведение материалов конструкции в экстремальных условиях и т. д. В большинстве реальных конструкций закон распределения истинных контактных давлений оказывает существенное влияние на НДС взаимодействующей пары, а иногда, определяет работоспособность конструкции в целом. В таких случаях построение математической модели оказывается весьма сложной задачей. Аналитические подходы к решению такого рода задач и сегодня являются актуальными [1-6].

В данной работе рассматривается задача о вдавливании жесткого штампа в свободную грань упругого ортотропного бесконечного кругового сектора с цилиндрической анизотропией, кромки которого закреплены. Между штампом и пластиной учитывается трение. Для решения задачи используется асимптотический метод [3].

### Цель исследования

Продемонстрировать эффективность применения аналитических подходов к решению сложных контактных задач, когда получение точного решения проблематично. В частности, на решении задачи о контактном взаимодействии штампа и ортотропной пластины с цилиндрической анизотропией асимптотическим методом показать, что приближенное решение вблизи «особых точек» в точности совпадает с точным решением Галина [2], разложенным в ряд по малому параметру.



**Постановка задачи и метод решения.**

Пусть упругая пластина ( $R_0 \leq r \leq \infty; -\gamma \leq \theta \leq \gamma$ ) закреплена по кромкам  $\theta = \pm\gamma$ . На границу  $r = R_0$  действует жесткий штамп на участке  $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$  с основанием, совпадающим с границей  $r = R_0$ . Штамп нагружен нормальным усилием  $P_0$  и касательным  $Q_0$ . При этом между штампом и пластиной учитывается трение, подчиняющееся закону Кулона (рассматривается состояние предельного равновесия штампа). На бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) перемещения и деформации равны нулю. Пластина толщины  $\delta$  работает в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Материал пластины является ортотропным, главные направления анизотропии совпадают с полярными координатами  $r, \theta$ . Требуется найти распределение напряжений под штампом и в пластине.

Для решения задачи о контакте жесткого штампа с упругим кольцевым сектором, обладающим цилиндрической анизотропией, был применен асимптотический метод [3], позволяющий расщепить напряженно-деформированное состояние сектора на две составляющие, обладающие различными свойствами. Краевая задача теории упругости сводится к последовательному решению задач теории потенциала, и решение исходной задачи определяется как суперпозиция указанных составляющих.

Если вместо полярных координат  $r, \theta$  ввести безразмерные координаты  $\xi, \eta$  соотношениями  $r = R_0 e^\xi; \theta = \eta$ , то поставленная задача может быть сведена к интегрированию уравнений равновесия пластины в перемещениях

$$\begin{aligned} B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta &= 0, \\ G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2 (v_\eta + u)) = 0, \\ \tau &= G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad (\xi = 0, \lambda \leq |\eta| \leq \gamma), \\ u &= v = 0 \quad (\eta = \pm\gamma), \\ u &= C_0, \tau = \rho \sigma_1 \quad (\xi = 0, |\eta| < \lambda), \end{aligned} \tag{2}$$

на бесконечности перемещения и напряжения равны нулю. Кроме того, должны быть выполнены условия равновесия штампа

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0, \eta) d\eta + P_0 = 0, \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \tau(0, \eta) d\eta + Q_0 = 0. \tag{3}$$

Так как рассматривается состояние предельного равновесия ( $\tau = \rho \sigma_1$ ), то второе условие сводится к первому. Здесь  $u = u_r; v = u_\theta$  – компоненты вектора перемещений пластины;  $B_1 = \frac{E_1 \delta}{1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}$ ;  $B_2 = \frac{E_2 \delta}{1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}$  – жесткости пластины на растяжение-сжатие;  $E_1, E_2$  – модули упругости вдоль главных направлений;  $G = G_* \delta$  – жесткость пластины на сдвиг;  $G_*$  – модуль сдвига;  $\sigma_1, \tau$  – нормальное (в направлении координаты  $\xi$ ) и касательное усилия в пластине;  $m = 1 + \mathcal{G}_2 B_1 / G = 1 + \mathcal{G}_1 B_2 / G$ ;  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  – коэффициенты Пуассона материала пластины ( $\mathcal{G}_1 B_2 = \mathcal{G}_2 B_1$ );  $\rho$  – коэффициент трения ( $\rho < 1$ ); индексы  $\xi, \eta$  обозначают дифференцирование по соответствующим координатам.

В результате решения задачи [3, 4], в нулевом приближении получены формула для расчета давления под штампом

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0 \pi}{4\gamma K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} \tag{4}$$

и выражение для определения осадки штампа

$$u^{1,0} = \frac{2\gamma}{\pi} A \frac{\ln\left(\sin(\pi\eta_1/2\gamma) + \sqrt{(\sin(\pi\eta_1/2\gamma))^2 - l_1^2}\right)}{\cos(\pi\eta_1/2\gamma)}, \quad (5)$$

где  $A = -\frac{P_0 R_0 \pi}{4\gamma \sqrt{GB_1} K(l_1)}$ ,  $l_1 = \sin \frac{\pi\lambda}{2\gamma}$ ,  $K(l_1)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Касательное напряжение  $\tau$  под штампом имеет вид  $\tau^0 = \rho\sigma_1^0$  (при  $\rho = 0$  получается решение для гладкого штампа).

Поскольку в окрестности угловой точки штампа характер напряженного состояния такой же, как и для полуплоскости, то в этом случае имеется возможность сравнить известное решение для полуплоскости с решением Л.А. Галина [2].

Согласно [3, 4, 6] для нахождения функции напряжений следует решать дифференциальное уравнение четвертого порядка. Соответствующее ему характеристическое уравнение является биквадратным и имеет вид:

$$s^4 + \left(1 - \frac{2\nu_1 G}{B_1}\right) \frac{B_1}{G} s^2 + \frac{B_1}{B_2} = 0.$$

Пусть  $a_1 = 2\nu_1$ . Тогда получим уравнение

$$s^4 + (1 - a_1 \varepsilon) \varepsilon^{-1} s^2 + \varepsilon^{-1} \frac{G}{B_2} = 0,$$

корни которого запишутся:

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2 &= -\frac{1}{2}(1 - a_1 \varepsilon) \varepsilon^{-1} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(1 - a_1 \varepsilon)^2 \varepsilon^{-2} - \varepsilon^{-1} \frac{G}{B_2}} = \\ &= -\frac{1}{2}(1 - a_1 \varepsilon) \varepsilon^{-1} \pm \frac{1}{2}(1 - a_1 \varepsilon) \varepsilon^{-1} \sqrt{1 - \frac{4G}{B_2(1 - a_1 \varepsilon)^2 \varepsilon^{-1}}} = -\frac{1}{2}(1 - a_1 \varepsilon) \varepsilon^{-1} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon G}{B_2(1 - a_1 \varepsilon)^2}}\right]. \end{aligned}$$

Раскладывая корни  $s_1^2, s_2^2$  в ряд по  $\varepsilon$ , получим:

$$\begin{aligned} s_1^2 &= -\frac{1}{2}(1 - a_1 \varepsilon) \varepsilon^{-1} \left[1 - \left(1 - 2\frac{G}{B_2} \varepsilon + \frac{G}{B_2}(1 - 4a_1)\varepsilon^2 + \dots\right)\right], \\ s_2^2 &= -\frac{1}{2}(1 - a_1 \varepsilon) \varepsilon^{-1} \left[1 + \left(1 - 2\frac{G}{B_2} \varepsilon + \frac{G}{B_2}(1 - 4a_1)\varepsilon^2 + \dots\right)\right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} s_1^2 &= -\frac{1}{2}(1 - a_1 \varepsilon) \varepsilon^{-1} \frac{G}{B_2} (2\varepsilon - (1 - 4a_1)\varepsilon^2 + \dots) = \\ &= -\frac{1}{2}(1 - a_1 \varepsilon) \frac{G}{B_2} (2 - (1 - 4a_1)\varepsilon + \dots) = -\frac{G}{B_2} (1 - a_1 \varepsilon) \left(1 - \frac{1 - 4a_1}{2} \varepsilon + \dots\right) = \\ &= -\frac{G}{B_2} \left(1 - \frac{1 - 4a_1 - 2a_1}{2} \varepsilon + \dots\right) = -\frac{G}{B_2} \left[1 + \frac{6a_1 - 1}{2} \varepsilon + \dots\right], \\ s_2^2 &= -\frac{1}{2}(1 - a_1 \varepsilon) \varepsilon^{-1} \left[1 - \frac{G}{B_2} \varepsilon + \frac{G}{B_2}(1 - 4a_1)\varepsilon^2 + \dots\right] = -\varepsilon^{-1} \left[1 - \left(a_1 + \frac{G}{B_2}\right) \varepsilon + \dots\right]. \end{aligned}$$

Для ортотропного тела с осями упругой анизотропии, параллельными осям координат, корни биквадратного уравнения являются чисто мнимыми. Отсюда (в обозначениях Галина)

$$\mu_1 = s_1 = i \sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[ 1 + \frac{1}{4}(6a_1 - 1)\varepsilon + \dots \right] = i v_1; \quad \mu_2 = s_2 = i \varepsilon^{-1/2} \left[ 1 - \frac{a_1 + G/B_2}{2} \varepsilon + \dots \right] = i v_2,$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[ \varepsilon^{-1/2} \sqrt{\frac{B_2}{G}} + 1 - \sqrt{\frac{B_2}{G}} \frac{\left( a_1 + \frac{G}{B_2} \right)}{2} \varepsilon^{1/2} + \frac{6a_1 - 1}{4} \varepsilon + \dots \right],$$

$$v_1 v_2 = \sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[ \varepsilon^{-1/2} + \frac{4a_1 - 2G/B_2 - 1}{4} \varepsilon^{1/2} - \frac{(6a_1 - 1)(a_1 + G/B_2)}{8} \varepsilon^{3/2} + \dots \right].$$

Давление, действующее под штампом, имеет вид

$$p(x) = -\frac{P}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} f(\theta), \tag{6}$$

где  $f(\theta) = \sin \pi \theta \left( \frac{l+x}{l-x} \right)^{1/2-\theta}$ ,  $\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{A_3 + \rho A_4}{B_3 + \rho B_4} = (B_3 = A_4 = 0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{A_3}{\rho B_4} =$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{-\beta_{22} \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}}{\rho \left( \beta_{22} \frac{1}{v_1 v_2} + \beta_{12} \right)} = (\beta_{12} = 0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{-(v_1 + v_2)}{\rho}.$$

Разложим  $\theta$  в ряд по  $\varepsilon^{1/2}$ .

$$\theta(\theta) = \frac{1}{2},$$

$$\theta' = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (v_1 + v_2)^2 / \rho^2} \left( -\frac{1}{\rho} \right) \sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[ -\sqrt{\frac{B_2}{G}} \varepsilon^{-1} - \sqrt{\frac{B_2}{G}} \frac{(a_1 + G/B_2)}{2} + \frac{6a_1 - 1}{2} \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon) \right],$$

$$\theta'(\theta) = \frac{1}{\pi} \rho.$$

Тогда разложение  $\theta$  в ряд по  $\varepsilon^{1/2}$  будет представлено в виде:

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \rho \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon),$$

а функция  $f(\theta) = \sin \pi \theta \left( \frac{l+x}{l-x} \right)^{1/2-\theta}$  примет следующий вид:

$$f(\theta) = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \rho \varepsilon^{1/2} \right) \left( \frac{l+x}{l-x} \right)^{1/2 - \left( 1/2 + \frac{\rho}{\pi} \varepsilon^{1/2} \right)} = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \rho \varepsilon^{1/2} \right) \left( \frac{l-x}{l+x} \right)^{\frac{\rho}{\pi} \varepsilon^{1/2}}.$$

$$f(\theta) = 1,$$

$$f'(\varepsilon^{1/2}) = \rho \cos \left( \frac{\pi}{2} + \rho \varepsilon^{1/2} \right) \left( \frac{l-x}{l+x} \right)^{\frac{\rho}{\pi} \varepsilon^{1/2}} + \sin \left( \frac{\pi}{2} + \rho \varepsilon^{1/2} \right) \left( \frac{l-x}{l+x} \right)^{\frac{\rho}{\pi} \varepsilon^{1/2}} \frac{\rho}{\pi} \ln \frac{l-x}{l+x},$$

$$f'(0) = \frac{\rho}{\pi} \ln \left( \frac{l-x}{l+x} \right).$$

Тогда разложение  $f(\theta)$  в ряд по  $\varepsilon^{1/2}$  запишется в виде:

$$f(\theta) = 1 + \frac{\rho}{\pi} \ln \left( \frac{l-x}{l+x} \right) \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon),$$

а давление под штампом примет следующий вид:

$$p(x) = -\frac{P}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} \left( 1 + \frac{\rho}{\pi} \ln \left( \frac{l-x}{l+x} \right) \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon) \right). \quad (7)$$

Коэффициент трения  $\rho$  имеет порядок  $\varepsilon^{1/2}$  ( $\rho = \rho_0 \varepsilon^{1/2}$ ). Тогда контактное давление (в исходных обозначениях) запишется:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} \left( 1 + \frac{\rho_0}{\pi} \ln \left( \frac{l-\eta_1}{l+\eta_1} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right). \quad (8)$$

Давление под штампом определяется формулой (7), а касательное напряжение  $\tau$  под ним имеет вид  $\tau^0 = \rho \sigma_1^0$ .

#### Полученные результаты и выводы

Таким образом, пригодное вблизи угловых точек штампа асимптотическое решение совпадает с разложенным в ряд точным решением Л.А. Галина. Учет первых двух приближений дает хорошую аппроксимацию точного решения и указывает на характер особенности вблизи угловой точки штампа ( $\eta_1 = l_1$ ). Как и в [2], эта особенность имеет вид:

$$\sigma = -B \left( 1 - \frac{\eta_1}{l_1} \right)^{-\frac{1}{2} + \theta}.$$

Для гладкого штампа особенность совпадает с точной. Полученное в исходной задаче решение (1), (2) может быть «подправлено» вблизи особых точек при помощи «сращивания» с указанным особым решением. Ранее установлено [4], что с уменьшением значения угла  $\gamma$  точка «сращивания» приближается к границе области контакта.

#### Список использованной литературы

1. Взаимодействие жесткого штампа с ортотропным прямоугольником / А. В. Павленко, И. В. Щербина, А. В. Сясев // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2011. – №3(42) – С. 338-342.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин – М.: Наука, 1980. – 303 с.
3. Маневич Л. И. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов / Л. И. Маневич, А. В. Павленко – К.: Вища шк., 1991. – 131 с.
4. Павленко А. В. Вдавливание жесткого штампа в ортотропную пластину с криволинейной анизотропией / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, О. В. Белова // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла, Дніпропетровський національний університет. – 2012. – Вип. 13. – С. 320-327
5. Сясев А. В. Приближенный аналитический метод расчета растущих тел с учетом фазового перехода / А. В. Сясев // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2001. – С.125-137.
6. Kagadiy T. The analysis of the solution of the task about the monoaxial stretching of the anisotropic plate with the curvilinear anisotropy loosened by the circular orifice / T. Kagadiy, O. Belova // Theoretical Foundations of Civil Engineering Polish-Ukrainian Transactions. – 2015. – Vol. 23 –P. 9-14.

УДК 532.595

О.И. КОВЧ

Государственное Предприятие КБ "Южное"

### ИССЛЕДОВАНИЕ РАСТРЕСКИВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Разработана основанная на применении метода конечных элементов методика определения напряжений пластинчатых конструкций, подверженных одновременному действию температурных и силовых нагрузок. Методика позволяет определить области пластических деформаций. Это позволяет прогнозировать картину растрескивания поверхности. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния конструкции при различных схемах ее крепления.

Ключевые слова: трещина, деформация, заделка, конечный элемент, температура, шарнир.

О.І. КОВЧ

Державне Підприємство КБ "Південне"

### ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗТРИСКУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Розроблена, на підставі використання метода кінцевих елементів, методика для визначення напруги пластинчатих конструкцій, які піддаються одночасній дії температурних та силових навантажень. Методика дозволяє визначати області пластичних деформацій. Це дозволяє прогнозувати картину розтріскування поверхні. Проведено аналіз навантажено-деформованого стану конструкції при різних схемах її кріплення.

Ключові слова: тріщина, деформація, затискання, кінцевий елемент, температура, шарнір.

О.І. КОВЧ

Design office "Yuzhnoye"

### RESEARCHING THE CRAKING SURFACES AT THERMOPOWER LOADING

The methodology for the determining of the stress in plate structures which are subjected to the simultaneous action of temperature and power loads is worked out. It is based on the using of the finite element method. The methodology allows to define the areas of plastic deformation. It allows to predict the pattern of the surface cracking. The analysis of stress-strain state of the structure under different schemes of its fastening is conducted.

Keywords: crack, deformation, jamming, finite element, temperature, joint.

#### Постановка проблемы

Изучаются напряжения и остаточные деформации в наружном слое пластинчатой конструкции в условиях нестационарных температурных и силовых воздействий.

В данной работе рассмотрим пластинчатую конструкцию, представляющую собой короб (корпус), состоящий из пластин, шарнирно-опертых по нижней пластине (рис. 1).

Предположим, что процесс деформирования не является адиабатическим или изотермическим, тогда появляется приращение температуры  $\Delta T = T - T_0$ ,

где  $T = T(x, t)$  – температура тела в точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в рассматриваемый момент времени  $t$ , а  $T_0$  – температура тела в той же точке в исходном недеформированном состоянии в начальный момент времени.

При изменении температуры на величину  $\Delta T = T - T_0$  в некоторой точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  конструкции объем малой окрестности, окружающей эту точку, изменится пропорционально  $\Delta T$ ; при этом возникнут тепловые деформации:

$$\varepsilon_{ij}^t = \alpha_{ij}(T - T_0), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

или в матричной записи:

$$\varepsilon_{ij}^t \{\varepsilon^t\} = \{\alpha\}(T - T_0), \quad (2)$$

где  $\alpha_{ij}$  – матрица коэффициентов теплового расширения (1/град).

Для случая изотропного тела расширение во всех направлениях происходит одинаково и, следовательно, можем записать:

$$\alpha = \alpha \cdot \delta_{ij},$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ij}=1$  при  $i=j$ ,  $\delta_{ij}=0$  при  $i \neq j$ ).

Для ортотропного тела коэффициенты теплового расширения могут быть различными по осям упругой симметрии, т.е. имеет место равенство:

$$\alpha = \alpha_i \cdot \delta_{ij}.$$

Полная деформация  $\{\varepsilon\}$  в рассматриваемой точке равна сумме упругой деформации  $\{\varepsilon'\}$ , обусловленной внешними нагрузками, и тепловой деформации  $\{\varepsilon^t\}$ , т.е.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon'\} + \{\varepsilon^t\}.$$

Отсюда определяем величину упругой деформации:

$$\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}.$$

Тогда напряжения в линейно-упругом теле можно определить по закону Гука (формула (6) из [7]):

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda \cdot (\varepsilon_{kk} - \gamma T) \cdot \delta_{ij}. \quad (3)$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе,

$\gamma$  – термомеханическая постоянная, ( $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$ ),

$\alpha_t$  – коэффициент теплового расширения,

$T$  – температура.

Это известные соотношения Дюамеля-Неймана.

Компоненты тензора деформаций  $\{\varepsilon\}$  выражаются через перемещения  $u_i$  ( $i=1,2,3$ ) соответствующих точек тела согласно соотношениям Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4)$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние упругой пластины в условиях температурного и силового воздействий, т.е. удовлетворить уравнения движения:

$$(\lambda + 2\mu)\Delta u_i - (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - F_i = 0. \quad (5)$$

уравнению теплопроводности [2], соотношениям Дюамеля-Неймана (3), соотношениям Коши (4), уравнениям совместности деформаций [8], а также начальным и граничным условиям.

Задача решалась по времени.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Развитие современной техники требует создания новых конструкций, работа которых происходит под действием многократных, несимметричных силовых и температурных факторов. Наиболее нагруженными в таких конструкциях являются зоны максимальных остаточных деформаций на наружных поверхностях конструкций. Исследование прочности и надежности пластин с трещинами представлены в ряде источников [1–7]. В работе [8] предложен подход, основанный на использовании метода конечных элементов для расчета термоупругого поведения конструкции, рассматривается связанная постановка задачи термоупругости. Среди работ, посвященных решению связанных задач термоупругости, отметим исследования [9–10].

В данной статье рассмотрен пример расчета зон растрескивания наружных поверхностей конструкции в условиях нестационарных температурных и силовых воздействий в связанной термоупругой постановке.

#### Формулирование цели исследования

Целью данного исследования является разработка методики определения максимальных напряжений, влияющих на растрескивание наружных поверхностей пластинчатых конструкций, подверженных одновременному действию температурных и силовых нагрузок.

#### Изложение основного материала исследования

Предложенная методика позволяет определить области пластических деформаций. Это, в свою очередь, позволяет прогнозировать картину растрескивания наружных поверхностей. Проведем анализ вариантов крепления корпуса для повышения срока эксплуатации конструкции.

Рассмотрим прямоугольные пластинки размерами:

пластина 1:  $a = 400$  см;  $b = 2100$  см, толщиной  $h = 4$  см;

пластина 2:  $a = 400$  см;  $b = 1100$  см, толщиной  $h = 3$  см;

пластина 3:  $a = 60$  см;  $b = 1100$  см, толщиной  $h = 4$  см.

Эти пластинки составляют короб и указаны на рис. 1. Материал пластинок – сталь 10ХСНД. Модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны  $E = 2,1 \times 10^6$  кгс/см<sup>2</sup>;  $\nu = 0,3$ . Плотность материала пластинок равна  $\rho_p = 0,0079$  кг/см<sup>3</sup>.

Разработана базовая конечно-элементная модель короба с использованием трехмерных элементов типа "solids".

Для расчета НДС при действии внутреннего давления и нагрева использовалась 5-слойная модель по пластинам толщиной 4 см, 4-слойная по пластинам толщиной 3 см, состоящая для рассматриваемой конструкции из 240000 элементов.

В наружном слое толщиной 0,1 см проводились исследования картины растрескивания поверхностей.

Закрепление короба рассматривалось как жесткое защемление по соответствующим местам крепления основания к фундаменту – схема 1 крепления корпуса.

Рассматривался диапазон температур от 80–300°С. Давление на боковые поверхности принималось равным  $P_1=1,8 \text{ кгс/см}^2$  и  $P_2=-0,55 \text{ кгс/см}^2$ .

На рис. 1 представлена геометрическая модель короба со схемой 1 крепления корпуса. Через  $P_1, P_2$  обозначено действующее давление. На рис. 2 представлена геометрическая модель короба со схемой 2 крепления. На рис. 3 представлена геометрическая модель короба со схемой 3 крепления. На рис. 4 показана конечно-элементная модель пластин и зоны максимальных остаточных напряжений.

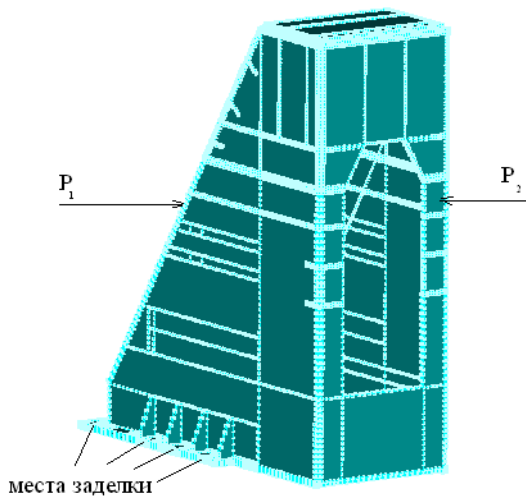


Рис. 1. Геометрическая модель короба со схемой 1 крепления

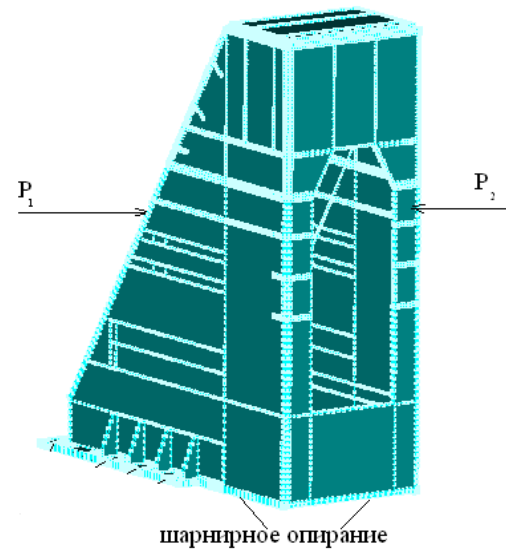


Рис. 2. Геометрическая модель короба со схемой 2 крепления

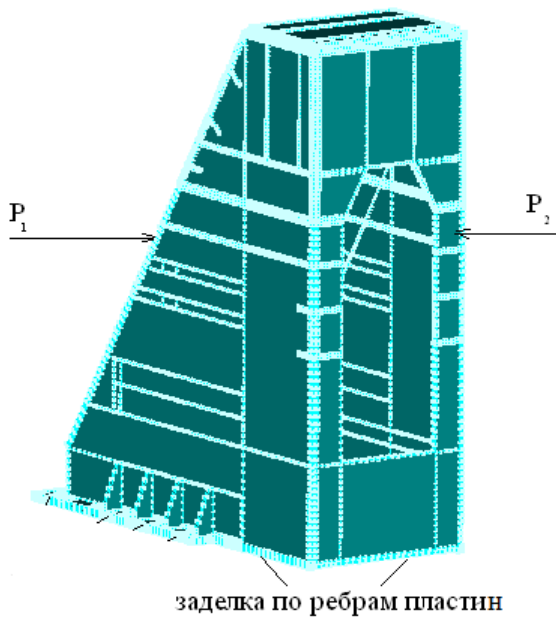


Рис. 3. Геометрическая модель короба со схемой 3 крепления

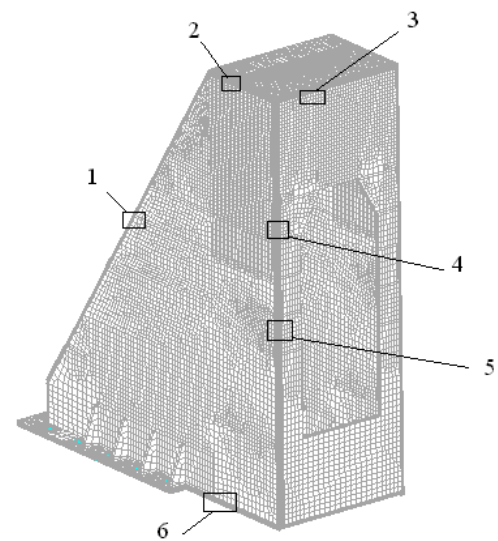


Рис. 4. Конечно-элементная модель короба с зонами максимальных остаточных деформаций

Расчет проводился на температурные нагрузки и давление на боковые поверхности. Исходные данные и результаты расчета для схем 1–3 крепления корпуса приведены в табл. 1–3 соответственно.

В табл. 1–3 используются обозначения:

$\epsilon_{\max}$  – максимальные остаточные деформации;

$\epsilon_{\min}$  – минимальные остаточные деформации, не влияющие на изменение формы пластины.

Таблица 1

**Исходные данные и результаты расчета для схемы 1 крепления**

$\tau$ , с	$T$ , °С	$\epsilon_{\max}$						$\epsilon_{\min}$
		1	2	3	4	5	6	
3,6	110-230	0,001	0,003	0,003	0,003	0,003	0,001	0,003
4,4	120-300	0,002	0,004	0,005	0,007	0,007	0,002	0,005
5,0	170-275	0,002	0,004	0,005	0,007	0,007	0,002	0,005

Таблица 2

**Исходные данные и результаты расчета для схемы 2 крепления**

$\tau$ , с	$T$ , °С	$\epsilon_{\max}$						$\epsilon_{\min}$
		1	2	3	4	5	6	
3,6	110-230	0,001	0,003	0,003	0,003	0,003	0,001	0,003
4,4	120-300	0,002	0,004	0,005	0,008	0,008	0,004	0,005
5,0	170-275	0,002	0,004	0,005	0,008	0,008	0,004	0,005

Таблица 3

**Исходные данные и результаты расчета для схемы 3 крепления**

$\tau$ , с	$T$ , °С	$\epsilon_{\max}$						$\epsilon_{\min}$
		1	2	3	4	5	6	
3,6	110-230	0,001	0,003	0,003	0,003	0,003	0,001	0,003
4,4	120-300	0,002	0,004	0,005	0,009	0,01	0,006	0,005
5,0	170-275	0,002	0,004	0,005	0,009	0,01	0,006	0,005

### Выводы

Результаты проведенных расчетов позволили сделать следующие выводы.

В верхнем слое боковой пластины толщиной 0,1 см достигаются напряжения, равные и превосходящие предел текучести стали 10ХСНД и зоны остаточных деформаций различного уровня. Отметим, что в результате остывания в этом слое присутствуют пластические деформации равные 0,0006 – 0,01 приводящие к зарождению трещин в зависимости от схемы крепления конструкции.

Зона 6 подвергается возникновению трещин, как видно из таблицы 3, что приведет к разрушению конструкции.

На боковых пластинах короба при схемах 2 и 3 крепления конструкции возникают большие остаточные деформации в зонах 4 и 5. Величины остаточных деформаций говорят о появлении трещин, которые приведут к уменьшению срока эксплуатации конструкции.

Для оптимального конструирования подобных коробов схемы крепления 2 и 3 необходимо исключить из рассмотрения.



**Список использованной литературы**

1. Кит Г.С. Определение трехмерных температурных полей и напряжений в бесконечном теле с разрезами / Г.С. Кит, М.В. Хай // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1982. — №5. — С. 60—67.
2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. — Киев: Наук. думка, 1970. — 307 с.
3. Станюкович А.В. Хрупкость и пластичность жаропрочных материалов / А.В. Станюкович. — М.: Металлургия, 1967. — 199 с.
4. Кит Г.С. Нестационарная задача термоупругости для пластинки с трещиной при наличии теплоотдачи с боковых поверхностей / Г.С. Кит, О.В. Побережный // Физико-химическая механика материалов. — 1976. — Т. 12, № 4. — С. 73—78.
5. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
6. Прочность при малоцикловом нагружении / Под. ред. С.В. Серенсена. — М.: Наука, 1975. — 285 с.
7. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1970. — 256 с.
8. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows / Д.Г. Шимкович. — М.: ДМК Пресс, 2001. — 448 с.
9. Алтухов Е.В. Метод И.И. Воровича в трехмерной теории термодинамики пластин / Е.В. Алтухов // Теорет. и прикл. механика. — Донецк, 2005. — Вып. 41. — С. 3—8.
10. Бородин П.Ю. Динамическая связанная задача термоупругости в различных пространственных приближениях / П.Ю. Бородин // Мат. моделирование. — 1998. — Т. 10, №3. — С. 61—82.

УДК 693.95 (075.8)

В.Т. КРАВЧУК

Київський національний університет будівництва і архітектури

Ю.В. ЧОВНІОК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

### ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИБРАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАБАТЫВАЕМОЙ БЕТОННОЙ СМЕСЬЮ: ОБЪЁМНОЕ ФОРМОВАНИЕ

*Предложена математическая модель, описывающая поведение динамической системы «вибрационная машина – бетонная смесь», в которой бетонная смесь представлена в виде системы с распределёнными параметрами. Составлено волновое уравнение движения уплотняемой смеси. Определены граничные условия. Найдены аналитически значения волнового числа, коэффициента затухания возмущения в обрабатываемой среде, приведенная масса и коэффициент неупругого сопротивления бетонной смеси. Определён закон распространения волн возмущения в обрабатываемой среде.*

*Ключевые слова: смеситель, вибрационная машина, бетонные смеси.*

В.Т. КРАВЧУК

Київський національний університет будівництва і архітектури

Ю.В. ЧОВНІОК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

### ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПРОЦЕСУ ВЗАЄМОДІЇ ВІБРАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ОБРОБЛЮВАНОЮ БЕТОННОЮ СУМІШШЮ: ОБ'ЄМНЕ ФОРМУВАННЯ

*Запропонована математична модель, що описує поведінку динамічної системи «вібраційна машина - бетонна суміш», у якій бетонна суміш представлена у вигляді системи з розподіленими параметрами. Складене хвильове рівняння руху ущільнюваної суміші. Визначені граничні умови. Знайдені аналітично значення хвильового числа, коефіцієнту затухання збурення у оброблюваному середовищі, приведеної маси й коефіцієнту непружності опору бетонної суміші. Визначений закон розповсюдження хвиль збурення у оброблюваному середовищі.*

*Ключові слова: змішувач, вібраційна машина, бетонні суміші.*

V.T. KRAVCHYUK

Kyiv National University of Constructions and Architecture

Y.V. CHOVNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

### DISCRETE AND CONTINUAL MODELLING AT RESEARCH OF INTERACTION PROCESS BETWEEN VIBRATIONAL SYSTEM AND PROCESSABLE CONCRETE'S MIXTURE: VOLUME FORMATION

*The authors have suggested a mathematical model describing the behavior of the dynamic system “vibration machine – concrete’s mixture”, where the concrete’s mixture is represented as a system with a distributed parameters. Within the frame of research the wave equation of the compactible medium motion was complied and the boundary conditions were defined. As a result, it were analytically calculated such key parameters as values of the wave number, the perturbation attenuation coefficient in the processable medium, reduced mass, and the coefficient of inelastic resistance of concrete’s mixture and the law of propagation of perturbations in the processable medium was defined.*

*Key words: mixer, vibration machine, concrete’s mixtures.*

#### Постановка проблеми.

Современное производство требует создания машин и бетоносмесительного оборудования с малой энергоёмкостью, обеспечивающих эффективное приготовление жёстких и сверхжёстких бетонных смесей (БС). Снижения энергоёмкости и повышения эффективности процесса приготовления БС можно достичь путём использования технологии, применение которой наряду с механическим перемешиванием БС позволяет одновременно оказывать на неё и вибрационное (виброволновое) воздействие со стороны вмонтированной в корпус смесителя вибрационной системы (например, заслонки). При этом уменьшаются силы сопротивления перемешиванию за счёт уменьшения внутреннего коэффициента трения БС и её коэффициента трения об обечайку корпуса смесителя. Одновременно ускоряется процесс приготовления БС и улучшается

её качество за счёт виброактивации. Таким образом, создание смесителей принудительного действия для приготовления БС, как и основ методик их расчёта, позволяющих существенно повысить качество приготовляемой БС, оптимизировать (минимизировать) энергосиловые показатели процесса виброформования/виброуплотнения смеси, является актуальной народнохозяйственной задачей, требующей своего дальнейшего исследования.

**Анализ последних исследований и публикаций.**

Исследованию и совершенствованию машин для формования бетонных изделий вибрацией посвящены работы [1-6]. Однако авторы указанных работ допускают ошибку, применяя метод разделения переменных (метод Фурье) для граничных (подвижных) условий задачи, моделирующей распространение возмущений в БС в форме волнового уравнения. Данная работа является исследованием, где реализован иной подход, устраняющий указанную выше ошибку.

**Формулирование цели исследования.**

Цель работы – установление основных закономерностей распространения волн возмущений в БС и соответствующих параметров, характеризующих возникающие в БС волнообразования.

**Изложение основного материала исследования.**

1. Анализ обобщённой физической модели вибрационной системы («вибрационная площадка – формируемая БС») в виде дискретно-континуальной системы.

В качестве базовой модели виброформируемой БС возьмём изложенную в [7] модель, анализ которой, как указано выше, был проведен с ошибками.

Уравнение распространения волн в БС записываем в безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} - \alpha \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \delta \cdot \frac{\partial^3 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^2 \partial \tau} = 0, \tag{1}$$

$\xi = \frac{x}{h}$ ; ( $0 \leq \xi \leq 1$ );  $\tau = \omega t$ ;  $\alpha = \frac{E_{\bar{\sigma}}}{\rho_{\bar{\sigma}} h^2 \omega^2}$ ;  $\delta = \frac{\eta_{\bar{\sigma}}}{\rho_{\bar{\sigma}} h^2 \omega}$ . Здесь введены следующие обозначения:

$u(\xi, \tau)$  – перемещение слоя БС с ординатой  $\xi$ ;  $h$  – высота слоя БС;  $x$  – ордината перемещения БС, отсчитываемая от поверхности виброплощадки ( $x = 0$ ) вверх по вертикали;  $\omega$  – частота (круговая) возмущающей гармонической силы, приложенной к днищу формы (рабочему органу вибросистемы);  $t$  – время;  $E_{\bar{\sigma}}$ ,  $\rho_{\bar{\sigma}}$  – динамический модуль упругости и плотность БС, соответственно;  $\eta_{\bar{\sigma}}$  – динамический коэффициент вязкости БС.

Рассмотрим далее вынужденные колебания БС, вызванные внешней гармонической силой, приложенной к днищу формы с БС.

Используя подход работы [8], можно получить следующие выражения для амплитуды перемещения ( $\tilde{u}(\xi)$ ), присоединённой массы БС ( $m_{n\bar{\sigma}}(\xi)$ ) и собственно смещения в БС ( $u(\xi, \tau)$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{u}(\xi) &= A_0 \cdot \bar{x}(\xi); \quad \bar{x}(\xi) = |\cos(\lambda \xi) + tg \lambda \cdot \sin(\lambda \xi)|; \\ \lambda &= \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^2 + \delta^2}} \cdot \exp\left[-\frac{i}{2} \cdot arctg\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)\right]; \quad i^2 = -1; \quad u(\xi, \tau) = \tilde{u}(\xi) \cdot \exp(i \tau); \\ m_{n\bar{\sigma}} &= \frac{E_{\bar{\sigma}} S_{\bar{\sigma}}}{\omega^2 h} \cdot \left[ \int_0^1 \frac{\partial u(\xi, \tau) / \partial \xi}{\partial^2 u(\xi, \tau) / \partial \tau^2} d\xi \right]. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Здесь:  $A_0$  – амплитуда колебаний днища формы с БС,  $S_{\bar{\sigma}}$  – площадь горизонтального сечения столба БС. Используя (2) и вводя обозначения:

$$\kappa_1 = \cos\left\{\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)\right\} / \sqrt[4]{\alpha^2 + \delta^2}; \quad \kappa_2 = \sin\left\{\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)\right\} / \sqrt[4]{\alpha^2 + \delta^2}, \tag{3}$$

$\bar{x}(\xi)$  можно представить иначе:

$$\bar{x}(\xi) = \left\{ \frac{\cos^2[\kappa_2(1-\xi)] \cdot ch^2[\kappa_1(1-\xi)] + \sin^2[\kappa_2(1-\xi)] \cdot sh^2[\kappa_1(1-\xi)]}{\cos^2 \kappa_2 \cdot ch^2 \kappa_1 + \sin^2 \kappa_2 \cdot sh^2 \kappa_1} \right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Анализ полученных выражений (2) – (4) показывает, что для режимов колебаний с низкой частотой при увеличении высоты столба БС использование мощности, подводимой к днищу формы для её (БС) перемещения, уменьшается медленнее, чем для режимов колебаний с высокой частотой. Получает подтверждение и

тот факт, что для изготовления бетонных изделий небольшой высоты (до 0,3...0,5м) следует использовать высокочастотную вибрацию с малой амплитудой, а для высоких изделий (от 1м и более) – низкочастотную вибрацию с повышенной амплитудой.

С учётом полученных выше зависимостей для параметров столба БС можно записать уравнение движения дискретно-континуальной механической системы («рабочий орган – БС») в безразмерной комплексной форме:

$$\mu_0 \frac{d^2 \tilde{u}_\phi(\tau)}{d\tau^2} + \theta_0 \frac{d\tilde{u}_\phi(\tau)}{d\tau} + \eta_0 \tilde{u}_\phi(\tau) - \alpha \left. \frac{\partial \tilde{u}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} - \delta \left. \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} \right|_{\xi=0} = \frac{F_0}{\rho_\delta S_\delta h \omega^2 A_0} \cdot \exp(i\tau). \quad (5)$$

Здесь  $\mu_0 = \frac{m}{\rho_\delta S_\delta h}$ ;  $\theta_0 = \frac{b}{\rho_\delta S_\delta h \omega}$ ;  $\eta_0 = \frac{c}{\rho_\delta S_\delta h \omega^2}$ ,  $m$  – масса рабочего органа,  $c, b$  – коэффициенты

жёсткости и сопротивления упругих опор машины,  $\tilde{u}_\phi(\tau)$  – смещение формы,  $F_0$  – амплитуда возмущающей силы, приложенной при объёмном формовании БС к днищу формы.

Если в физической модели воздействия БС на рабочий орган машины её заменить действием присоединённой массы БС ( $m_{n\delta}$ ), тогда уравнение динамики рабочего органа машины принимает вид:

$$\left| \mu_0 + \frac{m_{n\delta}}{\rho_\delta S_\delta h} \right| \cdot \frac{d^2 \tilde{u}_\phi(\tau)}{d\tau^2} + \theta_0 \frac{d\tilde{u}_\phi(\tau)}{d\tau} + \eta_0 \tilde{u}_\phi(\tau) = U_0 \cdot \exp(i\tau), \quad U_0 = \frac{F_0}{\rho_\delta S_\delta h \omega^2 A_0}. \quad (6)$$

Следует заметить, что результаты, приведенные в работе [7], подобные формулам и соотношениям (3) – (6), содержат много неточностей и ошибок, которые в данном исследовании устранены.

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$u_T(\tau) = k_T U_0 \cdot \exp(i\tau), \quad (7)$$

где  $k_T$  – коэффициент, характеризующий влияние  $m_{n\delta}$  на амплитуду колебаний рабочего органа машины:

$$|k_T| = \frac{1}{\sqrt{\left[ \eta_0 - \mu_0 - \frac{m_{n\delta}}{\rho_\delta S_\delta h} \right]^2 + \theta_0^2}}. \quad (8)$$

### Выводы

1. Принципиальные положения по созданию и расчёту новых конструкций вибрационных машин для уплотнения БС, рассматриваемых как дискретно-континуальные механические системы, сводятся к следующим: 1) принцип проектирования эффективных режимов вибрационного формования БС, который базируется на обеспечении главного условия: использования подведенной к рабочему органу мощности для вибрационного перемещения слоёв БС должно быть не ниже допустимой (базовой) величины; 2) принцип комплексного вибровоздействия рабочих органов вибрационных машин на компоненты уплотняемой БС, который базируется: а) на использовании воздействия рабочих органов вибромашин на БС вибрациями низкой частоты и большой амплитуды и вибрациями высокой частоты и малой амплитуды; б) на использовании виброплощадок с комбинированными приводами для формования бетонных изделий в несколько стадий; 3) принцип обеспечения заданных динамических параметров вибрационных формовочных машин, который базируется на: а) адекватности разработанных физических и математических моделей, отображающих динамику виброплощадок с учётом изменяемых параметров вибрации и характеристик БС; б) создании уточнённых методик расчёта параметров новых конструкций вибрационных машин (в частности, виброплощадок); 4) принцип соответствия выпускаемой продукции (бетонных изделий) эксплуатационным критериям (высокой прочности, морозостойкости, низкого водопоглощения), который базируется на установлении эффективных режимов работы новых вибрационных машин по результатам экспериментов; 5) принцип обеспечения санитарно-гигиенических требований по вибрации и шуму, который базируется на использовании в новых конструкциях вибромашин специальных демпферов (например, с магнитореологическими эффектами) и поглотителей шума.

2. В исследовании дано научное обоснование возможности применения новых вибрационных машин для формования БС. Представлена математическая модель вибрационной формовочной машины, как системы с распределёнными и сосредоточенными параметрами (т.н. дискретно-континуальная/гибридная механическая система), позволяющая исследовать динамику рабочего органа с учётом изменяемых характеристик БС при её объёмном формовании. Разработаны принципиальные положения по созданию и конструктивному расчёту формовочных машин.

3. Проведенные в данной работе исследования могут в дальнейшем быть использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта вибрационных машин для объёмного формования и вибротранспортирования БС как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

## Список использованной литературы

1. Емельяненко Н.Г. Аспекты динамики виброформовочных машин с приводами, включающими элементы текучей среды / Н.Г. Емельяненко // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2006. - №30. – С. 128-133.
2. Емельяненко Н.Г. Исследование динамики вибромашины с комбинированным приводом / Н.Г. Емельяненко, О.В. Стаховский, В.В. Герасименко // Автошляховик України. – Київ: ДП «Державтотранс НДІ – Проект», Укравтодор, 2004. - №4(180). – С. 38-40.
3. Емельяненко Н.Г. Совершенствование методик расчёта вибропрессов для производства мелкоштучных бетонных изделий / Н.Г. Емельяненко // Збірник наукових праць. Серія: галузеве машинобудування, будівництво. – Полтава: ПолтНТУ, 2009. – Вип. 23, т.1. – С. 134-140.
4. Саленко Ю.С. Разработка однофазных бетоносмесителей принудительного действия / Ю.С. Саленко // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету ім. М. Остроградського. – 2009. – Вип. 5(58), ч. 1. – Кременчук: КДПУ, 2009. – С. 79-83.
5. Маслова Н.А. Исследование взаимодействия вибрационного рабочего органа с уплотняемой средой / Н.А. Маслова // Проблемы создания новых машин и технологий / Научные труды Кременчуцького государственного политехнического института. – Кременчуг, 1997. – Вип. 2, ч.3. – С. 32-34.
6. Саленко Ю.С. Исследование процесса взаимодействия вибрационной заслонки бетоносмесителя с обрабатываемой средой / Ю.С. Саленко // Вісник КрНУ імені М. Остроградського. – 2013. – Вип. 3(80). – С. 148-152.
7. Емельяненко Н.Г. Обоснование создания пневмовибрационных машин для формования бетонных изделий / Н.Г. Емельяненко / Вісник Приазовського державного технічного університету. Серія: Технічні науки. – 2012. – Вип. 24. – С. 268-274.
8. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712с.

УДК 53.087:621.385.69

Ю.О. ЛЕБЕДЕНКО, А.А. ОМЕЛЬЧУК, В.Є. КРАЙНОВ  
Херсонський національний технічний університет**ПРОТИДІЯ ВПЛИВУ ВИСОКОЧАСТОТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА ПРИБОРИ ОБЛІКУ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ**

*Стаття присвячена розробці системи захисту електронних приладів обліку електричної енергії від негативного впливу високочастотного випромінювання. Розглядаються різні методи захисту від впливу електромагнітних хвиль. Порівнюється ефективність екранування і активних систем захисту від високочастотного випромінювання. Розробляється структурна схема автоматичної системи захисту електронних лічильників. Аналізуються вразливості розробленої системи і можливості її подальшого вдосконалення.*

*Ключові слова:* лічильник електроенергії, високочастотне випромінювання, екранування, захист електронних приладів.

Ю.А. ЛЕБЕДЕНКО, А.А. ОМЕЛЬЧУК, В.Е. КРАЙНОВ  
Херсонский национальный технический университет**ПРОТИВОДЕЙСТВИЕ ВЛИЯНИЮ ВИСОКОЧАСТОТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ПРИБОРЫ УЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ**

*Статья посвящена разработке системы защиты электронных приборов учета электрической энергии от негативного воздействия высокочастотного излучения. Рассматриваются различные методы защиты от воздействия электромагнитных волн. Сравнивается эффективность экранирования и активных систем защиты от высокочастотного излучения. Разрабатывается структурная схема автоматической системы защиты электронных счетчиков. Анализируются уязвимости разработанной системы и возможности ее дальнейшего совершенствования.*

*Ключевые слова:* счетчик электроэнергии, высокочастотное излучение, экранирование, защита электронных приборов.

Y.O. LEBEDENKO, A.A. OMELCHUK, V.E. KRAINOV  
Kherson national technical university**OPPOSITION TO THE EFFECT OF HIGH-FREQUENCY RADIATION ON THE ACCOUNTING DEVICES OF ELECTRIC ENERGY**

*The article is devoted to developing the protection of electronic electricity meters from the negative impact of high-frequency radiation. Various methods of protection against the effects of electromagnetic waves are considered. Efficiency of electromagnetic shielding and active systems of high-frequency radiation is compared. Structural scheme of an automatic protection system of electronic meters is developed. Vulnerability of the developed system and the possibility of its further improvement are analyzed.*

*Keywords:* electricity meter, high-frequency radiation, electromagnetic shielding, protection of electronic devices.

**Постановка проблеми**

Запобігання впливу електромагнітних хвиль необхідне на сьогодні не тільки з точки зору екологічної безпеки, але і як засіб захисту певного об'єкту від витоку або спотворення інформації. Окрім сукупності електромагнітних полів, поява яких викликана природними явищами і все більшим розповсюдженням різноманітної техніки, існують і такі електромагнітні поля, які були цілеспрямовано утворені для нанесення шкоди об'єктам господарства або біологічним об'єктам. Одним з різновидів таких протиправних дій, є вплив високочастотним випромінюванням на електронні пристрої обліку електроенергії [1]. Опромінення лічильника перешкоджає його нормальній роботі, викликаючи його фактичну зупинку або недооблік спожитої електричної енергії.

**Аналіз публікацій за темою дослідження**

Протидіяти впливу електромагнітних хвиль високої частоти можливо двома шляхами: перший – пасивний захист приладів, що базується на використанні екранування, а другий – активний захист, який передбачає використання детектора високочастотного випромінювання.

Теоретичне рішення задачі екранування та визначення значень напруженості полів в загальному випадку є надзвичайно складним завданням. Теоретичні та експериментальні дослідження ряду авторів показали, що форма екрана має незначний вплив на його ефективність [2]. Головним фактором, що визначає якість екрану, є радіофізичні властивості матеріалу і конструкційні особливості. Це дозволяє при розрахунку ефективності екрану в реальних умовах користуватися найпростішим його представленням: сфера, циліндр

або плоский паралельний лист. Така заміна реальної конструкції не призводить до скільки-небудь значних відхилень реальної ефективності від розрахункової, так як основною причиною, що обмежує досягнення високих значень ефективності екранування є наявність в екрані технологічних отворів (пристрої введення-виведення, вентиляція тощо).

Для детектування і дослідження ВЧ випромінювання існує чимало пристроїв різної конструкції, однак, вони здебільшого дорогі і мало пристосовані для задач захисту пристроїв обліку електроенергії [3,4].

Слід окремо зазначити, що різні типи електронних лічильників мають неоднакову вразливість до випромінювання через різну елементну базу та неподібне розміщення елементів на друкованій платі. Тобто доцільним є врахування можливості впливу значного радіочастотного випромінювання вже на етапі проектування пристрою обліку, з метою зменшення дії випромінювання на найбільш чутливі ділянки схеми.

#### Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є розробка системи протидії впливу високочастотного випромінювання на електроприлади. Система повинна забезпечувати пасивний та активний захист обладнання, а також мати функції детектування шкідливого впливу ВЧ випромінювання і, відповідно, функції сигналізації про наявність небажаного впливу.

#### Основна частина

Традиційним методом захисту радіоелектронної апаратури від дії високочастотного випромінювання є екранування. Причому екрануванню можуть підлягати як пристрої в цілому, так і його частини, найбільш вразливі до дії випромінювання. В особливих випадках може бути застосоване екранування приміщень, що дозволяє вирішувати також задачі захисту інформації в приміщеннях і технічних каналах, забезпечувати електромагнітну сумісність обладнання та приладів при їх спільному використанні, а також захист персоналу від підвищеного рівня електромагнітних полів і забезпечення сприятливої екологічної обстановки навколо діючих електроустановок та НВЧ-пристроїв [5].

Під екрануванням в загальному випадку розуміється як захист приладів від впливу зовнішніх полів, так і локалізація випромінювання будь-яких засобів, що перешкоджає прояву цих випромінювань у навколишньому середовищі. У будь-якому випадку ефективність екранування – це ступінь ослаблення складових поля (електричної або магнітної), що визначається як відношення діючих значень напруженості полів в даній точці простору при відсутності і наявності екрану. Так як відношення цих величин досягає великих значень, то зручніше користуватися логарифмічним представленням ефективності екранування:

$$K_E = 20 \cdot \lg \frac{E_0}{E_1}, \quad K_H = 20 \cdot \lg \frac{H_0}{H_1}, \quad (1)$$

де  $K_E$  – коефіцієнт ослаблення (екранування) за електричною складовою,  $K_H$  – коефіцієнт ослаблення (екранування) за магнітною складовою,  $E_0(H_0)$  – напруженість електричної (магнітної) складової поля в умовах відсутності екрану,  $E_1(H_1)$  – напруженість електричної (магнітної) складової поля при наявності екрану в тій же точці простору.

Плоский паралельний екран в електромагнітному випадку можна характеризувати нормальним імпедансом матеріалу екрану, який визначається як відношення тангенціальних складових електричного і магнітного полів. Коефіцієнт проходження через шар являє собою ефективність екранування, так як дорівнює відношенню амплітуд хвилі, яка вже пройшла екран, і хвилі, яка тільки падає на нього. Якщо середовищем по обидва боки екрану є вакуум, то коефіцієнт проходження  $D$  можна представити у вигляді

$$D = \frac{4Z_m}{(1 + Z_m)^2 e^{-j\alpha d} - (1 - Z_m)^2 e^{-j\alpha d}}, \quad (2)$$

$$Z_m = \sqrt{\frac{\mu_m}{\varepsilon_m}}, \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (4)$$

де  $\lambda_0$  – довжина хвилі у вільному просторі, а  $\varepsilon_m$  і  $\mu_m$  – відносні діелектрична і магнітна проникності матеріалу екрану.

У загальному випадку при комплексних діелектричній і магнітній проникностях матеріалу теоретичний аналіз наведеного виразу вкрай складний, тому більшість дослідників вдається до роздільного розгляду ефективності екранування – по поглинанню та відображенню падаючої хвилі екраном.

Оскільки аналітично оцінити ефективності екранування із загальної формули коефіцієнта проходження для плоского паралельного нескінченного екрану в загальному випадку важко, може бути використаний більш простий, наближений аналіз, заснований на представленні ефективності екрану як суми окремих складових:

$$K = K_{\text{погл}} + K_{\text{від}} + K_{\text{н.від}}, \quad (5)$$

де  $K_{\text{погл}}$  – ефективність екранування внаслідок поглинання екраном електричної енергії,  $K_{\text{від}}$  – ефективність екранування за допомогою відбивання електромагнітної хвилі екраном,  $K_{\text{н.від}}$  – поправочний коефіцієнт, що враховує багаторазові внутрішні відбивання хвилі від поверхонь екрану.

Якщо втрата енергії хвилі в екрані, тобто її поглинання, перевищує 10 дБ, то останнім коефіцієнтом в наведеному виразі можна знехтувати. Ефективність екранування внаслідок поглинання енергії в товщі екрану можна розрахувати з простого співвідношення (6), отриманого на основі представлення електричної і магнітної складових поля в матеріалі, на поверхні якого виконуються граничні умови Леонтовича

$$K_{\text{погл}} = 8,7d\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_m \cdot \sigma}. \quad (6)$$

Із зростанням частоти хвилі, вплив вихрових струмів на загальну ефективність екранування зростає, а глибина проникнення цих струмів в товщу матеріалу клітки експоненційно зменшується за рахунок поверхневого ефекту. Внаслідок цього, на високих частотах (більше 10 МГц) товщина екрану втрачає свою актуальність, оскільки гасіння відбувається лише в тонкому поверхневому шарі матеріалу клітки. Величина магнітної проникності матеріалу із зростанням частоти хвилі також втрачає важливість.

Таким чином, для досліджуваних генераторів ефективними є суцільні екрани з матеріалу з низьким опором, причому товщина та магнітна проникність його не мають істотного значення.

Проведені дослідження показали, що екранування не забезпечує повний захист від дії електромагнітного високочастотного випромінювання, але може бути застосоване у комплексі з іншими методами. Ефективність екранування лічильників електричної енергії є обмеженою через наявність незахищених екраном ділянок і отворів, через які здійснюється підключення лічильника. Окрім того, значним є непрямий вплив через кола живлення, ввідні дроти та дроти навантаження, що йдуть до споживача.

Для визначення найбільш вразливих ділянок та елементів схеми пристрою обліку, було виконано експериментальні дослідження за допомогою цифрового осцилографа та були проаналізовані електричні процеси в різних приладах обліку в нормальних режимах та при дії високочастотного електромагнітного випромінювання.

Встановлено, що при дії високочастотного випромінювання в електричних схемах лічильників виникають перешкоди, які наводяться на паразитних індуктивностях доріжок друкованих плат. Найбільш вразливим місцем лічильника виявились кола синхронізації, що містять кварцовий резонатор та конденсатори фільтра. Зазначені перешкоди виникають у схемах всіх приладів обліку, що досліджувалися, проте рівень цих перешкод у одних лічильників дещо менший, ніж у інших.

Дія високочастотних перешкод призводить до зриву синхронізації мікросхем-лічильників приладів обліку та періодичного переведу їх до початкового стану [6].

Осцилограми кола синхронізації пристрою обліку без сторонніх впливів та під дією випромінювання наведено на рис. 1 та рис. 2 відповідно.

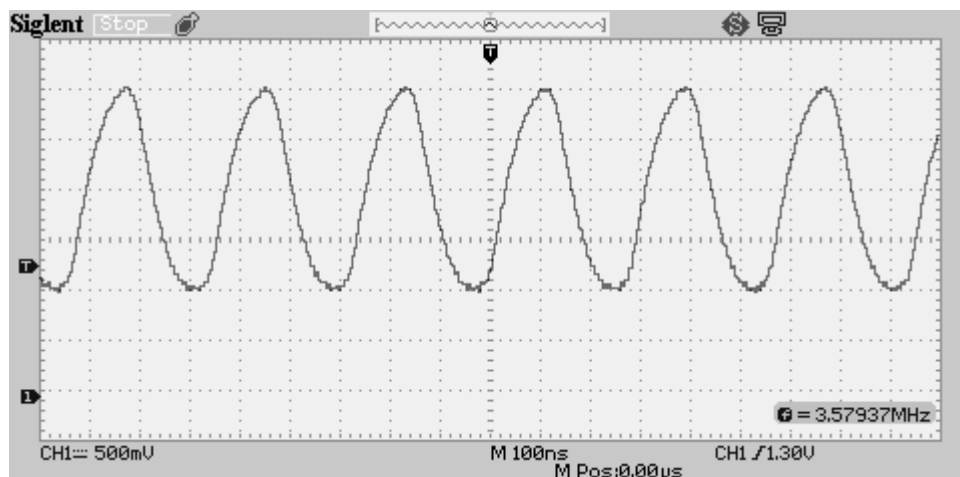


Рис. 1. Осцилограма сигналу синхронізації без впливу високочастотного випромінювання



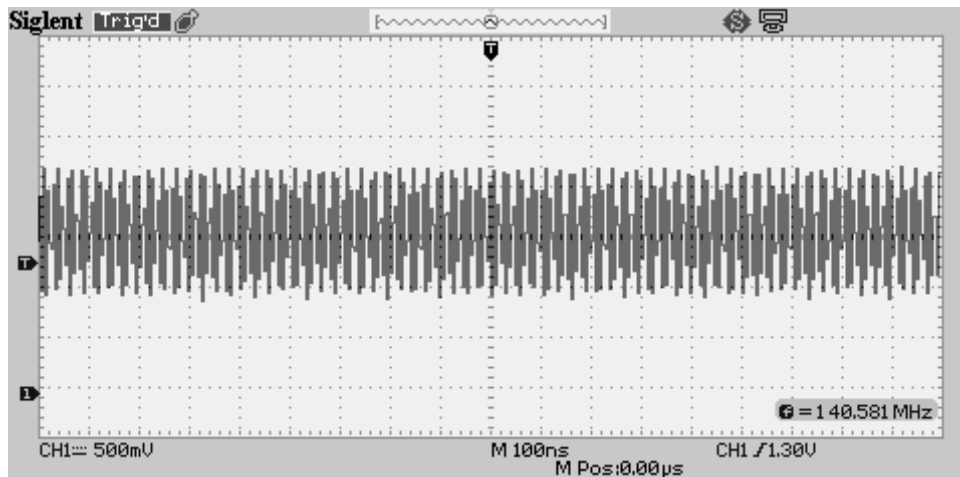


Рис. 2. Осцилограма сигналу синхронізації під впливом випромінювання в стані повної зупинки

Для фіксації факту впливу дії випромінювання можливо застосування спеціальних електронних засобів. Електронний засіб для фіксації факту впливу електромагнітного випромінювання повинен задовольняти наступним вимогам:

- забезпечувати високу чутливість до електромагнітного випромінювання у широкому діапазоні частот;
- мати невисоку вартість;
- максимально ускладнювати можливість зовнішнього втручання в роботу пристрою.

Електронний засіб призначений для встановлення у безпосередній близькості до пристрою обліку з метою визначення факту впливу електромагнітного випромінювання на його роботу. Реакцією на дію випромінювання може бути згасання індикаторної лампи та/або спрацьовування реле, яке може бути використане для управління силовими колами живлення споживача.

Засіб представляє собою широкополосний детектор електромагнітного випромінювання з релейним виходом, до якого під'єднане коло фіксації та індикації стану.

Структурну схему електронного засобу для фіксації факту впливу електромагнітного випромінювання наведено на рис. 3.

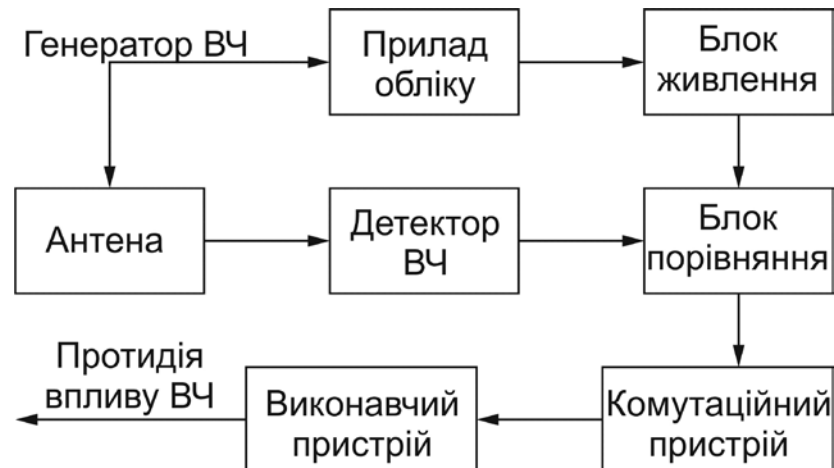


Рис. 3. Структурна схема засобу для фіксації та запобігання електромагнітного випромінювання поруч з електронним пристроєм обліку

Засіб складається із блока живлення, детектора випромінювання, схеми порівняння, ключа, вихідного реле та схеми фіксації.

При впливі високочастотного напруга, вхід компаратора розмикається, вмикається комутаційний пристрій, контакти можуть бути задіяні для комутації силових кіл електропостачання споживача (наприклад, для керування пускатчем, що вмикає навантаження у разі спроби втручання в роботу пристрою обліку).

Проведені дослідження показали високу ефективність розробленого засобу. Спрацьовування відбувається при тих самих умовах, при яких спостерігаються порушення в роботі пристроїв обліку. Зокрема, засіб спрацьовує як у разі впливу на пристрій обліку за радіоканалом, так і при непрямому впливі за дротами живлення навантаження споживача.

**Висновки і перспективи подальших досліджень**

Виявлено, що зменшення впливу випромінювання на найбільш чутливі ділянки схеми можливе при врахуванні можливості впливу значного радіочастотного випромінювання на етапі проектування пристрою обліку, зокрема:

- застосування сучасної та більш досконалої елементної бази;
- при компонуванні друкованої плати необхідно забезпечити розташування чутливих до випромінювання елементів схеми в середині плати (зокрема багатоплощинної), забезпечуючи при цьому екранування лініями та полігонами, приєднаними до кола землі сигнальних кіл;
- застосування фільтрів за колами живлення схеми лічильника;
- скорочення довжини друкованих провідників плати лічильника (в першу чергу кіл синхронізації мікросхеми лічильника) для зменшення їх паразитних індуктивностей та опорів за рахунок використання щільного монтажу з використанням SMD-компонентів;
- скорочення довжини чутливих до випромінювання елементів схеми, розташування їх (зокрема фільтруючих конденсаторів, що приєднуються до кварцового резонатора), у безпосередній близькості до виводів мікросхеми лічильника.

Доведено, що екранування не забезпечує повний захист від дії електромагнітного високочастотного випромінювання, але може бути застосоване у комплексі з іншими методами. Низька ефективність екранування пояснюється:

- неможливістю повного екранування пристрою обліку через необхідність під'єднання електричних ліній;
- неможливістю виключення за допомогою екранування непрямого впливу на пристрій обліку через кола живлення, ввідні дроти та дроти навантаження, що йдуть до споживача.

Розроблено електронний засіб, що встановлюється у безпосередній близькості до пристрою обліку та дозволяє фіксувати факт впливу електромагнітного випромінювання високої частоти. Факт впливу відзначається відсутністю світіння індикаторної неонові лампи, є можливість реалізації вимикання споживача від мережі при наявності високочастотного впливу. Спрацьовування засобу відбувається при тих самих умовах, при яких спостерігаються порушення в роботі пристроїв обліку (зокрема, при непрямому впливі за дротами живлення навантаження споживача).

**Список використаної літератури**

1. Шапиро Д.Н. Основы теории электромагнитного экранирования. – Л.: Энергия, 1975. – 109с.
2. Дмитрієв В. О. Проблеми проведення експертних досліджень електронних приладів і систем обліку електричної енергії / В. О. Дмитрієв, В. В. Хоша, В. Г. Нікітюк, О. І. Нетреба // Теорія та практика судової експертизи і криміналістики. - 2011. - Вип. 11. - С. 677-684.
3. Пат. № 2049339, Российская Федерация, МПК G01R29/08. Детектор СВЧ-поля / Герзанич Ю.Э.; Герзанич В.Ю.; заявитель и патентовладелец Холдинговая промышленно-финансовая компания "Старая Москва". - № 93055768/09; заявл. 24.12.1993; опубл. 27.11.1995.
4. Пат. № 2485670, Российская Федерация, МПК G01R29/08. Индикатор поля СВЧ излучения / Васильев В.А., Головин Р.С., Жукель А.А.; заявитель и патентовладелец – Федеральное государственное военное образовательное учреждение высшего профессионального образования Военная академия Ракетных войск стратегического назначения имени Петра Великого МО РФ; заявл. 08.11.2011; опубл. 20.06.2013.
5. Шпильовий В.С. Захист інформації методом екранування приміщення / В.С. Шпильовий, Д.О. Шутий // Інформаційна безпека України: Зб. наук. доп. та тез науково-технічної конференції; м. Київ, 21-22 квітня 2016 р., Київський національний університет імені Тараса Шевченка – К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2016. С – 48-49.
6. Ключник А.В. Исследование стойкости интегральных микросхем в электромагнитных полях импульсного радиоизлучения / А.В. Ключник, Ю.А. Пирогов, А.В. Солодов // РиЭ, 2011, т. 56, № 3, с.375-378.

УДК 658.562

Н.А. ЛЮБИМОВА

Харьковский национальный аграрный университет им. В. В. Докучаева

### ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ ПРОЦЕССА ДЕФЕНОЛЯЦИИ СБРОСОВ КОКСОХИМИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА

*Рассмотрены возможности последовательного контроля загрязнения окружающей среды сточными водами коксохимического предприятия. В математической модели процедур принятия статистических решений учитывались требования плана контроля (норма, риски первого и второго рода, объем выборки и зоны допуска). Использование моделей последовательного контроля с расчетом контрольно-предупредительного интервала позволило своевременно принять решение про возможные технологические нарушения и предотвратить аварийные ситуации.*

*Ключевые слова:* контроль, планирование, сбросы, технологические нарушения, профилактика.

Н.О. ЛЮБИМОВА

Харківський національний аграрний університет ім. В. В. Докучаєва

### ПОСЛІДОВНИЙ КОНТРОЛЬ ПРОЦЕСУ ДЕФЕНОЛЯЦІЇ СКИДІВ КОКСОХІМІЧНОГО ВИРОБНИЦТВА

*Розглянуті можливості послідовного контролю забруднення навколишнього середовища стічними скидами коксохімічного виробництва. В математичній моделі процедур прийняття статистичних рішень враховані вимоги плану контролю (норма, ризики першого та другого роду, об'єм вибірки та зони допуску). Використання моделей послідовного контролю із розрахунком контрольно-попереджувального інтервалу дозволило своєчасно прийняти рішення про можливі технологічні порушення та попередити аварійні ситуації.*

*Ключові слова:* контроль, планування, скиди, технологічні порушення, профілактика.

N. LYUBIMOVA

Kharkiv National Agrarian University after V.V. Dokuchaev

### SEQUENTIAL CONTROL FOR THE DISTILLATION OF PHENOL IN WATTER DISCHARGES IN THE COKE PRODUCTION

*Some possibilities of sequential control for environmental pollution by waste waters of a coking plant are considered. In the presented mathematical model of procedures for making statistical decisions, the requirements of control plan (the norm, the risks of first and second kind, the sample size and the tolerance zone) have been taken into account. The use of such sequential control models with the calculation of the control and warning interval allows us to make prompt decisions about possible technological violations and to prevent accidents.*

*Keywords:* control, planning, water discharges, and technological violations, prevention.

#### Постановка проблемы

В настоящее время при организации контроля процессов промышленного загрязнения окружающей среды известные методы повышения достоверности контроля практически не используются, поскольку, в большинстве случаев, речь идет лишь об экологическом мониторинге. При этом, как правило, проводятся наблюдения, оценка и прогнозирование состояния окружающей среды в условиях хозяйственной деятельности людей.

Существуют объективные предпосылки для глубокой модернизации общей концепции и частных решений в области контроля процессов технологического промышленного загрязнения окружающей среды. Назрела насущная необходимость разработки новых вероятностно-статистических подходов к изучению закономерностей протекания случайных, комплексно-нестационарных процессов загрязнения, разработке на этой основе новых методов планирования процедур измерения и контроля с повышенной или заданной достоверностью.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Наиболее полно математические модели планирования разработаны для задач статистического контроля промышленной продукции [1–3]. Вопросы планирования контроля качества продукции освещены также в работах по статистическому управлению многомерными процессами на базе карт контроля [4–5], в работах, посвященных прикладным задачам статистического анализа контролируемых временных рядов и оптимизации альтернативных решений [6–7]. Однако, в большинстве задач планирования контроля процессы принимаются стационарными, задается вероятность ошибки только первого рода, а вероятностная модель факторного влияния во всех случаях – параметрическая. Эта же модель используется и в процедурах контроля нестационарности [8].

### Формулирование цели исследования

Цель статьи – показать возможности использования последовательного контроля процесса очистки сбросов коксохимического завода на примере дефеноляции сточных вод для своевременного выявления параметрических отклонений в функционировании цеха биохимической очистки и дальнейшей профилактики технологических нарушений.

### Изложение основного материала исследования

Технологические особенности дефеноляции сточных вод. Для качественного проведения указанных технологических процессов необходимо организовать соответствующий данной очистке контроль и управление процессом. Сущность биохимической очистки сточных вод заключается в способности микроорганизмов использовать в качестве питательных веществ органические и некоторые неорганические загрязнения сточных вод путем их биохимического окисления. В процессе очистки часть окисляемых микроорганизмами загрязнений расходуется на образование биомассы, а вторая – превращается в безвредные продукты: углекислый газ ( $\text{CO}_2$ ) и ( $\text{H}_2\text{O}$ ). Применение биохимического способа позволяет осуществить наиболее полную очистку от растворимых органических загрязнений до 95-98 %. Процесс очистки сточных вод происходит в аэротенках при помощи активного ила [9].

Контрольные точки [10], определяющие места расположения первичных источников информации о контролируемых параметрах водного загрязнения сбросов завода соответствуют следующим элементам технологической схемы: аммонийная колонна; усреднители; аэротенки; водосборник.

Были учтены предельно допустимые значения верхних границ допусковых интервалов на контролируемые показатели загрязнений сточных вод. В процессе исследования были обработаны карты контроля цеха биохимической очистки воды Харьковского коксохимического завода с основными регламентированными показателями (фенол, роданиды, аммиак летучий, водородный показатель, фосфаты, смолы, хлориды и другие) за год. Используя полученные данные, был произведен расчет параметров последовательного контроля технологических нарушений при биохимической водоочистке сбросов. Построен график граничных реализаций типичных процессов водного загрязнения в контрольных точках БХУ. Они представлены на рис. 1. В первую очередь, необходимо контролировать нарушение стационарности потока выбросов концентрации фенола в точке, для которой поток выбросов имеет максимальную корреляцию с выбросами процесса, регистрируемых в других контрольных точках.

**Контроль при фиксированном времени наблюдения.** Исследования в области математической теории выбросов случайных процессов охватывают широкий круг задач, связанных с исследованиями вероятностных свойств экстремальных значений процессов, числа пересечений заданного уровня, длительности интервалов времени между пересечениями [11]. Контроль стационарности потоков выбросов, как пуассоновского потока случайных событий, теоретически исследован в моделях временной дискретизации нормальных случайных процессов [9, 11], в том числе и процессов с нарушениями стационарности. Однако, реальные процессы загрязнения в большинстве случаев не являются гауссовскими процессами. Построенные реализации концентрации водного загрязнения фенолами в течение года показали их априори негауссовское распределение вероятностей.

Рассмотрим стандартный тест [12] на стационарность для пуассоновского потока событий с нормой  $\lambda_0$  и ее нарушенным значением  $\lambda_1 > \lambda_0$ . В этом случае основная и альтернативная гипотеза (отсутствие –  $H_0$  или наличие –  $H_1$  выброса) имеют вид:

$$\begin{aligned} H_0 : \lambda &= \lambda_0 \\ H_1 : \lambda &= \lambda_1 \end{aligned}$$

Рассмотрим отношение правдоподобия для условных законов распределения Пуассона:

$$\Lambda = \frac{P(K|\lambda_1)}{P(K|\lambda_0)}$$

Если время наблюдения  $T$  фиксировано, то логарифм этого отношения имеет вид:

$$\ln \Lambda = K \ln \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) - (\lambda_1 - \lambda_0) T \quad (1)$$

Норма  $\lambda_1$  для нарушения стационарности определяется, как линейная функция отношения процентных точек  $\chi^2$ -распределения с  $2K$  степенями свободы (где  $K$  – число событий в потоке за время  $T$ ):

$$\lambda_1 = \lambda_0 \frac{\chi_{K, 1-\beta}^2}{\chi_{K, \alpha}^2} \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – заданные планом риски контроля, соответственно 1-ого и 2-ого рода. Решения  $\gamma_0$  (поток стационарен) и  $\gamma_1$  (стационарность нарушена) принимают в соответствии с моделью:

$$\begin{cases} \gamma_0 : \text{если } \ln \Lambda \geq 0, \\ \gamma_1 : \text{если } \ln \Lambda < 0. \end{cases} \quad (3)$$

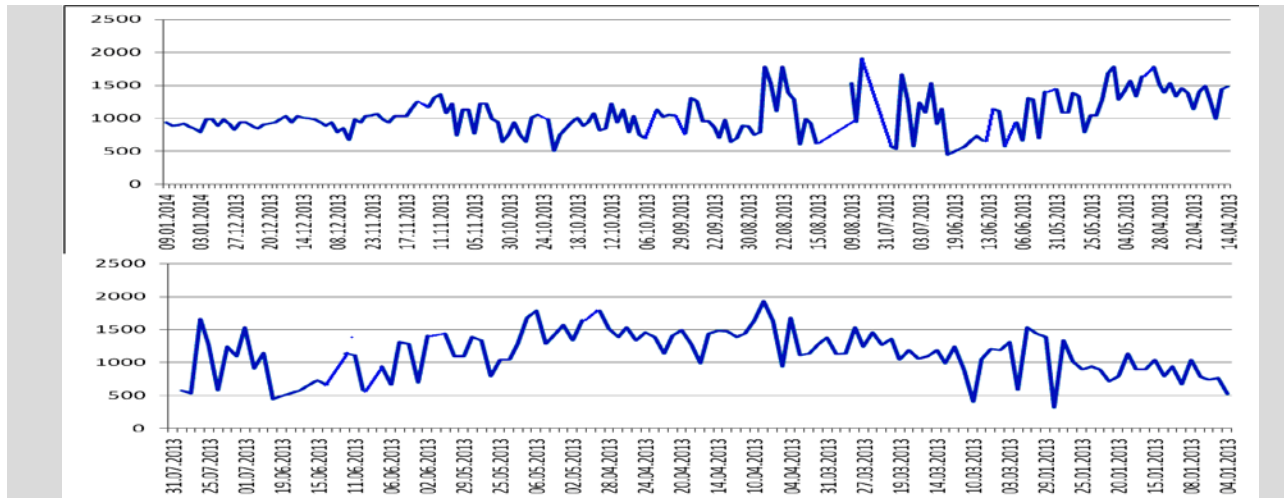


Рисунок 1 – Граничные реализации концентрации фенола и роданидов в БХУ коксохимзавода

Используя выражение (1) можно представить модель принятия решения (3) в одном из двух вариантов:

$$а) \begin{cases} \gamma_0 : K < (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot T[\ln(\lambda_1 / \lambda_0)]^{-1}, \\ \gamma_1 : K \geq (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot T[\ln(\lambda_1 / \lambda_0)]^{-1}; \end{cases} \quad (4)$$

$$б) \begin{cases} \gamma_0 : T > K[\ln(\lambda_1 / \lambda_0)](\lambda_1 - \lambda_0)^{-1}, \\ \gamma_1 : T \leq K[\ln(\lambda_1 / \lambda_0)](\lambda_1 - \lambda_0)^{-1}. \end{cases} \quad (5)$$

**Контроль при случайном времени наблюдения.** Такой контроль использует последовательные процедуры принятия решений [11], позволяющие сократить при заданной достоверности среднюю длительность  $\bar{T}$  времени наблюдения процесса  $x(t)$ . В этом случае удобнее использовать, в качестве измеряемой дискретной случайной величины, количество  $K$  экстремальных выбросов, превышающих норму (например,  $U_K$ ). Модель принятия решений будет предусматривать три решения:  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  и решение  $\gamma_{01}$  – продолжить контроль. Критериальная статистика базируется на отношении правдоподобия, логарифм которого представлен выражением (1).

В качестве порогов сравнения используют величины

$$\begin{cases} c_1 = \ln[\beta / (1 - \alpha)], \\ c_2 = \ln[(1 - \beta) / \alpha]. \end{cases} \quad (6)$$

Риски контроля  $\alpha$  и  $\beta$  задаются планом контроля, а решения  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_{01}$  выбирают исходя из следующей модели:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \ln \Lambda \leq c_1, \\ \gamma_1 = \ln \Lambda \geq c_2, \\ \gamma_{01} = c_1 < \ln \Lambda < c_2. \end{cases} \quad (7)$$

Модель (7) может быть представлена в развернутом, относительно времени и постоянных  $\lambda_0$ ,  $\lambda$ , в виде:

$$\begin{cases} \gamma_0: K \leq T \cdot \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\ln(\lambda_1 / \lambda_0)} - \frac{\ln[(1 - \alpha) / \beta]}{\ln(\lambda_1 / \lambda_0)}, \\ \gamma_1: K \geq T \cdot \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\ln(\lambda_1 / \lambda_0)} + \frac{\ln[(1 - \beta) / \alpha]}{\ln(\lambda_1 / \lambda_0)}, \\ \gamma_{01}: T \cdot \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\ln(\lambda_1 / \lambda_0)} - \frac{\ln[(1 - \alpha) / \beta]}{\ln(\lambda_1 / \lambda_0)} < K < T \cdot \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\ln(\lambda_1 / \lambda_0)} + \frac{\ln[(1 - \beta) / \alpha]}{\ln(\lambda_1 / \lambda_0)}, \end{cases} \quad (8)$$

которая тем уже, чем больше задаваемые планом риски контроля  $\alpha$  и  $\beta$ .

В этом случае снижается длительность  $T$  времени наблюдения процесса  $x(t)$ , до принятия окончательного решения  $\gamma_0$  или  $\gamma_1$  относительно справедливости гипотез  $H_0$  ( $\lambda = \lambda_0$  и  $\lambda = \lambda_1 > \lambda_0$ ).

Поскольку фактическое время контроля  $T$  – величина случайная, то допускается усеченный план контроля, в соответствии с которым задают предельно возможное число случайных событий  $K_{\max}$  [11]. Если значение  $K_{\max}$  достигнуто, то решения  $\gamma_0$  или  $\gamma_1$  выбирают в соответствии с моделью:

$$\begin{cases} \gamma_0 \cdot K_{\max} < Q, \\ \gamma_1 \cdot K_{\max} \geq Q, \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{где } Q = \frac{T(\lambda_1 - \lambda_0) + 0,5\{\ln[(1 - \beta)/\alpha] - \ln[(1 - \alpha)/\beta]\}}{\ln(\lambda_1/\lambda_0)}. \quad (10)$$

Все коэффициенты корреляции рассчитаны по выборкам объемом 218 результатов измерений концентрации фенола в сточных водах коксохимического завода (по каждой контрольной точке) в течении года. Максимальную корреляцию с потоками выбросов имеет поток на выходе аммонийной колонны (сводный коэффициент корреляции – максимален). Контроль этого потока выбросов позволяет получить максимум информации о вероятных нарушениях в технологии очистки сточных вод для всех элементов биохимического участка (БХУ).

Расчет параметров плана последовательного контроля фенольного загрязнения сточных вод осуществлялся в два этапа: определялась норма  $\lambda_1$  (выражение (2)), при заданной норме  $\lambda_0 = 0,324$  (сутки<sup>-1</sup>), заданных рисках контроля 1-ого ( $\alpha$ ) и 2-ого ( $\beta$ ) рода и объеме выборки  $K$  по контролируемым выбросам; рассчитывались коэффициенты: приемочной –  $K_{np}$  и браковочной –  $K_{бр}$  прямых, как линейно функциональных границ зоны допуска (решение  $\gamma_0$ ), критической зоны (решение  $\gamma_1$ ) и промежуточной зоны неопределенности (решение  $\gamma_{01}$ ), в соответствии с неравенствами (8):

$$K_{np} = T \cdot a - e, \quad (11)$$

$$K_{бр} = T \cdot a + c, \quad (12)$$

$$\text{где: } a = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\ln(\gamma_1/\gamma_0)}, \quad b = \frac{\ln[(1 - \alpha)/\beta]}{\ln(\gamma_1/\gamma_0)}, \quad c = \frac{\ln[(1 - \beta)/\alpha]}{\ln(\gamma_1/\gamma_0)}. \quad (13)$$

С учетом выражений (11)–(13) неравенства (8) могут быть представлены в более простом виде с заменой  $K$  на суммарное  $X$  число обнаруженных за время наблюдения  $T$  выбросов:

$$\begin{cases} \gamma_1 \cdot K \leq K_{np} \\ \gamma_1 \cdot K \geq K_{бр} \\ \gamma_{01} \cdot K_{np} < K < K_{бр} \end{cases}, \quad (14)$$

Результаты расчета для первого этапа при заданных рисках контроля  $\alpha = \beta = 0,1$  и объеме выборки  $K = 5$ :

$$\chi^2_{10;1-\beta} = 15,99, \chi^2_{10;\alpha} = 4,87, \lambda_1 = 1,0638 \quad \text{сутки}^{-1}$$

Результаты расчета параметров для второго этапа:

$$\alpha = 0,622, \beta = 1,848.$$

Контрольно-предупредительная граница  $x_0$  была выбрана в соответствии с моделью [14]:

$$x_0 = m + \Delta,$$

где  $m = 1166,2$ ;  $\Delta$  – параметр нестационарности потока фенольного загрязнения.

Оценка  $\Delta$  вычислялась с использованием выражения:

$$\bar{m}_\Delta = \left( \sum_{i=1}^k \bar{u}_i \cdot \hat{p}_i \right) - m. \quad (15)$$

Результат расчета  $\Delta = 15,02$ ; значение контрольно-предупредительной границы  $x_0 = 1182,22$  [12].

В табл. 1 представлены результаты последовательного предупредительного контроля фенольных выбросов на выходе аммиачной (аммонийной) колонны.

Выбор решений  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_{01}$  проводился по правилам, определенных неравенствами (8) и (14):

$$\begin{cases} \gamma_1: K \leq T \cdot 0,622 - 1,848; \\ \gamma_1: K \geq T \cdot 0,622 + 1,848; \\ \gamma_{01}: T \cdot 0,622 - 1,848 < K < T \cdot 0,622 + 1,848. \end{cases}$$

Максимальное значение фенольного выброса ( $1931 \text{ мг/м}^3$ ) наблюдалось в цикле наблюдения № 39. Использование контрольно-предупредительного интервала ( $x_0 = 1181 \text{ мг/дм}^3$ ) позволило принять решение  $\gamma_1$  уже на трех предыдущих циклах наблюдений (№ 36, № 37, № 38), что резко уменьшило риск контроля 2-го рода и повысило фактическую достоверность контроля с 0,9 до значения 0,925.

### Выводы

Описанное практическое использование математических моделей последовательного предупредительного контроля позволило выявлять с опережением на срок от 1 до 3 суток параметрические нарушения в функционировании БХУ, предупреждая предаварийную ситуацию в технологических элементах данной промышленной установки.

Доказана экспериментально эффективность методов последовательного предупредительного контроля предаварийных ситуаций при очистке водных сбросов, что снизило риск контроля 2-ого рода и повысило достоверность принятия решений о появлении возможных технологических нарушений в процессах очистки водных химических загрязнений.

Таблица 1

Результаты последовательного контроля фенола в сточных водах БХУ ( $\alpha = \beta = 0,1$ )

№ наблюдаемой выборки (цикл наблюдений)	Число измерений в выборке	Общая длительность наблюдений (сутки)	Число обнаруженных выбросов ( $K$ ) в выборке	Границы зоны неопределенности		Решение
				$K_{Пр}$	$K_{Бр}$	
с 1 по 14	3	42	0	0,018		$\gamma_0$ ( $K \leq K_{Пр}$ )
15	5	5	1	1,262		
16	7	7	2	2,506		
17	7	7	2	2,506		
с 18 по 22	3	15	0	0,018		
23	5	5	1	1,262		
с 24 по 25	3	6	0	0,018		
26	7	7	2	2,506		
с 27 по 28	3	6	0	0,018		
29	12	12	5	5,616		
30	7	7	2	2,506		
31	10	10	4	4,372		
с 32 по 34	3	9	0	0,018		
35	14	14	6	6,860		
36	5	5	5		4,958	$\gamma_1$ ( $K \geq K_{Бр}$ )
37	5	5	5		4,958	
38	8	8	7		6,824	
39	8	8	7		6,824	
40	24	24	13	13,081		$\gamma_0$ ( $K \leq K_{Пр}$ )
41	16	16	7	8,104		
С 42 по 45	3	12	0	0,018		

### Список использованной литературы

1. Володарський Е.Т. Статистична обробка даних: [навч. посібник] / Е.Т. Володарський, Л.О. Кошева. — К.: НАУ. — 2008. — 308 с.
2. Meson R.L. Futocorellation in Multivariate Processes / R.L. Meson, J.C. Young // Statistical Monitoring and Optimization for Process Control / Ed. By S. Park, G. Vining. — New York: Marcel Dekker Inc., 1999. — P. 233—239.
3. Мейнк Ф. Очистка промышленных сточных вод / Ф. Мейнк, Г. Штофф, Г. Кольшюттер. — Л.: Гос. научно-техн. изд-во нефтяной и горно-топливной литературы. — 1993. — 648 с.
4. Schmidt M. High Slope Metrology with Non-Contact Interferometry / Michael Schmidt, Nate Gilfoy, Martin Fay // Quality Magazine. — 2014. — Issue July 1st. — P. 37—49.
5. Michael Hein and Manfred Kaiser Environmental Control and Emission Reduction for Coking Plants //Science, Technology and Medicine open access publisher (chapter 10). — 2012. - P.267- 280.
6. Тихонов В.И. Случайные процессы. Примеры и задачи: учебное пособие для вузов: в 4-х т. Т.2. Линейные и нелинейные преобразования / В.И. Тихонов, Б.И. Шахтарин, В.В. Сизых. — М.: Радио и связь, 2004. — 400 с.

7. Кісіль І.С. Метрологія, точність і надійність засобів вимірювань: навч. посібник / І.С. Кісіль — Ів-Франковськ: Факел, 2000. — 400 с.
8. Гихман И. И. Теория случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход — М.: Книга по требованию, 2012. — 664 с.
9. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики: Пер.с англ. В.С.Занадворова / Дж. Поллард; под ред. и с предис. Е.М. Четыркина — М.: Финансы и статистика, 1982. — 344 с.
10. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы обработки данных: Пер.с англ. / Н. Джонсон, Ф. Лион. — М.: Мир, 1980. — 512 с.
11. Безродный Б.Ф. Последовательная процедура параметрического контроля с ограничением на апостериорные вероятности ошибок / Б.Ф. Безродный // Контроль. Диагностика. — 2007. — №1 (103). — С. 54—57.
12. Любимова Н.А. Оптимизация контрольно-предупредительных границ и интервалов по минимуму средней частоты выбросов контролируемого воздушного загрязнения / Н.А. Любимова // Методи і прилади контролю якості. — Ів.-Франківськ. — 2014. — №1(32). — С. 102—106.



УДК 539.3

Р.С. МУСИЙ, Н.Б. МЕЛЬНИК, Х.Т. ДРОГОМИРЕЦЬКА  
Національний університет "Львівська політехніка"**ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРА З ТОНКИМ  
ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМ ПОКРИТТЯМ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОЇ  
ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ**

*Сформульовано динамічну задачу термомеханіки для довгого порожнистого електропровідного циліндра із зовнішнім тонким електропровідним покриттям за однорідної нестационарної електромагнітної дії. Чисельно проаналізовано термонапружений стан розглядуваного циліндра за дії електромагнітного імпульсу. Математичну модель задачі побудовано на основі моделі термомеханіки двошарового електропровідного циліндра, в якого товщина зовнішнього шару суттєво менша за товщину внутрішнього. Для побудови розв'язку задачі використано квадратичну апроксимацію всіх визначальних функцій за радіальною змінною.*

*Ключові слова: електропровідний циліндр, тонке покриття, нестационарна електромагнітна дія, термонапружений стан, електромагнітний імпульс.*

Р.С. МУСИЙ, Н.Б. МЕЛЬНИК, Х.Т. ДРОГОМИРЕЦЬКА  
Національний університет "Львовская политехника"**ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ЦИЛИНДРА С ТОНКИМ  
ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ  
ВОЗДЕЙСТВИИ**

*Сформулирована динамическая задача термомеханики для длинного полого электропроводного цилиндра с внешним тонким электропроводным покрытием при однородном нестационарном электромагнитном воздействии. Численно проанализировано термонапряженное состояние рассматриваемого цилиндра при воздействии электромагнитного импульса. Математическая модель задачи построена на основе модели термомеханики двухслойного электропроводного цилиндра, у которого толщина внешнего слоя существенно меньше толщины внутреннего. Для построения решения задачи использована квадратическая аппроксимация всех определяющих функций по радиальной переменной.*

*Ключевые слова: электропроводный цилиндр, тонкое покрытие, нестационарное электромагнитное воздействие, термонапряженное состояние, электромагнитный импульс.*

R.S.MUSIY, N.B.MELNYK, H.T. DRONOMYRETSKA  
Lviv Polytechnic National University**THERMOSTRESSED STATE OF ELECTROCONDUCTIVE CYLINDER WITH A THIN  
ELECTROCONDUCTIVE COATING UNDER NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC ACTION**

*The thermomechanic dynamic task for long hollow electroconductive cylinder with thin external electroconductive coating under the homogeneous non-stationary electromagnetic action was formulated. Numerical analysis of the thermostressed state of the proposed cylinder under electromagnetic action was done. The mathematical model of the problem was based on a thermomechanic model of two-layer conductive cylinder in which the thickness of the outer layer is substantially less than the inside one. To construction of the solution of the problem was based on quadratic approximation of all the defining features for radial variable.*

*Keywords: electroconductive cylinder, thin coating, nonstationary electromagnetic action, thermostressed state, electromagnetic impulse.*

**Постановка проблеми**

У різних пристроях як конструктивний елемент часто використовують довгий порожнистий електропровідний циліндр з тонким електропровідним покриттям, фізико-механічні характеристики якого мають певні відмінності від таких для основи (коефіцієнти електро-, тепло-, температуропровідності тощо). В процесі роботи та експлуатації ці елементи піддаються дії електромагнітних полів (ЕМП), зокрема імпульсних [1]. Такі імпульсні ЕМП (ІЕМП) створюють в циліндрі об'ємні нестационарні джерела джоулевого тепла  $Q$  і пондеромоторні сили  $\vec{F}$ , які зумовлюють поля температури  $T$ , переміщень  $\vec{U}$  і напружень  $\hat{\sigma}$ . Компоненти тензора  $\hat{\sigma}$  динамічних напружень та їх інтенсивності  $\sigma_i$  за певних параметрів імпульсного ЕМП та властивостей матеріалів основи і покриття можуть досягати в даному циліндрі відповідних значень, аж до втрати його несучої здатності. Тому задача визначення термонапруженого стану

елемента конструкції у вигляді порожнистого електропровідного циліндра з тонким електропровідним покриттям з матеріалу інших фізико-механічних властивостей, ніж основа, за імпульсної електромагнітної дії та впливу покриття на напружений стан і несучу здатність є актуальною.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій та формулювання мети досліджень**

У літературі відомі дослідження термонапруженого стану (ТНС) однорідних порожнистого і суцільного електропровідних циліндрів за нестационарних теплових [2] і електромагнітних дій [3] та біметалевого порожнистого циліндра за дії ІЕМП [4]. Проте вплив ІЕМП на термомеханічну поведінку порожнистого циліндра з тонким покриттям вивчений недостатньо. Нижче розглянуто формулювання задачі термомеханіки для такого циліндра за однорідної нестационарної електромагнітної дії, запропоновано методику її розв'язування та чисельно проаналізовано розв'язок за дії електромагнітного імпульсу (ЕМІ).

**Виклад основного матеріалу досліджень**

Математичну модель термомеханіки порожнистого електропровідного циліндра з тонким зовнішнім електропровідним покриттям будуємо з використанням моделі задачі термомеханіки двошарового електропровідного циліндра, в якого товщина зовнішнього шару суттєво менша за товщину внутрішнього.

Розглянемо довгий порожнистий електропровідний циліндр з тонким електропровідним покриттям, віднесений до циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$ , вісь  $Oz$  якої співпадає з віссю симетрії циліндра. Внутрішній  $r = r_0$  і зовнішній  $r = r_1$  радіуси основи і зовнішній  $r = r_2$  радіус поверхні покриття циліндра знаходяться за умов теплоізоляції з довкіллям і вільні від силового навантаження. Даний циліндр зазнає однорідної дії нестационарного ЕМП, яке задається значеннями осьової компоненти  $H_z^{(n)}$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}^{(n)}(r, t)$  на цих поверхнях

$$H_z^{(1)}(r_0, t) = H_z^-(t), \quad H_z^{(2)}(r_2, t) = H_z^+(t). \tag{1}$$

Тут  $H_z^\pm(t)$  - задані функції часу  $t$ , індекси  $n=1$  і  $n=2$  відповідають основі і покриттю. Приймається, що матеріали основи і покриття циліндра однорідні, ізотропні і неферромагнітні, а їх фізико-механічні характеристики сталі. На поверхні  $r = r_1$  контакту основи і покриття виконуються умови ідеальних електромагнітного, теплового і механічного контактів.

За таких умов розрахункова модель визначення ТНС розглядуваного циліндра складається з трьох етапів [4]: на першому етапі з рівнянь електродинаміки визначається вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}^{(n)}$  в основі і покритті циліндра та зумовлені ним джоулеві тепловиділення  $Q^{(n)}$  і пондеромоторні сили  $\vec{F}^{(n)}$ ; на другому – з рівнянь теплопровідності визначається розподіл температурного поля  $T^{(n)}$ ; на третьому – з рівнянь динамічної термопружності за відомою температурою і об'ємними силами визначаються компоненти вектора переміщень  $\vec{U}^{(n)}$  та тензора напружень  $\hat{\sigma}^{(n)}$ .

**Визначення ЕМП.** Відмінну від нуля осьову компоненту  $H_z^{(n)}(r, t)$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}^{(n)} = \{0; 0; H_z^{(n)} \equiv H_z^{(n)}(r, t)\}$  в основі та покритті визначаємо з рівняння

$$\frac{\partial^2 H_z^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

за граничних умов (1) на зовнішніх поверхнях циліндра і умов ідеального електромагнітного контакту

$$H_z^{(1)}(r_1, t) = H_z^{(2)}(r_1, t), \quad \frac{\partial H_z^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} = k_\sigma \frac{\partial H_z^{(2)}(r_1, t)}{\partial r}, \tag{3}$$

на поверхні з'єднання основи і покриття та нульовій початковій умові  $H_z^{(n)}(r, 0) = 0$ . Тут  $k_\sigma = \sigma_1 / \sigma_2$ ,  $\sigma_n$  і  $\mu_n$  - коефіцієнти електропровідності і магнітна проникливість матеріалів основи і покриття циліндра.

За знайденою функцією  $H_z^{(n)}(r, t)$  питомі густини джоулевих тепловиділень  $Q^{(n)}(r, t)$  та пондеромоторної сили  $\vec{F}^{(n)} = \{F_r^{(n)}(r, t); 0; 0\}$  в основі і покритті визначаються співвідношеннями:

$$Q^{(n)} = \frac{1}{\sigma_n} \left( \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} \right)^2, \quad F_r^{(n)} = -\mu_n H_z^{(n)} \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r}. \tag{4}$$

**Визначення температурного поля.** Температурне поле  $T^{(n)}(r, t)$  в основі і покритті циліндра знаходимо з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = -\frac{Q^{(n)}}{\lambda_n} \quad (5)$$

за граничних умов теплоізоляції поверхонь  $r = r_0$  і  $r = r_2$

$$\frac{\partial T^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} = \frac{\partial T^{(2)}(r_2, t)}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

та умов ідеального теплового контакту на поверхні  $r = r_1$  з'єднання основи і покриття

$$T^{(1)}(r_1, t) = T^{(2)}(r_1, t), \quad \frac{\partial T^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} = k_\lambda \frac{\partial T^{(2)}(r_1, t)}{\partial r}, \quad (7)$$

а також нульовій початковій умові  $T^{(n)}(r, 0) = 0$ . Тут  $\kappa_n$ ,  $\lambda_n$  - коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалів складових шарів циліндра,  $k_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$ .

**Визначення термонапруженого стану.** Радіальну компоненту  $U_r^{(n)}(r, t)$  вектора переміщень  $\vec{U}^{(n)} = \{U_r^{(n)}(r, t); 0; 0\}$  в основі і покритті циліндра визначаємо з рівняння [2]

$$\frac{\partial^2 U_r^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(n)}}{\partial r} - \frac{U_r^{(n)}}{r^2} - \frac{1}{c_n^2} \frac{\partial^2 U_r^{(n)}}{\partial t^2} = \alpha_n \frac{1 + \nu_n}{1 - \nu_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}{E_n(1 - \nu_n)} F^{(n)} \quad (8)$$

за граничних умов

$$\frac{\partial U_r^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} + \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \frac{U_r^{(1)}(r_0, t)}{r_0} = \alpha_1 \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} T^{(1)}(r_0, t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial U_r^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \frac{U_r^{(2)}(r_1, t)}{r_1} = \alpha_2 \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} T^{(2)}(r_1, t)$$

на поверхнях  $r = r_0$  і  $r = r_2$  і умов ідеального механічного контакту при  $r = r_1$

$$U_r^{(1)}(r_1, t) = U_r^{(2)}(r_1, t), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \nu_1) \frac{\partial U_r^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_1 \frac{U_r^{(1)}(r_1, t)}{r_1} - \alpha_1 (1 + \nu_1) T^{(1)}(r_1, t) = \\ & = \frac{E_2(1 - 2\nu_1)}{E_1(1 - 2\nu_2)} \left[ (1 - \nu_2) \frac{\partial U_r^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_2 \frac{U_r^{(2)}(r_1, t)}{r_1} - \alpha_2 (1 + \nu_2) T^{(2)}(r_1, t) \right] \end{aligned}$$

та нульових початкових умов

$$U_r^{(n)}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial U_r^{(n)}(r, 0)}{\partial r} = 0. \quad (11)$$

Тут  $c_n = \sqrt{E_n(1 - \nu_n) / (\rho_n(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n))}$  - швидкість пружної хвилі розширення;  $k_E = E_1 / (1 + \nu_1) / (E_2 / (1 + \nu_2))$ ;  $\nu_n$ ,  $\alpha_n$  - коефіцієнти Пуассона і лінійного теплового розширення,  $E_n$  - модуль Юнга,  $\rho_n$  - густина матеріалу основи і покриття циліндра. За знайденими функціями  $U_r^{(n)}(r, t)$  радіальну  $\sigma_{rr}^{(n)}$ , колову  $\sigma_{\phi\phi}^{(n)}$  і осьову  $\sigma_{zz}^{(n)}$  компоненти тензора напружень визначаємо за формулами

$$\sigma_{rr}^{(n)} = \frac{2E_n}{1 - 2\nu_n} \left[ (1 - \nu_n) \frac{\partial U_r^{(n)}}{\partial r} + \nu_n \frac{U_r^{(n)}}{r} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right], \quad (12)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(n)} = \frac{2E_n}{1 - 2\nu_n} \left[ (1 - \nu_n) \frac{U_r^{(n)}}{r} + \nu_n \frac{\partial U_r^{(n)}}{\partial r} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right], \quad (13)$$

$$\sigma_{zz}^{(n)} = \nu_n (\sigma_{rr}^{(n)} - \sigma_{\phi\phi}^{(n)}) - \alpha_n E_n T^{(n)}. \quad (14)$$

**Методика розв'язування сформульованих задач.** Для побудови розв'язків сформульованих початково-крайових задач (1) – (4), (5) – (7) і (8) – (14) апроксимуємо ключові функції  $H_z^{(n)}(r,t)$ ,  $T^{(n)}(r,t)$ ,  $U_r^{(n)}(r,t)$  за радіальною змінною в основі і покритті циліндра квадратичними многочленами [4]:

$$\Phi^{(n)}(r,t) = \sum_{i=0}^2 a_i^{(n)}(t)r^i. \tag{15}$$

Коефіцієнти  $a_i^{(n)}$  апроксимаційних поліномів (15) подаємо у вигляді лінійної комбінації

$$a_i^{(n)}(t) = a_{i1}^{(n)}\Phi_1(t) + a_{i2}^{(n)}\Phi_2(t) + a_{i3}^{(n)}\Phi^+(t) + a_{i4}^{(n)}\Phi^-(t) + a_{i5}^{(n)}\Phi_0(t) \tag{16}$$

граничних значень  $\Phi^\pm(t)$  шуканих функцій на поверхнях  $r = r_0$ ,  $r = r_2$  і  $r = r_1$  та сумарних по основі і покритті циліндра інтегральних характеристик

$$\Phi_s(t) = \sum_{n=1}^2 \int_{r_{n-1}}^{r_n} \Phi^{(n)}(r,t)r^{s+l} dr, \quad s = 1,2 \tag{17}$$

ключових функцій  $\Phi^{(n)}(r,t)$ . Рівняння на інтегральні характеристики  $\Phi_s(t)$  отримуємо, інтегруючи рівняння (3), (6), (9) згідно формули (17). Тоді початково-крайові задачі стосовно ключових функцій зводяться до задач Коші на інтегральні характеристики. Розв'язки задач Коші отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа на всьому числовому інтервалі нестационарної електромагнітної дії [4].

**Числовий аналіз задачі за дії ЕМІ.** Дію ЕМІ математично описуємо функцією [3]

$$H_z^\pm(t) = kH_0(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}). \tag{18}$$

Тут  $k$  – нормувальний коефіцієнт,  $H_0$  – максимальне значення напруженості магнітного поля на поверхнях  $\beta_1$  і  $\beta_2$  – параметри, що відповідають часам фронтів наростання  $\tau_{ф.н.}$  і спадання  $\tau_{ф.с.}$  імпульсу. Підставляючи (18) замість граничних умов (1) у розв'язки задачі термомеханіки для двошарового електропровідного порожнистого циліндра, отримуємо розв'язок цієї задачі за дії ЕМІ. Основа виготовлена зі сталі Х18Н9Т, покриття – з міді. Числовий аналіз даної задачі виконано для електропровідного циліндра з покриттям з радіусами поверхонь  $r_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $r_1 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $r_2 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Тривалість імпульсу  $t_i$  приймалась рівною  $\tau_i = 10^{-4} \text{ с}$ . Параметри  $\beta_1$  і  $\beta_2$  вибирались таким чином, що  $\tau_{ф.н.}/\tau_{ф.с.} \approx 0.1$ .

На рис.1–6 показано зміну в часі радіальної компоненти  $F_r^{(n)}(r,t)$  вектора пондеромоторної сили і температури  $T^{(n)}(r,t)$ , радіальної  $\sigma_{rr}^{(n)}$  і колової  $\sigma_{\phi\phi}^{(n)}$  компонент тензора динамічних напружень, зумовлених дією пондеромоторної сили і джоулевым теплом посередині шарів основи і покриття. Лінії 1, 2 на рисунках відповідають значенням величин в основі і покритті відповідно. Отримано, що термонапружений стан даного циліндра за вибраних параметрів електромагнітної дії в основному визначається напруженнями, зумовленими джоулевым теплом.

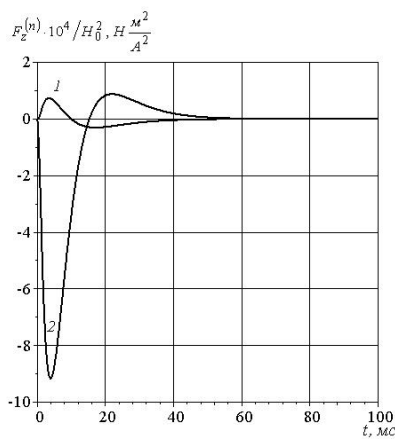


Рис. 1. Зміна в часі пондеромоторної сили

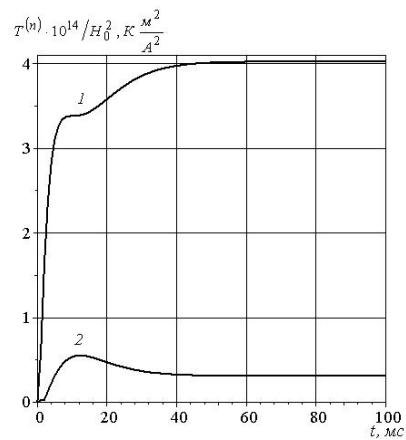


Рис. 2. Зміна в часі температурного поля

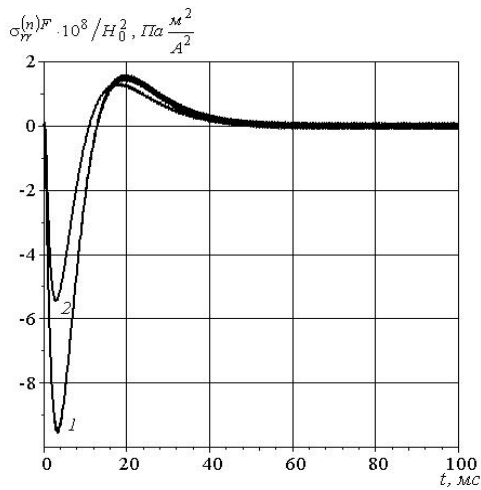


Рис. 3. Зміна в часі складників радіальних напружень, зумовлених дією пондеромоторної сили

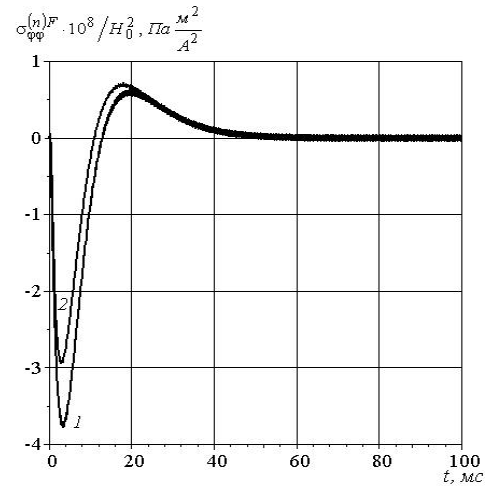


Рис. 4. Зміна в часі складників колових напружень, зумовлених дією пондеромоторної сили

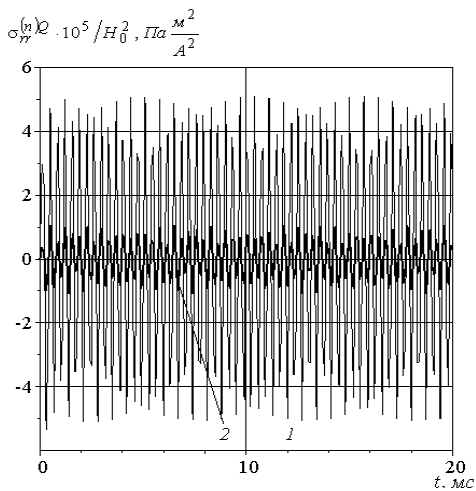


Рис. 5. Зміна в часі складників радіальних напружень, зумовлених дією джоулевого тепла

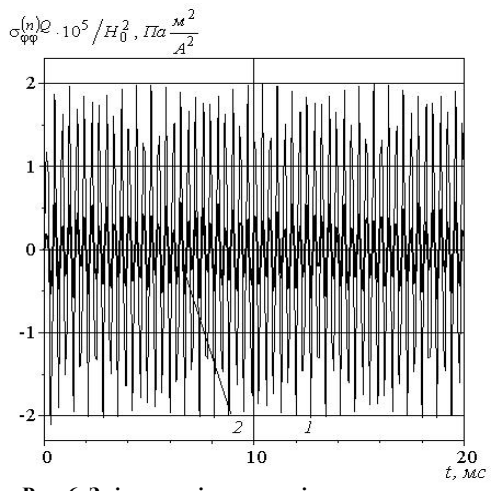


Рис. 6. Зміна в часі складників колових напружень, зумовлених дією джоулевого тепла

### Висновки

Вплив мідного покриття проявляється в зростанні максимальних значень всіх величин порівнянно з такими ж значеннями для аналогічного сталевого циліндра без покриття, а також у тому, що радіальні напруження, зумовлені як пондеромоторною силою, так і джоулевым теплом, у циліндрі з покриттям стають приблизно вдвічі більшими за колові напруження.

### Список використаної літератури

1. Батыгин Ю.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю.В. Батыгин, В.И. Лавинский, Л.Т. Хищенко. — Харьков: МОСТ-Торнадо, 2003. — 288с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика. / Я. Подстригач, Ю. Коляно. — К.: Наукова думка, 1976. — 310 с.
3. Гачкевич О.Р. Термомеханика неферромагнитных электропроводных тел за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. / О.Р. Гачкевич, Р.С. Мусій, Д.В. Тарлаковський. — Львів: СПОЛОМ, 2011. — 216 с.
4. Мусий Р.С. Термонапряженное состояние и несущая способность биметаллических цилиндров при импульсных электромагнитных воздействиях / Р.С. Мусий, Н.Б. Мельник, Р.Ф. Терлецкий, И.И. Шимчак // Теоретическая и прикладная механика. — 2013. — № 6 (52). — С. 89—98.

УДК 514.18

Д.Ф. ПОГОРЕЛЫЙ, С.М. МАЛИНСКИЙ, В.Г. УСЕНКО  
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

### КОЛЕБАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЦЕНТРАЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*В статье исследуются колебания под нагрузкой сферической оболочки с внешним опертым по краю шпангоутом и внутренним шпангоутом по отверстию. Установлена связь жесткости внутреннего и внешнего шпангоутов и собственной частоты оболочки.*

*Ключевые слова: колебания оболочек, оболочки вращения, несущая способность оболочек.*

Д.Ф. ПОГОРЛИЙ, С.М. МАЛІНСЬКИЙ, В.Г. УСЕНКО  
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

### КОЛИВАННЯ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПІДКРІПЛЕННЯМ ЦЕНТРАЛЬНИМ ОТВОРОМ

*В статті досліджуються коливання під навантаженням сферичної оболонки з зовнішнім опертим по краю шпангоутом і внутрішнім шпангоутом по отвору. Встановлено зв'язок жорсткості внутрішнього і зовнішнього шпангоутів та власної частоти оболонки.*

*Ключові слова: коливання оболонки, оболонки обертання, несуча здатність оболонки.*

D.F. POGORILYI, S.M. MALINSKIY, V.G. USENKO  
Yuri Kondratyuk Poltava National Technical University

### OSCILLATION OF SPHERICAL SHELL WITH REINFORCED CENTRAL CUTTING

*The oscillations under load of spherical shell with external fixed to side rib and internal rib along the opening is investigated in this article. The interconnection of rigidity of the internal and external ribs and the own frequency of the shell was established.*

*Keywords: oscillation of shells, shell of rotation, bearing strength of shells.*

#### Постановка проблемы

При исследовании колебаний сферической оболочки с центральным вырезом существует связь жесткости внутреннего и внешнего шпангоутов и собственной частоты оболочки. Конструктивное расположение внутреннего и внешнего шпангоутов показано на рис. 1. Проблема оболочки вращения с центральным отверстием и ее собственной частоты возникает при осуществлении перехода на цилиндрическую поверхность. Поэтому возникает необходимость укрепления отверстия шпангоутами. И здесь целесообразно рассмотреть влияние жесткости шпангоутов на собственную частоту оболочки.

#### Анализ последних достижений и публикаций

Оболочки вращения находят свое широкое применение в авиастроении, судостроении, нефтяной промышленности, при исследовании морей и океанов и т. д. Такой широкий интерес к оболочкам вращения объясняется их простотой в расчетах и технологичностью в строительстве [1–3].

Исследуя несущую способность оболочек с различными отверстиями и оболочек подкрепленных шпангоутами в инженерной практике наряду с задачами о напряженном состоянии не менее важное значение имеют задачи по устойчивости и колебаниям [4].

#### Формулирование цели исследования

Проведем исследования колебаний сферической оболочки с внешним опертым по краю шпангоутом и свободным внутренним шпангоутом по отверстию под нагрузкой  $q$ .

#### Изложение основного материала исследования

Рассмотрим оболочку вращения  $z = z(p)$ ,  $p = \sqrt{x^2 + y^2}$  (рис. 2). Смещение срединной поверхности относительно исходного положения можно представить в виде  $W = R(r, \varphi, t) - R_0$ , где  $r, \varphi, t$  - текущие координаты точек срединной поверхности.

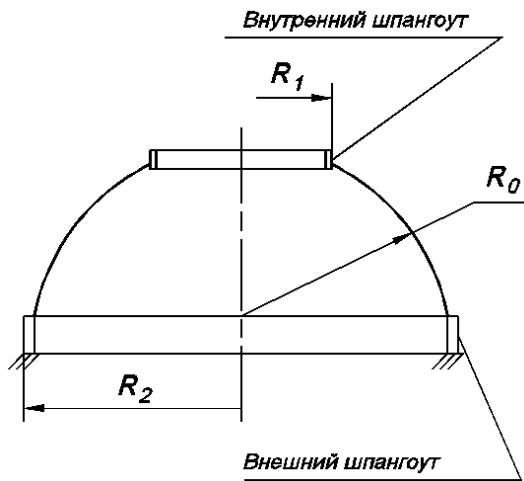


Рис. 1. Схема положения шпангоутов

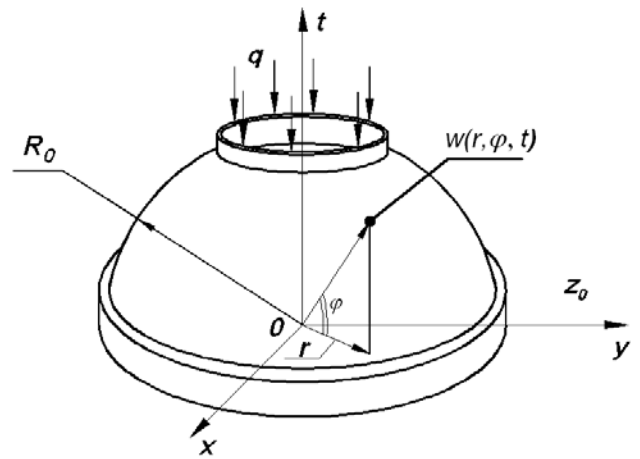


Рис. 2. Оболочка вращения с центральным отверстием

Основное дифференциальное уравнение расширений  $W > 0$ , уменьшений оболочки  $w < 0$  имеет вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 (R(r, \varphi, t) - R_0) + \rho \frac{\partial^2 [R(r, \varphi, t) - R_0]}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

Решение будем искать в виде

$$R(r, \varphi, t) = R(r, \varphi) \cdot \sin Pt, \quad (2)$$

где  $P$  – круговая частота.

В полярных координатах  $r, \varphi$  решение имеет вид

$$R(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) + C_n J_n(kr) + D_n K_n(kr) \cos n\varphi] + \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{A}_n J_n(kr) + \tilde{B}_n Y_n(kr) + \tilde{C}_n J_n(kr)] \sin n\varphi$$

$A_n, B_n, C_n$  – неизвестные коэффициенты;

$J_n, Y_n$  – функции Бесселя первого и второго рода.

Добавляем уравнение для шпангоутов

$$\begin{cases} q - \frac{1}{R_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \varphi} = \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \\ m_i - \frac{1}{R_i} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \varphi} - M_i \right) = \rho J \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_i}{\partial \varphi} + T_i = -R_i Q_i \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (4)$$

$m_i$  – распределенный внешний момент на шпангоуте

$$\begin{cases} M_i = \frac{K_i}{R_i^2} \left( R_i \beta_i - \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right); \\ T_i = \frac{L_i}{R_i^2} \left( R_i \frac{\partial \beta_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right); \\ Q_i = -\frac{1}{R_i^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ K_i \left( R_i \beta_i - \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) + L_i (R_i \beta_i + W) \right] \end{cases} \quad (5)$$

$K_i$  – изгибная радиальная жесткость;

$L_i$  – жесткость на кручение;

$\beta_i$  – угол поворота поперечного сечения  $i$ -ого шпангоута.

Запишем граничные условия и уравнение неразрывности (для сопряжения шпангоутов с оболочкой):

$$\begin{cases} W(R_2, \varphi, t) = 0; \\ \frac{\partial W(R_2, \varphi, t)}{\partial r} = -\beta_2(\varphi, t); \\ M_2(R_2, \varphi, t) = -m_2(\varphi, t). \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} W(R_1, \varphi, t) = W_2(\varphi, t); \\ \frac{\partial W(R_1, \varphi, t)}{\partial r} = -\beta_1(\varphi, t); \\ M_2(R_1, \varphi, t) = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \varphi}(\varphi, t) - M_1(\varphi, t) \right) = \rho_1 J_1 \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2}(\varphi, t). \end{cases} \quad (7)$$

Геометрические размеры шпангоутов малы по сравнению с  $R_1, R_2$ .

**Обозначения:**

$A$  – площадь сечения шпангоута;

$D$  – изгибная тангенциальная жесткость оболочки;

$d$  – толщина;

$E$  – модуль Юнга;

$I$  – полярный момент шпангоута;

$K_n = \rho P^2 / d$ ;

$P$  – круговая частота;

$\rho$  – плотность материала;

$m_i$  – распределение внешнего момента шпангоута;

$M, T$  – изгибающий и крутящий момент шпангоута;

$Q$  – перерезающая сила;

$q$  – плотность обтекаемой нагрузки на шпангоут;

$R_1, R_2$  – радиусы верхнего и нижнего шпангоута;

$K_i$  – изгибная радиальная жесткость;

$L_i$  – жесткость на кручение;

$\beta_i$  – угол поворота поперечного сечения шпангоута.

#### Выводы

Совместное численное решение уравнения (1) и систем (2, 3, 4, 5) при наложении граничных условий (закрепление внешнего шпангоута) и его анализ позволяют сделать выводы:

а) Для осесимметричной формы при увеличении жесткости внутреннего шпангоута собственная частота снижается, для неосесимметричных форм колебаний собственная частота увеличивается.

б) При увеличении жесткости внешнего шпангоута собственная частота увеличивается.

#### Список использованной литературы

1. Дехтярь А.С. Форма и несущая способность оболочек покрытий / А.С. Дехтярь, Д.Я. Ядгаров. — Ташкент: Уктивуги, 1983. — 183 с.
2. Рассказов А.О. Предельное равновесие оболочек / А.О. Рассказов, А.С. Дехтярь. — К.: Вища школа, 1987. — 150 с.
3. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Наука. 1966. — 636 с.
4. Шишкин А.Г. Свободные колебания цилиндрических панелей и оболочек с вырезами / А.Г. Шишкин, Г.В. Тертышный // В кн.: Точные науки, математика, механика. Казань: Изд-во Казанского университета. 1975. — С. 160—163.



УДК 517.93

А.А. ЗЕВИН, С.Ю. ПОСЛАВСКИЙ  
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА ФРЕЗЕРОВАНИЯ

*Исследуется устойчивость модели процесса фрезерования с двумя степенями свободы, которая описывается дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Построены области устойчивости в пространстве управляющих параметров процесса. Эффективность предложенного подхода проиллюстрирована сравнением с известными экспериментальными и теоретическими результатами.*

*Ключевые слова:* устойчивость, запаздывание, показатель Ляпунова, резание металла.

О.А. ЗЕВІН, С.Ю. ПОСЛАВСЬКИЙ  
Інститут транспортних систем і технологій НАН України

## АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ПРОЦЕСУ ФРЕЗЕРУВАННЯ

*Досліджується стійкість моделі процесу фрезерування з двома ступенями свободи, яка описується диференціальними рівняннями із запізненням. Побудовано області стійкості в просторі параметрів, що керують процесом. Ефективність запропонованого підходу проілюстровано порівнянням з відомими експериментальними і теоретичними результатами.*

*Ключові слова:* стійкість, запізнювання, показник Ляпунова, різання металу.

A.A. ZEVIN, S.YU. POSLAVSKIY  
Institute of transport systems and technologies of NAS of Ukraine

## STABILITY ANALYSIS OF MILLING

*The stability of a milling process model with two degrees of freedom, described by differential equations with delay, is investigated using a new approach. Stability regions within the limits of process control parameters are constructed. The efficiency of the approach is illustrated by a comparison with known experimental and theoretical results.*

*Keywords:* stability, time-delay, Lyapunov exponent, metal cutting.

### Постановка проблемы и анализ публикаций по теме исследований

Вибрации, возникающие в процессе резания металлов, приводят к снижению точности обработки, а также к преждевременному износу и поломке режущего инструмента. Теория возникновения вибраций разрабатывается достаточно давно, существенный вклад в ее развитие внесли работы [1], [2], [3]. В настоящее время одной из основных причин возникновения автоколебаний считаются динамические силы, связанные со срезанием следа предыдущего прохода резца (т.н. эффект регенерации колебаний).

Для математического описания процессов резания используют дифференциальные уравнения с запаздыванием. Существуют различные методы исследования устойчивости таких систем, основанные, главным образом, на использовании функций или функционалов Ляпунова (см., например, обзор [4]). Оценкам показателя Ляпунова (характеризующего скорость убывания решений) посвящено значительно меньшее количество исследований. В [5] такие оценки получены методом функций Ляпунова. В [6] и [7] были получены новые критерии экспоненциальной устойчивости и оценки максимального показателя Ляпунова. В [8] предложен новый подход анализа устойчивости и расчета верхней оценки максимального показателя Ляпунова, полученные результаты были использованы для поиска устойчивых режимов резания вертикально-фрезерной обработки металла при решении задачи, при этом рассматривалась модель с одной степенью свободы.

### Цель работы

Анализ устойчивости модели процесса фрезерной обработки с двумя степенями свободы, а также нахождение верхней оценки максимального показателя Ляпунова, исследование эффективности предложенного подхода на примерах реальных систем.

### Модель процесса фрезерования

Часто при анализе устойчивости процессов резания металла рассматривают модели с одной степенью свободы, в данной работе, для более точного описания динамики процесса, рассматривается более реалистичная модель с двумя степенями свободы (Рис. 1).

Полагаем, что фреза имеет гибкость в двух направлениях относительно жесткой заготовки. Уравнение движения для этой системы можно записать в виде

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t), \quad (1)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{bmatrix},$$

$M, C, K$  – диагональные матрицы модальных масс, коэффициентов сопротивления, коэффициентов упругости, соответственно.

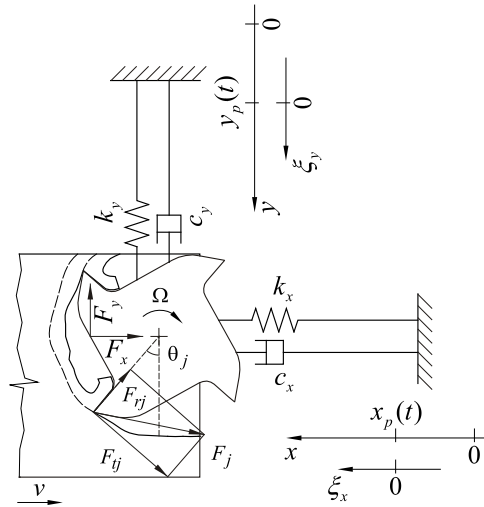


Рис. 1. Механическая модель системы

Компоненты режущей силы в направлениях  $x$  и  $y$  для  $j$ -го резца описывается выражениями

$$F_{xj}(t) = g(\theta_j(t))(F_{tj}(t)\cos\theta_j(t) - F_{rj}(t)\sin\theta_j(t))$$

$$F_{yj}(t) = g(\theta_j(t))(-F_{tj}(t)\sin\theta_j(t) - F_{rj}(t)\cos\theta_j(t))$$

где функция  $g(\theta_j(t)) = 1$  при контакте  $j$ -го резца с деталью и  $g(\theta_j(t)) = 0$  в противном случае.

Угловая позиция  $j$ -го резца определяется как

$$\theta_j(t) = (2\pi\Omega)t/60 + j2\pi/Z,$$

где  $Z$  – количество резцов фрезы,  $\Omega$  – скорость вращения шпинделя (об./мин).

Тангенциальная  $F_{tj}$  и радиальная  $F_{rj}$  компоненты режущей силы определяются следующими соотношениями

$$F_{tj}(t) = K_t b h_j(t), \quad F_{rj}(t) = K_r b h_j(t),$$

где  $K_t$  и  $K_r$  – линеаризованные тангенциальный и радиальный коэффициенты резания, соответственно,  $b$  – глубина резания,  $h_j$  – толщина стружки. Последняя определяется по формуле

$$h_j(t) = (s_z + x(t) - x(t - \tau))\sin\theta_j(t) + (y(t) - y(t - \tau))\cos\theta_j(t),$$

где  $s_z = v\tau$  – подача на один резец фрезы.

Суммарные силы, действующие на фрезу в направлениях  $x$  и  $y$  можно представить в виде

$$F_x(t) = b \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [-K_t \cos\theta_j - K_r \sin\theta_j(t)] h_j(t) \quad (2)$$

$$F_y(t) = b \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [K_t \sin\theta_j(t) - K_r \cos\theta_j(t)] h_j(t). \quad (3)$$

Используя (2) и (3) уравнение движения (1) можно записать в виде

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = bA(t)[X(t) - X(t - \tau)] + A_0(t), \quad (4)$$

где  $A(t) = \begin{bmatrix} a_{xx}(t) & a_{xy}(t) \\ a_{yx}(t) & a_{yy}(t) \end{bmatrix}$  – так называемая матрица вариации режущей силы,  $A_0(t) = \begin{bmatrix} a_{0x}(t) \\ a_{0y}(t) \end{bmatrix}$  – вектор стационарной режущей силы, с элементами

$$\begin{aligned} a_{xx}(t) &= \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [K_t \cos \theta_j(t) - K_r \sin \theta_j(t)] \sin \theta_j(t), \\ a_{xy}(t) &= \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [K_t \cos \theta_j(t) - K_r \sin \theta_j(t)] \cos \theta_j(t), \\ a_{yx}(t) &= \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [K_t \sin \theta_j(t) - K_r \cos \theta_j(t)] \sin \theta_j(t), \\ a_{yy}(t) &= \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [-K_t \sin \theta_j(t) - K_r \cos \theta_j(t)] \cos \theta_j(t), \\ a_{0x}(t) &= b s_z a_{xx}(t), \\ a_{0y}(t) &= b s_z a_{yx}(t). \end{aligned}$$

Отметим, что матрицы  $A(t)$  и  $A_0(t)$  являются  $\tau$ -периодическими.

Представим решение (4) в виде

$$X(t) = X_p(t) + E(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $X_p(t) = X_p(t + \tau)$  –  $\tau$ -периодическая функция, соответствующая идеальному движению фрезы,  $E(t)$  – возмущения. Подставив (5) в (4), получим систему уравнений

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = A_0(t), \quad (6)$$

$$M\ddot{E}(t) + C\dot{E}(t) + KE(t) = bA(t)[E(t) - E(t - \tau)]. \quad (7)$$

Далее будем рассматривать уравнение (7), так как устойчивость решения  $E(t) \equiv 0$  гарантирует устойчивость  $\tau$ -периодического идеального решения  $X_p(t)$  уравнения (6).

Произведя замену переменных в (7)

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T = (\xi_x, \xi_y, \dot{\xi}_x, \dot{\xi}_y)^T,$$

получим эквивалентную систему уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{ba_{xx}(t) - k_{xx}}{m_{xx}} & \frac{ba_{xy}(t)}{m_{xx}} & -\frac{c_{xx}}{m_{xx}} & 0 \\ \frac{ba_{yx}(t)}{m_{yy}} & \frac{ba_{yy}(t) - k_{yy}}{m_{yy}} & 0 & -\frac{c_{yy}}{m_{yy}} \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ba_{xx}(t)}{m_{xx}} & -\frac{ba_{xy}(t)}{m_{xx}} & 0 & 0 \\ -\frac{ba_{yx}(t)}{m_{yy}} & \frac{ba_{yy}(t)}{m_{yy}} & 0 & 0 \end{pmatrix} z(t - \tau). \quad (8)$$

Основными управляющими параметрами процесса фрезерования являются глубина фрезерования  $b$  и скорость вращения фрезы  $\Omega$ . Представляет интерес получить область устойчивости и верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова в пространстве этих параметров.

#### Анализ устойчивости

Для анализа устойчивости уравнения (8) воспользуемся методом предложенным автором ранее в [8].

Положим

$$v(t, \lambda) = \int_0^t \|W(t, s)\| \exp(-\lambda(t - s)) ds,$$

где  $W(t, s)$  – матрицант системы  $\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)z(t - \tau)$ .

Пусть

$$v(\lambda) = \sup_t V(t, \lambda) \text{ при } t > 0.$$

В [8] доказано, что условием экспоненциальной устойчивости системы (8) служит неравенство  $v(\lambda) < \infty$ ,

где  $\lambda$  – верхняя оценка максимального показателя Ляпунова системы (8).

Для рассматриваемой системы существуют экспериментальные результаты [9], в которых исследовалось устойчивое состояние процесса резания при различных значениях управляющих параметров  $b$  и  $\Omega$ . Ниже в пространстве этих параметров построены достаточные области устойчивости и области с заданным показателем Ляпунова. При расчетах использовались значения параметров, экспериментально установленные в [9]:  $Z = 1$ ,  $K_t = 237 \times 10^6 \text{ Н/м}^2$ ,  $K_r = 644 \times 10^6 \text{ Н/м}^2$ ,  $M = \begin{pmatrix} 0.0199 & 0 \\ 0 & 0.0201 \end{pmatrix} \text{ кг}^2$ ,

$K = \begin{pmatrix} 4.09 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 4.13 \times 10^5 \end{pmatrix} \text{ Н/м}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1.603 & 0 \\ 0 & 1.557 \end{pmatrix} \text{ Н} \cdot \text{с/м}$ , диаметр фрезы  $D = 8 \text{ мм}$ , ширина фрезерования  $a = 0.8 \text{ мм}$ .

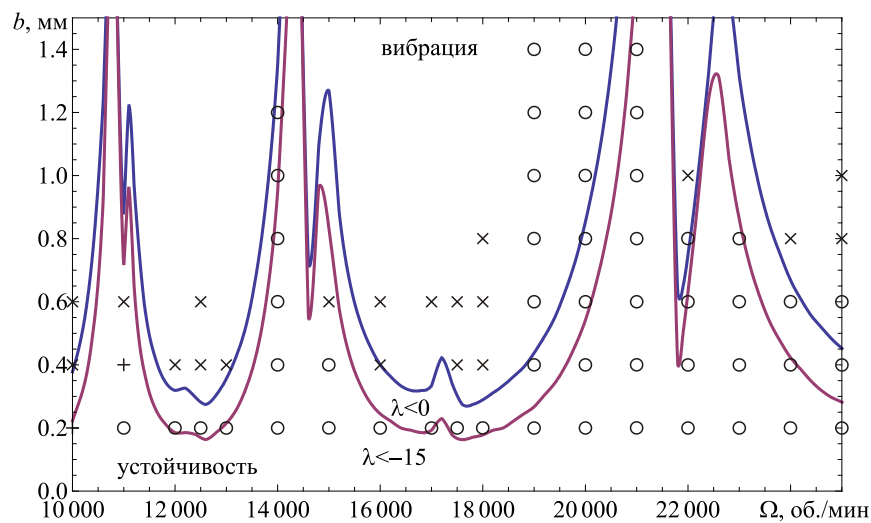


Рис. 2. Область устойчивости для попутного фрезерования

На рисунке 2 показаны области устойчивой обработки в пространстве параметров  $b$  и  $\Omega$  для попутного фрезерования. Сплошными линиями ограничены области устойчивости с различными верхними оценками максимального показателя Ляпунова. Результаты экспериментальных исследований, полученных в [9], отмечены соответствующими символами («o» – устойчивый режим, «+» – граница, «x» – вибрация). Как видно, полученные теоретические результаты достаточно хорошо соответствуют экспериментальным.

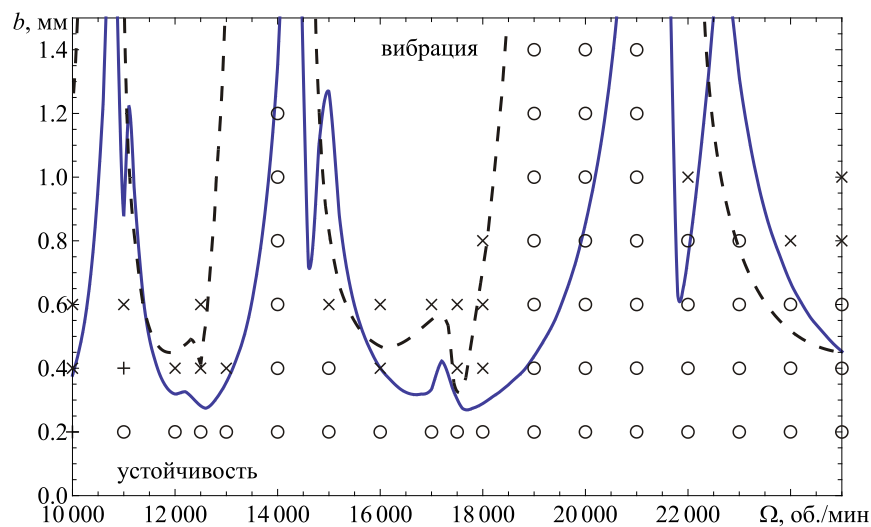


Рис. 3. Сравнение результатов теоретических расчетов

Полученные результаты сравнивались с результатами, полученными другими методами в [9]. Результаты сравнения приведены на рисунке 3. Оказалось, что предложенный подход позволяет обнаружить области неустойчивости, не устанавливаемые другими методами.

Хорошая согласованность теоретических и экспериментальных результатов говорит о высокой точности предложенного подхода.

#### Выводы

В данной работе предложен новый подход для анализа устойчивости модели процесса фрезерования с двумя степенями свободы, которая описывается дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Построены области устойчивости в пространстве управляющих параметров процесса. Найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова, позволяющая оценить скорость убывания решений. Эффективность предложенного подхода проиллюстрирована сравнением с известными экспериментальными и теоретическими результатами. Близость полученных оценок и экспериментальных результатов свидетельствует о хорошей точности предложенного подхода.

Полученные результаты могут быть использованы при выборе оптимальных параметров резания металла.

#### Список использованной литературы

1. Кудинов В.А. Теория вибрации при резании. / В.А. Кудинов // Передовая технология машиностроения. – М: АН СССР, 1955. – С.37–42.
2. Глустый И. Автоколебания в металлорежущих станках / И. Глустый; пер. с чешск. – М.: Машгиз, 1956. – 396с.
3. Tobias S.A. The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions / S.A. Tobias, W. Fishwick // Transactions of ASME. – 1958. – V. 80. – P. 1079–1088. Пославский С.Ю. Критерии устойчивости механических систем с запаздыванием / С.Ю. Пославский // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2015. – Вип. 24. – С. 232–247.
4. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems / J.-P. Richard // Automatica. – 2003. – V. 39. – P. 1667–1694.
5. Хусаинов Д.Я. Метод функции Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем / Д.Я. Хусаинов, А.В. Шатырко. – К.: Изд-во Киевского университета, 1997, – 236 с.
6. Зевин А.А. Двусторонние оценки наибольшего показателя Ляпунова и критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с произвольным запаздыванием / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Автоматика и телемеханика, – 2012, – №1, – С. 82–91.
7. Пославский С.Ю. Условия экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем с переменными и распределенными запаздываниями / С.Ю. Пославский // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». – 2014. – Вип. 15. – Т. 2. – С. 157–171.
8. Пославский С.Ю. Критерии устойчивости механических систем с запаздыванием / С.Ю. Пославский // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2015. – Вип. 24. – С. 232–247.
9. Insperger T. Machine tool chatter and surface location error in milling processes / T. Insperger, J. Gradisek, M. Kalveram, G. Stepan, K. Winert, E. Govekar // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2006, – V. 128. – P. 913–920.

УДК 693.95 (075.8)

И.Н. СИВАК, Ю.В. ЧОВНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

В.Т. КРАВЧУК

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАБОЧЕГО ОРГАНА ВИБРОМАШИНЫ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОГО/ОБЪЁМНОГО УПЛОТНЕНИЯ БЕТОННОЙ СМЕСИ С ОБРАБАТЫВАЕМОЙ СРЕДОЙ

*Предложена математическая модель, описывающая поведение динамической системы «вибрационная площадка – бетонная смесь», в которой бетонная смесь представлена в виде системы с распределёнными параметрами. Составлено волновое уравнение движения уплотняемой смеси. Определены граничные условия для случая, когда формование смеси осуществляется поверхностным/объёмным способом. Найдены аналитически значения волнового числа, коэффициента затухания возмущения в обрабатываемой среде, приведенная масса и коэффициент неупругого сопротивления бетонной смеси. Определён закон распространения волн возмущения в обрабатываемой среде.*

*Ключевые слова:* вибрационная машина, бетонная смесь, поверхностное/объёмное уплотнение.

I.M. SIVAK, Y.V. CHOVNYUK

Національний університет біоресурсів і природокористування України

В.Т. КРАВЧУК

Київський національний університет будівництва і архітектури

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ВЗАЄМОДІЇ РОБОЧОГО ОРГАНА ВІБРОМАШИНИ ДЛЯ ПОВЕРХНЕВОГО/ОБ'ЄМНОГО УЩІЛЬНЕННЯ БЕТОННОЇ СУМІШІ З ОБРОБЛЮВАНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

*Запропонована математична модель, яка описує поведінку динамічної системи «вібраційний майданчик - бетонна суміш», у котрій бетонна суміш представлена у вигляді системи з розподіленими параметрами. Складене хвильове рівняння руху ущільнюваного середовища. Визначені граничні умови для випадку, коли формування суміші здійснюється поверхневим/об'ємним способом. Знайдені аналітично значення хвильового числа, коефіцієнта затухання збурення у оброблюваному середовищі, приведеної маси й коефіцієнту непружності опору бетонної суміші. Визначений закон розповсюдження хвиль збурення у оброблюваному середовищі.*

*Ключові слова:* вібраційна машина, бетонна суміш, поверхнєве/об'ємне ущільнення.

I.N. SIVAK, Y.V. CHOVNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

V.T. KRAVCHYUK

Kyiv National University of Constructions and Architecture

## THE INVESTIGATION OF INTERACTION PROCESS OF THE WORKING ORGAN OF VIBROMACHINE FOR THE SURFACE/VOLUME COMPACTION OF CONCRETE'S MIXTURE WITH A PROCESSABLE MEDIUM

*The authors have suggested a new mathematical model describing the behavior of the dynamic system “vibration platform – concrete's mixture”, where the concrete's mixture is represented as a system with a distributed parameters. Within the frame of research the wave equation of the compactable medium motion was complied and the boundary conditions were defined. As a result, it were analytically calculated such key parameters as values of the wave number, the perturbation attenuation coefficient in the processable medium, reduced mass, the coefficient of inelastic resistance of concrete's mixture and the law of propagation of perturbations in the processable medium.*

*Key words:* vibration machine, concrete's mixture, surface/volume compacting.

### Постановка проблеми.

Современное строительное производство требует создания машин и виброформовочного оборудования с малой энергоёмкостью, обеспечивающих эффективное приготовление жёстких и сверхжёстких бетонных смесей (БС). Снижения энергоёмкости и повышения эффективности процесса приготовления БС можно достичь путём использования технологии, в которой на БС оказывается вибрационное воздействие (т.н. объёмное/поверхностное вибрационно-волновое формование/уплотнение смеси). При этом уменьшаются силы сопротивления перемешиванию за счёт уменьшения внутреннего коэффициента трения БС и её

коэффициента трения с корпусом вибрационной площадки. Одновременно ускоряется процесс приготовления БС и улучшается её качество за счёт виброактивации.

Таким образом, создание вибросистем для уплотнения БС, сочетающих в себе высокие показатели производительности и качества приготавливаемой смеси с их простотой конструкции и сравнительно малыми значениями металлоёмкости и энергоёмкости, является важной народнохозяйственной задачей. По мнению авторов данного исследования, моделирование процесса взаимодействия рабочего органа виброплощадки с обрабатываемой БС (например, поверхностным/объёмным способом) требует дальнейшего углублённого исследования, уточнения и совершенствования.

#### Анализ последних исследований и публикаций.

Уплотнение БС вибрационным воздействием (поверхностным/объёмным способом формирования смеси) связано с переходом в состояние тиксотропии, в результате чего БС становится более подвижной, из неё удаляется большая часть воздуха, осуществляется обмазка минеральных частиц вязким, заполняются вязким мельчайшие трещины, разрушаются дефектные агрегаты смеси, происходит переориентация минеральных частиц с образованием более плотной упаковки [1-3].

Для определения технологических параметров вибрационного воздействия на уплотняемую БС и основных параметров вибрационной машины необходимо исследовать взаимодействие в вертикальном направлении формы с уложенной в неё БС. При этом указанное вибровоздействие может осуществляться на поддон формы с БС, а верхняя поверхность её – свободна (т.н. объёмное формирование БС без пригруза), либо вибрация осуществляется на верхней поверхности через виброплиту, а нижняя поверхность БС – покоится на жёстком основании (т.н. поверхностное формирование БС). БС в расчётной динамической системе можно представить реологической моделью [4-10]. Доказано [11-13], что наибольшую точность в описании взаимодействия рабочего органа с уплотняемой средой дают реологические модели, в которых уплотняемая БС представлена в виде системы с распределёнными параметрами [14,15], в виде дискретных моделей [16,17], либо в виде дискретно-континуальных моделей [18] (грунтов). Физико-механические характеристики указанных моделей найдены из выражений, полученных для описания закона распространения волн деформаций в уплотняемой среде при вибрационном воздействии. По мнению авторов [19-23], для определения основных параметров вибрационной площадки необходимо достаточно точно определить её силовое взаимодействие с БС.

Следует отметить, что ни в одной из цитированных выше работ нет исследований указанного силового взаимодействия виброплощадки с БС (при поверхностном/объёмном способе её формирования), которые бы учитывали генерацию и влияние на это взаимодействие собственных форм колебаний БС. Если авторы [19-23] используют при таком анализе метод разделения переменных Фурье, то, по крайней мере, это сделано некорректно, поскольку для проведения такого динамического анализа согласно канонам математической физики [24] следует выполнить специальное преобразование искомого решения и представить его в виде суммы из двух составляющих (нельзя применять метод Фурье для подвижных граничных условий!). Именно данное исследование выполнено с учётом сказанного выше. Кроме того, в работах [19-23] встречаются многочисленные ошибки, описки, которые здесь исправлены и устранены.

#### Формулирование цели исследования.

Цель данной работы состоит в установлении основных закономерностей взаимодействия рабочего органа виброплощадки с БС в вертикальном направлении при поверхностном/объёмном её вибрационном формировании.

#### Изложение основного материала исследования.

Для исследования взаимодействия формы виброплощадки с БС в вертикальном направлении используем расчётную схему, представленную в [19,23].

Форма массой  $m$ , заполненная БС, установлена при помощи опор жёсткостью  $c$  и с коэффициентом демпфирования  $b$  на неподвижном основании. На форму снизу (при объёмном формировании БС) действует возмущение от вибровозбудителя направленных колебаний в виде вертикально направленной гармонической силы  $Q \cdot \sin \omega t$ , где  $Q$  – амплитуда,  $\omega$  – частота (круговая) возбуждения,  $t$  – время. (Если формирование осуществляется поверхностным способом, тогда сила  $Q \cdot \sin \omega t$  действует сверху через пригруз массы  $m$  на БС, а нижняя поверхность БС контактирует с неподвижным основанием). Если  $F$  – площадь днища формы (или днища пригруза при поверхностном уплотнении БС), тогда  $Q = \tilde{q} \cdot F$ , где  $\tilde{q}$  – величина возмущающей силы, приходящаяся на единицу площади днища формы/пригруза.

БС будем рассматривать как систему с распределёнными параметрами. При этом зависимость между напряжением ( $\sigma$ ) и деформацией представим в виде уравнения Ньютона [14], учитывающим и возможные пластические деформации в БС:

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \mu E \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1)$$

где  $E$  – динамический модуль упругой деформации БС;  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости, характеризующий внутреннее трение в БС;  $\mu$  – коэффициент сухого трения, позволяющий моделировать уплотне-

ния БС в процессе её пластической деформации;  $u, z$  – эйлерова и лагранжева координаты (в вертикальном направлении). Естественно, что напряжение, возникающее по высоте уплотняемого слоя БС  $\sigma$ , как и перемещение уплотняемого слоя БС  $u$  являются функциями координаты  $z$  и времени  $t$ , т.е.  $\sigma = \sigma(z, t)$ ,  $u = u(z, t)$ .

Дифференциальное уравнение движения уплотняемой БС в направлении координаты  $z$  будет иметь вид:

$$E(1 + \mu) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где  $\rho$  – плотность БС.

Решение волнового уравнения (2) отыскиваем при граничных условиях, характерных для объёмно-го/поверхностного способов формования.

1. Объёмное формование БС.

Рассмотрим вначале решение задачи для объёмного способа формования БС.

Граничные условия в этом случае имеют вид:

при  $z = 0$  –

$$-m \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} - b \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} - cu(0, t) + FE \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} + F\eta \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial z \partial t} + F\mu E \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} = -Q \cdot \sin \omega t, \dots\dots\dots(3)$$

при  $z = H$  –

$$EF \frac{\partial u(H, t)}{\partial z} + \eta F \frac{\partial^2 u(H, t)}{\partial z \partial t} + \mu EF \frac{\partial u(H, t)}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

где  $H$  – высота формируемого изделия.

Если считать, что  $u(z, t)$  можно записать в виде функции, пропорциональной  $\exp(i\omega t)$ ,  $i^2 = -1$ , разыскивая, тем самым, только вынужденную составляющую решения задачи, тогда из (2) можно получить следующее дисперсионное соотношение, связывающее  $\omega$  с волновым вектором  $\tilde{k}$  :

$$\tilde{k}^2 = \omega^2 \cdot \frac{\rho}{[E(1 + \mu) + i\eta\omega]}. \tag{5}$$

Из (5) следует, что волновой вектор  $\tilde{k}$  – комплексная величина, а значит, её можно представить следующим образом:

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{a} - i\alpha, \quad \alpha = \left\{ \frac{\rho\omega^2 \left[ \sqrt{E^2(1 + \mu)^2 + \eta^2\omega^2} - E(1 + \mu) \right]}{2[E^2(1 + \mu)^2 + \eta^2\omega^2]} \right\}^{1/2}, \tag{6}$$

$$a = \left\{ \frac{2[E^2(1 + \mu)^2 + \eta^2\omega^2]}{\rho \left[ E(1 + \mu) + \sqrt{E^2(1 + \mu)^2 + \eta^2\omega^2} \right]} \right\}^{1/2}, \quad \frac{\omega}{a} = k,$$

где  $\alpha$  – коэффициент затухания возмущения, характеризующий уменьшение амплитуды колебаний в зависимости от расстояния до источника возмущения;  $a$  – фазовая скорость распространения возмущения в БС.

Используя граничные условия (3), (4) и запись  $k = \frac{\omega}{a}$  в виде:

$$k = \frac{\omega}{a} = \left\{ \frac{\omega^2 \rho E(1 + \mu)}{2[E^2(1 + \mu)^2 + \eta^2\omega^2]} + \frac{\omega^2 \rho}{2\sqrt{E^2(1 + \mu)^2 + \eta^2\omega^2}} \right\}, \tag{7}$$

получим решение уравнения (2) в комплексной форме, т.е. в виде закона движения уплотняемой БС в направлении координаты  $z$  за время  $t$  в зависимости от частоты и амплитуды возмущающей силы, физико-механических характеристик уплотняемой БС, толщины уплотняемого слоя БС  $H$  и основных параметров вибростолы:

$$u(z, t) = \frac{Q \cdot \operatorname{ch}[(\alpha + ik) \cdot (H - x)] \cdot \left[ (c_1 + c - q - m\omega^2) - i\omega(b_1 + b) \right]}{2 \operatorname{ch}[(\alpha + ik) \cdot H] \cdot \left[ (c_1 + c - q - m\omega^2)^2 + \omega^2(b_1 + b)^2 \right]} \cdot \exp(i\omega t), \tag{8}$$



который лишь описывает возмущение в БС, вызванное внешней гармонической силой ( $Q \cdot \sin \omega t$ ), т.е. вынужденное решение задачи. Здесь, в (8) введены обозначения:

$$\begin{cases} c_1 = F \cdot \frac{\alpha E(1 + \mu) \cdot sh(2\alpha H)}{[ch(2\alpha H) + \cos(2kH)]}; \\ b_1 = F \cdot \frac{[\alpha E(1 + \mu) - k\omega\eta] \cdot \sin(2kH) + [kE(1 + \mu) + \eta\omega\alpha] sh(2\alpha H)}{\omega[ch(2\alpha H) + \cos(2kH)]}; \\ q = F \cdot \frac{[kE(1 + \mu) - k\omega\eta] \cdot \sin(2kH) + [k\eta\omega - \alpha E(1 + \mu)] \cdot sh(2\alpha H)}{[ch(2\alpha H) + \cos(2kH)]}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $c_1, b_1$  – приведенные коэффициенты упругого и неупругого сопротивления БС.

Для нахождения истинного закона движения БС в объёмном случае её формирования следует в выражении (8) найти мнимую составляющую.

Закон движения вибростола при  $x = 0$  (в действительном виде) можно найти из соотношений:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= A \cdot \sin(\omega t - \theta), \quad A = \frac{Q}{\sqrt{(c_1 + c - q - m\omega^2)^2 + \omega^2(b_1 + b)^2}}, \\ \theta &= \text{arctg} \left\{ \frac{\omega(b_1 + b)}{c_1 + c - q - m\omega^2} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Сила инерции БС выражается следующим образом:

$$q = m_n \cdot \omega^2, \quad m_n = F \cdot \frac{[kE(1 + \mu) - k\eta\omega] \cdot \sin(2kH) + [\eta\omega - \alpha E(1 + \mu)] \cdot sh(2\alpha H)}{\omega^2[ch(2\alpha H) + \cos(2kH)]}, \quad (11)$$

где  $m_n$  – приведенная масса БС в вертикальном направлении.

Удельная приведенная масса  $m_{1z}$ , коэффициенты сопротивления  $b_{1z}$  и жёсткости  $c_{1z}$  БС в вертикальном направлении определяются из соотношений (9), (11) путём деления  $m_n, b_1, c_1$  на площадь основания формуемого изделия  $F$ :

$$m_{1z} = \frac{m_n}{F}, \quad b_{1z} = \frac{b_1}{F}, \quad c_{1z} = \frac{c_1}{F}. \quad (12)$$

Значения коэффициентов  $m_n, b_1, c_1$  существенно зависят от коэффициентов динамической вязкости  $\eta$  и сухого трения  $\mu$ , динамического модуля упругости  $E$  БС, её плотности  $\rho$ , фазовой скорости распространения возмущения в уплотняемом слое  $a$ , коэффициента поглощения  $\alpha$ , толщины уплотняемого слоя БС  $H$ , площади основания днища формы  $F$  и места приложения вибрационной нагрузки.

Собственные колебания столба БС высотой  $H$  для объёмного способа её формирования получают следующий вид:

$$\tilde{u}(z, t) = \frac{2A\omega}{aH} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[(-1)^{j-1} - 1 + (-1)^j \cdot \cos\left(\frac{\omega H}{a}\right)]}{\left\{ \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - \left(\frac{j\pi}{H}\right)^2 + \alpha^2 \right\}} \cdot \sin\left\{ \frac{j\pi a t}{H} \right\} \cdot \sin\left\{ \frac{j\pi z}{H} \right\}. \quad (13)$$

Тогда общее решение задачи (2) – (4) можно записать так:

$$U(z, t) = u(z, t) + \tilde{u}(z, t). \quad (14)$$

Из (13) следует, что на частотах, удовлетворяющих соотношению:

$$\omega_j = \frac{j\pi a}{H}, \quad j = \overline{(1, \infty)}, \quad (15)$$

возможны резонансы собственных колебаний БС.

## 2. Поверхностное формирование БС.

Рассмотрим теперь решение задачи для поверхностного способа формирования БС.

Граничные условия в этом случае имеют вид (3) при  $z = 0$  (координата  $z$  в этом случае отсчитывается от поверхности БС, на которую подаётся вибровозмущение), и условия при  $z = H$  (нижняя поверхность формуемой смеси, контактирующая с неподвижным основанием):

$$u(H, t) = 0. \quad (16)$$

Вынужденная составляющая решения  $u(z, t)$  в этом случае приобретает вид:

$$\bar{u}(z, t) = \frac{\sin[k(H - z)]}{\sin kH} \cdot \frac{Q \cdot \sin(\omega t - \tilde{\varphi})}{\left\{ \left[ c + FE(1 + \mu)kctg(kH) - m\omega^2 \right]^2 + [b\omega - F\eta\omega kctg(kH)]^2 \right\}^{1/2}}, \quad (17)$$

где  $\tilde{\varphi}$  – сдвиг фаз между перемещением и амплитудой возмущающей силы:

$$\tilde{\varphi} = \text{arctg} \left\{ \frac{b\omega - F\eta\omega kctg(kH)}{c + FE(1 + \mu)kctg(kH) - m\omega^2} \right\}. \quad (18)$$

При  $z = 0$  выражения (17), (18) описывают колебания верхнего слоя уплотняемой БС и виброплиты:

$$\bar{u}(0, t) = \tilde{A} \cdot \sin(\omega t - \tilde{\varphi}), \quad (19)$$

где

$$\tilde{A} = \frac{Q}{\left\{ \left[ c + FE(1 + \mu)kctg(kH) - m\omega^2 \right]^2 + [b\omega - F\eta\omega kctg(kH)]^2 \right\}^{1/2}}. \quad (20)$$

Анализ законов движения уплотняемой БС (17), (18) и вибрационной плиты (19), (20) (при поверхностном способе уплотнения) показывает, что выражение (20) служит для определения амплитуды вынужденных колебаний вибрационной плиты, а выражение:

$$\tilde{c}_1 = FE(1 + \mu)kctg(kH) \quad (21)$$

определяет жёсткость объёма уплотняемой БС.

Из выражения (21) находим удельное значение коэффициента жёсткости  $\tilde{c}_{1y} = \tilde{c}_1 / F$ , т.е.:

$$\tilde{c}_{1y} = E(1 + \mu)kctg(kH). \quad (22)$$

На основании выражения (20) закон колебаний (вынужденных) объёма уплотняемой БС можно представить в виде:

$$\bar{u}(z, t) = \tilde{A} \cdot \frac{\sin[k(H - z)]}{\sin[kH]} \cdot \sin(\omega t - \tilde{\varphi}). \quad (23)$$

Общее решение задачи (2), (3), (16) можно записать так:

$$\bar{U}(z, t) = \bar{u}(z, t) + u^*(z, t), \quad (24)$$

где  $u^*(z, t)$  описывает собственные колебания уплотняемой БС, которые выражаются следующим соотношением:

$$u^*(z, t) = \frac{2\tilde{A}\omega}{aH} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{\left[ \left( \frac{\omega}{a} \right)^2 - \left( \frac{j\pi}{H} \right)^2 + \alpha^2 \right]} \cdot \sin \left[ \frac{j\pi a t}{H} \right] \cdot \sin \left[ \frac{j\pi z}{H} \right]. \quad (25)$$

### Выводы

1. Определены законы движения основания уплотняемого слоя БС и днища формы при объёмном способе её формования.

2. Определены законы движения виброплиты и уплотняемого слоя БС при поверхностном способе её формования.

3. Для объёмного способа уплотнения БС получены: закономерности изменения коэффициента присоединённой массы БС; амплитуды колебаний днища формы; коэффициента неупругого сопротивления БС в зависимости от толщины уплотняемого слоя. Определён характер взаимодействия виброплощадки с БС при вертикально направленных колебаниях, её основные конструктивные параметры и параметры вибрационного воздействия на уплотняемую БС, что позволяет разработать эффективную виброплощадку, обеспечивающую уплотнение жёстких и умеренно жёстких БС.

4. На основании волновой теории колебаний изучен процесс распространения волн деформации в уплотняемом слое БС (при её поверхностном способе формования), представленной, как и при объёмном уплотнении, в виде системы с распределёнными параметрами. Определён закон движения уплотняемой БС при вибрационном воздействии (поверхностном) в зависимости от физико-механических характеристик БС, толщины уплотняемого слоя, массы виброплиты, частоты, амплитуды вынуждающей силы, жёсткости и коэффициента неупругого сопротивления упругой подвески. Найдены изменения удельного коэффициента жёсткости БС.

5. Для обоих способов уплотнения БС (объемного и поверхностного) определены законы движения, учитывающие возникновение колебаний собственных форм БС (при нулевых граничных условиях).

6. Полученные в работе результаты могут в дальнейшем служить для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта вибростолы для объемного/поверхностного способов уплотнения БС как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

#### Список использованной литературы

1. Маслов А.Г. Теоретические основы вибродвижения цементно-бетонных смесей/А.Г. Маслов, А.Ф. Иткин//Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КДПУ. – 2004. – Вип. 5(28). – С. 45-49.
2. Саленко Ю.С. Горизонтальне бетоносмесителі принудительного действия/Ю.С. Саленко. – Кременчук: ТОВ «Кременчуцька міська друкарня», 2013. – 218с.
3. Волков С.А. Строительные машины/С.А. Волков, С.А. Евтюков. – СПб.: Издательство ДНК, 2012. – 597с.
4. Руденко И.Ф. Формование изделий поверхностными виброустройствами/И.Ф. Руденко. – М.: Издательство литературы по строительству, 1972. – 104с.
5. Овчинников П.Ф. Виброреология/П.Ф. Овчинников. – К.: Наукова думка, 1983. – 272с.
6. Чубук Ю.Ф. Вибрационные машины для уплотнения бетонных смесей/Ю.Ф. Чубук, И.И. Назаренко, В.Н. Гарнец. – К.: Вища школа, 1985. – 168с.
7. Маслов А.Г. Вибрационные машины и процессы в дорожном строительстве/А.Г. Маслов, В.М. Пономарь. – К.:Будівельник. 1985. – 128с.
8. Гарнец В.М. Прогресивні бетоноформуючі агрегати і комплекси/В.М. Гарнец. – К.: Будівельник, 1991. – 144с.
9. Гусев Б.В. Вибрационная технология бетона/Б.В. Гусев, В.Г. Зазимко. – К.: Будівельник, 1991. – 160с.
10. Назаренко И.И. Прикладные задачи теории вибрационных систем/И.И. Назаренко. – К.: ІСДО, 1993. – 216с.
11. Иткин А.Ф. Вибрационные машины для формования бетонных изделий/А.Ф. Иткин. – К.: «МП Леся», 2009. – 152с.
12. Маслов А.Г. Вибрационные машины и процессы в дорожном строительном производстве/А.Г. Маслов, Ю.С. Саленко. – Кременчук: ПП Щербатых О.В., 2014. – 262с.
13. Иткин А.Ф. Сравнение теоретических и экспериментальных данных исследований виброплощадок с горизонтально направленными колебаниями/А.Ф. Иткин, А.Г. Маслов//Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КДПУ, 2007. – Вип. 1(42). Част. 2. – С. 14-18.
14. Маслов А.Г. Вибрационные машины для приготовления и уплотнения бетонных смесей/А.Г. Маслов, А.Ф. Иткин, Ю.С. Саленко. – Кременчук: ЧП Щербатых А.В., 2014. – 324с.
15. Маслов А.Г. Исследование взаимодействия вибрирующей плиты с цементно-бетонной смесью/А.Г. Маслов, Ю.С. Саленко, Н.А. Маслова//Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2011. – Вип. 2(67). Част. 1. – С. 93-98.
16. Маслов А.Г. Исследование колебаний рабочего органа машины для уплотнения бетонных смесей в вибрационном рабочем режиме/А.Г. Маслов, Жанар Батсайхан//Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2015. – Вип. 2(91). Част. 1. – С. 92-97.
17. Маслов А.Г. Исследование процесса уплотнения цементно-бетонных смесей на вибродвижении площадке с жестко-упругими ограничителями/А.Г. Маслов, А.Ф. Иткин//Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КДПУ, 2005. – Вип. 6(35). Част. 2. – С. 15-19.
18. Ловейкін В.С. Ідентифікація механічних властивостей ґрунтів сільськогосподарського призначення шляхом дослідження коливань їх зразків/В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, Л.А. Дяченко//Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів: Видавництво «Львівська Політехніка», 2011. – Вип. 45. – С. 103-109.
19. Савелов Д.В. Исследования процесса уплотнения порошковой смеси на вибростолы с вертикально направленными колебаниями/Д.В. Савелов//Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія: Машинобудування. – 2012. - №66. – С. 21-25.
20. Емельяненко Н.Г. Обоснование создания пневмовибрационных машин для формования бетонных изделий/Н.Г. Емельяненко//Вісник Приазовського державного технічного університету. Серія: Технічні науки. – 2012. – Вип. 24. – С. 268-274.
21. Саленко Ю.С. Исследование процесса взаимодействия вибродвижения заслонки бетоносмесителя с обрабатываемой средой/Ю.С. Саленко//Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2013. – Вип. 3(80). – С. 148-152.

22. Жанар Батсайхан. Исследование взаимодействия вибрационной плиты рабочего органа с уплотняемой средой/Батсайхан Жанар// Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2015. – Вип. 1(90). Част. 1. - С. 92-97.
23. Маслов А.Г. Исследование взаимодействия виброплощадки с бетонной смесью/А.Г. Маслов, О.О. Колесник// Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2016. – Вип. 1(96). - С. 51-57.
24. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики/Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа. 1970. – 712с.

УДК 528.77:528.854

Н.О. СОКОЛОВА

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

**ВЕРИФИКАЦИЯ СЕГМЕНТОВ ЗДАНИЙ ПУТЕМ АНАЛИЗА ГЕОМЕТРИИ**

*В данной статье рассматриваются некоторые аспекты экстракции зданий на фотограмметрических изображениях высокого разрешения, а именно верификация и элиминирование сегментов зданий и не-зданий на основе геометрического анализа.*

*Ключевые слова: сегментация, прямоугольность, выпуклость, монолитность, округлость, экстракция зданий.*

Н.О. СОКОЛОВА

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

**ВЕРИФІКАЦІЯ СЕГМЕНТІВ БУДІВЕЛЬ ШЛЯХОМ АНАЛІЗУ ГЕОМЕТРІЇ**

*У даній статті розглядаються деякі аспекти екстракції будівель на фотограмметричних зображеннях високого розрізнення, а саме верифікація та елімінування сегментів будівель і не-будівель на основі геометричного аналізу.*

*Ключові слова: сегментація, прямокутність, опуклість, монолітність, округлість, екстракція будівель.*

N.O. SOKOLOVA

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

**VERIFICATION OF THE SEGMENTS OF THE BUILDINGS BY ANALYZING THE GEOMETRY**

*This article discusses some aspects of the extraction of buildings on the photogrammetrically high-resolution images, namely verification and the elimination of segments of buildings and non-buildings based upon geometric analysis.*

*Key words: segmentation, rectangularity, convexity, solidity, ellipticity, extraction of buildings.*

**Постановка проблемы**

Исследования и технические достижения в области фотограмметрии, дистанционного зондирования и информационных технологий предоставляют исключительный потенциал для уменьшения участия человека в создании городского кадастра и в других аспектах, связанных с ручной обработкой огромного объема данных ДЗЗ. Совершенной и однозначной по результатам методики автоматического распознавания зданий пока еще нет.

**Анализ публикаций по теме исследования**

Данные дистанционного зондирования, как правило, классифицируются, используя методы, которые могут быть категоризированы как: контролируемая и неконтролируемая классификация. Существуют различные типы алгоритмов, которые могут быть использованы для классификации. Их можно разделить на параметрические и непараметрические классификаторы. Параметрический подход предполагает наличие нормального (Гауссова) распределения наблюдений (например, метод наибольшего правдоподобия). Наиболее распространенными непараметрическими алгоритмами классификации являются алгоритмы минимального расстояния, ближайшего соседа, нейронные сети и т.д.

**Формулировка целей статьи**

Ни один из этих алгоритмов, к сожалению, полностью не решает задачи автоматической экстракции зданий. Будущее за разработкой селективных методик. Разработанная методика является симбиозом различных методов обработки фотограмметрических изображений высокого разрешения на различных стадиях. Одним из этапов верификации результатов сегментации после разбиения изображения на участки и анализа гистограммы является геометрический анализ, результаты которого и рассмотрены в данной статье.

**Основная часть**

Геометрический анализ основан на общих мерах для представления геометрических характеристик сегмента. Значения мер, относящихся к сегментам со зданиями и без, используются для элиминирования сегментов на основе показателя вероятности.

Мерами, используемыми для геометрического анализа, были выбраны: прямоугольность, округлость, монолитность, выпуклость. Для того, чтобы использовать эти меры для расчета вероятности для сегмента быть сегментом со зданием, эти меры должны быть различными для классов со зданиями и без зданий соответственно.

Прямоугольность контура может быть оценена по-разному [2, 3]. Одним из методов для расчета прямоугольности является использованием MBR (минимального ограничивающего прямоугольника). Мера прямоугольности отражает соотношение между площадью сегмента и площадью MBR. Прямоугольность также можно оценить, используя инварианты моментов. Метод моментов, как было установлено в результате исследования, существенно не чувствителен к шуму и сохраняет высокое значение прямоугольности для прямоугольников.

Округлость контура вычисляется, используя инварианты моментов [2], и обеспечивает хорошие результаты классификации

Монолитность определяли по формуле (1):

$$\text{Монолитность} = \frac{\text{Площадь Ограничивающего Многоугольника}}{\text{Площадь Сегмента}} \quad (1)$$

Эта мера позволяет вычислить количество лакун в пределах сегмента.

Выпуклость отображает соотношение между периметром выпуклой оболочки многоугольника контура и периметром первоначального контура. Это должно дать индекс 1 для полноценной выпуклой формы, такой как прямоугольник или квадрат. Используя выпуклую оболочку контура, были проанализированы три различные меры. Первая мера выпуклости (*Выпуклость<sub>P</sub>*) была рассчитана на основе периметра обобщенного многоугольника. Эта мера не была найдена достаточной для различения сегментов со зданиями и без. В результате, были исследованы другие меры выпуклости: *Выпуклость<sub>O</sub>*, на основе периметра исходного извлеченного сегмента, и *Выпуклость<sub>S</sub>*, на основе соотношения площади выпуклой оболочки и площади обобщенного многоугольника.

*Выпуклость<sub>P</sub>* рассчитывали как соотношение между периметром выпуклой оболочки и периметром обобщенного многоугольника:

$$\text{Выпуклость}_{P} = \frac{\text{Периметр Выпуклой Оболочки}}{\text{Периметр Обобщенного Многоугольника}} \quad (2)$$

*Выпуклость<sub>O</sub>* рассчитывали как соотношение между периметром выпуклой оболочки и периметром исходного многоугольника сегмента:

$$\text{Выпуклость}_{O} = \frac{\text{Периметр Выпуклой Оболочки}}{\text{Периметр Исходного Многоугольника}} \quad (3)$$

Как и в расчете выпуклости на основе периметра, выпуклость может быть рассчитана на основе соотношения между площадью выпуклой оболочки и площадью обобщенного многоугольника. Отношение площадей вычисляли следующим образом:

$$\text{Выпуклость}_{S} = \frac{\text{Площадь Выпуклой Оболочки}}{\text{Площадь Обобщенного Многоугольника}} \quad (4)$$

Компактность отражает соотношение между площадью контура здания и площадью компактной формы с тем же периметром. Мы используем квадрат как наиболее компактную форму, а затем круг. В результате, мы должны определить индекс компактности соответственно:

$$\text{Компактность} = \frac{\text{Площадь Контура}}{\text{Площадь Компактной Формы С Тем Же Периметром}} \quad (5)$$

Для того, чтобы рассчитать индекс вероятности для каждого сегмента, значения для каждого измерения были рассчитаны для вручную выбранных сегментов со зданиями и без. Были выбраны случайным образом более двухсот участков со зданиями и без. Все выбранные сегменты являются результатом автоматической сегментации, а не оцифрованных зданий. Таким образом, выбранные сегменты представляют геометрию актуального результата автоматического процесса.

Для того, чтобы рассчитать вероятность контура в сегменте быть зданием или нет, каждый сегмент (в пределах выбранных участков) был визуально классифицирован. На основе вычисленных значений для каждого сегмента, были обобщены графики для сегментов со зданиями и без зданий.

На рис.1 показано распределение значений меры прямоугольности (на основе MBR) между сегментами со зданием и без зданий. Зеленый график отображает значения для сегментов зданий и красный для сегментов не-зданий. Из очевидных тенденций обоих графиков следует, что показатели

прямоугольности между 0,7-0,85 демонстрируют большую вероятность особенностей быть зданием. Значения ниже 0,6 указывают на большую вероятность быть особенностями не-здания.



Рис.1. Распределение значений Прямоугольности (MBR) для сегментов зданий и не-зданий

Рис. 2 иллюстрирует распределение значений меры прямоугольности, основанные на вычислениях моментов. График показывает отрицательную корреляцию, противоположные тенденции между сегментами зданий и не-зданий. Значения прямоугольности больше, чем 0,8, указывают на высокую вероятность для объекта быть зданием. Значения прямоугольности между 0,1-0,6, соответствуют более высокой вероятности быть не-зданием, чем зданием. Значение прямоугольности между 0,6-0,8 не может указать, является ли сегмент зданием или нет – сегмент со значением в этом диапазоне имеет одинаковую вероятность быть зданием или не-зданием.



Рис.2. Распределение значений Прямоугольности (моменты) для сегментов зданий и не-зданий

Рис.3 иллюстрирует распределение значений округлости сегментов зданий и не-зданий. График показывает, что значения эллиптичности больше, чем 0,85, указывают на особенности быть зданием с более высокой вероятностью. Значения округлости ниже, чем 0,6, указывают с высокой вероятностью на не-здание.

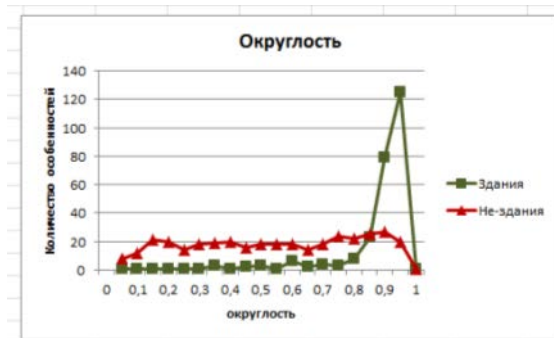


Рис. 3 Распределение значений Округлости для сегментов зданий и не-зданий

Рис.4 иллюстрирует распределение значений выпуклости\_Р. Наблюдается аналогичная тенденция значений для зданий и не-зданий: значения выпуклости ниже, чем 0,8, может указывать на особенность не-здания с большой вероятностью. Значения выпуклости больше, чем 0,95, может указывать на особенности здания. Значения выпуклости в диапазоне от 0,8-0,95 показывает немного более высокую вероятность сегментов не-зданий, но с растущей тенденцией быть сегментом зданий. Из-за подобной тенденции, второй показатель выпуклости был рассчитан на основе исходного ограничивающего многоугольника, а затем обобщенного многоугольника. Распределение значений для второй меры – выпуклости\_Р – показано на рис.5.



Рис. 4. Распределение значений Выпуклости (обобщенный многоугольник) для сегментов зданий и не-зданий

Индекс выпуклости  $O$ , график которого приведен на рис. 5, показывает аналогичную тенденцию между классами зданий и не-зданий. Из этого можно сделать вывод о том, что очень низкие значения, меньше чем 0,3, могут указывать на особенности не-здания. Из-за очевидной близости значений между ординатами графиков, этот показатель не использовался для достоверных вычислений.



Рис. 5. Распределение значений Выпуклости (Исходный многоугольник) для сегментов зданий и не-зданий

Третья мера выпуклости была вычислена, исходя из площади выпуклой оболочки и площади обобщенного многоугольника. Распределение для площади, основанной на мере выпуклости ( $Выпуклость\_S$ ), показано на рис. 6.



Рис. 6. Распределение значений Выпуклости (соотношение площадей) для сегментов здания и не-здания

Выпуклость, вычисленная как соотношение площади, предоставляет подробную информацию о сегментах зданий и не-зданий (рис. 6). Значения более, чем 1,5, указывают на высокую вероятность того, что сегмент не содержит изображения здания. Значения между 1,35-1,5 указывают на более высокую вероятность быть особенностью не-здания и значения ниже 1,35 могут указывать на сегмент здания с большей вероятностью.

График на рис.7 иллюстрирует распределение меры монолитности. График показывает очень схожие тенденции (с незначительными различиями) между особенностями здания и не-здания. Следовательно, меру монолитности нерационально использовать в геометрическом анализе сегментов.



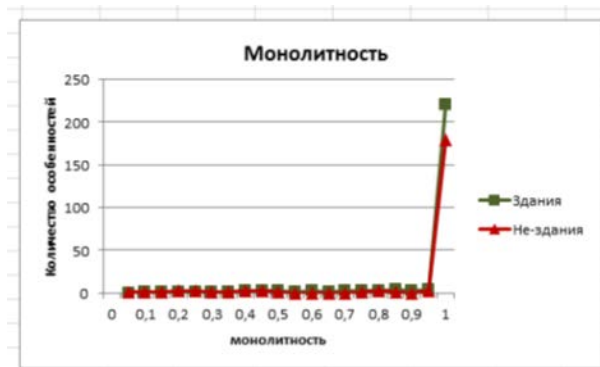


Рис. 7. Распределение значений Монолитности для сегментов здания и не-здания

Мера компактности, як показано на рис. 8, указує на те, що дуже високі значення (0,85-1) представляють особливості будівель з більшою ймовірністю. Значення компактності нижче, ніж 0,75, указують на особливості не-будівель.



Рис. 8. Распределение значений Компактности для сегментов зданий и не-зданий

Значення компактності нижче, ніж 0,75, указують на особливості не-будівель. Значення компактності між 0,6 і 0,9 мають більш високу ймовірність представляти будівель. Наблюдаються зростаючі відхилення для значень між 0,5-0,6 для будівель, хоча відповідний графік розташований нижче точки перетину обох графіків. Значення Компактності нижче, ніж 0,5 показують більш високу ймовірність представляти особливості не-будівель.

### Выводы

На основі значень різних показувачів і тенденцій на графіках, кожен діапазон значень отримав значення ймовірності. Ймовірнісні значення для всіх показувачів були об'єднані в одне довірливе значення, яке відображає являється ли сегмент будівелью чи ні. Дослідження показали, що для верифікації сегментів будівель та не-будівель і елімінації сегментів не-будівель найбільш придатні такі міри як Прямокутність, Округлість, Випуклість на основі обобщенного багатокутника, Випуклість на основі співвідношення площаді та Компактність. Використання такої міри як Монолітність не являється інформативною.

### Список использованной литературы

1. Dongyue Chen. Shadow-based Building Detection and Segmentation in High-resolution Remote Sensing Image / Dongyue Chen, Shibo Shang, and Chengdong Wu // Journal of multimedia. — 2014. — Vol. 9. — № 1. — P. 181-187.
2. Rosin, P.L. Measuring shape: ellipticity, rectangularity, and triangularity / P.L. Rosin // Mach. Vision Appl. — 2003. — Vol. 14. — № 3. — P. 172-184.
3. Суцєвський Д.В. Геометричні моделі ідентифікації та візуалізації змін штучних об'єктів земної поверхні за різночасовими зображеннями : дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / Д.В. Суцєвський; Дніпропетровський національний університет ім.Олеса Гончара. — Дніпропетровськ, 2011. — 147 с.
4. Соколова Н.О. Автоматизована екстракція будівель з фотографічних зображень / Н.О. Соколова // Тезиси доповідей I Міжнародного науково-практичного форуму "Наука і бізнес" (г. Дніпропетровськ, 29 червня-3 липня 2015 р.). — Дніпропетровськ-Київ-Чернівці, 2015. — С. 259-262.

УДК 629.7

А.В. СОХАЦЬКИЙ

Інститут транспортних систем та технологій НАН України  
 І.С. ІВАНІСЕНКО, Є.М. РОМАНЕНКО  
 Університет митної справи та фінансів

## ДО ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ КОМПОНУВАЛЬНОЇ СХЕМИ ЕКРАНОПЛАНУ

*Розглядається питання оптимізації компоувальної схеми перспективного транспортного апарату з використанням екранного ефекту. Пропонується, як критерії оцінки досконалості аеродинамічного компоування розглядати стартову масу транспортного апарату та функцію енергетичних витрат на переміщення транспортного апарату. Для оцінки впливу вектору параметрів на цільову функцію, яка відображає основну мету транспортного апарату, пропонується використати метод оснований на лінеаризації малих прирощень критерію оцінки.*

*Ключові слова:* транспортні апарати, аеродинамічні компоування, оптимізація компоувань.

А.В. СОХАЦЬКИЙ

Інститут транспортных систем и технологий НАН Украины  
 И.С. ИВАНИСЕНКО, Е.М. РОМАНЕНКО  
 Университет таможенного дела и финансов

## К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ КОМПОНОВОЧНОЙ СХЕМЫ ЭКРАНОПЛАНА

*Рассматривается вопрос оптимизации компоновочной схемы перспективного транспортного аппарата с использованием экранного эффекта. Предлагается, в качестве критерия оценки совершенства аэродинамической компоновки рассматривать стартовую массу транспортного аппарата и функцию энергетических затрат на перемещение транспортного аппарата. Для оценки влияния вектора параметров на целевую функцию, которая отражает основную цель транспортного аппарата, предлагается использовать метод базирующийся на линейизации малых приращений критерия оценки.*

*Ключевые слова:* транспортные аппараты, аэродинамические компоновки, оптимизация компоновок.

A.V. SOKHATSKY

Institute of Transport Systems and Technologies of Ukrainian National Academy of Science  
 I.S. IVANYSENKO, Y.M. ROMANENKO  
 University of Custom Business and Finances

## TO THE PROBLEM OF OPTIMIZATION OF THE CONFIGURATION SCHEME ON AIR-CRAFT-IN-GROUND-EFFECT

*The problem of optimization of an configuration scheme on air-craft-in-ground-effect. It is offered, in the capacity of measure of an estimation of perfection of an aerodynamic configuration to consider a launching mass of the transport vehicle and a function of power expenditures on movement of the transport vehicle. For an estimation of effect of a vector of parameters on object function which reflects the main purpose of the transport vehicle it is offered to use a method basing on a linearization of small increments of measure of an estimation.*

*Keywords:* transport vehicles, aerodynamic arrangements, optimization of arrangements.

### Вступ

Необхідність створення високоефективної транспортної техніки є назрілою потребою сьогодення. Такі транспортні апарати повинні мати кращі технічні характеристики. Вважається, що вінцем розвитку є транспортний літак Ан-225. Подальший розвиток високу ефективність ніж традиційні. Істотно покращити вантажопідйомність сучасної транспортної техніки може стати створення перспективних транспортних апаратів, що працюють на нових фізичних принципах. Це є надзвичайно складна задача. Одним з важливих питань при їх проектуванні є формування оптимальної компоувальної схеми.

В науковій літературі найбільш повно вивчені задачі вибору компоувальної схеми за одним критерієм[1,2]. В більшості реальних задач необхідно урахувати зразу кілька оптимізаційних критеріїв [1,2]. Тому виникає питання, яка форма буде оптимальною. Складність розв'язування задач з кількома критеріями зв'язана з тим, що само поняття оптимальності має неоднозначний характер. Одним з основних підходів дослідження багатокритеріальних задач є приведення їх до однокритеріальних шляхом згортання кількох критеріїв в один скалярний. Це наступні види згорток: лінійна, мінімаксна. Мінімізації відхилень,

метод ідеальної точки, виділення головного критерію, і т.п. Застосування різних видів згорток приводить до різних розв'язків однієї варіаційної задачі. Кінцевий вибір варіанту про прийняття рішення залежить від фізичного змісту задачі та пріоритетів особи, що приймає рішення.

#### Постановка завдання

При постановці задачі формування раціональної компонуальної схеми перспективного транспортного апарату одним з основних питань стає вибір критерію оцінки її досконалості  $f(x)$ . Цей критерій повинен як можна повніше характеризувати створюваний об'єкт і повинен мати конкретний фізичний зміст. Але вимогу повноти важко задовольнити за допомогою одного єдиного скалярного показника, який може описувати певну властивість об'єкту проектування. В зв'язку з цим приходиться розглядати сукупність показників, кожен із яких має наглядну фізичну інтерпретацію і дозволяє оцінити якість оптимального рішення  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  з різних точок зору. Таким чином необхідність забезпечення функціональної повноти показників, що конкретизують оптимальні властивості створюваного об'єкту за умови їх фізичної наочності призводить до багатокритеріальності, яка витікає з постановки задачі оптимального проектування.

Багатокритеріальні задачі мають ряд властивостей, що затрудняє їх розв'язування: багатокритеріальність, трудомісткість обчислень цільових функціоналів з обмеженнями, на гладкість та яристість функцій, що входять в задачу. В силу вказаних причин багатокритеріальні задачі теорії оптимальних форм вивченні мало [3,4].

Суперечливість багатьох вимог, що ставляться до компонуальної схеми транспортного апарату, не дозволяють виробити однозначний критерій оцінки її досконалості. Проте досягнення теоретичної й експериментальної аеродинаміки, розвиток методів математичного моделювання, аеродинамічного розрахунку й обробки результатів експерименту зможуть надати можливість розробляти раціональні форми транспортних апаратів залежно від його призначення й режимів руху.

#### Результати досліджень

Задача формування аеродинамічного компонування транспортного апарату формується наступним чином: знайти такий вектор параметрів, що характеризує форму, структуру та розміри, які б забезпечували задоволення вимог та обмежень, що висуваються до транспортного апарату, та досягнення оптимального значення цільової функції.

Для оцінки досконалості компонуальної схеми необхідно використовувати векторну цільову функцію. Таку задачу називають задачею векторної оптимізації. Формування раціональної компонуальної схеми транспортного апарату вимагає розв'язування математичної задачі векторної оптимізації: визначення таких геометричних, вагових та інерційних характеристик, які б забезпечили найкращі показники цілого ряду критеріїв технічної досконалості. Таким чином необхідно розв'язати багатокритеріальну задачу оптимізації - вибору деякого рішення із множини припустимих рішень із урахуванням ряду критеріїв оптимальності.

Формально така багатокритеріальна задача, як модель задається у вигляді:

$$\begin{cases} F(x) \rightarrow \max, \\ x \in D, \end{cases} \quad (1)$$

де  $D$  - множина припустимих рішень,  $F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$  - векторна функція векторного аргументу  $x$ ,  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$  - скалярні функції векторного аргументу  $x$ , кожна із яких є математичним вираженням одного критерію оптимальності.

Очевидно, що задача (1) не належить до класу задач математичного програмування, тому що моделі цього класу задач містять завжди тільки одну цільову функцію векторного аргументу

$$\begin{cases} f_1(x) \rightarrow \max, \\ f_2(x) \rightarrow \max, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_k(x) \rightarrow \max. \\ x \in D. \end{cases} \quad (2)$$

Сутність поставленої задачі вибору раціонального аеродинамічного компонування полягає в знаходженні такого її припустимого розв'язку, коли вибір  $\{x \in D\}$  максимізує (мінімізує) значення всіх цільових функцій  $f_i(x)$ ,  $i=1, k$ . Існування рішення, буквально, що максимізує усі цільові функції, є малоюмовірним [5-7]. Необхідно розшукувати найбільш ефективне рішення, яке буде задовольняти усі критерії оптимальності.

Його пошук полягає в тому, що оптимальне рішення варто шукати тільки серед елементів множини Парето - множини  $P(D)$  [5]. У протилежному випадку завжди знайдеться точка  $x$ , що виявляється більш кращою незалежно від розміщення пріоритетів і щодо важливості окремих частинних критеріїв.

Принцип Парето дозволяє звзунти клас можливих претендентів на остаточне рішення й виключити з розгляду свідомо неконкурентноспроможні варіанти. Остаточний вибір слід здійснювати на основі додаткової інформації з урахуванням експлуатаційних, технологічних, конструкційних та інших вимог до транспортного апарату. До їх числа відносяться: геометричні характеристики; інерційно масові та вагові характеристики; аеродинамічні характеристики; характеристики силової установки; стартові характеристики; компоновальні параметри [8]. Взагалі формування аеродинамічної компоновки є надзвичайно складною задачею. Так наприклад повна матриця рішень з вибору варіантів компонування сучасного маневреного літака складає більше  $13 \cdot 10^6$  варіантів [8].

Вибір єдиного критерію ефективності є малоімовірним і необхідно розв'язувати багатокритеріальну задачу. Для її розв'язування необхідно прийняти ряд визначень.

Визначення 1: Формування аеродинамічного компонування перспективного транспортного апарату з використанням екранного ефекту – це задача визначення його форми, геометричних, масових та інерційних параметрів які забезпечують досягнення поставленої мети.

Визначення 2: Концепцією перспективного транспортного апарату з використанням екранного ефекту будемо називати вектор частинних критеріїв ефективності, що визначаються його цільовим призначенням.

Визначення 3: Перелік частинних критеріїв ефективності та межі зміни значень вагових коефіцієнтів будемо називати простором концепції створюваного перспективного транспортного апарату, якщо ж значення вагових коефіцієнтів визначені однозначно - будемо називати вектором концепції.

До характеристик транспортного апарату, які необхідно оптимізувати необхідно віднести:

- аеродинамічну якість  $c_y/c_x \geq K_{prog}$  ;
- мінімальний лобовий опір  $c_x \leq c_{x\ prog}$  ;
- максимальний коефіцієнт піднімальної сили  $c_{y\ prog\ a} \leq c_y \leq c_{y\ prog\ b}$  ;
- критерії статичної стійкості  $m_z^\alpha < 0$ ,  $m_y^\beta < 0$ ,  $m_x^\gamma < 0$  ;
- критерії поздовжньої динамічної стійкості короткоперіодичного руху  $\mu_{\min\ a} \leq \mu \leq \mu_{\max\ b}$  та довгоперіодичного руху  $\mu_{V\ \min\ a} \leq \mu_V \leq \mu_{V\ \max\ b}$  ;
- критерії бокової динамічної стійкості  $p_{1,2a} \leq p_{1,2} \leq p_{1,2b}$ ,  $\xi_{1,2a} \leq \xi_{1,2} \leq \xi_{1,2b}$  ;
- співвідношення максимальних амплітуд кутових швидкостей крену та рискання  $|\omega_x|_{\max} / |\omega_y|_{\max} \leq \kappa_b$ ,  
 $\kappa = |\omega_x|_{\max} / |\omega_y|_{\max}$ .

Для оцінки впливу вектору параметрів на цільову функцію, яка відображає основну мету транспортного апарату необхідно використати метод оснований на лінеаризації малих прирощень критерію оцінки

$$da = \frac{\partial a}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial a}{\partial i_2} di_2 + \dots + \frac{\partial a}{\partial i_n} di_n, \quad (3)$$

де  $a$  - критерій оцінки,  $i_1, i_2, \dots, i_n$  - параметр.

Вважаючи, що диференціали і скінченні прирощення еквівалентні вираз (3) можна записати

$$\Delta a = \frac{\partial a}{\partial i_1} \Delta i_1 + \frac{\partial a}{\partial i_2} \Delta i_2 + \dots + \frac{\partial a}{\partial i_n} \Delta i_n, \quad (4)$$

де  $a$  - критерій оцінки,  $i$  - параметр.

Проведений аналіз впливу аеродинамічних критеріїв на динаміку руху транспортного апарату показав, що як критерії оцінки аеродинамічного компонування доцільно прийняти стартову масу транспортного апарату та функцію енергетичних витрат на його переміщення по наперед заданій траєкторії. Вважаючи, що величина корисного навантаження та крейсерська швидкість задані і є незмінною умовою задачі розраховуємо вплив зміни параметрів аеродинамічного компонування на прирощення стартової маси  $m_0$  та функції енергетичних затрат на переміщення транспортного апарату  $E_0$ .

$$\Delta m_0 = \frac{\partial m_0}{\partial m_{add}} \Delta m_{add} + \frac{\partial m_0}{\partial c_x} \Delta c_x + \frac{\partial m_0}{\partial K} \Delta K + \frac{\partial m_0}{\partial m_x^\gamma} \Delta m_x^\gamma + \frac{\partial m_0}{\partial m_y^\beta} \Delta m_y^\beta + \frac{\partial m_0}{\partial m_z^\alpha} \Delta m_z^\alpha + \frac{\partial m_0}{\partial \mu} \Delta \mu + \dots + \frac{\partial m_0}{\partial i_n} \Delta i_n \quad (5)$$

$$\Delta E_0 = \frac{\partial E_0}{\partial m_{add}} \Delta m_{add} + \frac{\partial E_0}{\partial c_x} \Delta c_x + \frac{\partial E_0}{\partial K} \Delta K + \frac{\partial E_0}{\partial m_x^\gamma} \Delta m_x^\gamma + \frac{\partial E_0}{\partial m_y^\beta} \Delta m_y^\beta + \frac{\partial E_0}{\partial m_z^\alpha} \Delta m_z^\alpha + \frac{\partial E_0}{\partial \mu} \Delta \mu + \dots + \frac{\partial E_0}{\partial i_n} \Delta i_n \quad (6)$$

Складові правої частини (5,6) є градієнти стартової маси та функції енергетичних затрат на переміщення транспортного апарату:

$$\frac{\partial m_0}{\partial m_{add}} \Delta m_{add} = grad m_{0\partial\partial} \quad - \text{ градієнт у зв'язку з появою додаткової маси}$$

$$\frac{\partial m_0}{\partial c_x} \Delta c_x = grad m_{0c_x} \quad - \text{ градієнт у зв'язку з появою додаткового коефіцієнту опору; та інші.}$$

Для визначення похідних  $\partial m_0 / \partial K$ ,  $\partial m_0 / \partial c_x$ ,  $\partial m_0 / \partial m_x^\gamma$ ,  $\partial m_0 / \partial m_y^\beta$ ,  $\partial m_0 / \partial m_z^\alpha$ ,  $\partial E_0 / \partial K$ ,  $\partial E_0 / \partial c_x$ ,  $\partial E_0 / \partial m_x^\gamma$ ,  $\partial E_0 / \partial m_y^\beta$ ,  $\partial E_0 / \partial m_z^\alpha$ ,

$\partial E_0 / \partial m_z^\alpha$  необхідно використовувати як аналітичні, числові, так експериментальні методи.

Стартова маса транспортного апарату представляє собою суму

$$m_0 = m_{пуст} + m_{ком.нав.} + m_{с.у.} + m_{служ.} + m_{дод.}, \quad (7)$$

де  $m_0$  - повна стартова маса транспортного апарату,  $m_{пуст}$  - маса пустого транспортного апарату без системи магнітної левітації,  $m_{с.у.}$  - маса силової установки,  $m_{ком.нав.}$  - маса корисного навантаження,  $m_{служ.}$  - маса службового навантаження,  $m_{дод.}$  - маса додаткового обладнання.

Енергетичні затрати необхідно визначати з урахуванням граничних потужностей бортових джерел енергії

$$E_0 \leq F(N_{ВД}), \quad (8)$$

де  $F(N_{ВД})$  - функція від граничних потужностей бортових джерел енергії.

Відомо, що покращення одних технічних характеристик транспортного апарату може відбуватися за рахунок погіршення інших. Тому дві величини будемо вважати еквівалентними, якщо одночасна їх зміна призводить до рівного по величині, але протилежного за знаком зміни критерію оцінки досконалості аеродинамічного компонування

$$\sum_{i \geq 2} \Delta a_i = 0, \quad (9)$$

$a$  - критерій оцінки,  $i$  - число параметрів.

При проведенні проектних рішень, щодо покращення аеродинамічних характеристик може зростати маса конструкції транспортного апарату. Вагові та енергетичні еквіваленти аеродинамічних параметрів запишуться:

$$\begin{aligned} \Delta a_m + \Delta a_K &= 0; \\ \Delta a_m + \Delta a_{X_0} &= 0; \\ \Delta a_m + \Delta a_{c_{x0}} &= 0; \\ \Delta a_m + \Delta a_{m_x^\gamma} &= 0; \\ \Delta a_m + \Delta a_{m_y^\beta} &= 0; \\ \Delta a_m + \Delta a_{m_z^\alpha} &= 0; \\ \dots & \\ \Delta a_m + \Delta a_{i_n} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Задача знаходження вагового або енергетичного еквівалента аеродинамічного параметру полягає в знаходженні його раціональної зміни при якій величина критерію оцінки транспортного апарату залишається незмінною.

$$\begin{cases} (\Delta m_0)_m + (\Delta m_0)_i = 0, \\ (\Delta E_0)_m + (\Delta E_0)_i = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Вираз (11) можна записати

$$\begin{cases} \Delta m_0 = \kappa_m \Delta m_{\text{додат}} + \kappa_i \Delta i, \\ \Delta E_0 = \kappa_m \Delta E_{\text{додат}} + \kappa_i \Delta i. \end{cases} \quad (12)$$

Припустимо, що  $(\Delta m_0)_m = \kappa_E \Delta m_{\text{додат}}$ ,  $(\Delta E_0)_m = \kappa_m \Delta E_{\text{додат}}$ ;  $(\Delta m_0)_i = \kappa_i \Delta i$ ,  $(\Delta E_0)_i = \kappa_i \Delta i$ .

Тоді еквівалент покращення аеродинамічного параметру

$$\begin{cases} (\Delta m_0)_{\text{додат}} = -(\kappa_i / \kappa_m) \Delta i, \\ (\Delta E_0)_{\text{додат}} = -(\kappa_i / \kappa_E) \Delta i. \end{cases} \quad (13)$$

Умова доцільності покращення аеродинамічного параметру за рахунок збільшення маси вузлів та деталей запишеться

$$\begin{cases} (\Delta m_0)_{\text{додат}} \leq -(\kappa_i / \kappa_m) \Delta i, \\ (\Delta E_0)_{\text{додат}} \leq -(\kappa_i / \kappa_E) \Delta i. \end{cases} \quad (14)$$

При порівнянні кількох варіантів критерієм величини зниження стартової маси транспортного апарату буде умова (12). Формування раціональних параметрів транспортного апарату проводиться на основі методів багатопараметричної оптимізації та ідей прямих варіаційних методів. Прорахунок ряду варіантів дозволить одержати масиви стартових мас транспортного апарату та функції енергетичних затрат на його переміщення (рис.1). Мінімізація маси та функції енергетичних затрат дозволяє вибрати компонувальну схему з оптимальними технічними параметрами.

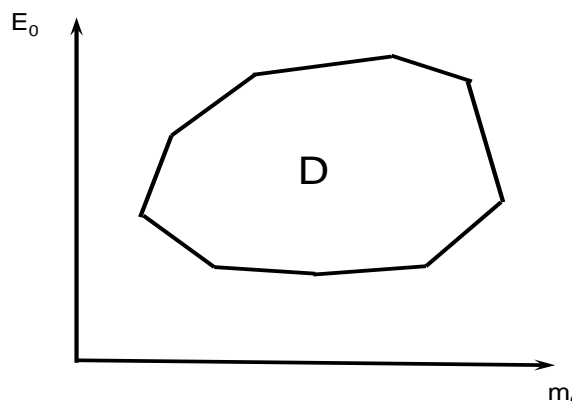


Рис.1. Область зміни параметрів набору компонувальних схем

#### Висновки

Запропоновано математичну модель та критерії оцінки для оптимізації компонувальної схеми екраноплана.

#### Список використаної літератури

1. Крайко А.Н. Теория аэродинамических форм близких к оптимальным / А.Н. Крайко, Д.Е. Пудовников, Г.Е. Якунина. – М.: Янус, 2001. – 132с.
2. Теория оптимальных аэродинамических форм. Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969.– 507с.
3. Сохацький, А.В. Теоретичні основи створення аеродинамічних компонувань перспективних швидкісних транспортних апаратів : дисертація доктора технічних наук / А.В. Сохацький. –Д., 2010. – 380 с
4. Кошечев А.Б. Современное состояние и перспективы развития аэродинамики / А.Б. Кошечев // Аэрокосмическое обозрение -№5-2008-с.54-57.
5. Гил Ф. Практическая оптимизация. Пер. с англ./ Ф. Гил, У. Мюррей, М. Райт. –М.: Мир, 1985. –509с.
6. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации,–М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. –304с.
7. Завалицин Д.С., Завалицин С.Т. Динамическая оптимизация обтекания / Д.С. Завалицин, С.Т. Завалицин –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. –224с.
8. Егер С.М. Основы автоматизированного проектирования самолетов. / С.М. Егер, Н.К. Лисейцев, О.С. Самойлович –М.: Машиностроение, 1986.–232с.

УДК 656.1(075.8)

А.В. УСОВ, Е.Ю. КУТЯКОВ

Одесский национальный политехнический университет

### РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЗОНЫ ТЕКУЩЕГО РЕМОНТА АВТОТРАНСПОРТНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ С УЧЕТОМ ИНФОРМАЦИИ ОБ ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ НАДЕЖНОСТИ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

*Представлены основные результаты математического моделирования функционирования зоны текущего ремонта в условиях автотранспортного предприятия. Предложена методика расчета вероятностных параметров функционирования зоны текущего ремонта, а также изложены результаты практического применения предложенной методики.*

*Ключевые слова: техническая эксплуатация, транспортные средства, посты текущего ремонта, оптимизация, математическая модель.*

А.В. УСОВ, Е.Ю. КУТЯКОВ

Одеський національний політехнічний університет

### РОЗРАХУНОК ІМОВІРНІСНИХ ПАРАМЕТРІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ ЗОНИ ПОТОЧНОГО РЕМОНТУ АВТОТРАНСПОРТНОГО ПІДПРИЄМСТВА З УРАХУВАННЯМ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ЕКСПЛУАТАЦІЙНУ НАДІЙНІСТЬ РУХОМОГО СКЛАДУ

*Представлені основні результати математичного моделювання функціонування зони поточного ремонту в умовах автотранспортного підприємства. Запропоновано методику розрахунку імовірнісних параметрів функціонування зони поточного ремонту, а також викладені результати практичного застосування запропонованої методики.*

*Ключові слова: технічна експлуатація, транспортні засоби, пости поточного ремонту, оптимізація, математична модель.*

A.V. USOV, E.J. KUTYAKOV

Odessa National Polytechnic University

### THE CALCULATION OF THE PROBABILITY PARAMETERS OF THE ZONE OPERATION MAINTENANCE OF MOTOR TRANSPORT ENTERPRISE, TAKING INTO ACCOUNT INFORMATION ON THE OPERATIONAL RELIABILITY OF ROLLING STOCK

*The main results of mathematical modelling of the functioning of the current area under repair of motor transport enterprise are presented. The method of calculating the probability parameters of the current functioning of the repair area is proposed, as well the results of the practical application of the proposed method are described.*

*Keywords: technical operation, vehicles, positions maintenance, optimization, mathematical model.*

#### Постановка проблемы

Зона текущего ремонта (ТР) предназначена для восстановления работоспособности единиц подвижного состава автопарка. В соответствии с этим предназначением на зону ТР поступают транспортные единицы с явными признаками неисправностей, характер которых исключает возможность безопасной и/или экономически целесообразной эксплуатации данной единицы. Таким образом, степень загруженности зоны ТР зависит от интенсивности наступления отказов транспортных единиц подвижного состава автопарка, т.е. от их эксплуатационной надежности.

#### Анализ последних исследований и публикаций

В свою очередь практика показывает, что отказ автотранспортного средства (АТС), как сложной технической системы, является событием случайным, а процесс перехода АТС из работоспособного в неработоспособное состояние представляет собой случайный процесс [1–3]. Это означает, что количество заявок на ремонт, а следовательно, и объем работ зоны ТР являются случайными величинами.

Основными характеристиками, определяющими производительность зоны ТР является количество постов  $R$ , а также количество производственных рабочих  $T$ , работающих на зоне. Численные значения этих параметров при проектировании нового автотранспортного предприятия (АТП) определяются в ходе т.н. технологического расчета.

Анализируя существующие методы технологического расчета, несложно убедиться, что основные параметры зоны ТР являются функцией от нескольких переменных, в частности, от среднесуточного пробега, нормативных пробегов до ТО, нормативных трудоемкостей соответствующих видов работ,

численности автопарка и его возрастного состава [4–5]. При этом какие-либо сведения об эксплуатационной надежности подвижного состава в расчете не используются. На практике это приводит к тому, что в процессе функционирования АТП наблюдается либо недозагруженность зоны ТР, либо образование очереди АТС, ожидающих ремонт, а чаще всего и то, и другое одновременно. Во всех случаях работу зоны ТР можно считать неэффективной.

Несовершенство существующей методики технологического расчета АТП в целом и зоны ТР в частности, заключающееся в невозможности использования статистической информации об эксплуатационной надежности подвижного состава на этапе технологического проектирования АТП (ввиду отсутствия таковой информации на данном этапе), а также случайный характер формирования объемов работ по текущему ремонту подвижного состава, обусловили объективную необходимость решения задачи, связанной с разработкой методов оптимизации производственных мощностей зоны ТР непосредственно во время функционирования АТП с использованием методов вероятностного моделирования.

Для решения изложенной задачи, на начальном этапе необходимо разработать математический инструментарий определения фактических (не расчетных) параметров функционирования зоны ТР в условиях транспортного парка постоянного состава (как марочного так и списочного) на основе методов вероятностного моделирования с использованием актуальной статистической информации о надежности подвижного состава.

### Формулирование цели исследования

Исходя из изложенного выше следует сформулировать, что целью настоящего исследования является разработка методики вероятностного определения параметров функционирования зоны ТР с использованием статистических данных, характеризующих эксплуатационную надежность подвижного состава.

### Изложение основного материала исследования

Методика определения параметров функционирования зоны ТР. Для достижения поставленной цели предлагается рассматривать зону ТР АТП как замкнутую систему массового обслуживания, для которой, по сравнению с обычной системой массового обслуживания, характерна зависимость интенсивности входящего потока заявок (автомобилей) от состояния системы (от количества автомобилей, уже находящихся в зоне ТР на ремонте). Функционирование такой системы имеет следующие особенности: в процессе эксплуатации автопарка с  $N$  автомобилями в случайные моменты времени наступают отказы этих автомобилей; количество  $k$  отказавших автомобилей в произвольный момент времени случайно; автомобиль после наступления отказа выводится из эксплуатации и направляется в зону ТР с  $R$  постами (при этом  $R < N$ ), где на одном из постов происходит восстановление его работоспособности; при поступлении автомобиля в зону ТР в момент, когда все посты заняты, автомобиль становится в очередь, длина которой не превышает  $N - R$ . Описанная система имеет следующие состояния:

$S_0 - R-0$  постов зоны ТР свободны,  $N-0$  автомобилей находятся в работоспособном состоянии;

$S_1 - R-1$  постов зоны ТР свободны,  $N-1$  автомобилей находятся в работоспособном состоянии, один автомобиль находится в зоне ТР;

$S_k$  (при  $R > k$ ) –  $R-k$  постов зоны ТР свободны,  $N-k$  автомобилей находятся в работоспособном состоянии,  $k$  автомобилей находится в зоне ТР;

$S_k$  (при  $R < k$ ) –  $k-R$  автомобилей находятся в очереди в зоне ТР,  $N-k$  автомобилей находятся в работоспособном состоянии,  $k$  автомобилей находится в зоне ТР;

$S_N - N-R$  автомобилей находятся в очереди в зоне ТР,  $N$  автомобилей находится в зоне ТР.

Поток входящих заявок на ремонт является простейшим пуассоновским потоком отказов с параметром  $\lambda$ . Исходящий поток восстановленных автомобилей характеризуется интенсивностью  $\mu$ , которая представляет собой величину, обратную среднему времени, в течение которого автомобиль занимает один пост ТР. Численные значения параметра  $\lambda$  и интенсивности  $\mu$  определяются в результате статистической обработки сведений об эксплуатационной надежности подвижного состава, а именно в результате обработки сведений о моментах наступления отказов транспортных единиц (параметр  $\lambda$ ), а также о продолжительности (трудоемкости) восстановления работоспособности отказавшей транспортной единицы (интенсивность  $\mu$ ).

Если принять, что  $\lambda$  – интенсивность потока требований в расчете на одну единицу подвижного состава, а  $\mu$  – интенсивность восстановления одной отказавшей единицы подвижного состава, то для автопарка, находящегося в состоянии, при котором в зоне ТР находится  $k$  автомобилей получим:

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k) \cdot \lambda & 0 \leq k \leq N \\ 0 & k > N \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k \cdot \mu & 0 \leq k \leq R \\ R \cdot \mu & R \leq k \leq N \\ 0 & k > N \end{cases}$$

Система алгебраических уравнений, определяющая работу описанной выше системы в стационарном режиме, имеет вид:



$$\begin{cases} -\rho \cdot N \cdot P_0 + P_1 = 0 \\ (N-k+1)\rho \cdot P_{k-1} - [(N-k+1)\rho + k]P_k + (k+1)P_{k+1} = 0, & 0 < k < R \\ (N-k+1)\rho \cdot P_{k-1} - [(N-k+1)\rho + R]P_k + R \cdot P_{k+1} = 0, & R \leq k < N \\ \rho \cdot P_{N-1} - R \cdot P_N = 0 \end{cases}$$

Данная система имеет следующее решение:

$$P_k = \begin{cases} \frac{N! \cdot \rho^k}{k! \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & 0 \leq k \leq R \\ \frac{N! \cdot \rho^k}{R! \cdot R^{k-R} \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & R \leq k \leq N \end{cases} \quad (1)$$

В изложенных зависимостях  $\rho = \lambda/\mu$  – приведенная интенсивность отказов, безразмерная величина.

Величина  $P_0$  определяется из условия нормирования  $\sum_{k=0}^N P_k = 1$  полученных результатов по формулам системы (1) для  $P_k, k = 1, 2, \dots, N$ .

Зная вероятности нахождения системы в каждом из возможных состояний ( $P_0, P_k$ ) можно определить следующие вероятностные параметры функционирования зоны ТР:

- среднее число автомобилей в очереди на обслуживание:

$$L_q = \sum_{k=R}^N (k-R) P_k \quad (2)$$

- среднее число автомобилей, находящихся в зоне ТР (непосредственно на постах и в очереди):

$$L_s = \sum_{k=R}^N k \cdot P_k \quad (3)$$

- среднее число постов ТР, простаивающих из-за отсутствия работы:

$$\bar{R}_n = \sum_{k=0}^{R-1} (R-k) P_k \quad (4)$$

- коэффициент простоя автомобиля в очереди:

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} \quad (5)$$

- коэффициент использования автомобилей, находящихся в автопарке:

$$\alpha_2 = 1 - \left( \frac{L_s}{N} \right) \quad (6)$$

- коэффициент простоя постов ТР:

$$\alpha_3 = \frac{\bar{R}_n}{R} \quad (7)$$

- среднее время ожидания ремонта автомобилем в очереди:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\mu} \quad (8)$$

Таким образом, методика расчета вероятностных параметров функционирования зоны ТР сводится к следующему:

1. Предварительно определив численные значения параметра потока отказов ( $\lambda$ ), а также интенсивности восстановления автомобиля ( $\mu$ ), вычисляют с использованием системы уравнений (1) вероятности  $P_k$  нахождения зоны ТР в каждом из возможных состояний.

2. Учитывая, что сумма вероятностей всех возможных состояний зоны ТР равна единице (условие нормирования  $\sum_{k=0}^N P_k = 1$ ), определяют вероятность  $P_0$  нахождения зоны ТР в состоянии  $S_0$ .

3. С использованием полученных вероятностей  $P_0$  и  $P_k$  определяют по зависимостям (2–8) основные параметры функционирования зоны ТР.

Практическая реализация предложенной методики. С целью установления эффективности изложенной выше методики, была проведена ее апробация – расчет параметров функционирования зоны ТР АТП, входящего в состав ОАО Ковдорский горно-обогатительный комбинат.

В эксплуатации данного АТП находится 12 единиц подвижного состава, представленного карьерными самосвалами БелАЗ-75131, осуществляющих круглосуточный вывоз горной породы из карьерной области. Зона ТР состоит из двух постов, функционирующих круглосуточно.

На начальном этапе расчета параметров функционирования зоны ТР в соответствии с изложенной выше методикой определялись параметры эксплуатационной надежности автопарка.

Основанием для определения параметра потока отказов  $\lambda$  и интенсивности восстановления  $\mu$ , являлись выписки из технических карт каждой единицы подвижного состава, в которых фиксировались моменты наступления аварийных отказов, выраженные в пробеге данной транспортной единицы, а также время, затраченное на восстановления ее работоспособности. Анализ подвергались технические карты последних пяти лет эксплуатации данного подвижного состава.

В результате построения эмпирического распределения и статистической оценки его параметров было установлено, что интенсивность потока отказов автопарка из 12 самосвалов БелАЗ-75131 составляет  $\lambda=0,0018$  самосвалов в моточас, среднее время восстановления работоспособности одного самосвала  $t_{cp}=93,5$  моточаса, интенсивность восстановления  $\mu=1/t_{cp}=1/93,5=0,0107$  самосвалов в моточас.

После определения параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , в соответствии с предложенной методикой рассчитывались вероятности  $P_k$  нахождения зоны ТР в каждом из возможных состояний с использованием уравнения (1), вероятность  $P_0$  с использованием условия нормирования, а также основные параметры функционирования зоны ТР с использованием уравнений (2–8). Исходные данные и результаты расчетов сведены в таблицы, представленные ниже.

Таблица 1

**Исходные данные для расчета фактических параметров функционирования зоны ТР  
АТП ОАО Ковдорский горно-обогатительный комбинат**

Интенсивность потока отказов $\lambda$ , авто/моточас	0,0018
Интенсивность восстановления, $\mu$ , авто/моточас	0,0107
Количество постов, $R$	2
Количество автомобилей, $N$	12

Таблица 2

**Результаты расчета вероятностей  $P_k$  нахождения зоны ТР в каждом из возможных состояний  $S_k$   
при фактическом количестве постов  $R=2$**

$S_k$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$
$P_k$	0,107	0,217	0,201	0,169	0,128	0,086	0,051	0,026	0,011	0,003	0,001	$1,6 \times 10^{-4}$	$1,3 \times 10^{-5}$

Таблица 3

**Результаты расчета вероятностных параметров функционирования зоны ТР при фактическом  
количестве постов  $R=2$**

Наименование параметра функционирования	Численное значение параметра
Приведенная интенсивность потока отказов, $\rho$	0,17
Среднее число автомобилей в очереди в зоне ТР, $L_q$	1,12 автомобилей
Среднее число автомобилей находящихся в зоне ТР, $L_s$	2,68 автомобилей
Среднее число постов, протаивающих из-за отсутствия работы, $\bar{R}_n$	0,43
Коэффициент простоя автомобиля в очереди, $\alpha_1$	0,09
Коэффициент использования автомобиля, $\alpha_2$	0,78
Коэффициент простоя постов ТР, $\alpha_3$	0,22
Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди, $W_q$	66,48 моточасов

Как следует из таблиц, в результате расчета было установлено, что в процессе эксплуатации автопарка в зоне ТР в среднем находится 2,7 автомобилей, из них в очереди простаивают 1,1 автомобилей.

При этом среднее время нахождения одной единицы подвижного состава в очереди составляет 66,5 моточасов, т.е. 71% от среднего времени восстановления (93,5 моточасов) автомобиль находится в очереди в ожидании обслуживания. Учитывая данные обстоятельства, а также то, что коэффициент использования автомобиля составляет 78%, следует прийти к выводу, что фактические параметры функционирования рассматриваемой зоны ТР предоставляют значительное пространство для оптимизации ее работы.

Процесс оптимизации может быть реализован посредством последовательного расчета параметров функционирования зоны ТР при переменном количестве постов  $R=1,2,3$ , и т.д. с последующим выбором наиболее оптимального варианта и соответствующего ему  $R$ . Однако, сам процесс выбора оптимального количества постов ТР только лишь на основании параметров функционирования, предложенных в данной работе, не представляется возможным, поскольку эти параметры ( $L_q, L_s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, W_q$ ) не обладают достаточной информативностью об относительной эффективности функционирования зоны ТР. Предложенные параметры могут быть использованы только лишь для экспресс-оценки потенциала реструктуризации. Например, предложенная методика позволяет оценить, в каких пределах возможно сократить время простоя автомобиля в очереди в зоне ТР, но в то же время в результатах расчета не содержится какой-либо информации о целесообразности такого сокращения простоя. Поэтому принятие

решения о необходимости и целесообразности реструктуризации зоны ТР (увеличения или уменьшения количества постов) с использованием предложенной методики расчета параметров функционирования этой зоны, требует разработки дополнительного математического аппарата.

#### **Выводы**

1. Составлена вероятностная математическая модель работы зоны ТР в условиях АТП, которая учитывает сведения об эксплуатационной надежности подвижного состава.
2. Предложена методика расчета параметров функционирования зоны ТР с использованием составленной модели.
3. Изложены результаты практической реализации предложенной методики, в результате чего было установлено, что эта методика позволяет провести экспресс-оценку потенциала оптимизации зоны ТР по параметру количества постов.
4. Оптимизация зоны ТР с использованием предложенной методики требует разработки дополнительного математического аппарата, а также обоснования критериев оптимизации.

#### **Список использованной литературы**

1. Кузнецов Е.С. Техническая эксплуатация автомобилей / Е.С. Кузнецов, А.П. Болдин, Е.М. Власов. – М.: Наука, 2001. – 535с.
2. Лудченко О.А. Технічне обслуговування і ремонт автомобілів / О.А. Лудченко. – К.: Знання-Прес, 2003. – 511 с.
3. Малкин В.С. Техническая эксплуатация автомобилей: Теоретические и практические аспекты / В.С. Малкин. – М.: Издательский центр "Академия", 2009. – 288 с.
4. Напольский Г.М. Технологическое проектирование автотранспортных предприятий и станций технического обслуживания / Г.М. Напольский. – М.: Транспорт, 1993. – 271 с.
5. Марков О.Д. Станции технического обслуживания автомобилей / О.Д. Марков. – К: Кондор, 2008.– 536 с.

УДК 534.1

Ю.В. ЧОВНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

О.М. ШУТОВСКИЙ

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

## АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ: ЭФФЕКТЫ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ

*Предложена и обоснована дискретно-континуальная модель, позволяющая осуществлять анализ динамического поведения упругих элементов машин и конструкций. Рассмотрены эффекты волнообразования, вызванные движением источников.*

*Ключевые слова: анализ, динамика, упругость, машины, конструкции, волнообразование, движение, источники.*

Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

О.М. ШУТОВСЬКИЙ

Київський національний університет будівництва і архітектури

## АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН І КОНСТРУКЦІЙ: ЕФЕКТИ ХВИЛЕУТВОРЕННЯ, ВИКЛИКАНІ РУХОМ ДЖЕРЕЛ

*Запропонована й обґрунтована дискретно-континуальна модель, яка дозволяє здійснювати аналіз динамічної поведінки пружних елементів машин і конструкцій. Розглянуті ефекти хвилеутворення, викликані рухом джерел.*

*Ключові слова: аналіз, динаміка, пружність, машини, конструкції, хвилеутворення, рух, джерела.*

Y.V. CHOVNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

O.M. SHUTOVSKY

Kyiv National University of Constructions and Architecture

## ANALYSIS OF DYNAMIC BEHAVIOR OF ELASTIC ELEMENTS OF MACHINES AND CONSTRUCTIONS: EFFECTS OF WAVES' FORMATION CAUSED BY MOTION OF GENERATORS

*The discrete and continual model is based and proposed which gives one the possibility to analyze the dynamic behavior of machines' and constructions' elastic elements. The effects of waves' formation due to the motion of these elements (so-called generators) are discussed.*

*Key words: analysis, dynamic, elasticity, machines, constructions, waves' formation, motion, generator.*

### Постановка проблемы.

Многие широко известные в классической физике волновые эффекты практически не учитываются при анализе динамического поведения упругих систем. Отчасти это, по-видимому, объясняется тем, что особенности проявления волновых эффектов в ситуациях, типичных для динамики машин, остаются неизученными, другими словами, отсутствует элементарная культура знаний о волнах в приложениях к задачам машиноведения. В данной работе полезность именно таких знаний для решения технических проблем продемонстрирована на ряде конкретных примеров анализа динамического поведения упругих элементов машин и конструкций.

### Анализ последних исследований и публикаций.

Исследования, предпринятые в указанном направлении [1-19], углубили понимание многих явлений, и позволили увидеть пути решения ряда актуальных технических проблем. Так, например, оказывается, что движение объектов по направляющим (подвесные канатные дороги, грузовые тележки мостовых кранов и пр.), вообще говоря, сопровождается волнообразованием. При этом посредником преобразования энергии поступательного движения объекта в энергию излучения является сила давления упругих волн, которая, как оказалось, во многих случаях даёт важнейший вклад в результирующую силу сопротивления движению. Причём этот вклад может быть как положительным, так и отрицательным.

Например, ярким представителем в этом отношении является хорошо изученный в классической физике эффект Доплера. Частоты колебаний упругой системы, вынуждаемые равномерно движущимся

$x = v \cdot t$  гармоническим источником, смещены по отношению к частоте источника  $\Omega$ . Смещение частоты находится из кинематического инварианта:

$$\omega - k \cdot v = \Omega, \tag{1}$$

выражающего равенство фаз возбуждаемых волн фазе источника и дисперсионного уравнения:

$$f(\omega, k) = 0, \tag{2}$$

связывающего частоты  $\omega$  и волновые числа  $k$  возможных волн в системе.

В неограниченных системах из всех решений (1), (2) реализуются только те, которые удовлетворяют требованию ограниченности смещений на бесконечности ( $x \rightarrow \pm\infty$ ):

$$\text{Im}k > 0 \text{ при } x < v \cdot t, \text{ Im}k < 0 \text{ при } x > v \cdot t \tag{3}$$

и условиям излучения Мандельштама:

$$\frac{d\omega}{dk} < v, \quad x < v \cdot t, \quad \frac{d\omega}{dk} > v, \quad x > v \cdot t. \tag{4}$$

Ниже эти соображения будут использованы при решении некоторых задач анализа динамического поведения упругих элементов машин и конструкций, в котором учтены эффекты волнообразования, вызванные движением источников.

**Формулирование цели исследования.**

Цель данного исследования состоит в обосновании методики расчёта динамических характеристик и анализа динамического поведения упругих элементов машин и конструкций в целом, в которых учитываются эффекты волнообразования, вызванные движением источников.

**Изложение основного материала исследования.**

Рассмотрим несколько примеров, которые демонстрируют существенное влияние эффектов волнообразования, вызванных движением источников, и адекватно моделируют особенности динамического поведения упругих элементов машин и конструкций.

1. Эффект волнообразования.

Пример 1. В отсутствие дисперсии, как это имеет место для поперечных волн в струнах, крутильных и продольных волн в стержнях, когда динамический процесс описывается волновым уравнением типа

$\omega^2 - c_0^2 \cdot k^2 = 0$ , где  $c_0$  – скорость распространения волн определённого типа в упругих элементах машин и конструкций, все волновые числа принимают действительные значения и скорости переноса волновой энергии  $v_{gp} = d\omega/dk = \pm c_0$  (где  $v_{gp}$  – групповая скорость волн). В этом случае задача кинематики (1) – (4) в зависимости от скорости  $v$  движения источника имеет качественно различные решения. При  $v < c_0$  движущийся источник частоты  $\Omega$  излучает одну волну впереди себя (в  $+x$  направлении) с  $\omega = \Omega \cdot (1 - \beta)^{-1}$  и одну волну позади (в  $-x$  направлении) с  $\omega = \Omega \cdot (1 + \beta)^{-1}$ , где  $\beta = v/c_0$ . При  $v > c_0$  вперёд излучения нет. Обе волны с указанными частотами возбуждаются за источником. Причём волна с  $\omega = \Omega \cdot (\beta - 1)^{-1}$  бежит ему вслед.

Динамические следствия эффекта Доплера выявим на примере бесконечной струны с движущейся вдоль неё сосредоточенной массой  $m$ , к которой приложены поперечная  $F(t) = F_0 \cdot \sin \Omega t$  и продольная  $T_g(t)$  силы. (Модель движения тела конечной массы вдоль подвесной канатной дороги). Соответствующие волновые уравнения и условия на движущейся границе  $x = l(t)$  запишутся в виде [1]  $u_{tt} - c_0^2 \cdot u_{xx} = 0$  ( $c_0 = \sqrt{N/\rho}$ ):

$$\begin{cases} u(l(t)+0, t) = u(l(t)-0, t) = u^0(t), \quad m \cdot \ddot{u}^0 = [N \cdot u_x + \dot{l} \cdot \rho_0 \cdot u_t] + F(t), \\ m \cdot \ddot{l} = -\frac{1}{2} \cdot [\rho_0 \cdot u_t^2 + N \cdot u_x^2 + 2 \cdot \rho_0 \cdot \dot{l} \cdot u_x \cdot u_t] + T_g(t). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь  $u(x, t)$  – поперечное отклонение струны; квадратные скобки – разность стоящих в них величин справа и слева от движущейся границы;  $N$  – натяг;  $\rho_0$  – погонная плотность струны ( $N = E/l$ , где  $E$  – модуль упругости материала струны,  $l$  – её длина).

Будем считать, что движение массы вдоль струны равномерное:  $l(t) = v \cdot t$ , где  $v = const$  ( $v$  – скорость движения массы вдоль струны). В таком случае из уравнения движения массы вдоль струны находим выражение для внешней силы, обеспечивающей равномерность движения, т.е. для силы давления волны:

$$T_g = \frac{1}{2} \cdot [\rho_0 \cdot u_t^2 + N \cdot u_x^2 + 2 \cdot v \cdot \rho_0 \cdot u_x \cdot u_t]. \tag{6}$$

При докритических скоростях ( $v < c_0$ ), согласно (3) – (5),

$$u(x,t) = \begin{cases} A \cdot \sin(\omega_1 t + k_1 x + \varphi), & x < v \cdot t, \\ A \cdot \sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi), & x > v \cdot t, \end{cases} \quad (7)$$

где:

$$A = \frac{c_0}{2\Omega} \cdot \frac{(F_0/N)}{\sqrt{1+a_0^2}}; \quad \omega_1 = \frac{\Omega}{1+\beta}; \quad \omega_2 = \frac{\Omega}{1-\beta}; \quad k_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{c_0}; \quad \varphi = -2\arctg(a_0 + \sqrt{1+a_0^2}); \quad a_0 = \frac{mc_0\Omega}{2N};$$

$$\beta = \frac{v}{c_0}.$$

Подставляя полученное решение в (6), находим силу сопротивления движению, являющуюся следствием волнообразования:

$$T_g = \frac{\beta}{(1-\beta^2)} \cdot \frac{(F_0^2/N)}{(1+a_0^2)} \cdot \cos^2 \Omega t. \quad (8)$$

Отсюда видно, что при движении со скоростями, близкими к критической ( $\beta \rightarrow 1$ ), сила сопротивления движению может быть сколь угодно велика.

При закритических скоростях ( $v > c_0$ ), согласно (3) – (5),

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\Omega}{2c_0} \cdot \left(\frac{F_0}{N}\right) \cdot \{\cos(\omega_1 t + k_1 x) - \cos(\omega_2 t - k_2 x)\}, & x < v \cdot t, \\ 0, & x > v \cdot t. \end{cases} \quad (9)$$

$$T_g = \frac{F_0^2 \cdot N}{\beta^2 \cdot (-1 + \beta^2)} \cdot \cos^2 \Omega t. \quad (10)$$

В этом случае решение не зависит от массы  $m$ , что и естественно, поскольку  $u^0(t) = 0$ .

Пример 2. В системах с дисперсией эффект Доплера проявляется более сложно. Так, в случае балки модели Бернулли – Эйлера дисперсионное уравнение (2) запишется в виде:  $\omega^2 - \alpha \cdot k^4 = 0$ , где  $\alpha = \sqrt{(IE)/(\rho F)}$ ;  $F$  – площадь поперечного сечения балки;  $I$  – момент инерции его поворота;  $\rho$  – удельная плотность вещества;  $E$  – модуль упругости материала балки. Разрешая его совместно с (1), находим следующее решение задачи кинематики волн, удовлетворяющее условиям (3) и (4).

При докритических скоростях, когда  $|v| < v_{kp} = 2\sqrt{\alpha \cdot \Omega}$ , движущийся источник частоты  $\Omega$  излучает одну гармоническую волну впереди себя (в  $+x$  направлении) с

$$\omega = \left(v + \sqrt{v_{kp}^2 + v^2}\right)^2 / (4\alpha), \quad k = \left(v + \sqrt{v_{kp}^2 + v^2}\right) / (2\alpha) \quad (11)$$

и одну гармоническую волну позади (в  $-x$  направлении) с

$$\omega = \left(v - \sqrt{v_{kp}^2 + v^2}\right)^2 / (4\alpha), \quad k = \left(v - \sqrt{v_{kp}^2 + v^2}\right) / (2\alpha). \quad (12)$$

Кроме того, слева и справа от движущегося источника возникают пространственно неоднородные волны: в области  $x > v \cdot t$  с

$$\omega = -\left(v + i \cdot \sqrt{v_{kp}^2 - v^2}\right)^2 / (4\alpha), \quad k = -\left(v + i \cdot \sqrt{v_{kp}^2 - v^2}\right) / (2\alpha), \quad (13)$$

а в области  $x < v \cdot t$  с

$$\omega = -\left(-v + i \cdot \sqrt{v_{kp}^2 - v^2}\right)^2 / (4\alpha), \quad k = \left(-v + i \cdot \sqrt{v_{kp}^2 - v^2}\right) / (2\alpha). \quad (14)$$

Огибающие этих волн экспоненциально спадают по мере удаления от движущегося источника.

При закритических скоростях, когда  $v > v_{kp}$ , по каждую сторону от источника возбуждаются по две волны. Вместо сопровождающих источник неоднородных волн возникнут отводящие от него энергию однородные волны с

$$\omega = -\left(v + \sqrt{v^2 - v_{кр}^2}\right)^2 / (4\alpha), \quad k = -\left(v + \sqrt{v^2 - v_{кр}^2}\right) / (2\alpha) \quad (15)$$

в области  $x > v \cdot t$  и

$$\omega = -\left(-v + \sqrt{v^2 - v_{кр}^2}\right)^2 / (4\alpha), \quad k = \left(-v + \sqrt{v^2 - v_{кр}^2}\right) / (2\alpha) \quad (16)$$

в области  $x < v \cdot t$ .

Анализ ряда динамических следствий эффекта Доплера в балке модели Бернулли – Эйлера проведен также в работах [2-5].

2. Излучение волн движущимся источником нулевой частоты.

В динамике конструкций, несущих подвижные нагрузки, хорошо известно [8] о существовании так называемых критических скоростей, при которых прогибы под нагрузкой неограниченно (в линейном приближении) нарастают. При отыскании этих скоростей обычно полагают, что нагрузка постоянна (нулевой частоты). Однако долгое время оставался без ответа вопрос о динамическом поведении направляющих при закритических скоростях.

Оказалось [2,4,9,10], что при закритических в указанном смысле скоростях имеет место эффект типа Вавилова – Черенкова [11], выражающийся в излучении волн равномерно движущимся источником нулевой частоты. Подробное изучение особенностей его проявления в упругих системах представляет интерес, по крайней мере, по двум причинам. Знание условий его проявления, во-первых, указывает пути борьбы с соответствующими источниками вибраций в машинах и создания новых вибротехнологий, а во-вторых, позволяет грамотно рассчитывать силовые воздействия в движущихся контактах.

Пример 3. Одна из проблем токосяема в электрическом транспорте состоит в определении параметров системы пантограф – электрический подвес, при которых в подвесе не возбуждались бы волны, а силы взаимодействия в движущемся контакте не превышали бы допустимых на разрыв и ускоренный износ. (Грузовые троллейбусы интенсивно используются в настоящее время в открытых и закрытых горных разработках, и именно при эксплуатации подобных машин, предотвращающих взрывоопасные ситуации в карьерах, возникают подобные проблемы).

В простейшей модели задача сводится к анализу динамического поведения подпружиненной струны с равномерно движущимся вдоль неё поджимным устройством. В этом случае из уравнения поперечных колебаний струны  $\rho_0 \cdot u_{tt} - N \cdot u_{xx} + h_0 \cdot u = 0$ , где  $h_0$  – коэффициент жёсткости основания, получаем следующее дисперсионное уравнение (2):

$$\omega^2 - c_0^2 \cdot k^2 - \omega_*^2 = 0, \quad \omega_* = \sqrt{h_0 / \rho_0}. \quad (17)$$

Используя (17), из (1), (3) и (4) находим, что при докритических скоростях, когда  $v < c_0$ , источник нулевой частоты ( $\Omega = 0$ ) волн не излучает, профиль прогиба под нагрузкой симметричен и экспоненциально спадает по мере удаления от неё: слева ( $x < v \cdot t$ )  $k = (i\omega_* / c_0) / \sqrt{1 - \beta^2}$ , а справа ( $x > v \cdot t$ )  $k = -(i\omega_* / c_0) / \sqrt{1 - \beta^2}$ , где  $\beta = v / c_0$ . При закритических скоростях, когда  $v > c_0$ , перед нагрузкой ( $x > v \cdot t$ ) прогибов нет ( $u(x, t) = 0$ ), а за нагрузкой возбуждается бегущая ей вослед волна с  $\omega = (\beta\omega_*) / \sqrt{\beta^2 - 1}$  и  $k = (\omega_* / c_0) / \sqrt{\beta^2 - 1}$ .

Записывая условие в движущемся контакте ( $x = v \cdot t$ ) в виде [1]:

$$\begin{cases} u(vt + 0, t) = u(vt - 0, t) = u_0(t), \\ m\ddot{u}_0 + \tilde{k}u_0 = [N \cdot u_x + v\rho_0 u_t] + F_0, \end{cases} \quad (18)$$

где  $m$  и  $\tilde{k}$  – параметры пантографа;  $F_0$  – постоянная сила поджатия, для случая закритических скоростей ( $v > c_0$ ) имеем:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 \cdot \sin(\omega t - kx), & x < v \cdot t, \\ 0, & x > v \cdot t, \end{cases} \quad u_0 = \frac{(c_0 F_0) / (\omega_* \cdot N)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}. \quad (19)$$

При этом сила сопротивления движению, обусловленная волнообразованием [1],

$$T_g = \frac{1}{2} \cdot [N \cdot u_x^2 + \rho_0 \cdot u_t^2 + 2v\rho_0 u_x u_t] = \frac{1}{2} \cdot (F_0^2 / N) / (\beta^2 - 1). \quad (20)$$

По характеру её зависимости от скорости движения видно, что она может быть причиной разрыва провода.

В пренебрежении диссипативными потерями, как было показано выше, при докритических скоростях ( $v < c_0$ ) прогиб под нагрузкой симметричен и, следовательно, сопротивление движению отсутствует ( $T_g = 0$ ). Если же учесть распределённые потери, то профиль под нагрузкой окажется несимметричен и сопротивление движению будет даже в отсутствие трения.

Поскольку в этом случае дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\omega^2 - 2i\gamma\omega - c_0^2 \cdot k^2 - \omega_*^2 = 0, \quad i^2 = -1, \quad (21)$$

где  $\gamma = \delta / \rho_0$ ,  $\delta$  – коэффициент вязкости, то из решения задачи кинематики волн (1) – (4) следует, что слева от нагрузки ( $x < v \cdot t$ ):

$$c_0 k = i\kappa_1 = i \left\{ \sqrt{\omega_*^2 \cdot (1 - \beta^2) + (\beta\gamma)^2} - \beta\gamma \right\} / (1 - \beta^2), \quad (22)$$

а справа ( $x > v \cdot t$ ):

$$c_0 k = i\kappa_2 = -i \left\{ \sqrt{\omega_*^2 \cdot (1 - \beta^2) + (\beta\gamma)^2} + \beta\gamma \right\} / (1 - \beta^2). \quad (23)$$

Далее, конструируя соответствующим образом решение для смещений:

$$u = \begin{cases} A \cdot \exp[(x/c_0 - \beta t) \cdot \kappa_1], & x < v \cdot t, \\ B \cdot \exp[(x/c_0 - \beta t) \cdot \kappa_2], & x > v \cdot t, \end{cases} \quad (24)$$

из (18) находим:

$$A = B = \left( \frac{F_0}{c_0 N} \right) / \left\{ 2 \cdot \sqrt{\omega_*^2 \cdot (1 - \beta^2) + (\beta\gamma)^2} + (1 - \beta^2) \cdot k \right\}. \quad (25)$$

Подставляя найденное решение в выражение для сил давления волн [1]:

$$T_g = \frac{1}{2} \cdot \left[ \rho_0 \cdot u_t^2 + N \cdot u_x^2 - h_0 \cdot u^2 + 2v\rho_0 u_x u_t \right] \quad (26)$$

находим, что при докритических скоростях ( $\beta < 1$ ):

$$T_g = (1 - \beta^2) \cdot \frac{N}{2c_0^2} \cdot (\kappa_2 - \kappa_1) \cdot A^2 = \frac{2\gamma\beta}{(1 - \beta^2)} \cdot \frac{N}{c_0^2} \cdot A^2 \cdot \sqrt{\omega_*^2 \cdot (1 - \beta^2) + (\beta\gamma)^2}. \quad (27)$$

Отсюда видно, что для расчёта допустимых скоростей движения пантографа учёт распределённых потерь принципиально необходим, т.к. продольная составляющая силы, действующей на подвес в контакте, достигает опасных значений ещё при докритических скоростях.

Пример 4. Эффект излучения упругих волн равномерно движущимся источником нулевой частоты характерен для систем с конвекцией (трубопроводов, передач с гибкими связями, лентопротяжных механизмов и т.п.), а также для дорожных конструкций, несущих подвижные перегрузки.

Рассмотрим равномерное движение экипажа вдоль упругой направляющей в предположениях, соответствующих следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} IEu_{xxxx} + \rho F u_{tt} + h_0 u = 0, \\ u(vt + 0, t) = u(vt - 0, t) = u_0(t), \quad u_x(vt + 0, t) = u_x(vt - 0, t) = w_0(t), \\ m\ddot{u}_0 + \tilde{k}^* u_0 = -IE[u_{xxxx}] + F_0, \quad I_0 \ddot{w}_0 + G_0 w_0 = IE[u_{xx}], \end{cases} \quad (28)$$

где  $m, I_0$  и  $\tilde{k}^*, G_0$  – параметры упругости и инерционности «экипажа»;  $F_0 = const$ . Полагается, что на бесконечности ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) прогибы ограничены и выполняются условия излучения Мандельштама [12].

Как следует из анализа задачи кинематики волн (1) – (4), при докритических скоростях, когда  $v < v_{кр} = \sqrt{2\alpha \cdot \omega_*}$  ( $\alpha = \sqrt{IE}/(\rho F)$ ,  $\omega_* = \sqrt{h_0}/(\rho F)$ ), прогиб под нагрузкой локализован и симметричен, т.е. излучения нет. При закритических скоростях, когда  $v > v_{кр}$ , излучаются две волны. Одна из них бежит перед нагрузкой ( $x > v \cdot t$ ) с волновым числом:

$$k_1 = \sqrt{v^2 + \sqrt{v^4 - v_{кр}^4}} / (\sqrt{2} \cdot \alpha), \quad (29)$$

а другая ей вослед ( $x < v \cdot t$ ) с волновым числом:

$$k_2 = \sqrt{v^2 - \sqrt{v^4 - v_{кр}^4}} / (\sqrt{2} \cdot \alpha). \quad (30)$$



Амплитуды этих волн, согласно (28), соответственно равны:

$$\begin{cases} A_1 = \left(\frac{F_0}{k_1}\right) \cdot \frac{\sqrt{(G_0 k_1)^2 + (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)}}{\tilde{k}^* G_0 - (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2}, \\ A_2 = \left(\frac{F_0}{k_2}\right) \cdot \frac{\sqrt{(G_0 k_2)^2 + (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)}}{\tilde{k}^* G_0 - (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2}. \end{cases} \quad (31)$$

Что касается силы сопротивления движению, т.е. силы давления волн, то она определяется по формуле [13]:

$$T_g = \left[ \frac{1}{2} \cdot (\rho F u_t^2 + IE u_{xx}^2) - IE u_x u_{xxx} + \nu \rho F u_x u_t \right], \quad (32)$$

или с учётом (28):

$$\begin{aligned} T_g &= (\tilde{k}^* u_0 - F_0) w_0 + \frac{1}{2} \cdot IE [u_{xx}^2] = \\ &= \frac{F_0^2 IE (k_1^2 - k_2^2)}{\left\{ \tilde{k}^* \cdot G_0 + (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2 \right\}^2} \cdot \left\{ (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2 + \frac{G_0^2}{2} \cdot (k_1^2 + k_2^2) \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

### 3. Эффект тормозного излучения.

Если частота источника лежит в полосе непропускания, то при его движении, начиная с некоторой скорости  $v > v_*$ , он начинает излучать. Такое излучение принято называть тормозным [14].

Пример 5. Для струны на упругом основании источник частоты  $\Omega < \omega_*$  будет излучать волны при скорости  $v$ , превышающей  $v_*$ , а именно:

$$v > v_* = c_0 \cdot \sqrt{1 - (\Omega / \omega_*)^2}, \quad \omega_* = \sqrt{h_0 / \rho_0}, \quad (34)$$

где  $\omega_*$  – критическая частота;  $h_0$  – коэффициент жёсткости «постели»;  $\rho_0$  – погонная плотность струны;  $c_0 = \sqrt{N / \rho_0}$ ;  $N$  – натяг. Причём перед источником ( $x > v \cdot t$ ) побежит волна с волновым числом:

$$k = \left( v \Omega + \omega_* \cdot \sqrt{v^2 - v_*^2} \right) / (c_0^2 - v^2), \quad (35)$$

а вслед ему ( $x < v \cdot t$ ) – волна с волновым числом:

$$k = \left( v \Omega - \omega_* \cdot \sqrt{v^2 - v_*^2} \right) / (c_0^2 - v^2). \quad (36)$$

В случае движения по струне сосредоточенной массы  $m$  с приложенной к ней силой  $F(t) = F_0 \cdot \sin \Omega t$  из соответствующих условий на движущейся границе ( $x = v \cdot t$ ):

$$\begin{cases} u(vt + 0, t) = u(vt - 0, t) = u_0(t), \\ m \ddot{u}_0 = [N u_x + \nu \rho_0 u_t] + F(t) \end{cases} \quad (37)$$

находим, что амплитуды возбуждаемых слева и справа волн одинаковы и равны:

$$A = F_0 / \sqrt{m^2 \Omega^4 + 4 \rho_0^2 \omega_*^2 \cdot (v^2 - v_*^2)} \quad (38)$$

и сила давления этих волн на сосредоточенную массу:

$$T_g = \left( 2 \nu \rho_0 \Omega \omega_* \cdot \sqrt{v^2 - v_*^2} \cdot A^2 \right) / (c_0^2 - v^2) \quad (39)$$

будет тормозящей.

### Выводы

1. Движущийся источник постоянной частоты, как видно из примеров 1,2, возбуждает в направляющей колебания одновременно на нескольких частотах, которые могут сильно различаться. Отсюда ясно, почему широко практикуемый метод расчёта динамики систем с движущимися нагрузками, основанный на представлении решения в виде ряда по собственным формам колебаний соответствующей однородной задачи [6,7], имеет, вообще говоря, плохую сходимость. Ведь структура искомого решения не адекватна истинному процессу.

2. Для упрощения и одновременного повышения точности инженерных расчётов необходимо при конструировании вынужденных решений закладывать в их структуру информацию о сдвиге частот, полученную из предварительного решения задачи кинематики волн.

3. Целесообразно рассчитывать величину сил давления волн на объект, являющийся носителем движущегося источника. Это позволит в стадии проектирования точнее прогнозировать результирующую сил сопротивления в движущихся контактах.

4. Динамике конструкций, несущих подвижные нагрузки, присуще существование критических скоростей, при которых прогибы под нагрузкой неограниченно нарастают (в линейном приближении). Постоянная нагрузка (нулевой частоты) особым образом изменяет динамическое поведение направляющих при закритических скоростях, в частности, при закритических скоростях имеет место эффект типа Вавилова – Черенкова. Подробное изучение особенностей проявления указанного эффекта в упругих системах представляет интерес по двум причинам: а) знание условий его проявления указывает пути борьбы с соответствующими источниками вибраций в машинах, конструкциях и создания новых вибротехнологий; б) позволяет грамотно, научно обоснованно, рассчитывать силовые воздействия в движущихся контактах.

5. Проведен анализ сил давления волн на сосредоточенную массу для случая, когда излучение волн является тормозным. Этот эффект реализуется в тех случаях, когда частота источника лежит в полосе не-пропускания. Тогда при движении источника, начиная с некоторой скорости  $v > v_*$ , последний начинает излучать (т.н. тормозное излучение [14]).

6. Полученные в данной работе результаты могут в дальнейшем служить для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта параметров динамического поведения упругих элементов машин и конструкций при учёте в последних эффектов волнообразования, вызванных движением источников, как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

#### Список использованной литературы

1. Весницкий А.И. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками/А.И. Весницкий, Л.Э. Каплан, Г.А. Уткин//Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47, №5. – С. 863-866.
2. Весницкий А.И. Излучение упругих волн в одномерных системах равномерно движущимися источниками / А.И. Весницкий, С.В. Крысов, С.А. Сьянов, Г.А. Уткин. – Горький, 1982. – 17с. (Препринт/НИРФИ; №160).
3. Сьянов С.А. Вынужденные колебания экипажа, движущегося вдоль упругой направляющей / С.А. Сьянов // Проблемы машиностроения. – 1985. – Вып. 23. – С. 12-14.
4. Крысов С.В. Излучение упругих волн в одномерных системах движущимся источником / С.В. Крысов // Прикладная механика и техническая физика. – 1983. - №1. – С. 150-153.
5. Крысов С.В. Силы сопротивления движению постоянных нагрузок вдоль упругих направляющих/С.В. Крысов, В.В. Холуев//Динамика систем: Межвузовский сборник. – Горький: ГГУ, 1985. – С. 142-149.
6. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем/А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734с.
7. Кохманюк С.С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках/С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин, Л.Г. Романенко. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232с.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний/В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408с.
9. Весницкий А.И. Особенности проявления эффекта Доплера в одномерных упругих системах с дисперсией/А.И. Весницкий, С.В. Крысов//Волны и дифракция. – 1981. – Т. 2. – С. 291.
10. Весницкий А.И. Возбуждение колебаний в движущихся элементах конструкций/А.И. Весницкий, С.В. Крысов // Машиноведение. – 1983. - №1. – С. 16-17.
11. Тамм И.Е. Общие свойства излучения, испускаемого системами, движущимися со сверхсветовыми скоростями, и некоторые приложения к физике плазмы: (Нобелевская лекция)/И.Е. Тамм//Успехи физических наук. – 1959. – Т. 68. – Вып. 3. – С. 42-59.
12. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике: Сб. трудов/Л.И. Мандельштам. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – Т. 2. – 372с.
13. Уткин Г.А. О краевых задачах динамики одномерных упругих систем с движущимися по ним сосредоточенными объектами/Г.А. Уткин // Прикладная механика: Межвузовский сборник. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. - Вып. 7. – С. 23-27.
14. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 928с.
15. Горошко О.А. Критические случаи движения стержня с демпфером на конце / О.А. Горошко // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, №8. – С. 129-132.
16. Весницкий А.И. К построению демпфера изгибных колебаний балки/А.И. Весницкий, Н.Д. Романов // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, №6. – С. 122-124.
17. Весницкий А.И. К вопросу о граничных условиях в задаче динамики волновых систем с движущимися закреплениями и нагрузками/А.И. Весницкий, Г.А. Уткин//Волны и дифракция. – 1981. – вып. 1. – С. 365-368.
18. Весницкий А.И. Граничные условия для изгибных колебаний балки с движущимся упруго-инерциальным закреплением/А.И. Весницкий//Доклады АН УССР. – 1982. - №5. – С. 33-35.
19. Мангова В.Н. О поперечных колебаниях стержня с движущимся жёстким закреплением/В.Н. Мангова // Прикладная механика. – 1981. – Т. 16, №12. – С. 126-129.

## ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 004.93

Л.Г. АХМЕТШИНА, А.А. ЕГОРОВ

Днепропетровский национальный университет имени Олеса Гончара,

**АДАПТИВНАЯ НЕЧЕТКАЯ СЕГМЕНТАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОМБИНИРОВАННОГО СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ**

Данная работа посвящена описанию модифицированного метода адаптивной визуализации результатов нечеткой (нейро-фаззи) кластеризации изображений, который за счет слияния сингулярных разложений отдельных неперекрывающихся окон и всего снимка в целом позволяет повысить чувствительность сегментации. Представлены результаты экспериментальных исследований возможностей предложенного модифицированного метода на примере сегментации полутоновых медицинских изображений различной физической природы.

Ключевые слова: обработка изображений, сегментация, нечеткая (нейро-фаззи) кластеризация, адаптивная визуализация результатов нечеткой кластеризации, сингулярное разложение.

Л.Г. АХМЕТШИНА, А.О. ЕГОРОВ

Дніпропетровський національний університет імені Олеса Гончара,

**АДАПТИВНА НЕЧІТКА СЕГМЕНТАЦІЯ ЗОБРАЖЕНЬ НА ОСНОВІ КОМБІНОВАНОГО СИНГУЛЯРНОГО РОЗКЛАДАННЯ**

Ця робота присвячена опису модифікованого методу адаптивної візуалізації результатів нечіткої (нейро-фаззи) кластеризації зображень, який за рахунок поєднання сингулярних розкладень окремих вікон, що не перекриваються, та всього знімку в цілому дозволяє підвищити чутливість сегментації. Наведено результати експериментальних досліджень можливостей запропонованого алгоритму, що підтверджують його ефективність при сегментації напівтонових медичних зображень різної фізичної природи.

Ключові слова: обробка зображень, сегментація, нечітка (нейро-фаззи) кластеризація, адаптивна візуалізація результатів нечіткої кластеризації, сингулярне розкладання.

L.G. AKHMETSHINA, A. A. YEGOROV

Dnepropetrovsk National University named by Oles Honchar

**THE IMAGE ADAPTIVE FUZZY SEGMENTATION BASED ON THE COMBINED SINGULAR VALUES DECOMPOSITION**

This article is devoted to description of the modified adaptive algorithm of the visualization of the image fuzzy (neuro-fuzzy) clustering results. This algorithm allows enhancing of the image segmentation sensitivity owing to merging of the singular values decomposition of the separate overlapped windows and the whole image. The experimental researches of the proposed algorithm abilities confirm its efficiency for segmentation of grayscale medical images of the different physical nature.

Keywords: image processing, segmentation, fuzzy (neuro-fuzzy) clustering, the adaptive visualizing of the fuzzy clustering results, singular values decomposition.

**Постановка проблеми**

Одной из наиболее сложных задач, с которыми приходится сталкиваться при обработке изображений, является их сегментация. Сложность решения этой задачи в общем случае обусловлена рядом факторов, среди которых следует выделить: существенные различия характеристик разных фрагментов исходных изображений, а также целей анализа; неопределенность наличия и месторасположения объектов интереса; отсутствие универсальных объективных критериев определения качества полученных изображений [1], что существенно затрудняет сравнение полученных результатов особенно в автоматическом и автоматизированном режимах работы; разнообразие методов осуществления сегментации. Одним из способов решения поставленной задачи является осуществление кластеризации с последующей визуализацией ее результатов. Следует отметить, что при применении такого подхода чувствительность и достоверность сегментации во многом определяются выбранным алгоритмом кластеризации, настройкой его управляющих параметров (при их наличии) на конкретный тип изображений и способом визуализации полученных результатов.

**Анализ публикаций по теме исследования**

В настоящее время используются множество различных методов кластеризации, которые существенно отличаются между собой по чувствительности, типу исходных данных, к которым они применимы, скорости работы, количеству управляющих параметров и т.п. Среди часто используемых подходов к выполнению кластеризации следует выделить нечеткую логику, нейронные сети и, особенно, нейро-фаззи алгоритмы. В последнем случае объединяются достоинства как нечетких методов, так и нейронных сетей. Однако общей проблемой нечетких методов и нейро-фаззи алгоритмов является неоднозначность процедуры дефаззификации, которая во многом определяет качество конечного результата. Несмотря на существование большого числа способов решения этой задачи [2], они не универсальны, а также отсутствуют критерии эффективности при их выборе для обработки конкретного типа изображений. В работе [3] для решения этой задачи был предложен метод адаптивной визуализации на основе сингулярного разложения композиции исходного изображения и нечеткой функции принадлежности, который автоматически отбирал наиболее значимые столбцы матрицы левых сингулярных векторов, что позволяло повысить наглядность и чувствительность сегментации.

**Цель статьи**

В данной статье описывается модифицированный алгоритм адаптивной визуализации результатов нечеткой кластеризации изображений, который благодаря слиянию сингулярных разложений отдельных неперекрывающихся окон, на которые разбивается исходный снимок и нечеткая функция принадлежности, и всего ансамбля изображений позволяет учитывать характеристики различных фрагментов, что повышает чувствительность сегментации.

**Основная часть**

Предложенный алгоритм адаптивной сегментации состоит из следующих шагов.

1. Осуществляется нечеткая кластеризация исходного многомерного изображения  $I$  размерности  $dy \times dx \times di$  ( $dy$  и  $dx$  – количество пикселей по вертикали и горизонтали, соответственно,  $di$  – число цветовых/спектральных компонент), в результате чего формируется нечеткая функция принадлежности  $U$  размерности  $n \times c$  ( $n = dy \cdot dx$ ,  $c$  – количество нечетких кластеров). Основной целью этого шага является расширение пространства входных признаков, что, с одной стороны, позволяет учитывать дополнительную информацию при сегментации, а с другой – применять сингулярное разложение для полутонных одномерных изображений.
2. Формируется матрица  $I^1$  с размерностью  $n \times (di + c)$ , содержащая матрицы  $I$  и  $U$ .
3. К матрице  $I^1$  применяется сингулярное разложение [4], и формируются матрицы  $I_s^1$ ,  $V_s$  (левые и правые сингулярные вектора, соответственно),  $S_s$  (собственные числа):

$$I^1 = I_s^1 \cdot S_s \cdot (V_s)^T \tag{1}$$

При этом размерность у матриц  $I^1$  и  $I_s^1$  совпадает, а для матриц  $S_s$  и  $V_s$  – имеет значение  $(di + c) \times (di + c)$  (используется экономное представление сингулярного разложения).

4. Столбцы  $I_s^1$  масштабируются на отрезок  $[0,1]$  и интерпретируются как матрица размерности  $dy \times dx \times (di + c)$ . В результате выполнения этого шага формируется матрица  $I^2$ .
5. Матрица  $I^1$  разбивается на неперекрывающиеся окна заданного размера, и к каждому окну применяется сингулярное разложение, в результате чего формируются матрицы  $(I_s^1)_{wnd}$ ,  $(V_s)_{wnd}$  (левые и правые сингулярные вектора, соответственно),  $(S_s)_{wnd}$  (собственные числа):

$$(I^1)_{wnd} = (I_s^1)_{wnd} \cdot (S_s)_{wnd} \cdot (V_s)_{wnd}^T \tag{2}$$

При этом размерность у матриц  $(I^1)_{wnd}$  и  $(I_s^1)_{wnd}$  совпадает и соответствует  $dy_{wnd} \cdot dx_{wnd} \times (di + c)$ , где  $dy_{wnd}$  и  $dx_{wnd}$  – количество пикселей у текущего окна по вертикали и горизонтали, соответственно. Размерность матриц  $(S_s)_{wnd}$  и  $(V_s)_{wnd}$  имеет значение  $(di + c) \times (di + c)$  (используется экономное представление сингулярного разложения). При выполнении этого шага также формируются матрица  $\overline{V_s}$ , которая является усреднением всех полученных матриц  $(V_s)_{wnd}$ .

6. Вычисляется матрица  $I^3$ , которая является объединением всех полученных матриц  $(I_s^1)_{wnd}$ . Все ее столбцы масштабируются на отрезок  $[0,1]$  и интерпретируются как матрица размерности

$dy \times dx \times (di + c)$ .

7. Формируется матрица  $I^4$  путем слияния матриц, полученных в результате применения «оконого» и «общего» сингулярных разложений, что выполняется для подавления «оконого» эффекта:

$$I_{y,x,i}^4 = \left( I_{y,x,i}^3 \right)^{P_{y,x,i}}, y \in [1, dy], x \in [1, dx], i \in [1, di + c], \quad (3)$$

$$P_{y,x,i} = 1 - \frac{|I_{y,x,i}^2 - I_{y,x,i}^3|}{|I_{y,x,i}^2 - I_{y,x,i}^3| / K^2 + K^1 + K^2 / 2}, y \in [1, dy], x \in [1, dx], i \in [1, di + c], \quad (4)$$

Причем матрица  $P$  масштабируется так, чтобы все ее значения были неотрицательны, а коэффициенты  $K^1$  и  $K^2$  вычисляются по следующим формулам:

$$K^1 = \left| \sum_{i=1}^{di+c} \sum_{j=1}^{di+c} \left( (V_s)_{i,j} - (\overline{V}_s)_{i,j} \right) \right|, \quad (5)$$

$$K^2 = \frac{\sum_{y=1}^{dy} \sum_{x=1}^{dx} \sum_{i=1}^{di+c} (I_{y,x,i}^2 - I_{y,x,i}^3)}{dy \cdot dx \cdot (di + c)}. \quad (6)$$

8. Вычисляется матрица  $V_s^1$  по формуле:

$$\left( V_s^1 \right)_{i,j} = \text{sgn} \left( (V_s)_{i,j} \right) \cdot \left| (V_s)_{i,j} \right|^{1 - (V_s)_{i,j} + (\overline{V}_s)_{i,j}}, i \in [1, di + c], j \in [1, di + c]. \quad (7)$$

Это действие также выполняется для подавления «оконого» эффекта.

9. Формируется вектор  $dC$ , содержащий разности для каждой пары соседних элементов вектора  $C$ .

10. Вычисляется значение  $dC_a$  по формуле:

$$dC_a = \left( \left( \sum_{j=1}^{di+c-1} dC_j / (di + c - 1) \right) + (dC_{\min} + dC_{\max}) / 2 \right) / 2, \quad (8)$$

где  $dC_{\min}$  и  $dC_{\max}$  – минимальный и максимальный элементы вектора  $dC$ , соответственно.

11. На основе значения  $dC_a$  при просмотре элементов  $dC$  с конца выбирается индекс  $i_{\max}$ :  $dC_{i_{\max}} \geq dC_a$ . Элементы вектора  $dC$  с индексами от 1 до  $i_{\max} + 1$  нормируются так, чтобы их сумма была равна 1.

12. Формируется выходное полутоновое изображение  $I^5$  по формуле:

$$I_{y,x}^5 = \sum_{i=1}^{i_{\max}+1} I_{y,x,i}^4 \cdot dC_i, y \in [1, dy], x \in [1, dx]. \quad (9)$$

#### Экспериментальные результаты

Предложенный в данной статье алгоритм был применен при сегментации различных полутоновых изображений, примерами которых могут служить снимки на рис. 1 и 2. На рис. 1 а приведено полутоновое медицинское изображение, которое представляет собой томограмму головного мозга, выполненную с целью диагностики наличия гематомы, а также определения области ее влияния в случае выявления. По гистограмме исходного изображения (рис. 1 б) можно сделать вывод о том, что, в целом, изображение не является низкоконтрастным. Однако диагностирование гематомы по исходному снимку затруднено из-за ее расположения на низкоконтрастном участке изображения (фрагмент, обведенный прямоугольником), а область ее влияния визуально неразличима. Введение рентгеноконтрастного вещества (рис. 1 в) хоть и позволяет более четко выделить гематому, однако не выявляет области ее влияния. На рис. 2 а представлено полутоновое медицинское изображение – спин-спиновая T2 релаксация ЯМР участка головного мозга. По гистограмме исходного снимка (рис. 2 б) можно заключить, что это темное низкоконтрастное изображение.

Для выполнения кластеризации был использован алгоритм sFCM [5, 6]. При этом динамическое сжатие и преобразование функции принадлежности не выполнялось. Перед обучением карты Кохонена (SOM) число нечетких кластеров увеличивалось в 4 раза (упорядочивание исходных центроидов осуществлялось на основе матрицы Евклидовых расстояний), а после обучения SOM исходное число нейронов выбиралось на основе максимального соответствия. Максимальное количество итераций – 100,  $\varepsilon = 10^{-5}$ , количество нечетких кластеров  $c = 6$ . На рис. 3 приведена визуализация результатов нейро-фаззи

кластеризации исходным (рис. 3 а) и модифицированным (рис. 3 б – г) методами изображения, приведенного на рис. 1 а, с различным размером окон. При этом предложенный метод, в целом обеспечивает лучшую детализацию области влияния гематомы, однако, лучшей достоверности удастся добиться при размере окна 50x50 пикселей. При этом с уменьшением размерности окна становится более заметным «оконный» эффект.

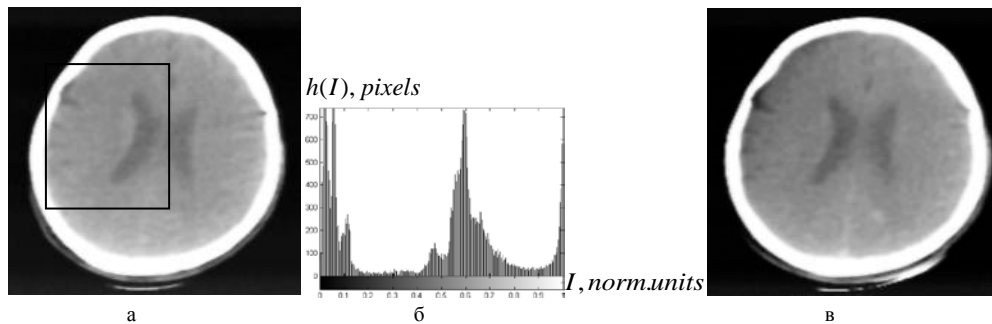


Рис. 1. Рентгеновская томограмма головного мозга: а – исходный полутоновой снимок (204x201); б – гистограмма; в – результаты введения рентгеноконтрастного вещества

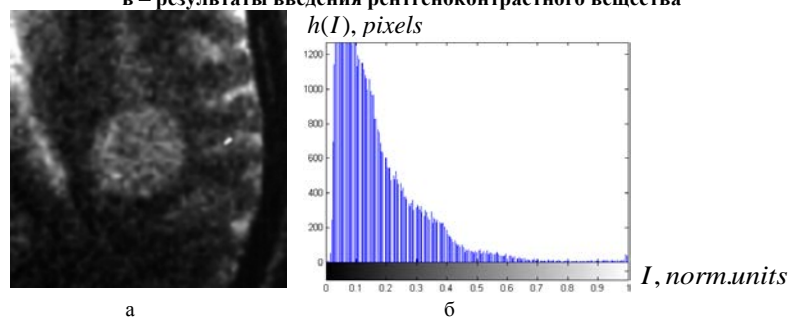


Рис. 2. Спин-спиновая T2 релаксация ЯМР участка головного мозга: а – исходный полутоновой снимок (256x256); б – гистограмма

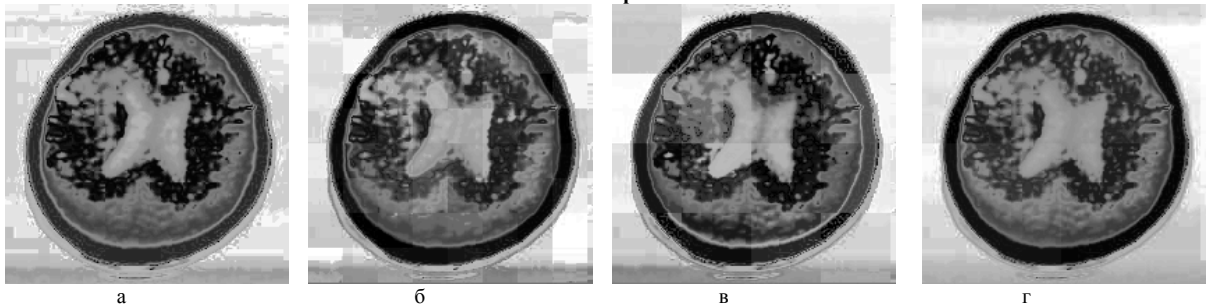


Рис. 3. Визуализация результатов кластеризации изображения на рис. 1. а – исходным методом; модифицированным методом с размером окна: б – 25x25, в – 50x50; г – 100x100 пикселей, соответственно

На рис. 4 приведена визуализация результатов нейро-фаззи кластеризации исходным (рис. 3 а) и модифицированным (рис. 3 б – г) методами изображения, представленного на рис. 2 а, с различным размером окон. При этом применение предложенного метода обеспечивает повышение детализации результирующего изображения. Уменьшение размерности окна положительно влияет на повышение уровня детализации, однако, как и в предыдущем случае, увеличивает заметность «оконного» эффекта.

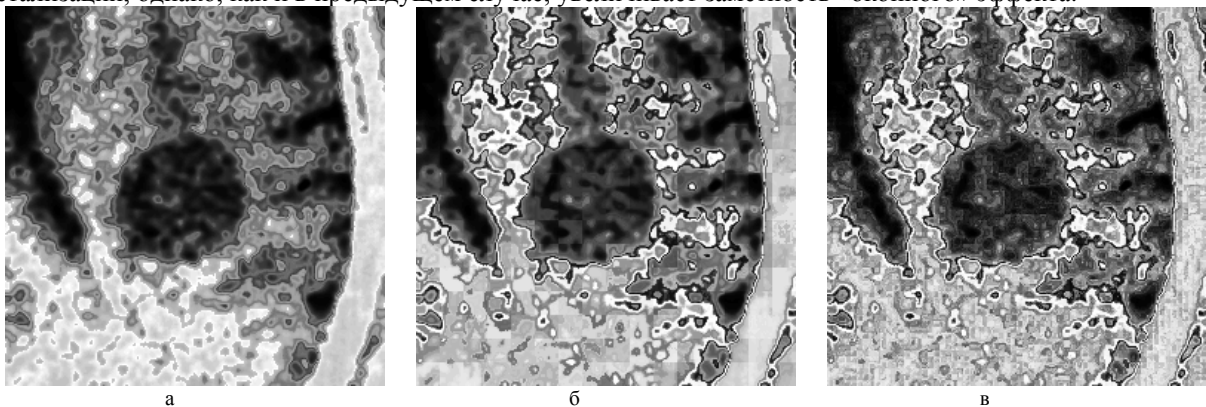


Рис. 4. Визуализация результатов кластеризации изображения на рис. 2. а: а – исходным методом; модифицированным методом с размером окна: б – 16x16, в – 4x4 пикселей, соответственно

**Выводы и перспективы дальнейших исследований**

На основании полученных экспериментальных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Предложенный модифицированный алгоритм визуализации:
  - позволяет повысить чувствительность сегментации по сравнению с исходным методом;
  - уменьшение размера окна повышает уровень детализации, но также усиливает заметность «оконного» эффекта;
  - выбор меньшего размера окна не всегда повышает достоверность сегментации;
  - размер окон рекомендуется делать кратным размеру изображения.
2. Перспективным направлением исследований является разработка новых способов слияния результатов сингулярного разложения отдельных неперекрывающихся окон и всего изображения в целом.

**Список использованной литературы**

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс; [пер. с англ. под ред. П.А.Чочиа]. – М.: Техносфера, 2006. – 1070 с.
2. Леоненков А. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. Леоненков – С.Пб.: БХВ–Петербург, 2003. – 719 с.
3. Ахметшина Л.Г. Метод адаптивной визуализации при сегментации изображений на основе сингулярного разложения / Л.Г. Ахметшина, А.А. Егоров // Искусственный интеллект. – 2015. – № 1-2. – С. 36 – 43.
4. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Моллер [под ред. Г.И. Марчука]. – М.: Мир, 1968. – 167 с.
5. Ахметшина Л.Г. Сегментация низко контрастных изображений алгоритмом гибридной кластеризации SOM-FCM / Л.Г. Ахметшина, А.А. Егоров // Системні технології. – 2008. – № 2 (55). – С. 34 – 40.
6. Егоров А.А. Повышение быстродействия метода гибридной нечеткой кластеризации за счет динамического сжатия размерности карты Кохонена / А.А. Егоров // Искусственный интеллект. – 2011. – № 4. – С. 489 – 497.

УДК 004.048

І.В. БАКЛАН, С.І. ХУССЕЙН, О.К. ОЧЕРЕТЯНИЙ  
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ ВІД СУЧАСНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ МАНІПУЛЯТОРІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНГВІСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

*У даній статті розглядається метод розпізнавання емоцій людини за рухами маніпулятора за допомогою лінгвістичного моделювання з використанням апарату прихованих марковських моделей. Описані методи вирішення задачі побудови лінгвістичної моделі, а також розглянуто підхід до інтерполяції траєкторії рухів маніпулятора за допомогою поліному Лагранжа.*

*Ключові слова: лінгвістичне моделювання, приховані марковські моделі, передискретизація, інтерполяція, інтерполяційний многочлен Лагранжа.*

І.В. БАКЛАН, С.И. ХУССЕЙН, О.К. ОЧЕРЕТЯНИЙ  
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ ОТ СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНГВИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

*В данной статье рассматривается метод распознавания эмоций человека по движениям манипулятора с помощью лингвистического моделирования с использованием аппарата скрытых марковских моделей. Описаны методы решения задачи построения лингвистической модели, а также рассмотрен подход к интерполяции траектории движений манипулятора с помощью полинома Лагранжа.*

*Ключевые слова: лингвистическое моделирование, скрытые марковские модели, передискретизация, интерполяция, интерполяционный многочлен Лагранжа.*

I.V. BAKLAN, S.I. KHUSSEIN, O.K. OCHERETYANY  
National technical university of Ukraine «Kiyv polytechnical institute»

## INTELLECTUAL DATA ANALYSIS FROM MODERN COMPUTER MANIPULATORS USING LINGVISTIC MODELLING

*This paper considers the method of recognizing human emotions by movement of computer manipulator with help of linguistic modeling using hidden Markov models. Was described methods of solving tasks of developing linguistic model, also was reviewed approach to interpolation methods for catching trajectory moves of manipulators using Lagrange polynomial.*

*Keywords: linguistic modelling, hidden Markov models, overdiscretization, interpolation, Lagrange polynomial.*

### Вступ

На сьогоднішній день життя людини дуже тісно пов'язане із розвитком інформаційних технологій. Результатом цього стає всезагальне використання персональних комп'ютерів (ПК) у найрізноманітніших сферах життя. Вони являються знаряддям праці або ж об'єктом праці. Швидкими темпами відбувається автоматизація різноманітних виробництв та впроваджуються системи контролю і управління на підприємствах. У зв'язку з цим постає необхідність частішої постійної напруженої роботи персоналу з ПК. Найчастіше це викликає фізичне та емоційне виснаження, що, у свою чергу, призводить до зменшення ефективності та продуктивності роботи, а, у певних випадках, навіть, може спричинити виникнення небезпечних ситуацій.

Виходячи з усього вищесказаного можна зробити висновок щодо необхідності постійного моніторингу емоційного стану користувача ПК з метою запобігання нервового перенавантаження та стресового стану організму. Одним із найпростіших способів ідентифікації емоцій являється розпізнавання їх за допомогою виявлення безумовних рефлексів як реакції на поточний стан організму, в нашому випадку – безсвідомих мікрорухів руки. Для реалізації даної задачі чудово підходить метод лінгвістичного моделювання. Перевагою такого підходу являється відсутність необхідності використання додаткового спеціалізованого устаткування і можливість реалізації поставленої мети за допомогою звичайного ПК у типовій комплектації.

### Постановка проблеми

Завданням даного дослідження є розробка автоматизованого методу для розпізнавання емоційного стану користувача ПК із застосуванням методів лінгвістичного моделювання.



### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Розвиток інтелектуального аналізу даних передбачає розвиток математичних методів для вирішення поставленої задачі. У зв'язку з цим прослідковується тенденція до зростання кількості публікацій, що висвітлюють різноманітні методи для розпізнавання образів [1-3, 6]. На даний момент найбільш популярні такі розповсюджені підходи як: Байєсові мережі, нейронні мережі, приховані марковські моделі, теорія автоматів, гібридні моделі та ін. Використання Байєсових мереж добре висвітлено в роботах Бідюка П.І. [1]. Автор описує варіанти використання Байєсових мереж для вирішення прикладних задач, однією з яких є розпізнавання образів. Для побудови моделі у режимі отримання даних, для обробки таких даних, дані мережі надають можливість обробки як в режимі реального часу, так і у вигляді статистичних масивів інформації і баз даних. При цьому, завдяки використанню представлення взаємодії між факторами процесу у вигляді причинно-наслідкових зв'язків в мережі, у порівнянні з іншими методами інтелектуального аналізу даних, досягається максимально високий рівень візуалізації та, як наслідок, чітке розуміння суті взаємодії факторів процесу між собою. Іншими перевагами Байєсових мереж є можливості врахування невизначеностей статистичного, структурного і параметричного характеру, а також формування висновку за допомогою різних методів – наближених і точних. Загалом, можна сказати, що Байєсові мережі – це високоресурсний метод ймовірнісного моделювання процесів довільної природи з невизначеностями різних типів, який забезпечує можливість достатньо точного опису їх функціонування.

Іншим методом інтелектуального аналізу даних є приховані марковські моделі, досліджені в роботах Баклана І.В. та Степанкової Г.А. [4]. Автори описують приховані марковські моделі як один із найкращих методів для обробки динамічних даних у реальному часі, для побудови лінгвістичної моделі та отриманні інформації про появу повторювальних елементів, образів, а також визначення порядку переходів між одним образом та наступним. Складеним методом інтелектуального аналізу даних є використання гібридних моделей. Даний підхід розглянутий у дослідженнях Степанкової Г.А. та Баклана І. В. [9]. Автори описують процес поєднання нечітких множин та прихованих марковських моделей. Моделі такого роду аналізу відомі під назвою прихованих марковських моделей (ПММ). Така схема аналізу з використанням однорідних ПММ може бути застосована для аналізу даних кількох людей, які спостерігаються періодично, для опису розвитку хвороби або змін у динаміці поведінки. Але припущення про однорідність в моделі Маркова, тобто що ймовірності переходів є постійними в часі та між окремими особами, можуть бути серйозним обмеженням для використання цих моделей. Щоб розв'язати цю проблему, вищезгаданими авторами було запропоновано ввести поняття неоднорідних ПММ. Це дозволяє матриці переходу прихованого ланцюжка змінюватися у часі або за іншим параметром на основі екзогенних коваріацій.

### Формулювання цілей статті

Дана стаття має на меті опис методу побудови лінгвістичних моделей динамічних образів емоційного стану користувача інформаційних систем з використанням комп'ютерних маніпуляторів.

### Виклад основного матеріалу дослідження

Для вирішення поставленої задачі, авторами пропонується використовувати принципи та підходи лінгвістичного моделювання. Дана методологія надає можливість швидкого та ефективного аналізу чисельних рядів, експериментальних даних, багатомірних даних завдяки приведенню їх до символічного вигляду та відновлення правил формальних граматик із отриманих лінгвістичних послідовностей.

В якості вхідних даних використовуються ті дані, які генерує маніпулятор, а саме часовий ряд координат маніпулятора в системі координат екрану. Результатом аналізу вхідних даних являється формування гібридної моделі на основі лінгвістичних та прихованих марківських моделей, що ставиться у відповідність біометричним показникам користувача пристрою. Дана система працює у двох режимах: в режимі навчання, в результаті якого формуються нормовані біометричні еталони, а потім у режимі розпізнавання, при якому порівнюється поточний біометричний зразок із еталонними. У випадку ідентифікації користувача ПК, в якості еталонного екземпляру виступає нормований зразок комп'ютерного почерку конкретного користувача, з яким система порівнює зчитані у користувача дані. При застосуванні даного підходу для визначення емоційного стану, із даних формується 6 біометричних еталонів, кожному з яких відповідає одна із основних 6 емоцій (радість, гнів, подив, страх, смуток, відраза).

Головна ідея переходу від числового ряду до символічного, від якої залежить результат лінгвістичного моделювання, базується на розбитті множини вхідних чисельних даних на коректні інтервали. Для побудови лінгвістичної моделі необхідно вибрати такі параметри як:  $\Delta t$  – тактова частота сканування координат руху комп'ютерного маніпулятора та потужність алфавіту, що визначає кількість інтервалів, на які буде розбита часова послідовність. На етапі попередньої обробки даних може виникнути проблема, що пов'язана із малою частотою дискретизації вхідних даних. В такому разі необхідно виконати передискретизацію даних [8], виконавши інтерполяцію цих даних.

Інтерполяція – це спосіб знаходження проміжних значень величини по вже наявному дискретному набору відомих значень. Одним із підходів для вирішення поставленого завдання є інтерполявання за допомогою класичного многочлену Лагранжа. Інтерполяційний многочлен Лагранжа — многочлен мінімального степеня, що приймає дані значення у даному наборі точок. Для  $n + 1$  пар чисел  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ , де всі  $x_i$  різні, існує єдиний многочлен  $L(x)$  степеню не більшого від  $n$ , для

якого  $L(x_i) = y_i$ . Маємо наступну формулу поліному, в основі якої лежить базис поліномів Лагранжа  $l_k(x)$  ступеню  $n$ :

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = k \\ 0, & \text{якщо } i \neq k \end{cases}$$

Поліноми Лагранжа мають вигляд:

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

Тоді поліном  $P_n(x)$  набуде наступного вигляду:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

Цей поліном має ступінь не вищу за  $n$  та  $P_n(x_i) = y_i$ . Формулу полінома  $P_n(x)$  й називають формулою Лагранжа. Кількість арифметичних дій для його обчислення пропорційна  $n^2$ . У результаті передискретизації ми отримуємо проміжні значення, достовірність яких перевірити неможливо, оскільки нас обмежує у значеннях роздільна здатність екрану, на якому проводиться дослідження. Тому доцільно перевірити якість знаходження реальних проміжних значень. У таблиці нижче наведені значення координат маніпулятора, які будуть інтерполюватися.

Таблиця 1

Координати руху маніпулятором

x (in.)	y (in.)
106	77
96	80
86	83
81	85
75	88

В якості вузлів інтерполяції візьмемо:

$$x_s = \begin{pmatrix} 96 \\ 86 \\ 75 \\ 60 \end{pmatrix} \quad y_s = \begin{pmatrix} 80 \\ 83 \\ 88 \\ 93 \end{pmatrix}$$

Для перевірки реальності шуканих значень, відобразимо на отриманому графіку  $x_{desired} := 81$  реальну координату між заданими вузлами інтерполяції, а також знайдемо значення поліному Лагранжа у цій точці. Розрахунки проводилися в середовищі MathCAD.

У результаті отримуємо інтерпольовану функцію  $f_{cubic}(x) := L_0(x) \cdot y_{s_0} + L_1(x) \cdot y_{s_1} + L_2(x) \cdot y_{s_2} + L_3(x) \cdot y_{s_3}$ . Графік функції наведено на рисунку 1.

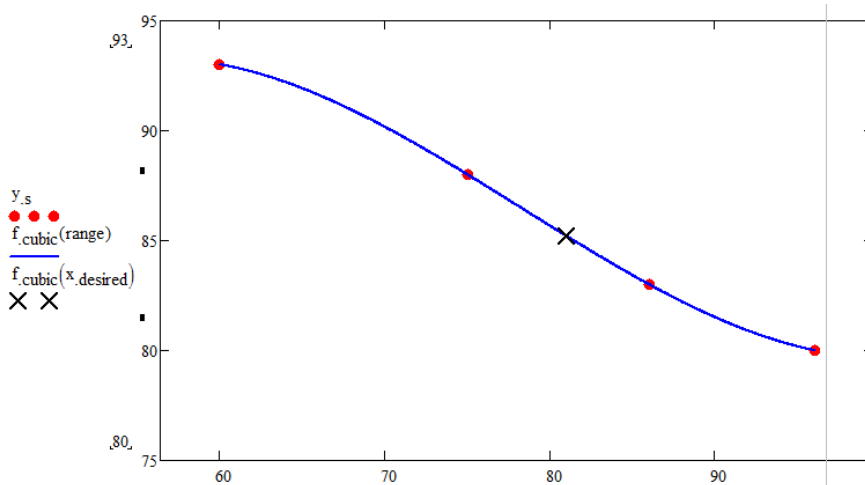


Рисунок 1 – Графік інтерполяційного поліному Лагранжа

Як бачимо з графіку, шукане проміжне значення належить множині значень поліному. Тепер перевіримо значення поліному Лагранжа в цій точці:  $f_{cubic}(x_{desired}) = 85.202$ . Значення многочлена Лагранжа близьке до значення координати  $y$  в цій точці, а, отже, можна зробити висновок, що даний метод підходить для отримання додаткових проміжних даних з метою створення більш точних та достовірних моделей. Виконавши попередню обробку вхідних даних, можна безпосередньо перейти до побудови лінгвістичної моделі. Алгоритмічна реалізація лінгвістизації передбачає виконання наступних кроків [4]:

Нехай маємо часовий ряд довжиною  $M$  ( для скорочення розглянемо одну координату  $x$ ), який описує деякий процес руху руки комп'ютерної мишки.

- Сформуємо для заданого часового ряду різницевий ряд першого порядку різниці першого порядку:  

$$X^1(i) = X(i + 1) - X(i) .$$
- Відсортуємо різницевий ряд за зростанням  $X^1 \rightarrow Xs^1$ .
- Знаходимо  $max(Xs^1)$  та  $min(Xs^1)$ .
- Розбиваємо відрізки  $[min(Xs^1), 0]$  та  $[0, max(Xs^1)]$  на  $N$  відрізків за правилами рівнозначної інтервалізації, при якій

$$\omega(a_1, b_1) = \omega(a_2, b_2) = \dots = \omega(a_n, b_n),$$

де  $\omega(a_i, b_i) = b_i - a_i$  - ширина інтервалу  $I[a_i, b_i]$  [2]. Приклад отриманих інтервалів наведено на рисунку 2.

Interval X:	
a	min = -3.500000000000001 max = -3.500000000000001
b	min = -3.500000000000001 max = -0.9752836784443142
c	min = -0.9752836784443142 max = -0.3441045980553925
d	min = -0.3441045980553925 max = -0.13371157125908528
e	min = -0.13371157125908528 max = -0.05481418621047007
f	min = -0.05481418621047007 max = -0.023255232191023996
g	min = -0.023255232191023996 max = -0.010105668016254794
h	min = -0.010105668016254794 max = -0.004470140512782279
i	min = -0.004470140512782279 max = 0.0
A	min = 0.0 max = 0.0
B	min = 0.0 max = 2.5247163215556867
C	min = 2.5247163215556867 max = 3.1558954019446084
D	min = 3.1558954019446084 max = 3.3662884287409156
E	min = 3.3662884287409156 max = 3.445185813789531
F	min = 3.445185813789531 max = 3.476744767808977
G	min = 3.476744767808977 max = 3.4898943319837463
H	min = 3.4898943319837463 max = 3.495529859487219
I	min = 3.495529859487219 max = 3.5000000000000013

Рисунок 2 – Інтервали числового ряду

6. Створимо матрицю, рядки якої зберігатимуть елементи підряду, що потрапили до відповідного інтервалу. Поставимо у відповідність кожному рядку у відповідність літеру із алфавіту  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ .

7. Замінімо кожну різницю у невідсортованому ряді на літеру відповідно до того, в який інтервал однієї із підчастих відсортованого ряду потрапила задана різниця. В результаті даної операції ми отримаємо ланцюжок переходів для отриманої граматики.

8. Сформуємо матрицю передування для прихованої марковської моделі.

*Прихований марковський ланцюжок* – це марківський ланцюжок, який приймає значення на скінченному фазовому просторі станів. Умовні ймовірності

$$a_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i), n \geq 1, i, j \in S.$$

Матриця переходів будується як

$$A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{J, J}$$

із обмеженнями:

$$a_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^J a_{ij} = 1 [4].$$

Множина станів – це фактично букви обраного нами алфавіту.

Для кожної пари станів, наприклад  $\langle d, S \rangle$  підраховуємо  $v(d, S)$  скільки разів вона зустрічається в лінгвістичному ланцюжку  $L(x_1^1), \dots, L(x_M^1)$ . На рисунку 3 наведений приклад сформованої матриці.

TABLE X:																		
	i	h	g	f	e	d	c	b	a	A	B	C	D	E	F	G	H	I
i	39	0	0	0	0	0	0	4	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	4	0	0	0	0	0	23	11	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0	15	215	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	9	0	0	0	0	0	8	8	0	0	253	14	0	0	0	0	0	5
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	11	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 3 – Матриця передування

9. На основі отриманої матриці тепер можна сформулювати правила формальної граматики. Поділивши  $v(d, S)$  на загальну кількість входжень літери “d” отримуємо частоту переходів зі стану “d” в стан “S”. Правила визначаються лише для тих випадків, коли значення комірки є ненульовим – тобто

можливий перехід із одного стану в інший. На рисунку 4 наведений приклад сформованої формальної граматики.

$$v(d \rightarrow S) = \frac{V_{d,s}}{w_d}$$

LINGUA RULES X:	
i	- (0.75) -> i
i	- (0.08) -> b
i	- (0.17) -> B
c	- (0.09) -> i
c	- (0.5) -> c
c	- (0.24) -> b
c	- (0.17) -> B
b	- (0.06) -> c
b	- (0.9) -> b
b	- (0.03) -> B
B	- (0.03) -> i
B	- (0.03) -> c
B	- (0.03) -> b
B	- (0.85) -> B
B	- (0.05) -> C
B	- (0.02) -> I
C	- (0.63) -> B
C	- (0.37) -> C
I	- (1.0) -> C

Рисунок 4 – Правила формальної граматики

### Висновки

Таким чином, у статті викладено можливий підхід щодо вирішення задачі розпізнавання емоційного стану користувачів інформаційних систем із використанням методу інтелектуального аналізу даних, а саме методу лінгвістичного моделювання. Метод базується на статистичних даних, принципах інтервалізації та ймовірнісних розрахунків.

Автори планують продовжувати напрямком досліджень задля перевірки теоретичних припущень і гіпотез та їх адаптації до практичного застосування.

### Список використаної літератури

1. П.І. Бідюк Основні етапи побудови і приклади застосування мереж байеса / П.І. Бідюк, Н.В. Кузнецова - Системні дослідження та інформаційні технології - 2007, № 4.
2. І.В. Баклан Про деякі нові особливості використання прихованих марковських моделей для аналізу та прогнозування часових рядів / І.В. Баклан, Г.А. Степанкова - «Штучний інтелект» - 2010, №4.
3. Бодянский Е.В. Штучні нейронні мережі: архітектури, навчання, застосування. / Бодянский Е.В., Руденко О.Г. - Biennial Baltic Electronics Conference – 2011.
4. Баклан І.В. Структурний підхід до аналізу та прогнозування поведінки часових рядів / І. В. Баклан, Ю. М. Селін - Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2005, - №2 – С,27-31.
5. Бідюк П. І. Моделювання та прогнозування нелінійних динамічних процесів / Бідюк П. І., Баклан І. В., Литвиненко В. І. - К.: ЕКМО. - 2004.
6. Крак Ю.В. Інформаційна технологія аналізу й синтезу мімічних станів обличчя людини для систем жестової комунікації / Крак Ю.В. - м. Херсон: ПП Вишемирський В.С. 2016 - Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту – 86 с.
7. Очеретяний О.К. Інтелектуальний аналіз даних від сучасних маніпуляторів з використанням лінгвістичного моделювання/ Очеретяний О.К., Хусейн С.І., Баклан І.В. - м. Херсон: ПП Вишемирський В.С. 2016 - Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту – 126 с.
8. Рашкевич Ю.М. Передискретизація у випадку двох вхідних зображень на основі операторів подібності/ Рашкевич Ю.М., Пелешко Д.Д., Ізонін І.В., Батюк Д.А.- м. Херсон: ПП Вишемирський В.С. 2016 - Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту – 307с.
9. Баклан І.В. Імовірнісні моделі для аналізу та прогнозування часових рядів / І.В. Баклан, Г.А. Степанкова - Штучний інтелект. — 2008. — № 3.

УДК 539.3

И.П. БОКОВ, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА  
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ

### КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ТРЕЩИН ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ

*Рассматривается бесконечная трансверсально-изотропная пластина с трещиной, которая находится в равновесии под действием приложенных на бесконечности усилий, а также сосредоточенных сил и изгибающих моментов, действующих в окрестности трещины. С использованием фундаментальных решений для трансверсально-изотропных пластин получены интегральные представления для изгибающих моментов. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины, которые позволили исследовать характер поведения хрупких тел с концентраторами напряжений в зависимости от упругих постоянных материалов и действующих сил.*

*Ключевые слова:* трансверсально-изотропные пластины, интегральные уравнения, концентраторы напряжений, коэффициенты интенсивности напряжений, изгибающие моменты.

І.П. БОКОВ, О.О. СТРЕЛЬНИКОВА  
Институт проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАНУ

### КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ТРІЩИН ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН ПРИ ЗГІНІ

*Розглянуто нескінченну трансверсально-ізоотропну пластину з тріщиною, яка знаходиться в рівновазі під дією зусиль, що прикладені до границь пластини на нескінченності та зосереджених сил і згинальних моментів, що діють в околі тріщини. З використанням фундаментальних розв'язків для трансверсально-ізоотропних пластин отримано інтегральні зображення згинальних моментів. Обчислені коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини, які дозволили дослідити характер поведінки крихких тіл з концентраторами напружень у залежності від пружних сталих матеріалів і діючих сил.*

*Ключові слова:* трансверсально-ізоотропні пластины, інтегральні рівняння, концентратори напружень, коефіцієнти інтенсивності напружень, згинальні моменти.

I.P. BOKOV, E.A. STRELNIKOVA  
A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

### STRESS INTENSITY FACTORS FOR SPLIT IN TRANSVERSELY ISOTROPIC PLATES AT BENDING

*An infinite transversely isotropic plate with a crack being in equilibrium both under forces applied to the plate boundaries in infinity and concentrated forces and bending moments applied near the crack is under consideration. Using the fundamental solutions for the transversely isotropic plate the integral representations for bending moments were obtained. The stress intensity factors for the crack were calculated. That allowed us to analyze the behaviour of brittle solids in dependence on the elastic constants of materials and effective forces.*

*Key words:* transversely isotropic plates, integral equations, stress concentrators, stress intensity factors, bending moments.

#### Постановка проблеми

Проектирование, создание и эксплуатация элементов конструкций в современных условиях требуют разработки достоверных методов оценки их работоспособности. Известно, что в структуре реального конструкционного материала имеются (или возникают в процессе его деформирования) различного рода микродефекты. Эти дефекты являются концентраторами напряжений. Развитие дефектов под действием внешней нагрузки может привести к частичному или полному разрушению конструкции.

При исследовании предельного равновесия тел, содержащих дефекты типа трещин, требуется определить критическое значение внешней нагрузки, при достижении которой трещина начинает распространяться. В элементах конструкций, работающих при определенных внешних нагрузках и определенных режимах их изменения, наличие устойчивых трещин не опасно.

Вопрос продления времени эксплуатации элементов с дефектами такого рода является важной проблемой, как с теоретической, так и с практической точки зрения.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Одной из важнейших составляющих механики разрушения упругих тел является математическая теория трещин. Эта теория хорошо разработана, и ее основы и этапы развития изложены в следующих

монографіях і обзорах: [1, 2]. Фізическим аспектам возникновения и распространения трещин посвящена работа [3]. Учитывая актуальность проблемы устойчивости пластин с дефектами, аналитическим и экспериментальным её исследованиям внимание уделялось неоднократно [4 - 6].

В трудах [7 - 10] было получено решение задач с произвольно ориентированными трещинами, разрезами, эллиптическими отверстиями и криволинейными жесткими включениями.

Одним из методов исследования концентрации напряжения в телах с трещинами является метод интегральных уравнений, основанный на теории потенциала. Использование этого метода предполагает наличие фундаментальных решений для рассматриваемой задачи.

Разработке методов построения фундаментальных решений (решений, соответствующих сосредоточенным воздействиям) уравнений теории упругих тонких пластин и оболочек посвящено большое количество публикаций. Постановки задач, методы их решения и ряд конкретных результатов содержатся в монографиях и научных статьях А. Л. Гольденвейзера [11], В. М. Даревского [12] и других. Фундаментальные решения уравнений статики для изотропных и трансверсально-изотропных пластин, используя уточненную теорию, были получены в статьях И. П. Бокова, Е. А. Стрельниковой [13, 14].

Из проведенного анализа следует, что имеющиеся фундаментальные решения, построенные по уточненной теории, относятся к бесконечным изотропным и трансверсально-изотропным пластинам.

**Формулирование цели исследования**

Рассматривается бесконечная трансверсально-изотропная пластина толщиной  $2h$  со сквозной прямолинейной трещиной длиной  $2l$ . Пластина находится в равновесии под действием усилий, приложенных к границам пластины и на бесконечности, сосредоточенных сил  $P^{(i)}$  и моментов  $M^{(i)}$  в точках с координатами  $(x_j; y_j)$  ( $i=1, \dots, N$ ) декартовой системы координат  $Ox\tilde{z}$ , начало которой находится в геометрическом центре трещины, плоскость  $xOy$  совпадает с серединной плоскостью пластины, а ось  $Ox$  направлена вдоль трещины.

Сосредоточенные силы  $P^{(i)}$  полагаются перпендикулярными к основам пластины, а вектор момента  $M^{(i)}$  имеет две составляющие -  $M_x^{(i)}$  и  $M_y^{(i)}$ .

Граничные условия трещины имеют вид:

$$M_x^+ - M_x^- = 0, \quad M_y^+ - M_y^- = 0, \quad (|x| < l) \tag{1}$$

$$M_x^+ = M_x^- = p_1(x), \quad M_y^+ = M_y^- = p_2(x), \quad (|x| < l)$$

где знаками «+» и «-» здесь и в остальных случаях обозначены граничные значения функции при  $y \rightarrow \pm 0$ . Для определения  $p_i(x)$  ( $i=1,2$ ), предположим, что в точке с координатами  $(0;1)$  приложен сосредоточенный момент единичной интенсивности. Для трещин с  $l = 1$ , приведем значения этих функций

$$p_1(x) = \frac{1+\nu}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1-\nu}{4} \frac{x^2-1}{x^2+1}, \tag{2}$$

$$p_2(x) = \frac{1+\nu}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2+1}}{2} - \frac{1-\nu}{4} \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона;  $C = \ln \gamma = 0,5772\dots$  - константа Эйлера.

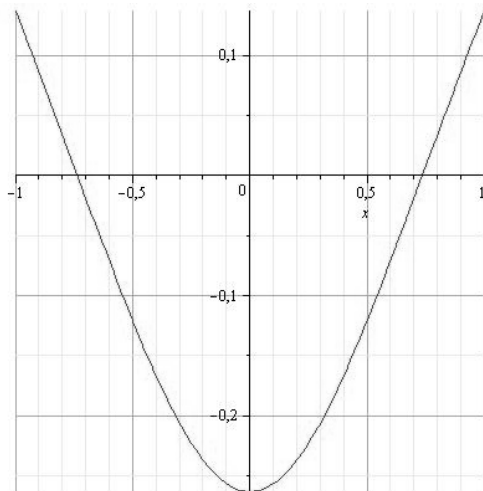


Рис. 1. Функция  $p_1(x)$

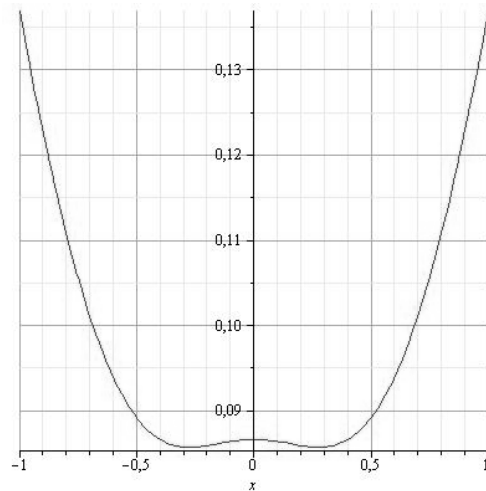


Рис. 2. Функция  $p_2(x)$

На рис. 1 и 2 представлены графики функций (2), представляющие собой выражения для изгибающих сил на контуре трещины.

**Изложение основного материала исследования**

Рассмотрим ранее полученные выражения для изгибающих моментов [14]. Положим  $m_1^* = m_2^* = 0$

$$M_x = \frac{1}{2} q_3^* (1 + \nu) \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2 + y^2}}{2} + \frac{1}{4} q_3^* (1 - \nu) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \tag{3}$$

$$M_y = \frac{1}{2} q_3^* (1 + \nu) \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2 + y^2}}{2} + \frac{1}{4} q_3^* (1 - \nu) \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}.$$

Для построения интегрального представления предположим, что сосредоточенная сила действует на отрезке  $[-l; l]$ . В каждой точке этого отрезка величины  $q_3^*$  являются функциями  $w_x(\xi)$  и  $w_y(\xi)$  ( $\xi \in [-l; l]$ ) для  $M_x, M_y$  соответственно. Данные функции нам неизвестны.

Запишем интегральные представления для изгибающих моментов  $M_x, M_y$  при  $x = x - \xi$ ,  $y = y - \eta$  ( $x = \xi$ ,  $y = \eta$  - особая точка). Учитывая, что  $\eta = 0$ , так как трещина расположена вдоль оси  $Ox$ , получим

$$M_x = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln \frac{\gamma \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{2} d\xi + \frac{1 - \nu}{4} \int_{-l}^l w_x(\xi) \frac{(x - \xi)^2 - y^2}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \tag{4}$$

$$M_y = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln \frac{\gamma \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{2} d\xi + \frac{1 - \nu}{4} \int_{-l}^l w_y(\xi) \frac{y^2 - (x - \xi)^2}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

Рассмотрим выражения (4) при  $y \rightarrow 0$

$$M_x = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi + \frac{1 - \nu}{4} \int_{-l}^l w_x(\xi) d\xi, \tag{5}$$

$$M_y = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi - \frac{1 - \nu}{4} \int_{-l}^l w_y(\xi) d\xi.$$

В задачах теории трещин требуется, чтобы было выполнено соотношение  $\int_{-l}^l w(\xi) d\xi = 0$  - условие однозначности смещений. Перепишем выражения (5), учитывая это условие

$$M_x = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi, \tag{6}$$

$$M_y = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi.$$

Запишем (6) учитывая, что  $\ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| = \ln \frac{\gamma}{2} + \ln |x - \xi|$ . Получим

$$M_x = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi = \frac{1 + \nu}{2} \ln \frac{\gamma}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) d\xi + \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln |x - \xi| d\xi, \tag{7}$$

$$M_y = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi = \frac{1 + \nu}{2} \ln \frac{\gamma}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) d\xi + \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln |x - \xi| d\xi.$$

Учитывая условие однозначности смещений, запишем интегральные уравнения для  $M_x, M_y$

$$M_x = \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln |x - \xi| d\xi = \frac{2}{1 + \nu} p_1(x), \tag{8}$$

$$M_y = \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln|x - \xi| d\xi = \frac{2}{1 + \nu} p_2(x).$$

Аналитического решения для полученных уравнений с данными правыми частями не существует, поэтому необходимо использовать численный метод. Продифференцируем уравнения (8) по переменной  $x$ . Получим сингулярные уравнения с ядрами типа Коши

$$M'_x = \int_{-l}^l \frac{w_x(\xi)}{x - \xi} d\xi = \frac{2}{1 + \nu} p'_1(x), \tag{9}$$

$$M'_y = \int_{-l}^l \frac{w_y(\xi)}{x - \xi} d\xi = \frac{2}{1 + \nu} p'_2(x).$$

Рассмотрим выражения (9) при  $l = 1$ . Сделаем замену неизвестных функций

$$w_x(\xi) = \frac{w_{x0}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad w_y(\xi) = \frac{w_{y0}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \tag{10}$$

Для сведения системы интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений воспользуемся многочленами Чебышева I и II рода [15] и квадратурной формулой Корнейчука-Старка [16]

$$T_n(t) = \cos(n \arccost), \quad U_{n-1}(t) = \frac{\sin(n \arccost)}{\sin(\arccost)}. \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{w_{u0}(x_k)}{n} \frac{1}{x_k - x_{0k}} = p_i(x), \quad (u = x, y) \quad (i = 1, 2). \tag{12}$$

Запишем систему алгебраических уравнений из  $n-1$  уравнений с  $n$  – неизвестными. Вид системы следующий  $Av = p$ , где

$$v = \begin{Bmatrix} v(t_1^n) \\ v(t_2^n) \\ \vdots \\ v(t_n^n) \end{Bmatrix}, \quad p = \begin{Bmatrix} p(t_{01}^n) \\ p(t_{02}^n) \\ \vdots \\ p(t_{0(n-1)}^n) \end{Bmatrix}, \tag{13}$$

$$a_{kj} = h_{mk},$$

где  $h_{mk} = \frac{1}{(x_k - x_{0m})n}$ ,  $x_k = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n}$ ,  $x_{0m} = \cos \frac{\pi m}{n}$ ,  $(k = 1, \dots, n) (m = 1, \dots, n-1)$ ,  $n$  - степень многочлена Чебышева.

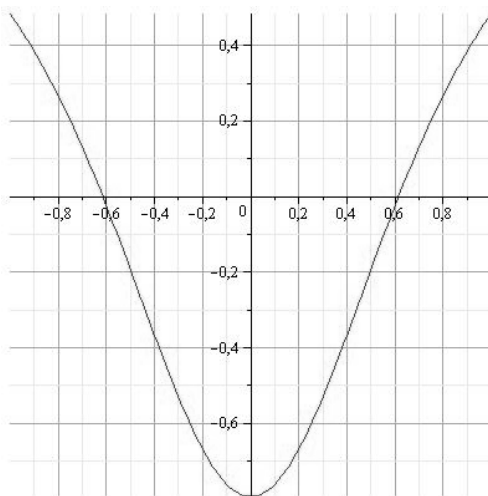


Рис. 3. Функция  $w_x(x)$

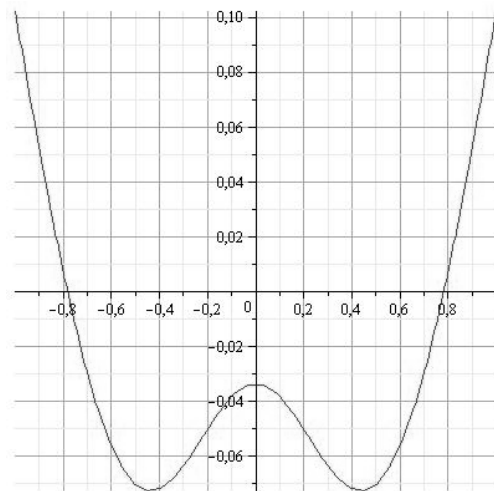


Рис. 4. Функция  $w_y(x)$

Дополняем полученную систему условиями однозначности смещений



$$\int_{-1}^1 \frac{w_{x0}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{w_{y0}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 0. \quad (14)$$

Численное решение интегральных уравнений было найдено с помощью предложенного метода при  $\nu = 0,28$ . На рис. 3 и 4 представлены графики решений этих уравнений.

Проверка алгоритма была произведена для правой части  $p_1(x) = p_2(x) = x$ . Численное и аналитическое решения приведены ниже (табл. 1)

Таблица 1

Данные проверки алгоритма

Численное решение	Аналитическое решение
0,9876883209	0,9876883410
0,8910065122	0,8910065278
0,7071067781	0,7071067907
0,4539905066	0,4539905165
0,1564344845	0,1564344889
-0,1564344357	-0,1564344359
-0,4539904641	-0,4539904687
-0,7071067485	-0,7071067528
-0,8910065069	-0,8910065035
-0,9876884475	-0,9876883326

Корректность использованного метода подтверждается точностью  $10^{-7}$ , полученной для численного решения приведенного в табл. 1.

Воспользуемся следующими соотношениями для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений

$$K_h^\pm = \pm m \sqrt{l} \lim_{x \rightarrow \pm 1} \left[ \sqrt{1-x^2} w_u(x) \right] \quad (h = M_x, M_y) \quad (u = x, y) \quad (15)$$

где верхний (нижний) знак отвечает вершине  $x = l$  ( $x = -l$ ) трещины  $m$  - величина приложенной силы.

Получим

$$K_{M_x}^\pm = \pm 0,4828250711m, \quad K_{M_y}^\pm = \pm 0,1022633697m. \quad (16)$$

Для оценки прочности элемента конструкции с трещиной полученные коэффициенты интенсивности напряжений сравниваются с пороговыми значениями, при которых трещина не будет распространяться в материале. Это позволяет определить максимальную величину  $m$ , при которой не происходит развитие трещины, и рассматриваемый элемент конструкции не теряет работоспособности.

**Выводы**

Рассмотрена бесконечная трансверсально-изотропная пластина с разрезом, которая находится в равновесии под действием усилий, приложенных к границам пластины и на бесконечности, сосредоточенных сил и изгибающих моментов. Получены интегральные представления для изгибающих моментов. Вычислены значения коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины, которые позволят исследовать характер поведения хрупких тел в зависимости от упругих постоянных различных материалов и определить максимальную величину нагрузки, при которой не происходит развитие трещины, и рассматриваемый элемент конструкции не теряет работоспособности.

**Список использованной литературы**

1. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин / А. Е. Андрейкив – К. : Наук. думка, 1982.- 346 с.
2. Бережницкий Л. Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. / Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук – К. : Наук. думка, 1983. - 288 с.
3. Броек Д. Основы механики разрушения / Д. Броек - М.: Высшая школа, 1980. -368 с.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. / Г. Н. Савин Киев: – К. : Наук. думка, 1968.- 888с.
5. Михайлов Б. К. Исследование устойчивости прямоугольных пластин с прямоугольными отверстиями при продольном сжатии / Б. К. Михайлов, В. Г. Москалева // Металлические конструкции: межвуз. темат. сб. тр. / Ленингр. инж.-строит. ин-т. – Л., 1983. С. 14–21.
6. Грачева Е. А. Устойчивость судовых пластин с трещинами / Е. А. Грачева // Механика разрушения и надежности судовых конструкций. – Горький, 1987. С. 23–29.
7. Shakerley T. M. Elastic buckling of plates with eccentrically positioned rectangular perforations / Т. М. Shakerley, С. J. Brown // Int. J. Mech. Sci. 1996. 38 № 8–9. С. 825 – 838.

8. Tsukrov I. Anisotropic material with arbitrarily oriented cracks and elliptical holes: effective elastic moduli / I. Tsukrov, M. Kachanov // *International Journal of Fracture*. - 1998. - Vol. 92. - P. L9-L14.
9. Зорин С. А. Предельное равновесие анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, криволинейными жесткими включениями и трещинами / С. А. Зорин, В. Н. Максименко // *Динамика сплошной среды*. - Новосибирск, 2012. - Вып. 127. - С. 55-57.
10. Довбня Е. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния ортотропной оболочки с эллиптическим отверстием / Е. Н. Довбня // *Теоретическая и прикладная механика*. - 2001. - Вып. 32. - С.140-144.
11. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки / А. Л. Гольденвейзер // *Прикл. математика и механика*. - 1944. - 8, вып. 6. - С. 441 - 467.
12. Даревский В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки) / В. М. Даревский // *Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок*. - М.: Наука, 1966. - С. 927 - 933.
13. Боков И. П. Построение фундаментального решения уравнений статики изотропных пластин средней толщины / И. П. Боков, Е. А. Стрельникова // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. - 2015. - Vol. 4, № 76. - С. 27-34.
14. Bokov I. P. Fundamental solution of static equations of transversely isotropic plates. / I. P. Bokov, E. A. Strelnikova // *International Journal of Innovative Research in Engineering & Management*. - 2015. - Vol. 2, Issue-6. - P. 56-62.
15. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю. В. Гандель - Харьков: ХНУ, 2001.- 92 с.
16. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. - К.: Наук. думка, 1976. - 444 с.

УДК 004:519.816:614.4

М.О. ВОРОНЕНКО, О.Б. ВОРОНЕНКО, Г.С. АБРАМОВ  
Херсонський національний технічний університет**МОНІТОРИНГ САНІТАРНО-ЕПІДЕМІЧНОЇ ОБСТАНОВКИ В РЕГІОНІ**

*Робота присвячена виявленню рівнів ризику для здоров'я населення та розробці інформаційної системи і заходів, спрямованих на зменшення, усунення і попередження несприятливого впливу чинників довкілля. Для інтегральної оцінки екологічного стану Херсонської області запропоновані наступні підходи: порівняння ступеня невідповідності елементних показників стану окремих природних середовищ існуючим екологічним стандартам і нормативам; аналіз спрямованості змін якісних і кількісних характеристик об'єктів навколишнього середовища для різних періодів; порівняння отриманих оціночних показників і тенденцій їх зміни з відповідними параметрами регіонів України.*

*Ключові слова: довкілля, екологічний стан, інформатизація, інформаційні технології.*

М.А. ВОРОНЕНКО, А.Б. ВОРОНЕНКО, Г.С. АБРАМОВ  
Херсонский национальный технический университет**МОНІТОРИНГ САНІТАРНО-ЕПІДЕМІЧЕСКОЇ ОБСТАНОВКИ В РЕГІОНЕ**

*Робота посвящена выявлению уровней риска для здоровья населения и разработке информационной системы и мер, направленных на уменьшение, устранение и предупреждение неблагоприятного воздействия факторов окружающей среды. Для интегральной оценки экологического состояния Херсонской области предложены следующие подходы: сравнение степени несоответствия элементных показателей состояния отдельных природных сред существующим экологическим стандартам и нормативам; анализ направленности изменений качественных и количественных характеристик объектов окружающей среды для различных периодов; сравнение полученных оценочных показателей и тенденций их изменения с соответствующими параметрами регионов Украины.*

*Ключевые слова: окружающая среда, информатизация, экологическое состояние, информационные технологии.*

М.О. VORONENKO, O.B. VORONENKO, G.S. ABRAMOV  
Kherson National Technical University**MONITORING SANITARY-EPIDEMIC SITUATION IN THE REGION**

*The work is dedicated to identify the level of risk to public health and development of information system and measures to reduce, eliminate and prevent adverse environmental factors. For integrated assessment of ecological state of the Kherson region offered the following approaches: comparing the degree of inconsistency element indicators of individual habitats existing environmental standards and regulations; Analysis directional change qualitative and quantitative characteristics of the environment for various periods; comparison of the performance indicators and trends have changed those settings regions of Ukraine.*

*Keywords: environment, informatization, environmental condition, information technology.*

**Постановка проблеми**

Останнім часом все більше уваги приділяється питанням епідемічної безпеки населення України. При цьому визнається велике значення регіонів у формуванні здатності країни попереджати появу епідемічних загроз або нейтралізувати їх негативний вплив [1]. Інформатизація системи епідемічного контролю належить до числа ключових загальнодержавних завдань, від успішного й ефективного вирішення яких залежить перспектива України в найближчому майбутньому зайняти гідне місце серед розвинених країн з високим рівнем соціальної захищеності населення. Сьогодні тільки санітарно-епідеміологічна служба контролює ситуацію в дитячих дошкільних установах, школах, лікарнях, на підприємствах харчової промисловості, торгівлі, громадського харчування. І не лише контролює, а й проводить профілактичні заходи. Щодня десятки, а то і сотні екстрених повідомлень приходять на санітарно-епідеміологічну станцію з підозрою на інфекційне захворювання. По кожному тривожному випадку фахівці виїжджають на місце, проводять відповідну роботу, щоб загасити вогнище інфекції та не допустити її поширення.

**Мета роботи**

Метою роботи є виявлення рівнів ризику для здоров'я людей та розробка заходів, спрямованих на попередження, зменшення і усунення несприятливого впливу чинників довкілля на здоров'я населення.

**Результати досліджень**

На першому етапі дослідження здійснюється оцінка існуючого стану об'єкта, потім визначаються основні показники розвитку та тенденції їх зміни. З такого прогнозу для регіонального рівня важливо

одержати відповідь на питання: «Що станеться, якщо держава не буде вживати заходів щодо врегулювання поточних процесів?»

Поряд з цим визначаються сфери діяльності, в яких для ліквідації надзвичайних ситуацій (НС) необхідне втручання держави. Для розробки найбільш прийнятної методу оцінки індексу регіональної безпеки (ІРБ) слід визначити основні показники розвитку регіонів та соціального стану. Стосовно до епідемічної НС, ІРБ розраховується на базі показників, кожен з яких має власний ваговий коефіцієнт:

1. Показник інфекційної захворюваності населення;
2. Тривалість життя (демографічний розвиток);
3. Екологічна ситуація (в т. ч. показники якості питної води);
4. Стан охорони здоров'я населення;
5. Якість наданих лікувальних або діагностичних послуг;
6. Соціальне середовище та умови проживання населення.

Відповідно до певних умов розвитку епідемічної НС (передкризова, кризова, післякризова, надзвичайна) змінюється значимість цих показників, вагомість їх впливу на ефективність, визначення пріоритетів, розгляд яких дозволяє знайти шляхи забезпечення бажаних результатів.

Таким чином, удосконалення методики оцінки ефективності епідемічного благополуччя населення вимагає застосування моделей і методик, які забезпечили б можливість розробки нормативних прогнозів (наприклад: модель прогнозування забруднень у воді, модель оцінки зараження ґрунту, модель розподілення ресурсів тощо).

Тобто сутність діагностичного аналізу полягає не стільки в оцінці змін, скільки в пошуку причин, що призводять до тієї чи іншої надзвичайної ситуації. Повинна бути можливість не тільки «горизонтального» порівняння (між регіонами), але і розгляду складових нижчого рівня («вертикальний» аналіз). Безумовно, перелік показників може, а в окремих напрямках аналізу навіть повинен змінюватися, однак їх кількісний і якісний склад повинен визначатися законодавчими рамками, тобто вони повинні бути доступними для всіх рівнів влади та їх отримання має вписуватися в рамки бюджетного фінансування.

Розрахунок ІРБ в умовах епідемічної НС базується на інформації, що надається статистичним відділом і відділом епідеміології санітарно-епідеміологічної станції, звітів управління екології Херсонської області, а також щорічними звітними даними лікувальних закладів.

Першою складовою ІРБ є показник інфекційної захворюваності населення, для аналізу якого використовуються такі групи розрахункових показників:

- демографічні показники (загальна чисельність населення, чисельність населення за віковими групами, питома вага чисельності населення об'єкта в загальній чисельності населення досліджуваної території); демографічні показники розраховуються на основі первинних даних і можуть обчислюватися для заданого періоду часу;
- показники інфекційної захворюваності (абсолютна кількість захворювань досліджуваної групи, питома вага захворювань досліджуваної групи у загальній чисельності таких захворювань на досліджуваній території, показник захворюваності на 100 тис. населення).

Спочатку виконується оцінка рівня захворюваності всього населення в окремих зонах досліджуваного району та вікових групах; на підставі оцінки встановлюється ризик розвитку епідемії на територіях досліджуваного району. Результати аналізу використовуються фахівцями для розробки організаційних, санітарно-гігієнічних, протиепідеміологічних та профілактичних заходів.

Другою складовою ІРБ є тривалість життя. На наш погляд, на рівні регіонів слід контролювати не кінцевий результат, а фактори, які його зумовлюють.

Стан здоров'я населення України визнається як критичний. Тривалість життя швидко зменшується і в даний час наша країна знаходиться на рівні найбідніших країн світу [2]. Зміцнення здоров'я в Україні стає національним завданням.

За даними ВООЗ найбільший вплив на стан здоров'я населення (50 - 55%) здійснює спосіб життя, на 20 - 25% він зумовлений навколишнім середовищем, на 15 - 20% - генетичним ризиком, на 10 - 15% - станом системи охорони здоров'я [3]. Одним з найважливіших чинників погіршення стану здоров'я переважна більшість населення (80%) вважає ескалацію бідності, низький рівень заробітної плати, стипендій, пенсій. Таким чином, для збереження здоров'я нації необхідно підвищувати життєвий рівень [1].

Спосіб життя характеризується психоемоційним станом. За твердженням фахівців [1] близько 70 відсотків населення проживає в стані стресу, пов'язаного як з падінням реальних доходів, так і зі зростанням страху перед майбутнім. Тому найважливішим завданням регіонального розвитку є підвищення соціальної захищеності, зменшення рівня безробіття.

Стан здоров'я залежить від можливості надання медичних послуг та безпеки праці на виробництві. Соціально-економічна ефективність може зростати тільки при дбайливому ставленні до навколишнього середовища. Середньорічні втрати ВВП внаслідок погіршення екологічного стану становлять 10 - 15% [3].

Відомо, що сприятливий клімат дозволяє витратити менше коштів на відновлення робочої сили. Але не менший вплив на споживчі витрати створюють екологічні умови. Зростання витрат населення на підтримку здоров'я, нейтралізацію шкідливого впливу навколишнього середовища приводять до збільшення вартості робочої сили.

В умовах, коли більшість населення живе в бідності, неспроможність забезпечити захист організму та відновлення сил веде до поширення захворювань та зниження тривалості життя.

Україна скидає у природні поверхневі водні об'єкти 40% забрудненої води. Поряд з цим регіон забруднює навколишнє середовище лише 3 відсотками неочищеної води.

Аналізуючи фактори, що впливають на тривалість життя, за експертними оцінками їх значущості ВООЗ, пропонуємо другу складову індексу регіональної безпеки (ІРБ) оцінювати за формулою:

$$I_{тж} = 0,6 \cdot I_{сж} - 0,25 \cdot I_{нс} + 0,15 \cdot I_{оз} , \tag{1}$$

де  $I_{тж}$  - інтегральний показник критеріїв, які обумовлюють тривалість життя населення;

$I_{сж}$  - індикатор способу життя;

$I_{нс}$  - індикатор забруднення оточуючого середовища;

$I_{оз}$  - індикатор рівня охорони здоров'я в регіоні.

Індикатор способу життя формується під впливом індикатора заробітної плати, яка визначається співвідношенням рівня середньої заробітної плати в певному регіоні з найвищим рівнем середньої заробітної плати по Україні, і індикатору безробіття. Останній показник теж залежить від співвідношення рівня безробіття по регіонах. Базою порівняння буде найвищий його рівень, а значення індикатора способу життя буде визначатися за формулою:

$$I_{сж} = 0,8 \cdot I_{зп} - 0,2 \cdot I_{б} , \tag{2}$$

де  $I_{зп}$  - індикатор заробітної платні;

$I_{б}$  - індикатор безробіття.

Значення індикатора забруднення навколишнього середовища визначається як середній з трьох показників: індикатора забруднення зворотних вод, індикатора викидів шкідливих речовин в атмосферне повітря і індикатора наявності промислових токсичних відходів у сховищах. Тобто:

$$I_{нс} = \frac{I_{зв} + I_{зп} + I_{зз}}{3} , \tag{3}$$

де  $I_{нс}$  - індикатор забруднення оточуючого середовища;

$I_{зв}$  - індикатор забруднення зворотних вод;

$I_{зп}$  - індикатор викидів шкідливих речовин в атмосферне повітря;

$I_{зз}$  - індикатор наявності промислових токсичних відходів у сховищах.

Індикатор рівня охорони здоров'я, на наш погляд, доречно визначати за формулою:

$$I_{оз} = \frac{I_{кл} + I_{мп} + I_{лл} - I_{пв}}{4} , \tag{4}$$

де  $I_{кл}$  - індикатор кількості лікарів усіх спеціальностей на 10 тисяч населення;

$I_{мп}$  - індикатор кількості медичного персоналу на 10 тисяч населення;

$I_{лл}$  - індикатор кількості лікарняних ліжок на 10 тисяч населення;

$I_{пв}$  - індикатор кількості постраждалих.

Базовими показниками для розрахунку індикаторів забезпечення лікарями, медичним персоналом і лікарняними ліжками стали показники м. Києва, які значно перевищують середні по Україні, і рівень, досягнутий окремими регіонами. Посилаючись на інформацію, що міститься в [5], були розраховані показники індикатора тривалості життя. Результати розрахунку наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

	$I_{сж}$	$I_{нс}$	$I_{оз}$	$I_{тж}$
Україна	0,495	0,795	0,486	0,171
Херсонська область	0,312	0,017	0,456	0,251

Для інтегральної оцінки екологічного стану Херсонської області були запропоновані наступні підходи:

- порівняння ступеня невідповідності елементних показників стану окремих природних середовищ існуючим екологічним стандартам і нормативам;
- аналіз спрямованості змін якісних і кількісних характеристик об'єктів навколишнього середовища для різних періодів;
- порівняння отриманих оціночних показників і тенденцій їх зміни з відповідними параметрами регіонів України.

### Висновки

З урахуванням викладеного вище, екологічну ситуацію в Херсонській області можна оцінити як напружену, що характеризується погіршенням стану порівняно з нормативами.

При складній епідемічній обстановці, яка є в Україні в останні роки, необхідно впровадження інформаційних технологій, насамперед для вирішення завдань санітарно-епідеміологічних служб. Враховуючи ту обставину, що санітарно-епідеміологічні служби мають найбільший обсяг інформації про все населення України [4], і обсяг цієї інформації невпинно зростає, без відповідних інформаційних систем її обробки і побудови математичних моделей, робота цих служб буде малоефективною.

Припускаючи, що в найближчому майбутньому людство може зіткнутися з принципово новими пандеміями, масштаби яких навіть важко уявити, враховуючи загрозу біологічного тероризму, і навіть ймовірність застосування кліматичної зброї, можна зробити висновок, що боротьба з інфекційними захворюваннями не може бути ефективною без створення і впровадження в практику інформаційних систем, і спряжених з ними відповідних систем підтримки прийняття рішень.

### Список використаної літератури

1. Захист населення і територій від надзвичайних ситуацій мирного часу. Навч. посіб. / О.М. Кириллов, Ф.Б. Рогальський, М.О. Вороненко та ін. – Херсон: Херсонський національний технічний університет, 2007. – 328 с.
2. Вороненко М.А. Разработка программного обеспечения для автоматизации процессов анализа санитарно-эпидемического состояния региона/М.А.Вороненко, Г.С. Абрамов// Вестник Херсонского национального технического университета – Херсон: Херсонский национальный технический университет. - №54. – 2015. - С. 214-218.
3. Рогальський Ф.Б. / Информатизация процессов принятия решений в чрезвычайных санитарно-эпидемических ситуациях /Ф.Б. Рогальський, М.А. Вороненко // Шевченківська весна: 8-а міждисц. наук. конф. Київ 22-26 березня 2010 р. – Київ: Ун-т Шевченка, 2010. – С.99-102.
4. Вороненко М.А. Разработка программного обеспечения для автоматизации процессов анализа СЭСР /М.А. Вороненко, Г.С. Абрамов // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: Материалы международной научно-практической конференции. Евпатория, 16-20 мая 2011г. – Херсон: Херсонский морской институт. – 2011. – Т.2. – С.20-23.
5. Отчет об экологической обстановке в Херсонской области за 2009 год//Управление экологии в Херсонской области, 2010. - 17 с.

УДК 681.518.5

И.М. ГВОЗДЕВА, В.В. ДЕМИРОВ  
Национальный университет «Одесская морская академия»**ТРЕНДОВЫЙ КОНТРОЛЬ В СОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМАХ ДИАГНОСТИКИ СУДОВЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК**

*Рассматривается проблема перехода от эксплуатации по назначенному ресурсу к эксплуатации по техническому состоянию судовых энергетических установок. Проведен обзор систем управления и диагностирования, применяемых на современных судах зарубежной постройки. Выполнен анализ методов трендового контроля, используемых в современных судовых системах диагностирования, который указывает на недопустимо высокий уровень ошибок второго рода ("ложных тревог"). Для повышения эффективности систем диагностирования технического состояния судовых энергетических установок предложено усовершенствование используемых в них методов трендового контроля в направлении применения многомерных статистик.*

*Ключевые слова: техническое диагностирование, эксплуатация по техническому состоянию, системы диагностики, методы трендового контроля, трендовые статистики, судовая энергетическая установка.*

I.M. HVOZDEVA, V.V. DEMIROV  
Natsionalnyi universitet "Odeska morskya akademiya"**ТРЕНДОВИЙ КОНТРОЛЬ У СУЧАСНИХ СИСТЕМАХ ДІАГНОСТИКИ СУДНОВИХ ЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК**

*Розглянута проблема переходу від експлуатації по призначеному ресурсу до експлуатації по технічному стану суднових енергетичних установок. Проведено огляд систем керування та діагностування, що використовуються на сучасних суднах закордонної побудови. Виконано аналіз методів трендового контролю, що використовуються у сучасних суднових системах діагностування, який вказує на недопустимо високий рівень помилок другого роду ("помилкових тривог"). Для підвищення ефективності систем діагностування технічного стану суднових енергетичних установок запропоновано вдосконалення використовуваних у них методів трендового контролю у напрямку застосування багатовимірних статистик.*

*Ключові слова: технічне діагностування, експлуатація за технічним станом, системи діагностування, методи трендового контролю, трендові статистики, суднова енергетична установка.*

I.M. HVOZDEVA, V.V. DEMIROV  
National university "Odessa maritime academy"**TREND CONTROL METHODS IN THE MODERN SHIPS POWER PLANTS DIAGNOSTIC SYSTEMS**

*The problem of the transition from the assignment resources operation to the technical state operation of the ships power plants were considered. The control and diagnostic systems, used on modern ships of foreign construction, were reviewed. The trend control methods used in modern marine diagnostics systems were analyzed, which shows an unacceptably high level of the second kind errors ("false errors"). The improvement of trend control methods used in ships power plants technical state diagnostic systems towards the using of multidimensional statistics was proposed.*

*Keywords: technical diagnostics, technical state operation, diagnostic systems, trend control methods, trend statistics, ships power plant.*

**Введение**

В связи с тенденцией перехода от эксплуатации сложных технических объектов (СТО) по назначенному ресурсу к эксплуатации по техническому состоянию требуется принятие мер по повышению эксплуатационной надежности современных судовых энергетических установок (СЭУ), что представляет собой важную научно-техническую проблему. Решение указанной проблемы требует принятия мер по повышению эффективности систем технической диагностики (СТД) путем усовершенствования методов трендового контроля на основе использования современных информационных технологий.

**Основная часть**

Применяемые в настоящее время методы трендового контроля в СТД судовых энергетических установок позволяют установить только факт отклонения регистрируемых параметров от их номинальных значений [1–3], что не дает возможность определить степень возникшей тенденции к изменению

контролируемых параметров и дать прогнозную оценку их возможного состояния. Анализ методов трендового контроля используемых в СТД указывает на недопустимо высокий уровень ошибок второго рода (“ложных тревог”), что приводит к безосновательному снятию объектов с эксплуатации и соответственным экономическим потерям, а также к снижению уровня доверия к надежности диагностических решений СТД. Основная причина указанного явления – игнорирование естественного эксплуатационного тренда [4], так как большинство используемых трендовых статистик основаны на двухальтернативной гипотезе наличия либо отсутствия тренда. Представляется перспективным применение многомерных статистик, учитывающих наличие естественного, связанного с выработкой ресурса, тренда параметров при эксплуатации СЭУ, при этом диагностическое сообщение выдается при установлении различия трендов измеренных и расчетных данных, полученных на основе эталонной модели взаимосвязи параметров нормального работоспособного состояния диагностируемого объекта [4].

Современные суда зарубежной постройки оборудованы такими системами диагностики и контроля параметров СЭУ, как DATACHIEF C20 компании KONGSBERG, которая предназначена для контроля текущих параметров оценки ее технического состояния [5], а также выполняет функцию аварийно-предупредительной сигнализации (рис. 1). Кроме того, в указанной СТД имеется возможность выполнять дистанционное диагностирование с берега, что позволяет выполнять непосредственное наблюдение за эксплуатацией и ремонтом системы.

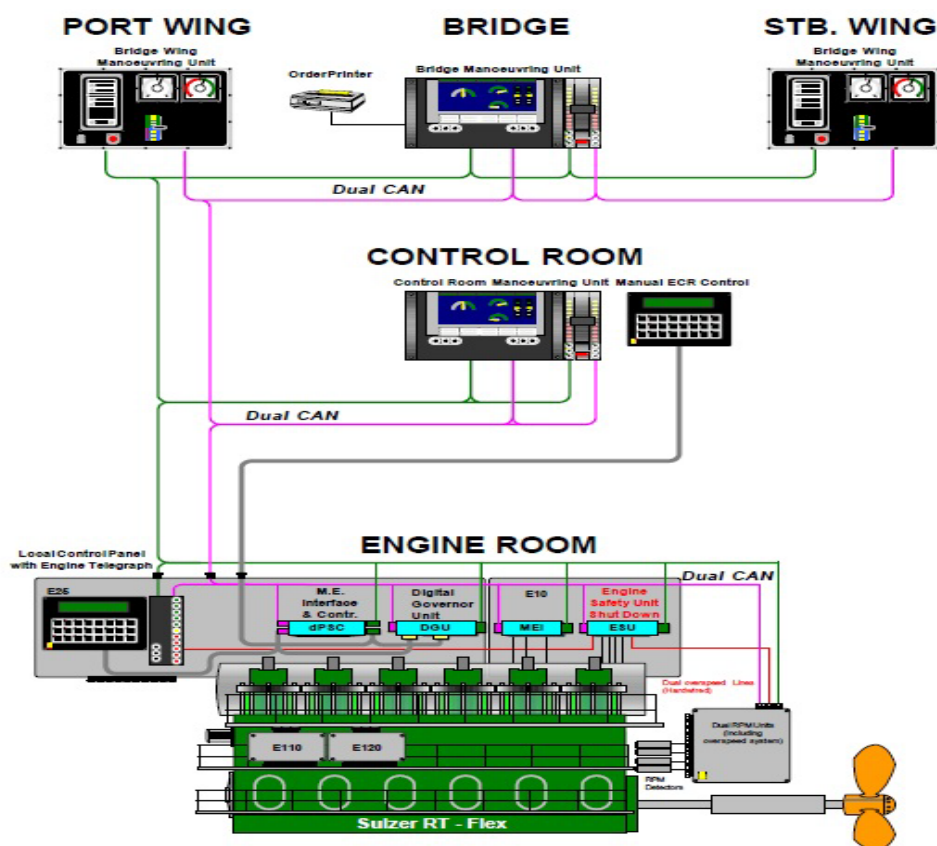


Рисунок 1. Структурная схема системы DATACHIEF C20

Принцип работы известной [6] судовой системы диагностики FAKS (Fault Avoidance Knowledge System) основан на применении методов экспертной оценки возникающих изменений технического состояния СЭУ. В данной СТД предусмотрено также сопоставление данных регистрации с тестовыми данными, полученных на основе использования математических моделей СЭУ, а также компьютерная обработка данных и выдача диагностического сообщения о текущем состоянии СЭУ.

Мониторинговая система диагностики “Watch free system WE22”, разработанная компанией TERASAKI, выполняет функции контроля технического состояния СЭУ и оповещения о выходе контролируемого параметра за установленные пределы, вывода информации о текущем состоянии СЭУ, управления вспомогательными механизмами СЭУ (контроль ошибок в работе, управление клапанами и т.п.), обмена информацией между операторскими станциями, которые могут располагаться в разных частях судна, что позволяет осуществлять удаленный мониторинг СЭУ и производить контроль текущих параметров, а также в данной СТД предусмотрен подсчет часов работы СЭУ, по которым определяется необходимость ее текущего ремонта [7].



Система RT-flex фірми Wartsila (рис. 2) состоит из внутренней системы управления WECS (wartsila engine control system) и внешней дистанционно-автоматической системы управления главным двигателем, имеет возможность осуществления контроля текущего технического состояния СЭУ, а также тестирования, прогнозирования основных параметров, характеризующих функционирование СЭУ [1,2].

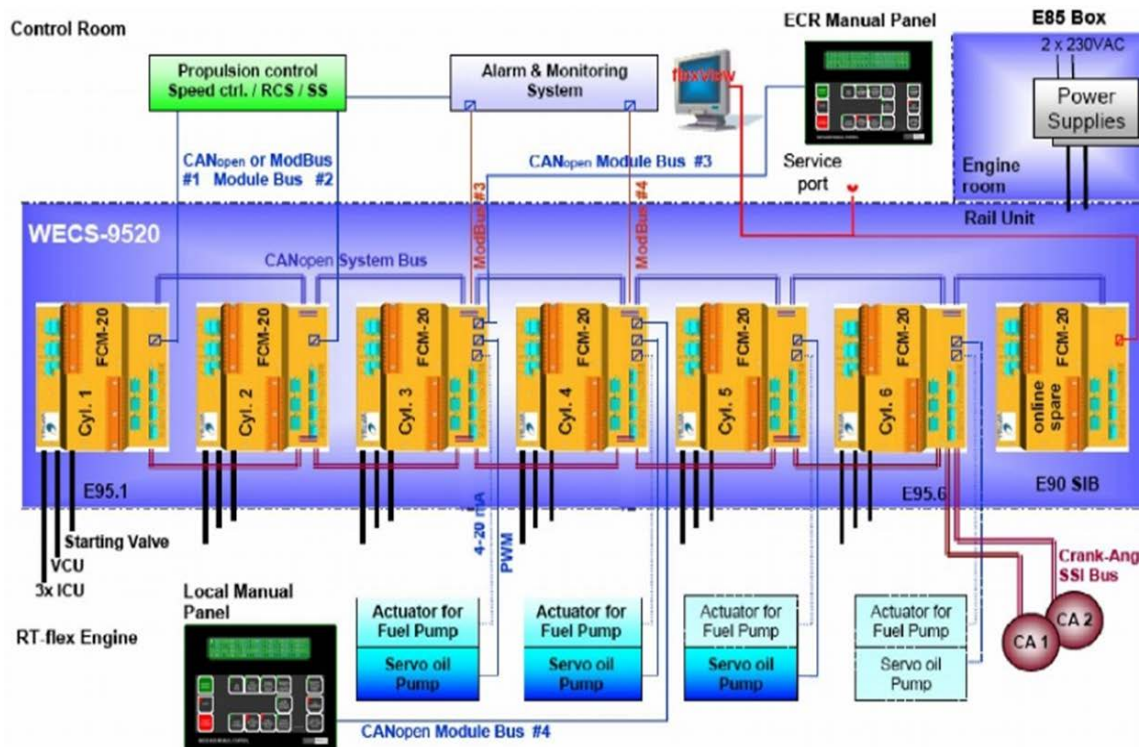


Рисунок 2. Структурная схема системы Wartsila RT-Flex

В работе [8] предложено использование многомерного анализа временных рядов для решения задач прогноза состояния сложных технических объектов, что позволяет расширить признаковое пространство принятия решений и, тем самым, повысить надежность диагностических выводов. Такой переход возможен на основе формирования многомерных массивов из данных регистрации технического состояния – диагностических параллелепипедов. Анализ диагностических параллелепипедов выполняется путем разложения составляющих их прямоугольных матриц по сингулярным числам. Такое разложение позволяет установить закономерности развития совместных трендов и закономерности влияния скрытых факторных компонент.

В [9] рассмотрены наиболее часто применяемые критерии статистического оценивания тренда, такие как:

- интегральный S-критерий

$$S_i = \sum_{k=1}^i (Y_k - \bar{Y}_k) > S_{KP_i}; \tag{1}$$

- r-критерий Хальда-Аббе

$$r_k = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (Y_{k+1} - Y_k)^2 < r_{KP_k}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2$$

- t-критерий Стьюдента

$$t_i = \frac{\bar{d}_i}{S_{\bar{d}}} > K_{\alpha} t_{KP(i-1, \alpha)}; \tag{3}$$

– оценка значимости критерия ранговой корреляции Спирмена при большом числе отсчетов с использованием распределения Стьюдента

$$t_i = |r_s| \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} > t_{KP(i-2,\alpha)}. \quad (4)$$

Обзор наиболее часто используемых критериев трендового анализа указывает на возможность установить лишь факт отсутствия тренда на установленном уровне значимости. В известных методах не учитывается наличие естественного тренда, вызванного выработкой ресурса, вследствие чего методы трендового контроля используются для краткосрочного анализа технического состояния СЭУ. Совершенствование СТД, применяемых для контроля состояния сложных технических объектов, должно идти в направлении усовершенствования трендовых критериев с учетом естественного тренда параметров технического состояния СЭУ в течение их жизненного цикла.

На основе проведенного анализа методов трендового контроля, применяемых в современных СТД СЭУ, необходимо отметить следующее:

- в существующих СТД осуществляется проверка соответствия текущих параметров оценки технического состояния диагностируемых объектов их номинальным значениям без учета степени старения объекта и возможных отклонений номинальных контролируемых параметров в процессе жизненного цикла изделия;

- каждая СЭУ имеет свои конструктивные особенности, поэтому для оценки ее технического состояния и решения задач прогнозирования необходимо создание индивидуальной математической модели для повышения достоверности результатов диагностирования.

#### Выводы

Представляется перспективным усовершенствование методов трендового контроля, применяемых в СТД технического состояния судовых энергетических установок в направлении применения многомерных статистик, учитывающих наличие естественного, связанного с выработкой ресурса, тренда параметров при эксплуатации СЭУ.

#### Список использованной литературы

1. Wartsila 2 stroke engines Manual “Operator flexView”. – Switzerland, 2008. – P. 152.
2. Wartsila RT-flex82C Operating manual “Marine”. – 2009. – rev 2.3.1. – P. 42.
3. Миська А.Р., Трендовый контроль режимных параметров дизель-генераторных установок / А.Р.Миська // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков. – 2010. – С. 154–157.
4. Миргород В.Ф. Оценка доверительных интервалов трендовой компоненты временных рядов / В.Ф.Миргород, Е.В.Деренг // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков, 2014. – С. 175–179.
5. Kongsberg Norcontrol marine automation systems. – Norway, 2005. – 140 p.
6. Электронный ресурс. – [http://www.eurostarltd.net/prog/voznitskii\\_sredneoborotnye.htm](http://www.eurostarltd.net/prog/voznitskii_sredneoborotnye.htm).
7. Варбанец Р.А. Системы компьютерной диагностики судовых дизелей / Р.А. Варбанец. Судостроение, 2004. – С. 24–27.
8. Миргород В.Ф. Многомерный трендовый анализ временных рядов в задачах оценки технического состояния / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков, 2012. – С. 241–244.
9. Епифанов С.В. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей / С.В. Епифанов, В.И. Кузнецов, И.И. Богаенко и др. – К.: Техника, 1998. – 312 с.

УДК 528.8:004

В.В. ГНАТУШЕНКО

Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара

О.О. КАВАЦ, Е.Б. ГАЛЬЧЕНКО

Національна металургійна академія України

Ю.В. КАВАЦ

Національна металургійна академія України, EOS Data Analytics Ukraine

## ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ РОЗПІЗНАВАННЯ БУДІВЕЛЬ НА БАГАТОКАНАЛЬНИХ ФОТОГРАМЕТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕННЯХ ВИСОКОЇ ПРОСТОРОВОЇ ЗДАТНОСТІ НА ОСНОВІ МОРФОЛОГІЧНИХ ІНДЕКСІВ

*В роботі запропоновано інформаційну технологію розпізнавання будівель на багатоканальних фотограмметричних зображеннях високої просторової здатності на основі морфологічних індексів. Автоматизована технологія включає різні методи обробки зображення на різних стадіях і визначає необхідність паншарпенінга даних перед процедурою розпізнавання об'єктів. Результати досліджень свідчать про те, що застосування інформаційної технології підвищує якість розпізнавання будівель в порівнянні з класичними методами, ефективно визначаючи границі та контури будівель складної форми.*

*Ключові слова: багатоканальні фотограмметричні зображення, тематична обробка, просторова здатність, інформаційна технологія розпізнавання, морфологічний індекс.*

В.В. ГНАТУШЕНКО

Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара

А.А. КАВАЦ, Э.Б. ГАЛЬЧЕНКО

Национальная металлургическая академия Украины

Ю.В. КАВАЦ

Национальная металлургическая академия Украины, EOS Data Analytics Ukraine

## ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ЗДАНИЙ НА МНОГОКАНАЛЬНИХ ФОТОГРАМЕТРИЧНИХ ІЗОБРАЖЕННЯХ ВИСОКОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ

*В работе предложена информационная технология распознавания строений на многоканальных фотограмметрических изображениях высокого пространственного разрешения на основе морфологических индексов. Автоматизированная технология включает различные методы обработки изображения на различных стадиях и подчеркивает необходимость паншарпенинга данных перед процедурой распознавания объектов. Результаты исследований свидетельствуют о том, что применение информационной технологии повышает качество распознавания зданий по сравнению с классическими методами, эффективно определяя границы и контуры зданий сложной формы.*

*Ключевые слова: многоканальные фотограмметрические изображения, тематическая обработка, пространственное разрешение, информационная технология распознавания, морфологический индекс.*

V. HNATUSHENKO

O. Honchar Dnepropetrovsk National University

O. KAVATS, E. GALCHENKO

National Metallurgical Academy of Ukraine

Y. KAVATS

National Metallurgical Academy of Ukraine, EOS Data Analytics Ukraine

## INFORMATION TECHNOLOGY OF BUILDINGS RECOGNITION ON MULTICHANNEL PHOTOGRAMMETRIC HIGH SPATIAL RESOLUTION IMAGES BASED ON MORPHOLOGICAL INDICES

*The paper presents the information technology of building recognition on multichannel photogrammetric images of high spatial resolution on the basis of morphological indices. Automated technology includes various methods of image processing in different stages and emphasizes the need to data pansharpening before object recognition procedure. The research results indicate that the use of information technology improves the quality of buildings recognition than classical methods, effectively defining the boundaries and contours of complex shape buildings.*

*Keywords: multichannel photogrammetric images, thematic processing, spatial resolution, information technology, recognition, morphological index.*

### Постановка проблеми

Стрімкий розвиток інформаційних технологій призвів до використання супутникових зображень високої та надвисокої роздільної здатності у багатьох галузях людської діяльності. Сучасні супутникові багатоканальні фотограмметричні знімки є джерелом отримання різноманітної інформації. Наприклад, за таким видом зображень можна проводити:

- оперативний моніторинг дислокації військової техніки;
- моніторинг будівництва та реконструкції об'єктів;
- планування і контроль розвитку інфраструктури;
- виявлення вирубок ліса;
- моніторинг стану водосховищ;
- моніторинг транспортної мережі міста та вирішувати багато інших задач.

Серед безлічі різних задач, які вирішуються за допомогою обробки даних дистанційного зондування особливе місце займає задача оперативного моніторингу. Цей клас задач потребує визначення змін на різночасових сценах зображень високої роздільної здатності за короткий термін. Для застосування в будь-якій з областей аерокосмічних зображень з них повинна бути вилучена необхідна інформація. Одним з найбільш складних і дорогих з точки зору витрат часу є процес розпізнавання і локалізації різних об'єктів або характерних рис місцевості природного і штучного походження, таких, як русла річок, берегові лінії, будівлі, дороги і т.п. Через великих витрат на обробку даних, автоматизація цього процесу набуває актуального значення. Розвиток галузі дистанційного зондування Землі обумовлений не тільки постійно зростаючою кількістю супутникових систем, але і поліпшенням технічних характеристик. На сьогоднішній день супутник WorldView-3 дозволяє отримувати знімки надвисокої просторової здатності. У багатоканальному режимі роздільна здатність системи складає 1,2 м, а в ближньому ІЧ - 3,7 м. Слід зазначити, що сучасні системи дистанційного зондування Землі фіксують одночасно панхроматичні зображення і багатоспектральні дані, які у порівнянні з панхроматичними мають більш низьку просторову здатність. Наслідком таких модифікацій технічних характеристик супутникових систем є зростання обсягу даних як кількісно, так і на одиницю зберігання, що стає на заваді ручного розпізнавання штучних об'єктів. Для ручної локалізації штучні об'єкти (зокрема, будівлі) досить складні і вимагають значної кількості точок для опису. У зв'язку з цим широко затребувані автоматичні і напівавтоматичні способи розпізнавання штучних об'єктів, які потребують участі оператора тільки для контролю процесу розпізнавання об'єктів тематичного шару.

### Аналіз останніх досліджень

У роботі [1] проведено аналіз ефективності сучасних методів класифікації цифрових багатоканальних супутникових зображень високої просторової здатності. Традиційно, для розпізнавання фотограмметричних зображень використовують класифікацію з навчанням (контрольована класифікація) або класифікацію без навчання (неконтрольована класифікація). Методи неконтрольованої класифікації мають певні недоліки, зокрема, спектральні властивості отриманих класів змінюються з часом, тому зв'язок між інформацією та спектральними класами не постійний і визначається лише знімком, що ускладнює процес дешифрування різночасових зображень. З іншого боку, будь-яка класифікація з навчанням є більш трудомісткою, а її точність залежить від якості та кількості вибраних навчальних областей. Результати неконтрольованої класифікації виявилися незадовільними, тому було зроблено висновок, що неконтрольовану класифікацію краще використовувати для визначення класів об'єктів або як попередній етап перед контрольованою класифікацією. Класифікація способом спектрального кута добре ідентифікує водні об'єкти, але присутні похибки визначення лісових масивів та рослинності, погано розпізнані дороги та будівлі. При класифікації методом паралелепіпедів досить добре виділяються водні об'єкти, хоча їх кордони часто розмиті; трав'яниста рослинність також іноді розпізнається як об'єкти класу «будівлі». Результат класифікації за мінімальною відстанню виявився кращим за попередні, але погано були класифіковані будівлі зі складними архітектурними формами та дороги, межі класифікованих об'єктів не збігаються з реальними границями об'єктів. При використанні методу класифікації за правилом максимальної правдоподібності складно дешифруються водойми та об'єкти забудови, особливо на міських територіях, де багато висотних споруд. Більшість пропонуваніх рішень засновані на геометричних і яскравісних перетвореннях цифрових знімків, до яких відносяться методи побудови контурів зображення, градієнтні методи і методи кластеризації, що застосовуються для сегментації супутникових зображень на тематичні однорідні області, які характеризуються недостатньою точністю і високими затратами часу на обробку багатоканальних даних.

### Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Незважаючи на велику наявність різних систем автоматизованого дешифрування і векторизації картографічних зображень, коло вирішуваних ними завдань вельми обмежено. Процес виділення будівель слабо автоматизований і вимагає комплексного вирішення задачі розпізнавання, оскільки геометричні та характеристики яскравості об'єктів забудови можуть відрізнятися в межах одного зображення, а об'єкти розпізнавання можуть бути перекриті на знімках іншими об'єктами, такими як рослинність, будівлі, транспортні засоби. Виникає необхідність у розробці інформаційної технології розпізнавання будівель на

багатоканальних аерокосмічних зображеннях високої просторової здатності, використання якої забезпечувало кращі результати (підвищення точності розпізнавання).

#### Основна частина

Проведені дослідження, описані у роботах авторів [2, 3], довели необхідність застосування на первинному етапі етапу підвищення інформативності багатоканального зображення. Основою інформаційної технології розпізнавання будівель є побудова відносин між спектральними характеристиками будівель (наприклад, яскравість або контраст) і фізичними характеристиками (наприклад, висота або спрямованість), які можна описати наступними параметрами:

- Яскравість каналу є найбільш значущою.
- Локальний контраст - відносно висока відбивна здатність покрівель будівель і тіней призводить до високої локальної відмінності будівель.
- Розмір - будинки в зображеннях з високою просторовою здатністю показують складні просторові моделі з різними характеристиками.
- Спрямованість. Складним завданням при визначенні морфологічного індексу є завдання автоматичної фільтрації доріг, які мають дуже схожий спектральний коефіцієнт відбиття як і будівлі. Дороги завжди витягнуті в одному або в декількох напрямках, на відміну від будівель.

Морфологічний індекс будівель (МВІ) розраховується за наступним виразом:

- 1) Пошук максимального значення каналів кожного пікселя [4,5]:

$$b(i) = \max_{1 \leq k \leq K} (band_k(i)), \quad (1)$$

де  $k$  - спектральні канали;  $i$  - піксель зображення.

- 2) Диференціальний морфологічний профіль ( $DMP$ ) трансформації (Тор-Нат) дахів. Спектральні характеристики будівель використовують  $DMP$  - перетворення дахів, (ТН- $DMP$ ) визначається наступним виразом:

$$TH - DMP(d, s) = |TH_b(d, s) - TH_b(d, s - \Delta s)|, \quad (2)$$

де

$$TH_b(d, s) = b - \gamma_b^{re}(d, s), \quad (3)$$

де  $\gamma_b^{re}$  - є результатом морфологічних операцій відкриття з реконструкцією над зображенням  $b$ ,  $s(s_{\min} \leq s \leq s_{\max})$  і  $d$  вказує на розмір і напрямок лінійного (SE) структурного елемента.

- 3) Безпосередньо розрахунок морфологічного індексу відбувається за наступним виразом:

$$MBI = \frac{\sum_d \sum_s TH - DMP(d, s)}{D \times S}, \quad (4)$$

де  $D$  і  $S$  - значення напрямку і величина, відповідно. Найбільш поширені 4 напрямки ( $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  і  $180^\circ$ ). Значення параметрів визначаються відповідно до розмірів будівель і просторового розділення  $MBI$  заснованого на тому факті, що будівельні конструкції мають великі значення і напрямки від більшості варіантів, в основному через локальний контраст і ізотропність. Як наслідок, структури з великими значеннями МВІ швидше за все будуть будівлями. Тим самим їх можна відфільтрувати від інших елементів.

Для програмної реалізації запропонованої інформаційної технології було прийнято рішення про використання мови C++ з бібліотекою OpenCV версії 3.1.0. Тестування алгоритму проводилося на багатоканальному супутниковому зображенні WorldView-3. Результат роботи інформаційної технології наведено на рисунку 1.



а)



б)

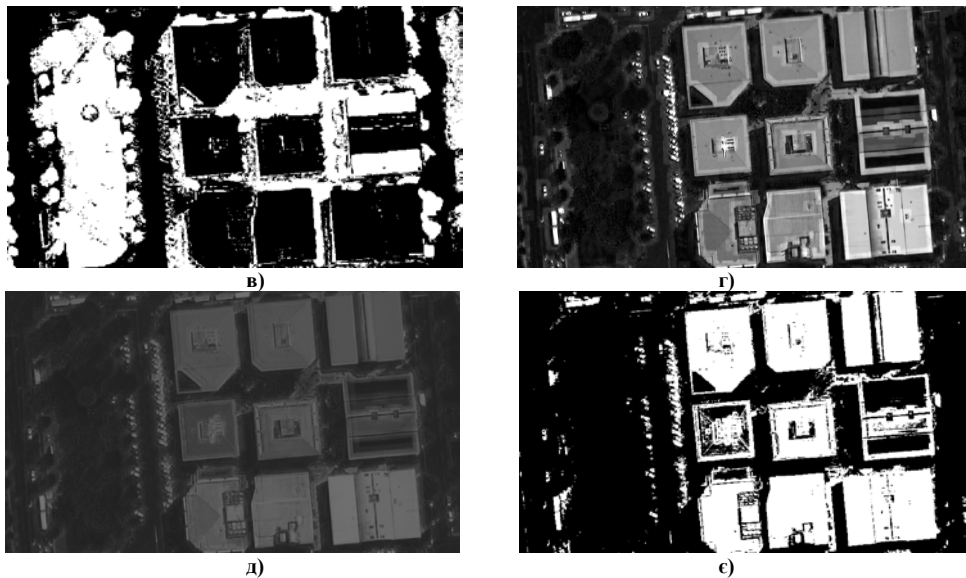


Рис. 1. Фрагмент супутникового зображення:

а) багатоканальне зображення з підвищеною інформативністю; б) зображення з визначеними максимальними значеннями пікселів; в) маска визначення вегетації та тіней; г) зображення з визначеним показником диференціального морфологічного профілю трансформації дахів; д) зображення з визначеним МВІ; е) зображення після застосування маски морфологічного визначення дахів будівель

#### Висновки та перспективи подальших досліджень

У роботі запропоновано інформаційну технологію розпізнавання будівель на багатоканальних фотограмметричних зображеннях високої просторової здатності на основі морфологічних індексів. Проведені дослідження показали, що застосування інформаційної технології розпізнавання будівель на основі морфологічних індексів призводить до чіткого визначення дахів будівель у порівнянні з класичними алгоритмами класифікації. Наші подальші дослідження будуть присвячені вдосконаленню розробленої інформаційної технології.

#### Список використаної літератури:

1. Гнатушенко В.В. Умови та обмеження методів інтелектуальної обробки космічних зображень для подальшого 3D моделювання /В.В. Гнатушенко, О.О. Кавац, Ю.О. Кібукевич // Науково-теоретичний журнал «Штучний інтелект» 2015. - м.Київ, 2015р. - Вип. '1-2(67-68). - С.54-63.
2. Hnatushenko V.V. Efficiency Determination of Scanner Data Fusion Methods of Space Multispectral Images / V.V. Hnatushenko, O. O. Kavats, Y. O. Kibukevych // International Young Scientists Forum on Applied Physics «YSF-2015». Dnipropetrovsk, Ukraine, September 29 - October 2, 2015 / IEEE Catalog Number: CFP15YSF-CDR. ISBN: 978-1-4673-6976-3 Doi: 10.1109/YSF.2015.7333153.
3. Hnatushenko V.V. Pansharping technology of high resolution multispectral and panchromatic satellite images / V.V. Hnatushenko, O. O. Kavats, Vik.V.Hnatushenko, V.Ju. Shevchenko // Scientific bulletin of National Mining University. - State Higher Educational Institution “National Mining University”, - Dnipropetrovsk, 2015. - № 4 (148). - С. 91-98.
4. Huang X. Building Change Detection From Multitemporal High-Resolution Remotely Sensed Images Based on a Morphological Building /Xin Huang, Liangpei Zhang, Tingting Zhu// IEEE journal of selected topics in applied earth observations and remote sensing. No 7(1):105-115. - January 2014. DOI: 10.1109/JSTARS.2013.2252423.
5. Huang X. A multidirectional and multiscale morphological index for automatic building extraction from multispectral GeoEye-1 imagery. Photogramm. Eng. Remote Sens /X. Huang, L. Zhang// Jul. 2011, - Vol. 77, No. 7, P. 721–732.
6. Huang X. Morphological building/shadow index for building extraction from high-resolution imagery over urban areas /X. Huang, L. Zhang// IEEE J. Sel. Topics Appl. Earth Obs. Remote Sens., - Feb. 2012, - Vol. 5, No. 1, P. 161–172.
7. Bovolo F. Analysis and adaptive estimation of the registration noise distribution in multitemporal VHR images /F. Bovolo, L. Bruzzone, S. Marchesi// IEEE Trans Geosci. Remote Sens., - , Aug. 2009. - Vol. 47, No. 8, P. 2658–2671.
8. Im J. Object-based change detection using correlation image analysis and image segmentation /J. Im, J. R. Jensen, J. A. Tullis // Int. J. Remote Sens., - Jan. 2008, - Vol. 29, No. 2, P. 399–423.

УДК 621.9:004.38

Вікт.В. ГНАТУШЕНКО, О.О. ПАЛТКО

Національна металургійна академія України

### ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ БЕЗДРОТОВОЇ СЕНСОРНОЇ МЕРЕЖІ НА ЧАС ІСНУВАННЯ

*Концепція бездротових сенсорних мереж привертає увагу через свою здатність до самоорганізації, автономності та високої відмовостійкості. В рамках дослідження отримав подальший розвиток підхід до вирішення задачі впливу радіуса передачі даних та переешкод на час життя бездротової сенсорної мережі. Імітаційне моделювання проведено за допомогою симулятора мереж Castalia з низьким енергоспоживанням, що дозволяє моделювати рівні передачі даних, фізичні процеси, дані про які збираються на вузлах. Проведений аналіз отриманих даних дає можливість зробити висновки, що надійність зв'язку між вузлами залежить від топології та рівень потужності сигналу суттєво не впливає на якість передачі даних. На споживання енергії вузлом впливає алгоритм роботи, який побудовано за моделлю збору інформації. При оцінці надійності передачі пакетних даних між вузлами спостерігається спочатку збільшення втрати пакетів через недостатній рівень сигналу; зі збільшенням рівня переешкод кількість доставлених пакетів збільшується, що може бути обумовлено використанням певних алгоритмів канального рівня. Для оптимізації часу існування бездротової сенсорної мережі необхідно брати до уваги як параметри передачі трафіку, так і розташування елементів та вплив переешкод.*

*Ключові слова: бездротова сенсорна мережа, параметр, модель, час існування.*

Вікт.В. ГНАТУШЕНКО, А.А. ПАЛТКО

Національная металлургическая академия Украины

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ БЕСПРОВОДНОЙ СЕНСОРНОЙ СЕТИ НА ВРЕМЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ

*Концепция беспроводных сенсорных сетей привлекает внимание из-за своей способности к самоорганизации, автономности и высокой отказоустойчивости. В рамках исследования получил дальнейшее развитие подход к решению задачи влияния радиуса передачи данных и помех на время жизни беспроводной сенсорной сети. Имитационное моделирование проведено с помощью симулятора сетей Castalia с низким энергопотреблением, что позволяет моделировать уровни передачи данных, физические процессы, данные о которых собираются на узлах. Проведенный анализ полученных данных позволяет сделать выводы, что надежность связи между узлами зависит от топологии и уровень мощности сигнала существенно не влияет на качество передачи данных. На потребление энергии узлом влияет алгоритм работы, который построен по модели сбора информации. При оценке надежности передачи пакетных данных между узлами наблюдается сначала увеличение потери пакетов из-за недостаточного уровня сигнала; с увеличением уровня помех количество доставленных пакетов увеличивается, что может быть обусловлено использованием определенных алгоритмов канального уровня. Для оптимизации времени существования беспроводной сенсорной сети необходимо принимать во внимание как параметры передачи трафика, так и расположение элементов и влияние помех.*

*Ключевые слова: беспроводная сенсорная сеть, параметр, модель, время существования*

Vikt.V.HNATUSHENKO, O.O. PALTKO

National Metallurgical Academy of Ukraine

### RESEARCH OF THE PARAMETERS WIRELESS SENSOR NETWORK FOR THE DURATION THE LIFETIME

*The concept of wireless sensor networks attracts attention because of its ability to self-organization, autonomy, and high availability. The study was further developed approach to the impact of data-range problems and interference on the lifetime of wireless sensor network. Simulation is performed using the simulator Castalia networks with low power consumption that allows you to simulate data transfer rates, the physical processes for which data are collected on the nodes. The above analysis of the data leads to the conclusion that the reliability of communication between the nodes depends on the topology and the signal strength does not significantly affect the quality of the data. On the node energy consumption affects the algorithm, which is built on the model of information gathering. When evaluating the reliability of transmission of packet data is first observed increase in packet loss between the nodes due to insufficient signal strength; an increase in the number of delivered packets interference increases that can be caused by using a link layer specific algorithms. To optimize the lifetime of the wireless sensor network, you must take into account both the traffic parameters and location of components and the effect of noise.*

*Keywords: wireless sensor network, the parameter model, lifetime*

### Постановка проблеми

Бездротова сенсорна мережа (БСМ) – це розподілена мережа, що самоорганізується та складається з множини датчиків (сенсорів) і виконавчих пристроїв, об'єднаних між собою за допомогою радіоканалу. Причому область покриття подібної мережі може становити від декількох метрів до декількох кілометрів за рахунок здатності ретрансляції повідомлень від одного елемента до іншого. Концепція бездротових сенсорних мереж привертає увагу через свою здатність до самоорганізації, автономності та високої відмовостійкості. БСМ мережі активно застосовуються в системах безпеки і військових додатках, в медицині для моніторингу здоров'я, пов'язаного з розробкою біологічних сенсорів, сумісних з інтегральними схемами сенсорних вузлів. Найбільшого поширення БСМ отримали в області моніторингу навколишнього середовища і живих істот.

Елементи БСМ взаємодіють один з одним і залежать один від одного таким чином, що відмови в окремих точках мережі можуть знизити інформаційну значимість переданих даних, при цьому працездатність системи зберігається. У реальних ситуаціях існують різноманітні природні і техногенні перешкоди, вплив яких призводять до відмов в окремих точках БСМ і до спотворення переданої інформації. На практиці потужність елемента живлення одного сенсора невисока, проте надмірна кількість сенсорів, а також правильна організація їх функціонування і топології сенсорної мережі дозволяє істотно збільшити час безперебійної роботи (час життя), забезпечити максимальний час функціонування вузлів, надійність і відмовостійкість.

### Аналіз останніх досліджень

Проблемам, пов'язаним з максимізацією часу життя БСМ, присвячено чималу кількість публікацій [1–3]. Для повноцінного функціонування БСМ потрібна зв'язність обраної підмножини сенсорів [4–5]. Розглянуто питання вибору сукупності зв'язкових покриттів, що забезпечують максимальний час життя мережі і евристичний метод його рішення [6]. Ефективним способом продовження часу життя БСМ є можливість регулювання областей моніторингу і дальності передачі. В [7] запропоновано моделі покриття області сенсорами з адаптивними радіусами моніторингу та зв'язку. В [8] розглянуто нові моделі покриття з адаптивними радіусами моніторингу та зв'язку, які забезпечують істотний вигравш в економії енергії в порівнянні з відомими раніше. Наявність наведених проблем обумовлює актуальність задачі дослідження впливу перешкод, радіусу передачі на час повноцінного функціонування бездротової сенсорної мережі, що дозволить на практичному рівні знизити трудовитрати при впровадженні систем моніторингу.

### Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Метою роботи є збільшення часу існування БСМ за допомогою розрахунку впливу потужності передачі радіосигналу та оцінки перешкод з урахуванням можливості її практичного відтворення, а також проведення імітаційного моделювання, що забезпечує отримання оптимального рішення.

### Основна частина

Надійність бездротових сенсорних мереж визначається багатьма факторами, найбільш суттєвими з яких є: надійність апаратного і програмного забезпечення вузлів, область розгортання мережі, взаємне розташування вузлів, період регламентного обслуговування мережі, інтенсивність збору і передачі інформації кінцевими вузлами, розмір переданих пакетів інформації.

Імітаційне моделювання проведено за допомогою симулятора мереж Castalia з низьким енергоспоживанням, що дозволяє моделювати рівні передачі даних, фізичні процеси, дані про які збираються в вузлах.

Модуль вузла є складовим. На рис. 1 показана внутрішня структура вузла. Суцільні стрілки означають передачу повідомлень і пунктирні – функції, які викликаються.

Вузли розташовані в просторі на одній площині в області розміру 45 м на 45 м (рис. 2). Час моделювання 100 с. Кожен вузол з інтервалом 100 мс відправляє повідомлення, утворюючи рівномірний потік повідомлень. При отриманні повідомлення від вузла, лічильник повідомлень для нього інкрементується.

В ідеальних умовах комунікаційного середовища без перешкод майже всі пакети були отримані (93–98%), тобто можемо говорити про надійність зв'язку між вузлами з певною ймовірністю.

Проведено імітаційне моделювання роботи БСМ при наявності перешкод (перешкода – стороннє втручання, що діє в системі передачі і перешкоджає правильному прийому сигналів) [7]. Джерела перешкод можуть перебувати як зовні, так і всередині самої системи передачі. Прикладами зовнішніх перешкод можуть служити предмети які перешкоджають проходженню сигналу, атмосферні явища, приклади внутрішніх – збої пристрою.

Величина перешкод в системі Castalia задається параметром SN.wirelessChannel.sigma, а сама величина перешкод розраховується за формулою [1]:

$$PL(d) = PL(d_0) + 10 \cdot \eta \cdot \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + X_\sigma$$

де  $PL(d)$  – втрати передачі на відстань  $d$ ,  $PL(d_0)$  є відомим значенням втрати на початкової відстані  $d_0$ ,  $\eta$  – показник втрат, і  $X_\sigma$  є випадковою величиною зі стандартним відхиленням  $\sigma$ .



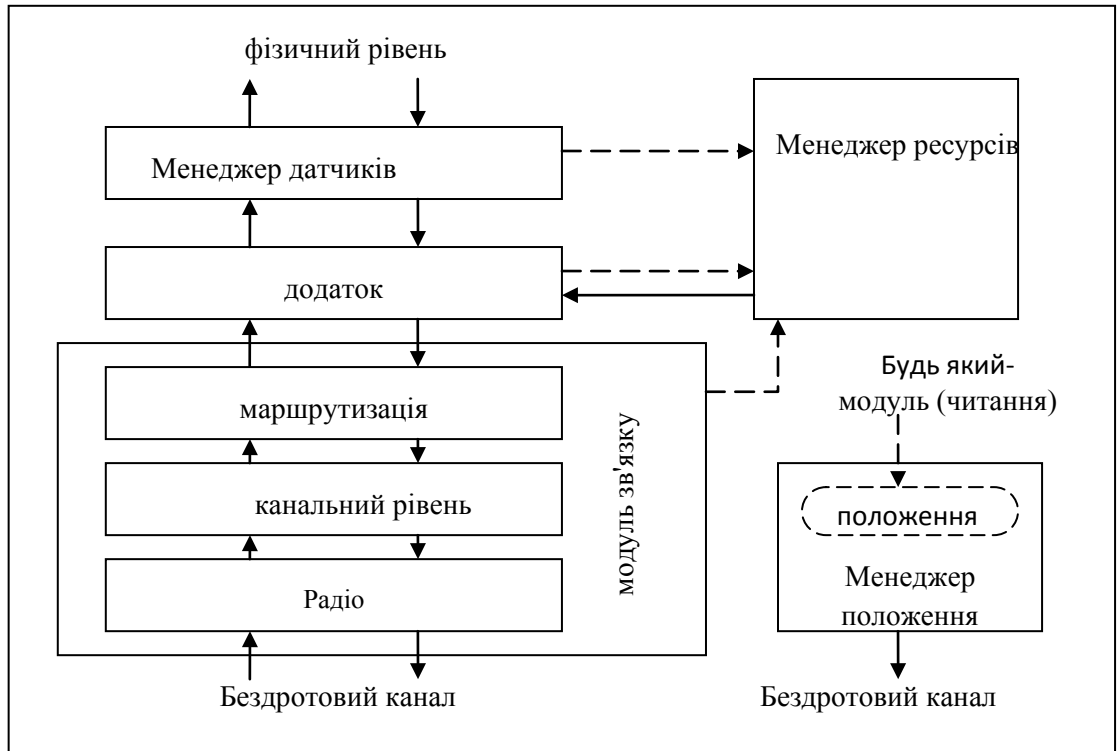


Рисунок 1 - Структура модуля вузла

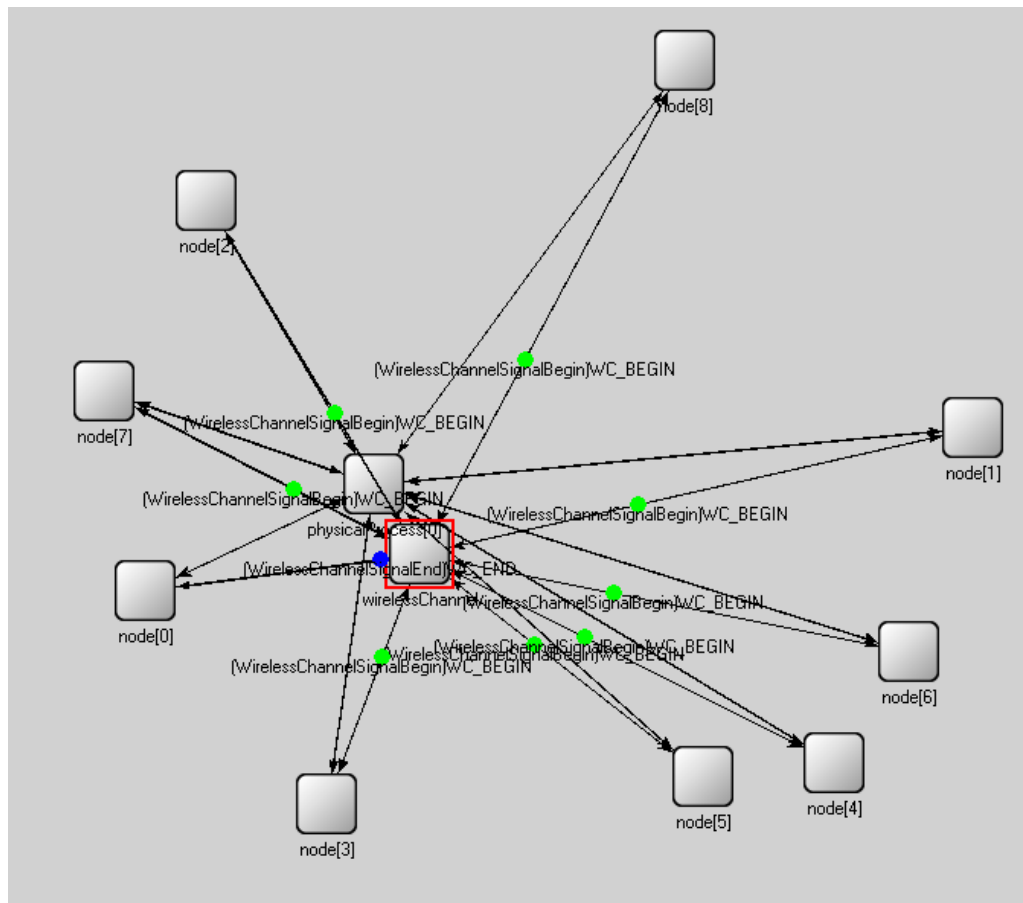


Рисунок 2 - Запуск моделювання в системі Castalia

На рис. 3 видно, що зі збільшенням параметра  $\sigma$  ймовірність доставки пакета зменшується, а значить і надійність, проте ж різкого зростання зниження немає. Із зростанням величини перешкод кількість

отриманих пакетів не падає значно, тобто можемо говорити, що надійність вже не залежить від рівня перешкод, що може бути обумовлено протоколом канального рівня.

### Sigma

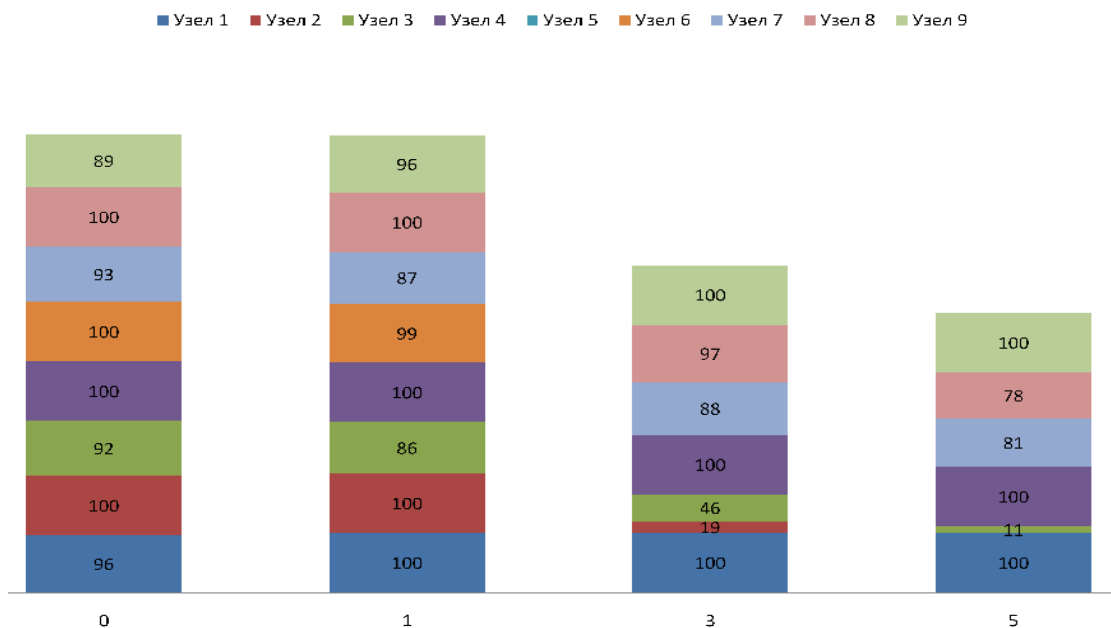


Рисунок 3 - Кількість пакетів, отриманих при різних рівнях перешкод

Проведено аналіз впливу потужності радіо-модуля при передачі повідомлень. На рис. 3 представлена діаграма, що ілюструє кількість пакетів які отримав п'ятий вузол від інших, де *TxPower* – параметр, який відповідає за рівень потужності радіо-модуля. Із зростанням величини потужності кількість отриманих пакетів зростає та остається подальше стабільною, тобто надійність вже не залежить від рівня потужності радіо-модуля.

### TxPower

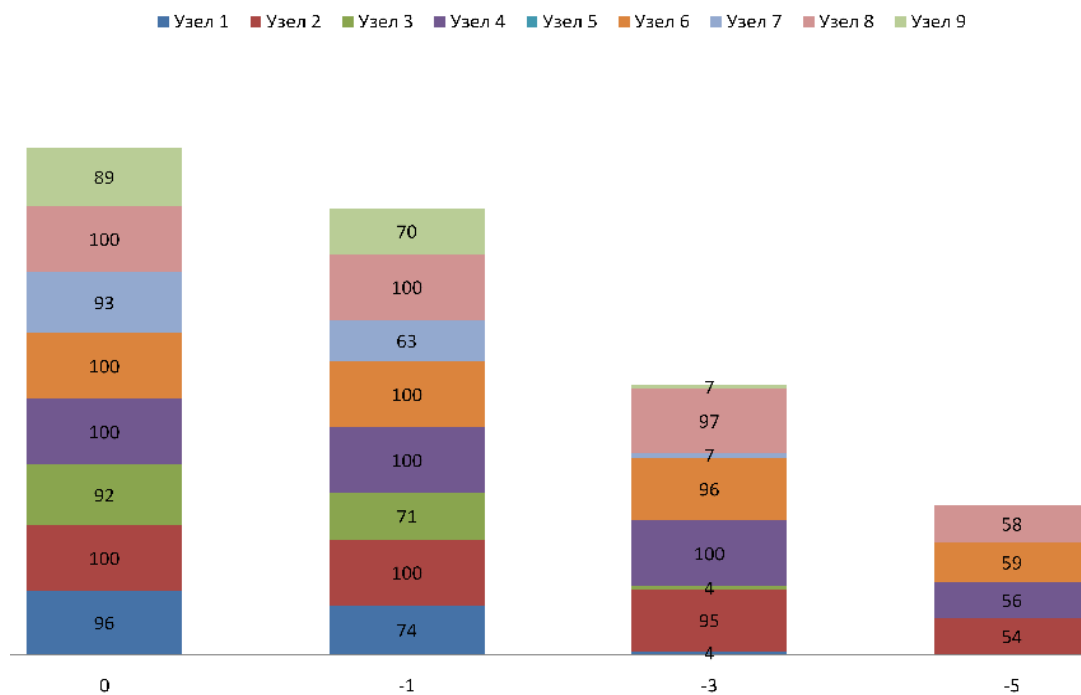


Рисунок 3 - Вплив рівня потужності радіо-модуля на число отриманих пакетів

Час існування бездротової сенсорної мережі залежить від часу роботи вузлів та припинення роботи одного вузла приводить до припинення роботи всієї мережі. Отже, розглянемо, яку кількість енергії споживає вузол БСМ.

Модуль споживаних ресурсів відображає кількість споживаної кожним вузлом енергію. Максимальний час роботи (в годинах), при використанні двох батарейок АА, кожного вузла розраховано у табл. 1.

Таблиця 1

Час роботи вузлів БСМ (годин)

node=0	103,8737		node=10	103,8768		node=20	103,8773		node=30	103,8697
node=1	103,8740		node=11	103,8727		node=21	103,8742		node=31	103,8745
node=2	103,8763		node=12	103,8725		node=22	103,8709		node=32	103,8692
node=3	103,8727		node=13	103,8714		node=23	103,874		node=33	103,876
node=4	103,8735		node=14	103,8740		node=24	103,8735		node=34	103,8694
node=5	103,8714		node=15	103,8725		node=25	103,8768		node=35	103,8709
node=6	103,8758		node=16	103,8747		node=26	103,8694			
node=7	103,8763		node=17	103,8742		node=27	103,877			
node=8	103,8727		node=18	103,8697		node=28	103,877			
node=9	103,8747		node=19	103,8714		node=29	103,7856			

При проведенні експериментів з різним рівнем перешкод та рівнем потужності радіо-модуля кількість спожитої енергії вузлом відрізнялась не більш чим 0,1%.

#### Висновки

В рамках дослідження отримав подальший розвиток підхід до вирішення задачі впливу радіуса передачі даних та перешкод на час життя БСМ. Проведений аналіз отриманих даних дає можливість зробити наступні висновки: при оцінці надійності передачі пакетних даних між вузлами спостерігається спочатку збільшення втрати пакетів через недостатній рівень сигналу; зі збільшенням рівня перешкод кількість доставлених пакетів збільшується, що може бути обумовлено використанням певних алгоритмів каналного рівня. Надійність зв'язку між вузлами залежить від топології, рівень потужності сигналу суттєво не впливає на якість передачі даних. на споживання енергії вузлом впливає алгоритм роботи, який побудовано за моделлю збору інформації. Для оптимізації часу існування бездротової сенсорної мережі необхідно брати до уваги як параметри передачі трафіку, так і розташування елементів та вплив перешкод.

#### Список використаної літератури

1. Dargie, W. Fundamentals of wireless sensor networks: theory and practice / W. Dargie, C. Poellabauer. — John Wiley and Sons, 2010. — 330 p.
2. Zhao, Q. Lifetime maximization for connected target coverage in wireless sensor networks / Q. Zhao, M. Gurusamy // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 2008. — Vol. 16(6). — P. 1378—1391.
3. Hnatushenko, Vict. Optimization model lifetime wireless sensor network / Alexandr Mihalyov, Victoriia Hnatushenko, Vladimir Hnatushenko, Nataliia Vladimirska // Proceedings of the 2015 IEEE 8th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced – IDAACS'2015 (Warsaw, Poland, September 24-26, 2015). — Vol. 2. — Warsaw, Poland. — P. 867—871.
4. Cardei, I.M. Energy-efficient connected-coverage in wireless sensor networks / I. Cardei, M. Cardei // Int. J. of Sensor Networks. — 2008. — Vol. 3(3). — P. 201—210.
5. Ерзин, А.И. Задача выбора совокупности связанных покрытий в беспроводных сенсорных сетях / А.И. Ерзин, В.В. Залюбовский // Труды ИВМиМГ СО РАН. Новосибирск. Серия: Информатика. — 2008. — Вып. 8. — С. 23—28.
6. Nguyen, N.D. Energy-efficient models for coverage problem using sensors with adjustable sensing range./ N.D. Nguyen, V. Zalyubovskiy, M.T. Ha, H. Choo // IEEE Wireless Communication and Networking Conference (WCNC 2010) (Sidney, Australia, April 18-21, 2010). — P. 1234—1267.
7. Marta, M. Improved sensor network lifetime with multiple mobile sinks / M. Marta, M. Cardei // Pervasive and Mobile Computing. — 2009. — Vol. 5(5). — P. 542—555.
8. Zalyubovskiy, V. Energy-efficient Area Coverage by Sensors with Adjustable Ranges / V. Zalyubovskiy, A. Erzin, S. Astrakov, H. Choo // Sensors. — 2009. — Vol. 9(4). — P. 2446—2460.

УДК 681.876.2

А.И. ГУДА, А.И. МИХАЛЁВ  
Национальная металлургическая академия Украины**СИНТЕЗ КРИТЕРИЯ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ХАОТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ  
“SPROTT A” С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МУЛЬТИМОДЕЛЬНОГО АДАПТИВНО-  
ПОИСКОВОГО МЕТОДА**

*Статья посвящена вопросам синтеза критерия качества и построению системы мультимодельной адаптивно-поисковой идентификации для системы динамического хаоса “Sprott A”. Показана работоспособность полученной системы. Получены зависимости ошибок идентификации от основных параметров поиска.*

*Ключевые слова:* мультимодельная адаптивно-поисковая идентификация, ансамбль моделей, динамическая система “Sprott A”

А.І. ГУДА, О.І. МИХАЛЬОВ  
Національна металургійна академія України**СИНТЕЗ КРИТЕРІЮ ЩОДО ІДЕНТИФІКАЦІЇ ХАОТИЧНОЇ СИСТЕМИ “SPROTT A” З  
ВИКОРИСТАННЯМ МУЛЬТИМОДЕЛЬНОГО АДАПТИВНО-ПОШУКОВОГО МЕТОДА**

*Статтю присвячено питанням синтезу критерію якості та побудови системи мультимодельної адаптивно-пошукової ідентифікації для системи динамічного хаосу "Sprott A". Показана працездатність отриманої системи. Отримано залежності помилок ідентифікації від основних параметрів пошуку..*

*Ключові слова:* мультимодельна адаптивно-пошукова ідентифікація, ансамбль моделей, динамічна система “Sprott A”.

A.I. GUDA, A.I. MIKHALYOV  
National Metallurgical academy of Ukraine**IDENTIFICATION CRITERIA SYNTHESIS FOR THE “SPROTT A” CHAOTIC SYSTEM WITH THE  
AID OF THE MULTI-MODEL ADAPTIVE-SEARCHING METHOD**

*Article is devoted to the synthesis of quality criteria and construction of the multi-model adaptive search system for the identification of dynamical chaos system "Sprott A". It is shown that the resulting system is operational. The dependence of the identification error from the major search parameters is investigated.*

*Keywords:* multi-model adaptive-search identification, ensemble of the models, dynamic system “Sprott A”.

**Введение**

Системы, проявляющие хаотическую динамику, представляют значительный интерес для современной науки. Особое место такие системы занимают в теории и практике развития систем идентификации нелинейных динамических систем. При этом создание работоспособных, и, по возможности, эффективных методов идентификации, требует как синтеза адекватных критериев идентификации, так и применения методов, использующих синергетические свойства в динамике поисковых агентов [1,3].

В своих работах J.C. Sprott рассмотрел целое семейство динамических систем, реализующих хаотическое поведение [2]. Особое место среди них занимает система, обозначаемая как “Sprott A”. Принципиальным отличием этой системы является отсутствие положений равновесия, что делает невозможным применение многих известных методов анализа, основанных на разложениях в окрестностях точек равновесия. Это свойство подчёркивает интерес к созданию для неё работоспособной системы идентификации, и обуславливает актуальность этой задачи.

**Постановка задачи**

Классическая система “Sprott A” задаётся следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + yz. \\ \dot{z} = 1 - y^2 \end{cases} \quad (1)$$

В исходном виде система (1) не предполагает наличие параметров. Не изменяя структуры системы, можно ввести 5 параметров, влияющие на её динамику. В данной работе рассмотрим только один –  $c_{xy}$ , записав систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = c_{xy} y \\ \dot{y} = -x + yz \\ \dot{z} = 1 - y^2 \end{cases} \quad (2)$$

В таком виде система, при изменении  $c_{xy}$  в достаточно широком диапазоне может демонстрировать как сложно-периодическое, так и преимущественно, хаотическое поведение (рис 1). При этом, в диапазоне  $c_{xy} \in [0.1; 0.7]$  наблюдаются перестройки структуры аттрактора, а при относительно больших значениях данного параметра аттрактор представляет собой полый тор.

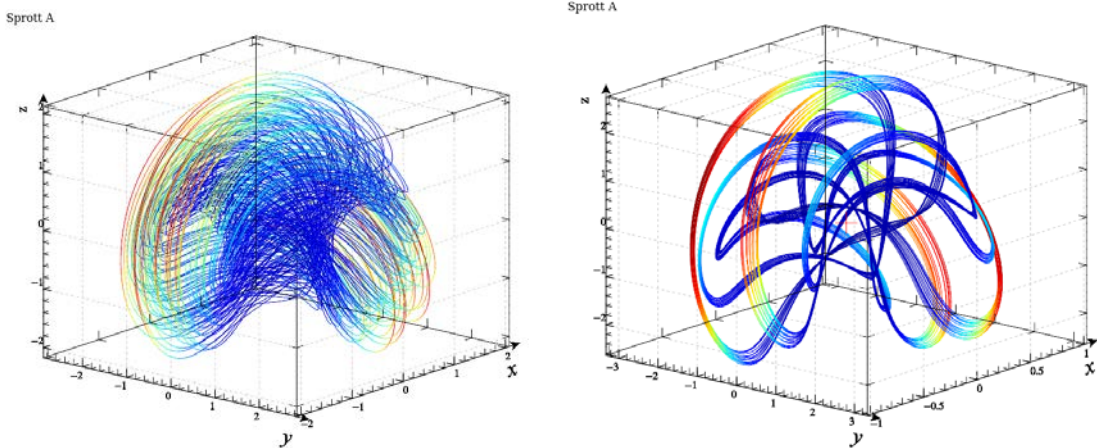


Рис. 1 – Хаотический и сложно-периодический аттракторы системы (2)

Таким образом, задача заключается в синтезе работоспособной системы параметрической идентификации для системы (2), т.е. оценивании величины  $c_{xy}$  по наблюдению за выходами (они же – переменные состояния) системы. Выходные сигналы моделей измеряются точно, а объекта – с погрешностью с известными характеристиками  $w(t)$ .

**Синтез критерия идентификации**

Для синтеза критерия идентификации предположим, что хаотические системы одного вида имеют в чём-то похожие характеристики (с точки зрения синтеза критерия идентификации), и, по аналогии с системами Лоренца, Чуа, Рёсслера, Колпитца, рассмотрим в первую очередь величины, имеющие смысл энергии, усреднённые на временном интервале  $\tau$ .

$$\frac{dq_{x^2}}{dt} = \frac{1}{\tau} (x^2(t) - q_{x^2}(t)), \quad (3)$$

$$\frac{dq_x}{dt} = \frac{1}{\tau} (|x(t)| - q_x(t)), \quad (4)$$

и, аналогично, для величин  $y, z, xy, xz, yz$ .

Полученные зависимости, полученные в результате моделирования, представлены на рис. 2.

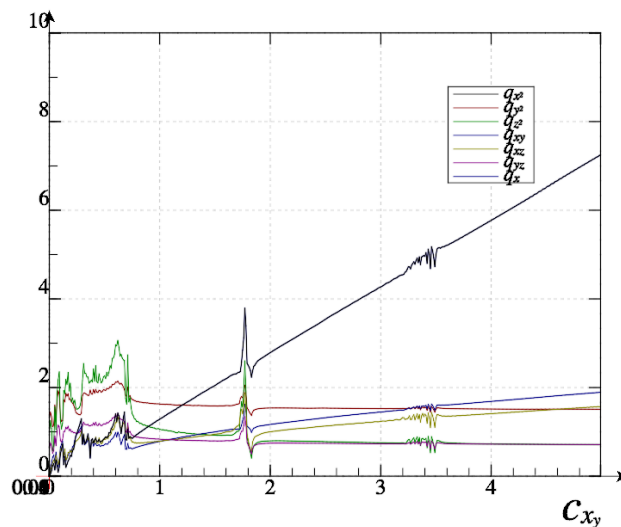


Рис. 2 – Зависимость величин q от  $c_{xy}$  для системы (2)

Анализ зависимостей, представленных на рис. 2, даёт возможность сделать вывод, что наилучшим кандидатом в критерии является зависимость (3), ввиду того, что эта зависимость более всего близка к линейной и наименее подвержена влиянию перестроек структуры аттрактора. Для дальнейшего моделирования выберем именно эту зависимость, и обозначим её как  $q(t)$ .

**Результаты моделирования**

В качестве основы для построения системы идентификации использовалась мультимодельная адаптивно-поисковая система [3,4]. Функция качества  $F_i$  для  $i$ -той модели и соответствующего поискового агента была задана классическим образом:

$$F_i = F(q_o, q_{mi}) = \exp\left[-\left(\frac{q_o - q_{mi}}{q_\gamma}\right)^2\right], \tag{5}$$

где -- масштаб функции качества, индекс “ $o$ ” соответствует объекту, а “ $mi$ ” –  $i$ -той модели.

Было использовано 5 подвижных и 2 неподвижных “fake” моделей, при этом начальные значения параметров были распределены равномерно по рабочей области.

Для исследования динамических свойств системы идентификации нестационарность идентифицируемого параметра задавалась одним из двух способов:

$$c_{x_y}(t) = c_0 + U_c \text{sign} \sin(\omega_c t), \tag{6}$$

$$c_{x_y}(t) = c_0 + U_c \sin(\omega_c t). \tag{7}$$

В дальнейшем изложении параметр  $c_{x_y}$  будем обозначать как  $p$ . Многочисленные параметры самой системы идентификации изначально выбирались исходя из общих сведений о свойствах как идентифицируемой системы, так и самой системы идентификации. После предварительных результатов моделирования проводилась их последующая настройка.

Для определения искомого значения параметра было использовано 3 метода. Первый – аналог метода Такаги-Сугено (COG) из систем нечёткой логики (используется обозначение  $p_{ge}$ ), второй – аналогичен первому, но использует только ближайшую окрестность наилучшей модели (обозначение  $p_{le}$ ). Третий подход тоже использует ближайшую окрестность наилучшей модели, но аппроксимирует поведение функции качества параболой (обозначение  $p_{ee}$ ).

Динамика поиска параметров моделей задаётся аналогично уравнению тела в сильно вязкой среде:

$$\frac{dp}{dt} = v_f f_t(t), \tag{8}$$

где  $f_t(t)$  – сумма всех действующих “сил”.

Качество идентификации оценивалось как среднеквадратическая ошибка  $\bar{e}$  идентификации на достаточно большом интервале времени. Индексы в обозначениях  $\bar{e}_{ge}$ ,  $\bar{e}_{le}$ ,  $\bar{e}_{ee}$  аналогичны тем, что использовались при определении способа оценивания параметра.

На рис. 3 представлены графики, представляющие процесс моделирования процесса идентификации. Графики свидетельствуют как о правильном выборе критерия идентификации, так и работоспособности системы в целом.

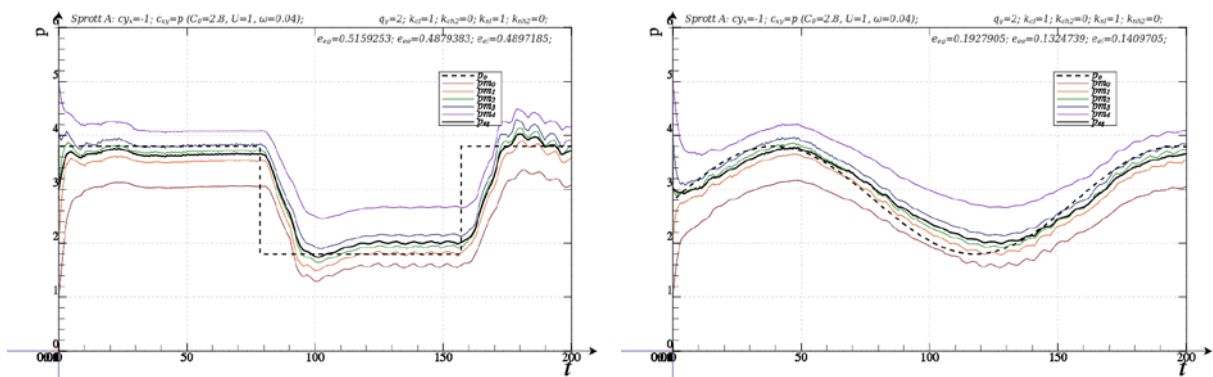


Рис. 3 – Процесс идентификации системы (2) рассматриваемым методом для условий (6) и (7)

На рис. 4 представлены полученные в результате моделирования зависимости величин  $\bar{e}_{ge}$ ,  $\bar{e}_{le}$ ,  $\bar{e}_{ee}$  от  $q_\gamma$ . Отсутствие явно выраженных экстремумов свидетельствует об определённой робастности системы идентификации, обусловленной автоматической настройкой динамики каждым из поисковых агентов.

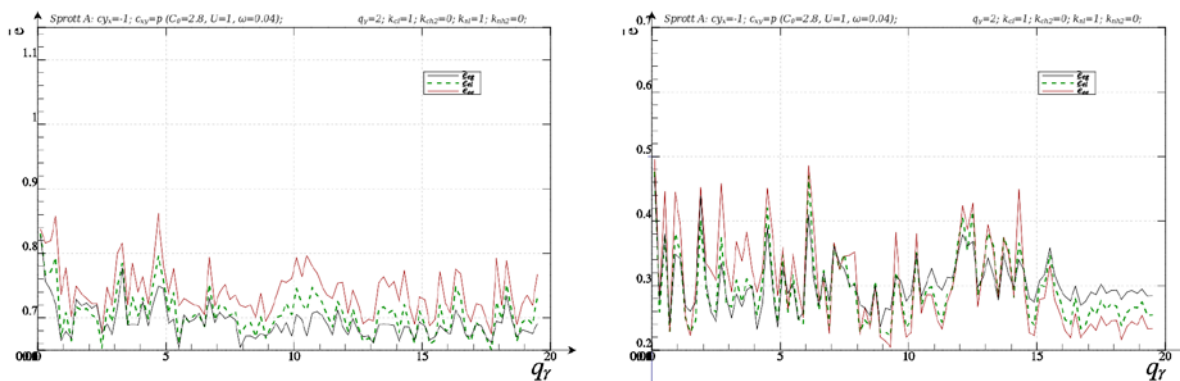


Рис. 4 – Зависимости величин  $\bar{e}_{ge}$ ,  $\bar{e}_{le}$ ,  $\bar{e}_{ee}$  от  $q_r$  при условиях (6) и (7).

На рис. 5 представлены полученные в результате моделирования зависимости величин  $\bar{e}_{ge}$ ,  $\bar{e}_{le}$ ,  $\bar{e}_{ee}$  от  $k_e$ . Нулевое значение величины  $k_e$  соответствует фиксированным значениям коэффициентов моделей, т.е. отсутствию поиска. Как и ожидалось (и наблюдалось при идентификации других систем), при увеличении  $k_e$  величины ошибок идентификации сначала падают, что обусловлено смещением коэффициентов моделей в область значения искомого параметра. В дальнейшем ошибки идентификации снова растут, что обусловлено нарушением процесса поиска из-за быстрого изменения коэффициентов.

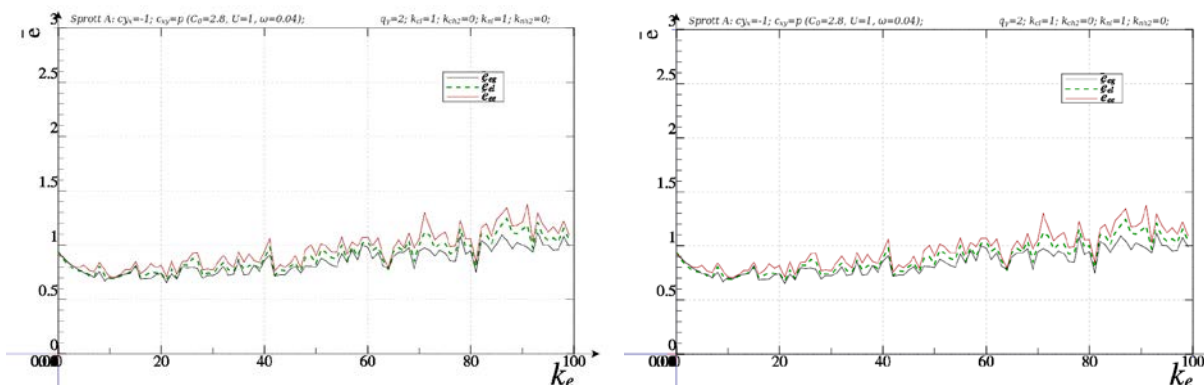


Рис. 5 – Зависимости величин  $\bar{e}_{ge}$ ,  $\bar{e}_{le}$ ,  $\bar{e}_{ee}$  от  $k_e$  при условиях (6) и (7).

**Выводы**

Результаты моделирования процессов идентификации системы (2) с использованием рассматриваемого метода при различных условиях позволяют сделать следующие выводы:

- Использование критерия вида (3) в совокупности с мультимодельным адаптивно-поисковым методом позволяет создать работоспособную систему идентификации.
- Система идентификации обеспечивает определённый уровень робастности по отношению к настройке собственных параметров, что расширяет возможности её применения.

**Список использованной литературы**

1. Guda A.I., Mikhalyov A.I. Multi-model methods and parameters estimation approaches on non-linear dynamic system identification // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(99). – Дніпропетровськ, 2015. – С. 3–9.
2. Sprott J.C. Some simple chaotic flows. // Physical review E. . – 1994. – Vol 5№ 2. – P. 647-650.
3. Гуда А.И., Михалев А.И., Арсирий Е.А. Использование метода идентификации с множеством подвижных моделей применительно к динамической системе Лоренса // Адаптивные системы автоматического управления. – 2015. – № 1(26). – С. 191–197.
4. Гуда А.И., Михалев А.И. Настройка параметров системы мультимодельной адаптивно-поисковой системы идентификации // Вестник ХНТУ. – Херсон: Херсонский национальный технический университет. – 2015. – Вып. 3(54). – С. 238 – 243.

УДК 519.6

О.Р. ДЕНИСЮК

Украинский государственный химико-технологический университет

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

*В статье рассматривается задача управления погрешностью решения систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс коррозии в элементах металлических конструкций. Для решения задачи автор предлагает использование нейросетевого модуля, позволяющего определить рациональный параметр численного решения задачи на основании информации о параметрах конструкции, агрессивной среды и допустимой погрешности. Разработанный алгоритм позволяет снизить вычислительные затраты, одновременно обеспечивая заданную точность решения системы дифференциальных уравнений.*

*Ключевые слова: искусственные нейронные сети, системы дифференциальных уравнений, управление погрешностью*

О.Р. ДЕНИСЮК

Український державний хіміко-технологічний університет

### ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЕЯКИХ КЛАСІВ

*У статті розглядається задача управління похибкою розв'язку систем диференціальних рівнянь, що описують процес накопичення геометричних ушкоджень в елементах металевих конструкцій. Для вирішення задачі автор пропонує використання нейромережевого модуля, що дозволяє визначити раціональний параметр чисельного розв'язання задачі на основі інформації про параметри конструкції, агресивного середовища та допустиму похибку. Розроблений алгоритм дозволяє знизити обчислювальні витрати, одночасно забезпечуючи задану точність розв'язку системи диференціальних рівнянь.*

*Ключові слова: штучні нейронні мережі, системи диференціальних рівнянь, управління похибкою.*

O.R. DENYSIUK

Ukrainian State University of Chemical Technology

### DETERMINATION OF RATIONAL NUMERICAL SOLUTION PARAMETERS FOR SOME CLASSES OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

*The paper discusses the problem of solution error control in systems of differential equations describing the corrosion process in the metal structural elements. To solve the problem the author suggests the use of neural network module, allowing to determine the rational parameters of numerical solution of the problem based on information about structure parameters, aggressive environment and allowable error. The developed algorithm can reduce the computational cost, while providing the required accuracy for solution of systems of differential equations.*

*Keywords: artificial neural networks, systems of differential equations, error control.*

#### Постановка проблемы

В ряде отраслей промышленности, в частности, химической и металлургической, элементы оборудования функционируют в агрессивных средах, вызывающих коррозионный износ – разрушение поверхностного слоя металла. Это приводит к изменению начальных геометрических размеров элементов, снижению их несущей способности и преждевременному выходу из строя. Поведение корродирующей конструкции может быть исследовано путём численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих процесс коррозии в её элементах. От точности решения СДУ зависит точность прогнозирования долговечности (времени работы до разрушения), поэтому проблема выбора параметров численных процедур, которые обеспечили бы её решение с заданной точностью, является весьма актуальной. С другой стороны, важной проблемой является эффективность вычислительных процедур, особенно при решении оптимизационных задач, когда значение долговечности вычисляется на каждой итерации поиска оптимального решения.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Как отмечено в обзоре исследований по проблеме оптимального проектирования корродирующих конструкций [1], основным требованием, предъявляемым к алгоритмам вычисления функций ограничений, предполагающих решение СДУ, является их эффективность при обеспечении требуемой точности получаемого решения. За годы, прошедшие после выхода обзора, получили развитие различные алгоритмы,



позволяющие уменьшить вычислительные затраты за счёт изменения точности вычисления функций ограничений на различных этапах решения задачи оптимизации [2]. Однако существующие алгоритмы не позволяли обеспечить требуемую точность. Для этого необходим алгоритм управления погрешностью численного решения систем дифференциальных уравнений (СДУ), моделирующих коррозионный процесс в элементах конструкций.

В работе [3], очевидно, впервые было предложено использовать искусственные нейронные сети (ИНС) для определения параметров численного решения СДУ, обеспечивающих для текущего вектора варьируемых параметров заданную точность решения. В дальнейшем эта идея была использована при создании алгоритма управления точностью численного решения СДУ [4]. Предложенные в этих работах решения были применены при исследовании корродирующих шарнирно-стержневых систем (ШСК) со стержнями круглого или кольцевого сечений. Предельное состояние ШСК определялось временем достижения напряжением в каком-либо элементе предела прочности (условие прочности).

Стержневые элементы реальных конструкций такого класса изготавливаются из стандартных прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок). Такие профили характеризуются значительно более высоким коэффициентом слитности сечения (отношением периметра к площади), чем круглые или кольцевые, что определяет высокую скорость изменения напряжений в них. Правила вычисления геометрических характеристик сечений (площадь и минимальный момент инерции) зависят от типа сечения. Вследствие коррозии в двутавровых и швеллерных профилях может произойти полное разрушение стойки, то есть нарушение сплошности сечения, что приводит к его разрушению даже в том случае, когда значения напряжений в сечении далеки от предельных. Разрушение ШСК, кроме нарушения условия прочности, может быть вызвано потерей устойчивости её элемента или нарушением условия сплошности сечения. Таким образом, результаты, полученные в [3, 4] имеют более теоретическое, чем практическое значение.

**Формулирование цели исследования**

Целью работы является разработка методики определения рациональных параметров численного решения СДУ, при которых требуемая точность результата достигалась бы при минимальных вычислительных затратах. Для решения данной проблемы в настоящей работе предлагается использование искусственных нейронных сетей. В качестве объекта исследования рассматриваются статически неопределённые шарнирно-стержневые системы с элементами из стандартных профилей. Долговечность конструкции определяется условиями прочности, устойчивости и сплошности сечения.

**Изложение основного материала исследования**

Поведение конструкции, подверженной влиянию агрессивной среды, моделируется путём численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 [1 + k\sigma_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\delta})]; \delta_i |_{t=0} = 0; i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где  $\delta_i$  – глубина коррозионного поражения в  $i$ -том элементе конструкции,  $v_0$  – скорость коррозии при отсутствии напряжений,  $k$  – коэффициент влияния напряжений,  $\sigma_i$  – напряжение в  $i$ -том элементе конструкции,  $\bar{x}$  – вектор параметров конструкции,  $\bar{y}$  – вектора параметров агрессивной среды.

Традиционную схему численного решения СДУ такого вида можно представить в виде, приведенном на рис. 1. Входными параметрами являются векторы  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , а также параметр численного решения  $h_t$ , задающийся произвольно ввиду отсутствия каких-либо правил его определения. Результатом численного решения СДУ является долговечность конструкции  $t^*$ . Погрешность решения при таком подходе контролировать невозможно. Если параметр численного решения остается постоянным, она будет меняться при любом изменении векторов параметров конструкции и агрессивной среды. Для выполнения поставленной цели получения решения СДУ с заданной точностью необходимо ввести в схему решения задачи модуль управления погрешностью решения (рис. 2), позволяющий определять параметр вычислительной процедуры, основываясь на информации о параметрах конструкции, параметрах агрессивной среды и величине допустимой погрешности решения. Иными словами, необходимо построить аппроксимирующую функцию, формализующую данную зависимость.

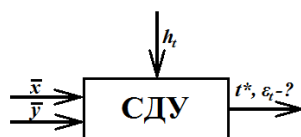


Рис. 1. Традиционная схема численного решения СДУ

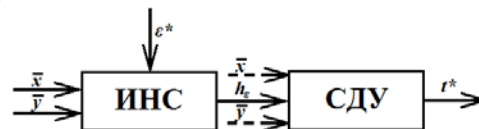


Рис. 2. Схема решения СДУ с использованием нейросетевого модуля управления погрешностью (ИНС)

- Для построения аппроксимирующей функции следует решить следующие частные задачи:
- выбрать алгоритм решения СДУ и параметр управления;
  - определить значимые параметры и способ аппроксимации.

Для решения СДУ (1) используются одношаговые численные методы типа Рунге-Кутты, поэтому параметром управления будет являться расстояние между узлами временной сетки.

Допустим, что существует эталонное решение СДУ (1) – значение долговечности конструкции, полученное аналитически или численно с контролируемой погрешностью. Тогда, задавая произвольным образом параметры конструкции, параметры агрессивной среды и параметр численного решения СДУ, можно получить множество решений и из погрешности, то есть множество учебных образцов, которое будет использоваться при построении аппроксимирующей функции.

Сформулируем условия получения эталонных решений СДУ (1):

1. Исходная СДУ путём внесения в неё некоторых изменений может быть преобразована в новую, для которой получить эталонное решение не представляет труда.
2. Погрешности численных решений обеих систем не должны существенно отличаться на заданном множестве значений параметра вычислительной процедуры. Решения этих двух систем могут при этом отличаться весьма существенно.

На изменение напряжения в стержневом элементе влияют два фактора: уменьшение площади сечения  $A_i$  вследствие коррозии и изменение величины осевого усилия  $Q_i$ . Первый фактор зависит от глубины коррозионного поражения только в данном элементе, второй – от глубины коррозионного поражения во всех элементах конструкции  $\bar{\delta}$ . Тогда для линейной функции напряжений (1) запишется в виде:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 [1 + k\sigma_i(A_i(\delta_i), Q_i(\bar{\delta}))]; \delta_i|_{t=0} = 0; i = \overline{1, N}, \tag{2}$$

Если пренебречь изменением во времени величины осевого усилия, то система (5) преобразуется в простую совокупность несвязанных ДУ:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 [1 + k\sigma_i(A_i(\delta_i), Q_i)]; \delta_i|_{t=0} = 0; i = \overline{1, N}, \tag{3}$$

Для каждого из этих уравнений может быть получено аналитическое решение вида [4]:

$$t_i^* = t_i - \frac{2kQ_i}{v_0 d_i} \ln \left\{ \frac{(P_i + d_i - 2a_i \delta_i)(P_i - d_i)}{(P_i - d_i - 2a_i \delta_i)(P_i + d_i)} \right\};$$

$$t_i = \frac{\delta_i^{\min}}{v_0}; d_i = \sqrt{|4a_i(A_i + kQ_i) - P_i^2|};$$

$$t^* = \min\{t_1^*, t_2^*, t_3^*, \dots, t_N^*\}, \tag{4}$$

где  $P_i$  – периметр  $i$ -ого элемента;  $a_i, d_i$  – коэффициенты.

Долговечность всей конструкции, очевидно, будет определяться временем жизни наименее долговечного стержня. Таким образом, первое условие выполнено. Так как скорость изменения площади сечения значительно выше, чем скорость изменения осевого усилия, что доказано большим объёмом численных экспериментов, то выполняется и второе условие. Таким образом, система (3) не может заменить решение системы (2) ввиду того, что изменение внутренних усилий может быть весьма значительным, но может использоваться для получения аппроксимирующей функции, которая строится для отдельного стержневого элемента.

Аппроксимировать зависимость между параметром численного алгоритма решения СДУ, параметрами стержневого элемента, АС и допустимой погрешностью решения предлагается с помощью искусственной нейронной сети (ИНС). На рис. 3 показана архитектура нейронной сети для растянутых и сжатых стержней.

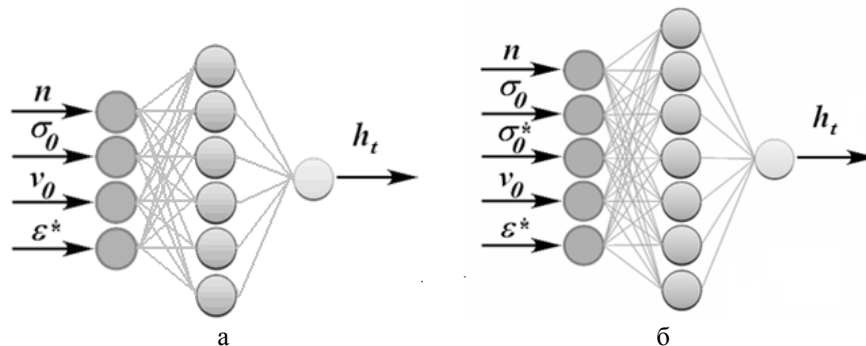


Рис. 3. Архитектура нейронной сети для растянутого (а) и сжатого (б) стержней

Для растянутого стержня значимыми параметрами являются площадь и периметр сечения, начальное напряжение и скорость коррозии при отсутствии напряжений. Для сжатого стержня существенное влияние на значение критического напряжения потери устойчивости оказывают его минимальный момент инерции и длина, которая может быть пересчитана по величине начального критического напряжения потери устойчивости. Важнейшим параметром является форма сечения, определяющая правила вычисления периметра, площади и момента инерции сечения. Для каждого из видов сечений (двутавр, швеллер, равнополочный и неравнополочный уголок) обучалась своя сеть. Поскольку все размеры фасонных профилей регламентируются стандартами, в качестве входного параметра используется номер типоразмера профиля. Таким образом, для растянутого стержня входными параметрами при обучении ИНС являются номер типоразмера  $n$ , начальное напряжение  $\sigma_0$ , скорость коррозии при отсутствии напряжений  $v_0$  и допустимая погрешность  $\varepsilon^*$ . Для сжатого стержня дополнительным входным параметром является начальное критическое напряжение потери устойчивости  $\sigma_0^*$ .

Для обучения искусственных нейронных сетей использовался алгоритм обратного распространения ошибки [5].

При тестировании алгоритма управления погрешностью вычисления долговечности ШСК в качестве объекта исследований использовалась статически неопределимая шарнирно-стержневая конструкция (рис. 4).

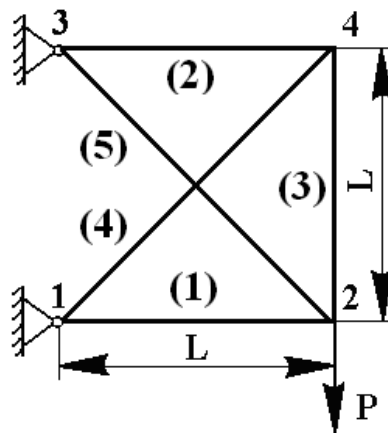


Рис. 4. Расчетная схема пятиэлементной ШСК

Нейронные сети обучались и тестировались для трех видов активных ограничений: по прочности, по устойчивости и по сплошности сечения (для двутавра и швеллера). При этом в каждой из задач были отдельно получены матрицы весовых коэффициентов для каждого из используемых видов профилей. При тестировании задача управления погрешностью решалась для конструкций, долговечность которых составляла от 2,25 до 2,75 года.

В табл. 1 представлены результаты тестирования алгоритма при активных ограничениях по сплошности сечения (долговечность конструкции  $t^*=2,277$  года).

Таблица 1

**Результаты тестирования алгоритма управления погрешностью решения (активные ограничения по сплошности)**

$\varepsilon^*, \%$	$\varepsilon, \%$	$h_t, \text{ лет}$	$N$
1,0	0,806	0,0429	56
2,0	1,812	0,0992	24
3,0	3,040	0,1784	14
4,0	4,023	0,2728	10
5,0	5,286	0,3734	8

**Примечание:**  $\varepsilon^*$  – заданная погрешность решения задачи;  $\varepsilon$  – полученная погрешность решения задачи;  $h_t$  – расстояние между узлами на интервале изменения времени;  $N$  – количество узловых точек на временном интервале.

В табл. 2 приведены результаты тестирования алгоритма при активных ограничениях по прочности (долговечность конструкции  $t^*=2,454$  года) и устойчивости (долговечность конструкции  $t^*=2,463$  года).

Таблиця 2

**Результаты тестирования алгоритма управления  
погрешностью решения (активные ограничения по прочности)**

$\varepsilon^*, \%$	$\varepsilon, \%$	$h_t, \text{ лет}$	$N$
1,0	0,543	0,0243	103
2,0	1,681	0,0532	48
3,0	2,591	0,0996	26
4,0	3,769	0,1553	17
5,0	4,783	0,2132	13

Таблиця 3

**Результаты тестирования алгоритма управления  
погрешностью решения (активные ограничения по устойчивости)**

$\varepsilon^*, \%$	$\varepsilon, \%$	$h_t, \text{ лет}$	$N$
1,0	1,015	0,1596	19
2,0	2,036	0,3597	9
3,0	3,078	0,5634	6
4,0	3,742	0,7953	5
5,0	4,852	1,1664	4

**Выводы**

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Модуль управления погрешностью решения, использующий искусственную нейронную сеть, позволяет обеспечить заданную точность численного решения СДУ.
2. Использование набора матриц синаптических весов позволяет решать задачу определения долговечности конструкции для разных видов профилей и активных ограничений при разных гранично допустимых значениях погрешности, то есть управлять точностью решения СДУ.
3. Использование рационального шага интегрирования, исключающего слишком большое количество узловых точек на временном интервале, существенно повышает эффективность вычислительного алгоритма.

**Список использованной литературы**

1. Зеленцов, Д. Г. Обзор исследований по применению методов нелинейного математического программирования к оптимальному проектированию конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой [Текст] / Д. Г. Зеленцов, Г. В. Филатов // Вопросы химии и химической технологии. – 2002. – № 4. – С. 108–115.
2. Зеленцов, Д. Г. Адаптация метода скользящего допуска к задачам оптимизации корродирующих конструкций [Текст] / Д. Г. Зеленцов, Н. Ю. Науменко // Системні технології. – 2005. – Вип. 2 (37). – С. 48–56.
3. Короткая, Л. И. Использование нейронных сетей при численном решении некоторых систем дифференциальных уравнений [Текст] / Л. И. Короткая // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2011. – №3/4 (51). – С. 24–27.
4. Зеленцов, Д. Г. Алгоритм управления точностью численного решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений [Текст] / Д. Г. Зеленцов, Л. В. Новикова, Н. Ю. Науменко // Системні технології. – 2012. – Вип. 5 (82). – С. 71–79.
5. Callan, R. The Essence of Neural Networks [Text] / R. Callan. – Prentice Hall Europe, 1999. – 232 p.

УДК 004.67

І.С. ДМИТРИЄВА, Н.М. КАРАСЬ  
Національна металургійна академія України**КОМБІНАТОРНИЙ ТА ГЕНЕТИЧНИЙ АЛГОРИТМИ ПОШУКУ РОЗКЛАДУ  
ОБСЛУГОВУВАННЯ БАГАТОПРИБОРНОЇ СИСТЕМИ**

*Робота присвячена вирішенню задачі побудови розкладу обробки деталей приладами. Пропонується використовувати два алгоритми для вирішення задачі розкладу обслуговування багатоприборної системи: комбінаторний та генетичний.*

*Ключові слова: комбінаторний алгоритм, генетичний алгоритм, задачі побудови розкладу.*

И.С. ДМИТРИЕВА, Н.М. КАРАСЬ  
Национальная металлургическая академия Украины**КОМБІНАТОРНИЙ И ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМЫ ПОИСКА РАСПИСАНИЯ  
ОБСЛУЖИВАНИЯ МНОГОПРИБОРНОЙ СИСТЕМЫ**

*Робота посвящена решению задачи построения расписания обработки деталей приборами. Предлагается использовать два алгоритма для решения задачи расписания обслуживания многоприборной системы: комбинаторный и генетический.*

*Ключевые слова: комбинаторный алгоритм, генетический алгоритм, задачи построения расписания.*

I. DMYTRIIEVA, N. KARAS  
National Metallurgical Academy of Ukraine**COMBINATORIAL AND GENETIC ALGORITHMS FOR SERVICE SCHEDULE LOOKUP IN A  
MULTI-INSTRUMENT SYSTEM**

*The work is devoted to solving the problem of constructing parts processing schedules. It is proposed to use two algorithms for solving the problem of maintenance schedules in multi-instrument systems: combinatorial and genetic.*

*Keywords: combinatorial algorithm, genetic algorithm, the task of building schedules.*

**Постановка проблеми**

В даний час вирішення багатьох практичних завдань складання розкладу, як і інші задачі комбінаторної оптимізації, відносяться до класу NP-повних, рішення яких пов'язано з великими часовими витратами. Побудовані в даний час алгоритми складання розкладів (планування), засновані на методи динамічного програмування, симплекс-методі, методі гілок і меж, різних евристичних підходах, дозволяють знайти прийнятні за якістю та тимчасовим витратам рішення тільки для задач невеликої розмірності.

У цій статті пропонується використовувати два алгоритми для вирішення задачі розкладу обслуговування багатоприборної різнорідної системи: комбінаторний та генетичний.

Задачі синтезу розкладів формуються як пошук оптимального розподілу множини робіт в часі між обслуговуючими апаратами (приладами). Ці задачі мають численні додатки, до яких, перш за все, слід віднести планування виробництва, розподіл ресурсів, проектування технологічних процесів.

**Комбінаторний алгоритм**

Постановку побудови розкладу на паралельних машинах можна задати наступним чином: є множина деталей та набір однакових приладів для їх обробки. Кожна деталь має бути оброблена на кожному з приладів за різний час [1].

Нехай  $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$  – множина деталей, а  $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$  – множина приладів,  $p_{ij}$  – час обробки деталі  $J_j$  на приладі  $M_i$ ,  $i = 1..m$ ,  $j = 1..n$ .

Роботи, які необхідно виконати з деталями, складаються з операцій:  $J_j = \{O_{1j}, O_{2j}, \dots, O_{mj}\}$ . Для виконання операції  $O_{ij}$  необхідно  $p_{ij}$  часу та може виконуватись на одному з приладів з множини  $M$ .

Під розкладом маємо на увазі призначення кожної деталі на деякий верстат в кожен момент часу. Розклад є допустимим, якщо:

- Кожна деталь оброблена повністю,
- Кожна деталь пройшла обробку на кожному з приладів,
- Ніякий верстат не виконує одночасно більше однієї операції,
- Жодна з деталей не виконується одночасно більше ніж на одному приладі,

- Час виконання всіх робіт не повинен бути менше тривалості виконання робіт. Задача побудови розкладу приймає наступний вид:

$$C_{\max} = \max(c_i) \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} p_j \leq C_{\max}, i = 1..m;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, j = 1..n;$$

$$p_j \leq C_{\max}, j = 1..n.$$

де  $c_i$  — час виконання всіх робіт на  $i$ -му приладі;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо робота } J_j \text{ призначена на } M_i; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Обмеження задачі говорять про те, що час виконання обробки усіх деталей має бути мінімальним, сумарна тривалість виконання робіт на кожному з приладів не перевищує  $C_{\max}$ , кожна робота виконана на кожному приладі.

Виконавши деякі перетворення, отримаємо оцінку:

$$C_{\max} \geq \frac{1}{m \sum_{j=1}^n p_j}$$

та існують допустимі розв'язки задач.

Але, як було зазначено раніше, комбінаторні задачі відносяться до класу NP-повних. Тому, для прискорення часу пошуку розв'язку даної задачі при великій кількості даних, нами було запропоновано застосування генетичного алгоритму.

#### Генетичний алгоритм (ГА)

Основну увагу приділено розгляду способів подання потенційних рішень для задачі синтезу розкладів і демонстрації на прикладах різних модифікацій операторів схрещування і мутації, складання плану-графіка робіт [2].

Незважаючи на те що в даний момент для вирішення різних прикладних задач вже створено велику кількість алгоритмів на основі моделювання деяких властивостей генетичного апарату пристосування живих організмів до навколишнього середовища, всім цим алгоритмам присутні загальні риси. У всіх генетичних алгоритмах можна виділити однакові основні етапи вирішення завдань. Розглянемо ці етапи більш детально.

Попередньо зауважимо, що при описі генетичного алгоритму прийнято використовувати термінологію, запозичену з молекулярної біології і генетики, що ще раз підкреслює аналогію з еволюційними процесами, що відбуваються в живій природі. Робота будь-якого ГА починається з кодування потенційних рішень, яке полягає у формуванні хромосоми. Хромосоми складаються з генів. У загальному випадку кожен ген може приймати речові, цілочисельні або бінарні значення і характеризується паралельною формою (безліччю допустимих значень). Так, наприклад, якщо вирішується завдання з  $n$  параметрами (генами), кожен з яких кодується бітами, то хромосома, представлена рядком довжиною  $m - n$  бітів, кодує всі можливі потенційні рішення задачі. Кожен з варіантів вирішення завдання оцінюється за допомогою деякої функції пристосованості (цільової функції, функції фітнесу) [3].

Для скорочення кількості варіантів рішень задачі, які переглядаються алгоритмом, Голдберг висунув гіпотезу, що лежить в основі генетичних алгоритмів, про будівельні блоки. Відповідно до цієї гіпотези, генетичні алгоритми повинні одночасно виконувати дві функції: вирощування будівельних блоків рішень; змішування цих блоків з метою отримання оптимального рішення. В ГА ця гіпотеза реалізується такими механізмами і операторами:

- механізм генерації початкової популяції,
- механізм оцінки якості хромосоми з використанням функції пристосування,
- механізм селекції,
- оператори схрещування,
- оператори мутації,
- механізм зупинки ГА (еволюційного процесу).

Класичні генетичні алгоритми оперують з хромосомами постійної довжини, що складаються з генів зі значеннями 0 або 1. Закодована хромосома, в якій представлено безліч потенційних рішень, називається генотипом. Генотип задає пошуковий простір рішень. У теорії природної еволюції генотип - це програма розвитку і еволюції особини. Реалізація особини (одного з можливих варіантів вирішення задачі) у вигляді хромосоми з конкретними значеннями генів являє собою фенотип. В теорії природного відбору фенотип

необхідний для селекції і переходу на наступний рівень еволюції. Популяція - його репродукційна група хромосом фіксованою чисельністю, в якій будь-які дві хромосоми  $X_i, X_j \in G, i \neq j$  можуть виступати в ролі батьків.

Схрещування батьківських хромосом моделює передачу спадковості нащадкам. В результаті схрещування утворюються дочірні хромосоми. Такий механізм в ГА реалізується оператором схрещування. Цей оператор може застосовуватися не до всіх хромосом в популяції. Його застосуванню передують вибір батьківських пар. Результат застосування оператора схрещування полягає в обміні частини генетичного коду між двома хромосомами батьків. Схрещування проводиться з метою породження з наявної безлічі рішень (популяція батьків) нової безлічі рішень (популяція нащадків) Нагадаємо, що за гіпотезою Холланда хороші схеми рішень при схрещуванні народжують нові схеми більш високої якості. Один з класичних варіантів оператора схрещування - запропоноване Холландом одноточечне схрещування, при якому випадковим чином вибирається число  $n \in \{1, 2, \dots, L-1\}$ , де  $L$  - довжина хромосоми,  $n$  - точка схрещування. Потім утворюються дві нові дочірні хромосоми шляхом обміну всіх генів між двома батьківськими хромосомами, починаючи з  $(n+1)$ -го до  $L$ -го включно.

Мутація хромосом в класичному генетичному алгоритмі складається в інвертуванні символу в випадково обраному гені. Використання операторів мутації ефективно для виходу з локального екстремуму. Цей механізм може застосовуватися для популяції як батьків, так і нащадків.

Перевірка того, наскільки хорошим є  $i$ -е рішення задачі, здійснюється за допомогою обчислення функції пристосованості  $FP(X_i)$  для хромосоми  $X_i$ . Зазвичай функція пристосованості в явному вигляді містить критерій оптимізації розв'язуваної задачі. Для селекції хромосом у популяційній групі розміру  $N$  часто використовують нормалізовану функцію пристосованості

$$FP_{norm}(X_i) = \frac{FP(X_i)}{\sum_{i=1}^N FP(X_i)}$$

Селекція хромосом полягає в їх відборі та формуванні наступної популяції. Селекція - це випадковий процес, при якому керуються правилом: чим більше значення функції пристосованості має дана хромосома, тим вище ймовірність її вибору для репродукції. Найпростіший і найбільш популярний метод селекції хромосом - метод рулетки.

Механізм зупинки алгоритму визначається на етапі його проектування з урахуванням природних обмежень, пов'язаних з часом розрахунку на ЕОМ, або кількості популяцій, при яких значення функції пристосованості перестане поліпшуватися. Отримана в результаті  $n$  ітерацій хромосома з найбільшим значенням функції пристосованості приймається як рішення даної задачі. Однак немає гарантії, що це рішення - найкраще.

Перед застосуванням генетичного алгоритму необхідно представити завдання у вигляді хромосоми, після чого стає можливим застосування самого алгоритму.

Генетичний алгоритм включає наступні етапи:

1. Генерування початкової популяції.
2. Обчислення значень функції пристосованості  $FP$  хромосом популяції.
3. Селекція хромосом, призначених для репродукції.
4. Навчання за допомогою операторів мутації і схрещування нової популяції нащадків.
5. Популяція батьків знищується, а популяція нащадків стає новою популяцією батьків.
6. Перевірка умови кінця дії алгоритму (якщо «так» - то етап 7, «ні» - етап 2).
7. Найкраща хромосома з поточної популяції приймається як рішення задачі.

Розглянемо на прикладі основні моменти роботи генетичного алгоритму.

Припустимо, що слід зробити дві роботи  $J$ , кожна з яких складається з трьох операцій, що виконуються на трьох приладах. Введемо позначення  $S_j(t_j)$ , де  $t_j$  - трудомісткість операції  $O_j$  на приладі. У термінах введеного позначення завдання формулюється так:

$$J_1 \ 1(10) \ 3(7) \ 2(20)$$

$$J_2 \ 2(15) \ 1(2) \ 3(8).$$

Це означає, що операція  $O_1$  роботи  $J_1$  виконується на  $S_1$  і  $t_1 = 10$  і т.д.

Для подання рішення (відображення плану-графіку  $H$ ) цього завдання, необхідна хромосома, що складається з 6 генів (6 - сумарна кількість операцій для всіх робіт). Кожен ген може прийняти значення 1 або 2. Нехай хромосома, яка представляє рішення, має вигляд:

$$1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1.$$

Інтерпретація цієї хромосоми наступна:

- помістити в  $H$  першу операцію  $O_1$  першої незакінченої роботи  $J_1$ ;
- помістити в  $H$  першу операцію  $O_1$  другої незакінченої роботи  $J_2$ ;
- помістити в  $H$  другу операцію  $O_2$  другої незакінченої роботи  $J_2$ ;
- помістити в  $H$  третю операцію  $O_3$  другої незакінченої роботи  $J_2$ ;
- помістити в  $H$  четверту фіктивну операцію  $O_4$  другої незакінченої роботи  $J_2$ ;
- помістити в  $H$  другу операцію  $O_2$  першої незакінченої роботи  $J_1$ .

Спочатку, перед вставкою операції в план-графік, маємо циклічний список  $CL_0$  робіт і хромосому  $X_0$ :

$$CL_0 = [1 - (1, 3, 2); 2 - (2, 1, 3)], \quad X_0 = [1, 2, 2, 2, 2, 1].$$

Так як перший ген в хромосомі  $X_0$  визначає роботу  $J_1$ , беремо першу операцію  $O_1$  роботи  $J_1$  і вставляємо її в план-графік. В результаті отримуємо:

$$CL_1 = [1 - (3, 2); 2 - (2, 1, 3)], \quad S_1 : 1111111111$$

$$X_1 = [2, 2, 2, 2, 1], \quad S_2 :$$

$$S_3 :$$

Наступний ген в хромосомі  $X_0$  (перший в  $X_1$ ) визначає роботу  $J_2$ . Отже беремо першу операцію  $O_1$ , роботи  $J_2$  і вставляємо її в план-графік. В результаті отримуємо:

$$CL_2 = [1 - (3, 2); 2 - (1, 3)], \quad S_1 : 1111111111$$

$$X_2 = [2, 2, 2, 1], \quad S_2 : 22222222222222$$

$$S_3 :$$

Наступний ген в хромосомі  $X_0$  (перший в  $X_2$ ) визначає роботу  $J_2$ . Отже беремо першу операцію  $O_2$ , роботи  $J_2$  і вставляємо її в план-графік. В результаті отримуємо:

$$CL_3 = [1 - (3, 2); 2 - (3)], \quad S_1 : 1111111111 22$$

$$X_3 = [2, 2, 1], \quad S_2 : 22222222222222$$

$$S_3 :$$

Наступний ген в хромосомі  $X_0$  (перший в  $X_3$ ) визначає роботу  $J_2$ . Отже беремо першу операцію  $O_3$ , роботи  $J_2$  і вставляємо її в план-графік. В результаті отримуємо:

$$CL_4 = [1 - (3, 2); 2 - ()], \quad S_1 : 1111111111 22$$

$$X_4 = [2, 1], \quad S_2 : 22222222222222$$

$$S_3 : 22222222$$

Наступний ген визначає роботу  $J_2$ . Однак в списку незакінчених робіт друга робота вже не числиться. Застосуємо список незакінчених робіт як циклічний, тоді цей ген означає роботу  $J_1$ ; додаємо його в план-графік як роботу 1 на приладі  $S_3$  з трудомісткістю 7 одиниць часу. Отримуємо

$$CL_5 = [1 - (2); 2 - ()], \quad S_1 : 1111111111 22$$

$$X_5 = [1], \quad S_2 : 22222222222222$$

$$S_3 : 1111111 22222222$$

Останньою вставляємо 3-ю операцію роботи  $J_1$ . В результаті отримуємо:

$$CL_6 = [1 - (); 2 - ()], \quad S_1 : 1111111111 22$$

$$X_6 = [], \quad S_2 : 22222222222222 11111111111111111111$$

$$S_3 : 1111111 22222222$$

Список незакінчених робіт порожній. Остаточо отримуємо побудований план-графік.

Для реалізації побудови розкладу як комбінаторним, так і генетичним алгоритмом, нами було розроблено додаток. Результати роботи цього додатку представлено на рисунках 1 та 2.



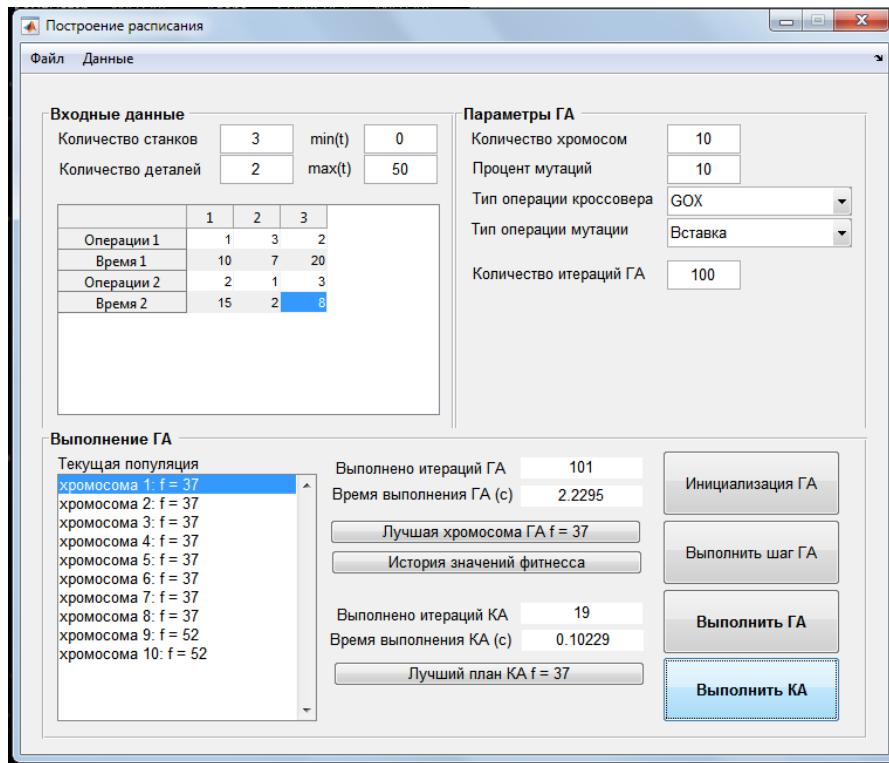


Рисунок 1 – Параметры та результати побудови розкладу за допомогою комбінаторного та генетичного алгоритмів

Побудований розклад для обох алгоритмів співпадає.

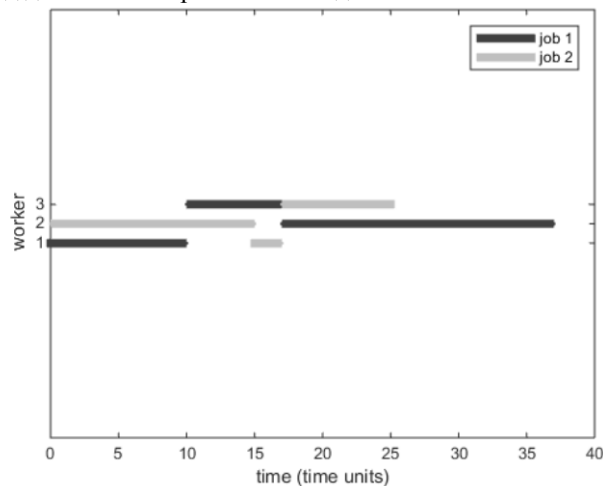


Рисунок 2 - Побудований розклад за допомогою генетичного алгоритму

### Висновки

В роботі розглянуто комбінаторний та генетичний алгоритми для вирішення задачі розкладу обслуговування багатоприборної різномірної системи. Розроблено програмний додаток, який реалізує ці алгоритми. Подальші дослідження будуть пов'язані з модифікацією генетичного алгоритму, та оптимізацією його для розв'язання конкретного типу задач.

### Список використаної літератури

1. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы, М.:Наука, 1989.
2. Schafer J.D. Podstawy genetycznej optymalizacji globalnej. - Krakow, Wyd. Uniwersytet Jagiellonski, 2002. – 245 p.
3. Витовски Т., Антчак А. Генетические алгоритмы – современный инструмент поиска квазиоптимальных решений // Проблемы управления и информатики. – 2003. - №5. – С.22-35.

УДК 004.934.2

Г.А. ДОБРОВОЛЬСКИЙ, О.А. ТОДРИКО  
Запорожский национальный университет

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭНТРОПИИ ШЕННОНА ДЛЯ ДЕТЕКЦИИ ГОЛОСОВОЙ АКТИВНОСТИ В ЗАШУМЛЁННЫХ ЗВУКОЗАПИСЯХ

*В работе рассматривается задача поиска человеческой речи в зашумленном звуковом сигнале. Проверяется гипотеза о том, что наличие речи увеличивает количество информации в соответствующих местах звукозаписи. Для проверки данной гипотезы был предложен способ использования энтропии Шеннона для формирования обучающей выборки простого классификатора. Проведенное исследование показало, что представленный способ позволяет обнаружить в звукозаписи человеческую речь даже если соотношение сигнал/шум не превышает 0 дБ. Данный способ определения голоса предполагается использовать в системах обработки речи и автоматической проверки произношения при обучении иностранному языку.*

*Ключевые слова:* обработка сигнала, обработка звука, информационная энтропия Шеннона, помехи, детектор речевой активности.

Г.А. ДОБРОВОЛЬСЬКИЙ, О.О. ТОДРИКО  
Запорізький національний університет

### ЗАСТОСУВАННЯ ЕНТРОПІЇ ШЕННОНА ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ГОЛОСОВОЇ АКТИВНОСТІ В ЗАШУМЛЕНИХ ЗВУКОЗАПИСАХ

*У роботі розглядається задача пошуку людської мови в зашумленому звуковому сигналі. Перевіряється гіпотеза про збільшення кількості інформації при наявності мови у відповідних місцях звукозапису. Для перевірки гіпотези було запропоновано спосіб використання ентропії Шеннона для формування навчальної вибірки простого класифікатора. Проведене дослідження показало, що представлений спосіб дозволяє виявити в звукозаписі людську мову навіть якщо співвідношення сигнал/шум не перевищує 0 дБ. Даний спосіб визначення голосу передбачається використовувати в системах автоматичної обробки мови і автоматичної перевірки вимови під час навчання іноземній мові.*

*Ключові слова:* обробка сигналів, обробка звуку, інформаційна ентропія Шеннона, шум, виявлення голосової активності

G.A. DOBROVOLSKY, O.A. TODORIKO  
Zaporizhzhya national university

### APPLICATION OF SHANNON ENTROPY FOR VOICE ACTIVITY DETECTION IN NOISY SOUND RECORDINGS

*In this paper, the robust voice activity detection in noisy sound records is investigated. The hypotheses is tested that the value of Shannon information entropy rises if voice is added to noise. To verify the hypotheses, a method of training set preparation based on Shannon information entropy is proposed and implemented. The preliminary study shows that the proposed method allows voice detection even if signal to noise ratio equals to 0 dB or less. The proposed voice detection method is designed as part of speech processing software and automatic pronunciation scoring in computer assisted language learning.*

*Keywords:* signal processing, sound processing, Shannon information entropy, noise, voice activity detection

#### Постановка проблемы

Серьезной помехой для большинство систем обработки речи, является шум. Автоматические телефонные сервисы, системы голосового управления, разнообразные модули автоматического улучшения качества звука и т.д. должны взаимодействовать с мобильными устройствами, которые зачастую используют микрофоны разного качества в разном звуковом окружении: дом, улица, работа, транспорт и т.д. Существующие способы выделения голоса и подавления помех часто требуют для обучения образцы "чистого шума" - фрагменты звука, не содержащие голоса. Но в условиях непредсказуемых помех признаки шума и голоса заранее неизвестны, что затрудняет дальнейшую обработку речи. Таким образом актуальной является задача классификации частей звукозаписи по признаку наличия/отсутствия речи в присутствии произвольных помех. Если учесть упомянутые выше условия, то задача классификации фрагментов звука по признаку наличия речи оказывается не столь тривиальной, как может показаться на первый взгляд, так как большинство детекторов голосовой активности срабатывают плохо, если уровень шума увеличивается.

## Анализ последних исследований и публикаций

Типичная схема детектора голоса (рис. 1) включает в себя модули извлечения признаков, классификации и сглаживания.

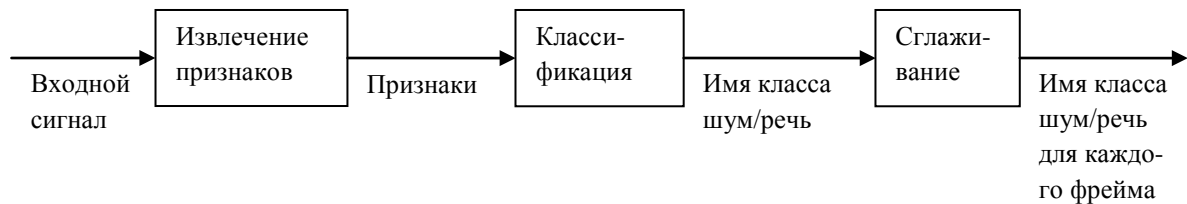


Рисунок 1. Схема детектора голоса

Целью модуля извлечения признаков является получение из входного сигнала числовых характеристик, упрощающих его классификацию. Входной сигнал является представлением звука в виде последовательности чисел (образцов), каждое из которых обозначает амплитуду  $x(t_k)$  сигнала в часто расположенные моменты времени  $t_k$ . Интервал времени  $t_{k+1} - t_k$  определяется частотой дискретизации, которая обычно указывается в свойствах звукозаписи. Для вычисления признаков используются образцы, попадающие в заданный промежуток времени. Полученный набор образцов называется фреймом и состоит из  $K$  чисел

$$X(t_k) = \langle x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+K} \rangle \quad (1)$$

Промежуток времени должен быть малым, чтобы сигнал в его пределах оставался практически постоянным, и одновременно содержать достаточное количество образцов, например, типичным значением для систем распознавания речи являются фреймы длиной 20-25 мс, расположенные с шагом 10-12,5 мс [1]. Модуль извлечения признаков создаёт на основе входного сигнала последовательность фреймов и вычисляет для каждого фрейма некоторый набор признаков.

Модуль классификации принимает на вход вычисленные признаки и возвращает на выходе идентификатор одного из существующих классов. В зависимости от природы признаков, для реализации модуля классификации обычно применяется один из методов машинного обучения [2], например, метод опорных векторов, нейронные сети различных архитектур, байесовские сети и т.д.

Модуль сглаживания позволяет уточнить результаты определения голоса на основании типичной длительности фонов. Например, единственный фрейм длины 25 мс, находящийся в окружении фонового шума, не может быть голосом, потому что в человеческой речи нет таких коротких фонем. Точно так же речевой аппарат человека не приспособлен к миллисекундным паузам в середине слова.

В настоящее время основным направлением совершенствования детекторов речи является выбор наиболее информативных признаков, позволяющих надёжно отличить произнесённые человеком слова от постороннего шума. Исторически первыми были попытки использовать энергию сигнала [3]. Этот простой признак хорошо работает для умеренного шума (сигнал/шум=30 дБ). Он основан на том факте, что в шумном окружении человек обычно говорит громче. Нормализация энергии увеличивает точность алгоритма. Также его можно адаптировать к медленному изменению шума. Недостатком метода является необходимость предварительно задать пороговое значение энергии. Усовершенствованными разновидностями детекторов голоса на основе энергии являются рекурсивная оценка шума [4], использование гистограмм или огибающих [5], учёт энергии нескольких последовательных фреймов [6], сравнение с найденным эталонным фреймом [7]. Сравнение выявило [8], что выделение фрейма с шумом и его дальнейшее сопоставление с другими фреймами [7], показывает наилучшие результаты.

Другая группа методов опирается на основную тональность звука. В соответствии с моделью произношения звуков человеком [9], речь моделируется звонкими и глухими возбуждающими сигналами, которые потом модулируются речевым аппаратом. Для гласных и звонких согласных звуков голосовые связки порождают гармонический голосовой тон частоты от 50 до 250 Гц, что позволяет найти их в звуковом сигнале. Однако глухие и шипящие звуки определить таким способом сложно, более того, музыка тоже часто определяется как речь [10]. К признакам, использующим тональность звука, относятся частота изменения знака сигнала [3], нормированная автокорреляционная функция, спектральная энтропия, размах значений кепстральных компонент [10], комбинация частоты смены знака с энергией [11], логарифм произведения подмножества спектральных компонент [12]. Лучшим среди признаков, опирающихся на анализ тональности [8], является разность максимального и минимального значений кепстральных компонент, который позволяет достичь 80-85% точности даже при опознавании глухих звуков.

Дополнительной к основной тональности признаком речи является её форманта — акустическая характеристика звуков речи (прежде всего гласных), связанная с уровнем частоты голосового тона и

образующая тембр звука. В идеальном случае форманта описывается формой спектра, который является вектором потенциально бесконечной размерности. Однако даже кепстральные коэффициенты низкого порядка [13], мел-частотные кепстральные коэффициенты (MFCC) [14], коэффициенты линейного предиктивного кодирования [15] позволяют достичь приемлемых результатов. Для определения речи на основании формы спектра, многомерные векторы признаков группируют, заранее составляя справочник векторов с помощью машинного обучения. Недостатком подхода является необходимость обучения классификатора, что означает возрастание вероятности ошибки в условиях непредсказуемого шума.

Использование степени стационарности основано на наблюдении, что обычно шум изменяется намного медленнее, чем речь. Для вычисления степени стационарности в работе [16] рассматривались промежутки времени большей длины, чем обычная продолжительность фонемы, и на основе спектра нескольких фреймов определялась величина долговременной вариации сигнала. Недостатком такого подхода является возрастание ошибки в условиях нестационарного шума.

Ритм произнесения фонем. Ещё одна группа признаков опирается на ритмичность чередования согласных и гласных звуков в человеческой речи, что приводит к достаточно четким максимумам спектра в районе частоты 4 Гц. Признаки, использующие данное свойство, устойчивы к помехам. Однако для их вычисления необходимо рассматривать промежутки времени около 1 секунды. Например, спектрально-темпоральная модуляция (СТМ) [17] рассматривает модуляцию с изменением одновременно времени и частоты, стремясь смоделировать восприятие звука человеком, а также учитывает тональную и форматную структуру речи [18]. На сегодняшний день это один из самых надежных способов определения речи в звуке. К его недостаткам можно отнести вектор признаков большой размерности - в некоторых случаях больше 1000, - из-за чего классификатор приходится обучать на большом количестве примеров, кроме того, обработка коротких звукозаписей затруднена из-за длинных фреймов.

Типичный статистический подход [19, 20] заключается в предположении, что звук голоса и шум имеют разные спектры, каждую компоненту которых можно описать неким распределением вероятности, и, вычислив отношение функций правдоподобия, получить статистический классификатор, разделяющий шум и человеческую речь.

Кроме единичных признаков, также исследовался вопрос об их комбинации [21].

Приведённый выше анализ публикаций показывает, что возможность использования информационной энтропии Шеннона для детекции речи до сих пор не освещалась должным образом.

#### Цель работы

Целью данной работы является проверка возможности использования информационной энтропии Шеннона для определения голоса в звуковом сигнале.

#### Изложение основного материала исследования

Если считать речь носителем информации, то естественной будет гипотеза о том, что добавление речевого сигнала к фоновому шуму увеличит количество информации в соответствующих местах звукового сигнала. Для проверки данной гипотезы необходимо разработать способ проверки наличия голоса в звукозаписи и создать его программную реализацию. Общая структура реализации воспроизводит традиционное строение детектора голосовой активности, изображенное на рис. 1.

Голосовая активность определяется по следующему сценарию: сначала проводится подготовка звукозаписи, после чего вычисляются признаки, выполняется поиск образцов шума, обучение классификатора, классификация фреймов по признаку наличия или отсутствия голоса, сглаживание.

График входного зашумленного сигнала для отношения сигнал/шум = 0 dB показан на рис. 2.

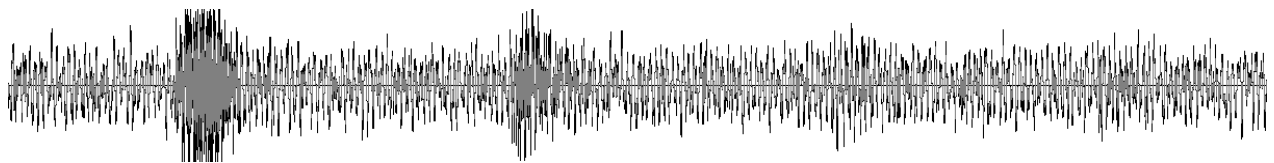


Рисунок 2. График входного зашумленного сигнала, содержащего текст “а б в г”

Подготовка звукозаписи выполняется традиционным для систем распознавания речи способом. Сначала с помощью усреднения удаляется низкочастотная составляющая сигнала, которая играет незначительную роль в распознавании речи:

$$x_k = \alpha x_k + (1 - \alpha) x_{k-1}, |\alpha| < 1 \quad (2)$$

где  $\alpha$  - параметр, показывающий степень сглаживания.

После сглаживания производится линейное отображение амплитуды на отрезок [-1, 1] и разделение сигнала на фреймы. Для каждого фрейма вычисляются признаки: энергия, энтропия, MFCC [22].

Энергия вычисляется как смещённая оценка дисперсии входного сигнала:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - \bar{x})^2 \quad t=1..T, \tag{3}$$

где  $\bar{x}$  - среднее значение сигнала,  $N$  - количество образцов в фрейме.

Для звукозаписи, изображенной на рис.2, количество энергии в каждом фрейме представлено на рис.3. Первый пик графика соответствует гласному звуку «а», второй – звонкому согласному «б», а пики для «в» и «г» практически незаметны на фоне шума.

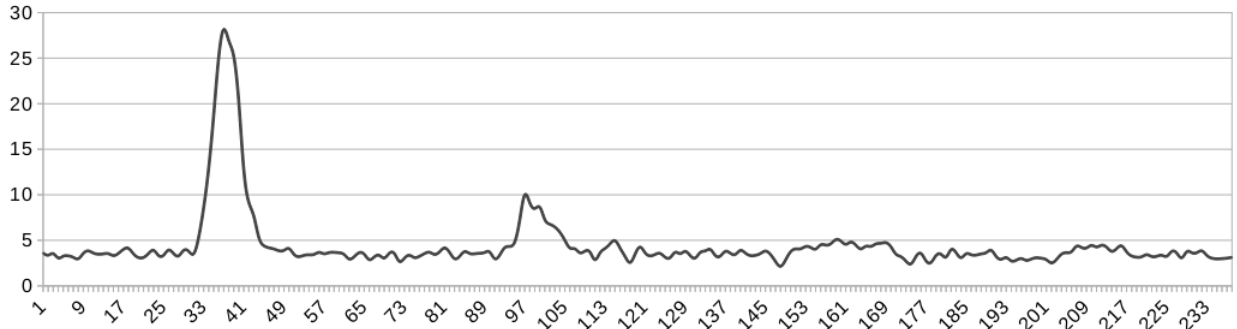


Рисунок 3. Количество энергии в каждом фрейме, горизонтальная ось соответствует номеру фрейма, вертикальная – количеству энергии

Для вычисления энтропии определяется размах амплитуды сигнала  $[a_{min}, a_{max}]$ , полученный отрезок делится на  $L$  частей  $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{L-1}, a_L]$ , где  $a_0=a_{min}$  и  $a_L=a_{max}$ , и для каждого фрейма подсчитывается количество амплитуд, попавших в каждую из частей - составляется гистограмма частот. После этого по формуле Шеннона вычисляется информационная энтропия:

$$I = - \sum_{i=1}^L f_i \ln(f_i), \tag{4}$$

где  $f_i$  - доля амплитуд сигнала, попавших в промежуток  $[a_{i-1}, a_i]$ .

Для звукозаписи, изображенной на рис.2, значение энтропии каждого фрейма показано на рис.4. Горизонтальными полосками выделены участки с голосом, из рисунка видно, что перед началом и после окончания звука наблюдаются скачки значения энтропии.

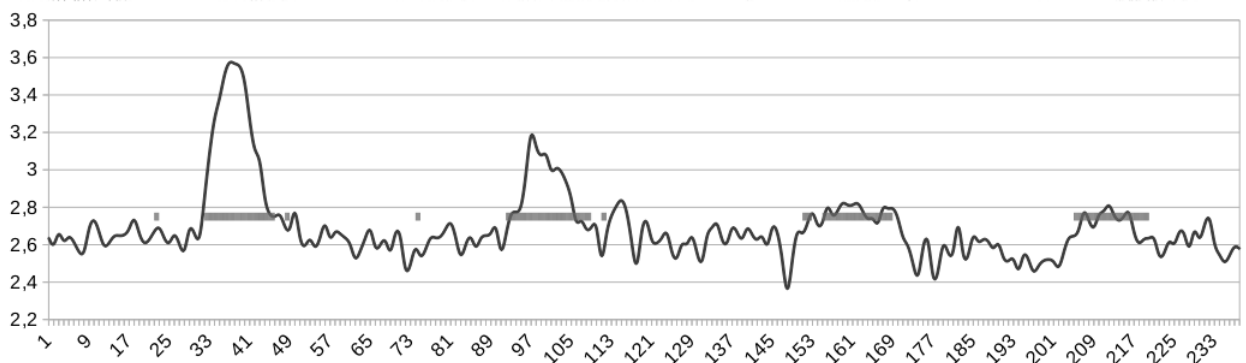


Рисунок 4. Значение энтропии для каждого фрейма, на горизонтальной оси отмечены номера фреймов, на вертикальной - значения информационной энтропии, горизонтальные полосы обозначают фреймы, в которых обнаружен голос.

Использование мел-частотных кепстральных коэффициентов (Mel Frequency Cepstral Coefficients, MFCC) считается стандартным методом извлечения признаков в системах распознавания речи [22]. Признаки MFCC вычисляются с помощью набора частотных фильтров, которые учитывают, что человеческий слух имеет разную чувствительность в разных частях звукового спектра – почти линейную для частот ниже 1 кГц и логарифмическую для более высоких частот.

На первом этапе находится логарифм энергии сигнала, который получается при наложении каждого фильтра

$$S(t, m) = \ln \left( \sum_{n=0}^{N-1} |X(t, n)|^2 H(m, n) \right), t = 1..T, m = 0..M - 1 \tag{5}$$

где  $X(t,n)$  –  $n$ -я компонента фурье-образа сигнала в фрейме  $t$ ,  $H(m,n)$  –  $n$ -я компонента  $m$ -го частотного mel-фильтра,  $N$  – размер окна и  $M$  – заданное заранее количество фильтров. Обычно в системах распознавания речи используют  $M=20$ , но  $M=12$  тоже считается достаточным числом.

Второй этап сводится к дискретному косинусному преобразованию полученных значений  $S(t,m)$ :

$$c(t,m) = \sum_{m_1=0}^{M-1} S(t,m_1) \cos\left(\frac{m(m_1-0,5)\pi}{M}\right), t=1..T, m=0..M-1 \quad (6)$$

Следующим шагом, после вычисления всех признаков, является поиск граничного значения энтропии, надёжно отделяющего фреймы, содержащие шум. Для этого гистограмма распределения значений энтропии всех фреймов приближается с помощью линейной комбинации двух нормальных распределений. Таким образом, учитываются свойства звукозаписи на больших отрезках времени. Использование именно двух нормальных распределений обусловлено предположением о скачкообразном изменении энтропии в моменты начала и окончания речи. Таким образом, гистограмма распределения энтропии должна иметь не менее двух максимумов. Это наглядно видно на рис. 5, где изображена гистограмма распределения значений энтропии для звукозаписи, изображенной на рис.2.

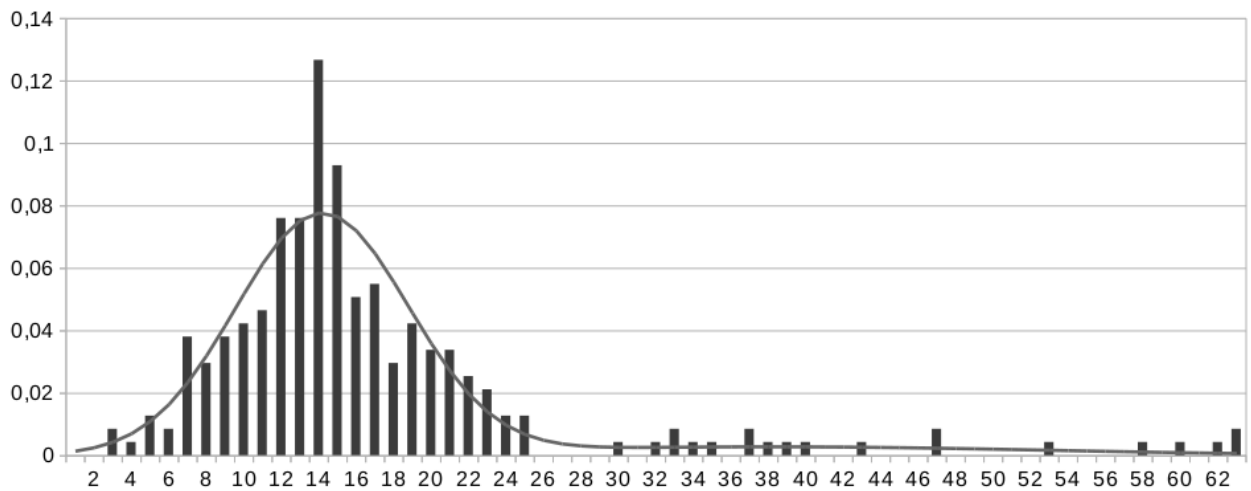


Рисунок 5. Гистограмма распределения энтропии и её аппроксимация с помощью суммы двух нормальных распределений, горизонтальная ось показывает номер интервала значений энтропии, вертикальная - относительное количество значений, попавших в каждый интервал.

С помощью EM-алгоритма [2] найденная гистограмма представляется как сумма двух нормальных распределений и находится минимальный экстремум  $\langle S \rangle$  приближенной функции распределения. Фреймы, имеющие энтропию Шеннона, не превышающую  $\langle S \rangle$ , считаются шумом и служат обучающей выборкой для классификатора.

При построении классификатора используется гипотеза, о том, что признаки MFCC подчиняются нормальному распределению. В таком случае обучение классификатора сводится к оценке значений математического ожидания и дисперсии для каждого признака MFCC. При классификации считается, что фрейм содержит голос, если среднее расстояние Махаланобиса от его набора признаков MFCC до найденного при обучении набора математических ожиданий превышает заданный априори предел.

Горизонтальные линии на рис. 4 показывают найденные фрагменты речи для неблагоприятного случая, когда сигнал по интенсивности равен шуму.

### Выводы

В работе предложен способ использования энтропии Шеннона для формирования обучающей выборки простого классификатора. Предварительное исследование показало, что представленный способ позволяет даже в случае сильной зашумленности обнаружить в звукозаписи человеческую речь. Данный способ определения голоса предполагается использовать в системах автоматической обработки речи и автоматической проверки произношения при обучении иностранному языку.

### Список использованной литературы

1. Jurafsky D. Speech and Language Processing (2Nd Edition) / Jurafsky, Daniel and Martin, James H. – NJ.: Prentice Hall, 2009 – 1024 pages
2. Флах П. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных / Петер Флах – М.: ДМК Пресс, 2015 – 400 с
3. Rabiner L.R. An algorithm for determining the endpoints of isolated utterances / L.R. Rabiner, M.R. Sambur

- // Bell Syst. Tech. J. – 1975. – V. 54, № 2. – P. 297–315
4. Van Gerven S. A comparative study of speech detection methods / S. Van Gerven, F. Xie // Proc. of European Conference on Speech, Communication and Technology. – Rhodos, 1997. – Режим доступа : [http://www.mirlab.org/conference\\_papers/International\\_Conference/Eurospeech%201997/pdf/tab/a0199.pdf](http://www.mirlab.org/conference_papers/International_Conference/Eurospeech%201997/pdf/tab/a0199.pdf).
  5. Marzinzik M. Speech pause detection for noise spectrum estimation by tracking power envelope dynamics / M. Marzinzik, B. Kollmeier // IEEE Trans. Speech Audio Process. – 2002. – V. 10, № 2. – P. 109–118
  6. Ramírez J. Efficient voice activity detection algorithms using long-term speech information / J. Ramírez, J.C. Segura, C. Benítez, Á. de la Torre, A. Rubio // Speech Commun. – 2004. – V. 42– P. 271–287
  7. Pencak J. The NP speech activity detection algorithm / J. Pencak, D. Nelson // Proc. of ICASSP. – Detroit, 1995. – Режим доступа : [https://www.researchgate.net/profile/Douglas\\_Nelson8/publication/3618329\\_The\\_NP\\_speech\\_activity\\_detection\\_algorithm/links/540857d90cf2c48563bb1228.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Douglas_Nelson8/publication/3618329_The_NP_speech_activity_detection_algorithm/links/540857d90cf2c48563bb1228.pdf)
  8. Graf S. Features for voice activity detection: a comparative analysis / Simon Graf, Tobias Herbig, Markus Buck and Gerhard Schmidt // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing . – 2015. – V. 2015, №1 – P. 1-15
  9. Nelson D.J. Pitch-based methods for speech detection and automatic frequency recovery / D.J. Nelson, J. Pencak // Proc. of SPIE’s 1995 International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation. – San-Diego, 1995. – Режим доступа: [https://www.researchgate.net/profile/Douglas\\_Nelson8/publication/260816047\\_Pitch-based\\_methods\\_for\\_speech\\_detection\\_and\\_automatic\\_frequency\\_recovery/links/541c15250cf2218008c4e563.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Douglas_Nelson8/publication/260816047_Pitch-based_methods_for_speech_detection_and_automatic_frequency_recovery/links/541c15250cf2218008c4e563.pdf)
  10. Kristjansson T. Voicing features for robust speech detection / T. Kristjansson, S. Deligne, P. Olsen // Proc. of INTERSPEECH. – Lisbon. – 2005. – Режим доступа : <http://papers.traustikristjansson.info/wp-content/uploads/2011/07/KristjanssonRobustVoicingEurospeech2005.pdf>
  11. Shahnaz C. A multifeature voiced/unvoiced decision algorithm for noisy speech / C. Shahnaz, W-P. Zhu, M.O. Ahmad // Proc. of ISCAS. – Kos, 2006– P. 2528 -2531
  12. Sadjadi S.O. Unsupervised speech activity detection using voicing measures and perceptual spectral flux / S.O. Sadjadi, J.H.L. Hansen // IEEE Signal Process. Lett. – 2013. – V. 20, №3– P. 197–200
  13. Haigh J.A. A voice activity detector based on cepstral analysis / J.A. Haigh, J.S. Mason // Proc. of EUROSPEECH. – Berlin, 1993. – Режим доступа :
  14. <https://www.semanticscholar.org/paper/A-voice-activity-detector-based-on-cepstral-Haigh-Mason/0fc5b0a4d38a6ae1b5ce9bb347b82e3ef3505859/pdf>
  15. Kinnunen T. A practical, self-adaptive voice activity detector for speaker verification with noisy telephone and microphone data / T. Kinnunen, P. Rajan // Proc. of ICASSP. – Vancouver: IEEE, 2013 – P. 7229–7233
  16. Rabiner L.R. Application of an LPC distance measure to the voiced-unvoiced-silence detection problem / L.R. Rabiner, M.R. Sambur // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1977. – V. 25, №4– P. 338–343
  17. Ghosh P.K. Robust voice activity detection using long-term signal variability / P.K. Ghosh, A. Tsiartas, S. Narayanan // IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Process. – 2011. – V. 19, №3– P. 600–613
  18. Mesgarani N. Discrimination of speech from nonspeech based on multiscale spectro-temporal modulations / N. Mesgarani, M. Slaney, S.A. Shamma // IEEE Trans. Audio, Speech Lang. Process. – 2006. – V. 14, №3– P. 920–930
  19. Ezzat T. Spectro-temporal analysis of speech using 2-D Gabor filters / T. Ezzat, J. Bouvrie, T. Poggio // Proc. of INTERSPEECH. – Antwerp: ISCA, – 2007. – Режим доступа :
  20. <http://cbcl.mit.edu/projects/cbcl/publications/ps/ezzat-spectro-analysis-07.pdf>
  21. Sohn J. A statistical model-based voice activity detection / J. Sohn, N.S. Kim, W. Sung // IEEE Signal Process. Lett. – 1999. – V. 6, №1– P. 1–3.
  22. Chang J.-H. Voice activity detection based on multiple statistical models. / J.-H. Chang, N.S. Kim, S.K. Mitra // IEEE Trans. Signal Process. – 2006. – V. 54, №6– P. 1965–1976
  23. Van Segbroeck M. A robust frontend for VAD: exploiting contextual, discriminative and spectral cues of human voice / M. Van Segbroeck, A. Tsiartas, S.S. Narayanan // Proc. of INTERSPEECH. – Lyon: ISCA, – 2013. – Режим доступа : <https://www.semanticscholar.org/paper/A-robust-frontend-for-VAD-exploiting-contextual-Segbroeck-Tsiartas/d974bef7949dd95a848ba092e597ea1693c2e68d/pdf>
  24. Motlíček P. Feature Extraction in Speech Coding and Recognition, Report, Portland, to -research, data, and theory / Belmont, CA: Thomson/Wadsworth, 2003, – P. 1-50.

УДК 004.75

Л.О. КИРИЧЕНКО, И.Н. ИВАНИСЕНКО, Т.А. РАДИВИЛОВА  
Харьковский национальный университет радиоэлектроники**АНАЛИЗ ДИСБАЛАНСА РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ  
САМОПОДОБНОЙ НАГРУЗКЕ**

*В работе предложен метод балансировки нагрузки с учетом оценивания загрузки узлов распределенной системы, который основан на расчете дисбаланса системы, при входных потоках данных, обладающих мультифрактальными свойствами. Проведено имитационное моделирование предложенного метода при работе различных алгоритмов балансировки, которое показало, что мультифрактальные характеристики трафика существенно влияют на дисбаланс системы. Использование предложенного метода позволяет распределять запросы по серверам так, чтобы отклонение загрузки серверов от среднего значения было минимальным, что позволяет получить более высокие показатели производительности системы и более быструю обработку потоков.*

*Ключевые слова: балансировка нагрузки, мультифрактальный поток, дисбаланс, оценка загрузки, распределенная система, самоподобие.*

Л.О. КІРІЧЕНКО, І.М. ІВАНІСЕНКО, Т.А. РАДІВІЛОВА  
Харківський національний університет радіоелектроніки**АНАЛІЗ ДИСБАЛАНСУ РОЗПОДІЛЕНОЇ СИСТЕМИ ПРИ САМОПОДІБНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

*У роботі запропоновано метод балансування навантаження з урахуванням оцінювання завантаження вузлів розподіленої системи, який засновано на розрахунку дисбалансу системи, при вхідних потоках даних, що володіють мультифрактальними властивостями. Проведено імітаційне моделювання запропонованого методу при роботі різних алгоритмів балансування, яке показало, що мультифрактальні характеристики трафіку істотно впливають на дисбаланс системи. Використання запропонованого методу дозволяє розподіляти запити по серверам так, щоб відхилення завантаженості серверів від середнього значення було мінімальним, що дозволяє отримати більш високі показники продуктивності системи і швидшу обробку потоків.*

*Ключові слова: балансування навантаження, мультифрактальний потік, дисбаланс, оцінка завантаження, розподілена система, самоподоба.*

L. KIRICHENKO, I. IVANISENKO, T. RADIVILOVA  
Kharkiv National University of Radio Electronics**ANALYSIS OF IMBALANCE OF DISTRIBUTED SYSTEM WITH A SELF-SIMILAR LOAD**

*In this paper a load balancing method based on estimating the load of distributed system nodes proposed, which is based on the calculation of the system imbalance, when the input data stream having multifractal properties. The simulation of the proposed method by using different load balancing algorithms conducted, its showed that characteristics of multifractal traffic significantly affect on the system imbalance. Using of proposed method allows to distribute requests across the servers so that the deviation of the load servers from the average value was minimal, which allows to get higher system performance metrics and faster processing flows.*

*Keywords: load balancing, multifractal flow, imbalance, imbalance, distributed system, self-similarity.*

**Постановка проблемы**

В настоящее время вместе с увеличением скоростей передачи данных в телекоммуникациях увеличивается доля интерактивного трафика, крайне чувствительного к параметрам среды транспортировки. Для предоставления требуемого количества ресурсов при передаче различных видов трафика, предъявляющих различные требования к характеристикам телекоммуникационной сети используются различные механизмы обеспечения QoS (Quality of service). Одним из таких механизмов является балансировка нагрузки [1-3]. Система балансировки нагрузки решает задачи обеспечения качества обслуживания и повышения производительности распределенных систем за счет оптимального распределения заданий между узлами вычислительной системы.

Задача балансировки загрузки состоит в том, чтобы исходя из комплекта задач, включающих вычисления и передачу данных, и системы серверов различной ресурсоемкости, найти такое распределение задач по серверам, которое обеспечивает примерно равную вычислительную загрузку каждого сервера и минимальные затраты на передачу данных. Для выполнения этой задачи могут использоваться различные алгоритмы балансировки нагрузки, которые учитывают оценки загрузки вычислительного узла.



### Анализ последних исследований и публикаций

Наиболее известными исследованиями в области балансировки, теоретических исследований и разработки фундаментальных основ распределения нагрузки, в создании математического аппарата, моделей и методов управления для распределения нагрузки в распределенных системах занимались такие ученые как Е.И. Игнатенко [3], В.Н. Тарасов [4], F. Wang [5], V. Cardellini [6], S.Keshav [7], Xing-Guo Luo, Xing-Ming Zhang [8], Hisao Kameda, Lie Li [9], а также другие исследователи, работающие над проблемами распределения нагрузки.

Многочисленные исследования процессов в информационных сетях показали, что реализации сетевого трафика обладают свойством масштабной инвариантности (самоподобием). Самоподобный трафик имеет особую структуру, сохраняющуюся на многих масштабах – в реализации всегда присутствует некоторое количество очень больших выбросов при относительно небольшом среднем уровне трафика. Эти выбросы вызывают значительные задержки и потери пакетов, даже когда суммарная потребность всех потоков далека от максимально допустимых значений. Исследованиями свойств самоподобного трафика в телекоммуникационных сетях занимались такие ученые как W.E. Leland, M.S. Taqqu, W. Willinger, D.V. Wilson, А.В. Лемешко [10], В.В. Турупалов, Е.Г. Игнатенко [3] и другие.

Самоподобные свойства обнаружены в локальных и глобальных сетях, в частности в трафиках Ethernet, АТМ, приложений TCP, IP, VoIP и видеопотоках. Причина такого эффекта заключается в особенностях распределения файлов по серверам, их размерах, в типичном поведении пользователей. Оказалось, что изначально не проявляющие свойств самоподобия потоки данных, пройдя обработку на узловых серверах и активных сетевых элементах, начинают подавать ярко выраженные признаки самоподобия. Наличие у передаваемых клиентами информационных потоков свойств самоподобия оказывает большое влияние на эффективность работы распределенных систем. Особенно важную роль это играет для работы сервисов, обеспечивающих передачу мультимедийного трафика и трафика реального времени. Таким образом, актуальной является задача разработки и анализа алгоритма балансировки нагрузки, который учитывает самоподобие трафика и загрузку каждого узла и всей распределенной системы.

### Цель работы

Целью данной работы является разработка метода балансировки нагрузки при самоподобном входном потоке с учетом загрузки узлов распределенной системы и анализ результатов имитационного моделирования при работе предложенного метода для различных алгоритмов балансировки.

### Основная часть

Для получения информации о текущем состоянии вычислительного узла выделяют два подхода: внешний мониторинг состояния вычислительных узлов распределенной системы и внутренний мониторинг.

Внешний мониторинг системы балансировки нагрузки.

Система балансировки централизованно собирает данные о состоянии всех вычислительных узлов распределенной системы. Существует несколько методов внешнего мониторинга.

1. Метод расчета системой балансировки нагрузки времени отклика вычислительного узла, для чего она направляет на узел служебный запрос и замеряет время ответа (например, используя протокол управления сообщениями Internet Control Message Protocol – ICMP). Данный метод позволяет системе убедиться в готовности вычислительного узла и определить количество времени, необходимое для передачи данных на вычислительный узел от системы балансировки нагрузки и обратно. Однако задержка в получении ответа может не зависеть от загрузки вычислительного узла. Здесь задержки может вносить среда передачи данных. Если нагрузка на сеть в распределенной системе неравномерна, то данные о загрузке узлов, основанные на времени ответа узла, могут быть сильно искажены.

2. Метод, основанный на отправке служебных пакетов подконтрольным узлам с целью получения более детальной информации о загрузке вычислительного узла (установление соединения с вычислительным узлом по протоколу TCP).

3. Метод, позволяющий обеспечивать мониторинг времени отклика и готовности вычислительного узла и приложений, работающих на нем [3]. Время отклика приложения определяется как интервал времени между отправкой запроса на предоставление данных и до момента объявления о готовности к передаче.

Основным преимуществом данного подхода является возможность учитывать производительность вычислительного узла и вводить весовые коэффициенты, которые можно динамически менять в процессе работы системы балансировки, что позволяет более гибко менять нагрузку на вычислительный узел.

Недостатки:

а) данные о загрузке узла выражаются только временем ответа на запрос системы балансировки, которое может быть большим из-за перегрузок в сети, а не загрузки самого узла;

б) отсутствие данных о состоянии процессора, памяти, системы ввода/вывода и т.д.

Внутренний мониторинг системы балансировки нагрузки.

Используется для получения более детальной информации о состоянии вычислительного узла. При таком подходе на каждый узел распределенной системы помещается программа-агент, которая собирает данные об узле, на котором она находится. Данные от программ-агентов могут передаваться на балансировщик либо после запроса центральной (диспетчерской) части системы балансировки нагрузки,

либо программы-агенты могут самостоятельно передавать сведения о загрузке подконтрольного узла на центральный узел через определенный интервал времени. При данном подходе существует проблема определения частоты передачи обработанной информации на балансировщик. Первый метод позволяет по запросу центрального узла получать данные от всех узлов в тот момент, когда необходимо поставить новый запрос клиента в очередь на исполнение. Второй метод позволяет постоянно иметь свежие данные о загрузке вычислительных узлов, но при этом повышается нагрузка на сеть из-за постоянной передачи служебных данных.

Основным недостатком данного подхода является использование служебными программами-агентами определенного количества ресурсов узла. Объем требуемых ресурсов узла программами-агентами зависит от того, по скольким параметрам идет оценка загруженности вычислительного узла [3, 4], идет ли обработка этих данных на самом узле или они передаются на центральную машину системы балансировки нагрузки. Поэтому при разработке системы балансировки нагрузки важным вопросом является определение критериев загрузки вычислительного узла. Потребуется большее количество ресурсов узла для обработки информации о загрузке компонентов (процессор, память) узла. Однако, оценка загрузки только одного компонента не дает объективных данных о состоянии всего узла. Поэтому в работе предложены критерии, учитывающие в совокупности несколько ресурсов узла.

Система балансировки состоит из активного балансировщика, резервного балансировщика и группы серверов [3, 11, 12, 13].

Критерии оценки загрузки распределенной системы.

1. Средняя загрузка каждого  $i$ -го процессора  $CPU_i^u(T)$   $i$ -го сервера определяется как средняя загрузка процессора в течение наблюдаемого периода  $T$ . Например, если период наблюдений составляет 1 мин., а загрузка процессора записывается через каждые 10 секунд, то есть  $CPU_i^u$  это среднее значение из шести записанных значений  $i$ -го сервера.

Аналогично определяется средняя загрузка каждой  $r$ -й памяти  $RAM_i^r(T)$   $i$ -го сервера и средняя загрузка  $k$ -го канала  $Net_i^k(T)$   $i$ -го сервера в течение наблюдаемого периода.

2. Введем средний коэффициент использования всех процессоров в системе. Пусть  $CPU_i^{n_i}$  средняя загрузка ЦПУ  $i$ -го сервера,

$$CPU_u^{All} = \frac{\sum_i^N CPU_i^u CPU_i^{n_i}}{\sum_i^N CPU_i^{n_i}}, \quad (1)$$

где  $N$  – общее число физических серверов в системе,  $n_i$  – количество ЦПУ на  $i$ -м сервере.

Аналогичным образом, средний коэффициент использования памяти  $RAM_i^{m_i}$ , пропускной способности линии связи  $Net_i^{k_i}$   $i$ -го сервера, вся память  $RAM_r^{All}$ , и вся пропускная способность сети в системе  $Net_k^{All}$  может быть определена.

$$RAM_r^{All} = \frac{\sum_i^N RAM_i^r RAM_i^{m_i}}{\sum_i^N RAM_i^{m_i}}, \quad (2)$$

$$Net_k^{All} = \frac{\sum_i^N Net_i^k Net_i^{k_i}}{\sum_i^N Net_i^{k_i}}, \quad (3)$$

3. Значение дисбаланса всех процессоров. Используя формулу дисперсии, значение дисбаланса всех процессоров в системе определяется как

$$ISL_{CPU} = \sum_i^N (CPU_i^u - CPU_u^{All})^2, \quad (4)$$

Точно так же могут быть рассчитаны значения дисбаланса памяти и пропускной способности сети.

$$ISL_{RAM} = \sum_i^N (RAM_i^r - RAM_r^{All})^2, \quad (5)$$

$$ISL_{Net} = \sum_i^N (Net_i^k - Net_k^{All})^2, \quad (6)$$

4. Введем комплексное значение дисбаланса нагрузки  $SIL_i$   $i$ -го сервера, учитывающее все три ресурса сервера. Используя формулу расчета дисперсии как меры неравномерности, интегрированное значение дисбаланса нагрузки  $i$ -го сервера можем определить как:

$$SIL_i = a(CPU_i^u - CPU_u^{All})^2 + b(RAM_i^r - RAM_r^{All})^2 + c(Net_i^k - Net_k^{All})^2, \quad (7)$$

Параметры  $a, b, c$  обозначают весовые коэффициенты для процессора, памяти и пропускной способности сети, соответственно, которые выбираются экспериментальным путем таким образом, что  $a + b + c = 1$ , в зависимости от решаемых задач и структуры системы.

$SIL_i$  применяется для обозначения уровня дисбаланса нагрузки путем сравнения коэффициентов использования процессора, памяти и пропускной способности сети.

5. Тогда суммарные значения дисбаланса всех серверов в системе записывается как:

$$ISL_{tot} = \frac{1}{N} \sum_i^N SIL_i, \quad (8)$$

6. Эффективность использования определяется как средняя нагрузка на любом сервере.

Таким образом, для планирования ресурсов была разработана методика комплексного измерения общего уровня дисбаланса системы, а также среднего уровня дисбаланса каждого сервера.

Самоподобные и мультифрактальные свойства трафика. Самоподобие случайных процессов заключается в сохранении статистических характеристик при изменении масштаба времени и характеризуется показателем Херста  $H$ , который является степенью самоподобия. Стохастический процесс

$X(t)$  является статистически самоподобным, если процесс  $a^{-H} X(at)$  обладает теми же статистическими характеристиками второго порядка, что и  $X(t)$ . Параметр  $H$ , называемый параметром Херста, представляет собой меру самоподобия стохастического процесса. Моменты самоподобного случайного процесса можно выразить как  $M\left[|X(t)|^q\right] = C(q) \cdot t^{qH}$ , где величина  $C(q)$  – некоторая детерминированная

функция. Для мультифрактальных процессов выполняется отношение  $M\left[|X(t)|^q\right] = c(q) \cdot t^{qh(q)}$ , где  $c(q)$  – детерминированная функция;  $h(q)$  – обобщенный показатель Херста, являющийся в общем случае нелинейной функций. Значение  $h(q)$  при  $q = 2$  совпадает со значением степени самоподобия  $H$  [14].

Самоподобный трафик имеет особую структуру, которая сохраняется на многих масштабах – в реализации всегда присутствует некоторое количество очень больших выбросов при относительно небольшом среднем уровне трафика. Мультифрактальный трафик определяется как расширение самоподобного трафика за счет учета масштабируемых свойств статистических характеристик второго и выше порядков.

В работе характеристикой неоднородности мультифрактального потока данных предложено считать диапазон обобщенного показателя Херста  $\Delta h = h(q_{\min}) - h(q_{\max})$ . Для монофрактальных процессов обобщенный показатель Херста не зависит от параметра  $q$  и является прямой линией:  $h(q) = H$ ,  $\Delta h = 0$ . Чем больше неоднородность процесса, т.е. чем большие выбросы присутствуют в трафике, тем больше диапазон  $\Delta h$ .

Метод балансировки с учетом мультифрактальных свойств трафика. Рассмотрим метод балансировки, который учитывает мультифрактальные свойства трафика. Система балансировки нагрузки состоит из компонентов, представленных на рис. 1. Балансировщик нагрузки имеет веб-интерфейс для отслеживания, настройки и администрирования распределения нагрузки.

Предлагаемый метод балансировки нагрузки основан на использовании комплекса методов внутреннего и внешнего мониторинга. Использование внешнего мониторинга системы позволяет периодически тестировать сеть для определения наиболее загруженных сегментов. Использование внутреннего мониторинга состояния вычислительного узла позволяет получить объективную картину загрузки узла и данные о загрузке отдельных компонентов узла. Критериями загрузки вычислительного узла предлагается считать загрузку процессора, памяти и пропускной способности канала для потоков разных классов обслуживания. Чтобы учитывать потенциальную вычислительную мощность каждого ресурса узла, предлагается использовать весовые коэффициенты. Данный метод учитывает мультифрактальные свойства входящего информационного потока. Использование комплексного подхода при балансировке нагрузки позволит добиться увеличения производительности распределенной вычислительной системы.

Процесс *pulse* – это управляющий процесс, который на активном балансировщике запускает процесс *lvs*, а на резервном балансировщике будет отслеживать состояние активного, периодически опрашивая его. Если активный балансировщик не отвечает в течение заданного периода времени, будет инициирован процесс передачи его функций резервному балансировщику. При этом *pulse* на резервном балансировщике отправляет процессу *pulse* на активном балансировщике команду остановки всех служб *lvs*, запускает *send\_arp* для присвоения виртуальных IP-адресов MAC-адресу резервного балансировщика и запускает процесс *lvs*. Процесс *send\_arp* рассылает широковещательные пакеты ARP при переходе виртуального IP-адреса от одного узла другому [15].

Процесс *lvs* запускается на активном балансировщике по вызову *pulse*. Он вызывает службу *ipadm* для создания, добавления, изменения и удаления записей в таблице маршрутизации IP. Процесс *lvs* запускает процесс *status* для каждой настроенной службы распределения нагрузки. Если *status* сообщает о том, что реальный сервер отключен, *lvs* заставит утилиту *ipadm* удалить этот сервер из таблицы IP. Основным назначением процесса *status*, работающего на активном балансировщике, является наблюдение за нагрузкой серверов, сбор и анализ статистики о текущем состоянии системы и интенсивности трафика. Процесс *status* передает обработанную и проанализированную информацию в подсистему балансировки нагрузки процессу *inf\_status*. Процесс *inf\_status* в свою очередь передает информацию о текущем состоянии системы процессу *coun\_parce*.

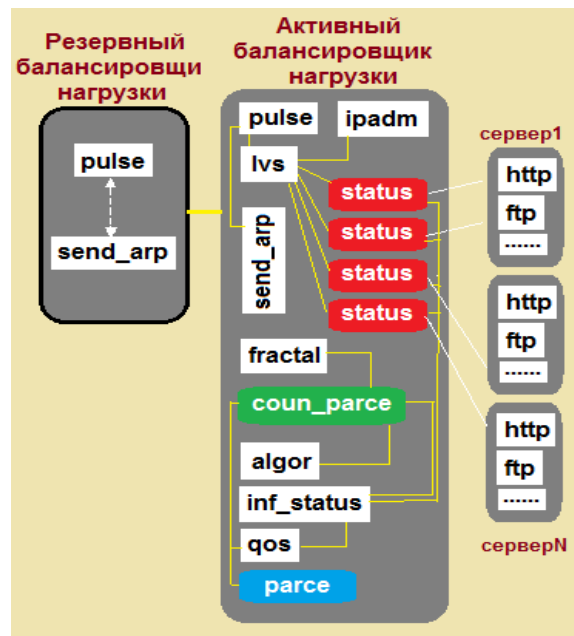


Рисунок 1. Компоненты системы балансировки нагрузки

Процесс *fractal* проводит расчет мультифрактальных свойств каждого входящего потока данных и передает эту информацию процессу *coun\_parce*. Процесс *algor* выбирает алгоритм балансировки нагрузки и также передает эту информацию процессу *coun\_parce*. Процесс *coun\_parce* проводит расчет распределения потоков по узлам сети с учетом классификации трафика, загруженности серверов и каналов связи, дисбаланса серверов и всей системы. Результаты расчета передаются процессу *parce*, который осуществляет динамическое распределение трафика по различным каналам связи и узлам в зависимости от их текущего состояния. Также результаты расчета процесса *coun\_parce* передаются процессу *qos* для гибкой настройки обеспечения качества обслуживания в соответствии с методами управления трафиком (управление пропускной способностью каналов и памяти, производительностью процессоров, кеш-памяти), если это необходимо. В случае применения методов управления трафиком процессом *qos*, информация об изменениях передается процессу *inf\_status*.

Результаты имитационного моделирования. Был разработан программный продукт, который позволяет проводить имитационное моделирование работы системы балансировки нагрузки с помощью различных алгоритмов балансировки, используя предложенный метод. Рассмотрены три основных алгоритма балансировки нагрузки: Round Robin, Round Robin Weight и Compare Balance. Алгоритм Round Robin (кругового обслуживания), представляет собой перебор по круговому циклу: первая задача передается одному узлу, затем следующая задача передается другому и так до достижения последнего узла, а затем всё начинается сначала. В алгоритме Round Robin Weight каждому узлу присваивается весовой коэффициент в соответствии с его производительностью и мощностью. Это помогает распределять нагрузку более гибко, так как узлы с большим весом обрабатывают больше запросов. Алгоритм Compare Balance используется для достижения равновесного состояния и управления несбалансированной нагрузкой системы. В этом алгоритме балансировщик случайным образом выбирает сервера и сравнивает их нагрузку, после чего отправляет заявку на обработку сервера с меньшей нагрузкой.

Для анализа работы алгоритмов балансировки были проведены численные исследования работы системы балансировки при различных значениях нагрузки, количества серверов и параметров мультифрактального трафика. На рис. 2-4 показано изменение дисбаланса процессоров, памяти и пропускной способности каналов (4-6) в случае 2-х серверов, а также комплексное значение дисбаланса нагрузки каждого сервера (7) при работе алгоритма балансировки Compare Balance. Параметры  $a, b, c$ , которые обозначают весовые коэффициенты для процессора, памяти и пропускной способности сети, были выбраны равнозначными.

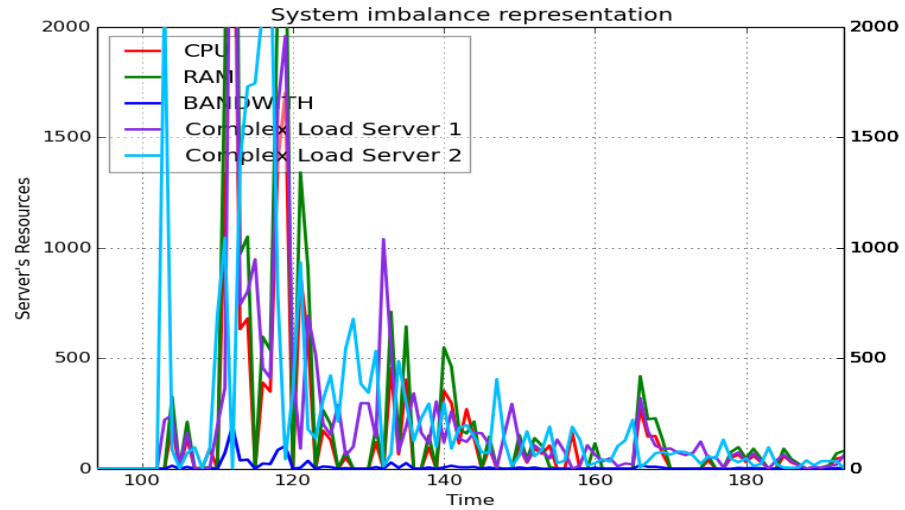


Рисунок 2. Дисбаланс системы при параметрах трафика  $H = 0.6$  и  $\Delta h = 1.5$ .

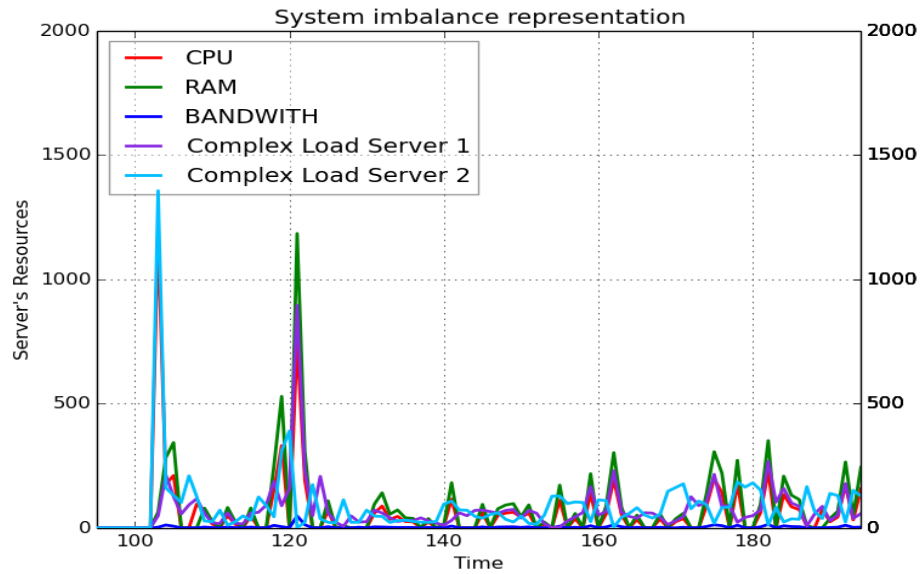


Рисунок 3. Дисбаланс системы при параметрах трафика  $H = 0.9$  и  $\Delta h = 1.5$

В первом случае (рис. 2) на балансировщик поступает сгенерированный трафик с параметром  $H = 0.6$  и диапазоном обобщенного показателя Херста  $\Delta h = 1.5$ . Рис. 2 демонстрирует дисбаланс системы для трафика с более сильной долгосрочной зависимостью ( $H = 0.9$ ) и той же неоднородностью, что и в первом случае. На рис. 4 представлены результаты моделирования работы балансировщика в случае больших значений как параметра Херста  $H = 0.9$ , так и диапазона обобщенного показателя Херста  $\Delta h = 2.5$ .

Таблица 1

**Сравнительные характеристики алгоритмов балансировки**

Параметры	Round Robin	Round Robin Weight	Compare Balance
Потерянные данные, %	1,94	1,64	0,98
Среднее время ожидания, мс	4	6	8

Исследования показали, что дисбаланс системы существенно зависит от мультифрактальных характеристик трафика. При небольших значениях  $H$  и небольшой неоднородности система балансировки приходит в равновесное состояние и значение дисбаланса стремится к нулю. При увеличении показателя Херста с течением времени дисбаланс системы не затухает и система балансировки не приходит в равновесное состояние. При больших значениях показателя Херста и большой неоднородности система балансировки находится в неустойчивом состоянии и значение дисбаланса изменяется в несколько раз, что

приводит к максимальной загрузке ресурсов. В табл. 1 приведены значения количества потерянных данных и среднее время ожидания заявок в системе при работе алгоритмов балансировки Round Robin, Round Robin Weight и Compare Balance.

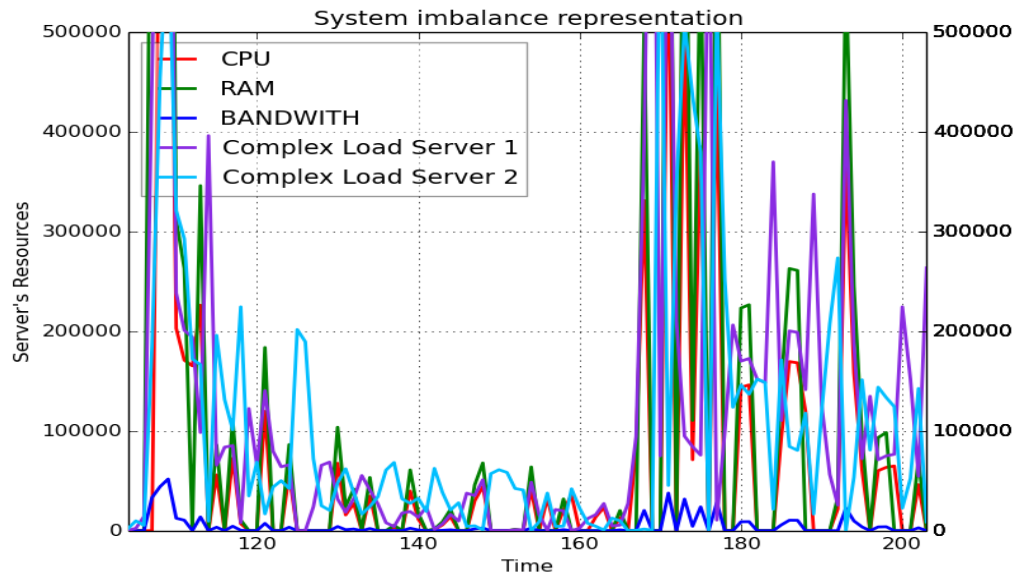


Рисунок 4. Дисбаланс системы при параметрах трафика  $H = 0.9$  и  $\Delta h = 2.5$

Проведенные исследования показали, что из трех рассмотренных алгоритмов наилучшим является алгоритм Compare Balance. При работе данного алгоритма количество потерянных данных является наименьшим и, соответственно, обеспечивает наилучшее качество обслуживания для чувствительного к потерям трафика. Однако среднее время ожидания заявки в системе является наибольшим у алгоритма Compare Balance, что происходит из-за учета данным алгоритмом состояния серверов.

#### Выводы

В работе предложен метод балансировки нагрузки с учетом оценивания загрузки узлов распределенной системы. При оценивании загрузки узлов рассчитывается средняя нагрузка процессора, памяти и пропускной способности канала на основе загрузки, которая измерена системой учета или монитором операционной системы. Это позволяет вычислить дисбаланс всех серверов системы, среднюю продолжительность работы и эффективность использования ресурсов системы при различных алгоритмах балансировки.

В работе проведено имитационное моделирование предложенного метода и алгоритмов балансировки Round Robin, Round Robin Weight и Compare Balance, которое показало, что наименьшее количество потерянной информации получается при работе динамического алгоритма балансировки, а наименьшее время отклика - при статическом. Результаты моделирования показали, что мультифрактальные характеристики трафика существенно влияют на дисбаланс системы. При небольших значениях показателя Херста и небольшой неоднородности трафика значение дисбаланса стремится к нулю и система балансировки приходит в равновесное состояние. При больших значениях показателя Херста и неоднородности система балансировки постоянно находится в неустойчивом состоянии, что приводит к максимальной загрузке ресурсов. Использование предложенного метода при балансировке нагрузки, с учетом информации о состоянии серверов и всей системы, позволяет балансировщику выделить сервер, который способен наилучшим образом справиться с обработкой пришедшего мультифрактального потока задач.

#### Список использованной литературы

1. Чжоу Т. Системы балансировки нагрузки Web-серверов / Тао Чжоу // Журнал «Windows 2000 Magazine». – 2000. - № 03/2000.
2. Воеводин В.В. Параллельные вычисления / В.В. Воеводин // СПб: БХВ-Петербург. - 2003.
3. Игнатенко Е.И. Адаптивный алгоритм мониторинга загруженности сети кластера в системе балансировки нагрузки / Е.И. Игнатенко, В.И. Бессараб, И.В. Дегтяренко // Наукові праці ДонНТУ. – 2011. – Вип.21(183). – С.95-102.
4. Тарасов В.Н. Математические модели облачного вычислительного центра обработки данных с использованием Openflow / В.Н. Тарасов, П.Н. Полежаев, А.Е. Шухман, Ю.А. Ушаков, А.Л. Коннов // ВЕСТНИК ОГУ. – 2012. – №9 (145). – С.150-155.
5. Wang F. User-priority guided min-min scheduling algorithm for load balancing in cloud computing /

- F. Wang, H. Chen, N. Helian, G. Akanmu. // National Conference Parallel Computing Technologies (PARCOMPTECH). - 2013. – P.1-8.
6. Cardellini V. Dynamic Load Balancing on Web-server Systems / V. Cardellini, M. Colajanni, P. S. Yu. // IEEE Internet Computing. – 1999. - Vol.3, No.3.– P.28-39.
  7. Keshav S. An Engineering Approach to Computer Networking / S.Keshav. // Addison-Wesley, Reading, MA. – 1997. - P. 215-217.
  8. Luo Xing-Guo. Job Scheduling Model for Cloud Computing Based on Multi-Objective Genetic Algorithm / Xing-Guo Luo, Jing Liu, Xing-Ming Zhang, Fan Zhang and Bai-Nan Li // IJCSI International Journal of Computer Science. - 2013. – V.10(1), № 3. – P.134-139.
  9. Optimal Load Balancing in Distributed Computer Systems / [Hisao Kameda, Lie Li, Chonggun Kim, Yongbing Zhang.]. - Springer, Verlag London Limited., 1997. – 238 p.
  10. Лемешко А.В. Усовершенствование потоковой модели многопутевой маршрутизации на основе балансировки нагрузки / А.В. Лемешко, Т.В. Вавенко. // Проблеми телекомунікацій. - №1 (6). – 2012. – С.12 – 29.
  11. Shang Zhihao. Design and implementation of server cluster dynamic load balancing based on OpenFlow / Zhihao Shang, Wenbo Chen, Qiang Ma, Bin Wu // Awareness Science and Technology and Ubi-Media Computing (iCAST-UMEDIA). – 2013. – P.691 – 697.
  12. Tian Wenhong. Optimized Cloud Resource Management and Scheduling: Theories and Practices. / Wenhong Tian, Yong Zhao. - Morgan Kaufman, 2014. – 284 p.
  13. Red Hat Enterprise Linux. Обзор планирования распределения нагрузки [Электронный ресурс] / Red Hat Enterprise Linux – Електронні дані. – [Red Hat Enterprise Linux, 2015]. - Режим доступа: [https://access.redhat.com/documentation/ru-RU/Red\\_Hat\\_Enterprise\\_Linux/6/html/Virtual\\_Server\\_Administration/s1-lvs-scheduling-VSA.html](https://access.redhat.com/documentation/ru-RU/Red_Hat_Enterprise_Linux/6/html/Virtual_Server_Administration/s1-lvs-scheduling-VSA.html) (дата звернення 13.06.2016 р.). – Назва з екрана.
  14. Kantelhardt J.W. Fractal and multifractal time series / J.W. Kantelhardt // Mathematics of complexity and dynamical systems. -2012. - P.463-487
  15. Erl Thomas. Cloud Computing Design Patterns / Thomas Erl, Robert Cope, Amin Naserpour // Prentice Hall, Ed.1st. – 2015. – P.592.

УДК 519.2:004.9

Ю.А. КОБИЦКАЯ

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

## РАСПОЗНАВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

*Предложен алгоритм распознавания временных рядов на основе сравнения оптимальных-вейвлет деревьев по значениям энтропии в узлах. Работа алгоритма проверена на модельных и экспериментальных данных. Работа алгоритма протестирована на модельных хаотических реализациях для разных хаотических режимов и экспериментальных данных артериального давления двух групп лабораторных животных.*

*Ключевые слова: фрактальный временной ряд, энтропия, вейвлет-преобразование, оптимальное вейвлет-дерево*

Ю.О. КОБИЦЬКА

Харківський національний університет радіоелектроніки

## РОЗПІЗНАВАННЯ ФРАКТАЛЬНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

*Запропоновано алгоритм розпізнавання часових рядів на основі порівняння оптимальних-вейвлет дерев за значеннями ентропії в вузлах. Робота алгоритму перевірена на модельних та експериментальних даних. Робота алгоритму протестована на модельних хаотичних реалізаціях для різних хаотичних режимів і експериментальних даних артеріального тиску двох груп лабораторних тварин.*

*Ключові слова: фрактальний часовий ряд, ентропія, вейвлет-перетворення, оптимальне вейвлет-дерево*

Yu. KOBYTSKA

Kharkiv National University of Radioelectronics

## RECOGNITION OF FRACTAL TIME SERIES BY USING WAVELET PACKET TRANSFORM

*Recognition algorithm of time series based on the comparing of optimal wavelet tree entropy values at the nodes is proposed. The algorithm is tested on simulated and experimental data. The algorithm was tested on model chaotic realizations for different chaotic modes and experimental data of blood pressure for two groups of laboratory animals.*

*Keywords: fractal time series, entropy, wavelet-transform, optimal wavelet-tree*

### Постановка проблемы и цели исследования

Многочисленные исследования, проведенные в последние десятилетия, показали, что многие информационные, биологические, физические, технологические процессы обладают сложной фрактальной структурой. Математическими моделями сложных систем, проявляющих нерегулярную фрактальную динамику, являются как случайные, так и детерминированные хаотические процессы. Одной из целей анализа временных рядов (ВР) является извлечение информации из реализации конечной длины и получение вывода о свойствах и механизме процесса, который генерирует ряд.

Одним из способов реализации методов анализа и прогнозирования ВР является разработка системы поддержки принятия решений (СППР). Задача разработки СППР, которая позволяет пользователю исследовать структуру и классифицировать фрактальные ВР, является актуальной и востребованной. В работе [1] представлена СППР, предназначенная для исследования ВР различной природы, обладающих фрактальными свойствами. Для выявления характерных особенностей фрактальной структуры и классификации ВР база знаний помимо фрактальных характеристик содержит блоки знаний, определяющих информационную сложность ряда.

Вейвлет-преобразование (ВП), обладающее частотно-временным окном, одинаково хорошо выявляет как низкочастотные, так и высокочастотные характеристики сигнала на разных временных масштабах [2]. Применение пакетного вейвлет-преобразования позволяет проводить декомпозицию ВР на составляющие с различными частотными диапазонами [3]. Построение оптимальных вейвлет-деревьев является действенным инструментом для классификации сигналов [4,5]. Особый интерес представляет использование пакетного вейвлет-преобразования для выявления характерных особенностей высокочастотных компонент и классификации ВР, обладающих фрактальными свойствами. Использование



вейвлет-характеристик в качестве знаний для СППР дает возможность распознавания и классификации сигналов при изменении их фрактальных свойств.

Целью представленной работы является проведение сравнительного анализа характеристик пакетного ВП для фрактальных сигналов и разработка алгоритма распознавания сигналов по вейвлет-деревьям.

**Изложение основного материала**

Декомпозиция временных рядов с помощью дискретного вейвлет-преобразования. Вейвлет преобразование временного ряда – это его представление в виде обобщенного ряда или интеграла по системе базисных функций

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \tag{1}$$

полученных из материнской вейвлет-функции  $\psi(t)$  за счет операций сдвига во времени  $b$  и изменения временного масштаба  $a$ . В дискретном вейвлет-преобразовании (ДВП) параметры масштаба и сдвига задаются обычно в виде степенных функций:  $a = 2^{-m}$ ,  $b = k_0 \cdot 2^{-m}$ ,  $m, k_0 \in Z$ . Дискретные вейвлеты используются, как правило, в паре со связанными с ними дискретными скейлинг-функциями. Скейлинг-функции имеют с вейвлетами общую область задания и определенное соотношение между значениями. При заданных материнском вейвлете  $\psi(t)$  и соответствующей скейлинг-функции  $\varphi(t)$  аппроксимирующие коэффициенты  $\text{apr}(j, k)$  и детализирующие коэффициенты  $\text{det}(j, k)$  ДВП для процесса  $X(t)$  определяются следующим образом:

$$\text{apr}(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\varphi_{j,k}(t)dt, \quad \text{det}(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\psi_{j,k}(t)dt, \tag{2}$$

где  $j$  – параметр масштаба,  $k$  – параметр сдвига ( $j, k \in Z$ ) и базисные функции равны:

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k), \\ \psi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k). \end{aligned} \tag{3}$$

Декомпозиция временного ряда, выполняемая с помощью ДВП, заключается в разбиении исследуемого ряда на две составляющие: аппроксимирующую и детализирующую, с последующим аналогичным дроблением аппроксимирующей до заданного уровня разложения. Временной ряд  $X(t)$  представляется в виде суммы аппроксимирующей компоненты  $\text{approx}_N(t)$  и детализирующих компонент  $\text{detail}_j(t)$ :

$$X(t) = \text{approx}_N(t) + \sum_{j=1}^N \text{detail}_j(t) = \sum_{k=1}^{N_a} \text{apr}(N, k) \varphi_{j,k}(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{N_j} \text{det}(j, k) \psi_{j,k}(t), \tag{4}$$

где  $N$  – выбранный максимальный уровень разложения,  $N_j$  – количество детализирующих коэффициентов на уровне  $j$ ,  $N_a$  – количество аппроксимирующих коэффициентов на уровне  $N$ .

Выбор типа вейвлет-функции и количества уровней разложения является важным вопросом при выполнении ДВП. Обычно вейвлет-функция подбирается в зависимости от временных и частотных характеристик каждого анализируемого сигнала. Максимальный уровень разложения зависит от того, какие частотные диапазоны необходимо исследовать.

В обычном алгоритме ДВП при переходе с масштабного уровня  $m$  на уровень  $m+1$  функция аппроксимирующих коэффициентов  $\text{apr}(m, k)$  разделяется на низкочастотную  $\text{apr}(m+1, k)$  и высокочастотную  $\text{det}(m+1, k)$  части спектрального диапазона. При дальнейшем увеличении масштабных уровней разложению подвергаются только низкочастотные аппроксимирующие функции, детализирующие коэффициенты далее не анализируются (рис. 1 слева). Идея пакетного вейвлет-анализа состоит в том, чтобы раскладывать детализирующие функции, используя тот же самый метод разложения. В пакетном алгоритме ДВП операция последовательного частотного расщепления применяется как для низкочастотных аппроксимирующих, так и для высокочастотных детализирующих коэффициентов. Таким образом пакетное ДВП способствует лучшей частотной локализации. В результате возникает дерево разложения, пример которого показан на рис. 1 справа. При разложении данных некоторого узла ниже слева находятся аппроксимирующие коэффициенты, а справа – детализирующие.

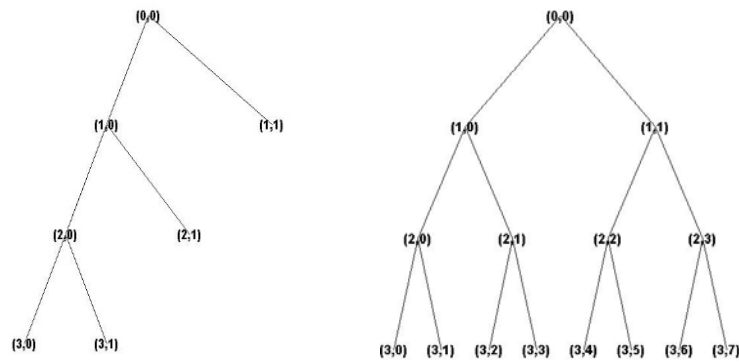


Рисунок 1. Дерево обычного ДВП (слева) и пакетного ДВП (справа)

Каждый узел дерева пакетного ДВП содержит набор вейвлет-коэффициентов, соответствующих определенному частотному диапазону. Временной ряд может быть однозначно восстановлен по пакетным вейвлет-коэффициентам, находящимся в терминальных узлах дерева.

Полный набор вейвлетных функций разложения называют вейвлет-пакетом. Пакетное вейвлет-преобразование является адаптивным и позволяет более точно приспособляться к особенностям сигналов путем выбора соответствующей оптимальной формы дерева разложения. Используя пакетное вейвлет-преобразование, можно выделить частотные особенности исследуемого сигнала, в частности, наличие шумовых составляющих с разными спектральными составляющими.

Построение оптимального вейвлет-дерева в пакетном вейвлет-преобразовании. Пакетное ВП часто графически представляют деревом, корнем которого является исходный сигнал. Пакеты, являющиеся ветками, можно соотнести с определенным частотным диапазоном. Пакеты, не содержащие информации о сигнале, можно рассматривать как шумовые. Мерой информативности набора коэффициентов служит показатель энтропии. Наиболее употребительными при обработке сигналов являются следующие типы

расчета энтропии: энтропия Шеннона  $E(s) = -\sum s_i^2 \log(s_i^2)$ ; норма пространства  $E(s) = -\sum |s_i|^p$ ,  $p \geq 1$ ;

логарифм энергии  $E(s) = \sum \log(s_i^2)$ ; пороговая энтропия  $E(s) = \sum i$ , при  $|s_i| > \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  – некоторое пороговое значение [2,3]. Во всех случаях величина  $s$  представляет собой массив вейвлет-коэффициентов рассматриваемого узла вейвлет-дерева.

Лучшее дерево находится по следующей схеме. Узел  $N$  разбивается на два узла  $N1$  и  $N2$ , только если сумма энтропий узлов  $N1$  и  $N2$  меньше, чем энтропия узла  $N$ . Более отдаленные от корня узлы дерева содержат низкочастотные коэффициенты и несут в себе больше информации об исследуемом сигнале. Изменяя функцию энтропии узла и тип материнского вейвлета, можно подобрать оптимальный метод построения вейвлет-дерева для определенной задачи.

Исследуемые данные. В качестве модельных данных были использованы реализации хаотического отображения. Хаос представляет собой сложную форму поведения детерминированной системы в установившемся режиме. Хотя эволюция этой системы однозначно определяется динамическими законами и на нее не действуют никакие случайные силы, тем не менее, динамика системы является стохастической. Основным свойством таких систем является чувствительная зависимость режима функционирования к сколь угодно малым изменениям начальных условий. Критерием степени хаотичности является показатель Ляпунова  $\lambda$ .

Одними из самых простых и наглядных математических моделей, демонстрирующих хаотическое поведение, являются итерируемые отображения  $x_{n+1} = f(C, x_n)$ , где  $C$  – управляющий параметр. Для широкого класса нелинейных функций  $f$  последовательность значений  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  является хаотической. В случае диссипативных отображений орбиты  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  стремятся к некоторому аттрактору, обладающему фрактальной структурой. Поскольку большое количество реальных сложных процессов, возникающих в различных областях нашей жизни, таких как физика, геология, медицина, социология, имеют фрактальную структуру, выбор реализаций хаотического отображения в качестве тестовых данных является оправданным.

Наиболее известным примером хаотических отображений является логистическое отображение. Это одномерное квадратичное отображение, определяемое следующим образом:

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n), \tag{5}$$

где  $A$  – управляющий параметр,  $A \in (0, 4]$ , а значения  $x_n \in [0, 1]$ . Изменяя значения параметра  $A$ , и вместе с этим значения показателя Ляпунова  $\lambda$ , можно выбирать реализации с различной степенью хаотичности.

На рис. 2 показаны реализации логистического отображения при значении параметра  $A=3.7$ ,  $A=3.87$ ,  $A=3.9$ . с соответствующими значениями показателя Ляпунова  $\lambda = 0.4$ ,  $\lambda = 0.48$  и  $\lambda = 0.51$

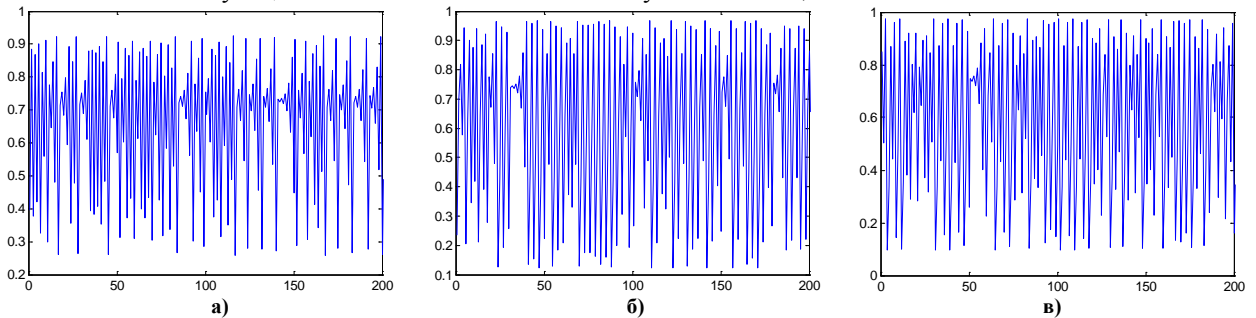


Рисунок 2. Реализации логистического отображения с параметром: а)  $A=3.7$ ; б)  $A=3.87$ ; в)  $A=3.9$

В качестве реальных данных были взяты данные артериального давления, полученные в результате эксперимента над лабораторными животными (крысами) [6]. Известно, что временные ряды артериального давления обладают фрактальными свойствами [7,8]. В эксперименте животные были поделены на две группы: одна группа была на бессолевой диете, а другая - на гиперсолевой. Большое количество соли в организме приводит к повышению давления, поскольку натрий является основным элементом, определяющим объем крови в сосудах. Графики типичных реализаций артериального давления для обеих групп представлены на рис. 3.

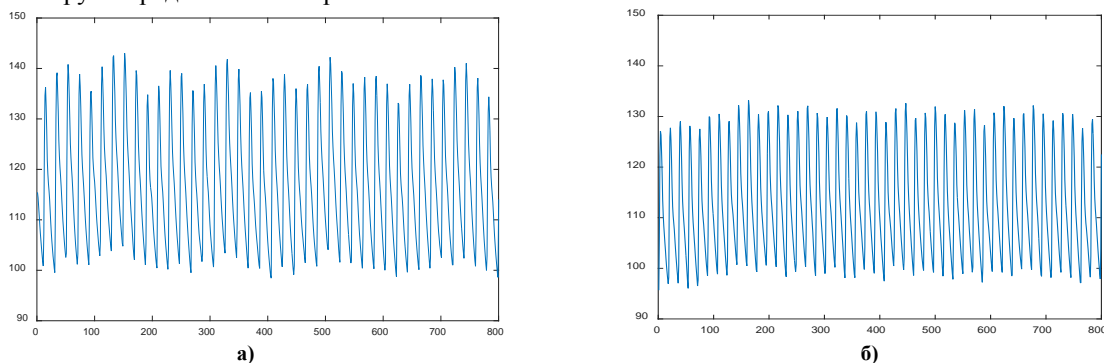


Рисунок 3. График реализации: а) для гиперсолевой группы, б) для бессолевой группы

Алгоритм сравнения сигналов на основе оптимальных вейвлет-деревьев. Рассмотрим основные этапы алгоритма анализа, являются ли сигналы принадлежащими одному классу, например, сгенерированы в одинаковых хаотических режимах.

Шаг 1. Для сигнала, с которым проводится сравнение, строится оптимальное вейвлет-дерево. Значения энтропии в каждом узле фиксируются.

Шаг 2. Вышеописанная процедура повторяется для некоторого количества сигналов одного класса (множество модельных сигналов генерируется). В результате получают выборочные значения энтропий в каждом узле.

Шаг 3. Расчет интервалов для выборочной энтропии основан на ее нормальном распределении [Малла]. Начало  $K_1$  и конец  $K_2$  интервала для энтропии в каждом  $i$ -том узле рассчитываются следующим образом:

$$K_{1,2}^i = \bar{E}^i \pm 1.96 \cdot S^i_E, \tag{6}$$

где  $\bar{E}^i$  – оценка математического ожидания;

$S$  – среднеквадратическое отклонение.

Шаг 4. Сравнение сигналов. Для сигнала, который сравнивается, строится оптимальное вейвлет-дерево со значениями энтропии в узлах. Далее, начиная с нулевого уровня, проверяется попадание значения энтропии в интервалы  $(K_1^i, K_2^i)$ . Сигналы считаются принадлежащими к одному классу, если значения энтропий попадают в интервалы в заданных узлах.

Результаты исследования. Рассмотрим распознавание модельных хаотических временных реализаций. Для разных хаотических режимов были построены оптимальные вейвлет-деревья. При построении оптимального дерева были рассмотрены различные виды энтропии, с целью выбрать ту, которая приводит к наибольшим различиям деревьев. Численные исследования показали, что наибольшие различия

достигаются, если использовать энтропию нормы пространства. Также при выполнении пакетного вейвлет-разложения на результирующий вейвлет-спектр значительно влияет правильный выбор материнской вейвлет-функции. В результате исследований, проведенных в работе, как самые эффективные, был выбран вейвлет семейства Добеши 5-го порядка. Оптимальные вейвлет-деревья для реализаций логистического отображения, показанных на рис.2, представлены на рис. 4.

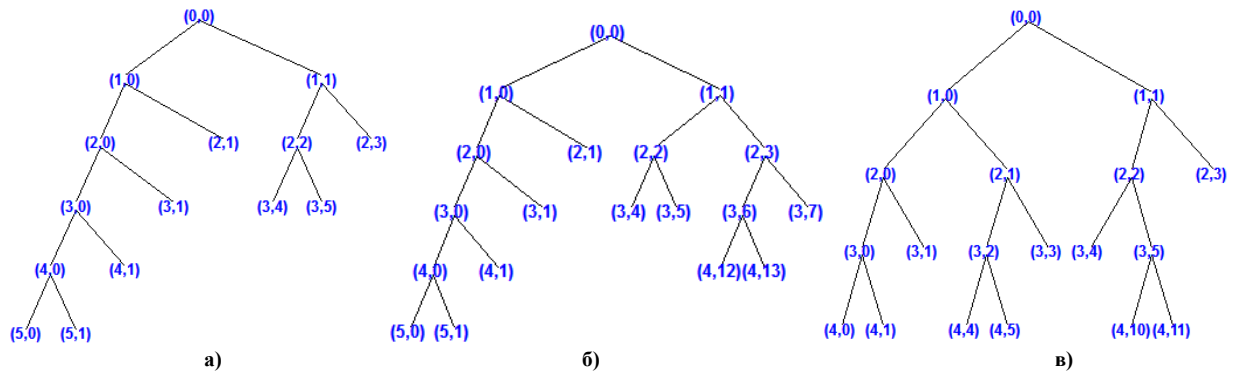


Рисунок 4. Вейвлет-деревья логистического отображения с параметром: а)  $A=3.7$ ; б)  $A=3.87$ ; в)  $A=3.9$

Деревья отражают основные частотные компоненты сигналов и отличаются структурой и значениями энтропии в узлах. В данном случае была использована энтропия нормы пространства с параметром  $p=1$  и вейвлет Добеши 5-го порядка

Посчитанные интервалы для логистического отображения со значением управляющего параметра  $A = 3.9$  и значением показателя Ляпунова  $\lambda = 0.51$  приведены в табл. 1. Значения энтропии для логистического отображения со значениями управляющего параметра  $A = 3.7$  и  $A = 3.87$  с соответствующими значениями показателей Ляпунова  $\lambda = 0.4$  и  $\lambda = 0.48$  представлены в табл. 2 и табл. 3:

Таблица 1

**Интервалы энтропии для логистического отображения  $A=3.9 \lambda=0.51$**

E (0,0) [565.24; 619.71]			
E (1,0) [389.18; 455.37]		E (1,1) [139.89; 215.61]	
E (2,0) [263.18; 343.36]	E (2,1) [1.06; 85.76]	E (2,2) [41.86; 133.06]	E (2,3) [29.45; 125.25]

Таблица 2

**Значения энтропии для логистического отображения  $A=3.7 \lambda=0.4$**

E (0,0) 667.29			
E (1,0) 475.73		E (1,1) 118.80	
E (2,0) 341.87	E (2,1) 25.09	E (2,2) 81.81	E (2,3) 30.11

Таблица 3

**Значения энтропии для логистического отображения  $A=3.87 \lambda=0.48$**

E (0,0) 586.53			
E (1,0) 417.78		E (1,1) 183.45	
E (2,0) 299.91	E (2,1) 36.59	E (2,2) 32.13	E (2,3) 96.36

Из таблиц видно, что сигналы в существенно различных хаотических режимах со значением управляющего параметра  $A = 3.7$  и  $A = 3.9$  отличаются уже на первом уровне. Но для сигнала со значением  $A = 3.87$  различия начинаются на более высоких уровнях.

В случае анализа экспериментальных данных были доступны только 9 записей сигналов артериального давления крыс длиной 12000 значений для обеих групп (бессолевая и гиперсолевая диета), по которым были построены интервалы значений энтропии в узлах. В табл. 4 представлены рассчитанные

интервалы для реализаций бессолевой группы и в табл. 5 значения энтропий для одной реализации из гиперсолевой группы.

Таблица 4

Интервалы энтропии для первого сигнала (бессолевая группа)			
E (0,0) [151059.30; 201587.22]			
E (1,0) [107243.97; 143099.32]		E (1,1) [635.75; 1090.33]	
E (2,0) [76547.65; 102120.19]	E (2,1) [1962.12; 2652.09]	E (2,2) [241.99; 400.59]	E (2,3) [474.07; 792.42]

Таблица 5

Энтропия для второго сигнала (гиперсолевая группа)			
E (0,0) 284553.97			
E (1,0) 202018.44		E (1,1) 1594.40	
E (2,0) 144161.97	E (2,1) 3760.03	E (2,2) 565.43	E (2,3) 1144.24

Из полученных результатов следует, что реализация не принадлежит к рассматриваемой группе. Аналогичные результаты можно получить, если сравнивать вейвлет-дерево реализации из бессолевой группы с вейвлет-деревьями, полученными для реализаций из гиперсолевой группы.

#### Выводы

В работе предложен алгоритм сравнения фрактальных сигналов на основе построения оптимального пакетного вейвлет-дерева. Работа алгоритма протестирована на примере хаотических реализаций с разными значениями показателя Ляпунова и экспериментальных данных артериального давления двух групп лабораторных животных.

Проведенные исследования позволяют сделать вывод, что построение оптимального пакетного вейвлет-дерева позволяет установить разницу между сигналами, обладающими близкими, но различными фрактальными свойствами. Таким образом, узловые значения энтропии вейвлет-дерева можно использовать в качестве знаний для СППР, что дает возможность более корректно осуществлять анализ и распознавание временных рядов, обладающих фрактальными свойствами.

#### Список использованной литературы

1. Кириченко Л.О. Разработка алгоритмов принятия решений в экспертной системе фрактального анализа / Л.О. Кириченко, Ю.А. Кобицкая, А.В. Стороженко // Системные технологии – 2013. – Вып. 3(86) – С. 54-61.
2. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов / С. Малла // - М.: Мир. - 2005. 671 с.
3. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев // – М. : ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
4. Кириченко Л. О. Анализ спектральной структуры сигналов с применением пакетного вейвлет-преобразования / Л. О. Кириченко, С. С. Кротких, К. С. Крыгин, С. Г. Удовенко // Систем. технології. - 2012. - № 3. - С. 32-39.
5. Волошко А. В. Метод класифікації інформаційних сигналів за допомогою побудови оптимального дерева вейвлет-перетворення / А. В. Волошко, Т. М. Лутчин, Д. Ю. Терещенко // Матеріали наук.-техніч. конференції “Енергетика. Екологія. Людина”. – 2012. С. 81-85.
6. Физионет [Электронный ресурс] / PhysioNet – База даних записей физиологических сигналов. - Режим доступа: [www.physionet.org](http://www.physionet.org).
7. Pavlov A.N. Multifractal characterization of blood pressure dynamics: stress-induced phenomena / A.N. Pavlov, A.R. Ziganshin, O.A. Klimova // Chaos, Solitons and Fractals. - 2004. - V.24. - P.57–63.
8. Goldberger A.L. Fractal dynamics in physiology: Alterations with disease and aging / A.L. Goldberger, L.A. Amaral, J.M. Hausdorff, P.Ch. Ivanov, C.-K. Peng, H.E. Stanley // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. - 2002. - Vol. 99. - № 3. - P. 2466-2472.

УДК 001.57:681.5.015

В.О. КОНДРАТЕЦЬ, А.М. МАЦУЙ  
Кіровоградський національний технічний університет**МОДЕЛЮВАННЯ ФОРМУВАННЯ ПІСКОВОГО ТІЛА МЕХАНІЧНОГО  
КЛАСИФІКАТОРА В УМОВАХ СПРАЦЮВАННЯ РОБОЧИХ ЕЛЕМЕНТІВ  
СПІРАЛІ**

*Недосконалість керування односпіральними класифікаторами через недостатню вивченість закономірності формування піскового тіла приводить до значних збитків в рудопідготовці. Врахування даної закономірності дозволяє завдяки покращенню якості автоматичного керування зменшити втрати в першій стадії подрібнення руди. Розв'язання теоретичної частини цієї задачі складає актуальність статті, метою якої є моделювання формування піскового продукту (тіла) в механічному класифікаторі в умовах спрацювання спіралі. Завданням є визначення впливу спрацювання робочих елементів спіралі на функціональний зв'язок об'єму і висоти матеріалу між витками. Встановлено експериментальну залежність об'єму піскового тіла від його висоти при неспрацьованій спіралі та її апроксимуючу функцію. Спрацювання робочих елементів спіралі в допустимих межах створює незначний вплив на визначення об'єму піскового тіла за його висотою.*

*Ключові слова: класифікатор, спіраль, об'єм пісків, вплив спрацювання, точність*

В.А. КОНДРАТЕЦЬ, А.Н. МАЦУЙ  
Кіровоградський національний технічний університет**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕСКОВОГО ТЕЛА МЕХАНИЧЕСКОГО  
КЛАССИФИКАТОРА В УСЛОВИЯХ ИЗНОСА РАБОЧИХ ЭЛЕМЕНТОВ СПИРАЛИ**

*Несовершенство управления односпиральными классификаторами из-за недостаточной изученности закономерностей формирования пескового тела приводит к значительным убыткам в рудоподготовке. Учет этой закономерности позволяет посредством улучшения качества автоматического управления уменьшить убытки в первой стадии измельчения руды. Решение теоретической части этой задачи составляет актуальность статьи, целью которой является моделирование формирования пескового продукта (тела) в механическом классификаторе в условиях износа спирали. Задачей является определение влияния износа рабочих элементов спирали на функциональную связь объема и высоты материала между витками. Определена экспериментальная зависимость объема пескового тела от его высоты при неизношенной спирали и ее аппроксимирующая функция. Износ рабочих элементов спирали в допустимых пределах незначительно влияет на определение объема пескового тела по его высоте.*

*Ключевые слова: классификатор, спираль, объем песков, влияние износа, точность*

V.A. KONDRATETS, A.N. MATSUI  
Kirovohrad National Technical University**MODELING OF THE FORMATION OF THE BODY OF MECHANICAL SAND CLASSIFIERS IN  
WEAR CONDITIONS OF WORK ITEMS SPIRAL**

*Imperfection of management of single-spiral classifiers due to lack of scrutiny the laws of the formation of sand body leads to significant losses in the ore preparation. Accounting for this law allows to reduce losses in the first stage of ore grinding, by improving the quality of automatic control. The decision of the theoretical part of this problem is the relevance of articles, the aim of which is modeling the formation of sand product (the body) in a mechanical classifier in a spiral of wear. The task is to determine effect of wear spiral of work items on the functional relationship of volume and height of the material between the turns. Established experimental dependence sand volume of the body of its height when not worn spiral and its approximating function. Wear a spiral of work items within an acceptable range has little effect on the definition of sand on the volume of the body height.*

*Keywords: classifier, spiral, the volume of sand, impact wear, accuracy*

**Постановка проблеми**

Відсутність інформації про формування крупного твердого між двома сусідніми витками спіралі механічного класифікатора (піскового тіла) стримує підвищення якості автоматичного керування першою стадією подрібнення вихідної руди на збагачувальних фабриках, що приводить до значних економічних збитків внаслідок перевитрачання електроенергії і матеріалів. Ефективність рудопідготовки може значно

покращитись завдяки розв'язанню даної науково-технічної задачі. Тому дана робота спрямовується на реалізацію Галузевої програми енергоефективності та енергозбереження на період до 2017 р., затвердженої наказом Міністра промислової політики України №152 від 25.02.2009 року в частині гірничо-металургійного комплексу та планів наукової тематики Кіровоградського національного технічного університету, зокрема, теми «Модельовання технологічних процесів у механічних спіральних класифікаторах з метою вдосконалення математичних моделей» (0115U003962). Оскільки дана робота присвячується знаходженню одного з основних технологічних параметрів механічного спірального класифікатора – продуктивності по пісках, її тема є актуальною.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Автоматизації процесів рудопідготовки на збагачувальних фабриках приділяється значна увага як зарубіжними [1, 2], так і вітчизняними вченими [3]. У даних роботах розглядаються засоби автоматизації процесів класифікації. Їх можливо уточнити роботами [4, 5, 6], де вони удосконалюються, визначення технологічного параметра зводиться до розгляду піскового тіла механічного спірального класифікатора. Тут практично відсутнє запізнювання внаслідок оцінювання кількості продукту в межах спіралі класифікатора. Однак недоліком є велика кількість параметрів, які враховуються, і необхідний час їх введення і обчислення, що фактично створює запізнювання, ускладнює засоби і підвищує їх вартість. Тому у більш пізніших роботах відмічається необхідність розробки інформаційних засобів, підвищення їх надійності і точності, зменшення вартості, важливість вимірювання витрати продуктів збагачення [2, 3, 7]. Реакцією на це стала робота [8], де реалізовано підхід вимірювання продуктивності механічного спірального класифікатора, який забезпечує реагування на мінімальну кількість матеріалу між витками спіралі і не відрізняється запізнюванням, складністю та великою вартістю. В [8] доведено, що об'єм піскового тіла механічного спірального класифікатора у міжвитковому просторі спіралі визначається рівнем твердого вздовж вертикалі, яка проходить через точку контакту циліндричної постелі і подавального витка у самій нижній точці. Однак дану залежність в умовах спрацювання робочих елементів спіралі ніхто не вивчав. Тому розв'язанню цієї задачі і присвячена дана публікація.

#### Формулювання мети дослідження

Метою роботи є модельовання формування піскового тіла механічного класифікатора в умовах зносу спіралі і визначення впливу спрацювання робочих елементів на функціональний зв'язок об'єму і висоти матеріалу між витками.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Модельовання здійснюємо на конкретному типі технологічного агрегату 1КСН-30, який отримав найбільш широке розповсюдження на рудозбагачувальних фабриках України. Класифікатор встановлюють під кутом  $\alpha=18^{\circ}30'$  до горизонту. Його спіраль має діаметр  $2R_C=3$  м, вона виконана двозахідною з кроком  $B=1,8$  м і звичайно обертається зі швидкістю  $0,05$  об/с (3 об/хв.) [9]. На кінцях витків спіралі встановлюють змінні робочі елементи висотою  $0,33$  м, які спрацьовуються. Найбільше спрацювання робочого елемента досягає  $0,04$  м. Тоді радіус спіралі складає  $1,46$  м.

Попередніми дослідженнями встановлено [8], що існує функціональна залежність між величиною об'єму матеріалу у міжвитковому просторі спіралі (пісковому тілі) і його висотою. Це за виміряною висотою піскового тіла механічного спірального класифікатора дозволяє судити про його об'єм. Однак спрацювання робочих елементів і, як наслідок, зменшення їх висоти і радіуса спіралі може порушити цей зв'язок та привести до значних похибок вимірювання об'єму матеріалу. В той же час при спрацюванні робочих елементів наростає циліндрична постіль з піскового матеріалу, а піски, займаючи міжвитковий простір при меншому радіусі спіралі, розташовуються на більш високій відмітці подавального (заднього) витка, де ширина верхніх шарів матеріалу більша. Тобто, відбувається компенсація – менша ширина піскового тіла при меншому радіусі спіралі компенсується більшим його розширенням у верхній частині порівняно з неспрацьованими робочими елементами. Такий механізм компенсації перевіряємо шляхом модельовання процесу спрацювання робочих елементів спіралі.

Піскові тіла знаходяться на циліндричній постелі між двома витками спіралі. Кінцеве піскове тіло, яке розглядається, розташовується біля піскового порога класифікатора, але ще не переходить через нього під дією рухомої спіралі. При переміщенні подавального (заднього) витка 5, показаного на рис.1, у напрямі стрілки  $B$  матеріал розвантажується через пісковий поріг класифікатора в напрямі стрілки  $A$  до піскового жолоба. Піскове тіло механічного спірального класифікатора складається з двох частин – нижньої і верхньої, які відмінні за формою. Нижня частина піскового тіла знаходиться між двома витками спіралі і займає простір вздовж вертикалі до рівня, коли матеріал, що розташовується горизонтально, підходить до нижньої основи переднього витка, як це показано на рис.1. Знизу нижня частина піскового тіла обмежується постіллю циліндричної форми, яка створюється з пісків при обертанні спіралі. Найбільше значення висоти матеріалу у нижній частині піскового тіла є константою для класифікатора і дорівнює  $h_C = (B/2)\sin\alpha$ . Для прийнятого класифікатора цей параметр складає  $h_C=0,2853$  м. При спрацюванні спіралі відбуваються зміни, оскільки робочий елемент стає більш коротким. Зважаючи на те, що висота робочих елементів скорочується, циліндрична поверхня постелі піднімається на величину спрацювання, а  $h_C$  залишається незмінною, найбільша висота піскового тіла за даних умов зменшується. Зменшення висоти піскового тіла визначається

спрацюванням, помноженим на  $\cos 18^\circ 30'$ . Його максимальне значення складає 0,03793 м. При найбільшому спрацюванні робочих елементів висота верхньої частини піскового тіла зменшується на 0,03793 м. Однак працездатність класифікатора зберігається, зважаючи на те, що у нього існує великий запас піскової продуктивності [10].

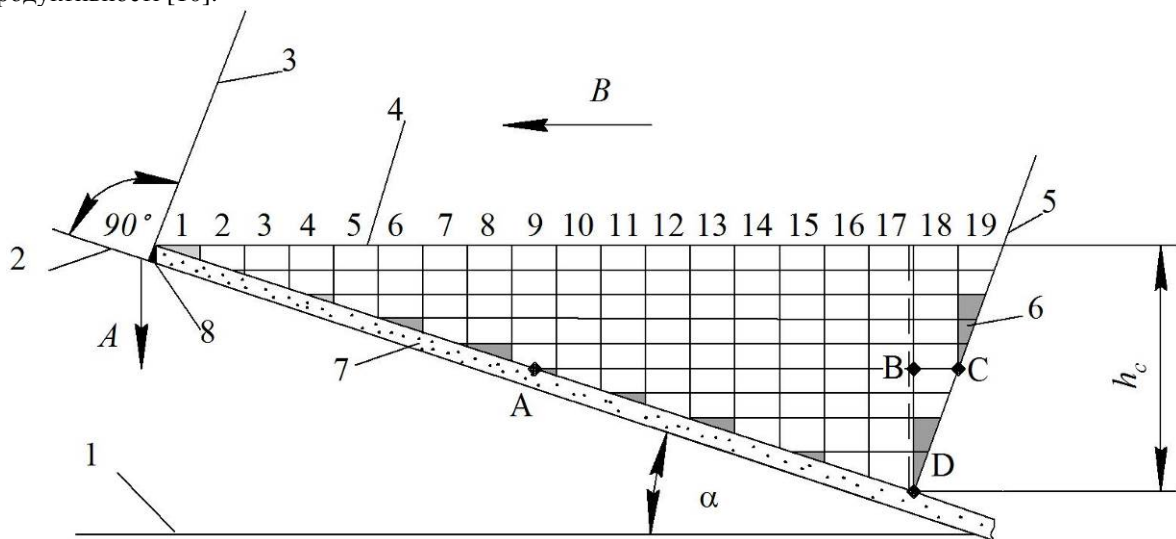


Рис.1. Нижня частина піскового тіла механічного спірального класифікатора, подана елементарними складовими у вертикальному розрізі, який проходить через вісь обертання спіралі:  
 1 – горизонталь; 2 – нахилене дно циліндричної постелі, створене з пісків класифікатора; 3 – передній виток спіралі; 4 – горизонтальна поверхня нижньої частини піскового тіла, яка обмежує його максимальний розмір; 5 – задній (подаючий) виток спіралі; 6 – неповні елементи піскового тіла; 7 – нарощена частина циліндричної постелі при зносі спіралі; 8 – зсув елементарних складових піскового тіла в горизонтальній площині в наслідок зносу спіралі; 1-19 – елементарні вертикальні стовпчики матеріалу, створені елементарними складовими

Найбільш ефективним є графоаналітичне моделювання процесу спрацювання робочих елементів спіралі. Подаємо нижню частину піскового тіла класифікатора у вигляді кількох горизонтально розташованих шарів матеріалу однакової товщини  $\Delta h$ , кількість яких відповідає величині  $h_c$ . Якщо  $\Delta h=0,0317$  м, то нижня частина піскового тіла включає дев'ять горизонтальних шарів матеріалу. Тоді у верхній частині піскового тіла при неспрацьованих робочих елементах розміщується два горизонтальних шари. Спрацювання робочих елементів спіралі на 0,04 м зменшує верхню частину піскового тіла до одного шару. Кут нахилу витків спіралі до осі обертання дещо змінюється, оскільки дорівнює  $\gamma = \arctg 4R_c/B$ . Зміна радіуса спіралі при спрацюванні робочих елементів при незмінному  $B$  приводить до варіювання  $\gamma$ , але воно відбувається в незначних межах. При неспрацьованій спіралі  $\gamma = 73^\circ 20'$ .

Моделювання розпочинаємо з нижньої частини піскового тіла, розглядаючи верхню геометричну фігуру горизонтального розрізу на стику двох частин – нижньої і верхньої. Верхній шар нижньої частини піскового тіла має форму, обмежену параболою і нахиленою під кутом  $\gamma$  прямою, що характеризує лінію змочування на робочих елементах подавального (заднього) витка спіралі. У нижніх шарах форма фігур у горизонтальних розрізах піскового циліндричного тіла повторюється при зменшених розмірах, що характеризуються довжиною відповідних ліній змочування. Площі цих геометричних фігур вздовж осі спіралі  $l$  є змінними, тому їх оцінюємо на елементарних ділянках довжиною  $\Delta l$ . Прийmemo довжину  $\Delta l=0,05$  м. Об'єм пісків у конкретному горизонтальному шарі матеріалу дорівнює сумі площ геометричних фігур довжиною  $\Delta l$ , помноженій на висоту шару матеріалу  $\Delta h$ . Такий же підхід здійснюємо і стосовно шарів матеріалу у верхній частині піскового тіла. Лише тут горизонтальні шари матеріалу наближено мають форму трапецій. Оскільки при зменшенні висоти пісків (зниженні піскової продуктивності) початки нижніх шарів матеріалу зміщуються праворуч, розташування в моделі вертикальних стовпчиків слід розпочинати від вертикалі  $BD$  ліворуч і праворуч, як це демонструється на рис.1. При спрацюванні спіралі вертикаль  $BD$ , що слідує з рис.1, зміщується праворуч. При найбільшому спрацюванні, що дорівнює 0,04 м, зміщення складає 12,69 мм при довжині  $\Delta l=0,05$  м. Воно суттєво не впливає на результат моделювання, тому всі моделі розглядаються відносно вертикалі  $BD$ , що демонструється на рис.1.

У прямокутних трикутниках  $ABD$  і  $DBC$ , нанесених на рис.1, катет  $BD$  є спільним і його задаємо у кількості складових  $\Delta h$ , де величина змінюється від 1 до 9. З трикутника  $ABD$  катет  $AB=BD/tg\alpha$ , а з прямокутного трикутника  $DBC$  катет  $BC=BD \cdot tg\alpha$ . Горизонтальний відрізок  $AC=AB+BC$ . Для різних шарів матеріалу визначаємо параметри  $AB$ ,  $BC$  і  $AC$  та кількість елементарних складових  $\Delta l$  в них. Дані зводимо в табл.1. Верхній шар нижньої частини піскового тіла при спрацьованій спіралі класифікатора також знаходиться у горизонтальній площині і відповідає рівню матеріалу  $h_c=0,2853$  м. Тому дані табл.1 однаково підходять як для моделювання піскового тіла при неспрацьованій, так і при будь-якій степені спрацювання



спіралі. Побудова горизонтальних шарів (одного чи двох) верхнього піскового тіла також витікає з рис.1. Тут завжди буде 19 елементарних вертикальних стовпчиків.

Таблиця 1

**Значення довжини відрізків у горизонтальних шарах нижньої частини піскового тіла механічного спірального класифікатора та кількості елементарних складових  $\Delta l$  в них**

Порядковий номер шару матеріалу, який розпочинається знизу піскового тіла $n$	Висота шару матеріалу $n \cdot \Delta h$ , м	Довжина відрізка $AB$ , м	Кількість елементарних складових $\Delta l$ у відрізку $AB$	Довжина відрізка $BC$ , м	Кількість елементарних складових $\Delta l$ у відрізку $BC$	Довжина відрізка $AC$ , м	Кількість елементарних складових $\Delta l$ у відрізку $AC$
1	0,0317	0,0947	1,89	0,0106	0,21	0,1053	2,11
2	0,0634	0,1895	3,79	0,0212	0,42	0,2107	4,21
3	0,0951	0,2842	5,68	0,0318	0,64	0,3160	6,32
4	0,1268	0,3790	7,58	0,0424	0,85	0,4214	8,43
5	0,1585	0,4737	9,47	0,0530	1,06	0,5267	10,53
6	0,1902	0,5684	11,37	0,0636	1,27	0,6320	12,64
7	0,2219	0,6632	13,26	0,0742	1,48	0,7374	14,75
8	0,2536	0,7579	15,16	0,0848	1,70	0,8427	16,85
9	0,2853	0,8527	17,05	0,0955	1,91	0,9482	18,96

З даних табл.1 і рис.1 видно, що при зменшенні рівня матеріалу у міжвитковому просторі спірального класифікатора загальна кількість елементарних складових  $\Delta l$  на відрізку  $AC$  зменшується з 18,96 до 2,11. При прийнятих розмірах елементарних складових  $\Delta l$  і  $\Delta h$  мають місце не повністю заповнені структури 6, які демонструються на рис.1 і є зафарбованими. Їх об'єми слід віднести до сусідніх елементів, нехтувати ними або враховувати іншим підходом.

В процесі моделювання визначаємо об'єм піскового тіла при фіксованих висотах, кратних  $\Delta h$ , тобто  $\Delta h=1 \Delta h, \dots, 11 \Delta h$ , включаючи весь можливий обсяг матеріалу. Об'єм піскового тіла визначаємо як суму об'ємів матеріалу в окремих горизонтальних шарах. Об'єм матеріалу в окремому горизонтальному шарі дорівнює скоректованій з врахуванням крайових ефектів його площі, помноженій на висоту  $\Delta h$ . Площу будь-якого горизонтального шару матеріалу визначаємо як суму середніх ліній трапецій елементарних складових довжиною  $\Delta l$ , помножених на їх висоту  $h_T = \Delta l$ . Отже, для знаходження об'ємів шарів матеріалу запропонованим методом моделювання необхідно будувати сім'ю проєкцій горизонтальних матеріальних шарів піскового тіла на горизонтальну площину. Для здійснення такої побудови визначаємо параметри ліній змочування, що відбиваються на задньому (подавальному) витку спіралі. Спочатку знаходимо довжину хорди  $X$ , яка створюється проєкцією поверхні матеріалу і траєкторії обертання витків на площину, перпендикулярну осі спіралі. Довжини хорд, що відповідають лініям змочування на подавальних витках спіралі, дорівнюють

$$X_n = 2\sqrt{R_C^2 - (R_C - n\Delta h)^2}, \tag{1}$$

де  $n$  – порядковий номер шару матеріалу, починаючи знизу,  $n=1, \dots, 11$ .

Довжини ліній змочування визначаємо відповідно залежності

$$LZ_n = X_n / \cos(90^\circ - \gamma). \tag{2}$$

Віддалення лінії змочування від вертикалі  $BD$ , позначеній на рис.1, знаходимо за залежністю

$$Y = n \cdot \Delta h \cdot \operatorname{tg} \alpha. \tag{3}$$

Для шарів верхнього піскового тіла лінії змочування будуть виникати і на передньому витку спіралі. У такому випадку використовуємо формулу (1), приймаючи  $n=1$  для першого шару і  $n=2$  для другого (верхнього) шару верхньої частини піскового тіла. Довжину лінії змочування на передньому витку визначаємо за формулою (2).

Основні параметри ліній змочування на задньому (подавальному) витку спіралі класифікатора, розраховані за (1)-(3), при різній степені її спрацювання приводяться в табл.2. За даними табл.2 будемо проєкції шарів матеріалу піскового тіла на горизонтальну площину. Проєкції шарів матеріалу повного піскового тіла на горизонтальну площину для неспрацьованої спіралі показані на рис.2. Проєкції шарів матеріалу піскового тіла на горизонтальну площину для спрацьованої спіралі на 0,04 м приводяться на рис.3. З рис.2 і рис.3 видно підхід врахування крайових ефектів у шарах матеріалу, де звужуються проєкції шарів як вздовж осі обертання, так і в поперечному напрямі. Проєкції шарів матеріалу піскового тіла на горизонтальну площину для спрацьованої спіралі на 0,02 м займають проміжне положення. За даними проєкцій шарів матеріалу на горизонтальну площину знаходимо об'єми пісків у кожному шарі та відповідно їх сумі – у пісковому тілі в цілому при різних його висотах, що виражаються у одиницях  $\Delta h$ .

Таблиця 2

Значення основних параметрів ліній змочування на задньому (подавальному) витку спіралі класифікатора при різній степені її спрацювання

Порядковий номер шару матеріалу, який розпочинається знизу піщого тіла $n$	Висота шару матеріалу $n \cdot \Delta h$ , м	Довжина лінії змочування $LZ$ , м			Віддалення лінії змочування від вертикалі піщого тіла $Y$ , м		
		Робочі елементи не спрацьовані	Робочі елементи спрацьовані на 0,02 м	Робочі елементи спрацьовані на 0,04 м	Робочі елементи не спрацьовані	Робочі елементи спрацьовані на 0,02 м	Робочі елементи спрацьовані на 0,04 м
1	0,0317	0,6404	0,6371	0,6318	0,0106	0,0106	0,0106
2	0,0634	0,9008	0,8963	0,8884	0,0212	0,0212	0,0212
3	0,0951	1,0974	1,0915	1,0820	0,0318	0,0318	0,0318
4	0,1268	1,2601	1,2535	1,2425	0,0424	0,0424	0,0424
5	0,1585	1,4011	1,3936	1,3812	0,0530	0,0530	0,0530
6	0,1902	1,5262	1,5179	1,5043	0,0636	0,0636	0,0634
7	0,2219	1,6392	1,6302	1,6154	0,0742	0,0742	0,0743
8	0,2536	1,7423	1,7326	1,7167	0,0848	0,0848	0,0849
9	0,2853	1,8373	1,8269	1,8100	0,0955	0,0955	0,0955
10	0,3170	1,9253	1,9143	1,8965	0,1061	0,1061	0,1060
11	0,3487	2,0070	-	-	0,1167	-	-

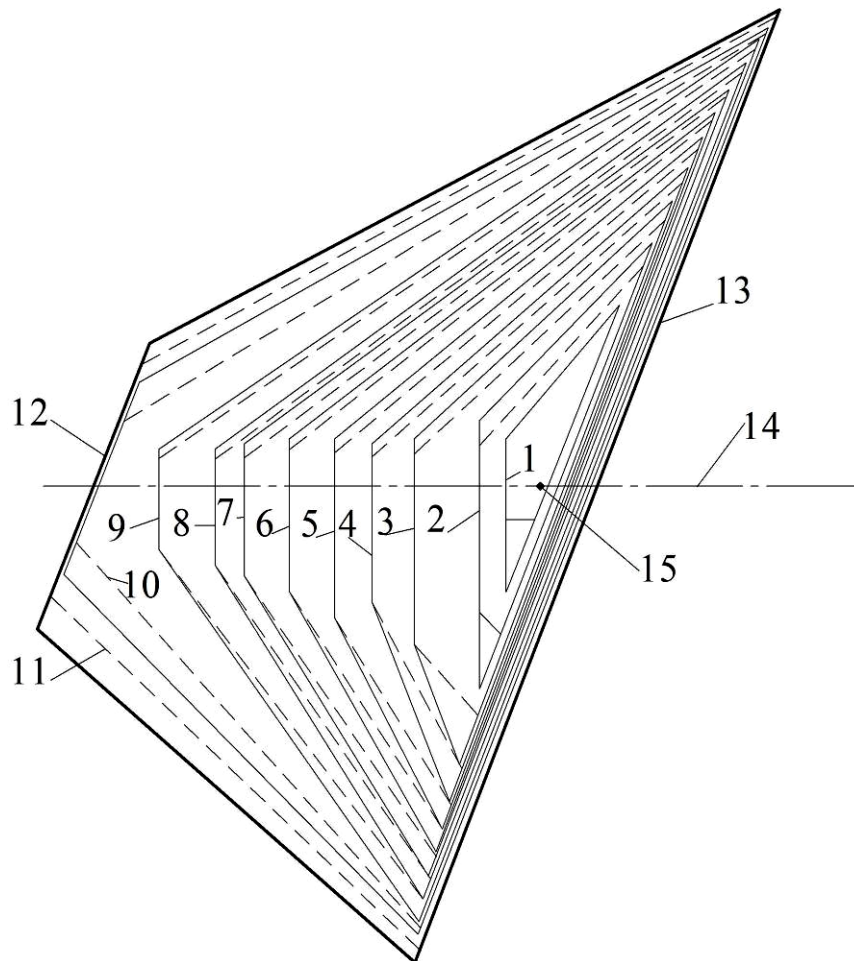


Рис.2. Проекції шарів матеріалу повного піщого тіла на горизонтальну площину при неспрацьованій спіралі: 1 – 11 – проекції шарів матеріалу; 12 – проекції ліній змочування на передньому витку; 13 – проекції ліній змочування на задньому (подавальному) витку; 14 – вісь обертання спіралі; 15 – проекція вертикалі піщого тіла

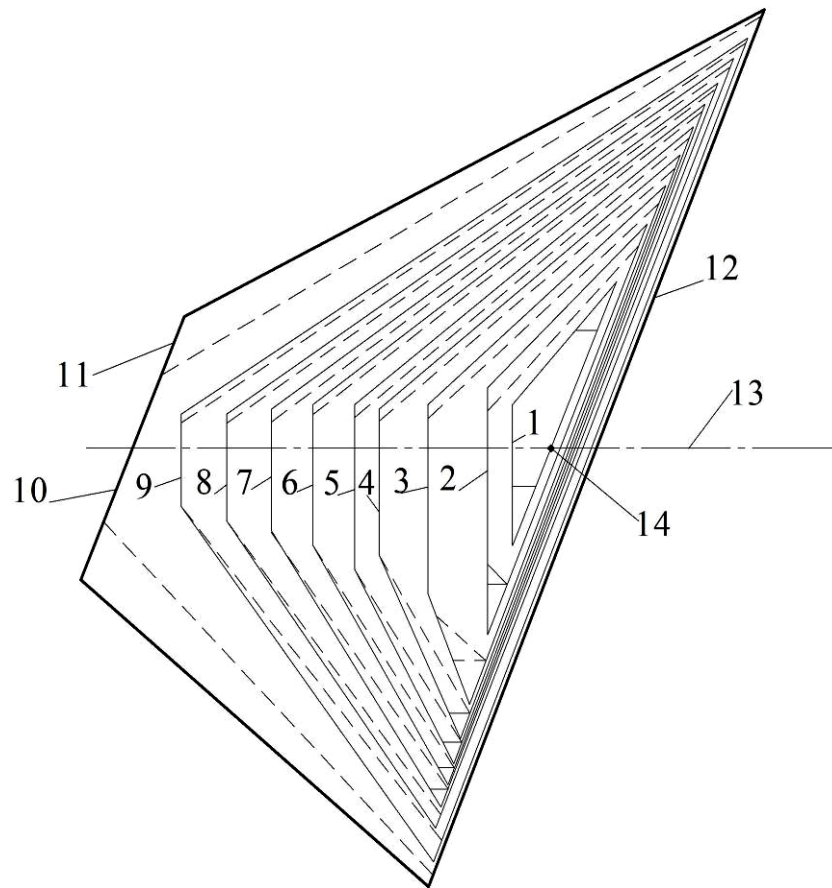


Рис.3. Проекції шарів матеріалу піщого тіла на горизонтальну площину при спрацюванні спіралі на 0,04 м: 1 – 10 – проекції шарів матеріалу; 11 – проекція лінії змочування на передньому витку; 12 – проекції ліній змочування на задньому (подавальному) витку; 13 – вісь обертання спіралі; 14 – проекція вертикалі піщого тіла

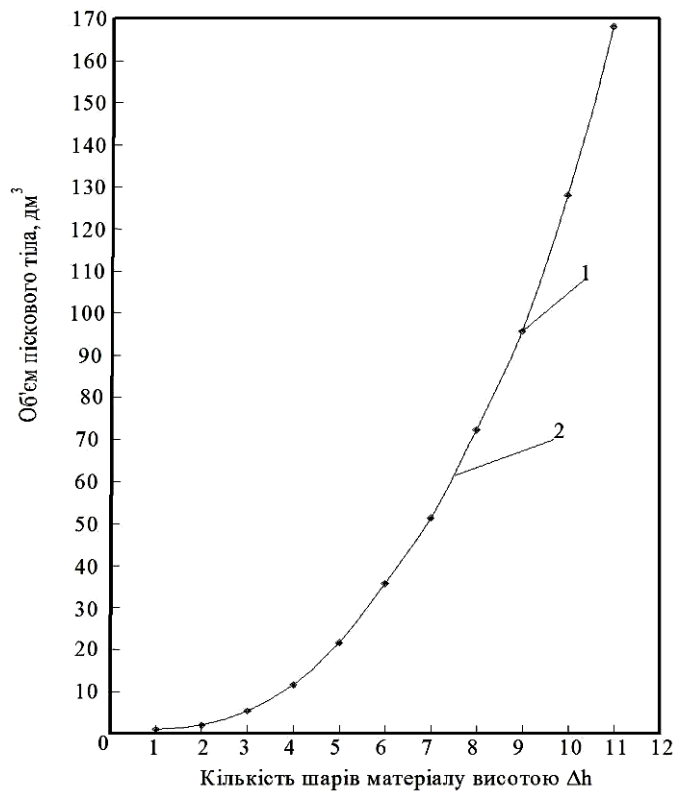


Рис.4. Залежність об'єму піщого тіла від висоти вздовж його вертикалі при незношеній спіралі: 1 – точки, отримані в процесі моделювання; 2 – крива, що відповідає апроксимуючій функції

Отримані результати моделювання дозволяють побудувати залежності зміни об'єму піскового тіла спірального класифікатора в функції висоти вздовж його вертикалі. Залежність об'єму матеріалу в пісковому тілі від його висоти при незношеній спіралі приводиться на рис.4. Вона достатньо точно апроксимується функцією виду

$$V_{PT} = 2.874 \cdot 10^{-6} h_{PT}^3 + 3.077 \cdot 10^{-3} h_{PT}^2 + 2.243 \cdot 10^{-2} h_{PT} - 0.4359, \text{ дм}^3, \quad (4)$$

де  $h_{PT}$  – висота піскового тіла в мм.

Тобто, в результаті моделювання отримуємо рівняння, яке дозволяє за вимірною висотою піскового тіла визначати його об'єм. Дані, отримані для зношених спіралей, мають такий же характер, але розкид точок знаходиться в межах 3,14...4,17%. Він в основному безсистемний, що підкреслює випадковість, а не систематичність відхилень. Це в основному зв'язується з тим, що істинні невеликі зміни піскового тіла в певних ситуаціях при спрацюванні спіралі стають сумірними з похибками, які викликані методом моделювання, в основному врахуванням крайових ефектів при неповному створенні елементарних складових  $\Delta l \times \Delta h$ .

Отже, результати моделювання встановлюють незначні відхилення залежностей при спрацюванні спіралі від базової величини, що відповідає незношеним робочим елементам. Тому залежність (4) можливо використовувати без врахування спрацювання спіралі.

#### Висновки

В процесі моделювання формування піскового тіла механічного класифікатора в умовах спрацювання робочих елементів спіралі встановлено:

- експериментальну залежність об'єму піскового тіла від висоти вздовж його вертикалі та її апроксимуючу функцію;

- спрацювання робочих елементів спіралі в допустимих межах (до 0,04 м) створює незначний вплив на визначення об'єму піскового тіла за його висотою.

Перспективами подальших досліджень у цьому напрямі є розробка систем вимірювання піскової продуктивності механічних спіральних класифікаторів.

#### Список використаної літератури

1. Линч А. Дж. Циклы дробления и измельчения / Линч А. Дж.: [пер. с англ.]- М.: Недра, 1981.- 342с.
2. Разработка и применение автоматизированных систем управления процессами обогащения полезных ископаемых / [Морозов В.В., Топчаев В.П., Улитенко К.Я. и др.]- М.: Изд. дом «Руда и Металлы», 2013.- 512с.
3. Измельчение. Энергетика и технология / [Пивняк Г.Г., Вайсберг Л.А., Кириченко В.И. и др.]- М.: Изд. дом “Руда и Металлы”, 2007.- 296с.
4. А.с. 329905 СССР, МКИ В 03 С 5/00. Способ непрерывного измерения циркулирующей нагрузки /Т.И. Гуленко, В.А. Кондратец (СССР). – № 1352391/29-33; заявл. 28.07.69; опубл.24.02.72,Бюл. №8.
5. А.с. 1269838 СССР, МКИ В 03 В 13/00. Способ определения производительности спирального классификатора по пескам /В.И. Дмитриев (СССР). – № 3904014/22-03; заявл. 27.05.85; опубл. 15.11.86, Бюл. № 42.
6. А.с. 1530258 СССР, МКИ В 03 В 13/00. Способ определения продуктивности спирального классификатора по пескам / Е.Ф. Морозов (СССР). – № 4385577/22-03; заявл. 29.02.88; опубл. 23.12.89, Бюл. № 47.
7. Купін А.І. Інтелектуальна ідентифікація та керування в умовах процесів збагачувальної технології / Купін А.І. – Кривий Ріг: Видавництво КТУ, 2008.- 204с.
8. Мацуй А.М. Математичне моделювання формування піскового тіла у міжвитковому просторі механічного спірального класифікатора / А.М. Мацуй // Автоматизація технологічних і бізнес-процесів.– 2015.– Т.7.– Вип.4.– С.9-17.
9. Верхотуров М.В. Гравитационные методы обогащения / Верхотуров М.В.- М.: МАКС Пресс, 2006.- 352с.
10. Разумов К.А. Проектирование обогатительных фабрик / Разумов К.А. – М.: Недра, 1970.- 592 с.

УДК 004.942:519.6

В.М. ЛАЗУРИК, Ю.А. ШАПТАЛА, САЛАХ САВАН  
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина**ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ ПО  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ, ПОЛУЧЕННЫМ МЕТОДОМ  
ДОЗИМЕТРИЧЕСКОГО КЛИНА**

*Разработано программное обеспечение на базе двухпараметрической подгонки полупэмпирической модели дозы электронного излучения к результатам измерений, выполненных методом дозиметрического клина. Реализованы программные сервисы для эффективной обработки экспериментальных данных.*

*Ключевые слова: глубинное распределение дозы, двухпараметрическая подгонка, сервисы*

В.М. ЛАЗУРИК, Ю.А. ШАПТАЛА, САЛАХ САВАН  
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, Україна**ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЕНЕРГІЇ ЕЛЕКТРОНІВ ПО ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМ  
ДАНИМ, ОТРИМАНІМ МЕТОДОМ ДИЗИМЕТРИЧНОГО КЛИНУ**

*Розроблене програмне забезпечення на базі двопараметричної підгонки напівемпіричної моделі дози електронного випромінювання до результатів вимірювань, виконаних методом дозиметричного клину. Реалізовані програмні сервіси для ефективної обробки експериментальних даних.*

*Ключові слова: глибинний розподіл дози, двопараметрична підгонка, сервіси*

V.M. LAZURIK, Ju.A. SHAPTALA, SALAH SAWAN  
V.N. Karasin Kharkiv National University**SOFTWARE DEVELOPMENT FOR DETERMINING OF THE ELECTRON ENERGY FROM THE  
EXPERIMENTAL DATA OBTAINED BY THE DOSIMETRIC WEDGE METHOD**

*The software based on the two-parameter fitting semi-empirical model to experimental data obtained by dosimetric werge is developed. Software services for the processing of experimental data are implemented.*

*Key words: depth dose distribution, two-parameter fitting, services.*

**Постановка проблемы**

При планировании радиационно-технологических (РТ) процессов важной задачей является выбор оптимальных режимов работы, которые обеспечивают требуемый уровень равномерности дозы излучения в объеме обрабатываемого объекта. Энергия частиц излучения – один из основных параметров процесса облучения, контроль которого всегда проводится в радиационно-технологических центрах. Обычно, для определения энергии электронов измеряют глубинную зависимость дозы излучения в полубесконечной среде с использованием клина с дозиметрической пленкой внутри него. Результаты измерений представляют собой наборы значений дозы для различных пространственных точек на пленке. Методы получения характеристик энергии электронов, используемые в практике РТ центров, не обеспечивают требуемую сегодня точность. Поэтому, необходимо улучшать имеющиеся и разрабатывать новые вычислительные методы определения параметров РТ процессов. В этой связи, актуальной задачей является разработка программного обеспечения, реализующего новые методы для РТ центров.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Метод дозиметрического клина [1, 2]. В практике РТ центров для дозиметрии электронного излучения используют величину наиболее вероятной энергии электронов в пучке. Для расчета этой величины служат результаты измерения глубинной зависимости дозы электронного излучения в полубесконечной среде, полученные методом дозиметрического клина. Клины с непрерывной полоской дозиметрической пленки облучают на РТ линии электронным пучком, потом из него извлекают пленку и по измеренным величинам оптической плотности пленки в разных точках определяют значения дозы в этих пространственных точках. В полученном массиве экспериментальных данных точки, соответствующие началу и концу кривой, содержат данные с большими погрешностями и непригодны для дальнейшей обработки. Значения дозы в начальных точках пленки не определены из-за особенностей измерительного прибора, это, так называемая проблема установки начальной точки отсчета. Конечные точки на дозовой кривой могут иметь систематические погрешности, так как на больших глубинах доза мала и отклик пленки нелинейный. Поэтому, для обработки наиболее надежной является центральная часть дозовой кривой.

Полуэмпирическая модель глубинного распределения дозы (ПМД) [3] реализована как алгоритм, основанный на аналитическом представлении кривой глубинного распределения дозы в полубесконечной среде и на простых модификациях модели для прохождения электронов через многослойные мишени. ПМД была использована в разработанном Web приложении EMID (Electron–material interaction database) [4] для расчета набора характеристик, определяющих прохождение быстрых электронов через слои вещества.

Специализированное программное обеспечение RT-Office [5] реализует компьютерные технологии на всех этапах выполнения работ на радиационно-технологических линиях с излучателями электронов, X-ray и  $\gamma$ -ray. RT-Office базируется на высокоэффективных программах, моделирующих методом Монте-Карло процессы облучения пространственно-неоднородных объектов. В составе RT-Office имеется аналитический блок, в котором реализованы расчетные схемы модифицированной полуэмпирической модели. Сравнение результатов моделирования методом Монте-Карло с результатами, полученными в модифицированной полуэмпирической модели, показало их хорошее согласие.

Двухпараметрический метод подгонки ПМД к результатам измерений [6] позволяет осуществить подгонку полуэмпирической модели дозы электронного излучения по двум параметрам к результатам измерений. В качестве параметров используется энергия электронов  $E_p$  и смещение по глубине начальной точки  $X_0$ . Подгонка базируется на использовании критерия наименьшего квадратичного отклонения между моделью и результатами измерений.

В вычислительной схеме используется метод координатного спуска для нахождения величин энергии электронов и смещения по глубине начальной точки дозовой кривой, которые обеспечивают минимум квадратичного отклонения между данными, рассчитанными в модели и нормированными результатами измерений. На основе этого вычислительного метода было реализовано исследовательское программное обеспечение (ПО). Несмотря на то, что разработанное ПО предполагает работу эксперта и содержит только расчетную схему, использование его оказалось эффективным при обработке результатов измерений, полученных методом дозиметрического клина [7, 8, 9].

#### **Цель исследования**

Работа посвящена описанию разработанного программного обеспечения, в основе которого лежит метод двухпараметрической подгонки. Такое ПО должно быть ориентировано на использование в радиационно-технологических центрах инженерами-технологами. Оно должно обеспечивать удобное когнитивное представление данных, пошаговое выполнение операций, возможность трансформирования исходных экспериментальных данных, откат произведенных изменений, экспорт результатов в виде текстовых файлов. Наличие хороших сервисов и сопроводительной документации, простой и удобный интерфейс, валидация введенных данных также относится к требованиям, выдвигаемым к ПО. Для проверки правильности работы разработанного ПО должно быть проведено сравнение результатов полученных различными методами на основе эталонных показателей.

#### **Программное обеспечение ParametricFitting**

Разработанное ПО названо ParametricFitting (параметрическая подгонка). ParametricFitting дает возможность технологу свободно работать с экспериментальными данными. Для этого предусмотрена возможность масштабирования исходных данных, выделение части данных и подгонка по выделенной части, смещение как по оси X (глубина), так и по оси Y (доза). Для работы с результатами введено масштабирование для более качественного сравнения, визуализация результатов предыдущего расчета, сохранение в буфере обмена вида графика результатов как изображения, экспорт в текстовый файл всех значений точек, по которым построены кривые на графике.

Глубинные распределения дозы, полученные методом дозиметрического клина, содержат значения дозы в точках пленки. Необходимо знать соответствие пространственных точек на пленке значению глубины в мишени. Для этого необходимо установить начальную точку отсчета и коэффициент пропорциональности между длиной на пленке и глубиной в мишени. Этот коэффициент пропорциональности зависит от угла наклона клина и может изменяться в зависимости от используемого дозиметрического устройства. Установка коэффициента пропорциональности (масштабирования) Scale задается в ParametricFitting как исходный параметр.

На рис.1 изображен интерфейс программы с загруженными данными. Это тестовые данные, полученные как результат расчета программами RT-Office распределения дозы в алюминиевой мишени, облучаемой пучком электронов 10 MeV.

Такой массив данных используем для проверки работоспособности ParametricFitting. Коэффициент масштабирования для этого случая равен 2.6. На графике темными прямоугольниками точками показаны исходные данные. Поля  $X_{min}$  и  $X_{max}$  задают значения границ для выделения средней части кривой. На графике эти точки изображены более светлыми прямоугольниками. Именно по этой части экспериментальных данных проведена параметрическая подгонка. Рассчитанные значения энергии  $E_1$  и  $E_2$  слабо отличаются от тестового значения 10 MeV. Темная сплошная кривая показывает результат подгонки, светлая сплошная кривая – результат предыдущего расчета.

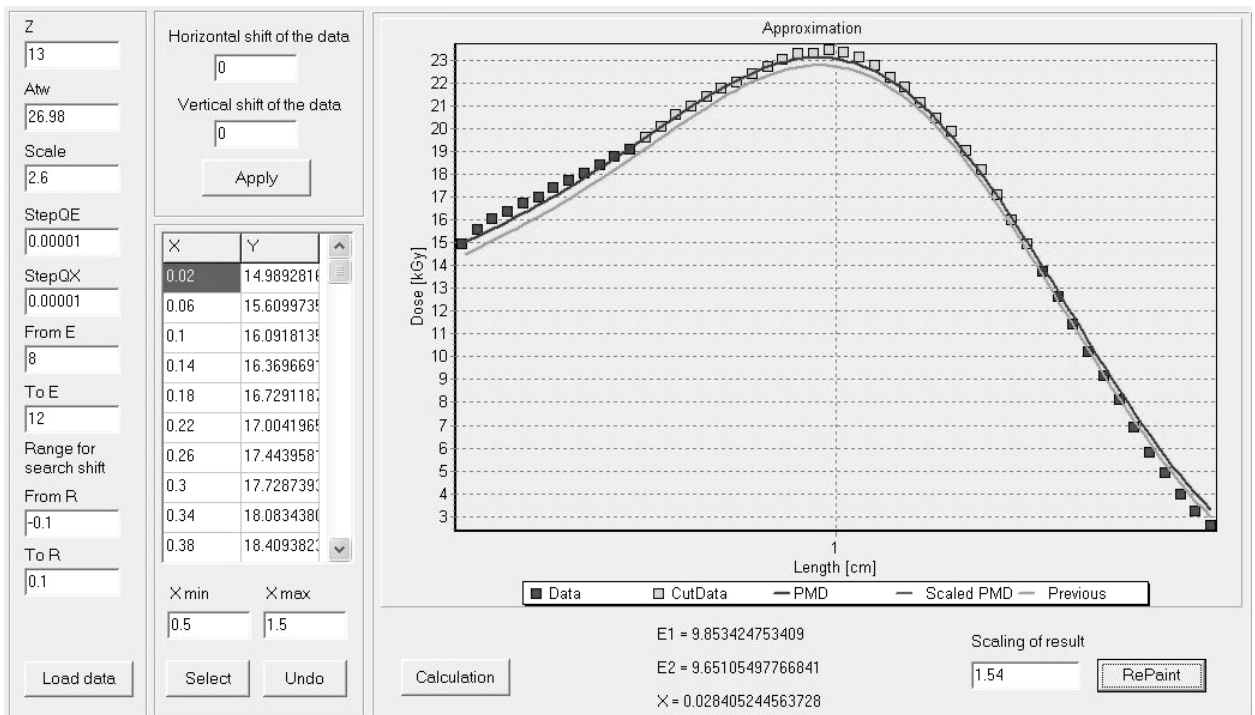


Рис.1. Проверка работоспособности программы ParametricFitting на расчетных данных

На рис.2 демонстрируется пример обработки результатов измерений, в котором использованы возможности вырезки части точек, смещения по оси X и по оси Y. Смещение по длине (ось X) необходимо для корректировки начальной точки отсчета на кривой, смещение по дозе (ось Y) необходимо, чтобы устранить систематическую погрешность результатов измерений.

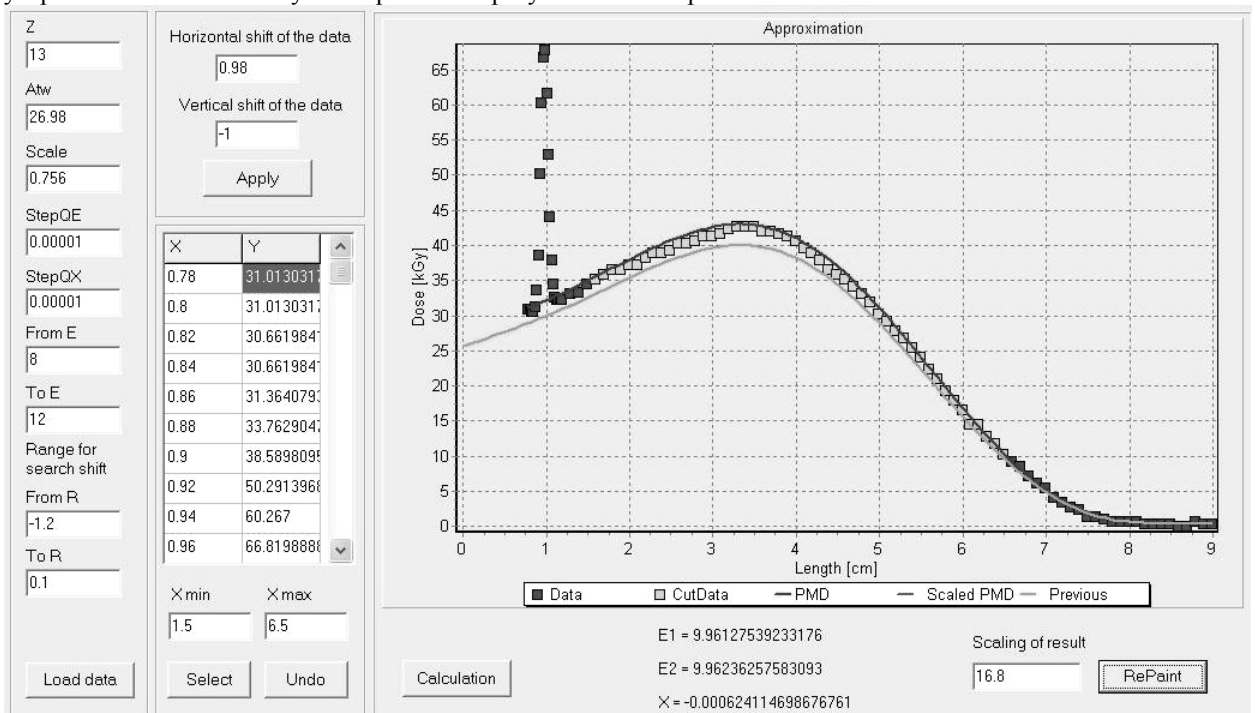


Рис.2. Обработка экспериментальных данных, полученных методом дозиметрического клина

На рис.3. показана возможность вызова всплывающего меню при щелчке правой клавишей мышки на поле графика. Есть возможность поменять вид графика 2D  $\leftrightarrow$  3D, сохранить в буфере обмена изображение графика, сохранить результирующие данные в виде текстового файла. Чтобы эффективно

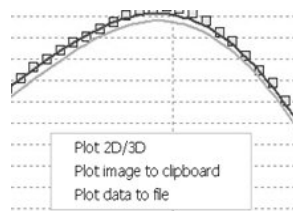


Рис.3. Дополнительные сервисные возможности

решать задачи оценки ошибок измерений, реализована возможность сохранения результатов предыдущего расчета (кривая Previous). Это обеспечивает ручной поиск оптимальных параметров подгонки.

#### Результаты работы и выводы

Предложено разработанное программное обеспечение ParametricFitting, содержащее вычислительную схему параметрического метода определения энергии электронов на основе подгонки параметров полуэмпирической модели, таких как энергия электронов и смещение начальной точки в глубинной зависимости дозы электронного излучения. Программное обеспечение содержит сервисные возможности, которые позволят технологам РТ центров обрабатывать экспериментальные данные, полученные методом дозиметрического клина, для определения оптимальных параметров РТ процесса.

#### Список использованной литературы

1. ASTM Standards, Designation: E 1649 – 94. Standard practice for dosimetry in an electron beam facility for radiation processing at energies between 300 keV and 25 MeV: ISO/ASTM1818-09.– 1995. – 19 с.
2. ICRU REPORT 35 Radiation dosimetry: electron beams with energies between 1 and 50 MeV. – 1984. – 160 с.
3. Tabata T., Andreo P. and Shinoda K. An algorithm for depth-dose curves of electrons fitted to Monte Carlo data // Radiation Physics and Chemistry. – 1998. – Vol. 53. – P. 205-215
4. Lazurik V.M., Tabata T., Lazurik V.T. A Database for Electron-Material Interactions // Radiation Physics and Chemistry. – 2001. – Vol. 60. – P. 161-162.
5. Lazurik V.T., Lazurik V.M., Popov G., Rogov Yu., Zimek Z. Book «Information System and Software for Quality Control of Radiation Processing» // IAEA: Collaborating Center for Radiation Processing and Industrial Dosimetry, Warsaw, Poland.– 2011. – 220 p.
6. Pochynok A.V., Lazurik V.T., Sarukhanyan G.E. The parametric method of the determination of electron energy on the data obtained by the method of a dosimetric wedge //Bulletin Kherson National Technical University. – 2012. – Vol. 2(45). – P. 298 – 302.
7. Lazurik V.T., Popov G.F., Zimek Z., Lazurik R.V., Sovan Salah Ibrahim. Determination of the standard characteristics of depth-dose distributions on the base of semiempirical model of electrons energy deposition. // East European Journal of Physics. – 2015. – Vol. 2. – No.4. – P. 45-51.
8. Lazurik V.T., Popov G.F., Zimek Z., Lazurik R.V., Sovan Salah. Comparison of the methods of processing the results of depth dose distribution measurements initiated by electron beam. // Information Processing Systems. – 2016. – № 3(140). – С. 82-87.
9. Lazurik V.T., Lazurik V.M., Popov G., Zimek Z. Two-parametric model of electron beam in computational dosimetry for radiation processing. // Radiation Physics and Chemistry. – 2016. – Vol. 124 – P. 230–234.



УДК 519.876

В.І. ЛИТВИНЕНКО, А.О. ФЕФЕЛОВ

Херсонський національний технічний університет

П.І. БІДЮК

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ "КПІ"

О.В. КОЖУХІВСЬКА

Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького

## ГІБРИДИЗАЦІЯ ФІЛЬТРА КАЛМАНА І АЛГОРИТМУ КЛОНАЛЬНОГО ВІДБОРУ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

*У статті запропоновано новий гібридний рекурсивний фільтр Калмана, в якому алгоритм клонального відбору використаний для оптимізації параметрів динаміки перехідної матриці станів, побудованої для параметрів моделі. Запропонований алгоритм використовується для прогнозування гетероскедастичних процесів. Результати експериментів доводять, що наш підхід значно підвищує точність прогнозування гетероскедастичних процесів.*

*Ключові слова:* фільтр Калмана, алгоритм клонального відбору, гетероскедастичні процеси

В.И. ЛИТВИНЕНКО, А.А. ФЕФЕЛОВ

Херсонский национальный технический университет

П.И. БИДЮК

Институт прикладного системного анализа НТУУ "КПИ"

О.В. КОЖУХИВСКА

Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого

## ГИБРИДИЗАЦИЯ ФИЛЬТРА КАЛМАНА И АЛГОРИТМ КЛОНАЛЬНОГО ОТБОРА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*В статье предложен новый гибридный рекурсивный фильтр Калмана, в котором алгоритм клонального отбора использован для оптимизации параметров динамики переходной матрицы состояний, построенной для параметров модели. Предложенный алгоритм используется для прогнозирования гетероскедастических процессов. Результаты экспериментов показывают, что наш подход значительно повышает точность прогнозирования гетероскедастических процессов.*

*Ключевые слова:* фильтр Калмана, алгоритм клонального отбора, гетероскедастические процессы

V.I. LYTVYNNENKO, A.O. FEFELOV

Kherson National Technical University

P.I. BIDYUK

Institute of Applied Systems Analysis NTUU "KPI"

O.V. KOZHUKHIVSKA

Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy

## HYBRIDISATION OF KALMAN FILTER AND CLONAL SELECTION ALGORITHM FOR PREDICTION OF HETEROSCEDASTIC PROCESSES

*The paper suggests a new hybrid recursive Kalman filter in which the clonal selection algorithm is used to optimize the dynamics of the state transition matrix, built for the model parameters. The proposed algorithm is used to predict heteroscedastic processes. Experimental results show that our approach significantly improves the accuracy of prediction heteroscedastic processes.*

*Keywords:* Kalman filter, clonal selection algorithm, processes heteroscedastic

### Вступ

Існує широкий клас нестационарних процесів, які мають змінну в часі дисперсію. Такі процеси мають місце в економіці, фінансах, соціальній сфері, медико-біологічних дослідженнях, екології та інших галузях. Подібні процеси зі змінною дисперсією називають гетероскедастичними. За означенням, такі процеси відносяться до класу слабо нестационарних процесів, а тому опис їх динаміки має деякі особливості у порівнянні із стаціонарними. Одним із популярних підходів до моделювання гетероскедастичних процесів є використання авторегресійної моделі з умовною гетероскедастичністю порядку  $p$  (АРУГ( $p$ )), узагальненої авторегресійної умовно гетероскедастичної моделі порядку  $p, q$  (УАРУГ( $p, q$ )), експоненційної УАРУГ (Е-УАРУГ( $p, q$ )), авторегресійної умовно-гетероскедастичної модифікованої моделі (УАРУГ-М) – моделювання премії за ризик, моделі типу експоненціального згладжування [1]. Процеси такого типу потребують спеціальних алгоритмів оптимального оцінювання та

прогнозування, оскільки застосування відомих стандартних алгоритмів приводить, в таких випадках, до отримання зміщених оцінок або оцінок з великою дисперсією, які непридатні для подальшого використання. На відміну від вказаних методів фільтр Калмана (ФК) теоретично дозволяє отримати оптимальну оцінку вектора стану системи. ФК досить широко застосовується в прогнозуванні. Наприклад, в [2] ФК використовується для прогнозування атмосферних процесів в глобальній кліматичній моделі - безкоштовному ресурсі, доступному для проведення експериментів вченими і студентами різних спеціальностей. В [3] представлено різновид фільтра, заснованого на нечіткій логіці, за допомогою якого вирішується завдання стеження за низколетящими цілями. В роботі [4] вирішується задача відстежування руху наземних цілей за допомогою системи машинного зору, встановленої на безпілотний вертольот. ФК тут застосовується для прогнозування переміщення цілі при її зникненні з області прямої видимості. Ряд робіт присвячений спільному використанню ФК з генетичними алгоритмами. В [5, 6] ФК використовується для видалення шуму в системі управління безпілотним літальним апаратом. При цьому генетичний алгоритм здійснює оптимізацію параметрів фільтра з метою підвищення стабільності і точності його роботи. В [7] представлений спосіб введення генетичного механізму в процес перевиборки часткового ФК. Дане нововведення дозволяє уникати вирождаємості алгоритму, характерної для часткового фільтра і підвищити стабільність фільтрації. В роботі [8] адаптивний ФК застосовується для відстеження дій гравця на тенісному корті при аналізі відеозаписів спортивних змагань. Даний підхід показав високу якість результатів, тому що параметри фільтра динамічно коригуються відповідно до положення гравця. ФК - це послідовний рекурсивний алгоритм, який використовує прийнятну модель динамічної системи у просторі станів для отримання оцінки, яка може бути істотно скорегована в результаті аналізу кожної нової вибірки вимірювань часової послідовності [9]. Перевагами ФК є те, що він має рекурентну структуру і зручний для реалізації на ЕОМ, а також легко узагальнюється на багатовимірний і нестационарний випадок. Однак методи оцінювання, побудовані на основі ФК, також мають ряд істотних недоліків. Зокрема, алгоритм рекурентної ідентифікації не є асимптотично стійким за Ляпуновим, а це означає, що він стає нестійким при сталості вимірів сигналів, тобто при неінформативних вимірах відбувається нагромадження похибок оцінок параметрів і станів моделі. Ця обставина визначає тільки епізодичне застосування даного алгоритму при наявності в об'єкті динамічних режимів. Ще одна складність, яка виникає при практичному використанні ФК, полягає у проблемі його розбіжності. Основними причинами втрати стійкості фільтра є втрата додатної визначеності коваріаційної матриці похибок оцінок внаслідок обчислювальних помилок, або при нестационарності або нелінійності об'єкта, що моделюється, і коли параметри рівняння об'єкта априорі невідомі або відомі з недостатньою точністю. Перераховані проблеми оптимальної фільтрації характерні і для гетероскедастичних процесів. Для мінімізації зазначених недоліків в даній роботі представлені результати використання алгоритму клонального відбору для розв'язання задачі синтезу алгоритму ФК. У роботі вперше запропоновано використати алгоритм клонального відбору для оптимізації параметрів динаміки перехідної матриці станів, побудованої для параметрів моделі.

#### **Комбінований алгоритм фільтра Калмана з використанням алгоритму клонального відбору**

Задачі математичного опису та прогнозування процесів із змінною у часі дисперсією є сьогодні високо актуальними, оскільки більшість сучасних фінансових процесів, а також деякі економічні процеси відносяться до класу нестационарних гетероскедастичних. Незважаючи на наявність великих об'ємів досліджень, виконаних у цьому напрямі, задача підвищення якості оцінок прогнозів волатильності залишається актуальною. Нижче наведено метод оцінювання структури і параметрів моделі гетероскедастичного процесу з використанням процедури на основі фільтра Калмана (ФК) та клонального алгоритму для адаптивного уточнення параметрів математичної моделі. Послідовність побудови моделі для прогнозування волатильності наведена нижче.

#### **Процедура побудови алгоритму фільтра Калмана для прогнозування гетероскедастичних процесів**

Описуємо гетероскедастичний процес моделлю  $AR(1)$  з метою отримання некорельованих залишків моделі для подальшого аналізу:

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k) \quad (1)$$

Параметри цієї моделі оцінюються за МНК, оскільки на цьому етапі не ставиться мета побудови кращої моделі; вона необхідна для того, щоб отримати некорельовані залишки (випадковий процес, що формує дисперсію основної змінної). Звідси беремо залишки моделі  $\hat{\varepsilon}(k)$  як різницю між фактичними значеннями та їх оцінками за побудованою моделлю:

$$\hat{\varepsilon}(k) = e(k) = y(k) - [a_0 + a_1 y(k-1)] \quad (2)$$

Формуємо (обчислюємо) ряд квадратів залишків, який необхідний для побудови моделі умовної дисперсії досліджуваного процесу. Стандартне відхилення, обчислене за цією дисперсією, вважають волатильністю (ступенем мінливості) процесу:

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{\varepsilon}^2 \\ \varepsilon(k) \end{matrix} \right\} \tag{3}$$

Знаходимо автокореляційну функцію (АКФ) і часткову АКФ (ЧАКФ) для цього ряду для того щоб визначити порядок авторегресії для можливої моделі авторегресії з умовною гетероскедастичністю (АРУГ):

$$\hat{\varepsilon}^2(k) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2(k-1) + \dots + \alpha_m \hat{\varepsilon}^2(k-m) + v(k) \tag{4}$$

Очевидно, що порядок цієї авторегресії може приймати довільні значення так само, як і у випадку побудови авторегресійної моделі самого основного процесу. У будь якого випадку для початку приймемо обмеження  $m \leq 5$  з метою зменшення обчислювальних витрат на початковому етапі виконання дослідження.

Для побудови узагальненої моделі АРУГ (УАРУГ) обчислюємо ряд значень дисперсії  $h(k)$  на основі вихідного ряду  $y(k)$ ;  $h(k)$  – динамічна дисперсія, яка обчислюється за допомогою ковзного вікна розміром  $W$  за таким виразом:

$$h(k) = \frac{1}{w-1} \sum_{i=k-\frac{w-1}{2}}^{k+\frac{w-1}{2}} \left[ y(i) - \bar{y} \right]^2 \tag{5}$$

$\bar{y}$  – середнє значення ряду; значення ширини вікна даних  $W$  для зручності виконання обчислень вибирають, як правило, непарним.

Знаходимо АКФ для ряду  $h(k)$  для того, щоб визначити порядок авторегресії для цієї змінної.

Записуємо модель УАРУГ для опису умовної дисперсії гетероскедастичного процесу, яка включає дві змінні, що характеризують динаміку дисперсії:

$$h(k) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i h(k-i) + \sum_{j=1}^q b_j \hat{\varepsilon}^2(k-j) \tag{6}$$

Таким чином, отримаємо регресійне рівняння у векторній формі для опису умовної дисперсії:

$$\hat{y}(k) = \hat{h}(k) = x(k) \cdot \hat{\beta}(k-1) \tag{7}$$

Для мінімізації обчислювальних витрат при виконанні обчислювального експерименту у рівнянні

$$\hat{h}(k) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i h(k-i) + \sum_{j=1}^q b_j \cdot \hat{\varepsilon}^2(k-j) \tag{8}$$

покладемо для початку порядки  $p = 1$ ;  $q = 1$ , які будуть уточнюватись на основі кореляційного аналізу. Вектор вимірів  $x(k)$  для моделі (7) має такий вигляд:

$$x(k) = \left\{ h(k-1) \dots h(k-p) \hat{\varepsilon}^2(k-1) \dots \hat{\varepsilon}^2(k-q) \right\} \tag{9}$$

Вектор параметрів, який адаптивно уточнюється за допомогою ФК, складається з таких елементів:

$$\hat{\beta}(k-1) = \left\{ \hat{a}_0 \ \hat{a}_1 \dots \hat{a}_p \ \hat{b}_1 \dots \hat{b}_q \right\}^T \tag{10}$$

Апостеріорна коваріаційна матриця похибок оцінок вектора параметрів обчислюється за виразом:

$$R(k) = \Phi(k-1) \cdot C(k-1) \cdot \Phi^T(k-1) + w \tag{11}$$

Тут

$$C(k) = \begin{bmatrix} \sigma_{a_0}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{a_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{a_q}^2 \end{bmatrix} \quad \text{– матриця дисперсії оцінок параметрів } \hat{\beta}$$

Початкове значення  $C(0)$  (діагональні елементи) задаються додатними числами, наприклад, так:

$$\sigma_{\hat{a}_0}^2 = \sigma_{\hat{a}_1}^2 = \dots = \sigma_{\hat{a}_p}^2 = \sigma_{\hat{b}_1}^2 = \dots = \sigma_{\hat{b}_q}^2 = 5,0$$

$w(k)$  – діагональна матриця:

$$w = \text{diag}[0.5 \quad 0.5 \dots 0.5]$$

для прикладу .

У процесі уточнення оцінок параметрів матриця  $C(k)$  перераховується за формулою:

$$C(k) = A(k)\sigma(k)A(k)^T \tag{12}$$

Матриця  $\sigma(k)$  ітераційно перераховується за рівнянням:

$$\sigma(k) = X^T(k)R(k)X(k) + V,$$

де матриця  $V$  має тільки діагональні ненульові елементи, які характеризують дисперсії похибок  $e(k)$  у рівнянні (1). Їх потрібно задати ненульовими і такими, що узгоджуються з фактичними дисперсіями похибок вимірів. Матриця  $V$  у цій задачі вироджується у скаляр;  $V = 0.1$  – для першого обчислювального експерименту.

Таким чином, вагові коефіцієнти фільтра оцінюються за рівнянням [10]:

$$A(k) = \underbrace{R(k) \cdot X^T(k) \cdot \sigma^{-1}(k)}_{\text{вектор}} \tag{13}$$

Основне рівняння для уточнення оцінок параметрів моделі має такий вигляд:

$$\hat{\beta}(k) = \Phi(k-1) \cdot \hat{\beta}(k-1) + A(k) \cdot \left[ h(k) - \hat{h}(k) \right] \tag{14}$$

де  $h(k)$  – останнє значення умовної дисперсії, розраховане за формулою (5);  $\hat{h}(k)$  – однокроковий прогноз, обчислений за рівнянням (8);  $\Phi(k)$  – перехідна матриця, яка рекурсивно уточнюється за клональним алгоритмом.

**Оптимізація фільтра Калмана за допомогою алгоритму клонального відбору**

Під штучними імунними системами розуміються адаптивні обчислювальні системи, що використовують моделі, принципи, механізми і функції, описані в теоретичній імунології, які застосовуються для розв'язання прикладних задач. Алгоритми клонального відбору – клас алгоритмів, що використовують методи клональної селекції і теорію придбаного імунітету. Алгоритм клонального відбору найчастіше застосовується для розв'язання задач оптимізації і розпізнавання доменів, деякі з яких нагадують алгоритми сходження на вершину і генетичний алгоритм без оператора рекомбінації. З обчислювальної точки зору алгоритми, що ґрунтуються на принципі клонального відбору, шляхом клонування, мутації і відбору знаходять рішення, які найбільше відповідають вирішуваній задачі і формують клітини пам'яті [11]. Слід зазначити, що матриця переходів  $\Phi$  відображає відносини взаємодій чинників прогнозування станів факторів гетероскедастичних процесів. При цьому відношення і сила цих факторів невизначені і повинні бути оптимізовані. В роботі описано застосування нового підходу для побудови моделі прогнозування за допомогою фільтра Калмана для підвищення точності прогнозування зміни дисперсії часового ряду гетероскедастичного процесу. Застосування алгоритму клонального відбору для оптимізації перехідної матриці  $\Phi$  у фільтрі Калмана виглядає таким чином:

**Крок 1. Кодування антитіл.** У представленій роботі алгоритм клонального відбору використовується для оптимізації параметрів матриці переходів, отже, кожне антитіло має містити в собі інформацію про структуру і значеннях параметрів даної матриці. Внаслідок специфіки бінарного кодування, запропонована схема мутації, згідно з якою ймовірність зміни окремого біта рядки залежить не тільки від афінності антитіла в цілому, але і від значущості цього біта.

**Крок 2 Визначення афінності.** В якості антигенів у даній роботі використовуються рядки таблиці

експериментів:  $Ag = \bigcup_{i=1}^r (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})$ , де  $r$  – кількість рядків таблиці. Обчислення

афінності є пошуком значення похибки моделі відносно цих експериментів і може виражатися у вигляді наступної функціональної залежності:

$$D_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (y_{ij} - y_{ij}^M)^2}{r}}, \quad j = \overline{1, n} \tag{16}$$

де  $D_j$  – середньоквадратична похибка  $j$ -го виходу моделі на навчальних даних;  $r$  – кількість рядків таблиці експериментів;  $y_{ij}$  – реальне значення  $j$ -го виходу системи в  $i$ -му рядку таблиці даних;  $y_{ij}^M$  – значення  $j$ -го виходу моделі при установці  $i$ -го набору вхідних параметрів з таблиці даних.

**Крок 3. Мутація.** Мутація – це перетворення антитіла, що випадково змінює одне або кілька значень його атрибутів. При бінарному кодуванні антитіл мутація полягає в інвертуванні одного або декількох генів. Застосування оператора випадкової мутації фактично означає формування нових антитіл, що в остаточному підсумку приводить до розширення області пошуку та підвищення ймовірності знаходження оптимального розв'язку. Найпоширеніший вид мутації – випадкова зміна тільки одного з генів антитіла. Альтернативний вид мутації – загальна імовірнісна мутація. У цьому випадку кожний ген антитіла мутує із заданою ймовірністю. Для кодування значень в даній роботі використана бінарна система. Точність подання (кількість біт на одне значення) виділена в якості параметра налагоджування. Внаслідок специфіки двійкового кодування, запропонована схема мутації, згідно з якою ймовірність зміни окремого біта рядка залежить не тільки від афінності антитіла в цілому, але й від значимості цього біта.

Розглянемо приклад, представлений на рис. 1.

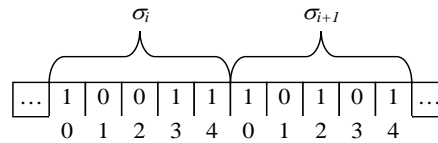


Рис. 1. Ділянка рядка антитіла із двійковим кодуванням

У даному прикладі мутація бітів з номерами 0 або 1 очевидно викличе більш істотні зміни обраних параметрів, чим мутація біта з номером 4. Коли індивідуум досягає досить високої афінності, більш значимі біти повинні поступово виключатися з операції мутації. Цього можна досягти, зменшуючи відповідні ймовірності застосування оператора до даних бітів. Формально цей процес можна зобразити наступним чином:

$$p_i = p_m \cdot \left( aff + \frac{i}{l} (aff_{\min} - aff) \right), \tag{17}$$

де  $p_i$  - імовірність мутації  $i$ -го біта параметра в рядку антитіла;  $p_m$  – загальний рівень мутації, що задається як параметр;  $aff$  – поточна афінність антитіла;  $l$  – точність (кількість біт) подання кодованих параметрів;  $aff_{\min}$  – мінімальне значення афінності, що відповідає обраній цільовій функції й функції афінності. Так як в цьому випадку розв’язується задача мінімізації похибки апроксимації, то мінімальне значення афінності антитіла буде відповідати максимально можливому значенню похибки. Формула (17) забезпечує однакову ймовірність мутації біт для індивідуумів з низькою афінністю і збільшення ймовірності мутації менш значимих біт для індивідуумів з високою афінністю.

**Крок 4. Клональний відбір індивідуумів.** Кроки виконання алгоритму клонального відбору можна описати наступними етапами:

- a) Кодування матриці прогнозів.
- b) Шляхом випадкової генерації  $\mathbf{Ab}_1$  створюється початкова популяція індивідуумів (антитіл)  
 $\mathbf{Ab} = \mathbf{Ab}_{\{1\}} + \mathbf{Ab}_{\{\Phi\}}$ .
- c) Визначення афінності  $f$  усіх індивідуумів із множини  $\mathbf{Ab}$  на навчальній вибірці.
- d) Відбір  $n$  антитіл з найбільшою афінністю  $\mathbf{Ab}_{\{n\}}$ .
- e) Відібрані  $n$  антитіл будуть клонуватися пропорційно їх афінності відібраних антитіл за допомогою оператора клонування з утворенням популяції (репертуар) клонів  $\mathbf{C}^J$ .
- f) Відбираєм  $n$  антитіл, які мають найвищу афінність; кількість клонів розраховується за формулою

(18):

$$N_c = \sum_{i=1}^N \text{round}(\beta \cdot N), \tag{18}$$

де  $N_c$  загальна кількість клонів, створених для кожного з антигенів,  $\beta$  – множинний фактор,  $N$  – загальна кількість антитіл,  $\text{round}(\cdot)$  – оператор округлення аргументу до цілого числа.

Кожне антитіло розглядається в локальному масштабі і не має ніяких переваг при клонуванні перед іншими антитілами. Антигенна афінність (відповідність значенню цільової функції) використовується надалі для визначення рівня гіпермутації для кожного клону даного антитіла.

g) Використання оператора гіпермутації до репертуара отриманих клонів антитіл  $\mathbf{C}^J$  пропорційно їх афінності – чим вище афінність, тим нижче рівень мутації, в результаті, отримуємо нову популяцію клонів  $\mathbf{C}^*$ .

- h) Визначаємо афінність  $f^*$  усіх індивідуумів із нової популяції клонів  $C^*$  на навчальній вибірці.
- i) Відбираються  $n$  найкращих антитіл і додаються в множину  $Ab_{\{n\}}^*$ .
- j) Видаляються  $d$  антитіл, які мають найгіршу афінність і замінюються новими випадково згенерованими антитілами, які створюють множину, після чого проводиться оновлення популяції антитіл  $Ab^* = Ab_{\{n\}}^* + Ab_{\{d\}}^*$ .
- k) Після цього кроку виконується обчислення афінності кожного антитіла, їх ранжування і перевірка на виконання умови зупинки циклу.

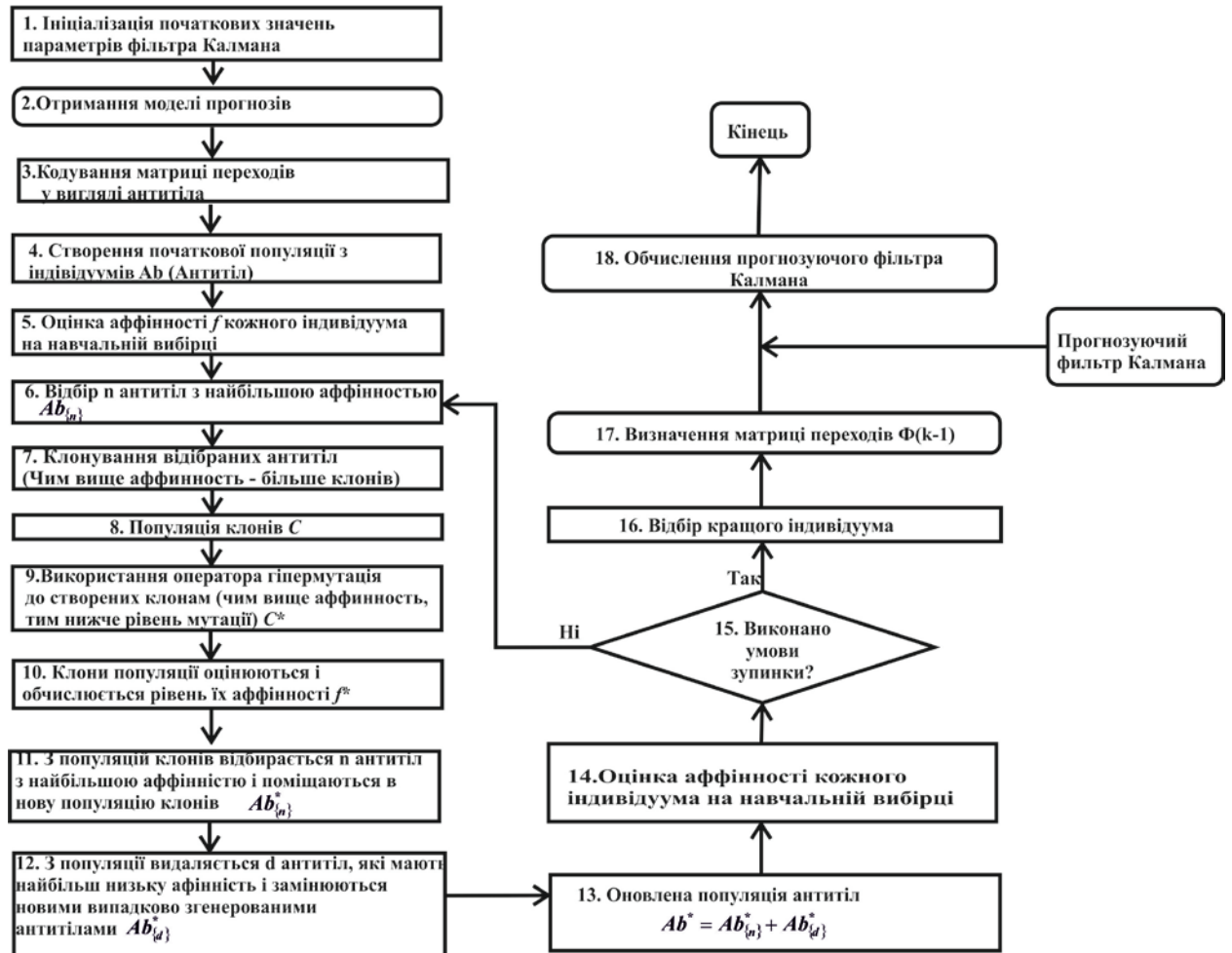


Рис.2. Гібридний алгоритм налаштування фільтра Калмана  
Результати моделювання

Для оцінки якості функціонування розробленого алгоритму виконано аналіз умовної дисперсії котировальної ціни акцій компанії УКРТЕЛЕКОМ. Побудовано модель часового ряду на основі вибірки даних, що складається з 543 спостережень котировання цін акцій компанії УКРТЕЛЕКОМ. Діаграма значень вихідного ряду показана на рисунку 3.



Рис. 3. Графік ряду спостережень

Далі, для попередньої оцінки порядку авторегресійної моделі будується автокореляційна і часткова автокореляційна функції часового ряду (АКФ і ЧАКФ). Діаграма АКФ вихідного ряду представлена на рис 4.

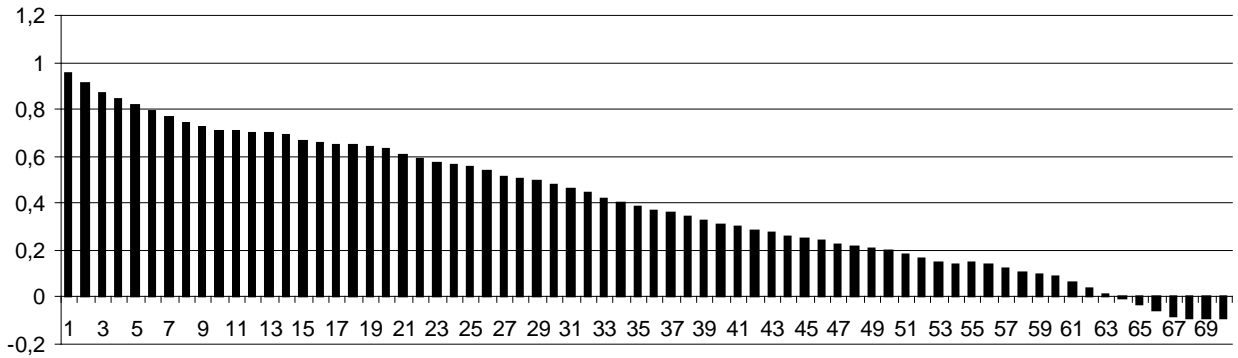


Рис. 4. Автокореляційна функція котирувальної вартості акцій

Діаграма ЧАКФ зображена на рисунку 5.

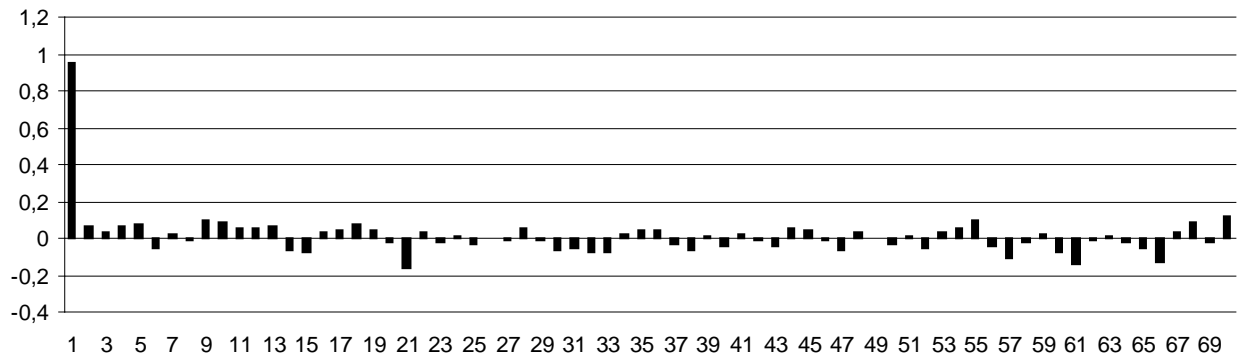


Рис. 5. Часткова автокореляційна функція котирування вартості акцій

Виходячи з аналізу ЧАКФ можна зробити висновок, що порядок авторегресійної моделі повинен приймати значення 1-2. На підставі отриманих результатів оцінюються коефіцієнти моделі авторегресії:

$$y_i = 0.002141 + 0.958575y_{i-1}$$

Тепер будується ряд із квадратів залишків побудованої моделі (рис.6)

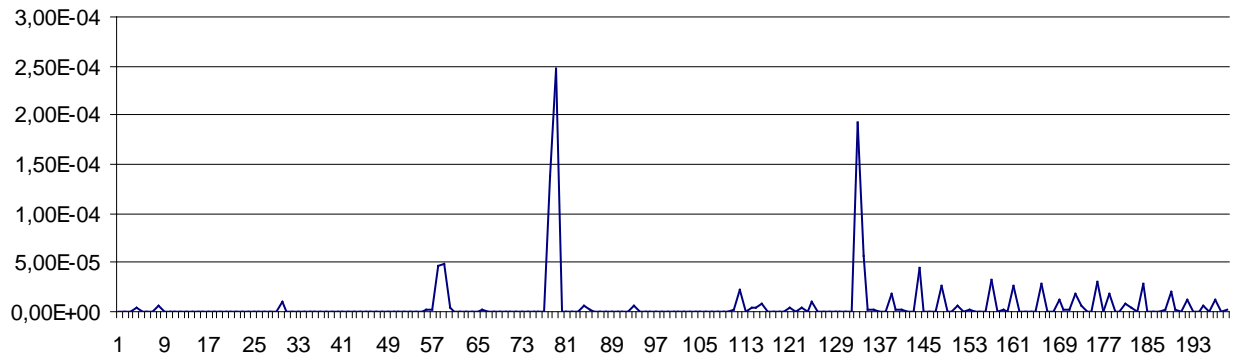


Рис. 6. Ряд квадратів залишків отриманої моделі авторегресії

Будуємо АКФ і ЧАКФ для ряду квадратів залишків (рис. 7, 8).

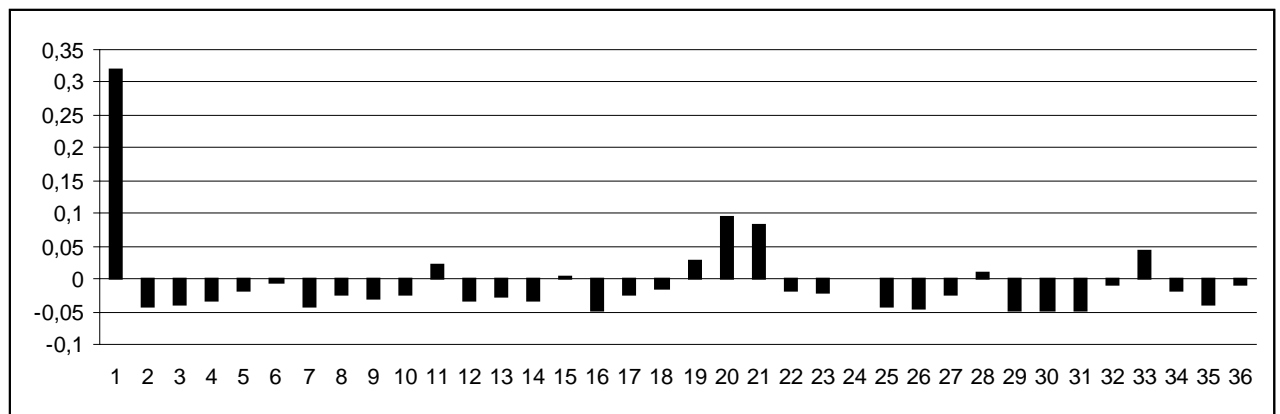


Рис. 7. АКФ ряду квадратів залишків

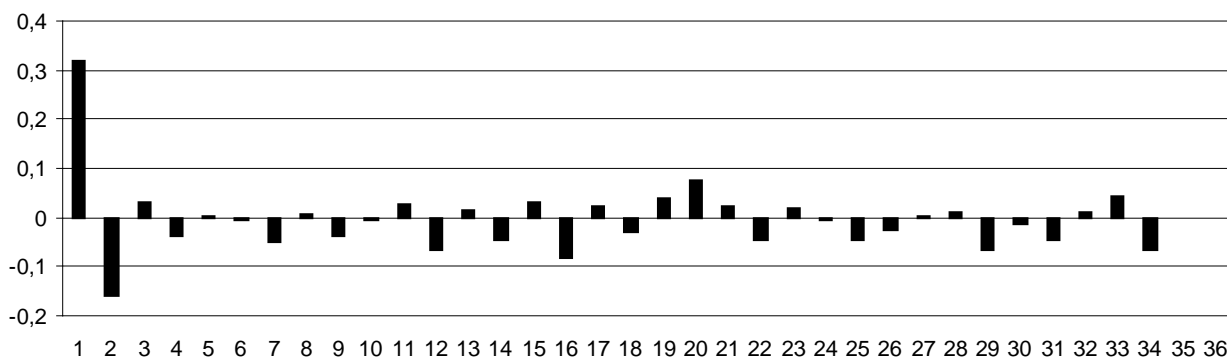


Рис. 8. ЧАКФ ряду квадратів залишків

Виходячи з аналізу АКФ і ЧАКФ, робимо висновок про те, що процес гетероскедастичний і будемо ряд умовних дисперсій процесу (рис. 9).

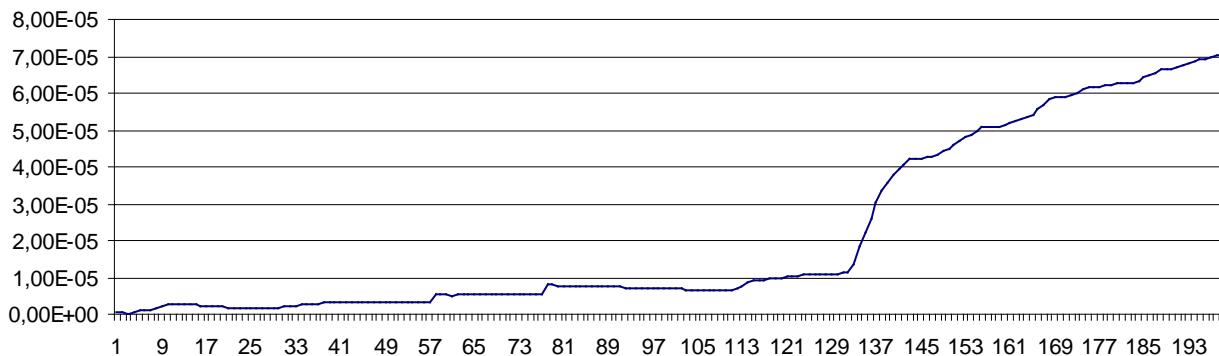


Рис. 9. Ряд умовних дисперсій процесу

Використовуючи ряд квадратів залишків моделі авторегресії й отриманий ряд умовних дисперсій, побудовано моделі гетероскедастичного процесу. На підставі побудованих моделей отримано прогноз умовної дисперсії процесу на 7 кроків уперед. Графік прогнозу наведено на рис 10.

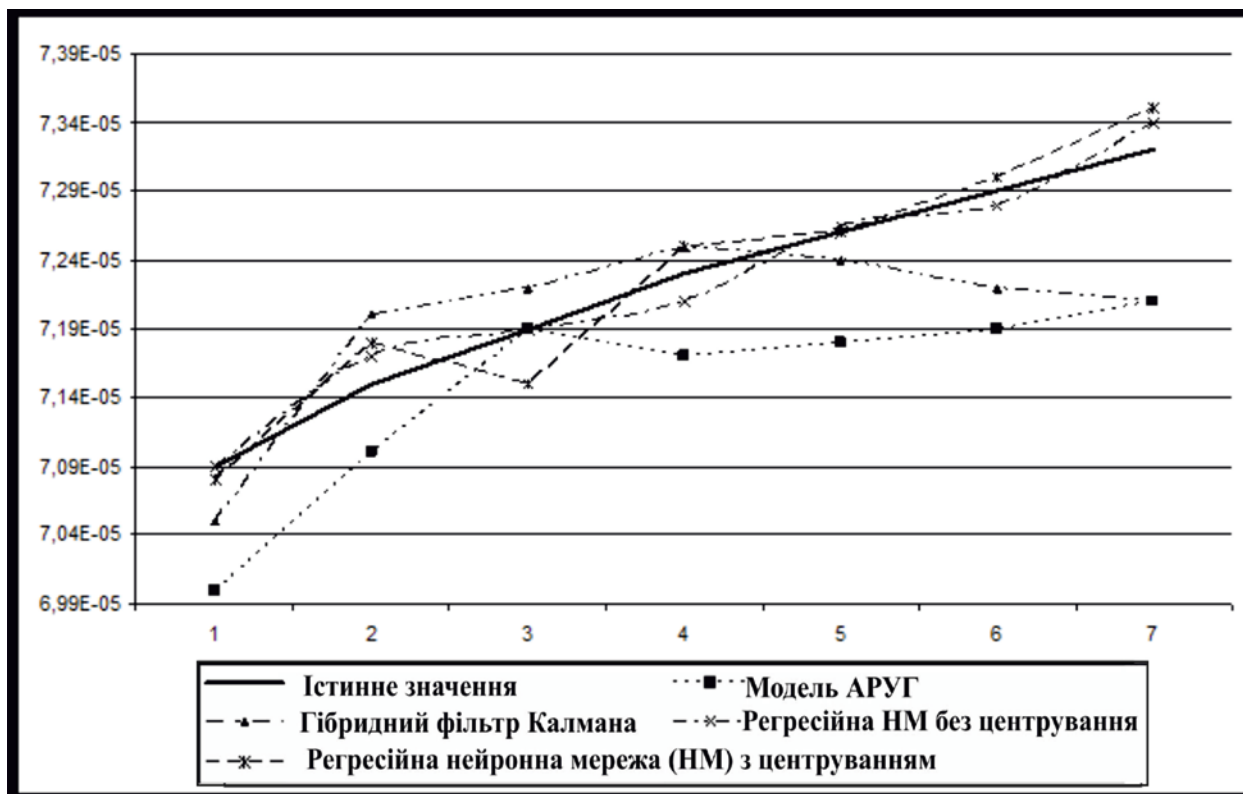


Рис. 10. Порівняльний аналіз прогнозу умовної дисперсії котирування вартості акцій компанії УКРТЕЛЕКОМ



Порівняльні статистичні параметри якості отриманого прогнозу наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Метод прогнозування	Максимальне відхилення		Мінімальне відхилення		Середньо-квдратична похибка
	Абс.	%	Абс.	%	
Модель АРУГ	0,0000015	2,08	2,20 E-07	0,30	5,71 E-07
Фільтр Калмана + клональний алгоритм	0,0000011	0,78	0,0000002	0,16	2,81 E-07
Регресійна НМ із центруванням	5,10 E-07	0,69	1,30 E-07	0,18	3,07 E-07
Регресійна НМ без центрування	3,10 E-07	0,42	0,0000001	0,14	2,39 E-07

Виконаний комп'ютерний аналіз методів прогнозування дозволяє стверджувати, що практично всі використані методи дають можливість отримувати прогнози прийнятної якості. За використаними статистичними показниками якості кращими виявились методи прогнозування на основі моделей гетероскедастичних процесів та на основі гібридного фільтра Калмана.

#### Висновки

У роботі запропоновано новий гібридний алгоритм прогнозування гетероскедастичних процесів на основі фільтра Калмана та алгоритму клонального відбору. По-перше, ми встановлюємо короткостроковий прогноз котирування цін акцій компанії УКРТЕЛЕКОМ з використанням модифікованого фільтра Калмана. По-друге, алгоритм клонального відбору був вперше застосований для оптимізації перехідної матриці станів фільтра Калмана. Результати моделювання показують, що наш підхід, заснований на гібридизації фільтра Калмана і алгоритму клонального відбору, може досягти вищої точності порівняно з прогнозом волатильності, обчисленим з використанням застосуванням традиційного алгоритму фільтра Калмана для короткострокових прогнозів.

#### Список використаної літератури

1. Бідюк П. І. Методи прогнозування. Т. 1 / Бідюк П. І., Меняйленко С. О., Половцев О. В. – Луганськ: Альма-Матер, 2008. – 301с.
2. Wang X. A comparison of breeding and ensemble transform Kalman filter ensemble forecast schemes / X. Wang // J. Atmos Sci. – 2003. – Vol. 60, № 9. – P. 1140-1158.
3. Chen Y. Fuzzy multipath filter with Kalman algorithm for tracking a low-altitude target / Y. Chen, X. Wang // Asian J. Control. – 2009. – Vol. 11, № 3. – P. 302-308.
4. Lin C. Vision-based tracking and position estimation of moving targets for unmanned helicopter systems / C. Lin, F. Hsiao // Asian J. Control. – 2013. – Vol. 15, № 5. – P. 1270-1283.
5. Yan J. Kalman filtering parameter optimization techniques based on genetic algorithm / J. Yan, D. Yuan, X. Xing [at al.] // IEEE International Conference on Automation and Logistics, 1-3 Sept. 2008: proceedings. – Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2008. – P. 1717-1720.
6. Nogueira S.L. Estimation of lower limbs angular positions using Kalman filter and genetic algorithm / S.L. Nogueira, R.S. Inoue, M.H. Terra [at al.] // Biosignals and Biorobotics Conference (BRC), 2013 ISSNIP, 18-20 Feb. 2013: proceedings. – Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2013. – Vol. 5. – P. 1-6.
7. Yang S. A Method of Genetic Algorithm Optimized Extended Kalman Particle Filter for Nonlinear System State Estimation / S. Yang, W. Huang, Q. Ma // 2009 Fifth International Conference on Natural Computation, 14-16 Aug. 2009: proceedings. – Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2009. – Vol. 5. – P. 313-316.
8. Fang M.Y. Robust player tracking for broadcast tennis videos with adaptive Kalman filtering / M.Y. Fang, C.K. Chang, N.C. Yang [at al.] // Journal of Information Hiding and Multimedia Signal Processing. – 2014. – Vol. 5, № 2. – P. 242-262.
9. Harvey A.C. Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter / A.C. Harvey. – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 572p.
10. Yang Q. A Novel Evolution Kalman Filter Algorithm for Short-term Climate Prediction / Q. Yang, D. An, Y. Cai // Asian Journal of Control. – 2016. – Vol. 18, № 1. – P. 400-405.
11. De Castro L.N. Learning and optimization using the clonal selection principle / L.N. De Castro, F.J. Von Zuben // IEEE Trans. Evolution. Comput. – 2002. – Vol. 6(3). – P. 239-251.

УДК 004.4'236

К.Ю. ОСТРОВСЬКА, Є.В. ОСТРОВСЬКИЙ  
 Національна металургійна академія України

### РОЗРОБКА МОДУЛЮ РОЗШИРЕННЯ ФУНКЦІЇ КОРИСТУВАЧА ДЛЯ MICROSOFT EXCEL ЗАСОБАМИ C# ТА EXCEL-DNA

*Робота присвячена розробці модулю розширення керування макросами для Microsoft Excel засобами C#, який дозволяє запускати макроси з використанням вхідних параметрів та керувати переліком макросів, які знаходяться в документі.*

*Ключові слова: розробка, формат, Excel-DNA, мова, засоби, макрос, модуль, параметри, Microsoft Excel, функції користувача.*

К.Ю. ОСТРОВСКАЯ, Е.В. ОСТРОВСКИЙ  
 Национальная металлургическая академия Украины

### РАЗРАБОТКА МОДУЛЯ РАСШИРЕНИЯ ФУНКЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ MICROSOFT EXCEL СРЕДСТВАМИ C# И EXCEL-DNA

*Робота посвящена разработке модуля расширения управления макросами для Microsoft Excel средствами C#, который позволяет запускать макросы с использованием входных параметров и управлять перечнем макросов, находящихся в документе.*

*Ключевые слова: разработка, формат, Excel-DNA, язык, средства, макрос, модуль, параметры, Microsoft Excel, функции пользователя.*

K.YU. OSTROVSKAYA, E.V. OSTROVSKYI  
 National Metallurgical Academy of Ukraine

### DEVELOPMENT OF AN EXPANSION MODULE FOR THE USER FUNCTION FOR MICROSOFT EXCEL IN C # AND EXCEL-DNA

*The work is devoted to developing the expander control macros for Microsoft Excel by means of C #, which allows you to run macros using the input parameters and manage the list of macros are in the document.*

*Keywords: development, format, Excel-DNA, language, tools, macros, modules, options, Microsoft Excel, user-defined function.*

#### Постановка проблеми

ExcelDna була розроблена, щоб бути відкритим вихідним кодом для інтеграції .Net в Excel. Основною метою є користувач Excel, який в даний час пише VBA код для функцій і макросів, і хотів би почати використовувати .NET. XLL надбудови розробників, які хочуть використовувати .NET Framework, щоб розвивати свої доповнення ins. ExcelDna є безкоштовним для всіх використань, і поширюється з відкритим вихідним кодом ліцензії. ExcelDna розроблено з використанням .NET 2.0, і користувачі повинні встановити у вільному доступі .NET Framework 2.0 виконання. Інтеграція є Excel Add-In (.Xll), який надає .NET код Excel. Призначений для користувача код може бути в текстовому файлі сценаріїв (C #, Visual Basic або F #), або компіляції .NET бібліотеки (.Dll) [1].

Тому, задача роботи полягає в розробці модулю розширення керування макросами для Microsoft Excel засобами C#.

#### Виклад основного матеріалу

Для початку необхідно завантажити необхідні нам бібліотеки:

1. Excel-DNA.

<https://exceldna.codeplex.com/releases/view/616591>

Excel-DNA - це незалежний проект для інтеграції .NET рішень в MS Excel [2].

2. NewtonSoft.JSON

<https://github.com/JamesNK/Newtonsoft.Json/releases>

Json.NET - це приватний відкритий проект. Це не просто кращий JSON serializer для .NET але і кращий serializer для будь-якої комп'ютерної мови.

Об'єкт серіалізуються в потік, який переносить не тільки дані, але відомості про тип об'єкта, такі як його версію, мову і регіональні параметри, а також ім'я збірки. Із цього потоку об'єкт можна зберегти в базі даних, файлі або пам'яті.

Серіалізація дозволяє розробнику зберігати стан об'єкта і відтворювати його при необхідності, забезпечуючи зберігання об'єктів, а також обмін даними. За допомогою серіалізації розробник може

виконувати такі дії, як відправка об'єкта віддаленого додатку за допомогою веб-служби, передача об'єкта з одного домену в інший, передача об'єкта через брандмауер у вигляді XML-рядків і зберігання інформації про безпеку або конкретного користувача, що використовує кілька різних програм.

На рисунку 1 показаний загальний процес серіалізації та десеріалізації.

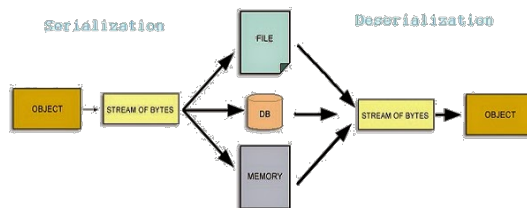


Рисунок 1 - Процес серіалізації та десеріалізації

Вивчимо офіційну сторінку НБУ, рисунок 2.

Головна | Карта порталу | Глосарій | Контакти | Підписка | RSS | Facebook | Twitter | Flickr

**НАЦІОНАЛЬНИЙ БАНК УКРАЇНИ**  
Офіційне Інтернет-представництво  
Українська | English

Головна

▶ Національний банк  
▶ Рада Національного банку  
▶ Офіційне опублікування нормативно-правових актів  
▶ Монетарна політика  
▶ Банківський нагляд  
▶ Платіжні системи та розрахунки  
▶ Банкноти та монети  
▶ Статистика  
▶ Публікації  
▶ Прес-центр  
▶ Інформаційні матеріали  
▶ Фінансовий моніторинг  
▶ Законодавство  
▶ Персонал  
▶ Публічна інформація у формі відкритих даних (API)  
▶ Фінансова грамотність  
▶ Корпоративний недержавний пенсійний фонд

Офіційний курс гривні щодо іноземних валют

Національний банк України на 25.01.2016 встановлює такі офіційні курси гривні до іноземної валюти (до списку валют, курс яких змінюється щомісячно) ▶

Код цифровий	Код літерний	Кількість одиниць	Назва валюти	Офіційний курс
036	AUD	100	Австралійський долар	1742.2218
944	AZN	100	Азербайджанський манат	1546.8033
826	GBP	100	Англійський фунт стерлінгів	3550.9841
974	BYR	10	Білоруський рубль	0.0118
208	DKK	100	Данська крона	359.0862
840	USD	100	Долар США	2479.2164
978	EUR	100	Євро	2679.5371
352	ISK	100	Ісландська крона	19.0226
398	KZT	100	Казахстанський тенге	6.5267
124	CAD	100	Канадський долар	1749.5019
498	MDL	100	Молдовський лей	120.6666
578	NOK	100	Норвезька крона	282.9949
985	PLN	100	Польський злотий	600.9682
643	RUB	10	Російський рубль	3.0770
702	SGD	100	Сінгапурський долар	1737.5897
960	XDR	100	Спеціальні права запозичення	3419.3447
949	TRY	100	Турецька ліра	822.6505
934	TMT	100	Туркменський манат	708.3475
348	HUF	1000	Угорський форинт	85.8276
860	UZS	100	Узбецький сум	0.8771
203	CZK	100	Чеська крона	99.1466
752	SEK	100	Шведська крона	288.9363
756	CHF	100	Швейцарський франк	2447.0658
156	CNY	100	Юань Женьїньбі	376.8476
392	JPY	1000	Японська єна	209.7157

\* для здійснення обліку та митних платежів без зобов'язань Національного банку України купувати та продавати зазначені валюти за цими курсами

Форма пошуку по даті ▶  
Форма пошуку за період ▶

Офіційний курс українського карбованця до долара США, німецької марки та російського рубля, встановлений Національним банком України у 1995 році | у 1994 році | у 1993 році

© Національний банк України Адреса: 01601, Київ, вул. Інститутська, 9 Розробник: ЗАТ "Софтлайн" (Україна)  
Довідка телефонів НБУ (38 044) 253-01-80, факс (38 044) 230-20-33, 253-77-50

Рисунок 2 – Офіційна сторінка НБУ

Отже ми бачимо, що крім інформації на сайті НБУ, також надається API сторінка для отримання інформації по курсам валют. Перейдемо і подивимося, рисунок 3.

API - набір готових класів, процедур, функцій, структур і констант, що надаються додатком або операційною системою для використання у зовнішніх програмних продуктах.

API сторінка офіційного курсу гривні щодо іноземних валют та банківських металів

Курс на поточну дату:

<http://bank.gov.ua/NBUStatService/v1/statdirectory/exchange> XML JSON

Курс на дату (задається у форматі YYYYMMDD):

<http://bank.gov.ua/NBUStatService/v1/statdirectory/exchange?date=YYYYMMDD> XML JSON

Курс на дату по валюті (код валюти літерний, реєстр значення не має):

<http://bank.gov.ua/NBUStatService/v1/statdirectory/exchange?valcode=EUR&date=YYYYMMDD> XML JSON

Рисунок 3 - API сторінка

Нас цікавить отримання інформації в форматі JSON, бо ми зможемо десеріалізувати цю інформації в об'єкт, який опишемо на C#. Подивимося на інформацію в форматі JSON, рисунок 4.

```
[{"r030":36,"txt":"Австралійський долар","rate":16.954317,"cc":"AUD"},
{"r030":124,"txt":"Канадський долар","rate":16.959699,"cc":"CAD"},{"r030":156,"txt":"Юань Женьміньбі",
"rate":3.727224,"cc":"CNY"},{"r030":203,"txt":"Чеська крона",
"rate":0.986976,"cc":"CZK"},{"r030":208,"txt":"Данська крона",
"rate":3.579194,"cc":"DKK"},{"r030":348,"txt":"Угорський форинт",
"rate":0.0849549,"cc":"HUF"},{"r030":352,"txt":"Ісландська крона",
"rate":0.188542,"cc":"ISK"},{"r030":392,"txt":"Японська ена",
"rate":0.2096172,"cc":"JPY"},{"r030":398,"txt":"Казахстанський тенге",
"rate":0.063987,"cc":"KZT"},{"r030":498,"txt":"Молдовський лей",
"rate":1.194382,"cc":"MDL"},{"r030":578,"txt":"Норвезька крона",
"rate":2.752829,"cc":"NOK"},{"r030":702,"txt":"Сінгапурський долар",
"rate":17.046283,"cc":"SGD"},{"r030":752,"txt":"Шведська крона",
"rate":2.856023,"cc":"SEK"},{"r030":756,"txt":"Швейцарський франк",
"rate":24.396316,"cc":"CHF"},{"r030":826,"txt":"Англійський фунт стерлінгіє",
"rate":34.608492,"cc":"GBP"},{"r030":840,"txt":"Долар США",
"rate":24.521735,"cc":"USD"},{"r030":860,"txt":"Узбецький сум",
"rate":0.008676,"cc":"UZS"},{"r030":959,"txt":"Золото",
"rate":26888.082,"cc":"XAU"}, {"r030":961,"txt":"Срібло",
"rate":343.55,"cc":"XAG"}, {"r030":962,"txt":"Платина",
"rate":20107.823,"cc":"XPT"}, {"r030":964,"txt":"Палладій",
"rate":11917.563,"cc":"XPD"}, {"r030":974,"txt":"Білоруський рубль",
"rate":0.00114,"cc":"BYR"}, {"r030":978,"txt":"Євро",
"rate":26.711526,"cc":"EUR"}, {"r030":643,"txt":"Російський рубль",
"rate":0.3086,"cc":"RUB"}, {"r030":944,"txt":"Азербайджанський манат",
"rate":15.299311,"cc":"AZN"}, {"r030":934,"txt":"Туркменський манат",
"rate":7.00621,"cc":"TMT"}, {"r030":949,"txt":"Турецька ліра",
"rate":8.070435,"cc":"TRY"}, {"r030":985,"txt":"Польський злотий",
"rate":5.943423,"cc":"PLN"}, {"r030":960,"txt":"Спеціальні права запозичення",
"rate":33.87958,"cc":"XDR"}]
```

Рисунок 4 - Інформація в форматі JSON

Коли все готово, можемо приступати до створення нашого проекту. У вікні майстра ми вибираємо шаблон Templates / Windows., а також тип проекту Class Library. Задаємо ім'я нашого проекту CurrencyRate і натискаємо кнопку OK, рисунок 5.

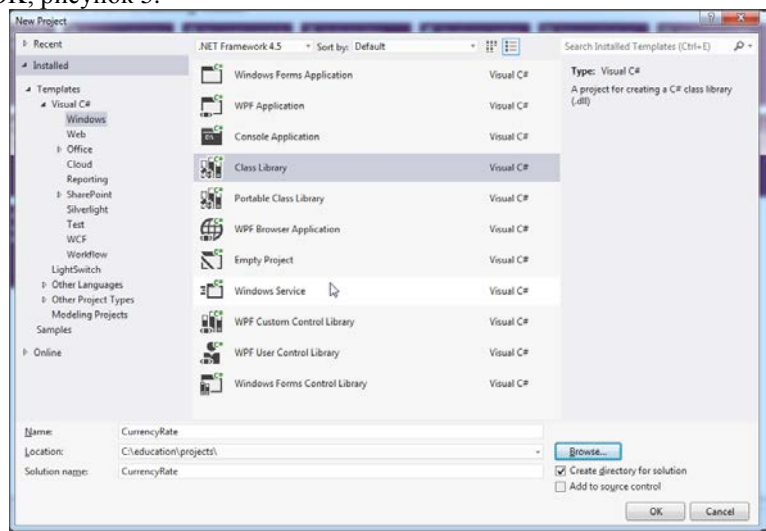


Рисунок 5 – Вікно майстра

Коли проект створений, ми повинні підключити необхідні нам бібліотеки, які ми попередньо завантажили. Для цього у вікні Solution Explorer на папці References натискаємо правою кнопкою миші і вибираємо пункт AddReference, рисунок 6. У вікні вибираємо вкладку Browse і додаємо наші бібліотеки, рисунок 7.

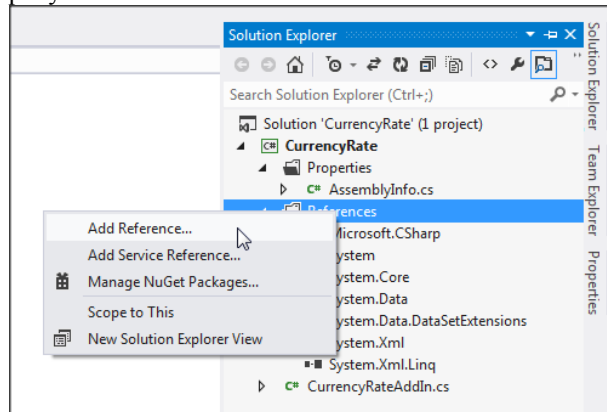


Рисунок 6 - Підключити необхідні бібліотеки

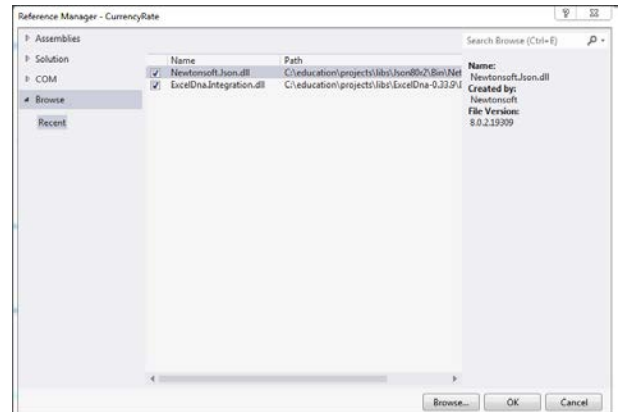


Рисунок 7 – Додати бібліотеки

Тепер приступимо до написання коду. Для початку опишемо клас Currency. Він представлятиме валюту, рисунок 8.

JsonProperty - це атрибут для управління серіалізацією і десеріалізацією об'єктів. В даному випадку, ми вказали в ньому параметр PropertyName - це ім'я параметра з рядка Json [3]. Подивимося на наш рядок курсу валюти:

```
{ "R030": 36, "txt": "Австралійський долар", "rate": 16.954317, "cc": "AUD" }
```

Коли об'єкт Currency у нас описаний, нам необхідно створити об'єкт, який буде керувати валютами. Назвемо його CurrencyManager. Його реалізацію представлено на рисунках 8-9.

```
CurrencyManager.cs Currency.cs CurrencyRateAddIn.cs
CurrencyRate.Currency
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using Newtonsoft.Json;

namespace CurrencyRate
{
    internal class Currency
    {
        [JsonProperty(PropertyName = "r030")]
        internal int Order { get; set; }
        [JsonProperty(PropertyName = "txt")]
        internal string Name { get; set; }
        [JsonProperty(PropertyName = "rate")]
        internal double Rate { get; set; }
        [JsonProperty(PropertyName = "cc")]
        internal string Code { get; set; }
    }
}
```

Рисунок 8 - Клас Currency

```
CurrencyManager.cs Currency.cs CurrencyRateAddIn.cs
CurrencyRate.CurrencyManager
using System.Net;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using Newtonsoft.Json;

namespace CurrencyRate
{
    internal class CurrencyManager
    {
        private List<Currency> currencyList;
        private const string address = @"http://mbul.bank.gov.ua/MBUStatService/v1/stadirectory/exchangeRate=@{&lang=en}";
        private WebClient webClient;

        internal CurrencyManager()
        {
            currencyList = new List<Currency>();
            webClient = new WebClient();
            webClient.Proxy = null;
            webClient.Encoding = System.Text.Encoding.GetEncoding("utf-8");
        }

        internal bool LoadRates()
        {
            try
            {
                string httpAddress = string.Format(address, DateTime.Now.ToString("yyyyMMd"));
                string data = string.Empty;
                while (true)
                {
                    data = webClient.DownloadString(httpAddress);
                    if (string.IsNullOrEmpty(data) || data == "[*]")
                    {
                        httpAddress = string.Format(address, DateTime.Now.AddDays(-1).ToString("yyyyMMd"));
                        continue;
                    }
                    else
                    {
                        break;
                    }
                }
                currencyList = JsonConvert.DeserializeObject<List<Currency>>(data);
                return true;
            }
            catch (Exception ex)
            {
                System.Windows.Forms.MessageBox.Show(ex.Message);
                return false;
            }
        }

        internal List<Currency> Currencies { get { return currencyList; } }
    }
}
```

Рисунок 9 – Реалізація об'єкту CurrencyManager

Пишемо нашу функцію. Назвемо її CurrencyRate - вона буде приймати один строковий параметр currencyCode - код валюти наприклад USD або EUR. Реалізація, представлена на рисунку 10.

```
CurrencyManager.cs Currency.cs CurrencyRateAddIn.cs
CurrencyRate.CurrencyRateAddIn
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.InteropServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using ExcelDna.Integration;

namespace CurrencyRate
{
    public class CurrencyRateAddIn
    {
        [ExcelFunction(Description = "Об'єднаний курс гривні щодо іноземних валют.")]
        public static double CurrencyRate(string currencyCode)
        {
            CurrencyManager cm = new CurrencyManager();
            if (cm.LoadRates())
            {
                Currency cr = cm.Currencies.Where(c => c.Code == currencyCode).FirstOrDefault();
                if (cr == null)
                    return 0.0;
                return cr.Rate;
            }
            return 0.0;
        }
    }
}
```

Рисунок 10 – Реалізація функції CurrencyRate

Як бачимо у нашого методу є атрибут ExcelFunction з параметром Description. Далі необхідно створити файл CurrencyRate.dna. Це файл в xml форматі, де вказуємо, яку саме зовнішню бібліотеку необхідно завантажити. Вміст файлу CurrencyRate.dna, представлено на рисунку 11.

```
CurrencyRateAddIn.dna CurrencyManager.cs Currency.cs Curren
<DnaLibrary Name="CurrencyRate Add-In" RuntimeVersion="v4.0">
  <ExternalLibrary Path="CurrencyRate.dll" />
</DnaLibrary>
```

Рисунок 11– Вміст файлу CurrencyRate.dna

Також, потрібно додати файл \*.xll, який поставляється разом в бібліотекою ExcelDNA.Integration.dll. Далі налаштуємо наш проект на налагодження. Для цього перейдемо у властивості проекту та відкриємо вкладку Debug. Необхідно вказати, що будемо використовувати зовнішню програму і в поле

введення вкажемо шлях до Excel.exe. І в поле Command line arguments необхідно вказати шлях до нашого CurrencyRate.xll. На рисунку 12 показана вкладка Debug вікна властивостей проекту.

Тепер можна запустити наш проект на налагодження і перевірити роботу модулю розширення керування макросами для Microsoft Excel. Після завантаження Microsoft Excel відкриємо вікно формул і знайдемо нашу функцію, рисунок 13.

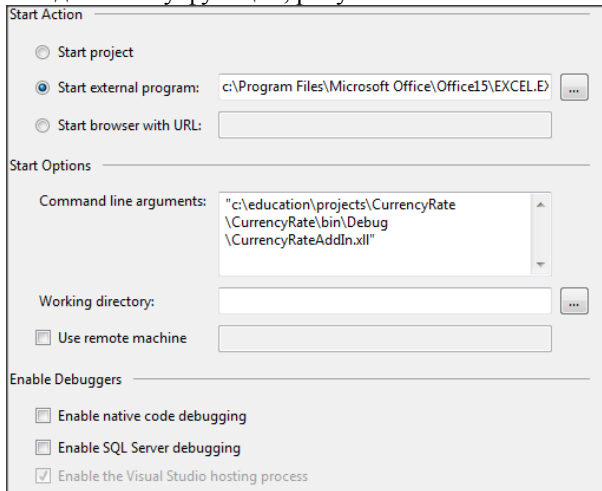


Рисунок 12 - Вкладка Debug вікна властивостей проекту

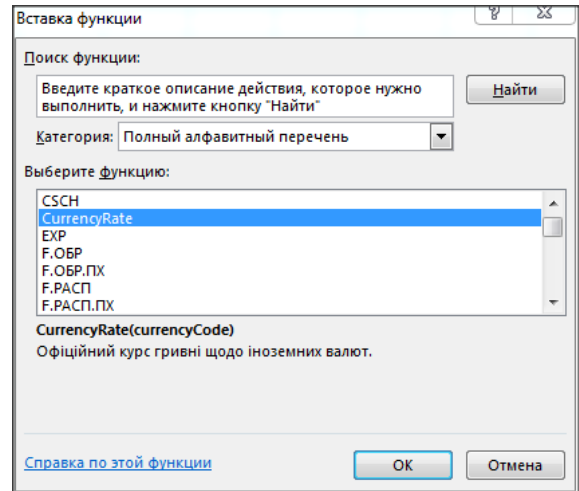


Рисунок 13 - Запуск проекту на налагодження та перевірку роботи

Як бачимо на рисунку 14, в списку формул є наша функція і нижче відображається інформація, яку ми вказали в параметрі Description атрибута ExcelFunction [4]. Отже вибираємо нашу формулу і вказуємо в якості параметра код валюти. У нашому випадку це USD і натиснемо кнопку ОК.

В результаті отримали поточний курс валюти в осередку. Результат роботи модулю розширення керування макросами для Microsoft Excel, представлено на рисунку 15.

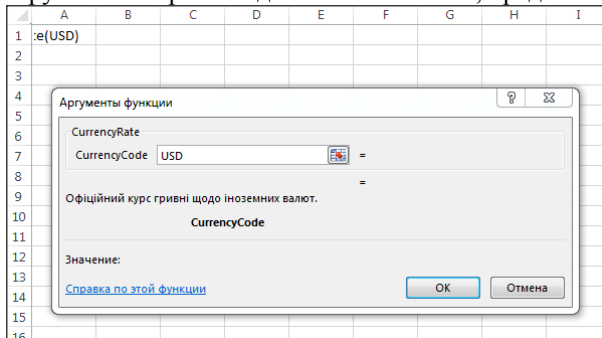


Рисунок 14

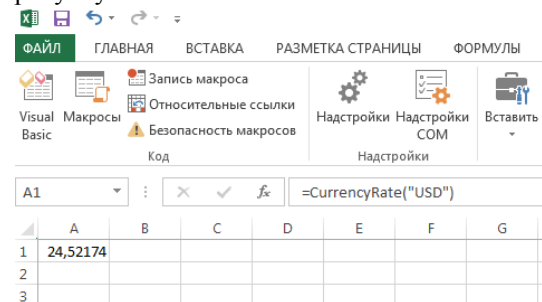


Рисунок 15 – Результат роботи модулю розширення керування макросами для Microsoft Excel

### Висновки

В результаті виконання роботи було розроблено модуль розширення керування макросами для Microsoft Excel засобами C#, який дозволяє запускати макроси з використанням вхідних параметрів та керувати переліком макросів, які знаходяться в документі.

### Список використаної літератури

1. Уокенбах Д. Excel 2013: профессиональное программирование на VBA. - М.: «Диалектика», 2014. — 960 с.
2. Харвей Г. Microsoft Excel 2013 для чайников. - М.: «Диалектика», 2013. — 368 с.
3. Посилання в мережі Інтернет: <http://json.org/json-ru.html>
4. Буллен С., Боуви Р., Грин Д. Excel и VBA: Профессиональная разработка приложений. – Вильямс,–; 2007. – 736 стр., с ил.

УДК 515.2:528.71

О.В. РЕУТА

Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара

### АЛГОРИТМ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ФОРМИ ПРОСТОРОВОГО ОБ'ЄКТА, ПОДАНОГО ЙОГО МАТРИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ

*Запропоновано алгоритм візуалізації просторового тіла за його дискретною матричною моделлю, який передбачає побудову проміжної воксельної моделі поверхні тіла і визначення на її основі полігональної сітки з трикутними гранями. Алгоритм використовує підхід Marching cubes з наступними відмінностями: розглядаються тільки вокселі поверхні, фрагмент полігональної сітки для подання вокселя визначається станом його граней, а не вершин, що зменшує обсяг обчислень і усуває певні види неоднозначності.*

*Ключові слова: геометрична форма, візуалізація, матрична модель, воксельна модель, поверхня просторового об'єкту, алгоритм Marching cubes, полігональна сітка*

А.В. РЕУТА

Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара

### АЛГОРИТМ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ФОРМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБЪЕКТА, ПРЕДСТАВЛЕННОГО ЕГО МАТРИЧНОЙ МОДЕЛЬЮ

*Предложен алгоритм визуализации пространственного тела по его дискретной матричной модели, подразумевающий построение промежуточной воксельной модели поверхности тела и определение на ее основе полигональной сетки с треугольными гранями. Алгоритм использует подход Marching cubes со следующими отличиями: рассматриваются только воксели поверхности, фрагмент полигональной сетки для представления вокселя определяется состоянием его граней, а не вершин, что уменьшает объем вычислений и устраняет определенные виды неоднозначности.*

*Ключевые слова: форма, визуализация, матричная модель, воксельная модель, поверхность пространственного объекта, алгоритм Marching cubes, полигональная сетка*

O.V. REUTA

Dnipropetrovsk National University of Oles Honchar

### ALGORITHM OF SHAPE VISUALIZATION OF 3D OBJECT PRESENTED BY ITS MATRIX MODEL

*An algorithm of a space body visualization on base of its matrix model is proposed. The algorithm uses a triangular mesh built from an intermediate voxel model of the body surface. The algorithm uses the Marching cubes approach with the following differences: it considers only voxels of the body surface, fragment of the triangular mesh presented the voxel based on the state of voxel faces, not vertices. The proposed algorithm reduces the total amount of computation and eliminates certain kinds of ambiguity.*

*Keywords: shape, visualization, matrix model, voxel model, surface of the space body, Marching cubes algorithm, triangular mesh*

#### Постановка проблеми

Розв'язання загальної проблеми ідентифікації просторових об'єктів за їх фотограмметричними зображеннями (ФЗ) передбачає побудову (синтез) еталонних моделей об'єктів, ідентифікація яких включає реконструкцію моделі досліджуваного об'єкту за ФЗ, співставлення реконструйованої моделі з еталонними для визначення множини кандидатів, синтез зображень моделей-кандидатів і співставлення синтезованого зображення з вихідним ФЗ та прийняття рішення про результат ідентифікації. Для матричних моделей, які складають основу зазначеного підходу [1], на даний час відсутні процедури їх візуалізації, що унеможлиблює реалізацію останніх двох етапів запропонованої схеми.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним з перших і найпоширеніших в наш час алгоритмів візуалізації даних, що використовує воксельні моделі, є Marching cubes [2], який знайшов широке застосування в медичній діагностиці, зокрема, в комп'ютерній, магніто-резонансній та позитрон-емісійній томографії. Хоча цей алгоритм допускає певні невизначеності в побудові поверхні досліджуваного об'єкта, але існують модифікації, які розв'язують дану проблему [3]. Крім того, якість візуалізації може бути підвищена шляхом інтерполяції поверхні в об'ємі вокселя не трикутними полігонами, як в оригінальному варіанті, а кусками поверхонь другого порядку [4].

Незважаючи на широкі можливості алгоритму Marching cubes і його модифікацій, він оперує інформацією, яка є надлишковою для подання поверхні досліджуваного об'єкту, і не враховує особливостей вихідних даних, за якими будується його матрична модель.

**Мета дослідження**

Слід розробити алгоритм візуалізації просторового об'єкту за його матричною моделлю, який би враховував особливості подання поверхні об'єкта в дискретній формі.

**Основна частина**

Матрична модель (ММ) просторового об'єкта є ефективним способом опису його геометричної форми для задач аналізу і реконструкції [1]. ММ будується на основі габаритного контейнера (ГК) і співвідноситься з воксельною моделлю (ВМ) об'єкта, як показано на рис. 1, а. Вона складається з шести матриць рельєфу  $M_p, p = \overline{0,5}$  (далі просто "матриць"). На рис. 1, б показані їх фрагменти та порядок формування індексів. Значеннями елементів матриць є відстані між відповідними гранями вокселів ВМ і поверхнею ГК [1]. Далі розглядаються лише воксели у формі прямокутного паралелепіпеда, орієнтація граней  $F_p, p = \overline{0,5}$  окремого воксела співпадає з орієнтацією граней ГК і показана на рис. 1, в.

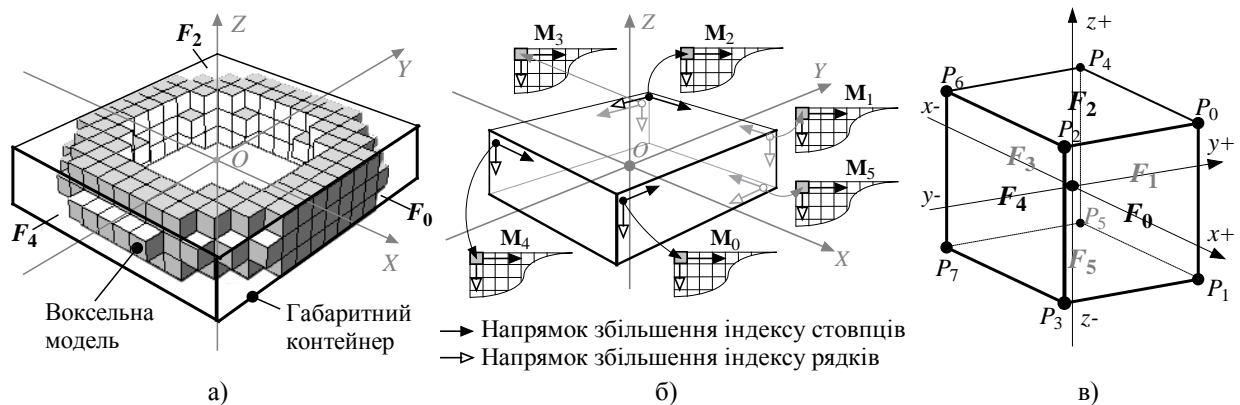


Рис. 1. Співвідношення ВМ просторового об'єкта та його ММ

Введемо наступні визначення. Вважаємо, що грань воксела *відкрита*, якщо вона належить тільки йому і не поділяється з будь-яким сусіднім вокселем. Наявність відкритих граней у воксела зумовлює те, що для нього існує подання принаймні на одній матриці ММ у вигляді її елемента. Воксели без відкритих граней не належать поверхні об'єкта і тому ігноруються ММ.

Оскільки для визначення воксела у просторі достатньо тільки однієї матриці ММ з відповідним йому елементом, то має місце певна надмірність інформації у матричному поданні просторового об'єкта, яка, однак, загалом не робить ММ менш економічною у порівнянні з ВМ [5]. Надалі воксели, подані більш ніж на одній матриці ММ, назвемо *надлишковими*, на відміну від *базових*, для визначення яких в ММ мається тільки одна матриця.

Як приклад, на рис. 2 показаний фрагмент ВМ тора (рис. 1, а), на якому темним кольором виділені воксели, положення яких може бути визначене за матрицею  $M_0$  (рис. 2, а), одночасно за матрицями  $M_0$  і  $M_4$  (рис. 2, б), одночасно за матрицями  $M_0, M_4$  і  $M_2$  (рис. 2, в) та одночасно матрицями  $M_0, M_4, M_2$  і  $M_3$  (рис. 2, г). Видно, що, як і зазначалося, для кожного з виділених вокселів кількість матриць, за якими може бути визначене його положення у просторі, зумовлюється кількістю відкритих граней.

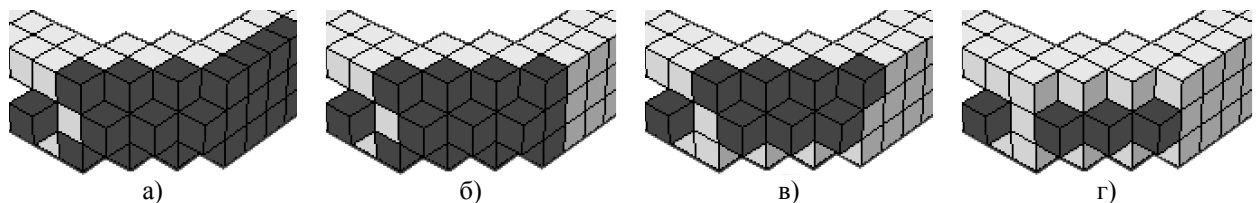


Рис. 2. Фрагмент воксельної моделі тора із надлишковими вокселями

Якщо мірою надлишковості воксела вважати число на 1 менше за кількість матриць, за якими він визначається, або його відкритих граней, то воксели, виділені на рис. 2, г мають надлишковість 3, на рис. 2, в до них додалися воксели з надлишковістю 2, а на рис. 2, б — ще й ті, що мають надлишковість 1. На рис. 2, а, до всіх зазначених додалися ще базові воксели, положення яких визначається тільки за  $M_0$ .



Врахування надлишковості вокселів дає можливість вилучити з аналізу певні елементи матриць, скорочуючи тим самим час реконструкції форми об'єкту.

Розглянемо процес візуалізації просторового об'єкту, поданого своєю ММ. В основу його покладено підхід, запропонований в алгоритмі Marching cubes (MC), перевагами якого є незалежна обробка кожного елемента моделі об'єкта, простота створення полігональної сітки з трикутних граней для подання його поверхні, а також наявність ефективних реалізацій [2 – 4].

Процес передбачає наступні кроки.

1°. Вибір матриці ММ.

2°. Вибір елемента обраної матриці.

3°. Визначення вокселя, що відповідає обраному елементу.

4°. Визначення стану граней вокселя: відкрита або закрита.

5°. Визначення елементів інших матриць, що подають розглянутий воксель, і вилучення їх з подальшого розгляду.

6°. Створення індексу на основі комбінації станів граней вокселя.

7°. Вибір із таблиці варіантів за отриманим індексом конфігурації, яка співставляє вокселю фрагмент полігональної сітки, складеної з трикутних граней.

8°. Вибір наступного елемента обраної матриці і виконання для нього кроків 3° – 7°, поки всі елементи обраної матриці не будуть оглянуті.

9°. Вибір наступної матриці і виконання для неї кроків 2° – 8°, поки всі матриці ММ не будуть оглянуті.

10°. Визначення поверхні просторового тіла шляхом об'єднання отриманих на попередніх кроках фрагментів сітки.

Розглянемо кроки запропонованого алгоритму більш детально.

Вибір матриці, як і вибір елемента в матриці, (кроки 1° і 2°, відповідно) виконується в порядку зростання відповідних індексів  $p$  — для матриць,  $i, j$  — для їх елементів. Діапазони зміни індексів  $i$  та  $j$  залежать від розмірності обраної на даному кроці матриці і визначаються нижче (див. також табл. 1).

Розглянемо, яким чином здійснюється визначення координат вокселя, що відповідає певному елементу ММ (крок 3°). Зазначимо, що в роботі [6] розв'язується обернена задача, коли за координатами точки простору  $(x, y, z)$  визначаються індекси матриці ММ. ГК є паралелепіпедом, що визначається площинами

$$x = X_{\min}, x = X_{\max}, y = Y_{\min}, y = Y_{\max}, z = Z_{\min}, z = Z_{\max}. \quad (1)$$

Кожний воксель визначається координатами центру  $(x_c, y_c, z_c)$  і має лінійні розміри вздовж відповідних осей координат  $\Delta_x, \Delta_y$  і  $\Delta_z$ . Координати його вершин є комбінаціями виразів:

$$x_c \pm \Delta_x/2, y_c \pm \Delta_y/2, z_c \pm \Delta_z/2. \quad (2)$$

Відповідно до цього, розмірності матриць ММ визначаються як:

$$N = (X_{\max} - X_{\min})/\Delta_x, M = (Y_{\max} - Y_{\min})/\Delta_y \text{ і } K = (Z_{\max} - Z_{\min})/\Delta_z. \quad (3)$$

Елементи матриць ММ задають положення вокселів ВМ у просторі (рис. 1). Співвідношення, які дозволяють за певним елементом  $m_p[i, j]$  матриці  $\mathbf{M}_p, p = \overline{0, 5}$  визначити положення відповідного вокселя  $v(x_c, y_c, z_c)$ , наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Визначення координат  $(x_c, y_c, z_c)$  вокселя  $v$  за елементом  $m_p[i, j]$  матриці  $\mathbf{M}_p$

Матриця	Розмірність матриці	Координати вокселя $v$		
		$x_c$	$y_c$	$z_c$
$\mathbf{M}_0$	$K \times M$	$X_{\max} - (m_0[i, j] + 1/2)\Delta_x$	$Y_{\min} + (j + 1/2)\Delta_y$	$Z_{\max} - (i + 1/2)\Delta_z$
$\mathbf{M}_1$	$K \times N$	$X_{\max} - (j + 1/2)\Delta_x$	$Y_{\max} - (m_1[i, j] + 1/2)\Delta_y$	$Z_{\max} - (j + 1/2)\Delta_z$
$\mathbf{M}_2$	$M \times N$	$X_{\min} + (j + 1/2)\Delta_x$	$Y_{\max} - (j + 1/2)\Delta_y$	$Z_{\max} - (m_2[i, j] + 1/2)\Delta_z$
$\mathbf{M}_3$	$K \times M$	$X_{\min} + (m_3[i, j] + 1/2)\Delta_x$	$Y_{\max} - (j + 1/2)\Delta_y$	$Z_{\max} - (i + 1/2)\Delta_z$
$\mathbf{M}_4$	$K \times N$	$X_{\min} + (j + 1/2)\Delta_x$	$Y_{\min} + (m_4[i, j] + 1/2)\Delta_y$	$Z_{\max} - (i + 1/2)\Delta_z$
$\mathbf{M}_5$	$M \times N$	$X_{\max} - (j + 1/2)\Delta_x$	$Y_{\max} - (i + 1/2)\Delta_y$	$Z_{\min} + (m_5[i, j] + 1/2)\Delta_z$

Визначення стану граней вокселя (крок 4°) здійснюється шляхом аналізу оточення відповідного елемента матриці. Мета аналізу — з'ясувати, чи є воксель базовим і якщо ні, то які його грані є відкритими.

Факт того, що елемент матриці визначає базовий воксель, встановлюється за виконання умов:

$$\begin{aligned} m_p[i, j] &\geq m_p[i, j + 1], \\ m_p[i, j] &\geq m_p[i, j - 1], \\ m_p[i, j] &\geq m_p[i + 1, j], \\ m_p[i, j] &\geq m_p[i - 1, j], \end{aligned} \tag{4}$$

де  $p = \overline{0, 5}$ ;  $i = \overline{1, K}$  і  $j = \overline{1, M}$  для  $p = 0$  або  $p = 3$ ;  $i = \overline{1, K}$  і  $j = \overline{1, N}$  для  $p = 1$  або  $p = 4$ ;  $i = \overline{1, M}$  і  $j = \overline{1, N}$  для  $p = 2$  або  $p = 5$ .

А також умов, записаних окремо для кожного значення  $p = \overline{0, 5}$ :

$$\begin{aligned} \text{для } p = 0: & m_0[i, j] < N - m_3[i, M - j - 1], \text{ де } i = \overline{1, K} \text{ і } j = \overline{1, M}, \\ \text{для } p = 1: & m_1[i, j] < M - m_4[i, N - j - 1], \text{ де } i = \overline{1, K} \text{ і } j = \overline{1, N}, \\ \text{для } p = 2: & m_2[i, j] < K - m_5[i, N - j - 1], \text{ де } i = \overline{1, M} \text{ і } j = \overline{1, N}, \\ \text{для } p = 3: & m_3[i, j] < N - m_0[i, M - j - 1], \text{ де } i = \overline{1, K} \text{ і } j = \overline{1, M}, \\ \text{для } p = 4: & m_4[i, j] < M - m_1[i, N - j - 1], \text{ де } i = \overline{1, K} \text{ і } j = \overline{1, N}, \\ \text{для } p = 5: & m_5[i, j] < K - m_2[i, N - j - 1], \text{ де } i = \overline{1, M} \text{ і } j = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{5}$$

Зазначимо, що умови (4) для кожного  $p = \overline{0, 5}$  можуть виконуватись або не виконуватись незалежно одна від одної і невиконання будь-якої з них додає вокселю, що визначається елементом  $m_p[i, j]$ , ще одну відкриту грань, *суміжну* до грані  $F_p$ . Якщо не виконується умова (5), тобто відповідна нерівність перетворюється на рівність (інший випадок означає порушення цілісності ВМ [7]), тоді воксель має відкриту грань *протилежну* до грані  $F_p$ .

Як було зазначено, один і той самий воксель може бути визначений за двома і більше матрицями (рис. 2). Тому, щоб запобігти дублюванню вокселя при його визначенні за однією з матриць, слід проаналізувати інші матриці, і ті їх елементи, які так само визначають даний воксель, виключити з подальшого розгляду (крок 5°). Розглянемо цю процедуру детальніше.

Якщо через порушення будь-якої з умов (4) або (5) встановлено, що воксель не базовий, то слід з'ясувати, чи є він надлишковим, тобто які елементи яких матриць також визначають його, крім елемента, що розглядається на даний момент. Такі елементи, якщо вони будуть знайдені, необхідно вилучити з подальшого розгляду, наприклад, помітивши їх у відповідних матрицях як оглянуті.

Для визначення того, чи є не базовий воксель надлишковим, змінимо умови (4) наступним чином:

$$\begin{aligned} m_p[i, j] &> m_p[i, j + k], \\ m_p[i, j] &> m_p[i, j - k], \\ m_p[i, j] &> m_p[i + k, j], \\ m_p[i, j] &> m_p[i - k, j], \end{aligned} \tag{6}$$

де  $k > 0$ .

Тоді воксель, визначений за елементом  $m_p[i, j]$ , буде надлишковим, якщо при невиконанні першої умови (4) перша нерівність (6) виконується для всіх  $k = \overline{1, \aleph_p}$ , де  $\aleph_0 = \aleph_3 = M$ ,  $\aleph_1 = \aleph_2 = \aleph_4 = \aleph_5 = N$ ; при невиконанні другої умови (4) друга нерівність (6) виконується для всіх  $k = \overline{1, j}$ ; при невиконанні третьої умови (4) третя нерівність (6) виконується для всіх  $k = \overline{1, \aleph_p}$ , де  $\aleph_0 = \aleph_1 = \aleph_3 = \aleph_4 = K$ ,  $\aleph_2 = \aleph_5 = M$ ; а при невиконанні останньої умови (4) остання нерівність (6) виконується для всіх  $k = \overline{1, i}$ .

Значення  $p$ , для якого за порушення певної умови (4) виконується відповідна їй нерівність (6), дає можливість не тільки визначити матрицю з надлишковою інформацією про воксель, що розглядається, а й

з'ясувати, який саме її елемент цю інформацію містить. Нижче вказані такі елементи, визначені за елементом  $m_p[i, j]$  для певного  $p$  при невиконанні умов (4), відповідно:

- при  $p = 0$ :  $m_1[i, m_0[i, j]]$ ,  $m_4[i, N - m_0[i, j] - 1]$ ,  $m_5[M - j - 1, m_0[i, j]]$  та  $m_2[M - j - 1, N - m_0[i, j] - 1]$ ;
- при  $p = 1$ :  $m_3[i, m_1[i, j]]$ ,  $m_0[i, M - m_1[i, j] - 1]$ ,  $m_5[m_1[i, j], j]$  та  $m_2[m_1[i, j], N - j - 1]$ ;
- при  $p = 2$ :  $m_0[m_2[i, j], M - i - 1]$ ,  $m_3[m_2[i, j], i]$ ,  $m_4[i, m_2[i, j]]$  та  $m_1[m_2[i, j], N - j - 1]$ ;
- при  $p = 3$ :  $m_4[i, m_3[i, j]]$ ,  $m_1[i, N - m_3[i, j] - 1]$ ,  $m_5[j, N - m_3[i, j] - 1]$  та  $m_2[j, m_3[i, j]]$ ;
- при  $p = 4$ :  $m_0[i, m_4[i, j]]$ ,  $m_3[i, M - m_4[i, j] - 1]$ ,  $m_5[M - m_4[i, j] - 1, N - j - 1]$  та  $m_2[M - m_4[i, j] - 1, j]$ ;
- при  $p = 5$ :  $m_3[K - m_5[i, j] - 1, i]$ ,  $m_0[K - m_5[i, j] - 1, M - i - 1]$ ,  $m_4[N - i - 1, K - m_2[i, j] - 1]$  та  $m_1[K - m_5[i, j] - 1, j]$ .

Як зазначалось, елементи, що містять надлишкову інформацію, мають бути виключені з подальшого розгляду як для заощадження ресурсів процесу аналізу, так і для запобігання дублюванню вокселів.

Коли стани граней вокселя визначені (крок 4°), з'являється можливість створення індексу (крок 6°), який дасть можливість вибрати варіант подання вокселя фрагментом полігональної сітки, складеної з трикутних граней. Цей крок є модифікацією такого в алгоритмі МС. Основна відмінність полягає в тому, що в оригінальному алгоритмі аналізується стан вершин вокселя (стан вершини означає, чи належить вершина внутрішній чи зовнішній області, тобто розташована в межах просторового об'єкта чи ні), що дає  $2^8 = 256$  варіантів конфігурацій полігональної сітки, з яких з урахуванням симетрії залишено тільки 15 випадків (cases — в термінології МС) [2, 3]. В алгоритмі, що пропонується, враховується стан граней вокселя, що в загальному випадку зумовлює  $2^6 = 64$  варіантів. Між тим, оскільки ММ просторового об'єкта за самим способом своєї побудови визначає лише зв'язну ВМ, то принаймні одна грань кожного вокселя має бути закритою. Таким чином, лише 5 граней можуть бути відкритими, що зменшує загальну кількість варіантів до  $2^5 = 32$ , а з урахуванням симетрії їх лишається лише 8 (що майже вдвічі менше, ніж в алгоритмі МС). Ці варіанти разом з прикладами відкритих граней показані на рис. 3 (грані позначені за рис. 1, в).

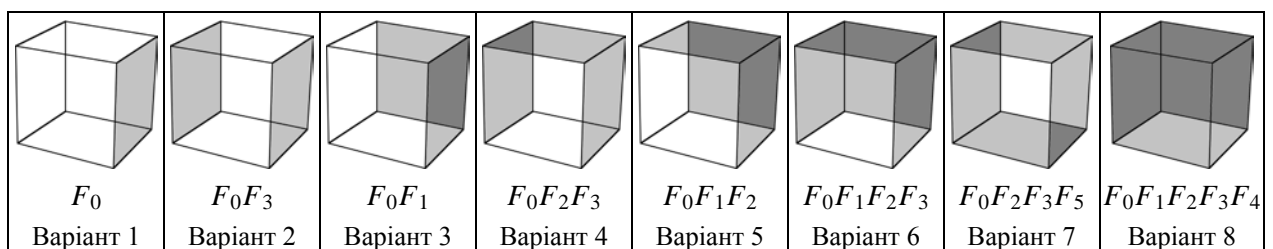


Рис. 3. Відкриті грані вокселя (виділені темним): можливі варіанти з урахуванням симетрії

Таким чином, значення індексу обирається із діапазону 1 – 8, в залежності від варіанту розташування відкритих граней у вокселя, що розглядається.

Наступний крок (крок 7°) передбачає вибір конфігурації трикутних граней полігональної сітки, що подає фрагмент поверхні, якій відповідає даний воксель.

Алгоритм МС пропонує випадки 0 – 2, 8 та 9 (рис. 4) як найближчі аналоги для варіантів, що виникають в алгоритмі, що розглядається (рис. 3). На рис. 4 для випадків 1 та 9 грані полігональної сітки показані під різними кутами: спершу (лівіше) так, що вони повністю відповідають певному варіанту розташування відкритих граней, показаному на рис. 3, а потім (правіше) більш наочно. Ліве зображення випадку 8 на рис. 4 відповідає варіанту 2 (рис. 3), а праве — варіанту 8 (рис. 3).

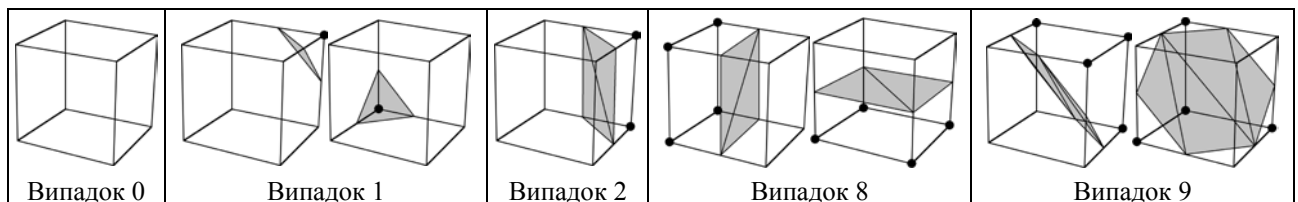


Рис. 4. Конфігурації фрагментів полігональної сітки в алгоритмі Marching cubes, "найближчі" до варіантів запропонованого алгоритму (рис. 3)

Загалом можна зазначити, що у варіантах 2, 4, 6 – 8 (рис. 3) всі вершини вокселя належать відкритим граням. В алгоритмі МС всім їм відповідає один випадок 0 (рис. 4). Варіант 5 на рис. 3 з точки зору алгоритму МС можна інтерпретувати двома випадками 1 і 9 (рис. 4). Варіанту 1 (рис. 3) відповідає

випадок 8 (рис. 4) алгоритму МС. Так само можна трактувати і варіант 8 (рис. 3), хоча, як зазначалось вище, йому також підходить випадок 0 (рис. 4). Однозначно інтерпретується тільки варіант 3 (рис. 3) — йому відповідає випадок 2 (рис. 4) алгоритму МС. Таким чином, можна констатувати, що схема візуалізації, прийнята в алгоритмі МС, не відповідає вимогам запропонованого підходу і має бути змінена.

Пропонується скористатися конфігураціями полігональної сітки, показаними на рис. 5, які однозначно відповідають варіантам конфігурацій відкритих граней (рис. 3).

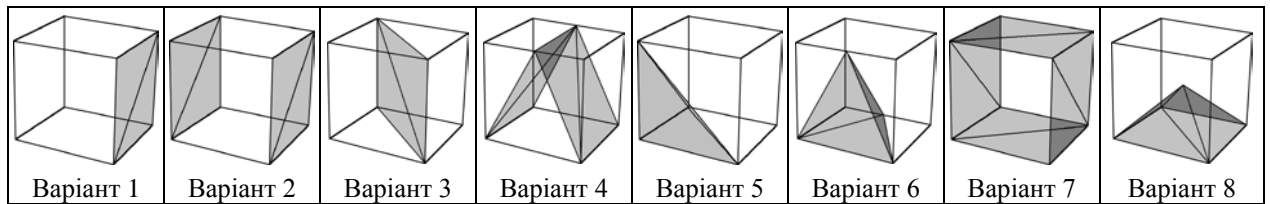


Рис. 5. Варіанти конфігурацій фрагментів полігональної сітки для подання вокселів з відкритими гранями (рис. 3)

Безпосереднє використання запропонованих конфігурацій (рис. 5) може викликати зміни в станах граней вокселів, що оточують воксель, який замінюється конфігурацією. Це відбувається для тих варіантів, в яких присутня хоч одна закрита грань вокселя, яка при заміні вокселя фрагментом полігональної сітки перетинається ребром її трикутної грані. Така грань стає *частково відкритою*, при тому що інші грані свого стану не змінюють. Порівнюючи рис. 3 і 5, визначимо такі варіанти і їх закриті грані, що стають частково відкритими: варіант 3 — грані  $F_2$ ,  $F_5$ ; варіант 4 — грані  $F_1$ ,  $F_4$ ; варіант 5 — грані  $F_5$ ,  $F_4$  і варіант 6 — грань  $F_4$ . Для цих варіантів слід переглянути сусідні вокселі, що розділяють зазначені грані, і, оновивши їх стан, вибрати інший варіант конфігурації відкритих граней, включивши в їх перелік грані, що стали частково відкритими.

Кроки  $8^\circ$  і  $9^\circ$  запропонованого алгоритму очевидні, крок  $10^\circ$  вимагає додаткових пояснень.

Множина вокселів, що вибираються на кроці  $3^\circ$ , утворює ВМ поверхні просторового об'єкта. Заміна їх відповідними фрагментами полігональної сітки (крок  $7^\circ$ ) автоматично призводить до появи каркасної моделі об'єкта у вигляді полігональної сітки з трикутними гранями, що і є результатом роботи алгоритму. При цьому зауважимо, що кількість вершин сітки, які слід визначити шляхом обчислення, суттєво менша, ніж в сітці, побудованій за алгоритмом МС. Це пов'язане із тим, що останній призначений для побудови ізометричної поверхні, яка не може включати вершини вокселів, і, таким чином, кожна вершина сітки повинна окремо *розраховуватись* (рис. 4). В той же час, запропонований алгоритм такого обмеження не має і більшість вершин сітки в ньому *обирається* з наперед визначених вершин вокселів (2). Так, з усіх вершин трикутних граней (рис. 5) тільки 5 з 43 (що складає 11,6%) вимагають окремого обчислення.

#### Висновки

Запропонований алгоритм візуалізації, розв'язуючи поставлену задачу, має наступні переваги, порівняно з відомими алгоритмами на основі МС: враховується факт візуалізації поверхні, що зменшує обсяг проміжних даних; усуваються неоднозначності; скорочується процес обчислень.

#### Список використаної літератури

1. Реута О.В. Матрична дискретна модель тривимірного тіла для задачі аналізу його тінеутворення / О.В. Реута // Геометричне та комп'ютерне моделювання.—Х.: ХДУХТ, 2009. — Вип. 25. —С.68–72.
2. Lorensen W.E. Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm / W.E. Lorensen, H.E. Cline // SIGGRAPH. — 1987. — Vol. 21(4). — P. 163—169.
3. Charles D. Hansen. The Visualization Handbook / Charles D. Hansen, Chris R. Johnson. — Elsevier Inc., 2005. — 982 p.
4. Lopes and K. Brodlie. Improving the robustness and accuracy of the marching cubes algorithm for isosurfacing / Lopes and K. Brodlie // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. — 2003. — Vol. 9. — № 1. — P. 16—29,
5. Реута О.В. Порівняння матричної і воксельної моделей тривимірного тіла для задач його реконструкції / О.В. Реута // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КНУБА, 2009. — Вип. 82. — С. 203—207.
6. Реута О.В. Взаємозв'язок між матричною моделлю тривимірного об'єкта та моделлю на основі R-функцій / О.В. Реута // Праці Таврійського державного агротехнічного університету. Прикладна геометрія та інженерна графіка — Мелітополь: ТДАТУ, 2010. — Вип. 4. — Т. 46. — С. 99—104.
7. Реута О.В. Контроль і відновлення цілісності дискретних моделей тривимірних об'єктів в задачах реконструкції форми / О.В. Реута // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КНУБА, 2011. — Вип. 88. — С. 278—282.

УДК 004.925.4

О.Н. РОМАНЮК, О.О. ДУДНИК  
Вінницький національний технічний університет**ПІДВИЩЕННЯ РЕАЛІСТИЧНОСТІ ЗАФАРБОВУВАННЯ ТРИВИМІРНИХ  
ГРАФІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

*Запропоновано метод підвищення реалістичності зафарбовування тривимірних об'єктів методом Фонга з урахуванням положення спостерігача. Метод дозволяє більш точно визначати інтенсивність кольорів пікселів на екрані.*

*Ключові слова: зафарбовування Фонга, пастеризація полігонів*

А.Н. РОМАНЮК, А.А. ДУДНИК  
Вінницький національний технічний університет**ПОВЫШЕНИЕ РЕАЛИСТИЧНОСТИ ЗАКРАСКИ ТРЕХМЕРНЫХ ГРАФИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

*Предложен метод повышения реалистичности закраски трехмерных объектов методом Фонга с учетом положения наблюдателя. Метод позволяет более точно определять интенсивность цветов пикселей на экране.*

*Ключевые слова: закраска Фонга, растеризация полигонов*

O.N. ROMANIUK, O.O. DUDNYK  
Vinnytsia National Technical University**IMPROVING REALISTIC OF THREE-DIMENSIONAL GRAPHICAL OBJECTS SHADING**

*A method for improving the quality of three-dimensional objects by Phong shading based in perspective. The method allows to determine more accurately the intensity of the colors of pixels on the screen.*

*Keywords: Phong shading, rasterization of polygons*

**Постановка проблеми**

Формування високореалістичних зображень є актуальною задачею комп'ютерної графіки, оскільки стрімкий розвиток обчислювальної техніки підвищує вимоги до точного відтворення об'єктів реального світу [1]. При цьому важлива передача як конструктивних, так і візуальних особливостей об'єкту.

Процедуру зафарбовування проводять в площині екрану. Тобто, фактично, зафарбовують не ділянку, обмежену полігоном у просторі, а її проекцію на екран. У такому випадку не враховується форма проекції пікселя на текстурну площину. Геометричні характеристики проекції полігону істотно відрізняються від оригінальних, що призводить до неточностей при визначенні інтенсивності кольорів пікселів. Тому існуючі методи зафарбовування не забезпечують коректне відтворення кольорів при зафарбовуванні тривимірних графічних об'єктів.

**Аналіз методів і постановка задачі**

До найпоширеніших методів зафарбовування відносять метод Гуро [1, 2], який забезпечує прийнятний компроміс між швидкістю формування тривимірних зображень та їх якістю. Процес зафарбовування має такі стадії [1]: а) розраховують вектори нормалей до кожної грані; б) шляхом усереднення нормалей усіх граней, яким належить вершина, розраховують нормалі у вершинах трикутника (багатокутника); в) визначають інтенсивності кольору у вершинах багатокутника, використовуючи значення нормалей; г) зафарбовують ділянку, обмежену багатокутником, шляхом лінійної інтерполяції інтенсивностей кольору вздовж ребер, а потім і між ребрами вздовж кожного рядка растеризації. Останнім часом замість методу Гуро часто використовують як проміжну стадію з інтерактивного формування 3D-зображення, покладаючи побудову повноцінної сцени на етап фінального рендерингу.

На сучасному етапі розвитку комп'ютерної графіки гостро стоїть питання про підвищення реалістичності відтворення 3D-зображень [1-4]. У зв'язку з цим має місце тенденція використання більш складних моделей освітлення та методів зафарбовування. Хоча метод Гуро й продовжує широко використовуватися для формування тривимірних зображень у реальному часі, однак більш перспективним вважається метод Фонга [1, 3], у якому замість значень інтенсивності кольору інтерполюються вектори нормалей, які потім використовуються у функції тонування для обчислення інтенсивності кольору кожного елемента зображення. Метод характеризується, порівняно з методом Гуро, значно більшими обчислювальними витратами, однак при цьому досягається краща локальна апроксимація кривизни поверхні і, як наслідок, отримують більш реалістичні зображення.

У методі зафарбовування Фонга для кожної точки поверхні необхідно обчислити вектор нормалі  $\vec{N}$  до поверхні, вектор напрямку джерела світла  $\vec{L}$ , вектор спостерігача  $\vec{V}$ , серединний вектор  $\vec{H} = \frac{\vec{L} + \vec{V}}{|\vec{L} + \vec{V}|}$ , знайти скалярні добутки  $\vec{N} \cdot \vec{H}$ ,  $\vec{N} \cdot \vec{L}$  і обчислити інтенсивність кольору згідно функції тонування [1,2]:

$$I = I_a \cdot k_a + I(k_d \cdot \vec{N} \cdot \vec{L} + k_s \cdot (\vec{N} \cdot \vec{H})^n), \quad (1)$$

де  $k_a, k_d, k_s$  - відповідно коефіцієнти розсіяного, спекулярного та дифузного відбиття,  $I_a, I_l$  - інтенсивності відповідно розсіяного і направлено джерел світла

На рис. 1 зображено проекцію пікселя на ділянку поверхні в об'єктній системі координат. У цьому випадку, залежно від точки спостереження, проекцією пікселя є витягнутий еліпс (рис. 1). Тому інтенсивність кольору на екрані залежить не від однієї, а відразу від кількох точок поверхні в об'єктній системі. Для коректного визначення інтенсивності кольору пікселя на екрані необхідно визначити кольори усіх точок, обмежених еліпсом, і усереднити отримані значення

Метою статті є підвищення реалістичності формування графічних зображень за рахунок реалізації анізотропного зафарбовування.

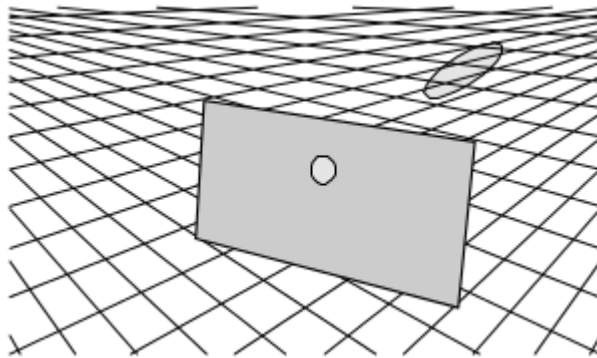


Рис. 2 Проекція пікселя на поверхню в об'єктній системі координат

### Розробка методу підвищення реалістичності зафарбовування

Визначити вектор нормалі у довільній точці полігону, заданого трикутником, по значенням векторів у його вершинах можна за формулою [5]:

$$\begin{aligned} \vec{N}(c_1, c_2, c_3) = & \vec{N}_1 c_1 (2c_1 - 1) + \vec{N}_2 c_2 (2c_2 - 1) + 4 \frac{\vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2(1 + \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2)}} c_1 c_2 + \\ & + \vec{N}_3 c_3 (2c_3 - 1) + 4 \frac{\vec{N}_2 + \vec{N}_3}{\sqrt{2(1 + \vec{N}_2 \cdot \vec{N}_3)}} c_2 c_3 + 4 \frac{\vec{N}_3 + \vec{N}_1}{\sqrt{2(1 + \vec{N}_3 \cdot \vec{N}_1)}} c_3 c_1. \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$  - значення векторів у вершинах полігону,  $c_1, c_2, c_3$  - барицентричні координати точки.

Прискорене визначення барицентричних координат виконують за формулами

$$\begin{aligned} c_1 = \sqrt{\left( a_{12}^2 a_{02}^2 - \frac{(a_{12}^2 + a_{02}^2 - a_{01}^2)^2}{4} \right)} \tau, \quad c_2 = \sqrt{\left( a_{23}^2 a_{03}^2 - \frac{(a_{23}^2 + a_{03}^2 - a_{02}^2)^2}{4} \right)} \tau, \\ c_3 = \sqrt{\left( a_{32}^2 a_{01}^2 - \frac{(a_{31}^2 + a_{01}^2 - a_{03}^2)^2}{4} \right)} \tau, \end{aligned}$$

де  $a_{01} - a_{32}$  - розміри відповідних сторін трикутників, утворених з'єднанням вершин полігону та точки  $C(c_1, c_2, c_3)$  (рис. 2).

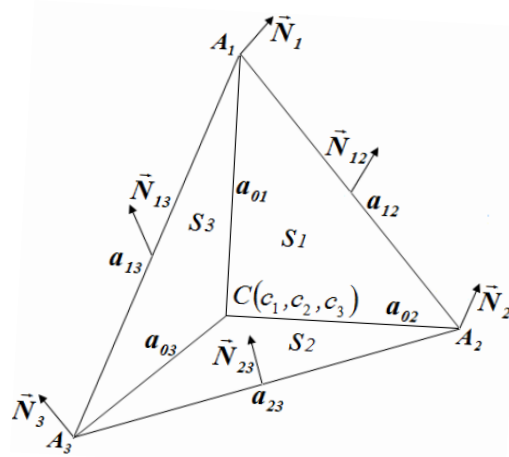


Рис. 2 Розбиття вихідного трикутника на складові

Крім того важливо врахувати можливий випадок, коли частина проекції пікселя в площину полігону виходить за його межі. В такому випадку слід враховувати лише ті пікселі, що знаходяться в середині полігону. Тому необхідно визначити умову належності пікселя полігону. Оскільки сума барицентричних координат для точки дорівнює одиниці, то для точок, що лежать за межами полігону виконується рівність:

$$c_1 + c_2 + c_3 > 1 \tag{3}$$

Для усунення ситуації, коли частина еліпсу виходить за межі полігону, збільшимо розмір трикутника. Для цього кожен із сторін трикутника збільшимо вдвічі в напрямку руху годинникової стрілки (рис 3). В подальшому усї дії в площині полігону будемо виконувати над новим збільшеним трикутником.

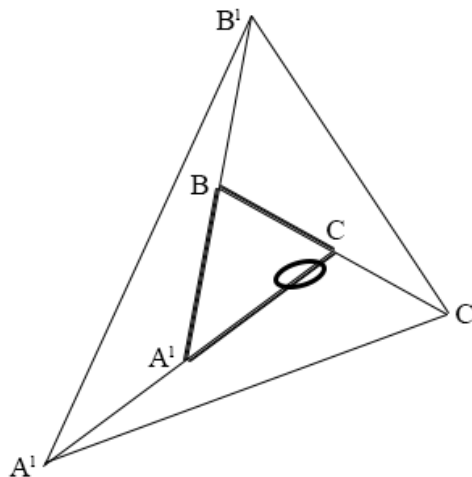


Рис 3. Розширення площі інтерполяції векторів

Визначимо координати вершин нового трикутника. Координати вершин  $B'$  можна визначити за формулами

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x + B_x - A_x, \\ B'_y &= B_y + B_y - A_y, \\ B'_z &= B_z + B_z - A_z. \end{aligned} \tag{4}$$

У векторному вигляді формула (4) має вигляд:

$$\overline{B'} = \overline{B} + \overline{AB},$$

Координати точок  $A', C'$  визначаються аналогічно:

$$\vec{A} = \vec{A} + \vec{CA},$$

$$\vec{C} = \vec{C} + \vec{BC}.$$

Визначимо вектори нормалей у вершинах нового трикутника. Для цього використаємо формулу [1] визначення вектору нормалі  $\vec{N}_{12}$  у середній точці відрізка прямої, за умови, що відомі вектори нормалей  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  у його крайніх точках

$$\vec{N}_{12} = \frac{\vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2(1 + \cos \psi_{12})}}.$$

З останньої формули знаходимо, що

$$\vec{N}_2 = \vec{N}_{12} \cdot \sqrt{2(1 + \cos \psi_{12})} - \vec{N}_1.$$

З урахуванням останньої формули легко знайти вектори нормалей у вершинах модифікованого трикутника

$$\begin{aligned} \vec{N}_A &= \vec{N}_A \cdot \sqrt{2(1 + \cos \psi_{CA})} - \vec{N}_C = \vec{N}_A \cdot \sqrt{2(1 + \cos 2\psi_{CA})}, \\ \vec{N}_B &= \vec{N}_B \cdot \sqrt{2(1 + \cos \psi_{AB})} - \vec{N}_C = \vec{N}_B \cdot \sqrt{2(1 + \cos 2\psi_{AB})}, \\ \vec{N}_C &= \vec{N}_C \cdot \sqrt{2(1 + \cos \psi_{BC})} - \vec{N}_C = \vec{N}_C \cdot \sqrt{2(1 + \cos 2\psi_{BC})}, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{N}_C$  - вектори нормалей у вершинах вихідного трикутника;  $\vec{N}_A', \vec{N}_B', \vec{N}_C'$  - вектори нормалей у вершинах збільшеного трикутника.

Якщо кут між векторами нормалей збільшеного трикутника перевищує  $90^\circ$ , то вихідний трикутник потребує виконання додаткової триангуляції.

Таким чином, для визначення значення кольору пікселя та екрані, необхідно: виконати перетворення полігону в просторі об'єкта за формулами (4); визначити вектори нормалей у вершинах нового полігону за формулами (5); виконати зворотню проєкцію пікселя в площину полігону; для всіх пікселів, що формують проєкцію, крім тих, що задовольняють нерівність (3), визначають колір за методом Фонга. При цьому вектори нормалей у довільній точці визначають за формулою (2).

#### Висновки

Запропоновано метод підвищення реалістичності зафарбовування тривимірних об'єктів за методом Фонга з урахуванням положення спостерігача. Метод дозволяє більш точно визначати інтенсивність кольорів пікселів на екрані.

#### Перелік використаної літератури

1. Романюк О. Н. Високопродуктивні методи та засоби зафарбовування тривимірних графічних об'єктів. Монографія. / О. Н. Романюк, А. В. Чорний. — Вінниця : УНІВЕСУМ-Вінниця, 2006. — 190 с.
2. Романюк О. Н. Новий підхід до підвищення реалістичності зафарбовування тривимірних об'єктів за методом Гуро / О. Н. Романюк // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2005. — № 2. — С. 106—109.
3. Романюк О. Н. Новий підхід до реалізації процедури зафарбовування за методом Фонга / О. Н. Романюк, А. В. Чорний // Вісник Херсонського державного технічного університету. — 2003. — Вип. 22. — С. 154—160.
4. Романюк О. Н. Метод підвищення реалістичності відтворення тривимірних графічних об'єктів / О. Н. Романюк // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2007. — № 1 (8). — С. 192—196.
5. Романюк О. В. Використання барицентричних координат для розрахунку векторів у довільній точці трикутника / О. В. Романюк, В. В. Войтко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2009. — № 1. — С. 198—202.



УДК 004.925.8

Г.Ф. САФОНОВА, М.С. САФОНОВ, С.В. РОСЛЯКОВА, П.С. НОСОВ  
Херсонський політехнічний коледж Одеського національного політехнічного університету

### БАЙЕСОВСЬКА МОДЕЛЬ В ЕКСПЕРТНІЙ СИСТЕМІ ВИЗНАЧЕННЯ ТИПУ КРОЮ ФАСОНУ ОДЯГУ ЗА ЙОГО ЗОБРАЖЕННЯМ

*Розроблений метод роботи експертної системи по визначенню типу крою фасону одягу за його зображенням. В основі роботи методу було покладено опис знань за допомогою розподілу випадкових величин. Наступне перетворенням апріорних знань в апостеріорні відбувається шляхом використання формули Байєса. Для раціонального вибору апріорних даних використовується поняття інформаційної ентропії. Метод реалізовано у демонстраційній програмі визначення типу фасону пишної спідниці.*

*Ключові слова: байєсовська модель, формула Байєса, експертна система, апріорні знання, тип крою.*

А.Ф. САФОНОВА, М.С. САФОНОВ, С.В. РОСЛЯКОВА, П.С. НОСОВ  
Херсонский политехнический колледж Одесского национального политехнического университета

### БАЙЕСОВСКАЯ МОДЕЛЬ В ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА КРОЯ ФАСОНА ОДЕЖДЫ ПО ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЮ

*Разработан метод работы экспертной системы определения типа кроя фасона одежды по его изображению. За основу работы метода взято описание знаний с помощью распределения случайных величин. Следующие преобразование априорных знаний в апостериорные происходит с помощью использования формулы Байеса. Для рационального выбора априорных данных используется понятие информационной энтропии. Метод реализован в демонстративной программе определения типа фасона пышной юбки.*

*Ключевые слова: байесовская модель, формула Байеса, экспертная система, априорные знания, тип крою.*

A.F. SAFONOVA, M.S. SAFONOV, S.V. ROSLYAKOVA, P.S. NOSOV  
Kherson polytechnic college of the Odessa national polytechnic university

### BAYES' MODEL IN THE EXPERT SYSTEM FOR DECOGNITION OF A CLOTHES STYLE CUT ACCORDING TO ITS IMAGE

*The method of work of expert system of definition like a clothes cut type according to his image is developed. The description of knowledge by means of distribution casual greatness is a basis of a method of work of the expert system. The following transformation of aprioristic knowledge to aposteriorn happens to the help of Bayes' formula. For the rational choice of aprioristic data the concept of information entropy is used. The method has been realized in the program of definition like a style of a magnificent skirt.*

*Keywords: Bayesian model, Bayes's formula, expert system, aprioristic knowledge, cut type.*

#### Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій

Не дивлячись на значні переваги існуючої автоматизації процесу проектування одягу [1], залишається не до кінця вирішеною низка питань. Зокрема більшість існуючих САПР одягу призначені для користувачів, які мають вже певний досвід конструювання. Деякі системи містять базу готових моделей з розробленими до них кресленнями [1]. У випадку, коли фасон одягу запозичений не з САПР, недосвідченому кравцю часто важко визначити тип його крою.

Бажано, щоб САПР одягу містила експертну підпрограму, яка допомагала б недосвідченому користувачу визначити тип крою задуманого або будь-якого зображеного фасону.

#### Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є розробка методу роботи експертної системи по визначенню типу крою фасону одягу за його зображенням.

Для досягнення цієї мети потрібно, в першу чергу, визначити головні вимоги, яким система має обов'язково відповідати. Система має бути інтерактивною: робота її алгоритму основана на безпосередній взаємодії «програма-користувач» – «запитання-відповідь». Вона повинна вміти навчатися, на перших етапах роботи бажано користувачем з досвідом конструювання. Алгоритм роботи системи має вміти «пробачати» помилки користувача, у випадку неточної інтерпретації зображення. Система має вміти раціонально вибирати потрібні запитання.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Виконання описаних вимог можливе при використанні відомої Байєсовської моделі. В основі цієї моделі лежить опис знань за допомогою розподілу випадкових величин з наступним перетворенням апріорних знань в апостеріорні шляхом використання формули Байєса [2]:

$$P(C_i|B) = \frac{P(B|C_i) \cdot P(C_i)}{P(B)} \quad \text{або} \quad (1)$$

$$P(C_i|\langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle) = \frac{P(\langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle | C_i) \cdot P(C_i)}{P(\langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle)},$$

тут  $C_i$  – це подія виду «зображено фасон  $i$ ».  $B$  – сумісна подія «На питання  $Q_1$  була надана відповідь  $A_1$ , ..., на питання  $Q_j$  була надана відповідь  $A_k$ ». Тоді  $P(C_i|B)$  буде для об'єкту  $i$  показувати ймовірність того, що був вибраний саме він (з урахуванням того, що користувач дав відповідь на  $k$  питань). Об'єкт з максимальним значенням ймовірності  $P(C_i|B)$  будемо використовувати у якості здогадки.

Апріорну ймовірність  $P(C_i)$  можна розглядати як окремий випадок  $P(C_i|B)$  при  $k=0$ . В даному випадку  $P(C_i)$  буде дорівнювати  $1/N_i$ , де  $N_i$  – число фасонів визначених в базі даних програми.

Правдоподібність  $P(B|C_i)$  отримує зручну інтерпретацію. Припустимо умовну незалежність відповідей на питання при умові  $C_i$ , тоді ймовірність  $P(B|C_i)$  може бути записана у вигляді добутку (по  $j$ ) ймовірностей  $P(B_j|C_i)$  або  $P(\langle Q_j, A_k \rangle | C_i)$ , де  $B_j$  – подія виду «На питання  $Q_j$  була надана відповідь  $A_k$ ».  $P(B_j|C_i)$  в цьому випадку буде дорівнювати відношенню числа разів, коли при загаданому фасоні  $i$  на питання  $Q_j$  була надана відповідь  $A_k$  до числа разів, коли при загаданому фасоні  $i$  у принципі було задано питання  $Q_j$ , тобто (2):

$$P(B, C_i) = \prod_j P(B_j | C_i) = \prod_{\langle Q_j, A_k \rangle} P(\langle Q_j, A_k \rangle | C_i). \quad (2)$$

З метою запобігання нульових та невизначених ймовірностей будемо вважати, що на початку на кожне запитання кожна з варіантів відповідей була надана по одному разу. Тобто у випадку, якщо питання  $Q_j$  ще ні разу не задавалося про фасон  $i$ ,  $P(B_j|C_i)$  буде дорівнювати  $1/N_j$ , де  $N_j$  – число варіантів відповідей на питання  $Q_j$  (наприклад, можна використовувати для всіх запитань однакові 3 варіанти відповіді: «так», «ні», «не можливо визначити»).

У знаменнику формули також присутня величина  $P(B)$ , яка в даному випадку використовується як нормуючий коефіцієнт і може бути не врахована.

Таким чином, використовується проста формула (1), яка перетворює набір пар питання/відповідь й деякий фасон у ймовірність, що при даних відповідях на питання був загаданий саме цей фасон. Перерахувавши цю ймовірність для всіх фасонів в базі даних програми після відповіді на запитання можна побачити, які з них більше схожі на загаданий в даний момент фасон. Більше того, навчання даної моделі реалізується наступним чином: для кожного фасону у базі зберігається інформація про те, які питання про нього були задані і скільки відповідей кожного з типів дали користувачі.

Для раціонального вибору запитання використовується поняття інформаційної ентропії [2]. Пропонується знаходити таке запитання, для якого очікуване зменшення ентропії буде максимальним. Інакше кажучи, кожне нове запитання має усувати як найбільше невизначеностей.

Обираючи запитання ми не знаємо, яку відповідь нам на нього дадуть. Але ми можемо оцінити ймовірність кожного варіанту відповіді (3):

$$P(Q_j, A_k) = \sum_{C_i} P(\langle Q_j, A_k \rangle | C_i) \cdot P(C_i | \langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle). \quad (3)$$

Формула (4) знаходження ентропії питання  $Q_j$  при відповіді  $A_k$  :

$$H(Q_j, A_k) = - \sum_{C_i} P(C_i | \langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle, \langle Q_j, A_k \rangle) \cdot \log_2 P(C_i | \langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle, \langle Q_j, A_k \rangle). \quad (4)$$

Тоді нам потрібно обрати таке запитання  $Q_j$ , яке мінімізує умовну ентропію при відомій відповіді. Взевши для прикладу для всіх запитань однакові 3 варіанти відповіді маємо знайти таке запитання  $Q_j$ , для якого значення величини (5) буде мінімальне.

$$H(Q_j) = \sum_{k=1}^3 H(Q_j, A_k) \cdot P(Q_j, A_k). \quad (5)$$

На основі описаного методу була розроблена демонстраційна програма визначення типу фасону пишної спідниці (рис.1).

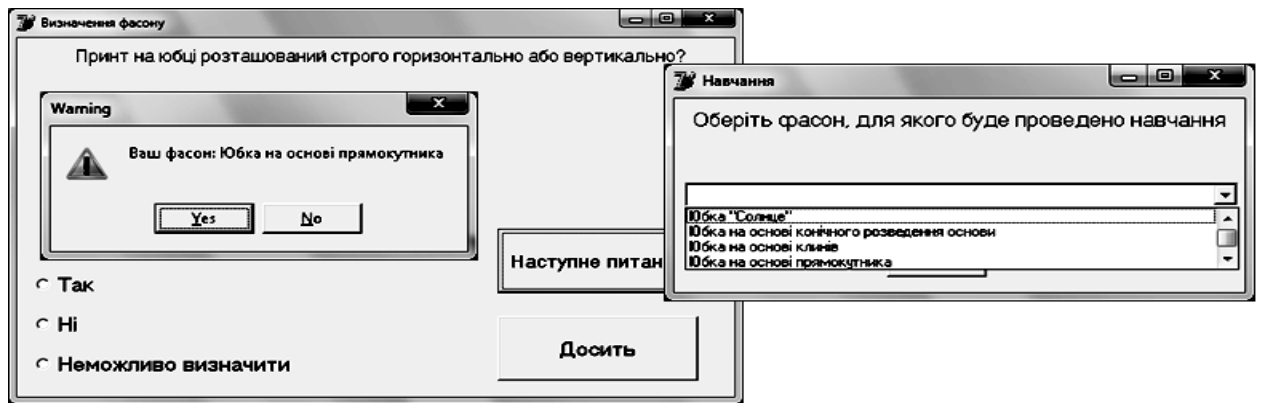


Рис. 1. Вікна роботи експертної програми визначення фасону спідниці

Далі приведені фрагменти коду програми.

```

...
//Визначення ймовірностей  $P(B_j|C_1)$ 
for i:=1 to Query1.RecordCount do
begin
Query2.First;
for j:=1 to Query2.RecordCount do
begin
Query3.Close;
Query3.SQL.Text:='select * from obj_quest where
(id_quest='+Query2Id_quest.AsString+')and(id_obj='+Query1Id_obj.AsString+')and(answer=-1)';
Query3.Open;
neznaju:=Query3.RecordCount;
Query3.Close;
Query3.SQL.Text:='select * from obj_quest where
(id_quest='+Query2Id_quest.AsString+')and(id_obj='+Query1Id_obj.AsString+')and(answer=0)';
Query3.Open;
net:=Query3.RecordCount;
Query3.Close;
Query3.SQL.Text:='select * from obj_quest where
(id_quest='+Query2Id_quest.AsString+')and(id_obj='+Query1Id_obj.AsString+')and(answer=1)';
Query3.Open;
da:=Query3.RecordCount;
Table2.Append;
Table2Id_obj.AsInteger:=Query1Id_obj.AsInteger;
Table2Id_vopr.AsInteger:=Query2Id_quest.AsInteger;
Table2Id_otv.AsInteger:=-1;
if neznaju=0 then Table2Verojatnost.AsFloat:=0.33 else
Table2Verojatnost.AsFloat:=((neznaju)/(neznaju+da+net));
Table2.Post;
Table2.Append;
Table2Id_obj.AsInteger:=Query1Id_obj.AsInteger;
Table2Id_vopr.AsInteger:=Query2Id_quest.AsInteger;
Table2Id_otv.AsInteger:=0;
if net=0 then Table2Verojatnost.AsFloat:=0.33 else
Table2Verojatnost.AsFloat:=((net)/(neznaju+da+net));
Table2.Post;
Table2.Append;
Table2Id_obj.AsInteger:=Query1Id_obj.AsInteger;
Table2Id_vopr.AsInteger:=Query2Id_quest.AsInteger;
Table2Id_otv.AsInteger:=1;
if da=0 then Table2Verojatnost.AsFloat:=0.33 else
Table2Verojatnost.AsFloat:=((da)/(neznaju+da+net));
Table2.Post;
...
//Визначення ентропії запитання  $Q_j$ 
for j:=-1 to 1 do
begin
ver:=0;
Table2.Filter:='(id_vopr='+Table3Id_quest.AsString+')and(id_otv='+inttostr(j)+)';
Table2.Filtered:=True;
Table2.First;
for k:=1 to Table2.RecordCount do
begin
ver:=ver+(Table2Verojatnost.AsFloat*log2(Table2Verojatnost.AsFloat));

```

```
Table2.Next;  
end;  
Table3.Edit;  
if j=-1 then Table3Neznaju.AsFloat:=-1*ver;  
if j=0 then Table3Net.AsFloat:=-1*ver;  
if j=1 then Table3Da.AsFloat:=-1*ver;  
Table3.Post;  
end;
```

...

Емпірично було визначено, що ймовірність помилки програми приблизно дорівнює 5-6%.

#### **Висновки**

Запропоновано метод роботи експертної системи по визначенню типу крою фасону одягу. Метод реалізовано у демонстративній програмі визначення типу фасону пишної спідниці, ймовірність помилки якої приблизно дорівнює 5-6%. Таким чином, можна зробити припущення, що впровадження подібної експертної програми дає перспективу вдосконалення існуючих алгоритмів реалізації САПР одягу, що має вирішити проблеми автоматизованого проектування конструкцій одягу, зокрема допоможе недосвідченому кравцю визначити тип крою вибраної ним моделі одягу.

#### **Список використаної літератури**

1. Сафонова Г. Ф. Аналіз існуючих САПР конструювання та моделювання одягу [Текст] / Г.Ф. Сафонова // Збірник наукових праць. Інформаційні технології в освіті, науці та виробництві. – 2013. – Вип. 3(4). – С. 76-83.
2. Байесовский подход и Акинатор [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.machinelearning.ru/> – 5.05.2016. – Загл. с экрана.

УДК 004.986

С.Н. СКОРИК

Херсонский национальный технический университет

### ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СИТУАЦИИ УГРОЗЫ БЕЗОПАСНОСТИ ОБЛАЧНЫХ СИСТЕМ

*В статье рассмотрены вопросы информационной безопасности облачных систем. Предложены средства защиты виртуальных систем. Использование данных средств защиты позволяет избежать большинство угроз безопасности и одновременно повысить стабильность работы системы. Предложена формализация описания ситуаций при возникновении угроз безопасности. В результате получено исчисление, которое учитывает возможность возникновения множественных угроз.*

*Ключевые слова:* Облачные вычисления, виртуальная система, безопасность, угроза, антивирусная защита.

С.М. СКОРИК

Херсонський національний технічний університет

### ФОРМАЛЬНА МОДЕЛЬ СИТУАЦІЇ ЗАГРОЗИ БЕЗПЕКИ ХМАРНИХ СИСТЕМ

*У статті розглянуті питання інформаційної безпеки хмарних систем. Запропоновано засоби захисту віртуальних систем. Використання даних засобів захисту дозволяє уникнути більшості загроз безпеки і одночасно підвищити стабільність роботи системи. Запропонована формалізація опису ситуацій при виникненні загроз безпеки. В результаті отримано обчислення, яке враховує можливість виникнення множинних загроз.*

*Ключові слова:* Хмарні обчислення, віртуальна система, безпека, загроза, антивірусний захист.

S. SKORIK

Kherson National Technical University

### FORMAL MODEL OF SITUATION SECURITY RISKS OF CLOUD SYSTEMS

*The article discusses the information security of cloud systems. Proposed remedies virtual systems. Using data protection avoids most security threats while improving system stability. A formalization of describing a situation when threats arise is discussed. The result is a calculus that takes into account the possibility of multiple threats.*

*Keywords:* Cloud computing, virtual system, security, threat, virus protection.

#### Постановка проблемы

Центр обработки данных (ЦОД) представляет собой совокупность серверов, размещенных на одной площадке с целью повышения эффективности и защищенности. Защита центров обработки данных представляет собой сетевую и физическую защиту, а также отказоустойчивость и надежное электропитание. В настоящее время на рынке представлен широкий спектр решений для защиты серверов и ЦОД от различных угроз. Их объединяет ориентированность на узкий спектр решаемых задач. Однако спектр этих задач подвергся некоторому расширению вследствие постепенного вытеснения классических аппаратных систем виртуальными платформами. К известным типам угроз (сетевые атаки, уязвимости в приложениях операционных систем, вредоносное программное обеспечение) добавились сложности, связанные с контролем среды (гипервизора), трафика между гостевыми машинами и разграничением прав доступа. Расширились внутренние вопросы и политики защиты ЦОД, требования внешних регуляторов. Работа современных ЦОД в ряде отраслей требует закрытия технических вопросов, а также вопросов связанных с их безопасностью. Финансовые институты (банки, процессинговые центры) подчинены ряду стандартов, выполнение которых заложено на уровне технических решений. Проникновение платформ виртуализации достигло того уровня, когда практически все компании, использующие эти системы, весьма серьезно занялись вопросами усиления безопасности в них.

В современных условиях становится все сложнее обеспечить защиту критически важных для бизнеса систем и приложений. Появление виртуализации стало актуальной причиной масштабной миграции большинства систем на виртуальные машины (ВМ), однако решение задач обеспечения безопасности, связанных с эксплуатацией приложений в новой среде, требует особого подхода. Многие типы угроз достаточно изучены и для них разработаны средства защиты, однако их еще нужно адаптировать для использования в облаке.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Согласно результатам большинства опросов, именно безопасность является основной причиной, по которой руководители ИТ-компаний не решаются начать движение в сторону облачных решений. Один из

опросов на портале LinkedIn показал, что у 54% из более чем 7000 респондентов проблема безопасности вызывает наибольшую озабоченность, когда речь заходит о миграции в облако.

Как и в любом ИТ-сервисе, в облаке имеются уязвимости с точки зрения безопасности, которые пытаются обнаружить злоумышленники. Однако по мере роста осведомленности ИТ-специалистов об этих уязвимостях и о методах их устранения облачная среда становится все более безопасным местом. В действительности у тех, кто отважился совершить миграцию в облако, уровень безопасности повысился, о чем свидетельствуют голоса 57 % участников опроса, проведенного компанией Mimecast. Причина, по которой большинство участников этого исследования уверены в безопасности облачных вычислений, заключается в том, что люди понимают суть имеющихся угроз и научились минимизировать их.

В данной статье кратко охарактеризованы некоторые из наиболее распространенных рисков с точки зрения безопасности, связанных с облачными вычислениями, а также приведены шаги, которые можно предпринять для уменьшения этих рисков.

#### **Средства защиты в виртуальных системах**

Первым шагом для реализации облачной безопасности является идентификация уровней окружения, нуждающихся в защите [1]. После того как определены границы безопасности, стоит обратить внимание на методы, направленные на выполнение мониторинга, анализ подозрительной активности и защиту от вредоносных программ. В этом помогают различные инструменты или конфигурационные опции. Стоит отметить, что одним из важнейших аспектов работы любой среды, не только облачной, является развитый план по поддержанию безопасности инфраструктуры. Очень часто его частью является регулярное обновление программного обеспечения и внесение исправлений, мониторинг компонентов безопасности, а также проведение тестов на определение уязвимостей. Эти нехитрые процедуры могут предотвратить многие проблемы.

Не стоит забывать и о том, что при переходе в облако клиент передает свои ресурсы на сторону хостинг-провайдера, тем самым попадая в зависимость от производительности и пропускной способности каналов связи. В идеале взаимодействие с облаком должно быть эффективным, а время отклика – минимальным. Применение различных механизмов шифрования и использование веб-интерфейса для доступа к приложениям порождают сложность классификации сетевого трафика [2,3].

Сегодня облачные сервисы все чаще становятся мишенью различных атак, включая DDoS. Согласно некоторым отчетам, масштаб крупнейших DDoS-атак за последнее десятилетие увеличился примерно в 50 раз. Компания Arbor Networks в одном из своих исследований, в котором приняло участие порядка 130 специалистов, показала, что 76% опрошенных столкнулись с DDoS-атаками, целью которых были клиенты, а 43% опрошенных зафиксировали частичную или полную потерю работоспособности облачных сервисов. Атаки зачастую направлены на ограничение пропускной способности, чтобы сделать передачу «полезного» трафика максимально ограниченной либо вовсе невозможной.

Для информационной безопасности (ИБ) серверов, расположенных на территории ЦОД, необходимо, использовать физическую и программную безопасность. Под физической безопасностью имеется в виду ограничение доступа обслуживающего персонала в помещения, где установлено оборудование с опечатыванием корпусов средств вычислительной техники, так и меры удаленного контроля – видеозапись. Программная безопасность — это весь комплекс средств защиты от несанкционированного доступа: обновляемая ОС, обновляемый антивирус, межсетевой экран, криптографию, контроль периферийных устройств и т.д. Работы по администрированию в общем случае не должны требовать наличие административных привилегий.

Все средства защиты от угроз в виртуальных (облачных) системах можно разделить на ряд типовых классов: антивирусная защита, системы обнаружения вторжений и межсетевого экранирования, системы контроля доступа [4 - 6]:

– Антивирусная защита. Традиционные средства защиты, например, использование агентских антивирусов, одновременный запуск которых может вызвать так называемый «антивирусный шторм», не всегда применимы в условиях виртуализации. Производители находят решение этой проблемы разными способами. Стоит выделить три основных подхода: новаторский, консервативный и гибридный. Новаторский подход состоит в том, что виртуальная среда предоставляет специальный программный интерфейс для контроля виртуальных машин через гипервизор, а антивирусное средство пользуется им, выводя всю защиту на специализированную ВМ. Это позволяет отказаться от использования антивирусных агентов на виртуальных машинах, но в силу выбранной архитектуры имеет ограничения по возможностям анализа работы оперативной памяти. Классический подход заключается в недоверии к новому интерфейсу и работе по старой схеме с использованием антивирусных агентов, которые нужно обновлять и настраивать. Но вместе с тем вендоры в своих решениях стараются предоставить новые возможности для оптимизации исполнения агентов в виртуальной среде. Гибридный подход состоит в том, чтобы не отказываться от агентов полностью, делать их максимально легковесными и простыми для исполнения, но в то же время большую часть аналитики реализовывать на «соседней» ВМ, выделенной для задач антивирусной защиты. Этот подход более универсален, но, как и всё универсальное, в частных задачах может уступать первым двум вариантам. В целом же его эффективность по сравнению с неадаптированными для виртуальной среды решениями вполне ощутима.

– Системы обнаружения вторжений и межсетевого экранирования. С появлением виртуальных сред появилась новая проблема – неконтролируемое сетевое взаимодействие между ВМ. Трафик между ВМ обычно не покидает виртуальной среды, как следствие, отследить его традиционными средствами защиты не представляется возможным. Стоит отметить, что каждая компания имеет свой взгляд на решение этой задачи. Некоторые всё так же полагаются на программный интерфейс гипервизора, другие реализуют ВМ, встраиваемую между виртуальными коммутаторами, третьи заменяют сами коммутаторы, встраивая свою программную реализацию с возможностями по защите информации. Особенно интересны средства защиты с реализацией vNetwork Distributed Switch. В целом для контроля сетевых взаимодействий в виртуальной среде лучше не полагаться целиком на программные решения, установленные в ней же, так как платформа Intel x86 имеет физические ограничения, устраняемые в аппаратных решениях специальными ASIC-процессорами. Решением будет контроль внешних подключений к среде виртуализации с помощью аппаратных решений, а внутренних – программными решениями, реализуя таким образом комбинированный подход.

– Системы управления состоянием защиты виртуальной среды. Виртуальная среда представляет собой динамическую и сложную инфраструктуру, контроль которой с точки зрения ИБ – непростая задача. Этот класс решений предназначен для управления конфигурацией виртуальной среды и мониторинга состояния информационной безопасности, что зачастую не реализуется обычными средствами управления, такими как VMware vCenter. К лидирующим продуктам здесь можно отнести Reflex VMC и Catbird vSecurity. Оба решения имеют центр правления и виртуальные устройства, размещаемые на серверах ESX/ESXi. Можно констатировать, что это комплексные многокомпонентные продукты, отличающиеся быстрым развертыванием за счет использования virtual appliance и требующие кропотливой работы по их настройке, так как они регламентируют работу среды в целом. Решения в том числе полезны для автоматизации операций по настройке компонентов среды и контроля этого процесса с точки зрения ИБ. На текущий момент не каждая компания готова к применению подобных решений, но интерес к ним, несомненно, повысится с общим развитием отрасли.

– Системы контроля доступа к виртуальной инфраструктуре. Один из лидеров этого рынка – решение NuTrust от одноименной компании. Как и многие средства защиты для виртуальных сред, оно представляет собой виртуальное устройство. Решение позволяет повысить безопасность виртуальной инфраструктуры за счет перехвата всех соединений пользователей с ней и разграничения доступа по ролям с применением меток безопасности. Продукт выгодно отличается стабильностью работы и невливанием на работоспособность самой виртуальной инфраструктуры. NuTrust удобен для администраторов, так как при выполнении всех функций контроля доступа и журналирования действий, не зависящих от управляемой ими среды, они продолжают работать с теми же VMware vSphere Client и консолями SSH. Благодаря встроенным ролям и правилам доступа в решении реализована самозащита от выключения.

– Классические системы защиты. И, конечно, не стоит забывать о классических средствах защиты, таких как контроль защищенности, мониторинг и управление событиями, система обнаружения вторжений и межсетевого экранирование на входе в среду виртуализации, защита систем хранения данных и организация доступа к интерфейсам управления аппаратными ресурсами серверов (iLO/ILOM/DRAC и другие). Большинство средств защиты для виртуальных сред интегрируется в единую систему управления и имеет коннекторы для подключения к SIEM, что позволяет интегрировать их с общей системой обеспечения ИБ, действующей в физической среде.

#### **Безопасность данных на примере технологии облачного хранилища данных Dropbox**

Dropbox – это сервис, который позволяет хранить пользователям свои данные в облачном хранилище. Данный сервис обязан быть максимально защищенным от всех видов угроз, поскольку пользователи могут хранить в облаке конфиденциальную информацию и рассчитывают на полную безопасность. Для защиты от проникновения разработчик использует шифрование данных, загружаемых в облако, функцию двухэтапной авторизации, также используется защита от сетевых атак. Работу в области безопасности подтверждают сертификаты по информационной безопасности, которые компания получает за подход к вопросам безопасности, конфиденциальности, целостности и доступности данных.

Однако несмотря на все примененные меры безопасности, в 2011 году в результате программного сбоя любой пользователь мог получить доступ к чужим данным с помощью произвольного пароля. Несмотря на заверения компании, что все данные зашифрованы, на самом деле сотрудникам компании всего лишь запрещается просто так просматривать пользовательские данные, а по соответствующему запросу из правоохранительных органов Dropbox готов предоставить любые файлы любого пользователя. Поэтому более надежный способ обезопасить данные – это лично зашифровывать файлы перед отправкой их в облачное хранилище.

#### **Формализация описания ситуаций при возникновении угрозы безопасности**

В соответствии со сценарно-прецедентным подходом в основу системы управления безопасностью облачных геолокационных систем могут быть положены следующие понятия: позиция, время, действие, сценарий, план, прецедент, проблемная ситуация [7].

*Позиция* описывает местонахождение объекта (субъекта) в заданной двух(трех)-мерной системе координат, и представляется в форме пары (тройки) вида  $p = (\xi, \chi)$ , где  $\xi$ ,  $\chi$  – координаты по

соответствующим осям.

Время задается отсчетами  $t$  относительно начального значения  $t_0$  на заданной временной шкале  $T$ , упорядоченной по  $<_T$ .

Пусть заданы множество угроз  $\Psi$ , множество субъектов обеспечения безопасности (СОБ)  $Z = \{A, B, D, F\}$  и множество допустимых действий СОБ  $U$ . Каждый из СОБ  $z \in Z$  в момент времени  $t$  выполняет некоторое действие  $a_{z(t)} \in U$ .

Триадой назовем кортеж вида  $\langle p, t, a_{z(t)} \rangle$ .

Триада является элементарным фрагментом планов и сценариев противодействия угрозам, триадой также может быть задана цель сценария (цель может состоять в достижении позиции  $p$  к моменту  $t$ , тогда  $a_{z(t)}$  может быть нулевым).

Активность СОБ  $z \in Z$  представлена его выполняемым сценарием  $\Sigma_z$ .

Сценарий  $\Sigma_z$  СОБ  $z$  представляет собой кортеж вида

$$\Sigma_z = \langle t_s, t_r, [\dots, \langle t_i, p_i, a_i \rangle, \dots], g \rangle, \quad (1)$$

где  $[\dots, \langle t_i, p_i, a_i \rangle, \dots]$  – упорядоченная последовательность триад, такая что  $t_i <_T t_{i+1}$ ;

$t_s$  – момент запуска выполнения сценария;

$t_r$  – планируемый момент запуска;

$g = \langle t_e, p_e, a_e \rangle$  – конечная цель выполнения сценария,

$t_e$  – конечный момент времени;

$p_e$  – конечная позиция;

$a_e$  – действие, выполняемое по достижению конечной позиции  $\langle t_e, p_e \rangle$ .

Соответственно, для каждого СОБ  $z \in Z$  в любой момент времени  $t \in T$  можно получить его местоположение  $p_{z(t)}$ , выполняемый им сценарий  $\Sigma_z$  и, зная  $t_s$ , конкретное выполняемое действие  $a_{z(t)}$ .

Представленный способ формализации позволяет корректировать назначенную любому из СОБ  $z \in Z$  цель  $g_z$  и/или выполняемый сценарий  $\Sigma_z$  «на лету», без перезапуска цикла функционирования информационной системы обнаружения и предотвращения вторжения (ИСОПВ).

Угроза  $\psi \in \Psi$  может быть представлена классом  $K_\psi$  и множеством нарушителей  $L$ , для каждого из которых  $l \in L$  в любой момент времени  $t \in T$  известно его местоположение  $p_{l(t)}$

$$\psi_t = \langle K_\psi, \{ \langle l, p_{l(t)} \rangle, \dots \} \rangle \quad \forall l \in L. \quad (2)$$

Позиционный контекст угрозы  $\psi_p$  описывается перечислением множества текущих позиций нарушителей  $\psi_p = \{ \langle l, p_l \rangle, \dots \} \quad \forall l \in L$ .

Каждой тактической операции  $\Omega$ , выполняемой в ответ на угрозу  $\psi \in \Psi$ , соответствует множество участвующих в ней СОБ  $Z_\Omega \subseteq Z$  и план мероприятий  $\Pi_\Omega$ , представляющий собой кортеж вида

$$\Pi_\Omega = \langle \psi, Z_\Omega, \{ \dots, (z(k), \Sigma_{z(k)}), \dots \} \rangle, \quad (3)$$

где  $\{ \dots, (z(k), \Sigma_{z(k)}), \dots \}$  – множество выполняемых сценариев  $\Sigma_{z(k)}$  для каждого СОБ  $z(k) \in Z_\Omega$ .

Позиционный контекст ситуации  $s_p$  содержит занимаемые СОБ  $z \in Z$  позиции:

$$s_p = \{ \dots, (z_i, p_{z_i}), \dots \} \quad \forall z_i \in Z. \quad (4)$$

Операционный контекст ситуации  $s_\Omega$  содержит множество выполняемых операций  $\{ \Omega_j \}$ , планов выполняемых операций  $\{ \Pi_{\Omega(j)} \}$ , множество участвующих СОБ  $z(k_j) \in Z_{\Omega(j)}$  и соответствующих сценариев



$\Sigma_{k(j)}$  для каждого из них [7]:

$$s_{\Omega} = \left\langle \left\{ \Omega_j \right\}, \left\{ \Pi_{\Omega(j)} \right\}, \left\{ Z_{\Omega(j)} \right\}, \left\{ \Sigma_{k(j)} \right\} \right\rangle \forall z(k_j) \in Z_{\Omega(j)}. \quad (5)$$

Ограничением является то, что каждый из СОБ  $z_k \in Z$  в любой момент времени  $t$  может выполнять один и только один сценарий  $\Sigma_{kj}$ , соответствующий плану  $\Pi_{\Omega_j}$  операции  $\Omega_j \in \Omega$ , такой что  $z(k_j) \in Z_{\Omega(j)}$ . В случае, если в момент времени  $t$  СОБ  $z(m) \in Z$  не участвует ни в одной из операций  $\Omega_j \in \Omega$ , т.е.  $\forall j z(m_j) \notin Z_{\Omega(j)}$ , считаем, что  $z(m)$  выполняет заданный штатный сценарий  $\Sigma_{z(m_0)}$ .

Тогда текущая *ситуация*  $s_t$  описывается конфигурацией угроз, текущими позиционным и операционным контекстами:

$$s_t = \left\langle s_{p(t)}, s_{\Omega(t)}, \left\{ \psi_{m(t)} \right\} \right\rangle \forall \psi_m \in \Psi. \quad (6)$$

Представленный формализм описания ситуаций учитывает возможность возникновения множественных угроз, т.к. конфигурация угроз и операционный контекст описывают множества угроз и, соответственно, выполняемых операций противодействия.

В момент возникновения угрозы для облачных систем складывается *проблемная ситуация*, требующая своего разрешения путем выполнения операций предупреждения или противодействия.

Управление безопасностью облачной системы в проблемной ситуации возлагается на сценарно-прецедентную интеллектуальную систему.

#### Основные результаты и выводы

В статье проведен анализ опросов, проведенных различными компаниями. Согласно этим опросам, безопасность является главной причиной, по которой специалисты откладывают переход на облачные технологии. Приведена структура облачных систем.

Описаны средства защиты в виртуальных системах. Таким образом, используя перечисленные в статье средства защиты, можно обезопасить систему от ряда угроз. В соответствии со сценарно-прецедентным подходом предложена формализация описания ситуаций при возникновении угроз безопасности, которая может быть использована для анализа, противодействия и предотвращения проблемных ситуаций в информационной системе обнаружения и предотвращения вторжений.

#### Список использованной литературы

1. Янюшкин В.В. Программные компоненты и архитектурные решения распределенных информационных систем на основе применения технологий cloud computing и WCF / В.В. Янюшкин // Перспективы развития средств и комплексов связи. Подготовка специалистов связи: мат. межвуз. научн.-техн. конф. – Новочеркасск: НВВКУС, 2009. – С.239-241.
2. Гультияев А.К. Виртуальные машины: несколько компьютеров в одном / А.К. Гультияев. – СПб.: Питер, 2006. – 224 с.
3. Коваленко О.С. Обзор проблем и состояний облачных вычислений и сервисов / О.С. Коваленко, В.М. Курейчик // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – №7. – С.146-153.
4. Бережной А. Sun VirtualBox как персональная система виртуализации. // «Системный администратор», №12, 2009 г.-С. 61-65.
5. Фингар П. DOT.CLOUD Облачные вычисления – бизнес платформа XXI века; пер. с англ. Захаров А.В. – М.: Акваринарная Книга, 2011. – 256 с.
6. Ермаков Д. Г. Экспериментальная среда облачных вычислений в институте математики и механики УрО РАН / Д. Г. Ермаков, Д. А. Усталов // Программные продукты и системы: науч.- практ. изд. - 2012. - N 4. - С. 110-115.
7. Медведев А. А. Облачные технологии: тенденции развития, примеры исполнения / А. Медведев // Современные технологии автоматизации. - 2013. - N 2. - С. 6-9.

УДК 528.7+514.1

Д.В. СУЩЕВСЬКИЙ

Дніпропетровський національний університет

### ПОШУК ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ГРАДІЄНТНИХ ФІЛЬТРІВ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ КОНТУРІВ ОБ'ЄКТІВ НА ЦИФРОВИХ СУПУТНИКОВИХ ЗОБРАЖЕННЯХ ВИСОКОГО ПРОСТОРОВОГО РОЗРІЗНЕННЯ

*Було реалізовано методику визначення оптимальних параметрів градієнтної фільтрації для виявлення контурів об'єктів штучного походження. Розроблено програмний модуль з графічним інтерфейсом для візуального контролю та порівняльного аналізу результатів роботи різних операторів. Було розроблено кількісну характеристику для оцінки якості виявлення контурів. Здійснено класифікацію зображень відповідно до відносної кількості штучних об'єктів на зображенні. За результатами дослідження було одержано оптимальні параметри фільтрації для кожного класу зображень.*

*Ключові слова: контур об'єкту, градієнтний фільтр, цифрове супутникове зображення, виявлення об'єктів штучного походження.*

Д.В. СУЩЕВСКИЙ

Днепропетровский национальный университет

### ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГРАДИЕНТНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ КОНТУРОВ ОБЪЕКТОВ НА ЦИФРОВЫХ СПУТНИКОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ ВЫСОКОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ

*Была реализована методика определения оптимальных параметров градиентной фильтрации для обнаружения контуров объектов искусственного происхождения. Разработан программный модуль с графическим интерфейсом для визуального контроля и сравнительного анализа результатов работы разных операторов. Был разработан алгоритм расчета количественной характеристики для оценки качества обнаружения контуров. Была осуществлена классификация изображений в соответствии с относительным количеством искусственных объектов на изображении. По результатам исследования были получены оптимальные параметры фильтрации для каждого класса изображений.*

*Ключевые слова: контур объекта, градиентный фильтр, цифровое спутниковое изображение, обнаружение объектов искусственного происхождения.*

D.V. SUSHCHEVS'KYI

Dnipropetrovsk National University

### SEARCHING FOR OPTIMAL PARAMETERS OF GRADIENT FILTERS TO LOCATE MAN-MADE OBJECTS' BOUNDARIES ON HIGH RESOLUTION SATELLITE IMAGES

*The paper is devoted to man-made objects recognition. The method of optimal gradient filters characteristics' definition was developed to precisely locate object boundaries. The software module, which includes user interface, was developed using MATLAB environment. The software uses optimization functions to calculate the best parameters of different gradient filters for the particular image. The optimization was made based on the maximization of quality assessment function, which was also developed during the research. All images used during the research were divided into the categories based on the amount of man-made objects located on the image. The analysis was made using the software and as a result, the best characteristics for each filter and each image categories were defined.*

*Keywords: object boundary, gradient filter, digital satellite image, man-made objects recognition.*

#### Постановка проблеми

Виявлення штучних об'єктів земної поверхні тісно пов'язане з багатьма прикладними задачами охорони навколишнього середовища, екологічної безпеки, оперативного моніторингу міських забудов, оцінки збитків і наслідків, спричинених стихійними лихами (наприклад, в результаті землетрусу) чи діяльністю людства. В останній час суттєво розширилися можливості отримання інформації про земну поверхню засобами дистанційного зондування. Зросла кількість аерокосмічних апаратів, призначених для зйомки земної поверхні в різних зонах електромагнітного спектру, з різним розрізненням на місцевості, смугою огляду, періодом зйомки заданих ділянок. Стали доступними як в економічному, так і в організаційно-технічному плані знімки високого та надвисокого розрізнення. Але, не зважаючи на суттєві досягнення в області обробки цифрових фотографічних зображень, їх автоматизоване дешифрування реалізоване лише для вузького класу об'єктів і досі є складною та неоднозначно вирішуваною задачею. Це

пояснюється великою кількістю різноманітних факторів, що впливають на процес отримання зображення об'єктів. Окрім факторів зйомки, на якість дешифрування впливає також характер самої місцевості, зокрема тип будівель, їх щільність на знімку, а також контраст з природним фоном. Саме зміна контрасту у більшості випадків є ключовим фактором при виявленні контурів об'єктів на зображенні.

#### Аналіз останніх досліджень

Дослідженнями психологів встановлено, що з точки зору розпізнавання й аналізу об'єктів на зображенні найбільш інформативними є не значення яскравостей об'єктів, а характеристики їх контурів. Контуром зображення прийнято називати сукупність його пікселів, в околиці яких спостерігається стрибкоподібна зміна функції яскравості. При цифровій обробці зображень контури подаються лініями шириною мінімум в один піксель. За останні 30 років розроблено багато операторів розпізнавання границь. Особливе місце серед них займають градієнтні оператори розпізнавання границь перепадів яскравостей: Робертса, Кенні, Собеля, Прюїтт [1]. Було показано, що фільтри на основі саме градієнтних операторів дають стабільні результати як на чітких, так і на малоконтрастних зображеннях забудовлі земної поверхні, але спостерігається значна їх варіація в залежності від перелічених вище факторів та, що є більш важливим, від параметрів самих фільтрів.

#### Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Визначення оптимальних параметрів градієнтних фільтрів є складною оптимізаційною задачею, що потребує долучення нелінійних математичних функцій. Більшість необхідних функцій вже реалізовано у відповідних пакетах середовища MATLAB (Image Processing Toolbox, Optimization Toolbox), де крім програмування самого алгоритму існує можливість створення графічного інтерфейсу для контролю та аналізу результатів. Для вирішення даної задачі необхідно визначити критерії, за якими здійснюватиметься оптимізація, що також є частиною даного дослідження. Оскільки неможливо визначити конкретний набір параметрів, що однаково добре працюватиме з будь-якими зображеннями, необхідно звзвити коло досліджуваних зображень шляхом поділу їх на класифікаційні групи і пошуку оптимального рішення у межах кожної з груп, використовуючи програмне забезпечення, що розроблюється, як засіб дослідження.

#### Вкладення основного матеріалу дослідження

Роботу градієнтних операторів засновано на одній з базових властивостей сигналу яскравості – розривності. Найбільш загальним засобом пошуку розриву є обробка зображення з використанням ковзної маски, що називається фільтром, вікном або шаблоном, що є деякою квадратною матрицею, що відповідає деякій групі пікселів вихідного зображення. Елементи матриці прийнято називати коефіцієнтами. Оперування такою матрицею у будь-яких локальних перетвореннях називається просторовою фільтрацією. Процес засновано на простому пересуванні маски фільтра від точки до точки зображення; у кожні точці ( $x$ ;  $y$ ) відгук фільтра розраховується з використанням наперед заданих зв'язків. У випадку лінійної просторової фільтрації відгук задається сумою добутків коефіцієнтів фільтра на відповідні значення пікселів в області, яка покрита маскою фільтра [2].

Слід враховувати, що результат роботи того чи іншого градієнтного оператора залежить від динамічних характеристик самого зображення. Суттєвою характеристикою при виявленні контурів є контраст початкового зображення – при малому динамічному діапазоні яскравостей похибка виявлення контурів буде занадто високою. Таким чином необхідним кроком процесу виявлення контурів є розширення динамічного діапазону яскравостей зображення або еквалізація гистограми. На рис. 1 продемонстровано результат розширення динамічного діапазону початкового зображення. На рис. 2 зображено гистограму розподілу яскравостей після еквалізації його гистограми.

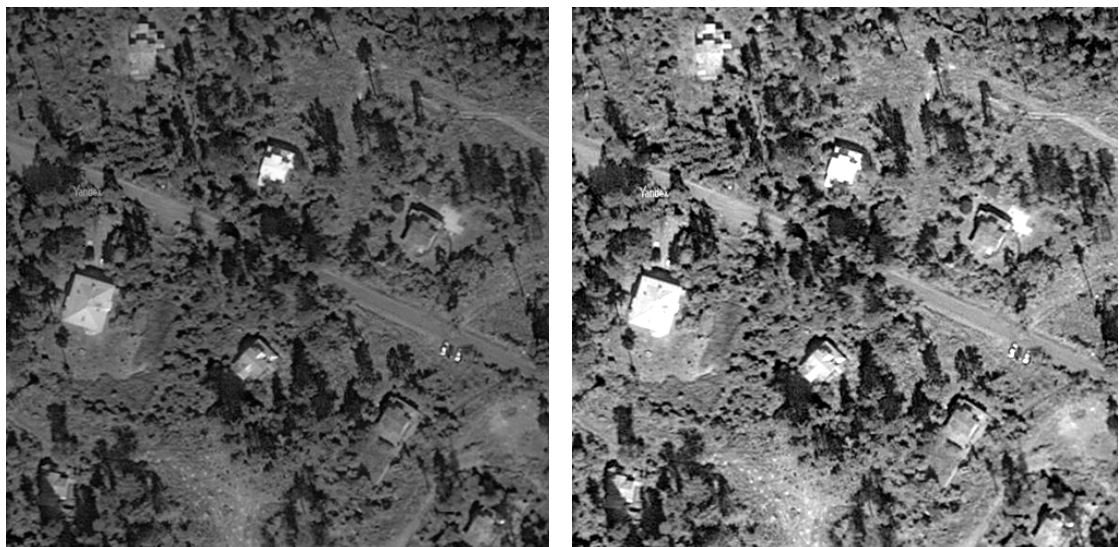


Рис. 1. Результат розширення динамічного діапазону зображень

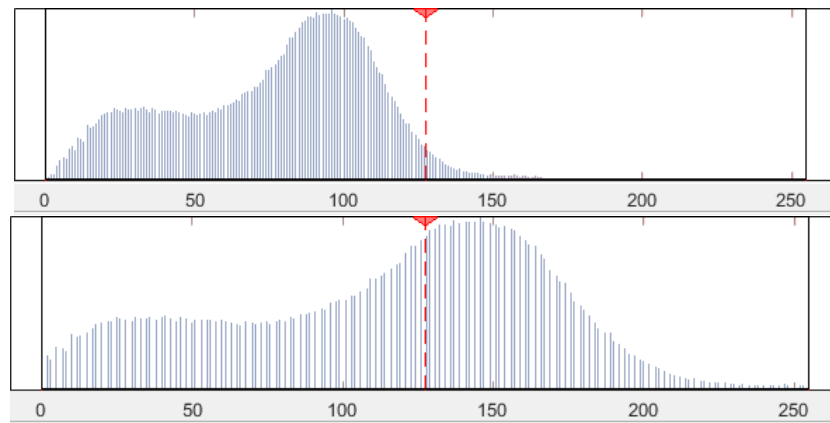


Рис. 2. Розширення динамічного діапазону яскравостей зображення

У середовищі MATLAB виявлення контурів здійснюється за допомогою функції `edge`, яка у загальному вигляді визначається наступним чином:

```
BW = edge(I, method, threshold, direction, sigma)
```

де `I` – це вхідне зображення; `method` приймає значення відповідно до обраного оператора виявлення контурів ('Canny', 'log', 'Prewitt', 'Roberts', 'Sobel' або 'zerocross'), а `threshold` (поріг), `direction` (напрямок пошуку границь) та `sigma` (стандартне відхилення фільтру) – це параметри фільтру, що підлягають оптимізації.

Не будемо наводити опис роботи операторів Робертса, Кенні, Собеля, Прюїтт, цей матеріал було викладено у [3]. Наведемо лише практичні матеріали дослідження.

Нижче наведено інтерфейс програми, побудований у середовищі MATLAB. На рис. 3 завантажено вихідне зображення, на рис. 4 – результати її роботи. Програма дозволяє здійснювати вибір та порівнювати роботу операторів. Існує можливість роботи як із панхроматичним зображенням, так і з окремими його каналами.

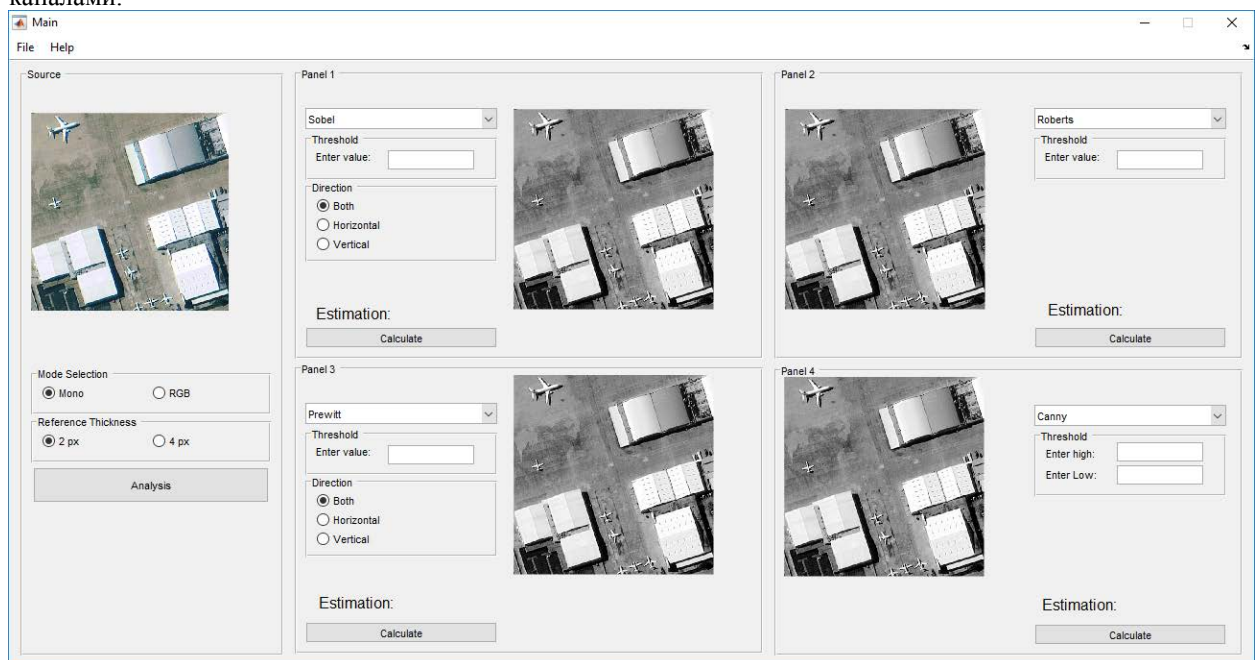


Рис. 3. Інтерфейс програми з завантаженими початковими зображеннями

Задля визначення оптимальних параметрів фільтрації було обрано функцію оптимізації декількох змінних з обмеженнями [4]. У загальному випадку, це завдання відноситься до нелінійної оптимізації з обмеженнями або до нелінійного програмування.

В якості критерію оптимізації було обрано максимум функції подібності виявленого контуру до еталонного контуру зображення *Estimation*, що описується виразом (1).

$$Estimation = \frac{(N_{ref} - N_{Counter}(I_{ref} - I_s)) * 100}{N_{ref}} - \frac{N_{Counter}(I_s - I_{ref}) * 100}{S}, \quad (1)$$

де *Estimation* – ступінь подібності у відсотках;  $N_{ref}$  – кількість пікселів еталонного зображення, що складають контури корисних об’єктів на зображенні;  $NCounter(I)$  – функція підрахунку кількості контурних пікселів зображення *I*;  $I_{ref}$  – еталонне зображення контурів;  $I_s$  – зображення контурів, що є результатом роботи градієнтного оператора виявлення контурів; *S* – площа зображення.

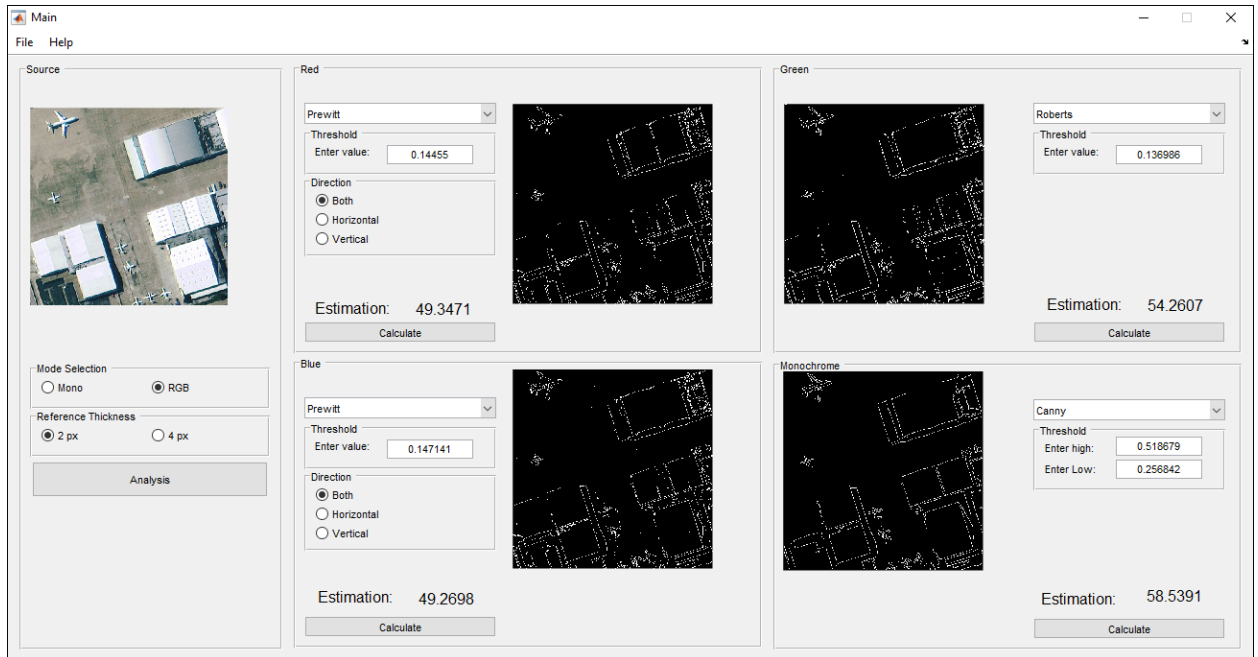


Рис. 5. Результат виконання програми

В якості вихідних даних для дослідження було опрацьовано декілька груп зображень з наперед визначеними (еталонними) контурами. Приклад такого зображення наведено на рис. 6. Поділ на групи здійснювався за критерієм щільності забудови  $K_o$ , що визначається приблизно за співвідношенням (2):

$$K_o = \frac{S_o}{S} * 100\% \quad (2)$$

де  $S_o$  – це площа штучних об’єктів на зображенні, а  $S$  – загальна площа зображення.

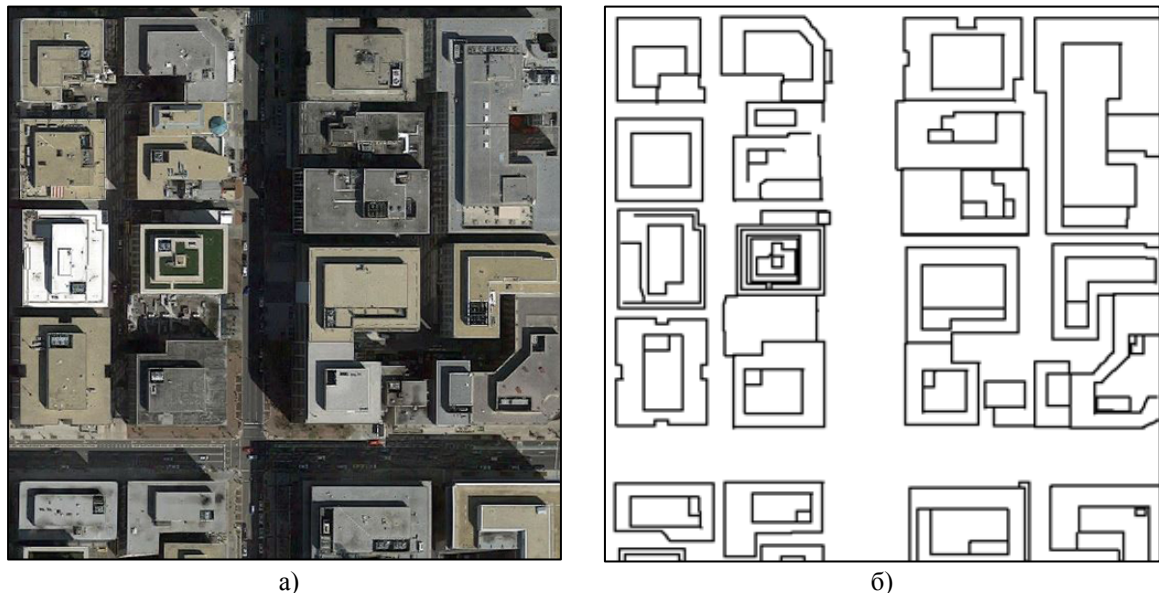


Рис. 6. Приклад вихідних даних:  
а) зображення; б) еталонні контури будівель зображення

Відповідно до розробленого критерію та враховуючи специфіку території України, було розроблено наступну наближену модель класифікації зображень:

- міська забудова ( $K_o > 75\%$ );
- приміська забудова ( $50\% > K_o \geq 75\%$ );

- сільська місцевість ( $25\% > K_o \geq 50\%$ );
- сільськогосподарська зона ( $5\% > K_o \geq 25\%$ );
- природничі території ( $K_o \leq 5\%$ ).

Було розглянуто та створено еталони контурів для більш ніж 10 зображень з кожної групи та проаналізована робота фільтрів в кожній з них.

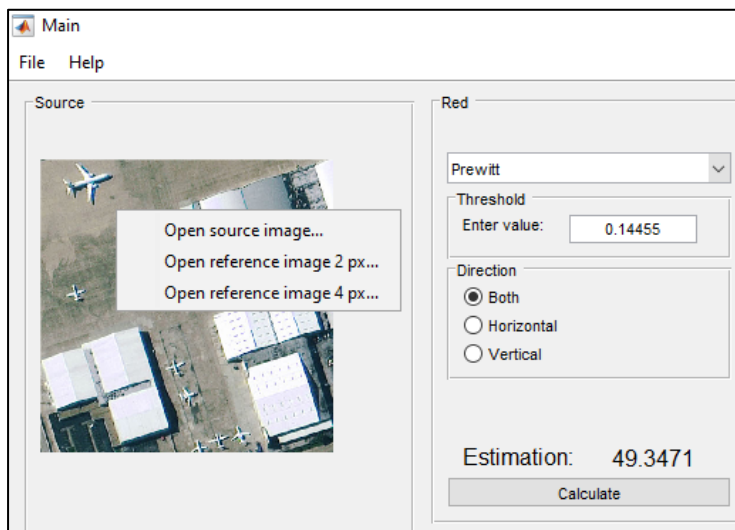
**Висновки**

Під час аналізу результатів було отримано велику кількість даних для різних фільтрів та різних каналів зображень. Так, наприклад, у табл. 1 наведено розраховані оптимальний тип фільтру та оптимальний діапазон значень порогу для кожного класу зображень. З таблиці видно, що оптимальний результат досягається приблизно однаковим значенням порогу для кожного класу зображень. Програма надає можливість аналізувати окремі канали зображень (рис. 7), завдяки чому є можливість здійснювати оцінку найбільш інформативного (в контексті виявлення контурів) каналу для конкретного кола вирішуваних задач. У статті наведено лише основну концепцію запропонованої методики та опущена значна кількість деталей, таких як попередня корекція зображення, морфологічна обробка отриманих контурів з метою видалення шуму, застосування змінної товщини контурів та ін. Дана робота є частиною більш об'ємного дослідження, що включає дешифрування різночасових знімків та побудову карти змін.

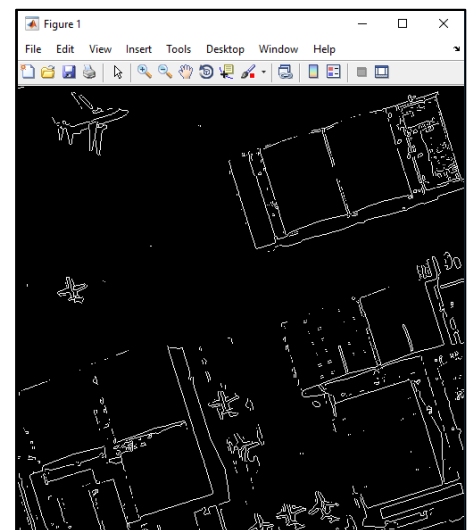
Таблиця 1

**Оптимальне значення порогу відповідно до класу зображень**

Клас зображення	Оптимальний тип фільтру	Оптимальний діапазон значень порогу
міська забудова	Канні	0.3 – 0.62
приміська забудова	Канні	0.28 – 0.52
сільська місцевість	Прюїтт	0.18 – 0.25
сільськогосподарська зона	Канні	0.32 – 0.64
природничі території	Канні	0.31 – 0.62



а)



б)

**Рис. 7. Приклад виявлення контурів оператором Прюїтт з використанням червоного каналу зображення: а) вікно параметрів фільтрації; б) вікно відображення результатів виявлення**

**Список використаної літератури**

1. Klette R. Handbook of image processing operators / R. Klette, P. Zamperoni — Chichester: John Wiley & Sons, 1996. — 398 p.
2. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. — М.: Техносфера, 2005. — 1007 с.
3. Сушевський Д.В. Визначення контурів об'єктів на фотограмметричних проекційних зображеннях / Д.В. Сушевський, В.В. Гнатушенко // Праці Таврійського держ. агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. –Вип. 4, т.46. – С.47-51.
4. MATLAB online documentation [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>

УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА

Міжнародний науково-навчальний центр  
інформаційних технологій та систем НАН та МОН України**МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ІНТЕЛЕКТУ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ**

*Показано, що деякі задачі обчислювального інтелекту моделюються в рамках теорії комбінаторної оптимізації. Аргументом цільової функції в них є комбінаторні конфігурації різних типів. Вони утворюються з елементів як однієї базової множини, так і кількох. Природний сигнал (вхідні дані) також утворюється з елементів заданої множини та є розміщення з повтореннями.*

*Ключові слова: обчислювальний інтелект, комбінаторна оптимізація, комбінаторна конфігурація, розпізнавання мовленнєвих сигналів, цільова функція.*

Н.К. ТИМОФЕЄВА

Международный научно-учебный центр  
информационных технологий и систем НАН и МОН Украины**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ИНТЕЛЛЕКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

*Показано, что некоторые задачи вычислительного интеллекта моделируются в рамках теории комбинаторной оптимизации. Аргументом целевой функции в них есть комбинаторные конфигурации разных типов. Они образуются из элементов как одного базового множества, так и нескольких. Природный сигнал (входные данные) также образуется из элементов заданного множества и является размещением с повторениями.*

*Ключевые слова: вычислительный интеллект, комбинаторная оптимизация, комбинаторная конфигурация, распознавание речевых сигналов, целевая функция.*

N.K. TIMOFEEVA

International Scientific Training Center  
for Information Technologies and Systems**MODELLING OF THE APPLIED PROBLEMS OF CALCULABLE INTELLECT IS WITH THE USE OF THEORY OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION**

*It is shown that some of the problem of calculable intellect modeled in the theory of combinatorial optimization. The argument of the objective function they have combinatorial configuration types. They are formed from the elements as a basic set and more. A natural signal (input data) also formed from the elements of the basic set and is placing with reiterations.*

*Keywords: the calculable intellect, the combinatorial optimization, the combinatorial configuration, recognition of speech, the objective function.*

**Постановка задачі**

Багато задач з обчислювального інтелекту зводяться до задач комбінаторної оптимізації. Для їхнього моделювання необхідно сформулювати цільову функцію та визначити її аргумент, яким є комбінаторні конфігурації різних типів. Комбінаторна конфігурація в задачах обчислювального інтелекту може бути як аргументом цільової функції, так і вхідними даними.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою**

До обчислювального інтелекту, як правило, відносять задачі, пов'язані з розпізнаванням образів, звукових (мовленнєвих) сигналів, клінічної діагностики тощо. Для розв'язання цих задач розроблено багато методів та алгоритмів, зокрема такі, які ґрунтуються на кореляційних підходах з використанням динамічного програмування [1]. Також використовують евристичні підходи, стохастичні та логіко-лінгвістичні методи, лінійне цілочислове програмування, статистичне та структурне розпізнавання образів, нейронні мережі [2, 3]. Незважаючи на те, що проблемі обчислювального інтелекту присвячено багато робіт, точної математичної постановки, яка б дала змогу розробляти ефективні для розв'язання задач цього класу алгоритми, ще не розроблено. Для них не сформульовано цільової функції в явному вигляді. До того ж одержаний глобальний розв'язок за змодельованою цільовою функцією із-за ситуації невизначеності не завжди збігається з метою дослідження.

### Формулювання мети дослідження

Нижче проводиться зведення задач з обчислювального інтелекту до задач комбінаторної оптимізації. Показано, що аргументом цільової функції в них є комбінаторні конфігурації різних типів. Якщо цільова функція залежить від кількох змінних, то основна задача розбивається на підзадачі, а для її розв'язання розробляються гібридні алгоритми.

### Загальна математична постановка задачі комбінаторної оптимізації.

Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації [4]. Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад  $A$  та  $B$ , елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В *першому* типі кожному з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число  $c_{lt} \in R$ , яке називають вагою ребра ( $R$  – множина дійсних чисел),  $l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $t \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$ ,  $n$  – кількість елементів множини  $A$ ,  $\tilde{n}$  – кількість елементів множини  $B$ . Покладемо, що  $n = \tilde{n}$ . Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини  $c_{lt}$  назвемо *вхідними* даними та задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа  $v_j \in R$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох із заданих множин, наприклад  $a_l \in A$ ,  $l \in \{1, \dots, n\}$ , утворюється комбінаторна множина  $W$  – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах  $w$  комбінаторної множини  $W$  вводиться цільова функція  $F(w)$ . Необхідно знайти елемент множини  $W$ , для якого  $F(w)$  набуває оптимального значення при виконанні заданих обмежень.

Для моделювання прикладних задач в рамках теорії комбінаторної оптимізації необхідно: а) за способом обчислення цільової функції визначити вид задачі (статична або динамічна); б) визначити базові множини, якими задається певна задача; в) за вхідними даними визначити її тип; г) визначити аргумент цільової функції (комбінаторну конфігурацію); д) змодельовати цільову функцію.

В задачах розпізнавання вводиться міра подібності, яка встановлює подібність між вхідними даними та еталоном. Оскільки в цих задачах аргументом цільової функції є різні типи вибірок, розглянемо цю комбінаторну конфігурацію. З поняттям вибірки пов'язують як саму операцію виділення підмножин заданої множини, так і її результат: вибрану підмножину. Під вибіркою розуміємо вибрану підмножину (комбінаторну конфігурацію). Існують такі типи вибірок: упорядковані та неупорядковані. Неупорядковані це – сполучення без повторень та сполучення з повтореннями. Упорядковані це – розміщення з повтореннями та розміщення без повторень. Множина будь-якого типу вибірок складається з підмножин ізоморфних вибірок.

### Використання теорії комбінаторної оптимізації в задачі розпізнавання природних сигналів

В задачах розпізнавання мовленнєвих сигналів, електрокардіограм, електроенцефалограм тощо вхідними даними є саме ці сигнали. Для визначення їхніх комбінаторних властивостей розглянемо утворення природних сигналів, зокрема мовленнєвих, з використанням знакових комбінаторних просторів [5]. Згідно з [5], мовленнєвий простір складається із згорнутого, який містить базову множину (активні та пасивні органи творення мови), правила, за якими творяться звуки (частково розгорнутий мовленнєвий простір), та правила, за якими із звуків (комбінацією точок частково розгорнутого мовленнєвого простору) твориться мовлення. Мовленнєвий розгорнутий простір, як і знаковий комбінаторний, під дією певних чинників утворюється різноманітними комбінаціями активних та пасивних органів творення мови.

Отже, під згорнутим мовленнєвим простором розуміємо інформаційний знак  $\mathcal{R} = \langle A, T, \mathfrak{S}, \Xi \rangle$ , де  $A$  – базова множина, елементам  $a_j \in A$  якої відповідають органи мовленнєвого тракту,  $\mathfrak{S}$  – система правил, за допомогою яких комбінацією  $a_j \in A$  розгортається природний мовленнєвий простір,  $T$  – тип комбінаторної конфігурації (розміщення з повтореннями),  $\Xi$  – правила згортання мовленнєвого простору. Частково розгорнутим мовленнєвим простором назвемо інформаційний знак, елементи базової множини якого відповідають звукам, утворених з елементів  $a_j \in A$  базової множини  $A$  згорнутого простору, та систему правил, за допомогою яких комбінацією точок цього простору утворюється розгорнутий мовленнєвий простір. Точкою мовленнєвого простору є розміщення з повтореннями. Цим можна пояснити, чому вхідні дані в розпізнаванні мовлення мають нечітку структуру. Згортання мовленнєвого простору з одного чи кількох розгорнутих проводиться завдяки слуховому апарату.

Нижче покажемо, що розпізнавання мовленнєвих сигналів зводиться до задач комбінаторної оптимізації. Аргументом цільової функції в них є комбінаторні конфігурації різних типів.



Наведемо математичну модель розпізнавання мовленнєвих сигналів, яка описана в [1]. Розпізнавання мови – це процес автоматичної обробки мовленнєвого сигналу з метою визначення послідовності слів, яка передається цим сигналом. Подамо його в дискретному вигляді та опишемо послідовністю  $X_J = (x_1, \dots, x_J)$ , елемент  $x_j$  якої є значення сигналу у відліку  $j$ . Довжина  $J$  різних реалізацій вхідного сигналу – різна. Для розпізнавання з реалізацій  $X_J$  створюється словник еталонних слів. Еталон слова словника описується послідовністю  $E_h = (e_{h_1}, \dots, e_{h_{q_h}})$ , де  $h$  – номер слова у словнику,  $q_h$  – довжина сигналу еталона слова,  $h \in \{1, \dots, K\}$ ,  $K$  – кількість слів-еталонів.

Задача розпізнавання мовленнєвих сигналів полягає у знаходженні для сигналу  $X_J$  найбільш правдоподібного еталона  $E_h$  з усіх можливих. Цю задачу розв'язують шляхом порівняння еталона  $E_h$  із сигналом  $X_J$  одним із методів направленої перебору, наприклад методом динамічного програмування [1]. Знаходження сигналу за номером  $h$  з усіх еталонних, якому відповідає вхідний сигнал, розв'язується повним перебором. Аргументом цільової функції в обох задачах, згідно з [1], є вхідний сигнал.

Як видно з наведеної математичної моделі задача розпізнавання мовленнєвих сигналів досить природно розділяється на дві підзадачі: перебір еталонних сигналів та порівняння еталонного та вхідного сигналів. Оскільки тут має місце перебір, то вона відноситься до задач комбінаторної оптимізації.

Визначимо комбінаторну конфігурацію, яка є аргументом цільової функції в задачі розпізнавання та побудуємо її математичну модель як задачу комбінаторної оптимізації.

Розглянемо задачу порівняння еталонного та вхідного сигналів. Уведемо базову множину  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , де  $a_l \in X_J$ ,  $l = \overline{1, J}$ , а  $a_{J+i} \in E_h$ ,  $i = \overline{1, q_h}$ ,  $n = J + q_h$ . Вхідні дані, якими є ваги між елементами  $x_l \in X_J$  та  $e_{h_i} \in E_h$ , задамо несиметричною матрицею  $C = \|c_{il}\|_{q_h \times J}$ , номера стовпців якої збігаються з нумерацією елементів  $x_l \in X_J$ , а номера рядків – з нумерацією елементів  $e_{h_i} \in E_h$ ,  $i = \overline{1, q_h}$ . Аналогічне представлення вхідних даних подано розгорнутим графом слова в [1]. Оскільки з базової множини  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  вибираються по чергово по два елементи у строгому порядку, то отримана комбінаторна конфігурація є розміщення без повторень. Позначимо її  $\mu^k \in M$ , де  $M$  – їхня множина. Для визначення елементів  $a_j$ , що вибираються з бібліотеки еталонів на  $k$ -му варіанті розв'язку задачі, уведемо комбінаторну (0,1)-матрицю  $Q(\mu^k) = \|g_{il}^k(\mu^k)\|_{q_h \times J}$ . Верхній індекс  $k$  ( $k \in \{1, \dots, q\}$ ) у  $w^k$  позначає порядковий номер  $w^k$  у  $W$ ,  $q$  – кількість  $w^k$  у  $W$ . Якщо  $g_{il}^k(\mu^k) = 1$ , то з множини  $A$  вибрана пара  $(x_l, e_{h_i})$ , в іншому разі – значення  $g_{il}^k(\mu^k) = 0$ .

Задача порівняння еталонного та вхідного мовленнєвих сигналів полягає в знаходженні такого розміщення без повторень  $\mu^{k*} = (\mu_1^{k*}, \dots, \mu_q^{k*})$ , для якого змодельована цільова функція (інтегральна міра подібності) набуває максимального значення.

Розглянемо задачу пошуку еталона в бібліотеці. Позначимо  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  базову множину, де  $a_1 \in X_J$ , а  $a_i \in E_{i-1}$ ,  $i = \overline{2, n}$ . В цій задачі як ваги між еталонним та вхідним сигналами виступають значення інтегральних мір подібності, одержаних при розв'язанні задачі порівняння еталонного та вхідного сигналів та представлених матрицею  $C'$ . Номера стовпців цієї матриці збігаються з номерами еталонних сигналів, розміщених у бібліотеці. Рядок у ній один та відповідає номеру один вхідного сигналу. Оскільки при порівнянні вхідного та еталонного сигналів з базової множини  $A$  вибираються два елементи, то утворений об'єкт є сполучення без повторень. Позначимо його  $\mu'^k \in M'$ , де  $M'$  – їхня множина.

Задача пошуку еталонного сигналу, який відповідає вхідному, полягає у знаходженні такого сполучення без повторень  $\mu'^{k*} = (a_1, a_t)$  із  $n$  елементів  $a_t \in A$  по 2,  $t \in \{1, \dots, n\}$ , для якого значення змодельованої цільової функції – найбільше.

Як видно з постановки цієї задачі, пошук еталонного сигналу, подібного до вхідного, потребує повного перебору. Для її розв'язання направленим перебором за певними ознаками проводиться структуризація бібліотеки еталонних сигналів.

#### Мультимножини та багатодикторне розпізнавання мовленнєвих сигналів.

Мовленнєві сигнали, що відповідають одному і тому ж слову, але вимовлені різними дикторами, відрізняються як частотою так і величиною амплітуди. Визначення подібності вхідного та еталонного

сигналів у багатодикторних системах проводиться багатьма способами, наприклад описаних в [1]. Мовленнєвий сигнал моделюється вибіркою – розміщення з повтореннями з  $n^*$  елементів  $\tilde{b}_s \in \tilde{B}$  по  $\tilde{\eta}$ , в якій урахується порядок елементів,  $s, \tilde{\eta} \in \{1, \dots, n^*\}$ . Одне і те ж слово, повторене кілька разів одним і тим же диктором або різними дикторами, відрізняється завдяки тому, що отримані розміщення з повтореннями містять різну кількість елементів мовленнєвого тракту.

Мовленнєвий сигнал (розміщення з повтореннями) подамо мультимножиною. Вона формально визначається як пара  $(\tilde{B}, m)$  де  $m: \tilde{B} \rightarrow N$  функція з  $\tilde{B}$  у множину  $N$  натуральних чисел, тобто кожному елементу множини  $\tilde{B}$  відповідає певне натуральне число, яке називається кратністю цього елемента. Мовленнєвий сигнал задамо функцією  $f_t|_1^p = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ , де  $f_t$  – значення амплітуди у відліку  $t$  сигналу. Проведемо його сегментацію на майже періодичні та неперіодичні відрізки. Поточний майже період розділимо на  $q$  відліків та опишемо мультимножиною, яку задамо основою  $(f_t|_1^p, m)$ , де  $p$  – величина, яка визначається експериментально та однакова для будь-якого відрізка сигналу. В  $t$ -му відліку повинно бути лише одне значення  $f_t$ . Еталон, за яким встановлюється подібність майже періоду, моделюється аналогічно. Подібність визначаємо за виразом  $|f_t - f_t'| \leq \varepsilon$  та  $|m_t - m_t'| \leq \varepsilon'$ , де  $f_t'$  – значення сигналу еталона у відліку  $t$ ,  $m_t'$  – кратність елемента  $f_t'$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  – мінімальні величини, за якими встановлюється подібність вхідного та еталонного сигналів, визначаються експериментально.

#### Синтез індивідуального мовлення з використанням фрагментів природної мови

Задача синтезу мовленнєвих сигналів полягає у їхньому відтворенні за заданим текстом. Як правило, для розв'язання задачі синтезу створюється бібліотека фрагментів, утворених із природних мовленнєвих сигналів, або такі фрагменти створюються штучно. Ця задача розв'язується об'єднанням майже періодів або ділянок сигналу, вибраних із бібліотеки, у фонему, що відповідають певним звукам (відповідно буквам заданого тексту) з використанням розроблених правил. Аргумент цільової функції в цій задачі відноситься до вибірок (розміщення з повтореннями). Множину бібліотечних елементів позначимо  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , де  $a_j$  – елемент, що відповідає майже періоду або іншій ділянці мовленнєвого сигналу. Подамо штучний сигнал, що відповідає певному слову (реченню), розміщенням з повтореннями  $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_\eta^k)$ , де  $\mu_t^k = (a_{j_1}, \dots, a_{j_{\zeta_t}})$  – фонема, а  $a_{j_l} \in A$  –  $j$ -й бібліотечний елемент фонему. Природний мовленнєвий сигнал заданого слова (речення) позначимо кортежем  $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_\eta^*)$ , де  $\mu_s^* = (\mu_{s1}^*, \dots, \mu_{s\zeta_s^*}^*)$  – фонема, а  $\mu_{si}^*$  – її елемент. Задача синтезу мовленнєвих сигналів полягає у знаходженні такого розміщення з повтореннями  $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_\eta^k)$ , для якого одержаний штучний мовленнєвий сигнал відповідав би природному його звучанню.

Граматичні правила у синтезі мовленнєвих сигналів можна розглядати як міри подібності. Оскільки вони розроблені ґрунтовно, то при відсутності умови відтворення індивідуальності голосу ця задача є розв'язною. Жіночий, чоловічий або дитячий голос залежить від частоти основного тону, амплітуди сигналу, тому ця задача є також розв'язною. Відтворення індивідуального мовлення залежить від набагато складніших чинників: від мовленнєвого тракту індивідууму, від його емоційного стану, від особливості його психіки тощо. Оскільки ці параметри змоделювати досить складно, то ця задача не є розв'язною. Існуючі синтезатори характеризуються досить високою натуральністю звучання, але не відтворюють особливості мовлення індивідууму. Ряд експериментів, проведених за допомогою розробленого комплексу програм синтезу мовленнєвих сигналів із фрагментів природної мови показав, що індивідуальність мовлення зберігається у майже періоді, що відповідає основному тону  $f_t$ , та дифонах  $\tilde{f}_k$ , виділених з природного сигналу. Але, якщо згенерувати сигнал із природних майже періодів так, що значення їхніх амплітуд  $A_i$  і довжин  $D_t$  майже періодів (в дискретах) – однакові на усіх ділянках, то голос звучить одноманітно, з металевим відтінком без будь-яких емоцій. Для природного звучання із збереженням індивідуальності мовлення та емоційності необхідно, крім наявності природних майже періодів та дифонів, точно відтворити характерні параметри індивідууму: значення амплітуди сигналу, довжину майже періоду (на початку, посередині, в кінці сигналу, під наголосом), мінімальну кількість майже періодів  $K$ , при яких відтворюється певна фонема тощо. Експеримент показав, що навіть при виконанні оговорених вище умов, згенерований штучний мовленнєвий сигнал із природного набуває індивідуального звучання.

**Задача клінічної діагностики**

Задача клінічної діагностики полягає у знаходженні для вхідних даних (множини ознак певного захворювання) найбільш правдоподібного еталонного з усіх можливих еталонних сигналів або ознак. Для розв'язання цієї задачі необхідно провести пошук певного еталону в бібліотеці та порівняти його із вхідними даними.

Наведемо математичну постановку задачі клінічної діагностики як задачу комбінаторної оптимізації [6]. Позначимо  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  множину захворювань, описання яких знаходиться в бібліотеці (множина еталонів), де елемент  $a_l \in A$ ,  $l \in \{1, \dots, n\}$ , відповідає певному захворюванню, якому поставлено у відповідність характерні ознаки  $V^{(l)} = (v_1^{(l)}, v_2^{(l)}, \dots, v_{q_l}^{(l)})$ ,  $q_l$  – кількість ознак  $l$ -го захворювання. Вхідною інформацією в задачі клінічної діагностики є множина ознак  $\tilde{V} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{\tilde{q}})$ , що описує одне або кілька захворювань. Позначимо їх  $B = \{b_1, \dots, b_{\tilde{n}}\}$ , де  $b_t \in B$  – захворювання, яке потрібно визначити,  $\tilde{n}$  – кількість можливих захворювань, а  $q_t \neq \tilde{q}$  або  $q_t = \tilde{q}$ . Ознаки  $\tilde{v}_r \in \tilde{V}$  вхідної інформації мають той же зміст, що і описані в еталоні ознаки  $v_s^{(t)} \in V^{(t)}$ ,  $r \in \{1, \dots, \tilde{q}\}$ ,  $s \in \{1, \dots, q_t\}$ .

Якщо порівняти задачу розпізнавання мовленнєвих сигналів та задачу клінічної діагностики то можна пробачити, що обидві розділяються на три підзадачі, а саме: 1) структуризація бібліотеки еталонів (розв'язання задачі кластеризації), 2) пошук у бібліотеці еталонної інформації, 3) порівняння еталонної та вхідної інформації. Для обох класів задач аргументом цільової функції в першій підзадачі є розбиття  $n$ -елементної множини на підмножини, в другій – розміщення без повторень, а в третій – сполучення без повторень. Тобто ці задачі подібні за аргументом цільової функції.

**Висновок**

Як видно з викладеного, задачі обчислювального інтелекту (розпізнавання та синтез мовленнєвих сигналів, розпізнавання електрокардіограм, клінічна діагностика) моделюються в рамках теорії комбінаторної оптимізації. Аргументи цільової функції в них – комбінаторні конфігурації різних типів. Природні сигнали утворюються з елементів заданої базової множини та є комбінаторними конфігураціями (розміщення з повтореннями). В розпізнаванні вони є вхідними даними.

**Список використаної літератури**

1. Винцюк Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов / Т.К. Винцюк. – К.: Наук. думка, 1987. – 262 с.
2. Шлезингер М. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию образов / М. Шлезингер, В.Главач. – К.: Наук. думка, 2004. – 535 с.
3. Грищенко А.В. Диагностирование заболеваний на базе нейронных сетей / А.В. Грищенко // Искусств. интеллект. – 2006. – № 4. – С. 281-289.
4. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. – 2007. – 32 с.
5. Тимофієва Н.К. Знакові комбінаторні простори та штучний інтелект / Н.К. Тимофієва // Штучний інтелект. 2015. 1-2(67-68). – С.180-189.
6. Тимофієва Н.К. Аргумент цільової функції в задачі клінічної діагностики / Н.К. Тимофієва, В.І. Грищенко // УСИМ.– 2012. – № 3 – С.3 – 14.

УДК 007+681+510.2

P.P. TROKHIMCHUCK

Lesya Ukrayinka East European National University

## PROBLEMS OF COMPLEXITY IN MODERN CYBERNETICS AND COMPUTING SCIENCE AND WAYS OF THEIR RESOLUTIONS

*Problems of complexity in modern cybernetics and computing science are discussed. Possible ways of their resolutions are represented. Two concepts of this problem (computational and system) are analyzed. First concept is connected with idea of created universal theory of calculation. Second concept has more wide scientific value: creation universal system of analysis, synthesis and formalization of knowledge. It was shown that theory of optimal informative calculation is realization of first concept, and polymetric analysis – second concept. Basic perspectives of development and application of these concepts are discussed too.*

*Keywords: complexity, cybernetics, computing science, informative calculations, polymetric analysis, S. Beer problem of century in cybernetics.*

П.П.ТРОХИМЧУК

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

## ПРОБЛЕМИ СКЛАДНОСТІ У СУЧАСНІЙ КІБЕРНЕТИЦІ ТА ІНФОРМАТИЦІ ТА ШЛЯХИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

*Обговорюються проблеми складності в сучасній кібернетиці та інформатиці. Представлені можливі шляхи їх розв'язку. Проаналізовано дві концепції цієї проблеми (обчислювальна та системна). Перша концепція пов'язана з ідеєю створення універсальної теорії обчислень. Друга концепція має більш широке наукове значення: створення універсальної системи аналізу, синтезу та формалізації знань. Було показано, що теорія оптимальних інформаційних обчислень є реалізацією першої концепції, а поліметричний аналіз - другої концепції. Основні перспективи розвитку та застосування цих концепцій обговорюються також.*

*Ключові слова: складність, кібернетика, інформатика, інформаційні обчислення, поліметричний аналіз, проблеми століття С. Біра в кібернетиці.*

П.П.ТРОХИМЧУК

Восточноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

## ПРОБЛЕМЫ СЛОЖНОСТИ В СОВРЕМЕННОЙ КИБЕРНЕТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

*Обсуждаются проблемы сложности в современной кибернетике и информатике. Представлены возможные пути их решения. Проанализированы две концепции этой проблемы (вычислительная и системная). Первая концепция связана с идеей создания универсальной теории вычислений. Вторая концепция имеет более широкое научное значение: создание универсальной системы анализа, синтеза и формализации знаний. Было показано, что теория оптимальных информационных вычислений является реализацией первой концепции, а полиметрической анализ - второй концепции. Основные перспективы развития и применения этих концепций обсуждаются также.*

*Ключевые слова: сложность, кибернетика, информатика, информационные вычисления, полиметрической анализ, проблемы века С. Бира в кибернетике.*

### Introduction

Problem of complexity is one of central problem in modern science, including mathematics and cybernetics [1 – 17]. This problem is caused in synthetically sciences. Roughly speaking it has two aspects: system (problem of century in cybernetics according S. Beer [1, 10, 13]) and computational (problem of computational complexity [1, 2, 17]). Last problem is included in basic problems of modern mathematics (Smale problems) [1, 11].

As variant of resolution system aspect of problem complexity in cybernetics may be problem simplicity – complexity, which is included in Polymetric Analysis (PA) (universal system of analysis, synthesis and formalization of knowledge) as principle simplicity.

Hybrid theory of systems (HTS) as element of PA is created on the basis principles (criteria) of reciprocity and simplicity [1–4]. Only 10 minimal types of formalization system may be used. But number of real systems may be infinite. These systems are differed by step of its complexity. It is may be represented as answer on the one of basic question of modern theory of systems [1, 3–7, 9] about possible number of systems and its classification with point of simplicity – complexity [1, 3–6].

Therefore HTS may be represented as variant of resolution the problem of century in cybernetics according S. Beer and may be used for the resolution problem of computational complexity (theory of informative calculations, TIC) [1, 3–6].

Theory of informative may be represented as variant of resolution of computational complexity [1, 3–6].

#### Basic results and discussions

We begin this chapter from phrase by S. Beer [10]: “Apparently, the complexity becomes the problem of the century, just as the ability to process natural materials has been a problem of life and death for our forefathers. Our tool must be computers, and their efficiency should be provided by science, able to handle large and complex systems of probabilistic nature. This science may be cybernetics - the science of management processes and communication. The basic thesis of cybernetics can be set forth as follows: there are natural laws behavior of the large multibonds systems of any character submits that - biological, technical, special and economic.” But nature of some problems may be nonprobabilistic too. Therefore this problem must be expanded on problem of formalization of all science and knowledge. But modern science is the realization of the R. Bacon – Descartes concept “Science is so science, how many mathematics is in her” [1]. Development of modern science practically isn't possible without computers.

Computational complexity theory [17] is a branch of the theory of computation in theoretical computer science that focuses on classifying computational problems according to their inherent difficulty, and relating those classes to each other. A computational problem is understood to be a task that is in principle amenable to being solved by a computer, which is equivalent to stating that the problem may be solved by mechanical application of mathematical steps, such as an algorithm.

A problem is regarded as inherently difficult if its solution requires significant resources, whatever the algorithm used. The theory formalizes this intuition, by introducing mathematical models of computation to study these problems and quantifying the amount of resources needed to solve them, such as time and storage. Other complexity measures are also used, such as the amount of communication (used in communication complexity), the number of gates in a circuit (used in circuit complexity) and the number of processors (used in parallel computing). One of the roles of computational complexity theory is to determine the practical limits on what computers can and cannot do [17].

Closely related fields in theoretical computer science are analysis of algorithms and computability theory. A key distinction between analysis of algorithms and computational complexity theory is that the former is devoted to analyzing the amount of resources needed by a particular algorithm to solve a problem, whereas the latter asks a more general question about all possible algorithms that could be used to solve the same problem. More precisely, it tries to classify problems that can or cannot be solved with appropriately restricted resources. In turn, imposing restrictions on the available resources is what distinguishes computational complexity from computability theory: the latter theory asks what kind of problems can, in principle, be solved algorithmically [2, 17].

The question why the concept of computational complexity is hard for the verifiable mathematics was discussed by J. Hromkovič [16]. Therefore we must expand this problem on all science with help system with variable hierarchy or variable measure [18].

Therefore in computational sense these theories were generalized in theory of informative calculations, which is constructed on the basis of expansion quadratic forms on all possible procedure of measurement and estimation. Basic element of this theory was called as generalizing knot or functional number  $N_{\varphi_i}$ . Basic notion of this theory generalizing informative calculations included all possible specific elements of fundamental and computing science: number of corresponding mathematical operations, their times of realization and algorithmic complexity.

Problem of creation optimal theory of calculations or informative calculations is caused of the development of modern science, including physics, cybernetics and computer science [1, 3–6]. Complexity of calculations is one of central problems of modern cybernetics and computer science [1-3]. This problem is included in famous important unresolved problems of modern mathematics (Smale problems) [1, 15].

The ways of resolution of problem complexity or creation universal theory of calculation were searched by Pythagor and Leubniz [1]. Pythagorean way was founded on the synthesis of esoteric Egyptian system and “open” Sumerian system. Leubnician way was caused to creation of modern differential and integral calculations and mathematical logics [1].

Another way resolution of this problem is theory of informative calculations [1, 5]. This theory is based on the polymetric theory (theory of variable measure or theory of measure and measurements with including procedure of measurements in measure) of measure and measurements and is one of basic element of polymetric analysis.

Polymetric analysis was created as universal system of analysis, synthesis and formalization of knowledge. PA is alternative optimal concept to logical, formal and constructive conceptions of modern mathematics and theory of information [1]. This concept is based on the idea of triple minimum: methodological, mathematical and concrete scientific.

Basic elements of this theory and their bonds with other science are represented in Fig. 1 [1].

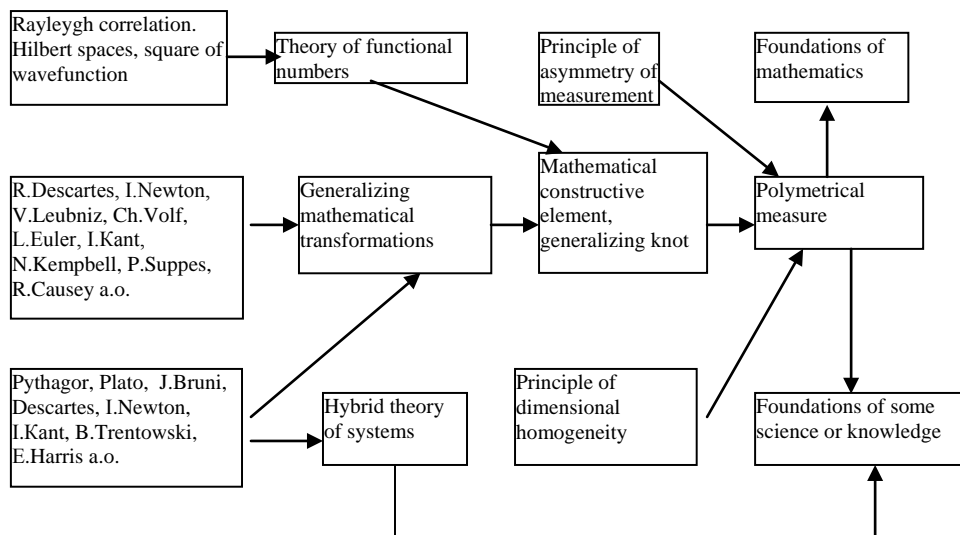


Fig. 1. Schema of polymetric method and its place in modern science [1].

Basic mathematical element of polymetric analysis is functional number (generalizing elements of quadratic forms) [1]. As in Greece mathematics number is basic elements of its system. For these numbers generalizing mathematical transformations were constructed. 15 minimal types of its transformations are existed. Informative lattice is constructed on the basis if functional numbers and generalizing mathematical transformations. Theory of informative calculations is created for this lattice. Basic principle of this theory is the principle of optimal informative calculations [1, 5].

For classification of systems of calculation hybrid theory of systems was created. This theory is based on two criterions: criterion of reciprocity – principle of creation of proper formal system, and criterion of simplicity – principle of optimality of this creation. For “inner” bond of two elements of informative lattice a parameter of connectedness  $\sigma_i$  was introduced. Principle of optimal informative calculation is included in criterion of simplicity.

At help these criteria of reciprocity and simplicity and parameter of connectedness the basic famous parts of knowledge and science may be represent as next 10 types of hybrid systems [1, 3, 4]:

1. The system with conservation all positions the criteria of reciprocity and simplicity for all elements of mathematical construction ( $N_{\varphi_{ij}}$  and transformations) is called the *simple system*.

2. The system with conservation the criterion of simplicity only for  $N_{\varphi_{ij}}$  is called the *parametric simple system*.

*Remark 1.* Further in this classification reminder of criteria of reciprocity and simplicity is absented. It mean that these criteria for next types of hybrid systems are true.

3. The system with conservation the criterion of simplicity only for general mathematical transformations is called *functional simple system*.

4. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation and with  $\sigma_i = 1$  is called the *semisimple system*.

5. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation only for  $N_{\varphi_{ij}}$  and with  $\sigma_i = 1$  is called the *parametric semisimple system*.

6. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation only for general mathematical transformations and with  $\sigma_i = 1$  is called the *functional semisimple system*.

7. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation and with  $\sigma_i \neq 1$  is called *complicated system*.

8. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation only for  $N_{\varphi_{ij}}$  is called *parametric complicated system*.

9. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation only for general mathematical transformations and with  $\sigma_i \neq 1$  is called *functional complicated system*.

10. The system with nonconservation the criteriums of reciprocity and simplicity and with  $\sigma_i \neq 1$  is called *absolute complicated system*.

With taking into account 15 basic types of generalized mathematical transformations we have 150 types of hybrid systems; practically 150 types of the formalization and modeling of knowledge and science [1, 3, 4].

Only first four types of hybrid systems may be considered as mathematical, last four types are not mathematically. Therefore HTS may be describing all possible system of knowledge. Problem of verbal and

nonverbal systems of knowledge is controlled with help of types the mathematical transformations and parameter connectedness [1].

HTS may be used for the classification and creation old and new chapters of all science, including computing science.

HTS may be used for the represented of evolution of systems in two directions: 1) from simple system to complex system (example, from classic to quantum mechanics) and 2) conversely, from complex system to simple system (example, from formal logic to mathematical logic) [1].

Hybrid theory of systems is open theory. Parameters of openness are number of generalizing mathematical transformations and parameter of connectedness. Thereby we have finite number of types of systems, but number of systems may be infinite. Hybrid theory of systems allows considering verbal and nonverbal knowledge with one point of view [1, 4 – 6]. Therefore this theory may be represented as variant of resolution S. Beer centurial problem in cybernetics [1].

HTS may be represented as application PA (HTS) to the problem of calculation [1, 3]. This theory was used for the problem of matrix computation and problem of arrays sorting [1, 3, 4].

HTS may be connected with problem of computational complexity. This problem was appeared in modern cybernetics for resolution of problem the transition from infinite (analytical) to discrete representation of computing procedures [1, 3, 4]. In may be connected with 4 and 5 Smale problems [1,15]

Mathematical constructive element may be represented as generalizing knot of informative lattice. Generalizing mathematical transformations are classified as quantitative and qualitative, left and right. Calculative (quantitative) transformations are corresponded to primary measurement and qualitative transformations – to derived (secondary) measurements. It allows formalizing N.R.Campbell concept [1, 8] about primary and derived measurements. Result of this formalization was named polymetric theory of measure and measurement. Basic principles of this theory are principle of asymmetry of measurement for calculative transformations and principle of dimensional homogeneity. This theory is optimal synthesis of all famous theories of measure and measurements and dimensional analysis [1]. N.R. Campbell concept is more general as “measuring” part of quantum mechanics [1, 3]. Therefore L.I. Mandelstam called Quantum Mechanics as science of derivative measurements [1, 3].

Polymetric analysis is the system of optimal formalization, synthesis and analysis of knowledge. But it is the nature of mathematics [1, 14]. For creation of theory of foundations of mathematics we must include three aspects: synthesis, analysis and formalization. This theory must be open system. Therefore Russel – Whitehead “logic” concept, Hilbert – Bernayce “formal” concept and Brauer – Heiting “constructive” concept can’t be full theories of foundations of mathematics [1]. It was cause of crisis in theory of foundations of mathematics. Therefore A.N. Whitehead made conclusion that logical concept can’t be the theory of foundations of mathematics [1, 19]. But it must be “organismic” theory [19]. Practically this concept was realized in cybernetics: theory of neuronets, systolic computers, theory of cellular automata a.o. [1]. Therefore polymetric analysis may be represented as variant of realization of Whitehead concept of “organism” mathematics and formalizing unification of proper cybernetic theories (Ivakhnenko concept of neurosets itc.) [1, 7, 11].

Attempt of association of all possible knowledge in one system on the number (arithmetical) basis was made by Platon: three types of numbers (arithmetical, sensitive and ideal). With modern point of view a arithmetical numbers are corresponded to modern pure mathematics; a sensitive numbers are corresponded to modern applied mathematics and ideal numbers are corresponded to other chapter of science and knowledge [1].

Polymetric analysis may be represented as optimal “dynamical” formalization of Errol E. Harris polyphasic concept of modern science [1, 12]. But Harris concept hasn’t universal “dynamical” mechanism of creation and evolution of science.

Polymetric measure (generalizing knot of informative lattice) may be used in monadology as monada [6]. Only Leibniz considered monad as a universal first principle [6]. J. Bruni considered monad as philosophical first principle only. Therefore polymetric analysis may be represented as formalization of Leibnizian monadology and variant resolution of second her problem: search and creation of universal calculation. This problem must be resolve with help methods of theory of open system. Roughly speaking, in Leibnizian terms, we must be uniting concept of monad with concept of creation of universal calculation. But universal terms of mathematics are number and measure. This concept must be general for the creation universal system of knowledge. Therefore the polymetric measure (functional number, generalizing knot of informative lattice) is included this concept, but it include the procedure of measurement with help generalizing mathematical transformations

Polymetric analysis may be represented as renewal ancient Egyptian and Pythagorean systems (only their computational part) [1, 3, 5]. It may be answer on question: why Egyptian and Greece mathematics managed without zero [1]. But it may be represented as answer on Pythagorean phrase: “Numbers rule of the World” and variant of decoding “mathematical” part of famous Egyptian mythological table by god Thot [1].

Thus basic concepts of awakening, creation and development of synthesis with including of historical analysis of this problem are represented in [1]. Therefore with this point of view polymetric analysis is the necessary development of problem of formalized synthesis in modern science.

According to A. Ershov basic problem of modern computer science is formalization of phrase of Canadian philosopher L. Hall: “Everything comes from the head – intelligent” [1]. Therefore PA may be represented as optimal formalization of this thesis and, as effect, theoretical basis of modern computing science (informatics) [1, 3]

too. In our time theory of modern computing science must be universal system of analysis, synthesis and formalization of knowledge and it must be connected with concepts of number, measure and measurement that to comply with the most basic issues and problems of modern computer science. But it is problems of polymetric analysis. Problems of simplicity- complexity is include in the basis of this science and have many values and meanings.

### Conclusions

1. Problems of complexity in modern cybernetics and computing science are discussed.
2. Some historical aspects of problem simplicity-complexity are analyzed too.
3. It was shown that this problem may be resolved with help of theory of open systems.
4. It was shown that HTS may be represented as variant of resolution problem of century in cybernetics according by S. Beer and theory of informative calculations – as variant of resolution of problems of computational complexity.
5. Basic concept and chapters of polymetric analysis are analyzed.
6. It shown, that polymetric analysis is the necessary development of problem of optimal formalized synthesis in modern science.

### References

1. Трохимчук П.П. Математичні основи знань. Поліметричний підхід./ П.П. Трохимчук. – Луцьк: Вежа-Друк, 2014. – 624 с.
2. Кнут Д., Грин Д. Математические методы анализа алгоритмов./ Д. Кнут, Д. Грин. – Москва: Мир, 1987. – 324с.
3. Trokhimchuck P.P. Polymetrical analysis: retrospective and perspective. / P.P. Trokhimchuck //Int. J. on Recent and Innovation Trends in Computing and Communications. – 2016. – Vol. 4. – No.1. – P.173 – 183.
4. Trokhimchuck P.P. Polymetric method and problem of the creation the universal system of knowledge and language/ P.P. Trokhimchuck. // Мова і культура. – Київ: Видавничий дім Дмитра Бурого, 2002. – Вип.5. – Т.1. Ч.2. – С.291-297
5. Trokhimchuck P.P. Theory of informative calculations: necessity of creation and problems of development / P.P. Trokhimchuck // Bulletin of Kherson National Technical University. – 2015. – №3(54). – P. 57-61.
6. Трохимчук П. Монадологія та поліметричний аналіз як оптимальні системи опису знань та культури. / П.П. Трохимчук.// Мова і культура. – Київ: Видавничий дім Дмитра Бурого, 2014. – Вип.17. – Т.2 (170). – С.5-13.
7. Кухтенко А.И. Кибернетика и фундаментальные науки./ А.И. Кухтенко. – Киев: Наукова Думка, 1987. – 144 с.
8. Campbell N.R. Physics. The elements./ N.R. Campbell. – Cambridge: University Press, 1920. – 565p.
9. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы./ Дж. Касти. – Москва: Мир, 1982. – 216 с.
10. Бир С. Мы и сложность современного мира./ С. Бир. // Кибернетика сегодня: проблемы и суждения. – Москва: Знание, 1976. – С.7–32.
11. Ивахненко А.Г. Непрерывность и дискретность./ А.Г. Ивахненко.– Киев: Наукова Думка, 1990.– 224 с.
12. Harris E.E. Hypothesis and perception./ E.E.Harris. – London: George Allen Unwin and New-York: Humanities Press,1970. – 395 p.
13. Бирюков Б.В. О понятии сложность // Логика и методология науки./ Б.В. Бирюков, В.С. Тюхтин. – Москва: Наука, 1967. – С. 18 – 35.
14. Ружа И. Основания математики. / И. Ружа. – Киев: Вища школа, 1981. –
15. Smale S. Mathematical problems for the next century» / S. Smale / Mathematics: frontiers and perspectives. – New York: American Mathematics Society, 2000. – P. 271–294.
16. Hromkovič J. Why the Concept of Computational Complexity is Hard for Verifiable Mathematics /J. Hromkovič // Electronic Colloquium on Computational Complexity. – 2015. – Report No. 159. – 14p.
17. Гери М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи./ М. Гери, Д. Джонсон. – Москва: Мир, 1982. – 420с.
18. Трохимчук П.П. Проблеми створення теорій відкритих систем./ П.П. Трохимчук. // Науковий вісник СХУ ім. Лесі Українки. Фізичні науки. №17 (294), 2014. – С. 47 – 54.
19. Whitehead A.N. Science and the modern World./ A.N. Whitehead. – N.-Y.: Pelican Mentor Books,1948. – 224p.



## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

УДК 539.219.3

Г.С. АБРАМОВ, М.Г. АБРАМОВ, Ю.Н. БАРДАЧЁВ  
Херсонский национальный технический университет

### КОАЛЕСЦЕНЦИЯ ЧАСТИЦ ОКИСЛОВ НА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАДИИ ПРОЦЕССА ВНУТРЕННЕГО ОКИСЛЕНИЯ

*Изучена асимптотическая стадия процесса внутреннего окисления – коалесценция в пластинах бинарных сплавов. Показано, что стадии коалесценции Лифшица-Слѣзова предшествует достаточно длительная стадия замедленного роста частиц, которая обусловлена потоком легирующего элемента из пластины во внешнюю среду.*

*Ключевые слова:* бинарные сплавы, внутреннее окисление, коалесценция, теория Лифшица-Слѣзова

Г.С. АБРАМОВ, М.Г. АБРАМОВ, Ю.М. БАРДАЧОВ  
Херсонський національний технічний університет

### КОАЛЕСЦЕНЦИЯ ЧАСТИНОК ОКСИДОВ НА АСИМПТОТИЧНІЙ СТАДІЇ ПРОЦЕСУ ВНУТРІШНЬОГО ОКИСЛЕННЯ

*Вивчено асимптотичну стадію процесу внутрішнього окислення – коалесценцію в пластинах бинарних сплавів. Показано, що стадії коалесценції Ліфшиця-Сльозова передує досить тривала стадія уповільненого зростання частинок, яка обумовлена потоком легуючого елемента з пластини в зовнішнє середовище.*

*Ключові слова:* бінарні сплави, внутрішнє окислення, коалесценція, теорія Ліфшиця-Сльозова

G.S. ABRAMOV, M.G. ABRAMOV, Y.N. BARDACHOV  
Kherson national technical university

### COALESCENCE OF OXIDE PARTICLES AT THE ASYMPTOTIC STAGE OF INTERNAL OXIDATION PROCESS

*The asymptotic stage of the process of internal oxidation - coalescence of binary alloys in the plates is explored. It is shown that the coalescence stage of Lifshitz-Slyozov theory, is preceded by a long slow particle growth step, which is caused by the flow of the alloying element from the plate to the external environment.*

*Keywords:* binary alloys, internal oxidation, coalescence, theory of Lifshitz-Slyozov

#### Постановка проблеми

В предыдущих работах авторов [1–3] проведено экспериментальное и теоретическое исследование процесса внутреннего окисления в бинарных сплавах. Построена физическая и математическая модели процесса и выполнено моделирование всех стадий процесса от зарождения, роста и до коалесценции частиц окислов. Особый интерес представляет асимптотическая стадия процесса – коалесценция, которая для внутреннего окисления имеет ряд особенностей, и формирует, в конечном итоге, долговременные характеристики внутреннеокисленных сплавов, из которых наибольший интерес представляют жаропрочность и жаростойкость. Это определяет актуальность исследования асимптотической стадии процесса внутреннего окисления, так как её недостаточная изученность как в теоретическом, так и в экспериментальном отношении в определённой мере сдерживает и практическое использование процессов типа внутреннего окисления.

#### Анализ публикаций и достижений

Рассмотрим кинетику изменения  $\bar{R}$  при больших временах процесса внутреннего окисления пластины. Литературные данные по этому вопросу крайне противоречивы. Так имеется ряд экспериментальных работ, в которых подтверждается предсказываемый теорией Лифшица-Слѣзова [4] кубический закон роста среднего радиуса со временем [5–7], Вместе с тем, есть многочисленные работы [8–10], указывающие на существование кинетических законов  $\bar{R}^n = kt$ , где показатель степени  $n$  имеет значения от 1,7 до 9. В исследованиях, где определена кинетика роста  $\bar{R}$  более быстрая, чем кубическая,

по-видимому, изучалась ранняя стадия процесса, связанная с образованием и диффузионным ростом частиц за счёт вещества пересыщенного твёрдого раствора. Гораздо большие трудности встречает объяснение результатов, где получена кинетика роста  $\bar{R}$  более медленная, чем кубическая. Предложенные для объяснения кинетических законов роста частиц с  $n > 3$  механизмы коалесценции, контролируемой не объёмной диффузией, а диффузией по границам зёрен, блоков и дислокационным трубкам [11] часто не спасают положения, т.к. получаемая в этих работах кинетика с  $n = 4-5$  не в состоянии объяснить экспериментально измеренные кинетики с  $n > 5$ .

**Цель работы**

Исследовать особенности стадии коалесценции в процессе внутреннего окисления в отличие от асимптотической стадии распада пересыщенных твёрдых растворов. Провести сравнение теоретических результатов, результатов моделирования и эксперимента.

**Основная часть**

Моделирование процесса внутреннего окисления на примере пластины бинарного сплава [2] позволило объяснить кинетику изменения  $\bar{R}(t)$ . Из рис 1 видно, что после стадии бурного образования и роста частиц с кинетикой, "характеризующихся"  $n \leq 2$  следует стадия медленного роста, которая затем сменяется коалесценцией частиц ( $n = 3$ ).

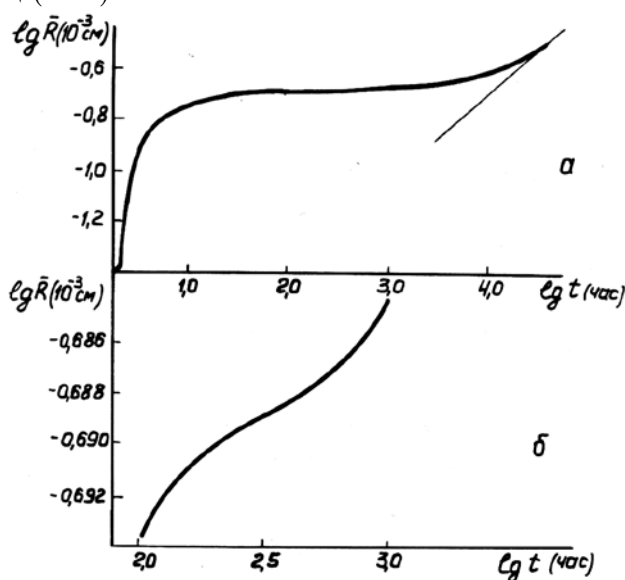


Рис.1 Моделирование кинетики роста на асимптотической стадии процесса внутреннего окисления пластины.

На рис.1а прямой линией отмечен участок, соответствующий кубическому закону роста  $\bar{R}$  (касательная к правому хвосту кривой). На рис.1б показан момент перегиба кривой  $\lg \bar{R} - \lg t$ , то есть переход от более медленной кинетики к более быстрой.

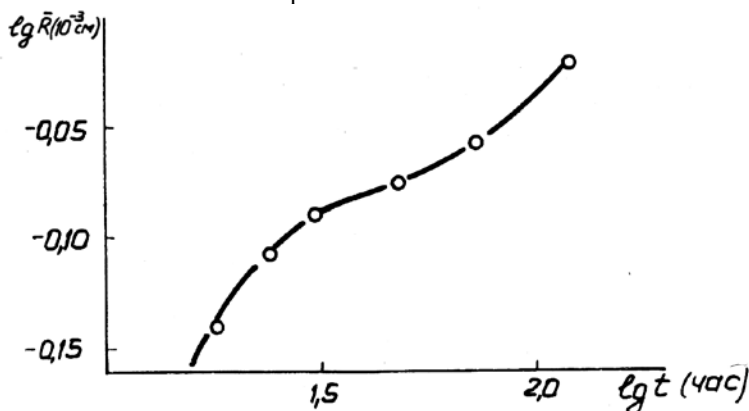


Рис.2 Кинетика изменения  $\bar{R}$  в центре пластины сплава Ni-1%Cr при внутреннем окислении.

Медленная стадия процесса, на которой происходит практически полная стабилизация среднего радиуса частиц, не имеет места при распаде пересыщенных твёрдых растворов в изолированной системе. Экспериментально эта стадия наблюдается при внутреннем окислении сплава Ni-1%Cr (рис. 2).

Покажем, что в системе с пересыщенным твёрдым раствором и растущими частицами второй фазы стадия стабилизации среднего радиуса связана с наличием диффузионного потока легирующего элемента к поверхностям пластины  $x=0$  и  $x=l$ , на которых пересыщение равно нулю. В случае малого объёма частиц  $V_\phi$  и больших временах процесса, когда весь объём сплава является двухфазным, уравнения диффузии в твёрдом растворе могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial t} = D_{11} \frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial x^2} - C_1^\phi \frac{\partial V_\phi}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial t} = D_{22} \frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial x^2} - C_\phi \frac{\partial V_\phi}{\partial t} \quad (2)$$

$$\Delta_i(0,t) = \Delta_i(l,t) = 0; \quad \Delta_i(x,0) = \Delta_i^0(x) \quad (3)$$

где  $\Delta_i = C_i(x,t) - C_i^p$ , ( $i=1,2$ ) – пересыщение твёрдого раствора по  $i$ -му компоненту.

С помощью метода разделения переменных нетрудно получить решение (2) с условиями (3):

$$\Delta_2(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ a_{2m} \exp(-\lambda_{2m}t) - \int_0^t \frac{db_{2m}}{d\tau} \exp(-\lambda_{2m}(t-\tau)) d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (4)$$

Здесь

$$a_{2m} = \frac{2}{l} \int_0^l \Delta_2^{(0)} \sin \frac{m\pi}{l} x dx$$

$$b_{2m} = \frac{2}{l} C_2^\phi \int_0^l V_\phi \sin \frac{m\pi}{l} x dx$$

$$\lambda_{2m} = D_{22} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2$$

причём

$$C_2^\phi V_\phi = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (5)$$

Учитывая, что свёртка в правой части (4) при малых изменениях объёма частиц во времени

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{db_{2m}}{d\tau} \exp(-\lambda_{2m}(t-\tau)) d\tau &= b_{2m}(t) - b_{2m}(0) \exp(-\lambda_{2m}t) - \lambda_{2m} \int_0^t b_{2m}(\tau) \exp(-\lambda_{2m}(t-\tau)) d\tau = \\ &= \frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} - \frac{1}{\lambda_{2m}^2} \frac{d^2 b_{2m}}{dt^2} + \dots - \left( \frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} \Big|_0 - \frac{1}{\lambda_{2m}^2} \frac{db_{2m}^2}{dt} \Big|_0 + \dots \right) \exp(-\lambda_{2m}t) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_{2m}^2} \int_0^t \frac{d^n b_{2m}}{d\tau^n} \exp(-\lambda_{2m}(t-\tau)) d\tau \approx \frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} - \frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} \Big|_0 \exp(-\lambda_{2m}t) \end{aligned}$$

и замечая, что согласно (5)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{db_{2m}}{dt} \sin \frac{m\pi}{l} x = C_2^\phi \frac{V_\phi}{\partial t}$$

имеем

$$\Delta_2 \cong \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left( a_{2m} + \frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} \Big|_0 \right) \exp(-\lambda_{2m}t) \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} + \frac{C_2^\phi}{D_{22}} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial V_\phi}{\partial t} dx dx \quad (6)$$

Далее, подставляя это решение в (1) и пользуясь теми же приёмами, что и для получения выражения (6), имеем

$$\Delta_1 \cong \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_{1m} - p a_{1m} + \frac{1}{\lambda_{1m}} \frac{C_1^\phi}{C_2^\phi} \frac{db_{2m}}{dt} \Big|_0 \right) \exp(-\lambda_{1m}t) \sin \frac{m\pi}{l} x + p \Delta_2 + \frac{C_1^\phi}{D_{11}} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial V_\phi}{\partial t} dx dx \quad (7)$$

где

$$\lambda_{1m} = D_{11} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2; \quad p = \frac{D_{12}}{D_{11}}.$$

На асимптотической стадии процесса ( $t \rightarrow \infty$ ) (6) и (7) преобразуются к следующему виду (с учётом  $\lambda_{2m} \ll \lambda_{1m}$ ).

$$\Delta_2 \cong a_{21} + \frac{1}{\lambda_{21}} \frac{db_{21}}{dt} \Big|_0 \exp(-\lambda_{21}t) \sin \frac{m\pi}{l} x + \frac{C_2^\phi}{D_{22}} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial V_\phi}{\partial t} dx dx \quad (8)$$

$$\Delta_1 \cong p \Delta_2 \Big|_{t \rightarrow \infty} + \frac{C_1^\phi}{D_{11}} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial V_\phi}{\partial t} dx dx \quad (9)$$

С помощью (8) и (9) определим меру пересыщения  $L(x,t)$ , которая, как показано в [3], записывается следующим образом:

$$L(x,t) = \ln a_1^{\omega_1} a_2^{\omega_2} - \ln a_{1p}^{\omega_1} a_{2p}^{\omega_2} = \frac{2\gamma M}{\rho R_r T R_k} \quad (10)$$

Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – стехиометрические коэффициенты растущего соединения, соответственно, для компонентов 1 и 2;  $T$  – температура,  $R_r$  – газовая постоянная,  $\gamma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $M$  – молекулярный вес соединения,  $\rho$  – его плотность;  $a_i$  и  $a_{ip}$  ( $= 1,2$ ) – соответственно, текущая и равновесная термодинамические активности  $i$ -го компонента в твёрдом растворе.

Используя разложение Вагнера

$$a_1 = c_1 \exp(\varepsilon_{11} C_1 + \varepsilon_{12} C_2); \quad a_2 = c_2 \exp(\varepsilon_{21} C_1 + \varepsilon_{22} C_2)$$

получаем из (10) для случая малого отклонения  $C_i$  от  $C_{ip}$  (что соответствует асимптотической стадии процесса):

$$L(x,t) = \gamma_1 (C_1 - C_{1p}) + \gamma_2 (C_2 - C_{2p}) \quad (11)$$

где

$$\gamma_1 = (\omega_1 + \omega_2 \varepsilon_{11} C_{1p} + \omega_2 \varepsilon_{21} C_{1p}) / c_{1p}; \quad \gamma_2 = (\omega_2 + \omega_2 \varepsilon_{22} C_{2p} + \omega_1 \varepsilon_{12} C_{2p}) / c_{2p};$$

Подстановка в (11) выражений (8) и (9) и последующее дифференцирование по  $x$ , даёт

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \beta_1 \frac{\partial V}{\partial t} - \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \beta_2 \exp(-\lambda_{21}t) \sin \frac{\pi}{l} x \quad (12)$$

где

$$\beta_1 = \frac{C_2^\phi}{D_{22}} \left[ (\gamma_1 p + \gamma_2) + \gamma_1 \frac{D_{22} C_1^\phi}{D_{11} C_2^\phi} \right]; \quad \beta_2 = (\gamma_1 p + \gamma_2) \left( a_{21} + \frac{1}{\gamma_{21}} \frac{db_{21}}{dt} \Big|_0 \right)$$

Первое слагаемое в первой части (12) характеризует уменьшение пересыщения за счёт наличия внутренних стоков (частицы второй фазы), а второе – внешних (поверхности пластины  $x=0$  и  $x=l$ ). Из (12) также видно, что оба эти слагаемые имеют разные знаки. Если мощность внутренних стоков больше, чем внешних, то  $\partial^2 L / \partial x^2 > 0$ , в противном случае  $\partial^2 L / \partial x^2 < 0$ . Поскольку на поверхностях пластины  $L(0,t) = L(l,t) = 0$  и, в соответствии с этим:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \leq 0$$

существует максимальная мощность внутренних стоков, при которой вторая производная меры пересыщения равна нулю. Исходя из этого, находим из (12):

$$\frac{\partial V_m}{\partial t} = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} \exp(-\lambda_{21}t) \sin \frac{\pi}{l} x \quad (13)$$

и

$$V_m = \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{1}{D_{22}} \sin \frac{\pi}{l} x (1 - \exp(-\lambda_{21}t))$$

Из (13) следует, что при больших временах зависимость  $V_m(t)$  и, соответственно,  $\bar{R}(t)$  (при  $N = const$ ) являются слабыми функциями времени, которые могут быть описаны выражениями типа  $\bar{R}^n = kt$

лишь весьма приближённо. При такой аппроксимации показатель степени  $n$  будет определяться величиной  $dV_m/dt$  – чем меньше  $dV_m/dt$ , тем больше  $n$ .

Анализ выражения (13) также показывает, что максимальная скорость роста суммарного объёма фазы зависит от величины диагонального коэффициента диффузии легирующего элемента  $D_{22}$ , толщины пластины  $l$  и удалённости сечения  $x$ , в котором рассматривается процесс, от поверхности пластины:  $dV_m/dt$  возрастает с уменьшением  $D_{22}$  и увеличением  $l$  и  $x$ . При  $\frac{\partial V}{\partial t} < \frac{\partial V_m}{\partial t}$ ,  $V(t)$  является ещё более слабой временной функцией, чем (13), но сделанные выводы качественно остаются верными и для этих случаев. Это подтверждается результатами численного моделирования.

Таким образом, присутствие в системе с пересыщенным твёрдым раствором и растущими частицами второй фазы свободных поверхностей, на которых пересыщение равно нулю, обуславливает наличие диффузионного потока вещества из пластины во внешнюю среду. Этот поток отнимает у растущих частиц часть вещества из твёрдого раствора, вследствие чего и замедляется кинетика их роста. Эффект нивелируется по мере уменьшения градиента пересыщения по сечению пластины. При этом система становится все более замкнутой: вещество растворяющихся мелких частиц поступает через твёрдый раствор на рост крупных (отсутствуют "потери" за счёт диффузии вещества из твёрдого раствора во внешнюю среду), то есть всё полнее реализуется процесс коалесценции, описываемый теорией Лифшица-Слёзова.

Кубический закон роста  $\bar{R}(t)$ , полученный по теории Лифшица-Слёзова, достигается при внутреннем окислении пластины со стороны значений  $n > 3$ , в то время как при распаде пересыщенного твёрдого раствора этот закон достигается со стороны значений  $n < 3$ . В этом состоит главная особенность асимптотической стадии процесса внутреннего окисления тонких пластин по сравнению с распадом пересыщенного твёрдого раствора в изолированной системе.

Во многих случаях, как представляется, экспериментальное обнаружение кинетики роста  $\bar{R}$  с  $n > 3$  может быть следствием того, что исследуемые системы находились ещё на медленной стадии неустановившейся коалесценции и кубический закон роста  $\bar{R}$  мог быть найден на более поздней стадии процесса. С другой стороны, анализ экспериментальных работ показывает, что далеко не всегда утверждение о кубическом законе роста  $\bar{R}$  следует из приводимых экспериментальных данных. На стадии неустановившейся коалесценции кинетику роста  $\bar{R}$  в рамках формулы  $\bar{R}^n = kt$  можно установить, исследуя изменение  $\bar{R}$  в координатах  $\lg \bar{R} - \lg t$ . Из рис. 3 следует, что для данных работы [6] кинетический закон роста  $\bar{R}$  между 50 и 100 часами характеризуется показателем  $n = 8-10$ , в пределах 100-150 часов  $n = 5-6$ , и от 150 до 200 часов  $n \approx 4$ , то есть приведённые данные соответствуют стадии неустановившейся коалесценции и кубический закон роста  $\bar{R}$  в данном эксперименте достигается после 200 часов.

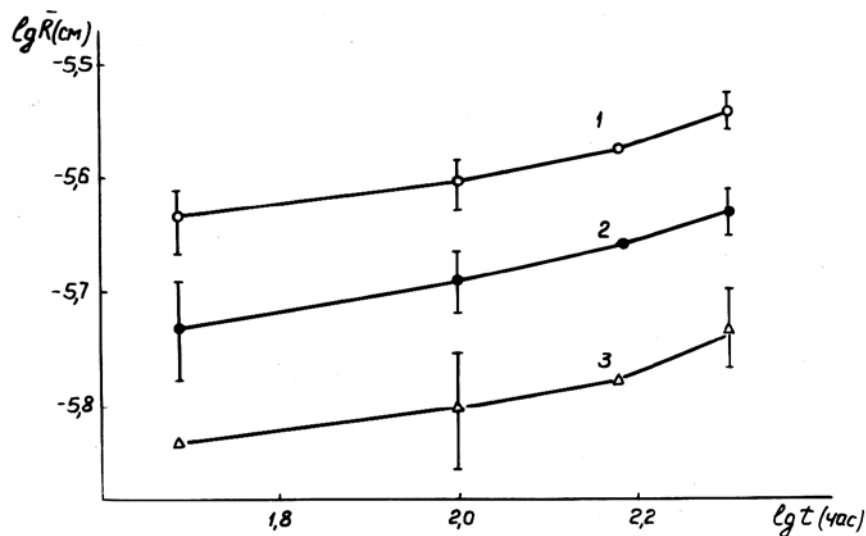


Рис.3 Экспериментальные данные работы [6] по кинетике роста частиц  $ThO_2$  в никеле

(1,2) и в сплаве  $Ni - 20\%Cr$  (3) при различных значениях давления кислорода в координатах  $\lg \bar{R} - \lg t$  ( 1)  $-10^{-8}$ ; 2)  $-10^{-14}$ ; 3)  $-10^{-18}$  ).

Вторая отличительная особенность процесса коалесценции при внутреннем окислении пластин состоит в том, что этот процесс индивидуален для каждого сечения диффузионной зоны. Каждое сечение зоны внутреннего окисления можно представить как отдельную систему, "степень замкнутости" которой зависит от величины градиентов пересыщения по отношению к соседним сечениям. В каждом сечении протекают все стадии формирования двухфазной структуры: зарождение, рост и коалесценция частиц второй фазы; начало каждой стадии для соседних сечений сдвинуто по времени и этот сдвиг тем больше, чем дальше рассматриваемые сечения от поверхности (чем ближе к центру пластины). Изучая кинетику изменения параметров структуры двухфазной области, необходимо фиксировать сечение зоны внутреннего окисления, в котором производятся измерения, так как различные сечения зоны внутреннего окисления в одно и то же время могут находиться на различных стадиях эволюции структуры двухфазной области: зарождения, роста и коалесценции.

Процесс диффузионного перераспределения компонентов между сечениями пластины приводит в конечном итоге к выравниванию  $\bar{R}$  в различных сечениях. Экспериментальные данные о распределении  $\bar{R}$  в различных сечениях внутреннеокисленного сплава  $Ni - 1\%Cr$  и кинетике изменения распределения  $\bar{R}(x)$  показывают тенденцию к выравниванию  $\bar{R}$  по сечению пластины.

Таблица 1

$\frac{x}{l}$	$R, \text{мкм}$		$\frac{\Delta R}{\Delta t} \cdot 10^2 \frac{\text{мкм}}{\text{час}}$	$\frac{\bar{R}_{48}}{\bar{R}_{30}}$
	$t = 30\text{ч}$	$t = 48\text{ч}$		
0,10	0,55	0,76	1,17	1,40
0,25	0,74	0,84	0,55	1,13
0,50	0,83	0,87	0,22	1,05
$\frac{\bar{R}_{0,50}}{\bar{R}_{0,10}}$	1,51	1,14	–	–

Из табл. 1, построенной по этим экспериментальным данным, видно, что скорость роста  $\bar{R}$  значительно выше в приповерхностных сечениях пластины, чем в центральном сечении. Нижняя строка таблицы иллюстрирует выравнивание  $\bar{R}$ : отношение средних размеров частиц в центральном и приповерхностном сечениях пластины уменьшается со временем и приближается к единице. Различие  $\bar{R}$  в разных сечениях зоны внутреннего окисления при больших временах обуславливает и различие в пересыщении твёрдого раствора в этих сечениях. В соответствии с законом Гиббса-Томсона в сечении с меньшим  $\bar{R}$  пересыщение твёрдого раствора выше, чем в сечении с большим  $\bar{R}$ . При моделировании это хорошо прослеживается на этой стадии процесса, когда  $\bar{R} = R_k$ .

Как следует из экспериментальных данных по внутреннему окислению сплавов [1, 2] при больших временах окисления объем фазы в центральном сечении пластины асимптотически приближается к некоторой постоянной величине. Здесь существенно то обстоятельство, что асимптотическое приближение к постоянному объёму фазы происходит сверху, со стороны больших значений объёма фазы. Это свидетельствует о том, что переход к процессу установившейся коалесценции связан с некоторым подрастворением частиц второй фазы. Аналогичный эффект наблюдается и при моделировании процесса внутреннего окисления.

На рис. 4, 5 экспериментальные результаты и результаты моделирования представлены в координатах  $\frac{1}{V_\phi} - \frac{1}{R}$ . Видно, что асимптотической стадии предшествует стадия, которая может быть

аппроксимирована линейной зависимостью  $\frac{1}{V_\phi} - \frac{1}{R}$ . Затем на обеих кривых имеется минимум и

асимптотическое приближение к постоянному значению  $\frac{1}{V_\phi}$ . Физической причиной этого явления также

является незамкнутость системы по легирующему элементу в процессе внутреннего окисления.

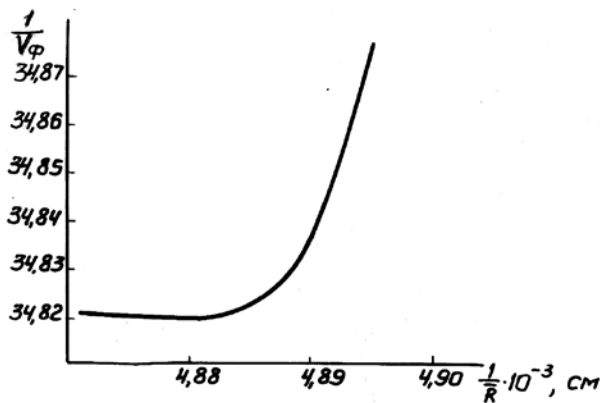


Рис.4 Моделирование зависимости  $1/V_{\phi}$  от  $1/\bar{R}$  на асимптотической стадии процесса внутреннего окисления.

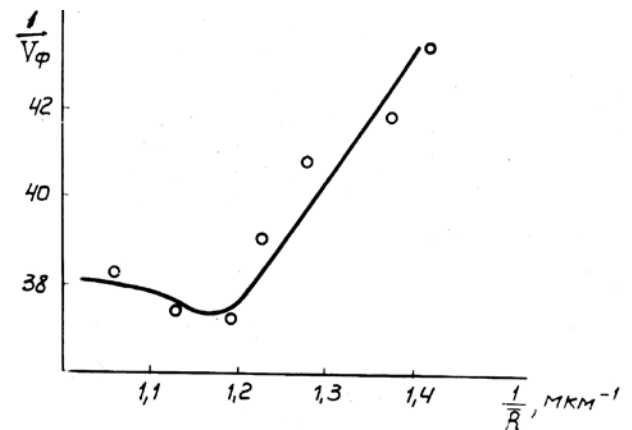


Рис.5 Зависимость  $1/V_{\phi}$  от  $1/\bar{R}$  в центральном сечении пластины сплава  $Ni-1\%Cr$ .  
 $l = 500\text{мкм}$ ,  $T = 1150^{\circ}C$

### Выводы

При рассмотрении асимптотической стадии внутреннего окисления пластин обнаружено, что стадии коалесценции, хорошо описываемой в рамках теории Лифшица-Слэзова, предшествует достаточно длительная стадия замедленного роста частиц, которая не имеет места при распаде пересыщенных твёрдых растворов в изолированных системах. Показано, что замедленный рост частиц обусловлен наличием потока легирующего элемента из пластины во внешнюю среду, причём скорость роста частиц понижается с увеличением коэффициента диффузии легирующего элемента и уменьшением толщины пластины.

### Список использованной литературы

1. Абрамов Г.С., Абрамов М.Г. Моделирование процесса внутреннего окисления и экспериментальные результаты., Вестник ХНТУ, 2010, Вып.3 (39), с. 10-15.
2. Абрамов Г.С. Моделирование асимптотической стадии процесса внутреннего окисления., Вестник ХНТУ, 2011, №2 (41), с.432-435.
3. Абрамов Г.С., Абрамов М.Г., Бардачёв Ю.Н. Моделирование формирования двухфазных областей в процессе внутреннего окисления бинарных сплавов., Вестник ХНТУ, 2014, №3 (50), с.192-202.
4. Лифшиц И.М., Слэзов В.В. О кинетике диффузионного распада пересыщенных твёрдых растворов. ЖЭТФ, 1958, т.35, в.2(8), с.479-492.
5. Нечипоренко Е.П., Слэзов В.В. и др. Коалесценция в двухфазных сплавах. ФТТ, 1972, т.14, вып.5, с.1469-1474.
6. Footner P.K., Alcook C.V. Growth kinetics of dispersed thoria in Ni and Ni-Cr alloys. Met. Trans., 1972, v.5, №8, p.717-720.
7. Dalal H., Grant N.J. Thoria stability in TD-NiCr at high-temperatures in the presence of chromium in solution. Met. Trans., 1973, v.4, №1, p.381-382.
8. Иванов В.Е., Нечипоренко Е.П., Криворучко В.М. и др. Коалесценция частиц  $Al_2O_3$  в молибдене при высоких температурах. Изв. АН СССР. Неорган. матер., 1970, №6, в.8, с.1427-1431.
9. Сергеенкова В.М., Березуцкий В.В. О скорости роста дисперсных частиц в никеле. Порошк. металлургия, 1967, №7, с.84-88.
10. Сергеенкова В.М., Березуцкий В.В. Влияние природы окислов на скорость роста дисперсных частиц в никеле. Порошк. металлургия, 1967, №8, с.54-59.
11. Слэзов В.В. Коалесценция пересыщенного твёрдого раствора в случае диффузии по границам блоков или дислокационным линиям., ФТТ, 1967, т.9, в.4, с.1187-1191.

UDK 004.048

S.A. BABICHEV

Jan Evangelista Purkině University in Ústí nad Labem, Czech Republic

**MODEL OF FILTRATION SYSTEM OF DNA NUCLEOTIDES GENE  
EXPRESSION PROFILES**

*Researches on an optimization of the filtration process of DNA nucleotides gene expression profiles are presented in the article. Filtration was carried out under the terms of the expression detecting of corresponding gene, herewith the variance of gene expression, the absolute value of expression and the Shannon entropy were used as criteria. The value of thresholding coefficient was estimated on the basis of proximity of average measure of objects within the homogenous group and between groups. Estimation of the quality of information processing was performed by the comparative analysis of the clustering results of processed and unprocessed data.*

*Keywords: gene expression, filtration, DNA nucleotide, thresholding, clustering*

С.А. БАБИЧЕВ

Університет Яна Евангелиста Пуркіне в Усті на Лабі, Чехія

**МОДЕЛЬ СИСТЕМИ ФІЛЬТРАЦІЇ ПРОФІЛІВ ЕКСПРЕСІЇ ГЕНІВ НУКЛЕОТИДІВ ДНК**

*У статті представлено дослідження по оптимізації процесу фільтрації профілів експресії генів нуклеотидів ДНК. Фільтрація проводилася за умовами визначення експресії відповідного гена, при цьому як критерії використовувалися дисперсія експресії генів, абсолютне значення експресії та ентропія Шеннона. Оцінка значення трешолдингового коефіцієнту проводилася на підставі середньої міри близькості об'єктів всередині однорідної групи та між групами. Оцінка якості обробки інформації виконувалася за допомогою порівняльного аналізу результатів кластеризації оброблених та необроблених даних.*

*Ключові слова: експресія генів, фільтрація, нуклеотиди ДНК, трешолдинг, кластеризація*

С.А. БАБИЧЕВ

Університет Яна Евангелиста Пуркіне в Усті на Лабі, Чехія

**МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ФИЛЬТРАЦИИ ПРОФИЛЕЙ ЭКСПРЕССИИ ГЕНОВ НУКЛЕОТИДОВ ДНК**

*В статье представлены исследования по оптимизации процесса фильтрации профилей экспрессии генов нуклеотидов ДНК. Фильтрация производилась по условиям определения экспрессии соответствующего гена, при этом в качестве критериев использовались дисперсия экспрессии генов, абсолютное значение экспрессии и энтропия Шеннона. Значение трешолдингового коэффициента оценивалось на основании средней меры близости объектов внутри однородной группы и между группами. Оценка качества обработки информации выполнялась посредством сравнительного анализа результатов кластеризации обработанных и необработанных данных.*

*Ключевые слова: экспрессия генов, фильтрация, нуклеотиды ДНК, трешолдинг, кластеризация*

**Problem statement**

Functional genomics is one of the actual directions in the field of bioinformatics nowadays. Its main task is analyzing and implementation of transfer information mechanisms, recorded in the genome of biological cells, from gene to feature. On this basis the subsequent identification of the object state is carried out. RNA Sequencing [1] and analysis of DNA microarray data [2-5] are the basic methods of gene expression determining nowadays. Each of these methods has its advantages and disadvantages. RNA sequencing method allows us to obtain the direct information about the RNA molecule nucleotides sequence of the investigated genome that in its turn allows to determine the expression absolute value of the corresponding gene. High cost of the experiment is the main disadvantage of this technology. The low cost, the possibility of simultaneous analysis of tens of thousands genes, the technology available to practical implementation are the advantages of DNA microarray technology. High error of results obtained due to the high level and specificity of noise component that arises at the stage of microarray creating and reading information from this microarray is the main disadvantage of this technology. Thereby the development of effective methods of DNA microarray data preprocessing on the basis of modern computer methods of information processing is highly relevant.

**Analysis of recent research and publications**

The research papers [3-6] are devoted to issues of DNA microarray data processing. The authors carry out a detailed analysis of various stages of DNA microarray creating, reading information from microarray, and post-processing in order to estimate the gene expression level of the studied objects. The article [7] presents the results of



the experiments for cancer patient data clustering with the use of different clustering algorithms. The authors conducted researches to choose the optimal group of methods for data preprocessing, and the Shannon entropy was used as the main criterion in this case. However, it should be noted, that issues of data filtration in accordance with specifics of noise (non-specific hybridization) are not considerably paid attention at this works.

Unsolved parts of the general problem are the absence of effective filtering algorithms for DNA microarray data, focused on the removing of nonspecifically hybridized genes as well as genes that do not carry the essential information about the features of the analyzed objects.

The aim of the article is the development of step by step filtering techniques of gene expression profiles of DNA microarray data based on the complex use of different criteria to estimate the gene expression variations of biological objects.

### The presentation of the basis material

The matrix of light intensity in size of  $(n \times m)$  is the result of DNA microarray data scanning:  $A = \{x_{ij}\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ , where  $i$  – is the number of experiments carried out or the number of objects investigated,  $j$  – is the number of conditions under which the appropriate genes have been expressed. It is obvious that the level of gene expression should be significantly varied under the same conditions for various radically different biological objects due to the diversity of the occurring biological processes. Therefore, the genes whose expression does not correspond to this condition may be deleted from the data array as uninformative. This fact will be able to increase the resolution for further information analyses. Filtration of DNA microarray data suggests the presence of the following stages:

- removing of genes with missing values of gene expression, arising due to the fact of some samples appeared to be unhybridized;
- removing of genes with low value of profiles variance. Low value of variance indicates insignificant change of the gene expression level during the transition from one object to another, that does not contribute to high quality of subsequent information processing;
- removing of columns with low absolute value of gene expression. Poor hybridization is the reason of the low absolute values of gene expression profiles;
- removing of genes with high absolute value of Shannon entropy [6]:

$$E_j = -\sum_{i=1}^n p(x_{ij}) \cdot \log_2 p(x_{ij}) \quad (1)$$

where  $E_j$  – is the entropy of  $j$ -th gene,  $p(x_{ij})$  – is the probability of state realization of  $j$ -th gene of  $i$ -th object. In accordance with the classical definition of entropy, it is a quantitative measure of the randomness of the structural elements in the system. The low value of the entropy corresponds to a high normativity due to high ordering of the gene expression level for the set of studied objects. The high entropy corresponds to a high level of disordering of expression profiles distribution for different objects that can be interpreted as noise.

The threshold value of the variation feature, which defines the board of genes set division into information and non-information is determined by the condition:

$$\forall e_j: f(e_j) \leq k \cdot \min(f(e_j)), k \geq 1 \text{ or } \forall e_j: f(e_j) \geq k \cdot \max(f(e_j)), k \leq 1 \quad (2)$$

where  $j = 1, \dots, m$  – is the number of conditions of gene expression determining,  $f(e_j)$  – is the thresholding coefficient, what determines empirically in each case. The choice of thresholding coefficient value was carried out by analysis of changes of mean-square value of distance from objects to mass center of homogenous group of objects (clusters) during the removing of studied database columns:

$$D_s = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} d^2(\bar{x}_i, c_s) \quad (3)$$

and average of intercluster distance which is determined for two clusters as mean-square value of distance from objects of cluster S to mass center of cluster P and inversely:

$$D_{out} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} d^2(\bar{x}_i, c_s) + \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} d^2(\bar{x}_i, c_p) \right) \quad (4)$$

where  $n_1$  and  $n_2$  – are the numbers of objects in clusters S and P respectively,  $c$  – is the mass center of corresponding cluster:

$$c = \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \quad (5)$$

$n$  – is the number of objects,  $m$  – is the number of features, that characterize objects. In the case of several clusters average intracluster distance was determined as average for intracluster distances of all clusters:

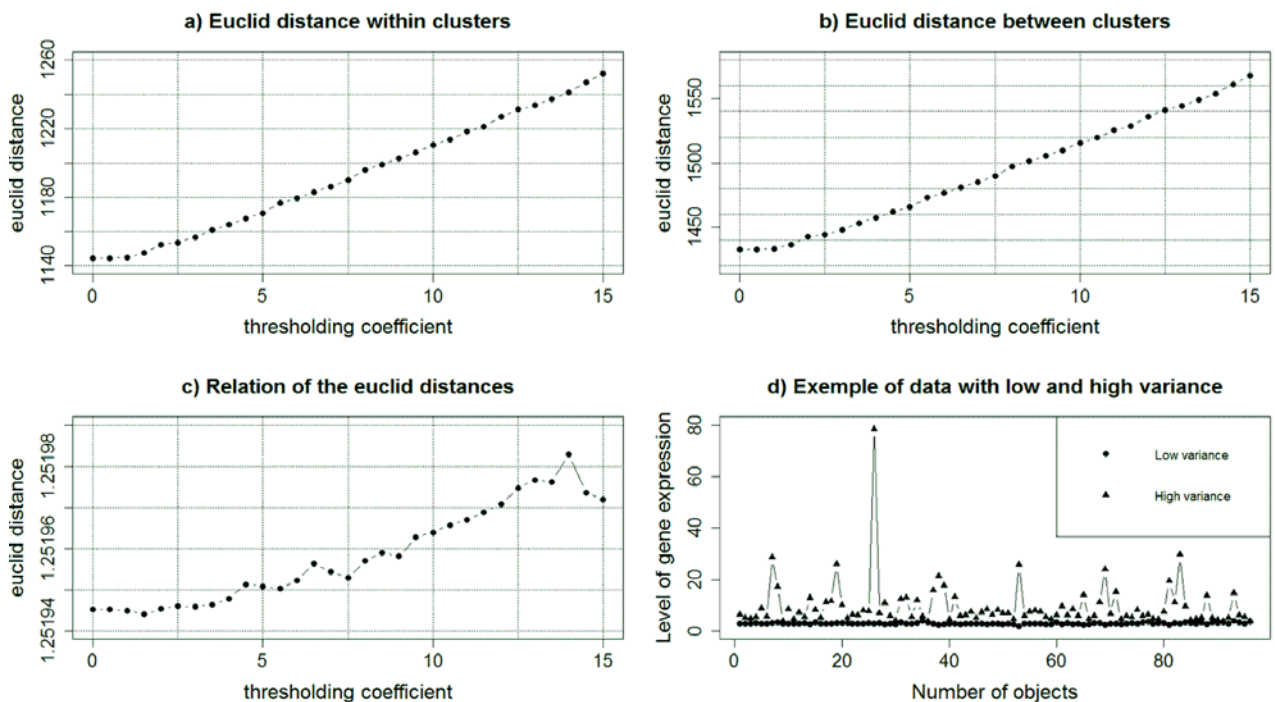
$$D_{in} = \frac{1}{q} \sum_{s=1}^q D_s, \tag{6}$$

and average intercluster distance was determined as average for intercluster distances of all pairs of clusters. However, it should be noted that the absolute values of the criteria defined by formulas (3) – (6) have the disadvantage. The average density of the objects within the clusters distribution can be decreased during increasing of the number of removing columns (change of the thresholding coefficient  $k$  value), that will cause the increase of the average intracluster distance. Herewith, the increase of average of intercluster distance with more high speed is possible this increase may be indicated by better quality of objects division. In this case the use of complex relative criterion, extremum of which will allow to optimize the reasonable choose of thresholding coefficient, is appropriate:

$$R = \frac{D_{out}}{D_{in}} \tag{7}$$

As an experimental base for research we used a database of patients with lung cancer E-GEOD-68571 of the database Array Express [7], which includes the gene-expression profiles of 95 patients, ten of which are healthy (Norm). The rest 85 patients were divided by the degree of the disease into three groups: 23 patients are in good state (Well), 41 patients are in moderate state (Moderate-Md), and 21 patients are in poor state (Poor). The processing of the DNA microarray scanned image was carried out in the following way: background correction by rma method, quantil normalization, mass-PM correction and summarization by mass-method. As the result, the matrix in size (96×7129) of gene expression profiles was obtained, where number of rows corresponds to the number of experiments and numbers of columns are the number of conditions of estimation gene expression profiles. There were no missing values at the obtained matrix of data.

Results of the experiment are shown in Fig. 1-3.



**Fig. 1. Experiment results of data filtration based on using of the gene expression variance criterion: a) the plot of average intracluster distance against thresholding coefficient; b) the plot of average intercluster distance against thresholding coefficient; c) the plot of relative distance against thresholding coefficient; d) distribution of studied object genes in case of low and high variance**

Analysis of plots at Fig. 1a and 1b allows to conclude about inefficiency at this case of absolute values of intercluster and intracluster distances because during thresholding coefficient increase the values of these criteria monotonically increase too. However, Fig. 1c shows that value of relative distance, calculated by the formula (7) is maximum when value of thresholding coefficient is  $k = 14$ . 283 columns had been deleted in this case and new matrix of gene expression obtained dimension (96×6846). In Fig. 1d the distribution of gene expression for low and high variance is shown. In the figure it is shown that removing the column with a low gene expression variance is reasonable, because these columns are not informative for studied objects identification.

Analysis of plots in Fig 2 allows to conclude that the increase of thresholding coefficient value to 1,2 has no significant influence to the value of quality criteria of objects grouping. 89 columns of data were removed from matrix when  $k = 1,2$ . The further increase of thresholding coefficient value contributed to the steep increase of deleted information quantity. This fact is connected with the risk of feature space informativity decrease. Therefore the matrix of studied data takes the size of  $(96 \times 6760)$  at this stage. Example of gene expression distribution for two objects with low and high absolute values of expression is shown in Fig. 2d.

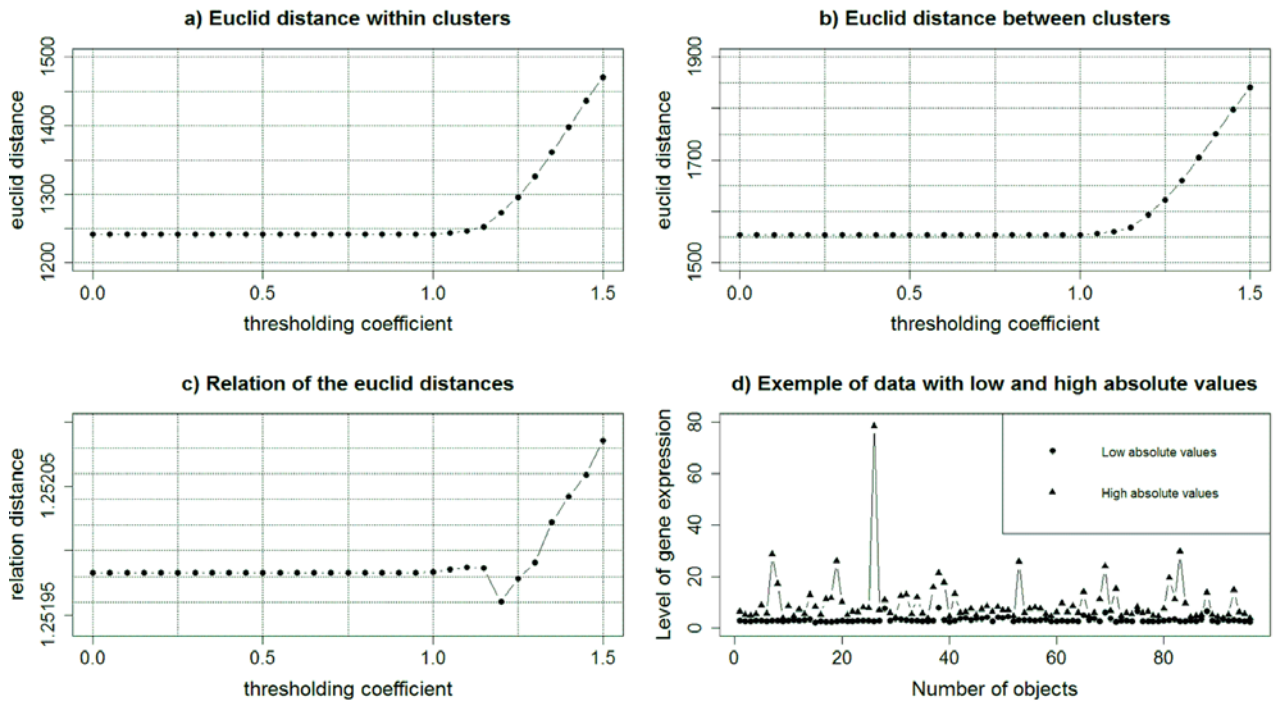


Fig. 2. Experiment results of data filtration based on using of the gene expression absolute value criterion: a) the plot of average intracluster distance against thresholding coefficient; b) the plot of average intercluster distance against thresholding coefficient; c) the plot of relative distance against thresholding coefficient; d) distribution of studied object genes in case of low and high absolute values

In Fig. 3 the results of the experiment using of entropy criterion are shown. On the basis of the experiment results analysis the value of thresholding coefficient was accepted as 0,999, herewith 101 column was deleted and the matrix of new data takes the size  $(96 \times 6659)$ . Example of gene expression distribution for two objects with low and high Shannon entropy of expression is shown in Fig. 3d.

Estimation of the proposed method effectiveness was carried out by the objects clustering of initial set of normalized data, principal components of initial data set and filtering data principal components. Simulation was carried out by software KNIME using SOTA algorithm clustering [10]. All meaningful principal components were taken for component analysis and the size of array of studied objects decreased to  $(96 \times 94)$ . In Table 1 the results of simulation are shown.

Table 1

Results of studied data cluster analysis				
Clustering error	Initial set	Denoise set	PC initial data	PC filtr. data
Well→Md	5	5	5	4
Md→Well	3	3	3	2
Poor→Md	5	5	5	4
Md→Poor	8	7	8	7
Poor→Well	1	1	1	—

Data analysis of table 1 allows to draw a conclusion on effectiveness of the proposed method, because the principal components of filtering data have less clustering error at the same conditions of clustering. The system has divided the studied objects into patient and not-patient in all cases, however the results are different within the patients group. Intersection of clusters with poor and moderate and with well and moderate states is completely logical, as for as moderate state can be both a moderate-poor and a moderate-well, but intersection of principal components of filtering data is less than in all other cases. However, clusters intersection with poor and well states is inadmissible. This intersection has not been of analyses of principal filtering data only.

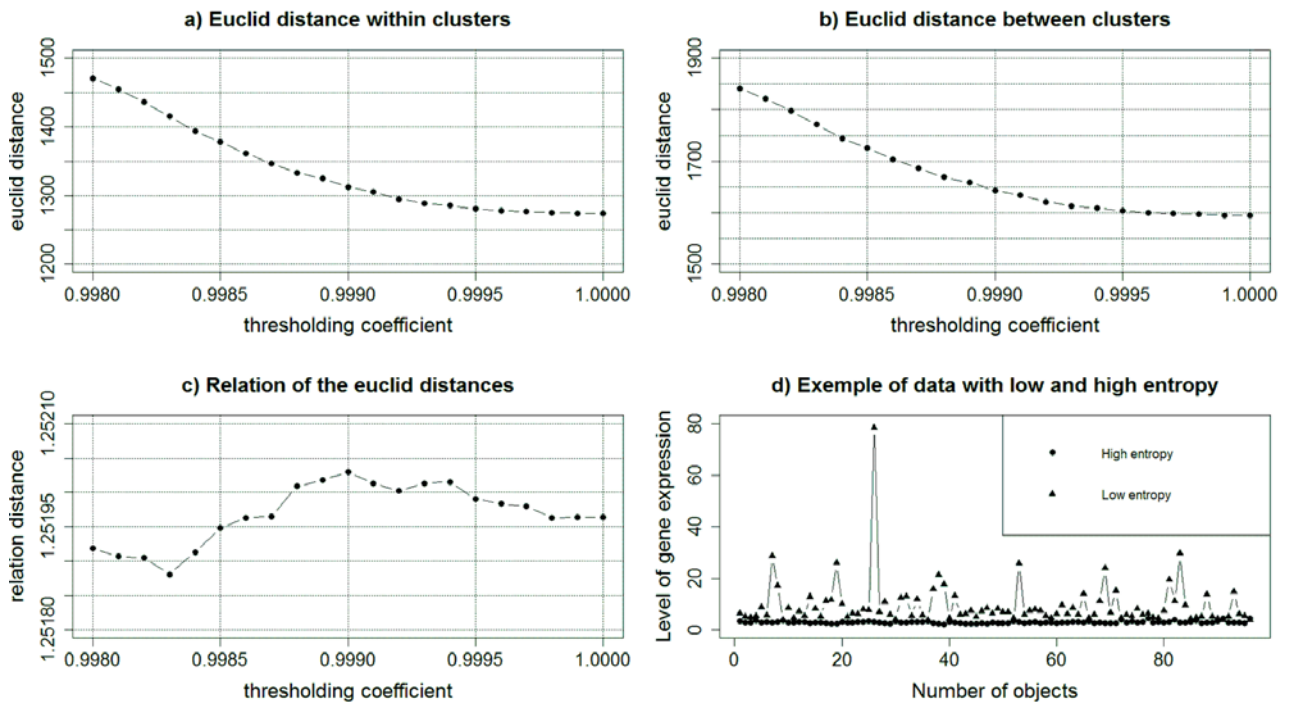


Fig. 3. Experiment results of data filtration based on using of the gene expression entropy Shannon criterion: a) the plot of average intracluster distance against thresholding coefficient; b) the plot of average intercluster distance against thresholding coefficient; c) the plot of relative distance against thresholding coefficient; d) distribution of studied object genes in case of low and high entropy

### Conclusion

This article presents the method of step by step DNA nucleotide filtration, obtained by DNA microarray experiments. Variance of gene expression, absolute value of expression and Shannon entropy were used as criteria to estimate the informativity of the studied objects features vectors. As an experimental base for research we used a database of patients with lung cancer E-GEOD-68571 database Array Express, which includes the gene-expression profiles of 95 patients, ten of which are healthy (Norm), and 85 patients are divided by the degree of the disease into three groups: 23 patients are with good state (Well), 41 patients are with moderate state (Moderate-Md), and 21 patients are with poor state (Poor). The evaluation of thresholding coefficient for removing of not-informative columns was carried out on basis of intergroup and intragroup distances calculating, herewith Euclid distance was used as a measure of proximity. 470 columns were removed during data filtration and dimension of initial array of the studied data was changed from (96×7129) to (96×6659). The cluster analysis using SOTA clustering algorithm was carried out for the evaluation of the effectiveness of the method, herewith the principal components were calculated at the preliminary stage for the purpose of feature space dimension reduction, and the number of columns of database was reduced to 94. The results of experiment have shown higher quality of filtering data principal components clustering, because the cluster intersection of objects with poor and well state inside the patients group was not observed only in this case. Moreover, the use of filtering data principal components allowed to get the best separation ability of studied objects clustering.

### References

1. Ozsolak F. RNA sequencing: advances, challenges and opportunities / F. Ozsolak, P.M. Milos // *Nature Reviews Genetics*. – 2011. – Vol.12. – P.87-98.
2. Schena M. Microarray biochip technology / M. Schena, R.W. Davis // *Eaton Publishing*. – 2000. – P. 1-18.
3. Baldi P. DNA Microarrays and gene expression: From experiments to data analysis modeling / P. Baldi, G.W. Hatfield // *Cambridge University Press*. – 2011. – 15 p.
4. Berthold M.R. Data Preparation, Guide to Intelligent Data Analysis / M.R. Berthold, C. Borgelt, F. Hoppner, F. Klawonn // *Springer-Verlag London Limited*. – 2010. – 394 p.
5. Jianan W. A Novel Workflow for Microarray Data Analysis under Expression Level / W. Jianan, Z. Chunguang, L. Zhangxu, X. Xuefei, Z. You, L. Guixia // *Information & Computational Science*. – 2012. – Vol. 16(9). – P. 4745–4754.
6. Shannon C.E. A mathematical theory of communication / C.E. Shannon // *Bell System Technical Journal*. – 1948. – V. 27. – P. 379–423, 623–656.
7. Beer D.G. Gene-expression profiles predict survival of patients with lung adenocarcinoma / D.G. Beer, S.L. Kardia, C.C. Huang, T.J. Giordano, et al. // *Nature Medicine*. – 2002. – Vol. 8(8). – P. 816-824.

УДК 550.34

І.В. БЕЛІНСЬКИЙ, В.А. ЛЕМЕШКО  
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України**ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОШИРЕННЯ ЗБУРЕНЬ  
В ДВОВИМІРНОМУ ГРАНУЛЬОВАНОМУ СЕРЕДОВИЩІ В ЗАЛЕЖНОСТІ  
ВІД РІЗНИХ УПАКОВОК ЙОГО СТРУКТУРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ***Представлені результати фізичного моделювання процесу поширення збурень в двовимірному гранульованому середовищі при різних упаковках.**Ключові слова: фізичне моделювання, двовимірне гранульоване середовище, солітоноподібні хвилі.*И.В. БЕЛИНСКИЙ, В.А. ЛЕМЕШКО  
Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины**ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ  
В ДВУМЕРНОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РАЗНЫХ УПАКОВОК ЕГО  
СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ***Представлены результаты физического моделирования процесса распространения возмущений в двумерной гранулированной среде при разных упаковках.**Ключевые слова: физическое моделирование, двумерная среда, солитоноподобные волны.*I.V. BELINSKIY, V.A. LEMESHKO  
S.I. Subbotin Institute of Geophysics NAS Ukraine**PHYSICAL MODELING OF THE PROPAGATION PROCESS OF DISTURBANCES  
IN A TWO-DIMENSIONAL GRANULAR MEDIUM FOR DIFFERENT PACKAGING***The paper presents the results of physical modeling the evolution of disturbances in a two-dimensional granular medium under the influence of impulse load.**Keywords: physical modeling, two-dimensional granular medium, soliton waves.***Вступ**

Особливості розповсюдження нелінійних збурень в реальному геофізичному середовищі залежать як від його структури, так і від способу здійснення навантаження. Однією із поширених структур геофізичного середовища є його гранульована будова. Спосіб здійснення механічного навантаження значною мірою впливає на параметри збурень в двовимірному гранульованому середовищі.

Метою нижче наведених експериментальних досліджень було виявлення залежності нелінійних збурень в двовимірному гранульованому середовищі від способу упаковки його структурних елементів.

**Постановка експериментальних досліджень**

Двовимірне гранульоване середовище з перпендикулярною упаковкою його структурних елементів моделювалось набором 225 сталевих куль діаметром 40 мм (15 ланцюгів куль по 15 куль в кожному ланцюгу) [1]. Кулі розташовувались в металевому коробі, дно і бокові поверхні якого були вкриті гумою товщиною 5 мм. В якості системи координат такого двовимірного гранульованого середовища було вибрано наступне:  $N_x$  - номер ланцюга куль, перпендикулярних напрямку удару;  $N_y$  - номер ланцюга куль, паралельних напрямку удару.

Двовимірне гранульоване середовище зі щільною упаковкою його структурних елементів моделювалось набором 217 сталевих куль діаметром 40 мм (вісім ланцюгів по 14 куль в кожному та 7 ланцюгів по 15 куль в кожному) (див.рис.1).

Розташування куль і система їх координат була такою ж, як і при перпендикулярній упаковці [1]. При цьому ланцюги куль, паралельні напрямку удару, склалися з лінійним розташуванням куль одна за другою, а ланцюги куль, перпендикулярні напрямку удару, склалися з куль, частково зміщених одна відносно сусідньої так, що кожна куля контактувала з шістьма кулями-сусідами.

Збурення, яким імпульсно навантажувався центральний ланцюг куль  $N_x=1$ ,  $N_y=8$  в перпендикулярній та щільній упаковках двовимірного гранульованого середовища, формувалось в ланцюгу 5 куль діаметром 40 мм під час удару по ньому такою ж кулею (див. рис.1).

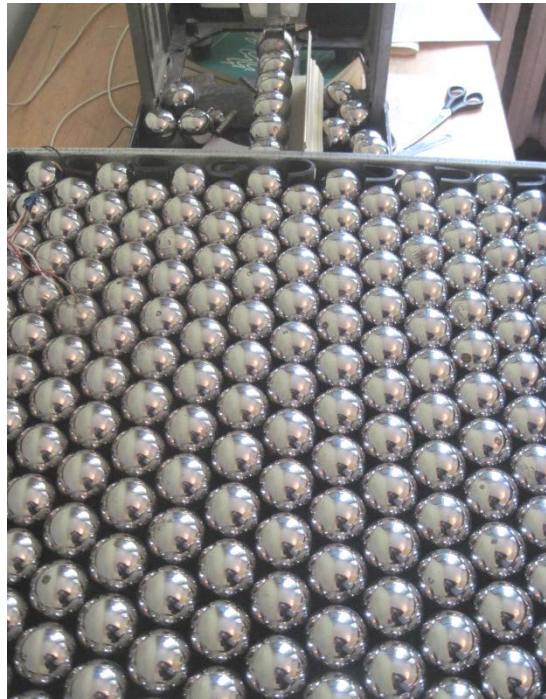


Рис.1. Фото моделі двовимірного гранульованого середовища з щільною упаковкою її структурних елементів

Реєстрація параметрів нелінійних збурень, які поширювались в двовимірних гранульованих середовищах, здійснювалась двома датчиками-кулями по методиці, описаній в [2].

#### Результати експериментальних досліджень

Досліджувана еволюція хвильових процесів в двовимірних гранульованих середовищах з перпендикулярною та щільною упаковками їх структурних елементів під час імпульсного навантаження включає в себе еволюцію нелінійного збурення як по центральному ланцюгу, так і за його межами.

Дані, представлені в верхній частині рис.2, ілюструють еволюцію нелінійних збурень по центральному ланцюгу куль двовимірних гранульованих середовищ перпендикулярної та щільної упаковок їх структурних елементів після удару кулею зі швидкістю 0,5 м/с. Експериментальні дані, опубліковані в [1], вказують на те, що по центральному ланцюгу двовимірного гранульованого середовища перпендикулярної упаковки поширюється компактон.

Збурення, яке поширюється по центральному ланцюгу двовимірного гранульованого середовища щільної упаковки є згасаючим, на що вказують дані, наведені на рис. 2 та 3. При цьому складова сили ( $F_y$ ) цього збурення є від'ємною і майже в 2,5 рази меншою, ніж для центрального ланцюга двовимірного середовища з перпендикулярною упаковкою його структурних елементів. Таким чином, кулі в центральному ланцюгу при імпульсному навантаженні двовимірного гранульованого середовища при щільній упаковці його елементів менш витягнуті по  $y$ -ковій складовій, ніж в двовимірному середовищі з перпендикулярною упаковкою його елементів. Ця обставина, на наш погляд, пов'язана з тим, що при щільній упаковці структурних елементів двовимірного середовища кожен його елемент контактує з шістьма сусідами, що сприяє додатковій втраті енергії центрального ланцюга куль в порівнянні з двовимірним гранульованим середовищем з перпендикулярною упаковкою його елементів.

Дані, наведені на рис.2 та 4 ілюструють параметри збурення за межами центрального ланцюга куль, по якому здійснюється удар. Так ці дані свідчать про те, що складова сили ( $F_x$ ) в двовимірному середовищі зі щільною упаковкою в 25÷48 раз більша, ніж в двовимірному середовищі з перпендикулярною упаковкою.

Складова сили ( $F_y$ ) в збуренні, що поширюється в двовимірному гранульованому середовищі з перпендикулярною упаковкою його елементів є від'ємною, а при щільній упаковці ця складова сили є додатною. Ця обставина ще раз підтверджує, що при щільній упаковці двовимірного гранульованого середовища збурення з центрального ланцюга трансформується в бокові ланцюги куль в більшій мірі, ніж в середовищі з перпендикулярною упаковкою.

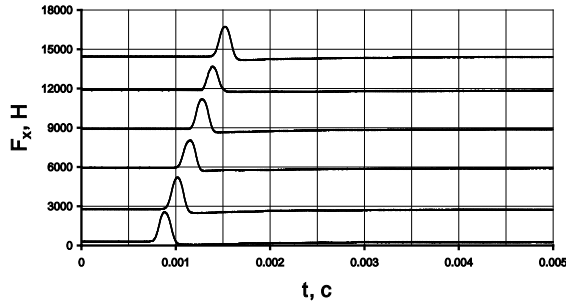
Так в двовимірному гранульованому середовищі з перпендикулярною упаковкою його елементів значення сил в збуренні майже в 100 раз менше, ніж в центральному ланцюгу куль. В той же час в збуренні зі щільною упаковкою структурних елементів значення сил за межами центрального ланцюга в 1,5÷2,2 рази менше, ніж в центральному ланцюгу.

ЦЕНТРАЛЬНИЙ ЛАНЦЮГ

Перпендикулярна упаковка

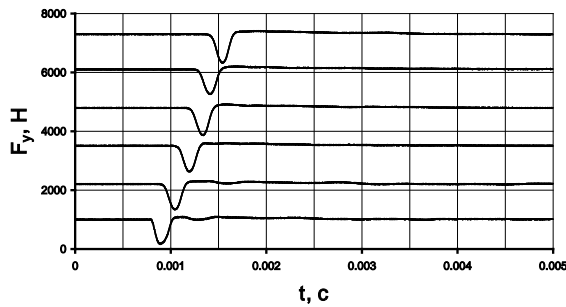
$$N_y=8, N_x=Var(1,3,5,7,9,11)$$

Центральний ланцюг  $F_x$



$$N_y=8, N_x=Var(1,3,5,7,9,11)$$

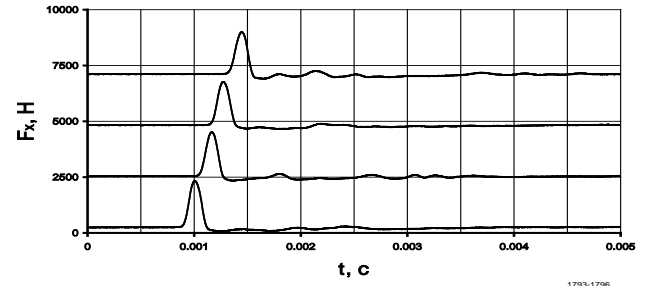
Центральний ланцюг  $F_y$



Щільна упаковка

$$N_y=8, N_x=Var(3,5,7,9)$$

Центральний ланцюг  $F_x$



$$N_y=8, N_x=Var(3,5,7,9)$$

Центральний ланцюг  $F_y$

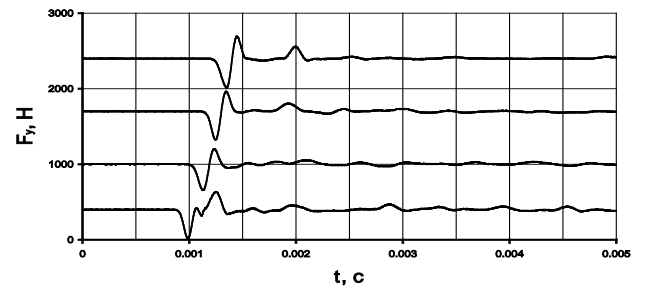


Рис.2. Еволюція нелінійного збурення вздовж центрального ланцюга куль в двовимірному гранульованому середовищі

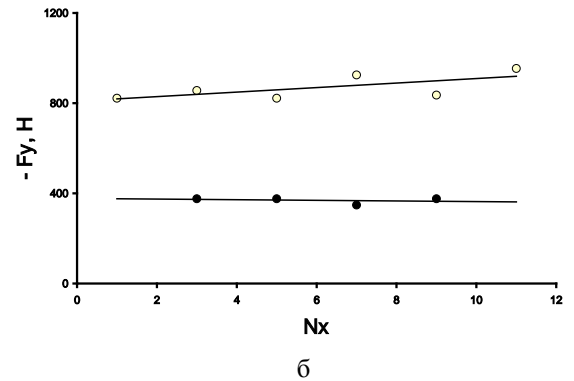
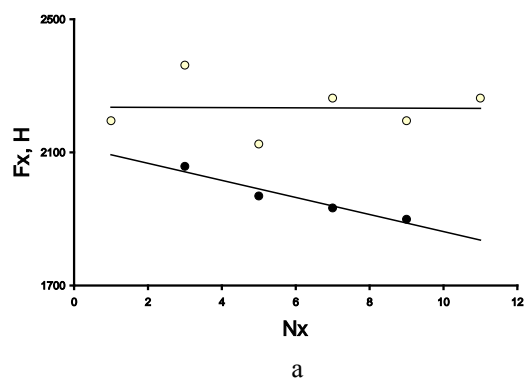


Рис.3. Залежність максимальних значень компонент сили  $F_x$  (а) та  $F_y$  (б) від номера кулі в центральному ланцюгу куль в двовимірному гранульованому середовищі з перпендикулярною (світлі кружки) та щільною (темні кружки) упаковками його структурних елементів

Перпендикулярна упаковка

Щільна упаковка

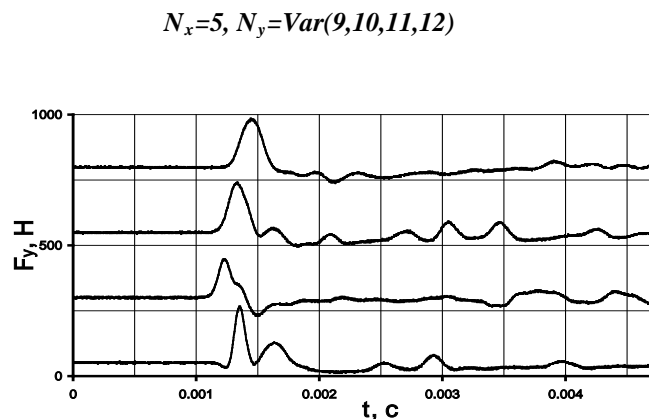
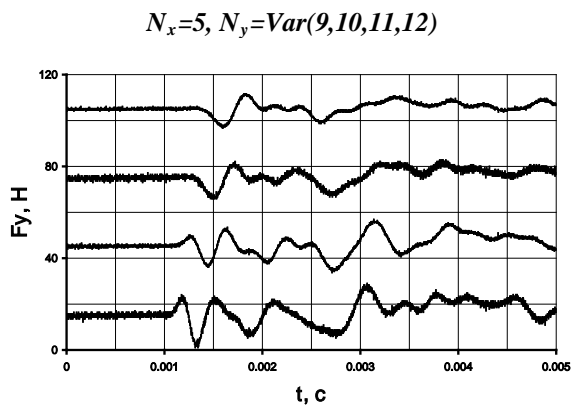
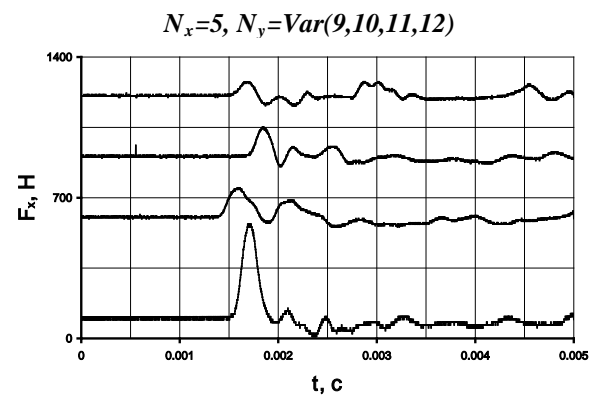
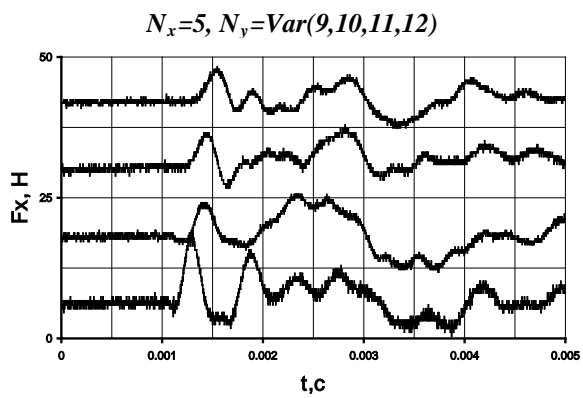
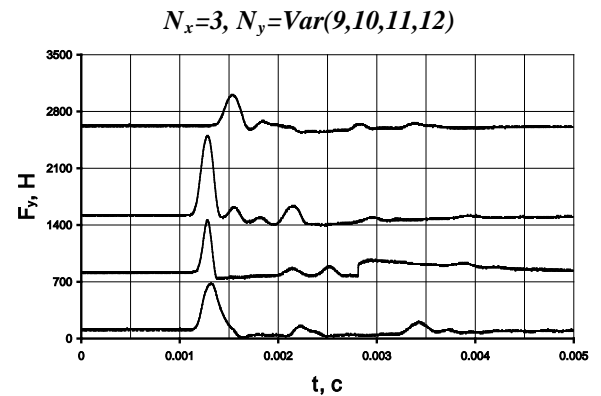
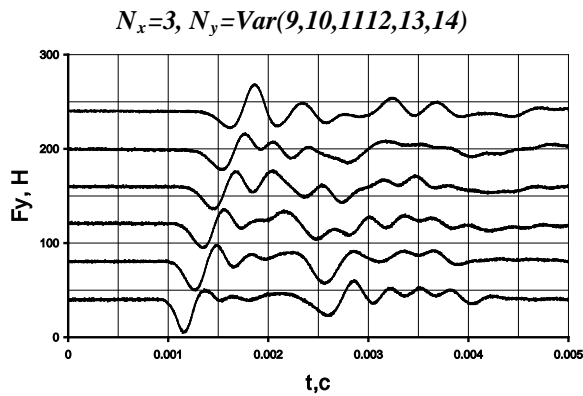
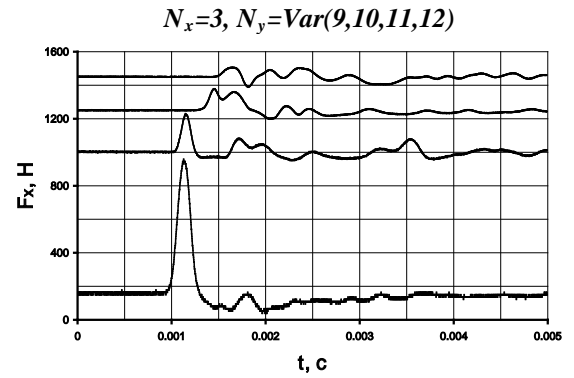
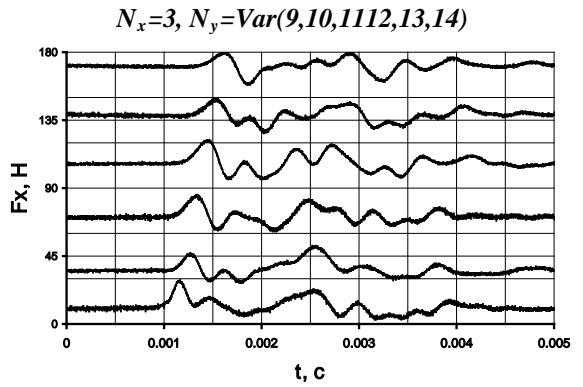


Рис. 4. Еволюція нелінійного збурення вздовж бокових ланцюгів куль в двовимірному гранульованому середовищі



**Висновки**

1. Нелінійне збурення, що поширюється по центральному ланцюгу куль двовимірного гранульованого середовища з перпендикулярною упаковкою його структурних елементів є компактним, а для середовища зі щільною упаковкою його елементів нелінійне збурення є згасаючим з плином часу.
2. Значення сил в нелінійному збуренні за межами центрального ланцюга в двовимірному ланцюгу зі щільною упаковкою його елементів суттєво більше, ніж в двовимірному гранульованому середовищі з перпендикулярною упаковкою його елементів, що вказує на більшу втрату енергії кулями центрального ланцюга в середовищі зі щільною упаковкою, ніж в середовищі з перпендикулярною упаковкою його елементів.

**Список використаної літератури**

1. Белінський І.В., Лемешко В.А. Фізичне моделювання процесу поширення збурень в двовимірному гранульованому середовищі при перпендикулярній упаковці //Матеріали XVI Міжнародної конференції по математичному моделюванню МКММ\_2015, Херсон. – 2015. – С.82-87.
2. В.А. Даниленко, І.В. Белінський, Д.Б. Венгрович, В.В. Гржибовський, В.А. Лемешко. Особливості хвильових процесів у геофізичному середовищі при врахуванні їх структури //Доповіді НАН України, 1996, №12, С.124-129.

УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК

Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет"

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ В  
ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ**

*В даній роботі представлено порожнистий циліндр як спрощену модель прокатного валка. Циліндр знаходиться під впливом теплового потоку, який відображає дію розжареного металевго листа на валок. Розроблена тривимірна математична модель температурних полів у порожнистому циліндрі, який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності. Знайдено температурне поле порожнистого циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ скінченної довжини L, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є.*

*Ключові слова: комплексний ряд Фур'є, інтегральні перетворення Ханкеля, Лапласа, Фур'є, критерій Предводітелева, трансцендентне рівняння.*

М.Г. БЕРДНИК

Государственное высшее учебное заведение "Национальный горный университет"

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ПОЛОМ  
ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ**

*В данной работе представлен полый цилиндр как упрощенная модель прокатного валка. Цилиндр находится под влиянием теплового потока, который отражает действие раскаленного металлического листа на валок. Разработана трехмерная математическая модель температурных полей в полом цилиндре, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, в виде краевой задачи математической физики для уравнения теплопроводности. Найдено температурное поле полого цилиндра, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ длины L, в виде сходящихся ортогональных рядов по функциям Бесселя и Фурье.*

*Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, интегральные преобразования Ханкеля, Лапласа, Фурье, критерий Предводителява, трансцендентное уравнение.*

M. G.BERDNYK

State Higher Education Institution "National Mining University"

**MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE FIELDS IN A HOLLOW ROTATING  
CYLINDER**

*This paper presents a hollow cylinder as a simplified model of the roll. The cylinder is under the influence of heat flow, which reflects the effect of the heated metal sheet on the roll. A three-dimensional mathematical model of the temperature field in a hollow cylinder, which rotates at a constant angular velocity about the OZ axis, in the form of a boundary value problem of mathematical physics for the heat equation. Found a hollow cylinder temperature field which rotates at a constant angular velocity about the OZ axis length L, as convergent orthogonal series of Bessel and Fourier functions.*

*Keywords: complex Fourier series, integral Hankel transform, Laplace, Fourier criterion Predvoditeleva, transcendental equation.*

**Постановка проблеми**

Історично склалося, що в Україні розвинута мережа металургійних підприємств, на яких виробляють значну частину світового випуску сталі [1]. При прокаті металевих листів металевий розжарений лист до температури 1200° С рухається за допомогою валків. При цьому валки можуть сильно нагріватися і, при досягненні певних критичних температур, деформуватися. Що в свою чергу викликає брак виробництва [1 - 3]. Отримання геометрично правильних розмірів прокату, зниження витрат прокатних валків, на пряму залежить від здатності управління тепловим профілем валків, оперативним управлінням їх тепловим розширенням по всій довжині бочки валка [3].

При розгляді ряду питань, пов'язаних з інтенсифікацією виробництва, отримання нового сортаменту, що вимагає жорсткі поля допусків, як по площинності, так і поперечної різновтовщинності, змушує прокатників все більше уваги звертати на тепловий стан валків [4 - 6]. Отже виникає необхідність аналізу температури валка та аналітично вирахувати необхідне охолодження для нього [5].

У зв'язку з цим, теоретичний і практичний інтерес представляє вивчення теплових явищ, пов'язаних із охолодженням валків. В даній роботі представлено порожнистий циліндр, як спрощену модель прокатного валка, який знаходиться під впливом теплового потоку. Тепловий потік, який діє на валок, є наслідком взаємодії з розжареним металевим листом.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Як показує огляд літератури, теплообмін в циліндрах, які обертаються, вивчений в даній час ще недостатньо [7, 8]. В [9] показано, що чисельні методи дослідження нестационарних неосесиметричних задач теплообміну циліндра, який обертається, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання [9].

В [9] доводиться, що умови стійкості обчислень в методах кінцевих елементів і кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестационарних неосесиметричних температурних полів циліндра, який обертається, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1 - 2 \frac{\Delta F_0}{\Delta \varphi^2} \geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta \varphi} - \frac{Pd}{2} \geq 0,$$

де  $F_0$  – критерій Фур'є,  $Pd$  – критерій Предводителева.

Якщо  $Pd = 10^5$ , що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра  $\omega = 1,671 \text{ сек}^{-1}$  радіусом 100 мм, змінні  $\Delta \varphi$  і  $\Delta F_0$  повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta \varphi \leq 2 \cdot 10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_0 \leq 2 \cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови  $Bi = 5$  ( $Bi$  – критерій Біо) час, необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює  $Fo \approx 0.025$ . Це означає, що потрібно принаймні здійснити  $1.3 \cdot 10^8$  операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури. Більш того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити  $3.14 \cdot 10^5$  операцій, так як внутрішній стан у кільці характеризується  $3.14 \cdot 10^5$  точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому, для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестационарних процесів теплообміну в циліндрах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

**Мета статті**

Розробити тривимірну математичну модель розподілу температурних полів у порожнистому циліндрі, який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $OZ$  у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності, та знайти рішення отриманої крайової задачі, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

**Основная часть**

Розглянемо розрахунок нестационарного неосесиметричного температурного поля порожнистого циліндра в циліндричній системи координат  $(r, \varphi, z)$ , який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $OZ$  скінченної довжини  $L$ , теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна  $G_0$ , а на зовнішній і внутрішній поверхні циліндра температура відома і залежить від часу  $G(\varphi, z, t)$  і  $G_1(\varphi, z, t)$  відповідно.

Математично задача визначення температурного поля циліндра  $T(\rho, \varphi, z, t)$  складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності [10] в області  $D = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (\rho_0, 1), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, 1), F_0 \in (0, \infty)\}$ , що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \tag{1}$$

с початковою умовою

$$\theta(\rho, \varphi, z, 0) = 0 \tag{2}$$

і граничними умовами

$$\theta(\rho_0, \varphi, z, t) = W(\varphi, z, F_0), \quad \theta(1, \varphi, z, t) = V(\varphi, z, F_0), \tag{3}$$

$$\theta(\rho, \varphi, 0, F_0) = 0, \quad \theta(\rho, \varphi, 1, F_0) = 0, \tag{4}$$

де  $\theta = \frac{T(\rho, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$  - відносна температура циліндра;  $T_{\max} = \max_{\varphi, z, t} \{G(\varphi, z, t), G_1(\varphi, z, t)\}$ ;  $t$  - час;

$\rho = \frac{r}{R}$ ;  $R$  - зовнішній радіус циліндра;  $\chi = (R/L)^2$ ;  $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$  - коефіцієнт температуропровідності;

$\gamma$  - щільність середовища;  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності;  $c$  - питома теплоємність;  $F_0 = at \cdot R^{-2}$  -

критерій Фур'є;  $Pd = \frac{\omega R^2}{a}$  - критерій Предводітелева;  $W(\varphi, z, F_0), V(\varphi, z, F_0) \in C(D)$ .

Тоді рішення крайової задачі (1)-(4)  $\theta(\rho, \varphi, z, F_0)$  є двічі неперервно диференційованим по  $\rho$  і  $\varphi, z$ , один раз по  $t$  в області  $D$  і неперервним на  $\bar{D}$  [10], тобто  $\theta(\rho, \varphi, z, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ , а функції  $W(\varphi, z, F_0), V(\varphi, z, F_0), \theta(\rho, \varphi, z, F_0)$  можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [11]:

$$\begin{Bmatrix} \theta(\rho, \varphi, z, F_0) \\ V(\varphi, z, F_0) \\ W(\varphi, z, F_0) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \theta_n(\rho, z, F_0) \\ V_n(z, F_0) \\ W_n(z, F_0) \end{Bmatrix} \cdot \exp(in\varphi), \quad (5)$$

де

$$\begin{Bmatrix} \theta_n(\rho, z, F_0) \\ V_n(z, F_0) \\ W_n(z, F_0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \theta(\rho, \varphi, z, F_0) \\ V(\varphi, z, F_0) \\ W(\varphi, z, F_0) \end{Bmatrix} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi, \quad (6)$$

де  $\theta_n(\rho, z, F_0) = \theta_n^{(1)}(\rho, z, F_0) + i\theta_n^{(2)}(\rho, z, F_0), V_n(z, F_0) = V_n^{(1)}(z, F_0) + iV_n^{(2)}(z, F_0),$

$W_n(z, F_0) = W_n^{(1)}(z, F_0) + iW_n^{(2)}(z, F_0), i$  - уявна одиниця. (7)

З огляду на те, що  $\theta(\rho, \varphi, z, F_0)$  функція дійсна, обмежимося надалі розглядом  $\theta_n(\rho, z, F_0)$  для  $n=0, 1, 2, \dots$ , тому що  $\theta_n(\rho, z, F_0)$  і  $\theta_{-n}(\rho, z, F_0)$  будуть комплексно спряженими [11]. Підставляючи значення функцій з (5)-(7) у (1)-(4) одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial F_0} + g_n^{(i)} \theta_n^{(m_i)} = \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \theta_n^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial z^2} \quad (8)$$

с початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho, z, 0) = 0, \quad (9)$$

і граничними умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho_0, z, F_0) = W_n^{(i)}(z, F_0), \quad \theta_n^{(i)}(1, z, F_0) = V_n^{(i)}(z, F_0) \quad (10)$$

$$\theta_n^{(i)}(\rho, 0, F_0) = 0, \quad \theta_n^{(i)}(\rho, 1, F_0) = 0, \quad (11)$$

де  $g_n^{(1)} = -\omega n; g_n^{(2)} = \omega n; m_1 = 2; m_2 = 1; i=1, 2.$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (8) інтегральне перетворення Ханкеля [13]:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \int_{\rho_0}^1 \rho f(\rho) \Psi_{n,k}(\mu_{n,k} \rho) d\rho, \quad (12)$$

де  $\Psi_{n,k}(\mu_{n,k} \rho) = Y_n(\mu_{n,k} \rho_0) J_n(\mu_{n,k} \rho) - J_n(\mu_{n,k} \rho_0) Y_n(\mu_{n,k} \rho); J_n(x), Y_n(x)$  - функції Бесселя  $1^{20}$  і  $2^{20}$  роду  $n^{20}$  порядку відповідно;  $\mu_{n,k}$  - корні трансцендентного рівняння

$$Y_n(\mu_{n,k} \rho_0) J_n(\mu_{n,k}) - J_n(\mu_{n,k} \rho_0) Y_n(\mu_{n,k}) = 0,$$

які можна знайти по формулі [4]:

$$\mu_{n,k} = \delta + p\delta^{-1} + (q - p^2) \cdot \delta^{-3} + (r - 4pq + 2p^3) \cdot \delta^{-5} + \dots,$$

де  $\delta = k\pi(\rho_0 - 1)$ ;  $p = (m - 1)(8\rho_0)^{-1}$ ;  $q = 4(m - 1)(m - 25)(\rho_0^3 - 1)[3(\rho_0 - 1)(8\rho_0)^3]^{-1}$ ;

$r = 32(m - 1)(m^2 - 114m + 1073)(\rho_0^5 - 1)[5(8\rho_0)^3(\rho_0 - 1)]^{-1}$ ;  $m = 4n^2$ .

Формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho)}{\|\Psi_{n,k}\|^2} \bar{f}(\mu_{n,k}) \quad (13)$$

де  $\|\Psi_{n,k}\|^2 = \frac{1}{2} \{ [\Psi'_{n,k}(\mu_{n,k})]^2 - \rho_0 [\Psi'_{n,k}(\mu_{n,k}\rho_0)]^2 \}$ ;  $\Psi'_{n,k}(\mu_{n,k}\rho) = \left[ \frac{d\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho)}{d(\mu_{n,k}\rho)} \right]_{\rho=\rho_0}$ .

В результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial F_0} + g_n^{(i)} \bar{\theta}_n^{(m_i)} = \Omega_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k}, z, F_0) - \mu_{n,k}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2} \quad (14)$$

с початковими умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, z, 0) = 0, \quad (15)$$

і граничними умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, 0, F_0) = 0, \quad \bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, 1, F_0) = 0, \quad i=1,2. \quad (16)$$

де  $\Omega_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k}, z, F_0) = \mu_{n,k} [\rho_0 \Psi'_{n,k}(\mu_{n,k}\rho_0) W_n^{(i)} - \Psi'_{n,k}(\mu_{n,k}) V_n^{(i)}]$ ;  $i=1,2$ .

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (14) інтегральне перетворення Фур'є [13]:

$$\hat{f}(\lambda_m) = \int_0^1 f(x) \sin(\pi \cdot m \cdot x) dx,$$

де  $\lambda_m = \pi \cdot m$ ;  $m=1,2,\dots$ , а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(x) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi \cdot m \cdot x) \cdot \hat{f}(\lambda_m). \quad (17)$$

В результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\hat{\theta}_n^{(i)}}{dF_0} + g_n^{(i)} \hat{\theta}_n^{(m_i)} = \hat{\Omega}_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k}, \lambda_m, F_0) - (\mu_{n,k}^2 + \chi \cdot \lambda_m^2) \hat{\theta}_n^{(i)} \quad (18)$$

с початковими умовами

$$\hat{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, \lambda_m, 0) = 0, \quad (19)$$

де  $i=1,2$ .

Застосовуємо до системи звичайних диференціальних рівнянь (18) інтегральне перетворення Лапласа [13]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

В результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно  $\tilde{\theta}_n^{(i)}$ :

$$s \tilde{\theta}_n^{(i)} + g_n^{(i)} \cdot \tilde{\theta}_n^{(m_i)} = \tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k}, \lambda_m, s) - (\mu_{n,k}^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_n^{(i)} \quad (20)$$

де  $i=1,2$ .

Застосовуючи до зображення функцій (20) формули оберненого перетворення Лапласа [13], одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,j}, \beta_m, F_0) = \int_0^{F_0} \left[ \bar{\Omega}_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k}, \lambda_m, F_0') \cdot \cos nPd(F_0 - F_0') + \delta_i \bar{\Omega}_{n,k}^{(m_i)}(\mu_{n,k}, \lambda_m, F_0') \sin nPd(F_0 - F_0') \right] \exp\left\{(\mu_{n,j}^{(i)} + x\beta_m^2)(F_0' - F_0)\right\} dF_0' \quad (21)$$

де  $\delta_1 = -1, \delta_2 = 1; i=1,2$ .

Таким чином з урахуванням формул обернених перетворень (13), (17) одержуємо температурне поле порожнистого циліндра який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ довжини L :

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \bar{\theta}_n^{(1)}(t) + i \cdot \bar{\theta}_n^{(2)}(t) \right] \sin(\pi m z) \right\rangle \frac{\Psi_{n,k}(\mu_{n,k} \rho)}{\|\Psi_{n,k}\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi) \quad (22)$$

де значення  $\bar{\theta}_n^{(1)}(t), \bar{\theta}_n^{(2)}(t)$  визначаються по формулам (21).

### Висновки

Знайдено температурне поле (22) порожнистого циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ скінченної довжини L, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, прокатних валках, турбінах і т.і.).

### Список використаної літератури

1. Калініченко В. Вплив експлуатаційних факторів на напружено-деформований та граничний стан роликів машин безперервного лиття заготовок / Калініченко В., Гопкало Н. // Вісник ТДТУ. - 2010. - Том 15. - № 1. - С. 41-51.
2. Домбровский Ф.С. Работоспособность наплавленных роликов машин непрерывного литья заготовок / Ф.С. Домбровский, Л.К. Лещинский // - К.: Институт электросварки им.Е.О.Патона, 1985. - 198с.
3. Будакова А.А. Профилирование валков листовых станов/ А.А. Будакова, Ю.В. Коновалов, К.Н. Ткалич, и др. // - К.: Техніка, 1986. - 190 с.
4. Капланов В. И. Некоторые вопросы к проблеме охлаждения прокатных валков / Капланов В.И., Петренко А. С., и др. // Вісник Приазовського державного технічного університету. Серія: Технічні науки.- 2010 р. Вип. №20. - С. 94-97.
5. Гарбер Э. А. Моделирование теплового режима стана холодной прокатки с учетом различий в условиях охлаждения верхних и нижних валков / Э. А. Гарбер, В. О. Гусаров, Е. В. Дилигенский, В. В. Кузнецов // Металлург. - 2005. - N 6. - С. 66-69.
6. Гарбер Э.А. Моделирование теплового режима валков широкополосного стана горячей прокатки для определения эффективных режимов их охлаждения / Э.А. Гарбер [и др.] //Металлы. - 2009. - N3. - С. 34-47.
7. Бердник М. Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну суцільного циліндра, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла / Бердник М. Г. // Вісник Дніпропетр. ун-та. Сер. «Механіка» - 2005.- №10. - С. 197-202.
8. Голицына Е. В. Математическое моделирование температурного поля в полом вращающемся цилиндре при нелинейных граничных условиях / Е.В. Голицына // Теплофизика высоких температур. Ноябрь-Декабрь. - 2008. - том 46, № 6. - С. 905 - 910.
9. Kuwashimo Kensuke Temperature distribution within a rotating cylindrical body/ Kuwashimo Kensuke, Yamada Tominori // Bull. JSME. - 1978. - Vol. 21, N 152. - P. 266 - 272.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков // - М., Высшая школа, 1967. - 599 С.
11. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г.Михлин // - М., Высшая школа, 1977. - 427 С.
12. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов // - М., Наука, 1980. - 384 С.
13. Галицын А.С., Жуковский А.И. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А.С. Галицын, А.И. Жуковский // - Киев., Наукова думка. 1979. - 561 С.
14. Грэй Э. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике / Э. Грэй, Г.Б. Мэтьюз // - М., 1949. - 386 С.

УДК 517.946

С.Г. БЛАЖЕВСЬКИЙ

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

**ЗАДАЧА ДИФУЗІЇ В ТРИШАРОВОМУ НЕОДНОРІДОМУ НЕОБМЕЖЕНОМУ  
СЕРЕДОВИЩІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ**

*Операційним методом отримано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі про дифузійні процеси в тришарових необмежених середовищах з м'якими межами у випадку, коли моделювання дифузійних процесів здійснено за допомогою методу гібридного диференціального оператора Ейлера-Ейлера-Фур'є.*

*Ключові слова: інтегральне перетворення Лапласа, рівняння дифузії, крайова задача.*

С.Г. БЛАЖЕВСКИЙ

Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

**ЗАДАЧА ДИФУЗИИ В ТРЕХСЛОЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ С  
МЯГКИМИ ГРАНИЦАМИ**

*Операционным методом получено интегральное изображение точного аналитического решения задачи о диффузионных процессах в трехслойных неоднородных неограниченных средах с мягкими границами в случае, когда моделирование диффузионных процессов осуществлено методом гибридного дифференциального оператора Эйлера-Эйлера-Фурье.*

*Ключевые слова: интегральное преобразование Лапласа, уравнение диффузии, краевая задача.*

S.G. BLAZHEVSKIY

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

**THE DIFFUSION PROBLEM IN THREE-LAYERED HETEROGENEOUS UNBOUNDED  
ENVIRONMENT WITH SOFT LIMITS**

*We get the integral representation of exact analytical solve of problem about diffusive processes in three-layered heterogeneous unbounded environments with soft limits by operating method, when the design of diffusion processes is carried out by the method of hybrid differential operator Euler-Euler-Fourier.*

*Keywords: integral Laplace transform, diffusion equation, boundary problem.*

**Постановка проблеми та аналіз публікацій по темі дослідження**

Процеси дифузії, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертати до себе увагу протягом усієї історії розвитку суспільства. Але серйозні дослідження почалися з найпростішої моделі дифузійного процесу – диференціального рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u}{\partial r^2} = f(t, r)$$

з відповідними початковими та крайовими умовами. Потреби практики призводили до різного узагальнення даного рівняння. Слід відмітити появу в другій половині ХХ-го століття «Узагальненої термомеханіки», породженої гіперболічним рівнянням теплопровідності [2]. Розроблялися різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи знаходження розв'язку.

Особливу увагу заслуговує розроблений в другій половині ХХ-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів. Це привело навіть у випадку жорсткості межі області до диференціального рівняння з сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функцій та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі в цьому випадку одержати неможливо. Цих труднощів можна уникнути, якщо здійснити моделювання дифузійного процесу методом гібридних диференціальних операторів. При цьому межа середовища може бути м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

**Мета статті**

Дана робота присвячена моделюванню нестационарних дифузійних процесів методом гібридного диференціального оператора Ейлера-Ейлера-Фур'є на трискладовому необмеженому сегменті в припущенні, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Основна частина

Побудуємо обмежений в області  $D_2 = \{(t, r) : t \in (0, \infty), r \in I_2 = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 \geq 0\}$  розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1(t, r) - a_1^2 B_{\alpha_1}^* [u_1(t, r)] &= f_1(t, r), r \in (R_0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2(t, r) - a_2^2 B_{\alpha_2}^* [u_2(t, r)] &= f_2(t, r), r \in (R_1, R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3(t, r) - a_3^2 \frac{\partial^2 u_3(t, r)}{\partial r^2} &= f_3(t, r), r \in (R_2, \infty), \end{aligned} \quad (1)$$

за початковими умовами

$$\begin{aligned} u_1(t, r)|_{t=0} &= g_1(r), r \in (R_0, R_1), \\ u_2(t, r)|_{t=0} &= g_2(r), r \in (R_1, R_2), \\ u_3(t, r)|_{t=0} &= g_3(r), r \in (R_2, \infty), \end{aligned} \quad (2)$$

крайовими умовами

$$L_{11}^0[u_1(t, r)]|_{r=R_0} = \omega_0(t), \lim_{r \rightarrow \infty} r^\gamma u_3 = 0 \quad (3)$$

та умовами спряження

$$\left( L_{j1}^k [u_k(t, r)] - L_{j2}^k [u_{k+1}(t, r)] \right) |_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), j, k \in \{1, 2\}. \quad (4)$$

У рівностях (1) – (4) беруть участь диференціальні оператори Ейлера

$$\begin{aligned} B_\alpha^* &= r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2, \text{ Фур'є } \frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{ та диференціальні оператори} \\ L_{jm}^k &= \left( \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}, m, j \in \{1, 2\}; k \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти:  $a_j > 0; 2\alpha_j + 1 > 0; \alpha_{11}^0 \leq 0, \beta_{11}^0 \geq 0, |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0, \alpha_{22}^3 \geq 0, \beta_{22}^3 \geq 0, \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0, \alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0, \delta_{jm}^k \geq 0, \gamma_{jm}^k \geq 0, j, m, k = 1, 2; c_{11,j} c_{21,k} > 0, c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k, c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0, \delta_{2j}^k \beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k \beta_{2j}^k = \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k$ .

Нехай задані та шукані функції є оригіналами за Лапласом відносно змінної  $t$  [1]. У зображенні за Лапласом отримуємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині  $I_2$  розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Фур'є для модифікованих функцій:

$$\begin{aligned} (B_{\alpha_1}^* - q_1^2) u_1^*(p, r) &= -F_1^*(p, r), r \in (R_0, R_1), \\ (B_{\alpha_2}^* - q_2^2) u_2^*(p, r) &= -F_2^*(p, r), r \in (R_1, R_2), \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} - q_3^2 \right) u_3^*(p, r) &= -F_3^*(p, r), r \in (R_2, \infty), \end{aligned} \quad (6)$$

за крайовими умовами

$$\left( \overline{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0 \right) u_1^*(p, r) \Big|_{r=R_0} = \omega_{01}^*(p), \lim_{r \rightarrow \infty} r^\gamma u_3^* = 0 \quad (7)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \overline{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k \right) u_k^*(p, r) - \left( \overline{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k \right) u_{k+1}^*(p, r) \right] \Big|_{r=R_k} = \overline{\omega}_{jk}^*(p), j, k \in \{1, 2\}. \quad (8)$$

У рівностях (6) – (8) беруть участь функції:

$$\begin{aligned} q_j &= a_j^{-2} (p + \gamma_j^2)^{1/2}, F_j^*(p, r) = a_j^{-2} (f_j^*(p, r) + g_j(r)), j \in \{1, 2, 3\}; \overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k p, \\ \overline{\beta}_{jk}^m &= \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m p, u^*(p) = \int_0^\infty u(t, r) e^{-pt} dt, \overline{\omega}_0^*(p) = \omega_0^*(p) + \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0), \end{aligned}$$



$$\bar{\omega}_{jk}^*(p) = \omega_{jk}^*(p) + \psi_{jk}; \psi_{jk} = \delta_{j1}^k g'_k(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - [\delta_{j2}^k g'_{k+1}(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)],$$

$$\operatorname{Re} q_j > 0, p = \sigma + is, i^2 = -1, \omega_0^*(p) = \int_0^\infty \omega_0(t) e^{-pt} dt, \omega_{jk}^*(p) = \int_0^\infty \omega_{jk}(t) e^{-pt} dt,$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера  $(B_\alpha^* - q^2)v = 0$  утворюють функції  $r^{-\alpha-q}$ ,  $r^{-\alpha+q}$ ; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є  $(d^2/dr^2 - q^2)v = 0$  складають функції  $e^{qr}$  та  $e^{-qr}$  [4].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (6) – (8) методом функцій Коші:

$$\begin{aligned} u_1^* &= A_1 r^{-\alpha_1 - q_1} + B_1 r^{-\alpha_1 + q_1} + \int_{R_0}^{R_1} E_1^*(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho, \\ u_2^* &= A_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + B_2 r^{-\alpha_2 + q_2} + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho, \\ u_3^* &= A_3 \operatorname{ch} q_3 r + B_3 \operatorname{sh} q_3 r + \int_{R_2}^\infty E_3^*(p, r, \rho) F_3^*(p, \rho) d\rho. \end{aligned} \quad (9)$$

У рівностях (9) беруть участь функції Коші  $E_j^*(p, r, \rho)$ :

$$E_1^*(p, r, \rho) = -\frac{1}{2q_1 \Delta_{\alpha_1; 11}} \begin{cases} \Psi_{\alpha_1; 11}^{0*}(q_1, r) \Psi_{\alpha_1; 11}^{1*}(q_1, \rho), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi_{\alpha_1; 11}^{0*}(q_1, \rho) \Psi_{\alpha_1; 11}^{1*}(q_1, r), & R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \quad (10)$$

$$E_2^*(p, r, \rho) = -\frac{1}{2q_2 \Delta_{\alpha_2; 11}} \begin{cases} \Psi_{\alpha_2; 12}^{1*}(q_2, r) \Psi_{\alpha_2; 12}^{2*}(q_2, \rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Psi_{\alpha_2; 12}^{1*}(q_2, \rho) \Psi_{\alpha_2; 12}^{2*}(q_2, r), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \quad (11)$$

$$E_3^*(p, r, \rho) = \frac{1}{q_3 (\bar{\alpha}_{12}^2 q_3 - \bar{\beta}_{12}^2)} \begin{cases} \Phi_{22}^2(q_3 R_2, q_3 \rho) \Phi_{12}^2(q_3 R_2, q_3 r), & R_2 < r < \rho < \infty, \\ \Phi_{22}^2(q_3 R_2, q_3 r) \Phi_{12}^2(q_3 R_2, q_3 \rho), & R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases} \quad (12)$$

У рівностях (10) – (12) прийняті позначення:

$$Z_{\alpha_n; jk}^{m1}(q_n, R_m) = [(\bar{\beta}_{jk}^m - \alpha R_m^{-1} \bar{\alpha}_{jk}^m) - \bar{\alpha}_{jk}^m R_m^{-1} q_n] R_m^{-\alpha_n - q_n},$$

$$Z_{\alpha_n; jk}^{m2}(q_n, R_m) = [(\bar{\beta}_{jk}^m - \alpha R_m^{-1} \bar{\alpha}_{jk}^m) + \bar{\alpha}_{jk}^m R_m^{-1} q_n] R_m^{-\alpha_n + q_n},$$

$$\Psi_{\alpha_n; j2}^{m*}(q_n, r) = Z_{\alpha_n; j2}^{m2}(q_n, R_m) r^{-\alpha_n - q_n} - Z_{\alpha_n; j2}^{m1}(q_n, R_m) r^{-\alpha_n + q_n}, n, m = 1, 2,$$

$$\Delta_{\alpha_n; j2}(q_n, R_{n-1}, R_n) = Z_{\alpha_n; j2}^{n-1,1}(q_n, R_{n-1}) Z_{\alpha_n; j1}^{n-1,1}(q_n, R_n) - Z_{\alpha_n; j2}^{n-1,2}(q_n, R_{n-1}) Z_{\alpha_n; j1}^{n-1,2}(q_n, R_n), j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12}^2(q_3 R_2, q_3 r) &= V_{12}^{21}(q_3, R_2) \operatorname{ch} q_3 r - V_{12}^{21}(q_3, R_2) \operatorname{sh} q_3 r \equiv \\ &\equiv \bar{\alpha}_{12}^{-1} q_3 \operatorname{ch} q_3 (r - R_2) - \bar{\beta}_{12}^{-1} \operatorname{sh} q_3 (r - R_2), \Phi_{22}^2(q_3 R_2, q_3 r) = e^{-q_3 (r - R_2)}. \end{aligned}$$

Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення величин  $A_1, A_2, B_1, B_2$  та  $A_3$  дають неоднорідну алгебраїчну систему:

$$A_1 Z_{\alpha_1; 11}^{01} + B_1 Z_{\alpha_1; 11}^{02} = \bar{\omega}_0^*(p),$$

$$A_1 Z_{\alpha_1; 11}^{11} + B_1 Z_{\alpha_1; 11}^{12} + A_2 Z_{\alpha_1; 12}^{11} + B_2 Z_{\alpha_1; 12}^{12} = \bar{\omega}_{11}^*(p),$$

$$A_1 Z_{\alpha_1; 21}^{11} + B_1 Z_{\alpha_1; 21}^{12} + A_2 Z_{\alpha_1; 12}^{11} + B_2 Z_{\alpha_1; 22}^{12} = \bar{\omega}_{21}^*(p) + G_{12}^*,$$

$$A_2 Z_{\alpha_2; 11}^{21} + B_1 Z_{\alpha_2; 11}^{22} + A_3 \Phi_{12}^{21} = \bar{\omega}_{12}^*(p),$$

$$A_2 Z_{\alpha_2;21}^{21} + B_1 Z_{\alpha_2;21}^{22} + A_3 \Phi_{22}^{21} = \bar{\omega}_{22}^*(p) + G_{23}^* \tag{13}$$

У системі (13) беруть участь функції:

$$G_{12}^* = -\frac{c_{11}^*}{R_1^{2\alpha_1+1}} \int_{R_0}^{R_1} \frac{\Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, \rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)} F_1^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_1-1} d\rho +$$

$$+ \frac{c_{21}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi_{\alpha_2;11}^{2*}(q_2, \rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2, R_1, R_2)} F_2^*(p, \rho) d\rho,$$

$$G_{23}^* = -\frac{c_{12}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi_{\alpha_2;12}^{2*}(q_2, \rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2, R_1, R_2)} F_2^*(p, \rho) d\rho - c_{22}^* \int_{R_2}^{\infty} \frac{e^{-q_3(\rho-R_2)}}{\alpha_{12} q_3 - \beta_{12}^2} F_3^*(p, \rho) d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (6) – (8): для  $p = \sigma + is$  із  $\text{Re } p = \sigma > \sigma_0$ , де  $\sigma_0$  – абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та  $\text{Im } p = s \in (-\infty, +\infty)$  визначник алгебраїчної системи (13)

$$\Delta_{\alpha}(p) \equiv \Phi_{22}^2(q_3 R_2, q_3 R_3) A_{\alpha_1;1}(p) - \Phi_{12}^2(q_3 R_2, q_3 R_3) A_{\alpha_1;2}(p) =$$

$$= \Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1) B_{\alpha_2;2}(p) - \Delta_{\alpha_1;21}(q_1, R_0, R_1) B_{\alpha_2;1}(p) \neq 0, (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2). \tag{14}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (6) – (8):

1) породжені крайовою умовою в точці  $r = R_0$  функції Гріна

$$W_{\alpha;11}^*(p, r) = \frac{1}{\Delta_{\alpha}} [B_{\alpha_2;2}(p) \Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, r) - B_{\alpha_2;1}(p) \Psi_{\alpha_1;21}^{1*}(q_1, r)],$$

$$W_{\alpha;12}^*(p, r) = -\frac{2q_1 c_{11}^*}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_{\alpha}} Q_{\alpha_2;2}(p, r), \quad W_{\alpha;13}^*(p, r) = -\frac{2q_1 c_{11}^* c_{12}^* q_2}{R_1^{2\alpha_1+1} \Delta_{\alpha}} e^{-q_3(r-R_2)};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\alpha;11}^{1*}(p, r) = -\frac{B_{\alpha_2;2}(p)}{\Delta_{\alpha}(p)} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r), \quad R_{\alpha;21}^{1*}(p, r) = -\frac{B_{\alpha_2;1}(p)}{\Delta_{\alpha}(p)} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r),$$

$$R_{\alpha;12}^{1*}(p, r) = -\frac{c_{21}^* q_2}{\Delta_{\alpha}(p)} \Delta_{\alpha_1;21}(q_1, R_0) \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r),$$

$$R_{\alpha;22}^{1*}(p, r) = -\frac{c_{21}^* q_2}{\Delta_{\alpha}(p)} \Delta_{\alpha_2;12}(q_3, R_2) \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r),$$

$$R_{\alpha;11}^{2*}(p, r) = \frac{\Delta_{\alpha_1;21}(q_3, R_0, R_1)}{\Delta_{\alpha}(p)} Q_{\alpha_2;2}(p, r), \quad R_{\alpha;21}^{2*}(p, r) = -\frac{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)}{\Delta_{\alpha}(p)} Q_{\alpha_2;2}(p, r),$$

$$R_{\alpha;12}^{2*}(p, r) = -\frac{\Delta_{\alpha_1;22}(q_1, R_0, R_1)}{\Delta_{\alpha}(p)} Q_{\alpha_1;1}(p, r), \quad R_{\alpha;22}^{2*}(p, r) = \frac{\Delta_{\alpha_1;22}(q_1, R_0, R_1)}{\Delta_{\alpha}(p)} Q_{\alpha_1;1}(p, r),$$

$$R_{\alpha;11}^{3*}(p, r) = -\frac{c_{12}^* q_2}{\Delta_{\alpha}(p)} \Delta_{\alpha_1;21} e^{-q_3(r-R_2)}, \quad R_{\alpha;21}^{3*}(p, r) = \frac{c_{12}^* q_2}{\Delta_{\alpha}(p)} \Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1) e^{-q_3(r-R_2)}, \tag{15}$$

$$R_{\alpha;12}^{3*}(p, r) = -\frac{A_{\alpha_1;2}}{\Delta_{\alpha}(p)} e^{-q_3(r-R_2)}, \quad R_{\alpha;22}^{3*}(p, r) = -\frac{A_{\alpha_1;2}}{\Delta_{\alpha}(p)} e^{-q_3(r-R_2)};$$

4) породжені неоднорідністю системи (6) функції впливу

$$H_{\alpha;11}^*(p, r, \rho) = -\frac{1}{2q_1 \Delta_{\alpha}(p)} \begin{cases} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r) W_{\alpha;11}^*(p, \rho), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, \rho) W_{\alpha;11}^*(p, r), & R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\alpha;12}^*(p, r, \rho) &= \frac{c_{21}^*}{\Delta_\alpha(p)} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r) Q_{\alpha_2;2}(p, \rho), \\
 H_{\alpha;13}^*(p, r, \rho) &= \frac{q_2 c_{12}^* c_{22}^*}{R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha} \Psi_{\alpha_2;11}^{0*}(q_1, r) e^{-q_3(r-R_2)}, \\
 H_{\alpha;21}^*(p, r, \rho) &= \frac{c_{11}^*}{R_2^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha(p)} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, \rho) Q_{\alpha_2;2}(p, r), \\
 H_{\alpha;22}^*(p, r, \rho) &= -\frac{1}{2q_2 \Delta_\alpha(p)} \begin{cases} Q_{\alpha_1;1}(p, r) Q_{\alpha_2;2}(p, \rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ Q_{\alpha_1;1}(p, \rho) Q_{\alpha_2;2}(p, r), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \\
 H_{\alpha;23}^*(p, r, \rho) &= -\frac{c_{22}^*}{R_2^{2\alpha_2+1} \Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha_1;1}(p, r) e^{-q_3(r-R_2)}, \\
 H_{\alpha;31}^*(p, r, \rho) &= -\frac{c_{11}^*}{R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{q_2 c_{12}^*}{\Delta_\alpha} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(p, r) e^{-q_3(r-R_2)}, \\
 H_{\alpha;32}^*(p, r, \rho) &= -\frac{c_{12}^*}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha_1;2}(p, \rho) e^{-q_3(r-R_2)}, \\
 H_{\alpha;33}^*(p, r, \rho) &= -\frac{1}{2q_3} \begin{cases} \Psi_{\alpha_2;22}^{3*}(q_3, r) e^{-q_3(\rho-R_2)}, & R_2 < r < \rho < \infty, \\ \Psi_{\alpha_2;22}^{3*}(q_3, \rho) e^{-q_3(r-R_2)}, & R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{16}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (13) й підстановки одержаних значень  $A_j$  та  $B_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) у формули (9) та низки елементарних перетворень одержимо єдиний розв'язок крайової задачі (6) – (8):

$$\begin{aligned}
 u_j^*(p, r) &= W_{\alpha;1j}^*(p, r) \omega_0^*(p) + \sum_{m,k=1}^2 R_{\alpha;mk}^{j*} \omega_{mk}^*(p) + \\
 &+ \int_{R_0}^{R_1} H_{\alpha;j1}^*(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho + \int_{R_1}^{R_2} H_{\alpha;j2}^*(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_2+1} d\rho + \\
 &+ \int_{R_2}^{\infty} H_{\alpha;j3}^*(p, r, \rho) F_3^*(p, \rho) d\rho, \quad j = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Повертаючись у формулах (17) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок задачі (1) – (4):

$$\begin{aligned}
 u_j(t, r) &= \int_0^t W_{(\alpha);1j}(t-\tau, r) \omega_0(\tau) d\tau + [\delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)] W_{(\alpha);1j}(t, r) + \\
 &+ \sum_{m,k=1}^2 \left[ \int_0^t R_{(\alpha);mk}^j(t-\tau, r) \omega_{mk}(\tau) d\tau + R_{(\alpha);mk}^j(t, r) \psi_{mk} \right] + \\
 &+ \int_0^{R_1} \int_{R_0}^t H_{(\alpha);j1}(t-\tau, r, \rho) [f_1(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_1(\rho)] a_1^{-2} \rho^{2\alpha_1+1} d\rho + \\
 &+ \int_0^{R_2} \int_{R_1}^t H_{(\alpha);j2}(t-\tau, r, \rho) [f_2(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_2(\rho)] a_2^{-2} \rho^{2\alpha_2+1} d\rho + \\
 &+ \int_0^t \int_{R_2}^{\infty} H_{(\alpha);j3}(t-\tau, r, \rho) [f_3(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_3(\rho)] a_3^{-2} d\rho, \quad j = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Тут  $\delta_+(\tau)$  – дельта-функція, зосереджена в точці  $\tau = 0$ .

**Зауваження.** Вибором параметрів, які беруть участь у постановці даної дифузійної задачі, можна виділити безпосередньо із загальних структур будь-який практично важливий випадок.

#### Висновок

Вектор-функція  $u(t, r) = \{u_1(t, r); u_2(t, r); u_3(t, r)\}$  визначає інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку задачі моделювання дифузійних процесів в неоднорідному середовищі з м'якими межами методом ГДО на сегменті полярної осі.

#### Список використаної літератури

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

УДК 519.7

Ю.В. БРАЗЛУК, Д.В. ЕВДОКИМОВ, Р.А. ШУЛЬГА  
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара**СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И  
ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ  
ЗАДАЧ В КОЛЬЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ**

*Рассмотрена методика сравнения эффективности двух существенно различных численных методов путем численного эксперимента на краевых задачах, имеющих известные аналитические решения в квадратурах. Обсуждены понятие эффективности и критерии эффективности численного алгоритма. Численный эксперимент проводился для задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа в кольцевых областях и во внешности круга (метод граничных элементов). Полученные результаты свидетельствуют о более высокой эффективности метода граничных элементов. Сделанные выводы могут быть полезны при разработке пакетов прикладных программ различного назначения и создании систем автоматического проектирования.*

*Ключевые слова: метод конечных разностей, метод граничных элементов, вычислительная эффективность, погрешность вычисления, уравнение Лапласа, задача Неймана, задача Дирихле, кольцевая область.*

Ю.В. БРАЗЛУК, Д.В. ЕВДОКИМОВ, Р.О. ШУЛЬГА  
Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара**ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ТА ГРАНИЧНИХ  
ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У КІЛЬЦЕВИХ ОБЛАСТЯХ**

*Розглянуто методику порівняння ефективності двох суттєво різних чисельних методів шляхом обчислювального експерименту на крайових задачах, які мають відомий аналітичний розв'язок у квадратурах. Обговорені поняття ефективності та критерії ефективності чисельного алгоритму. Обчислювальний експеримент проводився для задач Неймана та Діріхле для рівняння Лапласа в кільцевих областях та у зовнішності кола (метод граничних елементів). Отримані результати свідчать про більш високу ефективність методу граничних елементів. Зроблені висновки можуть бути корисні при розробці пакетів прикладних програм різного призначення, а також створенні систем автоматичного проектування.*

*Ключові слова: метод скінченних різниць, метод граничних елементів, обчислювальна ефективність, похибка обчислень, рівняння Лапласа, задача Неймана, задача Діріхле, кільцева область.*

IU.V. BRAZALUK, D.V. YEVDOKYMOV, R.O. SHULHA  
Oles Honchar Dnipropetrovsk National University**EFFECTIVENESS COMPARISON OF FINITE DIFFERENCE METHOD AND BOUNDARY ELEMENT  
METHOD IN SOLUTION OF ELLIPTIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN RING-LIKE DOMAINS**

*Effectiveness comparison technique of two sufficiently different numerical methods by computational experiment is considered on boundary value problem, having known analytical solution in quadratures. Conception of effectiveness and effectiveness criteria of numerical algorithm are discussed. Numerical experiment is made for Neumann and Dirichlet problems for Laplace equation in ring-like domains and in exterior of circle (boundary element method). The obtained results confirm higher effectiveness of boundary element method. The made conclusions may be useful for development of applied computer code packets and computer aided designer system.*

*Key words: finite difference method, boundary element method, computational experiment, calculation error, Laplace equation, Neumann problem, Dirichlet problem, ring-like domain.*

**Введение**

Практически повсеместное массовое использование численного моделирования, как в научных, так и в производственных целях, привело в последнее время к такому росту числа решаемых численно различных краевых задач, что даже относительно небольшое улучшение качества этого процесса (в виде улучшения точности, сокращения времени счета или уменьшения требуемых ресурсов компьютера) сулит ощутимые выгоды, которые, по-видимому, будут только возрастать в дальнейшем. Несомненно, что удачный выбор алгоритма численного решения, реализуемого в программном обеспечении, предназначенном для многократных расчетов, способен сократить затраты времени исследователей или

разработчиков техники, сэкономить средства благодаря более рациональному использованию ресурсов вычислительной техники, и, в конечном итоге, улучшить качество получаемого научного или технического результата. К сожалению, современный численный анализ изобилует самыми разнообразными вычислительными алгоритмами, их вариациями и модификациями, большинство из которых явно недостаточно исследованы, вследствие чего они так и не были надлежащим образом систематизированы. Столь неудовлетворительное состояние вопроса объясняется, прежде всего, тем, что на протяжении более чем шестидесятилетней истории численного анализа алгоритмы и их модификации создавались с совершенно различными прикладными вычислительными целями и, в значительной мере, оставались в сфере интересов того направления предметной дисциплины, которая стимулировала их появление. Более того, результаты расчетов, выполненных по данному алгоритму, могут существенным образом зависеть от особенностей его программной реализации. Разнообразие сред разработки и вспомогательных программных продуктов с многочисленными недокументированными особенностями существенно затрудняют как проведение вычислительного эксперимента, так и трактовку его результатов, поскольку не позволяет оценить отдельно погрешность собственно алгоритма и накопление погрешности в результате тех или иных особенностей программы, а затраты машинного времени и памяти компьютера от одной программной реализации к другой могут отличаться в несколько раз. В силу перечисленных обстоятельств сравнение путем численного эксперимента вычислительной эффективности двух различных алгоритмов представляет собой задачу нетривиальную и с методологической, и с практической точек зрения. Однако постоянно возрастающая актуальность подобных сравнений заставляет решать указанную проблему.

#### **Постановка проблемы**

В современном численном анализе можно условно выделить три основных направления: метод конечных разностей, метод конечных элементов и так называемые альтернативные методы. Благодаря универсальности и относительной простоте метода конечных разностей этот метод оказался исторически первым универсальным методом численного анализа. Несколько уступая методу конечных разностей по универсальности, но, в то же время, значительно превосходя его при решении задач в областях сложной геометрической формы, метод конечных элементов несколько позже стал вторым универсальным подходом численного расчета, почти полностью вытеснив метод конечных разностей в ряде направлений, связанных с решением краевых задач эллиптического типа. В настоящее время более 90% прикладных расчетов (а по некоторым оценкам 98%) производится при помощи методов конечных разностей и конечных элементов. Термин альтернативные методы объединяет значительное число разнообразных приближенных аналитических, полуаналитических, численно-аналитических методов, значительной частью появившихся еще в «докомпьютерную эпоху». К альтернативным методам относятся методы теории потенциала (метод граничных элементов, метод функций Грина, методы дискретных особенностей, панельные методы), вариационные методы (метод Ритца, метод Трефтца) и множество инженерных подходов. Если для методов конечных разностей и конечных элементов проводились обширные теоретические и методологические исследования, позволившие создать классификацию алгоритмов и обеспечить достаточно четкую и последовательную их систематизацию внутри метода, то для альтернативных методов подобные исследования не проводились, более того, сомнительно, чтобы можно было построить единую систематизацию альтернативных методов. Тем не менее, в рамках отдельных методов, относящихся к альтернативным, были предприняты попытки классификации и систематизации. В результате, внутри отдельных методов как направлений развития численного анализа, сформировались устойчивые системы взглядов, методик и отношений сравнения точности и эффективности, позволяющих дать заключение о свойствах алгоритма в сравнении с алгоритмами того же метода. Естественным продолжением этих работ представляется сравнение алгоритмов, относящихся к различным методам. Однако тут возникает существенные трудности, преодоление которых требует нетрадиционных подходов и неординарных усилий. Прежде чем сравнивать алгоритмы необходимо выработать количественный критерий такого сравнения. Традиционно в качестве подобных критериев рассматривали точность расчета и затраты ресурсов компьютера (машинное время, оперативная и внешняя память). В то же время, совершенно очевидно, что результат любого практического расчета существенно зависит от программной реализации алгоритма, поэтому основной тенденцией в сравнительной оценке алгоритмов является отказ от численного эксперимента в пользу теоретических оценок. В результате, появилось большое число работ по численному моделированию, в которых в качестве количественного критерия точности используется порядок аппроксимации, а для количественной оценки затрат компьютерных ресурсов применяется оценка количества арифметических операций. К сожалению, если указанные критерии работоспособны для близких по логической структуре алгоритмов, относящихся к одному методу, то для различных по структуре алгоритмов применение таких подходов – явный нонсенс. Поясним эту мысль: если для метода конечных разностей основными операциями являются простейшие действия над координатами узлов сетки, то, например, в методе граничных элементов самой трудоемкой частью вычислений является численное определение интегралов от сложных функций по граничным элементам; понятно, что эти операции несоизмеримы.

Кроме того, различные алгоритмы могут иметь специфические особенности, вообще не проявляющиеся у других численных подходов. Примером тому может служить реализация условий в бесконечно удаленной точке, возникающих во внешних задачах, что будет также рассмотрено в настоящей работе. Метод конечных разностей, как и метод конечных элементов, требует, чтобы условия на бесконечности были "снесены" на внешнюю границу сетки, которая, разумеется, не может быть бесконечной. В то же время метод граничных элементов, равно как и другие методы вычислительной теории потенциала, позволяет ограничиться решением только на актуальной границе области, реализуя условия в бесконечно удаленной точке автоматически.

Учитывая недостаточно четкую формулировку понятия эффективности численного метода, наличие принципиальных отличий в логических подходах разных алгоритмов, не исключающих зависимость результатов от способа и качества программирования, проблема сравнения алгоритмов, относящихся к различным численным методам, представляется весьма нетривиальной и для своего разрешения требует разработки специальных подходов.

#### **Анализ последних исследований и публикаций**

Теория алгоритмов вычислительной математики как часть общей теории алгоритмов стремительно развивались на протяжении всего периода использования компьютеров в вычислительной практике, то есть, с пятидесятих годов двадцатого века, однако особенно плодотворными были первые десятилетия ее развития. В результате, сформировалась достаточно полная и стройная теория, описание которой можно найти, например, в монографиях [1-4]. В то же время появилась известная монография Д. ван Тассела [5], где среди прочих идей было предложено (в современной терминологии) использование вычислительного эксперимента для анализа свойств, как программного обеспечения, так и вычислительного алгоритма. Следует отметить, что классическая теория весьма скептически оценивает подобную возможность, однако в последнее время в вычислительной практике преобладает взгляд на численный алгоритм как на важную составляющую часть программного продукта, неотделимую от программной реализации, что в корне отличается от традиционных взглядов на алгоритм, как математический объект, существующий вне программной реализации. Настоящая статья – это не первое обращение ее авторов к рассматриваемой тематике, ей предшествуют работы [6, 7]. Именно в этих работах была сформулирована идея отказа от использования количества операций и порядка аппроксимации как качественных характеристик вычислительного алгоритма при сравнении существенно различных алгоритмов в пользу единого критерия – эффективности алгоритма. Уже из результатов работы [6] понятно, что для линейных однородных эллиптических краевых задач метод граничных элементов по эффективности превосходит метод конечных разностей, в том числе и в областях кольцевой формы, но количественные характеристики, необходимые для сравнения методов оставались неясными, поскольку решение методом конечных разностей в кольцевой области на согласованной сетке требует больших затрат машинного времени и обеспечивает меньшую точность, чем тот же метод, реализованный в прямоугольной области на декартовой ортогональной сетке. С другой стороны, в кольцевой области нет угловых точек, снижающих точность метода граничных элементов, но, в то же время, прямоугольные области не требуют аппроксимации границ области решения, что для кольцевой области неизбежно.

#### **Формулирование целей статьи**

Очевидным побудительным мотивом написания данной статьи была потребность сравнить систематическую ошибку, вносимую реализацией в вычислительном процессе условий в бесконечно удаленной точке на конечное расстояние, с неизбежными ошибками расчета, присущими любому вычислительному процессу. Очевидно, что исследование данного вида погрешностей невозможно без систематического изучения погрешностей расчетов в кольцевых областях, что и определило основную цель настоящей работы: Путем численного эксперимента на примере краевых задач для уравнения Лапласа в плоском случае проанализировать погрешность методов граничных элементов и конечных разностей, а также сравнить суммарные вычислительные ошибки этих методов с систематической ошибкой, вызванной переносом условия в бесконечно удаленной точке на конечное расстояние.

#### **Основной материал исследования**

Перед изложением собственно сути проведенных работ представляется целесообразным обосновать, насколько это возможно, метод исследования и дать определение понятию вычислительной эффективности алгоритма. Как отмечалось выше, в основу использованного подхода положен анализ результатов численных экспериментов на задачах, имеющих известное аналитическое решение в квадратурах. Очевидно, что результаты подобных численных расчетов никак не могут считаться строгим доказательством тех или иных свойств алгоритма, однако технология программирования в настоящее время достигла такого уровня развития и стандартизации, что с эвристической точки зрения подобный расчет может рассматриваться как весомый аргумент, подтверждающий тот или иной тезис.

Что касается понятия вычислительной эффективности алгоритма, то оно достаточно очевидно на интуитивном уровне и заключается в принципе: "минимальная ошибка расчета за минимальное время". Однако количественная мера вычислительной эффективности не столь очевидна и вызывает интенсивные

дискуссии. В работах [6, 7] была предложена следующая формула для количественного критерия эффективности алгоритма:

$$Q = \tau^m \delta^n, \quad (1)$$

где  $\tau$  – время счета,  $\delta$  – погрешность, определенная в одной из общепринятых норм или в каком-либо специальном виде,  $m, n$  – некоторые величины, выбор которых, в значительной мере, субъективен. Формула (1) полностью соответствует принципу, определенному выше. На первый взгляд удобно взять  $m = n = 1$ , что и было сделано в работах [6, 7]. Очевидно, такой выбор не всегда целесообразен, что можно проиллюстрировать следующим примером: Пусть решается краевая задача для уравнения Лапласа при помощи конечноразностной схемы второго порядка точности, что является фактическим стандартом в настоящее время. Если сгустить сетку в каждом из направлений в  $N$  раз, то погрешность аппроксимации уменьшится в  $N^2$  раз, но и количество узлов возрастет в  $N^2$  раз. То есть, в  $N^2$  раз вырастет количество арифметических операций (на самом деле больше, поскольку увеличится еще и количество необходимых итераций в итерационном процессе). То есть, при  $m = n = 1$  сгущение сетки с целью увеличения точности решения не приводит к увеличению эффективности расчета. Еще сильнее эта тенденция проявляется в пространственном случае, когда при аналогичном сгущении сетки погрешность аппроксимации уменьшается в  $N^2$  раз, а количество узлов возрастает в  $N^3$  раз. Таким образом, если стоит задача повысить точность, то в формуле (1) следует увеличить  $n$ , если сократить время –  $m$ .

Численный эксперимент был проведен на следующих краевых задачах для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

где  $u$  – искомая функция,  $x, y$  – декартовы координаты, в кольцевой области при граничных условиях Дирихле или Неймана, соответствующих следующим аналитическим решениям тестовых задач:

$$u_1(x, y) = (x + y)/2, \quad (3)$$

$$u_2(x, y) = x^2 - y^2, \quad (4)$$

$$u_3(x, y) = e^{x-1} \cos y. \quad (5)$$

Что касается неограниченной области (задачи, сформулированные во внешности круга), то была выбрана задача о бесциркуляционном обтекании прямого кругового цилиндра, сформулированная в терминах задачи потенциала скоростей (задача Неймана) [8]:

$$\varphi = |V_\infty| \left( x + \frac{R_1^2 x}{x^2 + y^2} \right), \quad (6)$$

и функции тока (задача Дирихле) [8]:

$$\psi = |V_\infty| \left( y - \frac{R_1^2 y}{x^2 + y^2} \right), \quad (7)$$

где  $V_\infty$  – скорость жидкости в бесконечно удаленной точке,  $R_1$  – радиус обтекаемого цилиндра (радиус внутренней окружности в кольце).

Численные расчеты проводились по следующим алгоритмам:

- метод конечных разностей на несогласованной декартовой ортогональной равномерной сетке [6] (в данном случае для кольцевой области шаг сетки в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  естественно выбрать равными в отличие от работы [6], где они были различны, что, впрочем, никак не помешало использовать при проведении данного исследования то же программное обеспечение, что и при написании работы [6]); таким образом

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), \quad (8)$$

- метод конечных разностей на согласованной равномерной сетке в полярных координатах, для чего уравнение (2) следует записать в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (9)$$

где  $r$  – полярный радиус, а  $\theta$  – полярный угол. Тогда



$$u_{ij} = \frac{\Delta\theta\Delta r}{2(\Delta\theta + \Delta r)} \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{\Delta r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{(\Delta\theta)^2} \right), \quad (10)$$

где  $\Delta\theta$ ,  $\Delta r$  – соответствующие шаги равномерной сетки по координате. Применение разностных схем (8), (10) требует итерационного процесса, известного как процесс Либмана [9];

- метод граничных элементов [10, 11] с использованием прямолинейных элементов нулевого порядка точности (аналогично работе [6]), для чего уравнение (2) преобразуем в его граничноинтегральный аналог:

$$C(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \int_{\Gamma} \varphi_0(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n(x, y)} dS(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial \varphi_0(x, y, x_0, y_0)}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \quad (11)$$

где  $\varphi_0$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$\varphi_0(x, y, x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (12)$$

$(x_0, y_0)$  – точка наблюдения;  $(x, y)$  – точка источника,  $C(x_0, y_0)$  – функция форма границы  $\Gamma$  [6]

$$C(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & (x_0, y_0) \in D, \\ 1/2, & (x_0, y_0) \in \Gamma, \\ 0, & (x_0, y_0) \notin D, (x_0, y_0) \notin \Gamma, \end{cases} \quad (13)$$

кривая  $\Gamma$  – граница кольца, но в некоторых расчетах в бесконечно простирающейся области  $\Gamma$  – только внутренний контур. Применяя к граничному интегральному уравнению  $C = 1/2$  (11) процедуру метода граничных элементов [10, 11], получим дискретный аналог уравнения (11):

$$1/2 u_i = \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{k \Gamma_k} \int \varphi_0(x, y, x_i, y_i) dS_n - \sum_{k=1}^M u_k \int \frac{\partial \varphi_0(x, y, x_i, y_i)}{\partial n(x, y)} dS, \quad (14)$$

который после переупорядочивания представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, поскольку интегралы по граничным элементам  $\Gamma_k$ , входящие в правую часть (14), является определенными интегралами по прямолинейным элементам, то есть, легко вычисляемыми числовыми значениями. После решения системы линейных алгебраических уравнений (14) краевая задача считается решенной, хотя при необходимости в рамках той же аппроксимации при  $C = 1$  значение искомой функции без труда может быть определено в любой внутренней точке области решения.

#### Анализ полученных результатов

Ограниченные рамки настоящей работы не позволяют привести непосредственные численные результаты проведенных расчетов, поэтому ограничимся здесь количественными выводами, сделанными на основе упомянутых результатов:

1. Как и следовало ожидать, конечноразностная схема на согласованной сетке (10) превосходит аналогичную схему на несогласованной декартовой сетке (8) как по точности, так и по общей вычислительной эффективности, впрочем, при сгущении сетки это преимущество убывает. Вопрос о том, существуют ли параметры сетки, при которых эти подходы эквивалентны по точности или вычислительной эффективности в данной работе не рассматривался ввиду громоздкости необходимых вычислений.

2. Результаты решения тестовых задач, соответствующих формулам (3) – (5), в целом, достаточно хорошо коррелируют между собой.

3. На тестовых задачах (3–5) метод граничных элементов значительно (в отдельных случаях до двух порядков) превосходит рассмотренные конечноразностные подходы, а, если решение необходимо было построить только на границе, то превосходство метода граничных элементов увеличивалось, как минимум, еще на порядок и для точности расчетов, и для вычислительной эффективности.

4. Рассматривая тестовые задачи (6), (7), можно отметить, что решения состоят из двух частей, причем оба слагаемых являются гармоническими функциями. "Снос" условий в бесконечно удаленной точке на внешнюю границу конечного кольца означает постановку там граничного условия, соответствующего только первой составной части решения. То есть, второе слагаемое можно трактовать как специфическое возмущение, порождающее систематическую ошибку перехода от бесконечной области к конечной. На внешней границе кольца эта ошибка имеет порядок  $1/R_2$ , где  $R_2$  – радиус внешней окружности, и уменьшается с ростом  $R_2$ . Соответственно, в силу принципа максимума для гармонических функций, вносимая ошибка не превосходит по модулю  $1/R_2$  и достигает максимума на внешней границе кольца, на

внутренней границе она намного меньше. Вследствие этого обстоятельства рассматриваемая проблема ранее, к сожалению, не привлекала внимание исследователей, поскольку в задачах внешнего обтекания основной интерес сосредоточен на решении вблизи внутреннего контура, где данная ошибка относительно мала. Однако в случае более сложных моделей, где возмущения, в том числе и ошибочные, переносятся потоком, подобная благоприятная ситуация места не имеет, а тестирование расчетных схем для уравнений Эйлера, Навье-Стокса или Рейнольдса представляется нетривиальной проблемой.

5. С ростом внешнего радиуса кольца  $R_2$  падает точность и эффективность всех рассмотренных численных методов, особенно конечноразностных. На первый взгляд, естественно было бы увеличивать  $R_2$  до того момента, когда вычислительная ошибка расчета (полученная, например, при использовании на внешней окружности в качестве граничных условий полных функций (6), (7)) сравняется по порядку с систематической ошибкой, вызванной "сносом" условия в бесконечно удаленной точке на конечное расстояние, которая с ростом  $R_2$  уменьшается. Но в силу соображений, высказанных в предыдущем пункте, такой критерий не представляется практически ценным.

6. Конечноразностные решения, их точность и эффективность существенно зависят от задаваемой точности итерационного процесса, а граничноэлементные нет, что является еще одним преимуществом последней группы алгоритмов.

#### Выводы и анализ перспектив дальнейших исследований

Проведенные исследования подтверждают вывод, сделанный в работе [6], о преимуществе метода граничных элементов над методом конечных разностей при решении плоских линейных краевых задач эллиптического типа. Более того, показано, что для областей с криволинейными границами указанные преимущества только усиливаются. Удалось также показать, что для внешних задач возможность метода граничных элементов избегать "сноса" условия в бесконечно удаленной точке на конечное расстояние обеспечивает не менее существенные дополнительные преимущества перед методом конечных разностей.

Очевидно прикладное значение полученных результатов, которое заключается в повышении эффективности используемого прикладного программного обеспечения.

Перспективы дальнейших исследований также совершенно очевидны и заключаются в:

- проведении аналогичных исследований для линейных эллиптических краевых задач с иными дифференциальными операторами (уравнения Гельмгольца, Пуассона, бигармонические уравнения и др.);
- проведении аналогичных исследований для линейных эллиптических краевых задач в пространственном случае;
- распространение предложенного подхода на линейные краевые задачи параболического типа, где преимущества одного из методов не очевидны [7].

Представляет также интерес анализ возможностей использования критерия вычислительной эффективности (1) для оптимизации расчетной сетки.

#### Список использованной литературы

1. Bentley J.L. Writing of efficient programs / J.L. Bentley. — Prentice-Hall, New Jersey, 2000. — 183 p.
2. Greene D.H. Mathematics for the analysis of algorithms / D.H. Greene, D.E. Knuth. — Birkhauser, Boston, 1990. — 139 p.
3. Parberry I. Problems of algorithms / I. Parberry, W. Gasarch. — Prentice-Hall, New Jersey, 2002. — 268 p.
4. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. — М.: Мир, 1979. — 536 с.
5. Ван Тассел Д. Стиль, разработка, эффективность, отладка и испытание программ: монография / Д. ван Тассел. — М.: Мир, 1985. — 332 с.
6. Бевза Э.К. Сравнение эффективности метода граничных элементов и метода конечных разностей путем численного эксперимента / Э.К. Бевза, Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей // Вестник ХГТУ. — 2002. — №2 (15). — С. 53—56.
7. Хрущ В.К. Сравнение эффективности некоторых алгоритмов численного решения уравнения теплопроводности путём численного эксперимента / В.К. Хрущ, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. "Механіка". — 2002. — Вып.6. — Т. 1. — С. 9—16.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Лойцянский Л. Г. — М.: Наука, 1970. — 904 с.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем / Самарский А.А. — М.: Наука, 1989. — 576 с.
10. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. — М.: Мир, 1984. — 494 с.
11. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — М.: Мир, 1987. — 524 с.

УДК 631.67:519.8

С.А. ВОЦЕЛКА

Херсонский государственный аграрный университет

С.А. РОЖКОВ

Херсонская государственная морская академия

**МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕИЗМЕРЯЕМЫХ КООРДИНАТ  
ИРРИГАЦИОННОГО КАНАЛА**

*Предложен метод решения граничных задач для ирригационного канала с неизвестными начальными условиями при использовании конечно-разностных схем. Применение метода позволяет получить решения в неизвестных рассматриваемых областях при неизвестных начальных условиях. Для оценки эффективности предложенного метода проведен вычислительный эксперимент, результаты которого подтвердили условия достаточной устойчивости получаемых решений.*

*Ключевые слова: управление, ирригационный канал, уравнения Сен-Венана, упреждающее управление, граничные и начальные условия.*

С.О. ВОЦЕЛКА

Херсонський державний аграрний університет

С.О. РОЖКОВ

Херсонська державна морська академія

**МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ НЕВИМІРЮВАНИХ КООРДИНАТ  
ІРРИГАЦІЙНОГО КАНАЛУ**

*Запропоновано метод розв'язання граничних задач для ірригаційного каналу з невідомими початковими умовами при використанні кінцево-різницевої схем. Застосування методу дозволяє отримати рішення в невідомих розглянутих областях при невідомих початкових умовах. Для оцінки ефективності запропонованого методу проведено обчислювальний експеримент, результати якого підтвердили умови достатньої стійкості одержуваних рішень.*

*Ключові слова: управління, ірригаційний канал, рівняння Сен-Венана, випереджаюче управління, граничні і початкові умови.*

S.A. VOCELKA

Kherson State Agricultural University

S.A. ROZHKOV

Kherson State Maritime Academy

**METHOD RECOVERY IMMEASURABLE COORDINATE IRRIGATION CANAL**

A method for solving boundary value problems for the irrigation canal with unknown initial conditions using the finite difference schemes. Application of the method allows to obtain solutions in unknown areas considered under unknown initial conditions. To evaluate the effectiveness of the proposed method performed computer experiment, the results of which confirmed the sufficient conditions for stability of the solutions obtained.

Keywords: control, irrigation canal, Saint-Venant equations, predict control, boundary and initial conditions.

**Постановка проблемы**

В настоящее время все большую актуальность приобретают задачи повышения эффективности управления потреблением воды при дефиците водных ресурсов и экономии энергоресурсов [1 – 4, 6, 7, 8]. Управление водоподачей в различных ирригационных каналах реализуется по одной из основных технологических схем: 1) по нижнему бьефу; 2) по верхнему бьефу; 3) с перетекающими объемами; 4) по соотношению объемов воды в бьефах и др. При этом эффективная работа ирригационной системы с открытым каналом невозможна без применения современных средств автоматизации, а задача распределения и стабильной подачи воды потребителям, как правило, решается диспетчерами в ручном режиме при условии установившегося потока воды в канале.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Ряд методов управления оросительными каналами, которые позволяют значительно уменьшить удельные расходы электроэнергии на перекачку воды насосными станциями (НС), снизить уровень потерь электроэнергии на водозабор и транспортировку воды по магистральным каналам и межхозяйственной сети и минимизировать потери от непроизводительных сбросов воды были обобщены в работе Malaterre и др.

(1998) [18], где показан линейный квадратичный оптимальный контроллер для оросительных каналов. На практике для автоматических систем управления (АСУ) используют только некоторые алгоритмы управления (Rogers и Goussard (1998)) [20]. Подробные исследования в задачах идеализированного автоматизированного управления наклонными ирригационными каналами выполнены в работах Bautista E., Clemmens A.J. [14].

Задачи математического моделирования неустановившегося движения воды в открытых потоках исследованы в работах Сен-Венана, С.А. Христиановича, В.А. Архангельского, О.Ф. Васильева, Э.Э. Маковского, Стокера и др. Совершенствованию вопросов водораспределения на ирригационных системах с применением автоматизированных систем посвящены работы: Бочкарёва Я.В., Коваленко П.И., Куротченка В.И., Попова В.Н., Михайленко А.И., Маковского Э.Э., Толстых В.К. и др. [5-7, 9-12].

Необходимым условием решения задачи управления оросительными каналами является наличие резервов в ирригационной системе. Это позволяет обеспечивать необходимую производительность перекачивающих насосных станций, пропускную способность подпорно-регулирующих гидротехнических сооружений (ГТС) и распределенных резервных емкостей и объемов в бьефах канала и водохранилищах. Однако при этом диспетчер канала должен не только оперативно определять ход переходного процесса в ирригационном канале в режиме ограниченного по времени прогноза, но и принимать необходимые меры для управления системой канала [4, 6, 7].

Большая протяженность магистральных и межхозяйственных каналов оросительных систем не позволяет в достаточной мере учитывать качественные и количественные характеристики водных ресурсов. При этом неэффективное оперативное управление водораспределением в ирригационной системе приводит к значительным нетехнологическим сбросам, которые достигают 12 ... 35% от величины водозабора [7, 8]. Эти характеристики на практике можно получить только методами математического моделирования, при этом увеличение погрешностей расчетов может иметь, по крайней мере, два основных следствия: недостаточное удовлетворение потребностей водопользователей и увеличение холостых сбросов воды. При моделировании системы управления открытым каналом еще следует учитывать и тот факт, что оросительные системы юга Украины проектировались по нормам, которые не предусматривали бессбросовую работу [1 – 4, 7], при этом водохранилища суточного, декадного, месячного регулирования в системе ирригационных каналов отсутствуют. При создании АСУ ирригационными каналами, с учетом оптимизационных задач управления на главных водозаборных и подпорно-регулирующих сооружениях, разработчики, как правило, применяют балансовые методы учета и прогноза. Эти методы расчета достаточно хорошо известны и применяются для управления водными ресурсами, например, при управлении каскадом водохранилищ. В задаче управления ирригационным каналом бьеф рассматривается как объект с сосредоточенными параметрами, поэтому для управления каналом этот подход используют и в настоящее время. Для повышения точности оценки состояния объекта по модели, а в конечном итоге, для улучшения управления каналом в целом, в балансовую модель вводят коэффициенты учета времени «добегания» волны, определение которых основано на «опыте эксплуатации» системы, в которых должны учитываться нелинейности и пространственная протяженность бьефа канала.

#### **Цель работы**

Разработка метода восстановления неизмеряемых координат для задачи управления ирригационным каналом и проверка метода определения упреждающего управления, основанного на решении полной системы уравнений Сен-Венана в рамках автоматического управления подсистемы в АСУТП.

#### **Основная часть**

Система ирригационных каналов является объектом с распределенными параметрами. Чтобы получить профили уровней и расходов (скоростей) с достаточно хорошей точностью для прогностических расчетов необходимо выбрать шаг дискретизации по длине канала порядка 0,1 км. Морфометрические и гидравлические характеристики русла, а также граничные условия – водоподача и водоразбор (граничный и путевой) позволяют выполнить расчет динамики бьефа канала на заданном интервале времени.

С режимами работы гидротехнических сооружений и насосных станций непосредственно связаны переходные процессы в системе управления каналом, а следствием их работы являются не только значительные потери воды, но и вероятная возможность перехода системы управления в неустойчивый (критический и/или аварийный) режим работы [1 – 3, 21, 22].

Для построения алгоритма идентификации начального состояния технологического процесса – профилей уровней и расходов, скоростей в ирригационном канале, в качестве входных данных используются оперативные измерения показателей течения: уровень и объемный расход воды в контролируемых точках канала. В реальных условиях информацию об уровнях и расходах получают на границах участков канала, ограниченных подпорно-регулирующими сооружениями образующих «бьефы». Подпорно-регулирующие сооружения, самотечные или перекачивающие насосные станции, оборудуются контрольно-измерительным оборудованием, информация с которых может быть передана на диспетчерский пункт аппаратурой телеметрии либо другим путем. Невозможность прямого измерения состояния передачи воды в ирригационном канале (уровней, расходов, скоростей) с требуемым шагом, позволяет ставить задачу оценки начального со-

стояния с использованием истории измерения показателей в контрольных точках. На рис. 1 показана обобщенная схема системы управления ирригационным каналом с прогнозирующим контроллером [17, 18].

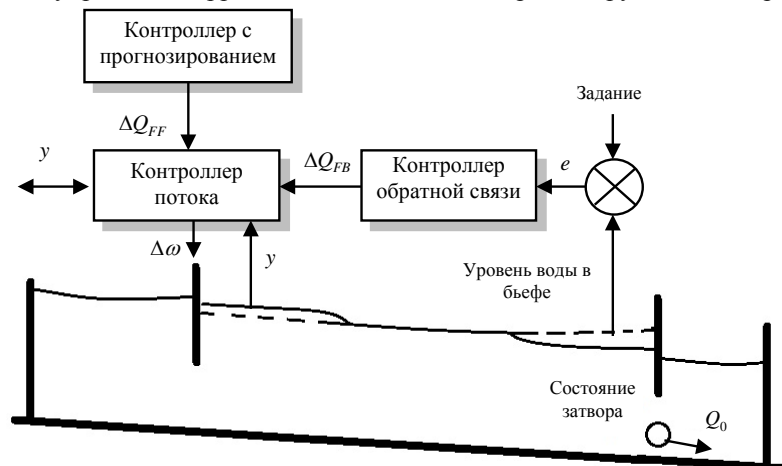


Рис. 1 – Системы управления ирригационным каналом с прогнозирующим контроллером

Решение общей задачи моделирования выполняется после определения неизмеряемых координат для текущего момента времени  $t_{тек}$ . При включении системы управления в момент  $t_0$ , по данным измерений с датчиков уровня и расхода, расположенных на гидротехнических сооружениях, до текущего момента времени  $t_{тек}$ , необходимо идентифицировать начальное состояние по всей длине канала в момент времени  $t_0$  и текущее состояние в момент времени  $t_{тек}$ . Также необходимо определить необходимую глубину ретроспективы данных, достаточной для идентификации состояний объекта управления.

Для решения задач водораспределения в ирригационном канале в качестве математической модели используем полную одномерную нелинейную гиперболическую систему уравнений Сен-Венана [7, 9, 12]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{S} \right) + gS \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + gS \cdot (I_f - I_0) = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где  $Q$  – расход воды,  $S$  – площадь живого сечения;  $h$  – глубина потока в сечении;

$I_0$  – уклон дна канала;  $I_f$  – уклон трения;  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  – инерция;  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{S} \right)$  – конвективное ускорение;  $gS \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$

– гравитация;  $gS \cdot (I_f - I_0)$  – сила трения.

Пусть начальное состояние потока считается неизвестным и путевые потери  $q = 0$ :

$$h(x,t) = h(x,0) \quad Q(x,t) = Q(x,0). \quad (2)$$

Для решения системы (1) по маршевой координате (время  $t$  в прямом направлении) необходимо знать начальные и граничные условия [1]. В общем случае, граничные условия известны – это данные телеметрии, а начальные условия необходимо найти.

В гидрологической практике в качестве начального выбирается состояние водного режима, близкое к установившемуся в моменты времени, достаточно отдаленные от тех, для которых нужно с минимальной погрешностью определять состояние водного режима при неустановившемся движении [9]. Для расчета установившегося неравномерного движения используются динамические уравнения системы (1) с принудительным приравнением нулю всех производных по времени. Затем в уравнение (1) подставляют значения граничных условий и моделируют процесс в прямом времени, решая нелинейные уравнения течения одним из численных методов, где происходит асимптотическое приближение к оптимальной оценке текущего состояния. Аналогичный прием используют, например, в трубопроводно-транспортных системах [19]. Таким образом, в настоящее время отсутствует единый метод идентификации начального и текущего состояния технологического процесса транспорта воды в ирригационных системах, учитывающих нелинейный характер течения.

Для анализа возможностей решения задач идентификации воспользуемся методом характеристик, используемых при решении дифференциальных уравнений в частных производных [1, 21, 22].

Поставленная задача может быть решена при замене маршевой (эволюционной, задачей распространения) координаты время  $t$ , при этом решение уравнения находят в частных производных в незамкнутой области при заданных граничных и начальных условиях [1, 21, 22]. Выбрав в качестве маршевой координаты

ты пространственную переменную  $x$  и выделив частные производные глубины потока  $h$  и расхода  $Q$  по координате  $x$  получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} = -B \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{g \cdot S \cdot (I_0 - I_f) - \frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \cdot v \cdot B \cdot \frac{\partial h}{\partial t}}{(g \cdot S - B \cdot v^2)} \end{array} \right. \quad (3)$$

На рис. 2. изображен бьеф канала, ограниченный самотечными подпорно-регулирующими сооружениями с затворами, предполагающими истечение из-под щита, подающими и отводящими поток.

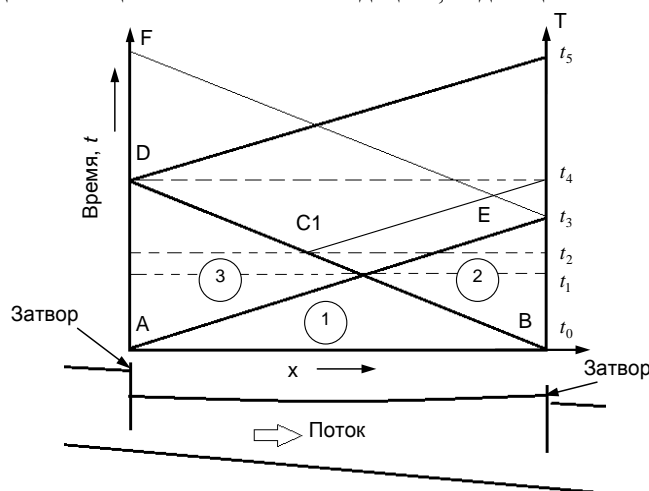


Рис. 2 Системы управления ирригационным каналом с прогнозирующим контроллером

На рис. 2 сверху изображена пространственно-временная плоскость  $x-t$ , на которой нанесены линии характеристик системы дифференциальных уравнений (1) для докритического состояния потока, являющиеся графиками движения волны, которые перемещаются вверх по течению ( $BD, t_3F$ ), или вниз ( $AE, Dt_5, Ct_4$ ). Используя определения «зона влияния», «область зависимости» [13] и «характеристический треугольник» [5], проведем решение задачи моделирования при замене маршевой координаты время  $t$  в два этапа. В качестве начальных условий выбираем ось времени в конце бьефа, где известны значения расходов и глубин потока по данным телеметрии.

Минимальный интервал времени, необходимый для нахождения начального состояния в конце бьефа, должен быть не менее времени прохождения по бьефу прямой и обратной волны (рис. 2): область  $t_0Dt_5$ . Далее любым численным методом [9, 11] решаем систему уравнений (3) с начальными условиями в точке  $B$  на интервале  $[t_0, t_5]$ , и по обратной пространственной координате  $[B, A]$ . Учитывая, что граничные условия соответствуют истинным значениям только в точках начальных условий  $(t_0, t_5)$ , результаты расчета в области  $ADB$  и выше характеристики  $[D, t_5]$  не представляют интереса. Данные, соответствующие моменту времени  $D-t_4$  являются условным начальным состоянием, от которого можно перейти к нахождению текущего состояния с соответствующими измеренными граничными условиями от  $t_4$  до  $t_{тек}$  в прямом времени. Если длина интервала  $t_0-t_{тек}$  превысит значение времени добегания прямой и обратной волны для участка  $AB$ , задача может быть решена полностью.

Для нахождения в задаче «условного» начального состояния использование частичных решений (области 2 и 3), с их последующим совмещением в интервале  $t_1-t_2$ , вероятно нецелесообразно, так как необходимо будет выполнить расчет по пространственной маршевой координате в прямом направлении (область 3).

Предложенный алгоритм был проверен путем постановки численного эксперимента на модельном канале с морфометрическими и гидравлическими характеристиками, подобными первому бьефу Головного Каховского магистрального канала (рис. 3 – рис. 6). В качестве возмущений выбиралась синусоидально-изменяющаяся нагрузка в пределах  $0,29...291 \text{ м}^3/\text{с}$ , а также ступенчато-изменяющаяся нагрузка в тех же пределах. Полученные результаты моделирования подтвердили работоспособность предложенного метода.

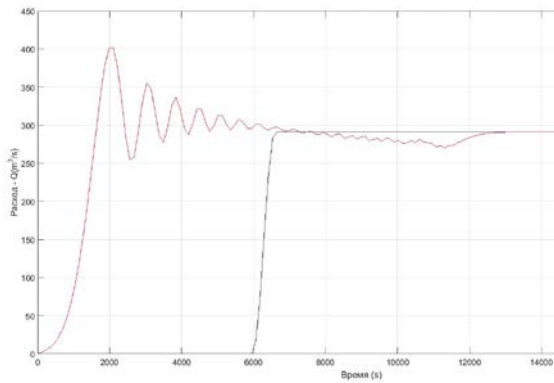


Рис. 3 Тестовый гидрограф (водоподача и водозабор в бьефе канала)

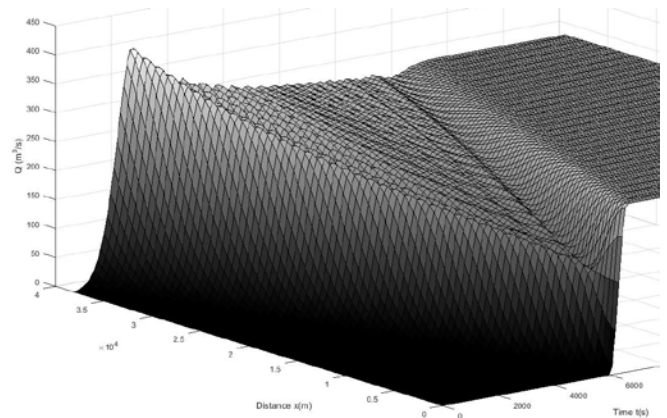


Рис. 4 Тестовый гидрограф (поверхность распространения потока в бьефе канала)

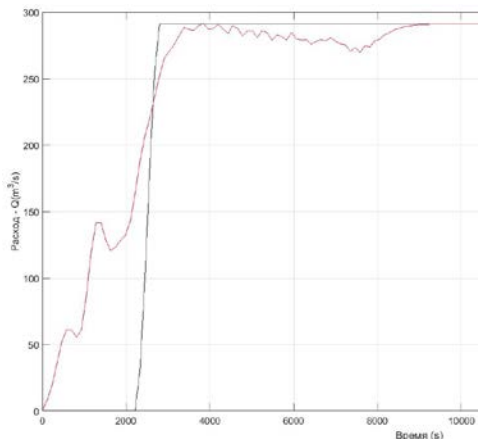


Рис. 5 Восстановленный гидрограф водоподачи по данным измерений в конце бьефа

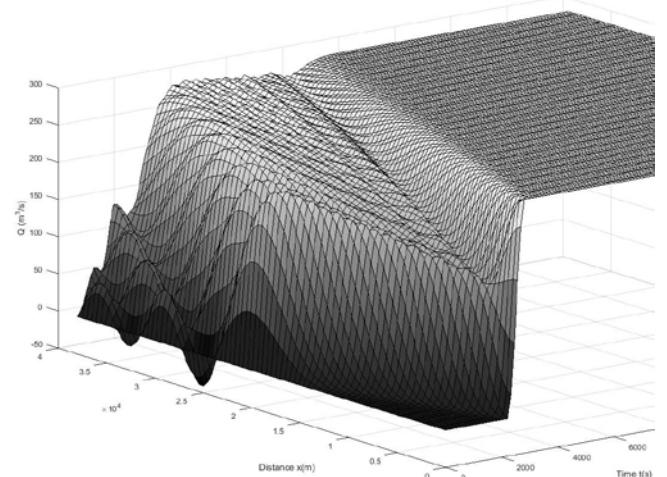


Рис. 6 Восстановленная поверхность потока по данным измерений в конце бьефа

### Выводы

Для задачи управления ирригационным каналом предложен метод восстановления неизмеряемых координат (идентификации начального и текущего состояния), основанный на решении полной одномерной нелинейной гиперболической системы уравнений Сен-Венана с переменной маршевой координатой.

Определена минимальная длина временного интервала ретроспективных данных, необходимая для нахождения начального и текущего состояния только по данным телеметрии в конце бьефа.

Метод может быть применен в системе автоматического управления подсистемы в АСУТП. Для оценки эффективности предложенного метода проведен вычислительный эксперимент, результаты которого подтвердили условия достаточной устойчивости получаемых решений.

### Список использованной литературы

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
2. Воцелка С.А. Моделирование нестационарного потока в ирригационном канале//Вестник Херсонского национального технического университета. – 2011. – №2 (42). – С. 133–139.
3. Воцелка С.А. Моделирование упреждающего управления ирригационными каналами / С.А. Воцелка, С.А. Рожков // Вестник Херсонского национального технического университета. – №3(54). – 2015. – С. 93 – 97.
4. Воцелка С.А. Синтез управления бьефом оросительного канала// Вестник Херсонского национального технического университета. – №2(47). – 2013. – С. 67 –71.
5. Годунов С. К. Уравнения математической физики. –Изд. 2-е, исправл. и дополн. –М.:Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 392 с.
6. Грушевский М.С. Неустановившееся движение воды в реках и каналах /Михаил Соломонович Грушевский. – Л.: Гидрометеиздат, 1982. –288 с.
7. Коваленко П. І. Управління водорозподільними системами за принципами ресурсо- та енергозаощадження/ П.І. Коваленко, В.М. Попов. – К.: Аграрна наука, 2011. – 368 с.

8. Рено Д. Модернизация управления орошением – методика МАЭЭСОТЕ / Даниэль Рено, Тьерри Факон, Робина Вахадж / Публикации ФАО по ирригации и дренажу. №63. –Рим, 2007. –282 с. Режим доступа: [www.fao.org/3/a-a1114r.pdf](http://www.fao.org/3/a-a1114r.pdf).
9. Рогунович В.П. Автоматизация математического моделирования движения воды и примесей в системах водотоков/ Монография. –Л.:Гидрометеиздат, 1989. –264 с.
10. Рожественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. –М.: Наука, 1978. – 688 с.
11. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. –М.: Наука, 1971. –552 с.
12. Селезнев В.Е. Математическое моделирование трубопроводных сетей и систем каналов: методы, модели и алгоритмы / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прилов. Под ред. В.Е. Селезнева.– М.: МАКС Пресс, 2007. – 695 с.
13. Фокс Д.А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах: Пер. с англ. – М.: Энергоиздат, 1981.– 248 с.
14. Bautista E., Clemmens A. J. (2005) Volume Compensation Method for Routing Irrigation Canal Demand Changes//Journal of Irrigation and Drainage Engineering, Vol. 131, No.6. P.494–503. Режим доступа: DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9437(2005)131:6(494).
15. Burt, C.M., Clemmens, A.J., Strelkoff, T.S., Solomon, K.H., Bliesner, R.D., Hardy, L.A., Howell, T.A. & Eisenhauer, D.E. 1997. Irrigation performance measures – efficiency and uniformity. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 123(6): 423–442.
16. Cunge, J., Holly, F. and Verwey, A. Practical aspects of computational river hydraulics, 1980.
17. Horvath K. Model Predictive Control of Resonance Sensitive Irrigation Canals. Doctoral Thesis /FLUMEN INSTITUTE, Department of Hydraulic, Maritime and Environmental Engineering. April 2013, Barcelona. –264 p. Режим доступа: <http://www.tdx.cat/handle/10803/116419>.
18. Malaterre, P.-O., Rogers D.C., Schuurmans J. Classification of Canal Control Algorithms//Journal of Irrigation and Drainage Engineering, January/February 1998. –Vol. 124. –No. 1, –P.3-10. Режим доступа: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(1998\)124:1\(3\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(1998)124:1(3)).
19. Modisette J.P. State estimation in online models - Atmos International PSIG Annual Meeting held in Galveston Texas USA. 12 May – 15 May 2009. Режим доступа: <https://atmosi.ru/media/1405/state-estimation-in-online-models.pdf>
20. Rogers, D.C. and J. Goussard (1998, January/February). Canal control algorithms currently in use//Journal of Irrigation and Drainage Engineering 124 (1), 11-15.
21. Szymkiewicz R. (1993) Solution of the inverse problem for the Saint Venant equations//Journal of Hydrology, 147. P.105-120.
22. Wylie, E. B. (1969) Control of transient free-surface flow //Journal of Hydraulics, ASCE, 1969. – P.347-361.



УДК 532.5

О.Г. ГОМАН, В.А. КАТАН

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛА И ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛОВ В СМЫСЛЕ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ ПО АДАМАРУ

*В работе для определения распределенных и суммарных гидродинамических характеристик твердого тела при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости в условиях возникновения отрыва для полученных расходящихся интегралов предлагается метод расчета с использованием формул Адамара – Манглера.*

*Ключевые слова:* удар, отрыв течения, формулы Адамара - Манглера, вертикальная пластинка.

О.Г. ГОМАН, В.О. КАТАН

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛА І РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕГРАЛІВ В СЕНСІ СКІНЧЕНОЇ ЧАСТИНИ ЗА АДАМАРОМ

*В роботі для визначення розподілених та сумарних гідродинамічних характеристик твердого тіла при ударній взаємодії твердого тіла та рідини в умовах виникнення відриву для отриманих розбіжних інтегралів запропоновано метод розрахунку з використанням формул Адамара-Манглера.*

*Ключові слова:* удар, відрив течії, формули Адамара-Манглера, вертикальна пластинка.

O.G. GOMAN, V.A. KATAN

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

### THE MATHEMATICAL MODEL OF THE IMPACT INTERACTION OF A BODY AND A LIQUID WITH A FREE SURFACE USING THE HADAMARD INTEGRALS

*In this paper the method for definition of the distributed and total hydrodynamic characteristics at the impact interaction of a solid and a liquid with the starting point of separation for obtained divergent integrals is obtained using Hadamard – Manglera formulas.*

*Keywords:* impact, separation of flow, Hadamard-Manglera formulas, vertical plate.

#### Постановка проблемы

В предыдущей работе [1] обоснован подход к математическому моделированию рабочего элемента рулевого устройства, как тонкой пластины, находящейся на свободной поверхности жидкости и подверженной ударным воздействиям. В данной работе представлены результаты математического моделирования распределенных и суммарных гидродинамических характеристик рабочего элемента рулевого устройства в виде вертикальной пластинки.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Актуальный анализ и библиография по тематике работы указаны в работе авторов [1,2,3].

#### Формулирование цели исследования

Цель работы заключается в построении математической модели для определения распределенных и суммарных характеристик рабочего элемента рулевого устройства в виде вертикальной пластинки. При ее ударном взаимодействии с жидкостью со свободной поверхностью в условиях возникновения инерционного отрыва течения жидкости.

#### Изложение основного материала исследования

Подробная физическая постановка задачи удара пластинки с отрывом приведена в работе авторов [1]. Поэтому приведем только основные положения, которые использованы в данной работе.

На рис.1 представлена схема к постановке задачи, из которой следует, что после удара пластинка получает только компоненту скорости вдоль оси  $Ox$ , а также угловую скорость вокруг оси, перпендикулярной плоскости  $Oxy$ , и на задней стороне пластинки  $BD$  образуется зона отрыва  $BC$ , которая распространяется от точки  $B$  на свободной поверхности сзади пластинки до некоторой точки  $C$ .

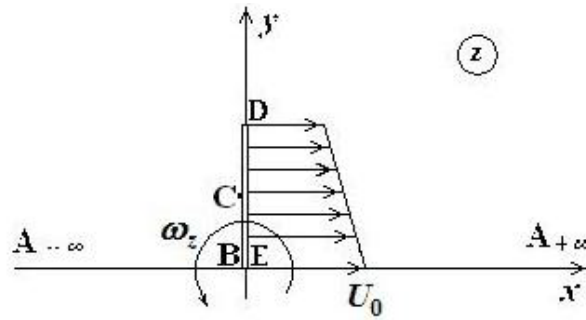


Рис. 1. Схема к постановке задачи удара пластинки с отрывом

Комплексный потенциал, который описывает возникшее в результате удара течение жидкости имеет вид:

$$w = \varphi(z) + i\psi(z),$$

где  $\varphi(z)$  – потенциал течения;  $\psi(z)$  – функция тока.

Скорость тела в результате удара выражается следующим соотношением:

$$\vec{V} = (V_0 + \omega_z x)\vec{j},$$

где  $V_0$  – поступательная скорость;  $\omega_z$  – угловая скорость тела.

Условие безотрывности течения распространяется только на участок контура EDC и имеет вид:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{EDC} = \vec{V} \cdot \vec{n}, \text{ или } v_x = V_0 - \omega_z y$$

А для участков ED и DC будет выполняться равенство  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = U_0 - \omega_z y$ , откуда

$\psi = U_0 y - \omega_z \frac{y^2}{2} + C_0$ . При этом константу  $C_0$  положим равной нулю, а на свободных границах вдоль оси  $Ox$  (участках  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$ ), а также на участке отрыва CB имеем условие равенства нулю импульсного давления, то есть  $\varphi = 0$ .

После определения положения точки отрыва – параметра  $q$ , например, из принципа Огазо [1], распределение импульсного давления на поверхности твердого тела находится по формуле:

$$p_t = -\rho \varphi(\xi_0), \quad \xi_0 \in (-q, 1),$$

где  $\rho$  – плотность жидкости; потенциал  $\varphi(\xi_0)$  определяется из краевой задачи теории аналитических функций, решение которой может быть представлено в виде квадратур [1]:

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi i} Z(t) \int_{-q}^b Z^{-1}(\xi) \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi, \tag{1}$$

и далее все необходимые интегралы  $J_k(\xi_0)$ ,  $k = \overline{1, 2}$  [1] определяются численно, как интегралы в смысле Коши при выбранном значении  $q$  по стандартной процедуре [1, 3-6].

Для пересчета распределения импульсного давления и других распределенных гидродинамических параметров в координатах в физической плоскости физические координаты соответствующих точек определяются при помощи конформного отображения:

$$x(\xi_0) = \text{Re } F(\xi_0) = u(\xi_0), \quad y(\xi_0) = \text{Im } F(\xi_0) = v(\xi_0).$$

Для определения присоединенных масс вводим единичные потенциалы

$$\varphi = U_0 \varphi_1 + V_0 \varphi_2 + \omega_z \varphi_6,$$

и соответствующие им функции тока

$$\psi = U_0 \psi_1 + V_0 \psi_2 + \omega_z \psi_6.$$

Формула для присоединенных масс в случае плоского течения имеет вид [3]:

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_C \varphi_i d\psi_k, \tag{2}$$

при этом контур  $C$  обходится против движения часовой стрелки, а во вспомогательной плоскости это будет интегрирование по верхнему берегу разреза вдоль отрезка  $\xi \in (-q, b)$  от точки  $\xi = b$  до точки  $\xi = -q$ .

Интегрирование в (2) может быть осуществлено по любой подходящей квадратурной формуле, при этом значения единичных потенциалов функций  $\varphi_i(\xi_0)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , в узлах квадратурной формулы вычисляются согласно (1).

Поле скоростей внутри области, занятой жидкостью, вычисляется согласно выражению:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = i \frac{d\Theta}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}, \tag{3}$$

где  $\frac{dz}{dt} = F(t)$  – производная от функции конформного преобразования.

Для определения компонентов скорости на участке безотрывного обтекания поверхности контура в общем случае, когда вычисление квадратур в интегралах  $J_k(t)$ ,  $k = \overline{1,2}$  в замкнутом виде не удастся осуществить, в данной работе было найдено целесообразным применять следующую схему расчета: нормальную компоненту скорости  $v_n$  на участке безотрывного обтекания контура СВ считать известной из граничного условия, а для определения касательной компоненты  $v_s$  использовать операцию дифференцирования по дуге контура.

Поскольку все интегралы  $J_k(\xi_0)$ ,  $k = \overline{1,2}$  являются интегралами в смысле главного значения по Коши и численно вычисляются по стандартным процедурам, производные  $\frac{\partial J_k(\xi_0)}{\partial \xi_0}$ ,  $k = \overline{1,2}$  представляют

собой сингулярные интегралы, которые также следует понимать в смысле конечной части по Адамару. Следовательно, описанный алгоритм решения позволяет при известной аналитической функции  $z = F(t)$ , которая реализует конформное отображение области течения на верхнюю полуплоскость вспомогательной плоскости комплексной переменной  $t$ , получить в виде (1) решение задачи об ударном взаимодействии цилиндрического тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости для произвольного набора кинематических параметров в условиях образования одной зоны отрыва с заранее неизвестным параметром  $q$ , определяющим положение зоны отрыва.

После определения параметра  $q$  из общего решения (1) находим распределение потенциала и импульсного давления, из соотношения (2) – значения присоединенных масс, а также распределение скорости как по поверхности тела так, и на свободной поверхности согласно (3).

На рис. 2 показано распределения компонент скорости при значении кинематического параметра  $\Lambda = 0$ .

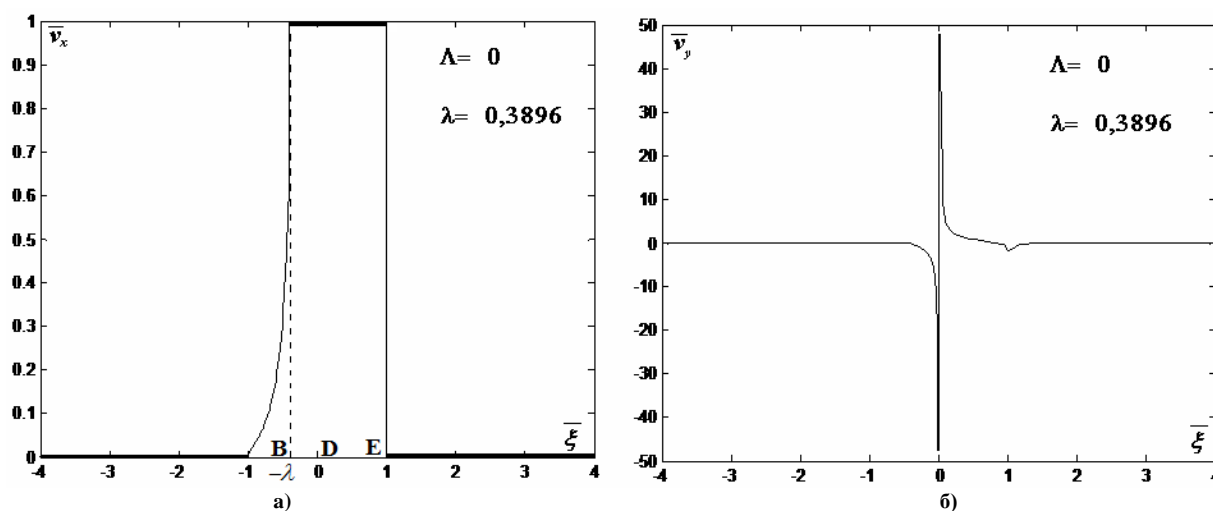


Рис. 2. Распределение компонент скорости: а)  $\bar{v}_x(\bar{\xi})$ ; б)  $\bar{v}_y(\bar{\xi})$ .

Для распределения компоненты скорости  $\bar{v}_y(\bar{\xi})$  характерны существенные различия при максимальных значениях на отдельных участках оси  $\xi$ , которые рассмотрены более детально. На свободной поверхности сзади пластинки при  $\xi \in (-\infty, -b)$  и перед пластинкой при  $\xi \in (b, +\infty)$  распределение  $\bar{v}_y(\bar{\xi})$  имеет вид, показанный на рис. 3.

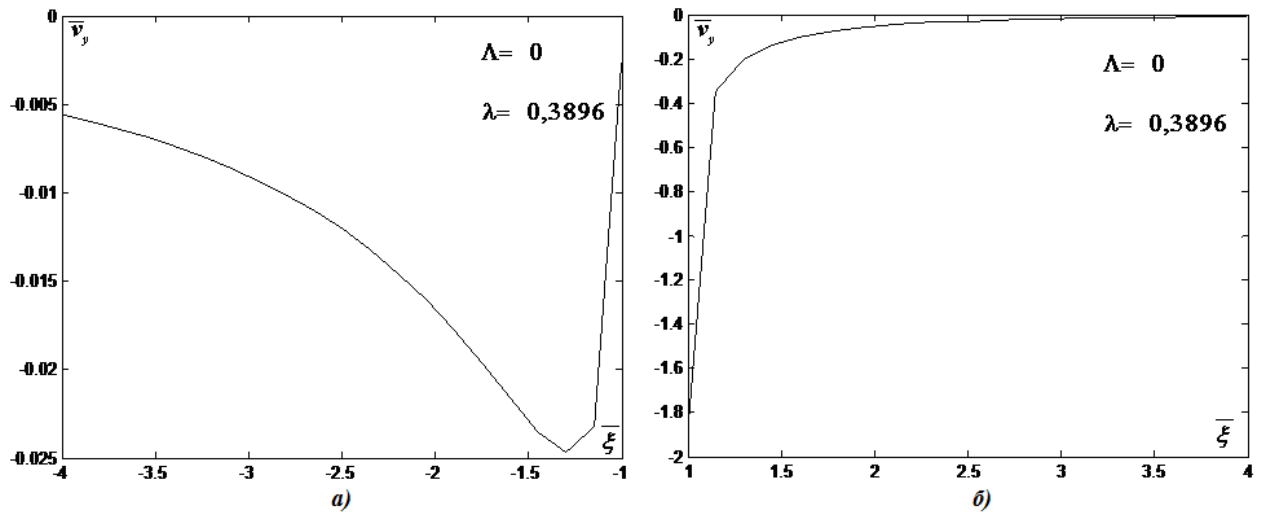


Рис. 3. Распределение вертикальной скорости  $\bar{v}_y(\bar{\xi})$  по свободной поверхности: а) за пластинкой; б) перед пластинкой

В отрывной зоне на задней стороне пластинки при  $\xi \in (-b, -q)$  компонента скорости  $\bar{v}_y(\bar{\xi})$  сохраняет постоянное нулевое значение.

В зоне безотрывного обтекания на задней стороне пластинки при  $\xi \in (-q, 0)$  и на передней стороне при  $\xi \in (0, b)$  распределение составляющей скорости  $\bar{v}_y(\bar{\xi})$  имеет вид, показанный на рис. 4. В точке  $\xi = 0$ , которая соответствует в физической плоскости погруженному краю пластинки – точке D – происходит разворот течения, и компонента скорости  $\bar{v}_y(\bar{\xi})$  имеет особенность и меняет знак.

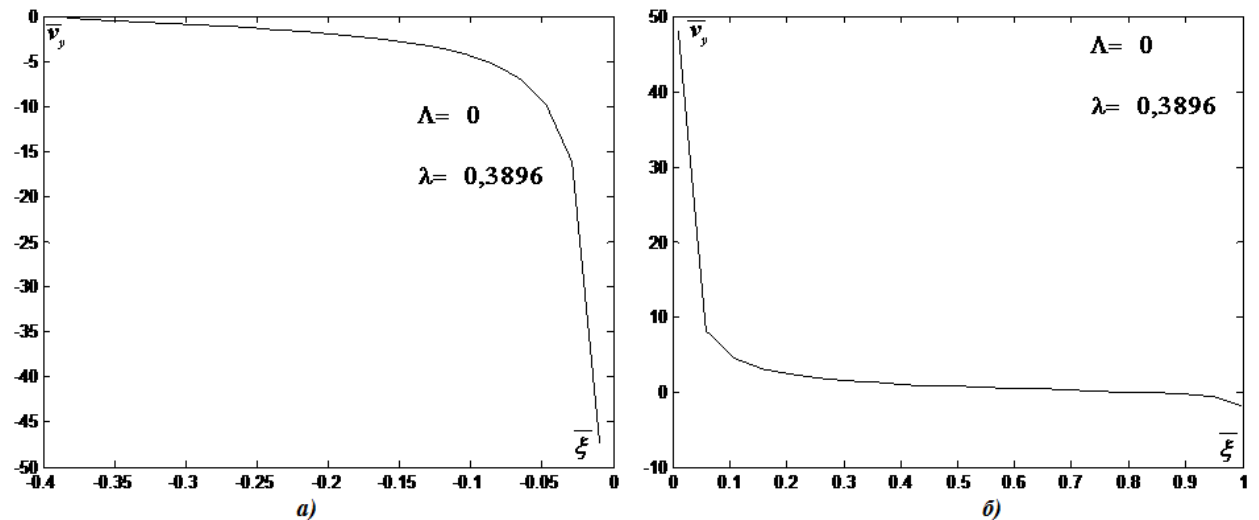


Рис. 4. Распределение скорости жидкости  $\bar{v}_y(\bar{\xi})$  вдоль поверхности пластинки: а) на задней стороне; б) на передней стороне

Значения коэффициентов присоединенных масс в зависимости от характерных значений кинематического параметра  $\Lambda$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\Lambda$	$\bar{\lambda}_{11}$	$\bar{\lambda}_{16}$	$\bar{\lambda}_{66}$
-10	0,3570	-0,1931	0,1164
-5	0,3570	-0,1931	0,1164
-1	0,3570	-0,1931	0,1164
-0,5	0,3570	-0,1931	0,1164
0	0,3570	-0,1931	0,1164
0,5	0,3570	-0,1931	0,1165
1	0,3595	-0,1958	0,1197
1,3	0,3806	-0,2138	0,1349

На рис.5 показано распределение импульсного давления по поверхности пластинки при значении кинематического параметра  $\Lambda = 0$ .

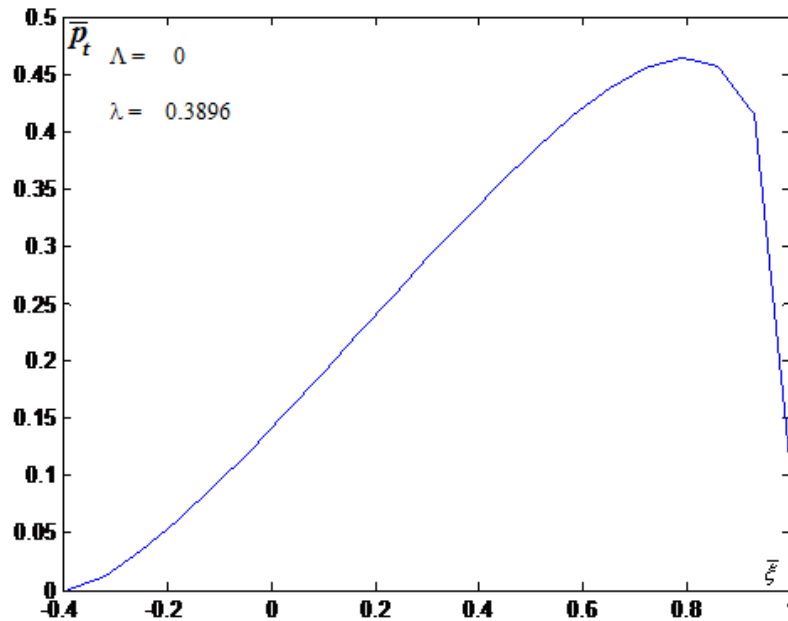


Рис. 5. Распределение импульсного давления по верхности пластинки

Таким образом, проведенные расчеты распределения компонент скорости жидкости, импульсного давления по поверхности пластинки, а также значений коэффициентов присоединенных масс в зависимости от характерных значений кинематического параметра  $\Lambda$  полностью согласуются с соответствующими значениями этих распределенных и суммарных гидродинамических характеристик, полученными после аналитического решения исходной поставленной задачи [1].

#### Выводы

Построена математическая модель для определения распределенных и суммарных гидродинамических характеристик рабочего элемента рулевого устройства в виде вертикальной пластинки. при ее ударном взаимодействии с жидкостью со свободной поверхностью в условиях возникновения инерционного отрыва течения жидкости. Сравнение с соответствующими значениями этих распределенных и суммарных гидродинамических характеристик, полученными после аналитического решения исходной поставленной задачи позволяет сделать вывод в пользу применимости предложенного подхода к определению характеристик отрывных зон при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости.

#### Список использованной литературы

1. Гоман О.Г. Использование интегралов в смысле конечной части по Адамару в математическом моделировании ударного взаимодействия тела и жидкости со свободной поверхностью / О.Г. Гоман, В.А. Катан //Вестник Херсонского национального технического университета. – 2015. – №3 (54). – С. 27- 31.
2. Норкин М.В. Смешанные задачи гидродинамического удара / М.В. Норкин. – Ростов-на-Дону, 2007. – 136 с.
3. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. / Л.И. Седов – М.: Наука. – 1980. – 448 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили – М.: Наука. – 1966. –707с.
5. Общая теория аэродинамики больших скоростей под редакцией У.Р. Сирса – М.: Воениздат. – 1962. – 300 с.
6. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа/ Ж.Адамар – М.: Наука. – 1978. – 352 с.

УДК 532.593

А.П. ГОРОВЕНКО  
Институт геофізики НАН України**ДИФРАКЦІЯ ХВИЛІ ТИСКУ НА ПРУЖНОМУ ВКЛЮЧЕННІ В РІДИНІ**

*Отримано рішення задачі дифракції хвилі тиску на включенні в рідині в вигляді рядів по сферичним функціям та поліномам Лежандра. Розраховано амплітуди дифрагованих хвиль для різних пружних матеріалів включення.*

*Ключові слова: дифракція хвилі, ряди по сферичним функціям.*

А.П. ГОРОВЕНКО  
Институт геофізики НАН України**ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА УПРУГОМ ВКЛЮЧЕНИИ В ЖИДКОСТИ**

*Получено решение задачи дифракции волны давления на включении в жидкости в виде рядов по сферическим функциям и полиномам Лежандра. Рассчитаны амплитуды дифрагированных волн для различных упругих материалов включения.*

*Ключевые слова: дифракция волны, ряды по сферическим функциям.*

А.П. GOROVENKO  
Instytut geophysical Acad.Science of Ukraine**THE DIFFRACTION WAVE A PRESSURE ON ELASTIC INCLUSION IN A LIQUID**

*The solution of the problem of pressure wave diffraction as rows of spherical functions and Legendre polynomials is obtained. Amplitudes of diffracted waves for different elastic materials of inclusion are calculated.*

*Keywords: wave diffraction, rows of spherical functions.*

**Постановка проблеми**

Дифракція хвилі тиску на пружному включенні в рідині має важливе наукове та прикладне значення, зокрема для ряду задач геофізики та акустики.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Дослідженню явища дифракції хвилі на включенні присвячено ряд робіт, зокрема, [1]-[3]; отримані результати відносяться, як правило, до далекої зони, для оцінки хвиль в ближній зоні та в включенні необхідні подальші дослідження.

**Формулювання цілі дослідження**

Для включення в рідині виконати комп'ютерні розрахунки амплітуди дифрагованої хвилі тиску в залежності від частоти хвилі. Дослідження провести в широкому діапазоні значень густин та швидкостей хвиль в різних пружних середовищах включення; розглянути хвилі в включенні, в ближній та далекій зонах в рідині.

**Виклад основного матеріалу дослідження**

Більш детальний виклад досліджень наведений в роботі [4], далі розглянемо основні тези.

Отже нехай на пружну сферу радіусом  $a$ , розташовану в рідині набігає плоска акустична хвиля тиску  $\tilde{p}_1 = p \exp(ik_1 r \cos \theta + \omega t)$ , де  $r$ ,  $\theta$  – координати точки, відрховані від центра сфери.

Згідно з теоремою Гельмгольца переміщення  $\vec{u}$  може бути записане в вигляді суми скалярної та векторної функцій

$$\vec{u} = -\nabla\Phi + \nabla x \vec{\sigma}, \quad (1)$$

де  $\Phi$  – скалярний потенціал,  $\vec{\sigma}$  – векторний потенціал.

Скалярний потенціал  $\Phi$  пов'язують з поздовжніми хвилями тиску, а векторний потенціал  $\vec{\sigma}$  використовують при розгляді поперечних хвиль зсуву.

Векторний потенціал  $\vec{\sigma}$  може бути представлений через скалярні функції  $\Psi$ ,  $\chi$  (потенціали Дебая)

$$\vec{\sigma} = \nabla x \vec{r} \Psi + \nabla x (\nabla x \vec{r} \chi). \quad (2)$$

Скалярні функції  $\Phi, \Psi, \chi$  задовольняють скалярним рівнянням Гельмгольца

$$\left[ \nabla^2 + \begin{pmatrix} k_p^2 \\ K_S^2 \\ K_S^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} P - \text{хвиля} \\ S - \text{хвиля} \\ t - \text{хвиля} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де постійні розповсюдження  $k_p = \omega/V_p, K_S = \omega/V_S$ , це хвильові числа для поздовжньої та поперечної хвиль, відповідно. Швидкості розповсюдження хвиль  $V_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, V_S^2 = \mu/\rho$ , де  $\lambda, \mu$  – параметри Ляме,  $\rho$  – густина.

Введемо позначення:  $i$  – падаюча хвиля,  $S$  – розсіяна хвиля,  $f$  – хвиля всередині пори,  $1$  – рідина,  $2$  – включення.

Зовнішня хвиля тиску, яка падає на включення, може бути записана в сферичній системі координат в вигляді

$$\Phi_i = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) j_m(k_1 r) Y_m(\cos \theta), \quad (4)$$

$$\Psi_i = 0,$$

де  $j_m(x)$  – сферична функція Бесселя,  $Y_m(\cos \theta)$  – поліноми Лежандра. В рідині буде  $p$  хвиля з потенціалом

$$\Phi_s = \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m^{(2)}(k_1 r) Y_m(\cos \theta), \quad (5)$$

де  $h_m^{(2)}(x)$  – сферична функція Ганкеля другого роду,

$$h_m^{(2)}(x) = j_m(x) - i N_m(x), \quad (6)$$

де  $j_m(x)$  – сферична функція Бесселя,  $N_m(x)$  – сферична функція Неймана. В включенні хвиля тиску має потенціал

$$\Phi_f = \sum_{m=0}^{\infty} C_m j_m(k_2 r) Y_m(\cos \theta). \quad (7)$$

Завдяки трансформації хвилі тиску на неоднорідності в пружному включенні існує хвиля зсуву

$$\Psi_f = \sum_{m=0}^{\infty} D_m j_m(K_2 r) Y_m(\cos \theta). \quad (8)$$

Коефіцієнти розкладу в ряди  $A_m, C_m, D_m$  визначаються з граничних умов на поверхні включення ( $r = a$ ).

Наведемо граничні умови для  $r = a$

1. Неперервність переміщень

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \text{ тобто } u_{ri} + u_{rs} = u_{rf}, \quad (9)$$

2. Неперервність компонент тензора напружень

$$\tau_r^{(1)} = \tau_r^{(2)}, \text{ тобто } \tau_{ri} + \tau_{rs} = \tau_{rf}, \quad (10)$$

$$\tau_\theta^{(1)} = \tau_\theta^{(2)}, \text{ тобто } \tau_{\theta i} + \tau_{\theta s} = \tau_{\theta f}. \quad (11)$$

Використовуючи рівняння теорії пружності та рівняння (4)-(11) знайдемо  $u_{ri}, u_{rs}, u_{rf}, \tau_{ri}, \tau_{rs}, \tau_{rf}, \tau_{\theta i}, \tau_{\theta s}, \tau_{\theta f}$ , підставимо ці величини в граничні умови і визначимо коефіцієнти розкладу в ряди  $A_m, C_m, D_m$ .

Аргументом досліджуваних функцій була величина  $ka$ , де  $k$  - хвильове число,  $a$  - радіус включення. Величина  $k$  дорівнює  $2\pi\nu/V_p$ , де  $\nu$  - частота в Гц,  $V_p$  - швидкість хвилі тиску в середовищі.

Далі розглянемо різні пружні включення в воді. Потенціали  $\Phi_s, \Phi_f$  наведені на рис.1 ÷ рис.5;  $r = 0,9a$  - це коло поверхні включення,  $r = 0,1a$  близько до центра включення.

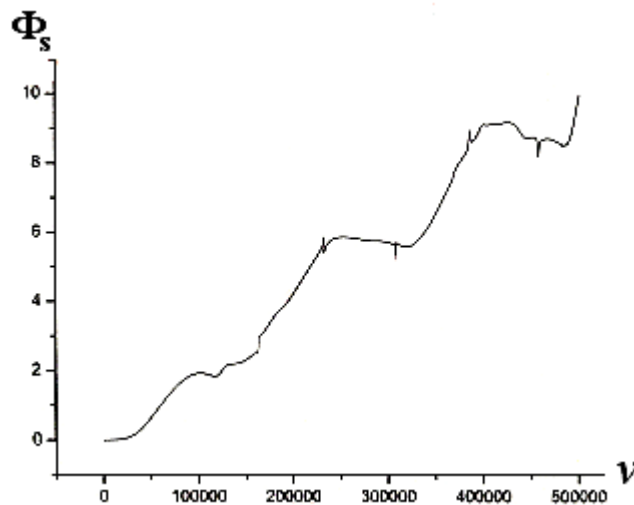


Рис.1. Дифрагована хвиля тиску в воді, включення-граніт.

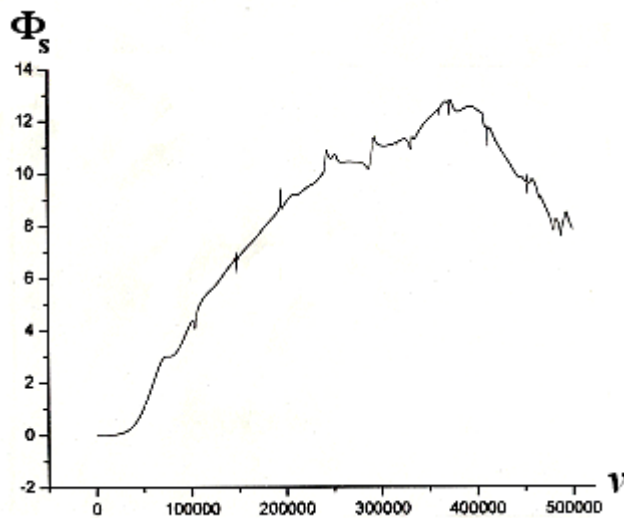


Рис.2. Дифрагована хвиля тиску в воді, включення-вапняк.



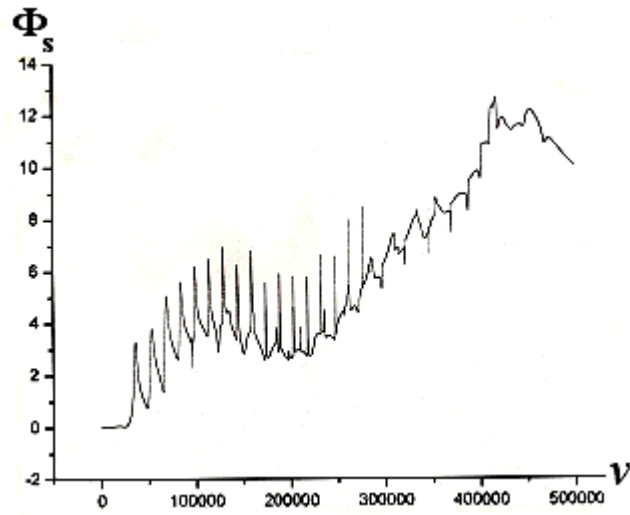


Рис.3. Дифрагована хвиля тиску в воді, включення-епоксид.

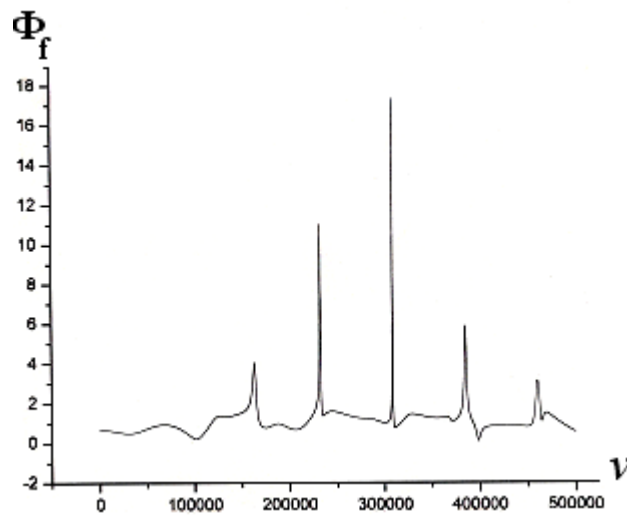


Рис.4. Хвиля тиску в включенні з граніту,  $r=0,9$  а.

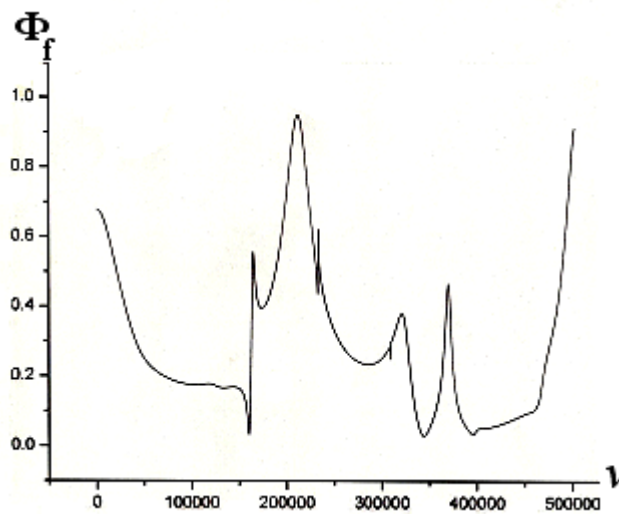


Рис.5. Хвиля тиску в включенні з граніту,  $r=0,1$  а.

**Висновки**

1. Розглянуто точний розв'язок задачі дифракції хвилі тиску пружним включенням в рідині. Розв'язок представлений рядами по сферичним функціям Бесселя, Неймана, Ганкеля та поліномам Лежандра. Розроблено алгоритм та створена програма для комп'ютерних розрахунків амплітуди дифрагованої хвилі в залежності від частоти хвилі для різних пружних включень в рідині.
2. Внаслідок трансформації на включенні хвилі тиску в хвилю зсуву, в включенні будуть хвилі тиску та хвилі зсуву.
3. Виконані комп'ютерні розрахунки амплітуд дифрагованих хвиль тиску в воді для різних пружних включень: граніт, вапняк, алюміній, епоксид. Форма та амплітуда дифрагованих хвиль тиску в рідині суттєво залежать від пружних властивостей включення. Мають місце резонансні піки, для включень з меншими значеннями величин швидкостей хвиль та густин, кількість резонансних піків та їх величина ростуть; а резонанси збуджуються в більш низькій області частот. Внесок гармоніки  $m=0$  в амплітуду дифрагованої хвилі тиску незначний порівняно з внеском гармонік  $m \geq 1$ , на відміну від випадку газового пухиря в рідині, коли амплітуда гармоніки  $m=0$  на порядки перевищує по величині амплітуди гармонік  $m \geq 1$ .
4. Амплітуда хвилі тиску в включенні зменшується чим далі від поверхні включення до його центру; амплітуда зменшується на порядок і більше. Ближче до центру включення має місце перерозподіл амплітуди хвилі по частоті; змінюється частотна характеристика дифрагованої хвилі тиску.
5. Трансформовані хвилі зсуву в включенні мають високі значення амплітуд піків. Можливо це пов'язано з тим, що хвилі зсуву з включення не можуть проникати в рідину, так як в рідині хвилі зсуву не існують.
6. Діаграми напрямку хвиль тиску та хвиль зсуву розглянуті в широкому діапазоні величин безрозмірного параметра  $ka$ , де  $k$ -хвильове число,  $a$ -радіус включення. В області низьких частот  $V \leq 10$  КГц діаграма напрямку практично кругова. Для  $V \geq 50$  КГц, чим далі від поверхні включення до його центру, тим менша амплітуда хвилі тиску і тим менші зміни амплітуди хвилі тиску в залежності від величини кута  $\theta$ . В області високих частот  $V \approx 500$  КГц в діаграмі напрямку з'являються бокові пелюстки, чим ближче до центру включення, тим більше діаграма наближається до кругової.

**Список використаної літератури.**

1. Mc.Mechan G.A. Resonant scattering by fluid-filled cavities. // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1982. 72.- №4.- P.1143-1153.
2. Gaunard G.C., Uberall H. Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media. // JASA. – 1978. 63.– p.1699-1712.
3. Brill D.G., Gaunard G.C., Uberall H. The response surface in elastic wave scattering. // J. Appl. Phys. – 1981. 52.– p.3205-3214.
4. Горовенко А.П. Дифракція хвилі тиску на сферичному пружному включенні в рідині.- Препринт.ІГФ НАНУ.Київ.2015.-23с.

УДК 533.92:533.95

А.О. КАРАЄВ

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

**МОДЕЛЮВАННЯ СТАДІЇ ГІДРОДИНАМІЧНОГО РОЗШИРЕННЯ  
ЦЕНТРАЛЬНОГО ЗІТКНЕННЯ ВАЖКИХ ЙОНІВ**

*У роботі досліджено стадію гідродинамічного розширення центрального зіткнення важких йонів. Отримано систему диференціальних рівнянь з частинними похідними, що описує еволюцію густини внутрішньої енергії кварк-глюонної плазми в системі з аксіальною симетрією в ультрарелятивістському випадку. Наведено якісний розв'язок системи нелінійних рівнянь релятивістської гідродинаміки для випадку зіткнень важких йонів.*

*Ключові слова: релятивістська гідродинаміка, зіткнення важких йонів, кварк-глюонна плазма.*

А.А. КАРАЕВ

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАДИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО  
СТОЛКНОВЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ**

*В работе исследована стадия гидродинамического расширения центрального столкновения тяжелых ионов. Получена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая эволюцию плотности внутренней энергии кварк-глюонной плазмы в системе с аксиальной симметрией в ультрарелятивистском случае. Приведено качественное решение системы нелинейных уравнений релятивистской гидродинамики для случая столкновений тяжелых ионов.*

*Ключевые слова: релятивистская гидродинамика, столкновения тяжелых ионов, кварк-глюонная плазма.*

А.О. KARAIEV

V.N. Karazin Kharkiv National University

О.О. STRELNIKOVA

V.N. Karazin Kharkiv National University

The A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

**MODELLING HYDRODYNAMIC EXPANSION STAGE OF THE CENTRAL HEAVY-ION COLLISIONS**

*In the current article was studied hydrodynamic expansion stage of the central heavy-ion collisions. System of differential equations in partial derivatives, which describes evolution of the internal energy density of quark-gluon plasma in the system with axial symmetry in ultra-relativistic case, was obtained in this work. Descriptive solution of the nonlinear relativistic hydrodynamic equations was given in case of the heavy-ion collisions.*

*Keywords: relativistic hydrodynamics, heavy-ion collisions, quark-gluon plasma.*

**Формулювання проблеми**

Ми живемо в епоху, коли, якщо не людське око, то принаймні людський розум здатний проникати у загадкові таємниці адронних зіткнень. Сучасний рівень прискорювачів дозволяє досліджувати зіткнення важких ультрарелятивістських йонів, що дає змогу пролити світло на загадковий стан матерії – кварк-глюонну плазму (КГП), яка була експериментально зафіксована у 2005 році. За припущеннями, саме у такому стані перебував Всесвіт через короткий ( $10^{-11}$  с) проміжок часу після Великого вибуху. Дослідження кварк-глюонної плазми відкриває нові перспективи у фізиці високих енергій та астрофізиці.

Кварк-глюонна плазма являє собою матерію з високою густиною енергії, що складається з вільних кварків та глюонів. Взаємодія кварків за допомогою глюонів називається сильною взаємодією. Теорія сильної взаємодії описується в рамках квантової хромодинаміки, в якій кожен кварк має додатковий ступінь свободи – кольоровий заряд, а сама взаємодія є взаємодією між кварками через глюонні поля.

Для дослідження множинного народження частинок та властивостей КГП на колайдерах виконують зіткнення важких йонів. На колайдері RHIC (США) це йони золота, на LHC (CERN) – свинцю. Згустки

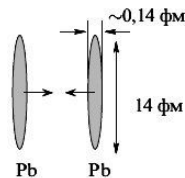
плазми на ЛНС є більш густими та довгоживучими, порівняно з RHIC, а саме: густина енергії  $10 \text{ GeV} \cdot \text{фм}^{-3}$  (втричі більше за відповідну у RHIC), час життя  $10 \text{ фм} / c$  (на 20% більше за відповідний на RHIC) [3, С. 573].

З теоретичної точки зору процес зіткнення можна розділити на декілька етапів (рис. 1):

- 1) Сам процес зіткнення. Зустрічний потік лоренц-стиснутих дисків наближується один до одного зі швидкістю, близькою до швидкості світла.
- 2) Утворення КГП. Після того, як йони наближуються один до одного на відстані, що відповідають характерним величинам сильної взаємодії, система починає перебудовуватися, поки не буде досягнуто стану термодинамічної рівноваги. На цій стадії відбувається фазовий перехід першого роду при температурі, близькій до 170 MeV.
- 3) Стадія гідродинамічного розширення. Система переходить у стан локальної термодинамічної рівноваги і починає розширюватися. На цьому етапі допустимо застосування макроскопічного опису процесу.
- 4) Стадія вільного розльоту. Система охолоджується і, після досягнення критичної температури, розлітається на вільні адрони.

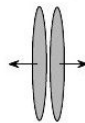
**Стадії зіткнення важких йонів**

**1) Процес зіткнення**



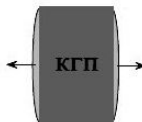
**2) Утворення кварк-глюонної плазми**

$$\tau \sim 1 \text{ фм} / c = 3,3 \times 10^{-24} \text{ с}$$



**3) Гідродинамічне розширення**

$$\tau \sim 10 \text{ фм} / c$$



**4) Вільний розліт**

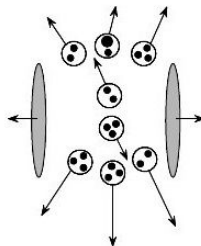


Рис. 1. Стадії зіткнення важких йонів

У представленій роботі розглядається стадія гідродинамічного розширення. Як було сказано вище, систему у цій стадії можна вважати макроскопічною і застосовувати для її розгляду гідродинаміку, звичайно, не класичну, а релятивістську. Рівняння релятивістської гідродинаміки суттєво нелінійні, навіть якщо застосувати ультрарелятивістське наближення. Для початку можна обмежитися випадком центрального зіткнення, що дозволяє нам використати присутню аксіальну симетрію.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Дослідження у даній області почали проводитися ще у 50-ті роки ХХ століття, не дивлячись на те, що тоді не існувало ні квантової хромодинаміки (КХД), ні прискорювачів, що здатні виконувати експериментальні досліди у цьому напрямку. Однак, саме результати досліджень тих часів сформулювали макроскопічну картину ультрарелятивістських зіткнень, яку справедливо використовують і в наш час, особливо з появою експериментальних установок та нових здобутків кваркової теорії.

Першим, хто усвідомив те, що процеси у мікросвіті можна ілюструвати релятивістською гідродинамікою, був відомий радянський фізик, лауреат Нобелівської премії з фізики 1962 року Лев Давидович Ландау (1908-1968), який значний час працював у стінах Харківського університету [6].

Сучасні дослідження пов'язані з узгодженням макроскопічного підходу із експериментальними даними, які останнім часом активно здобуваються на прискорювачах RHIC та LHC [1–3, 7]. Поява сучасних комп'ютерів надає змогу використовувати чисельні методи для розв'язання нелінійних рівнянь релятивістської гідродинаміки, що було не під силу обчислювальній техніці ще 40 років тому. Дослідження таких систем математичними методами може допомогти розв'язати задачі не лише у фізиці високих енергій, а й у астрономії, астрофізиці, космології тощо.

Останнім часом розробляється новий перспективний підхід в теорії КПП, заснований на голографічній дуальності квантово-польової системи з сильною взаємодією в чотиривимірному просторі Мінковського та класичної гравітації в п'ятивимірному просторі анти-де Ситтера (AdS) [3]. Існують здобутки в голографічному описанні рівноважної КПП; голографічний підхід успішно реалізується і для описання процесу формування КПП.

**Формулювання мети дослідження**

Як було сказано вище, динаміку КПП ефективно досліджувати, використовуючи рівняння релятивістської гідродинаміки. Перед початком дослідження було поставлено такі основні задачі:

- 1) отримати рівняння еволюції макроскопічних термодинамічних параметрів кварк-глюонної плазми у стадії гідродинамічного розширення в ультрарелятивістському наближенні;
- 2) якісно чисельно розв'язати нелінійні рівняння еволюції густини внутрішньої енергії для системи з аксіальною симетрією.

**Основний матеріал дослідження**

Для того щоб досягти послідовності в подальшому викладенні матеріалу, автори вважають доцільним познайомити (або нагадати) читачам базові поняття релятивістської гідродинаміки.

**Тензор енергії-імпульсу**

Об'єкт, що описує густину та потік енергії-імпульсу полів матерії, називається тензором енергії-імпульсу [4, С. 8]. Це абсолютно симетричний тензор другого рангу, який у макроскопічному гідродинамічному випадку можна представити у наступному вигляді:

$$T^{ik} = \varepsilon u^i u^k + q^i u^k + q^k u^i + P^{ik}, \quad (1)$$

де  $T^{ik}$  – тензор енергії-імпульсу;  $\varepsilon$  – густина енергії;  $u^i$  – 4-вектор гідродинамічної швидкості, що визначається як часоподібний власний вектор тензора енергії-імпульсу;  $q^i$  – 4-вектор Пойтінга (вектор густини потоку енергії);  $P^{ik} = -P(g^{ik} - u^i u^k) + \Pi^{ik}$  – тензор напруження;  $g^{ik} = \text{diag}(1; -1; -1; -1)$  – метричний тензор простору Мінковського;  $P$  – нормальний (паскалівський) тиск;  $\Pi^{ik}$  – тензор анізотропного тиску.

У випадку ідеальної рідини, тобто у відсутності дисипативних процесів, таких як в'язкість і теплопровідність, тензор енергії-імпульсу суттєво спрощується:

$$T^{ik} = (\varepsilon + P)u^i u^k - P g^{ik} \quad (2)$$

Якщо у системі зберігається число частинок, виконується рівняння неперервності:

$$\frac{\partial n u^k}{\partial x^k} = 0 \quad (3)$$

Рівняння руху містяться, як відомо, у рівняннях:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0 \quad (4)$$

**Ультрарелятивістський випадок**

В ультрарелятивістському випадку швидкість руху частинок наближується до швидкості світла. Це означає, що для таких систем рівняння неперервності є несправедливим, бо у рідині відбувається множинне народження нових частинок (що і підтверджується дослідями з важкими йонами). З цього випливає, що у таких системах число частинок не зберігається, і хімічний потенціал можна вважати рівним нулю, так як

хімічний потенціал – це енергія, яку необхідно надати частинці, щоб додати її в систему, яка знаходиться в стані термодинамічної рівноваги.

Для моделювання стану термодинамічної рівноваги кварк-глюонної плазми можна використовувати рівняння [5, С.1247]:

$$\varepsilon = 3P + 4B \tag{5}$$

де  $B$  – т.з. константа "мішку".

Поява константи "мішку" не випадкова – вона є наслідком непертурбативних ефектів та віддзеркалює різницю між пертурбативним вакуумом та вакуумом КХД. У випадку  $B = 0$  рівняння стану стає рівнянням, що відповідає випромінюванню абсолютно чорного тіла, тобто модельного фотонного газу у ящику. Через те, що різницю кварків та антикварків прийнято вважати величиною, що зберігається (баріонне число), константа "мішку" ненульова. Загальноприйняте значення цієї константи  $B = 235 \text{ MeV}$ , яке отримано із спектроскопії адронів [5, с.1247].

Використовуючи рівняння (2) і (5) можна отримати явний вид тензора енергії-імпульсу:

$$T_i^k = \frac{1}{3} (4(\varepsilon - B)u_i u^k - (\varepsilon - 4B)\delta_i^k) \tag{6}$$

Для отримання рівняння руху скористаємося процедурою (4). Після цього рівняння руху матиме вигляд:

$$4\varepsilon' u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \varepsilon'}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial \varepsilon'}{\partial x^k} \tag{7}$$

де  $\varepsilon' = \varepsilon - B$

Для зручності розв'язання у майбутньому, перепишемо рівняння (7) у 3-виді:

$$\begin{cases} \frac{4\varepsilon'}{c^2 - v^2} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla \varepsilon' - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \varepsilon' = -\frac{4}{3} \varepsilon' \left( \text{div } \vec{v} + \frac{\vec{v}}{c^2 - v^2} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) \right) \end{cases} \tag{8}$$

Скористаємось тим, що швидкості в системі близькі до швидкості світла. Введемо малий параметр  $\alpha = 1 - v/c$ . Використовуючи метод послідовних наближень, зробимо розкладання системи рівнянь (8) в околі малого параметра  $\alpha$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) c (\vec{v}, \nabla) \varepsilon' = -2\varepsilon' \text{div } \vec{v} \\ 2\varepsilon' \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (1 - \alpha) c (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) = -\alpha c \left( \nabla \varepsilon' + \frac{\vec{v}}{c} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} \right) \end{cases} \tag{9}$$

У граничному нульовому випадку при  $\alpha = 0$  рівняння (9) суттєво спрощуються. Для зручності застосування в майбутньому чисельних методів, ефективно перейти до безрозмірних змінних:

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}', \quad r = r_0 \tilde{r}, \quad t = t_0 \tilde{t}, \quad X = \frac{ct_0}{r_0} \tag{10}$$

де  $\varepsilon_0, r_0, t_0$  – визначають характерні енергію, відстань і час взаємодії у системі.

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}'}{\partial \tilde{t}} + X (\vec{v}, \nabla) \tilde{\varepsilon}' = -2X \tilde{\varepsilon}' \text{div } \vec{v} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tilde{t}} + X (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Для того, щоб математична модель процесу набула строгості, необхідно поставити початкові та граничні умови, які будуть задаватися на границі лоренц-стиснутого циліндру, який обмежують два зустрічні лоренц-стиснуті диски перед взаємодією.

Спочатку для зручності можна обмежитися одновимірним випадком. Це наближення можна пояснити наступним аргументом: перед зіткненням швидкості частинок направлені в одну сторону і величина цієї швидкості дуже велика – в нашому наближенні за малим параметром  $\alpha = 1 - v/c$  швидкість

частинок майже дорівнює швидкості світла – тому можливістю появи поперечного потоку у цьому наближенні можна нехтувати. В одномірному випадку система рівнянь буде представлена як:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + X \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\varepsilon}'}{\partial \tilde{t}} + X \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}'}{\partial \tilde{z}} = -2X \tilde{\varepsilon}' \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \end{cases} \quad (12)$$

Для розв'язання системи рівнянь (12) використовувалася явна схема Ейлера. На рис. 2 і рис. 3 представлені розв'язки для енергії у різні моменти часу із гауссовими початковими умовами і фіксованим значенням 4-градієнту енергії на границі.

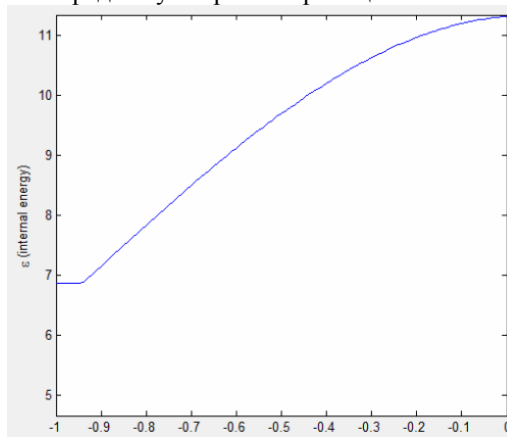


Рис. 2. Розподіл енергії з координатою

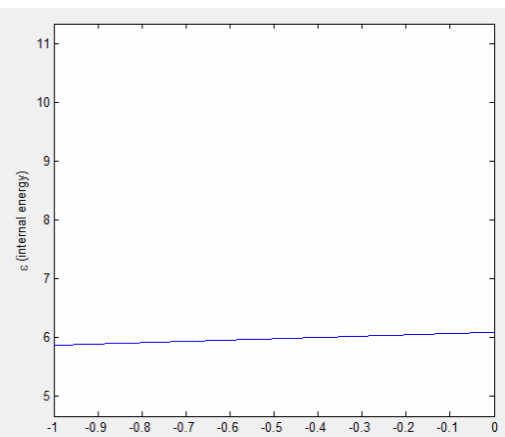


Рис. 3. Розподіл енергії з координатою

### Висновки

Даний підхід є яскравим прикладом макроскопічного погляду на процеси у фізиці елементарних частинок. Не дивлячись на те, що система складається з великої кількості сильновзаємодіючих елементів, які в мікроскопічному розгляді описуються апаратом квантової хромодинаміки, загалом вона поводить себе як дуже щільна гаряча рідина, що добре підтверджується експериментами.

Експериментальне дослідження властивостей кварк-глюонної плазми відкриває нові горизонти в фізиці високих енергій. Припущення на основі деяких дослідів стверджують, що у стані кварк-глюонної плазми знаходиться субстанція всередині нейтронних зірок, її "краплі" присутні в атомних ядрах тощо. Є великі надії на успіхи у цій сфері, пов'язані, перш за все, з функціонуванням Великого адронного колайдери (ЛНС), на якому планується один місяць кожного року проводити експерименти з ультрарелятивістськими йонами свинцю.

Головний здобуток даної роботи – система рівнянь для ультрарелятивістського випадку зіткнення важких йонів свинцю на ЛНС. Практична частина роботи проілюстрована чисельними розв'язками цієї системи для конфігурації із граничними умовами на границі лоренц-стиснутого циліндру в одновимірному випадку, що розв'язані у створеній аплікації.

### Список використаних джерел

1. Chojnacki M. Hydrodynamic description of particle production in relativistic heavy-ion collisions / M. Chojnacki. — Kraków, Poland: The Henryk Niewodniczański Institute of Nuclear Physics Polish Academy of Sciences, 2009. — 98 p.
2. Ollitrault J.-Y. Relativistic hydrodynamics / J.-Y. Ollitrault—Service de Physique Théorique, 2007. — 16 p.
3. Арефьева И.Я. Голографическое описание кварк-глюонной плазмы, образующейся при столкновениях тяжёлых ионов / И.Я. Арефьева // Успехи физических наук. — 2014. — Т. 184, № 6 — С. 569—596.
4. Балакин А.Б. Релятивистская теория многочастичных систем / А.Б. Балакин. — Казань: Казанский государственный университет, 2003. — 67 с.
5. Барц Х.В. Релятивистская ядерная гидродинамика и фазовый переход в состояние деконфайнмента / Х.В. Барц, Б. Кэмпфер // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1987. — Т. 18, Вып. 6 — С. 1234—1282.
6. Беленький С.З. Гидродинамическая теория множественного образования частиц / С.З. Беленький, Л.Д. Ландау // УФН. — 1955. — Т. LVI. — Вып. 3 — С. 309—438.
7. Розенталь И.Л. Гидродинамическая интерпретация взаимодействия частиц высоких энергий и космических всплесков / И.Л. Розенталь, А.М. Снигирев // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 2003. — Т. 34. — Вып.1. — С. 142—178.

УДК 621.472

Л.И. КНЫШ, О.Г. ГОМАН

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

**ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭНЕРГОМАССОПЕРЕНОСА В СИСТЕМЕ ПРИЁМА ТЕПЛА СОЛНЕЧНОЙ ПАРАБОЛОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТАНЦИИ**

Предлагается численный алгоритм для расчёта энергомассопереноса в системе приёма солнечного излучения солнечной термодинамической станции с параболическими концентраторами. Алгоритм базируется на мультифизическом подходе и состоит из четырёх последовательно работающих программных модулей. Результат вычисления в каждом модуле является начальным или граничным условием для следующего. Компьютерный алгоритм позволяет определить наиболее рациональные геометрические, динамические и теплофизические показатели системы приёма.

Ключевые слова: термодинамическая солнечная станция, параболический цилиндрический концентратор, мультифизический подход, метод Монте-Карло, численное решение уравнения Навье-Стокса.

Л.І. КНИШ, О.Г. ГОМАН

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

**ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ЕНЕРГОМАССОПЕРЕНОСУ В СИСТЕМІ ПРИЙОМУ ТЕПЛА СОНЯЧНОЇ ПАРАБОЛОЦИЛИНДРИЧНОЇ СТАНЦІЇ**

Запропоновано чисельний алгоритм для розрахунку энергомассопереносу в системі прийому сонячного випромінювання сонячної термодинамічної станції з параболическими концентраторами. Алгоритм базується на мультифизичному підході та складається з чотирьох послідовно працюючих програмних модулів. Результат розрахунків в кожному модулі є початковими або граничними умовами для наступного. Комп'ютерний алгоритм дозволяє визначити найбільш раціональні геометричні, динамічні та теплофізичні показники системи прийому.

Ключові слова: термодинамічна сонячна станція, параболический цилиндричний концентратор, мультифизичний підхід, метод Монте-Карло, чисельний розв'язок рівняння Нав'є-Стокса.

L. KNYSH, O.GOMAN

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

**MODELING FEATURES OF ENERGY-MASS TRANSFER IN THE HEAT RECEIVER SYSTEM OF THE SOLAR PARABOLIC CYLINDRICAL PLANT**

Numerical algorithm for analysis of energy/mass transfer in the solar radiation receiver system of thermodynamic solar plant with cylindrical parabolic concentrator is proposed. An algorithm is based on multi-physical approach and consists of the four software packages that work in sequence. Each package yields results that form initial/boundary conditions for next package. An algorithm enables to determine the most rational geometric, dynamic and thermophysical parameters of receiver system.

Keywords: thermodynamic solar plant, cylindrical parabolic concentrator, multi-physical approach, Monte-Carlo method, numerical solution of Navier-Stokes equations.

**Постановка проблеми**

Высокий уровень инсоляции, характерный для большей части территории Украины, способствует бурному развитию солнечных энерготехнологий. Автономные системы горячего водоснабжения на основе солнечных коллекторов являются неременным атрибутом многих гостиничных комплексов Причерноморья, фермерских хозяйств, частных усадеб. Популярными становятся автономные фотоэлектрические системы, способные полностью обеспечивать электроэнергией индивидуальные жилые и производственные здания. В последние годы широкое распространение получили фотоэлектрические солнечные станции большой мощности, генерирующие электроэнергию в общую сеть. Такие системы экологически безопасны, но имеют низкую эффективность (12-15%) при значительной первоначальной дороговизне оборудования и земельных площадей. Кроме того, относительно небольшой срок эксплуатации фотоэлектрических станций не позволяет сделать объективный вывод о деградации солнечных батарей и связанным с этим снижением эффективности станции.

Подобных недостатков полностью лишены термодинамические солнечные станции, КПД которых приближается к 25-30%. Термодинамическая солнечная технология хорошо апробирована в мире и базируется на классическом паротурбинном цикле. Опытная термодинамическая солнечная станция СЭС-5 в недавнем прошлом функционировала в Украине, но по объективным причинам её работа была приостановлена. Эксплуатация СЭС-5 доказала принципиальную возможность создание термодинамических



солнечных станций в климатических условиях Украины. СЭС-5 была спроектирована в виде башни, что предполагает двухосевую систему слежения за Солнцем. На привод такой системы при небольших мощностях (до 5 МВт) уходит большая часть вырабатываемой электроэнергии. Более экономичной в этом смысле является параболоцилиндрическая термодинамическая солнечная станция, система приёма которой одноосевая, и, с точки зрения эксергии, более оптимальна.

При создании параболоцилиндрических станций используется теплоэнергетическое оборудование, характерное для паротурбинного цикла. В этом смысле расчёт стоимости и окупаемости станции не представляет большого труда. Главная проблема – это проектирование систем приёма солнечного излучения. Эта часть станции является наиболее финансовозатратной и долгоокупаемой. Стоимость системы приёма составляет от 60% до 75% общей стоимости станции [1,2]. Поэтому моделирование и расчёт наиболее рациональных энергетических параметров системы приёма, состоящей из параболоцилиндрического концентратора с расположенным в его фокусе трубчатым теплоприёмником, является важной наукоёмкой проблемой, элементы решения которой представлены в данной работе.

#### **Анализ последних исследований и публикаций. Формулирование цели исследования**

Методика расчёта и проектирования системы приёма параболоцилиндрических солнечных станций состоит из нескольких самостоятельных задач, связанных одной логической конструкцией. Эти задачи решаются на основе различных математических и физических моделей, причём результат каждой из них является начальным условием для следующей задачи. Такой подход можно считать мультифизическим для конкретной системы, в отличие от обобщённого мультифизического подхода, моделирующего работу всех систем объекта [3,4].

Структурно моделирование проводилось в четыре этапа. На первом этапе вычислялось значение интенсивности солнечной радиации в зависимости от климатических факторов, порядкового дня в году и географии местности, где предполагается проектирование солнечной станции. Кроме того, учитывалась интегральное значение плотности теплового потока от Солнца, соответствующее определённому дню года. Такие расчёты делались на основе созданной методики, в которой предполагалось синусоидальное распределение плотности теплового потока в течение суток [5]. Подобных методик существует множество и все они, как правило, базируются на классических астрономических формулах с незначительными уточняющими дополнениями [6].

Среди множества подобных зарубежных коммерческих программ следует отметить приложения Google, в которых рассчитываются необходимые параметры солнечных энергоустановок. Но география этих программ ограничена некоторыми районами Калифорнии, Аризоны, Невады.

Вычисленное значение интенсивности теплового потока от Солнца является важной частью математической модели, которая положена в основу следующего этапа моделирования, на котором вычисляется облучённость теплоприёмника отражённым тепловым потоком от концентратора. Значение облучённости вычислялось на основе метода статистических испытаний Монте-Карло [7]. Выбор метода определялся спецификой задачи, связанной с необходимостью вычисления геометрических размеров трубчатого теплоприёмника, находящегося в фокусе концентратора. Энергетические параметры концентратора можно определить и другими методами, в частности, на основе электромагнитной теории, геометрической оптики и пр. [8,9].

Вычисленное значение теплового потока, что падает на теплоприёмник, является граничным условием для расчёта тепломассопереноса внутри трубчатого теплоприёмника. Теплоноситель, который движется в нём, играет роль рабочего тела для двухконтурного паротурбинного цикла. Вычисление температурного и динамического режима теплоприёмника проводится на третьем этапе решения и базируется на численном моделировании уравнения Навье – Стокса [10]. В результате такого моделирования становится возможным найти интегральные значения температур на выходе из канала и вычислить тепловую мощность системы приёма. На заключительном этапе проводится сравнение полученного значения с проектной мощностью системы с последующим уточнением результатов.

Представленный подход позволяет минимизировать временные затраты на расчёт системы приёма, обеспечить прозрачность такого расчёта, отказаться от использования дорогостоящих и требующих дополнительной наладки стандартных пакетов. Выбор рациональных параметров системы приёма проводится в одном программном модуле, в котором максимально учтены факторы, влияющие на энергоперенос.

#### **Изложение основного материала исследования**

Общая структура созданного программного модуля представлена на рис.1. Предполагаемое место проектирование солнечной электростанции – географические координаты – вносятся в качестве начальных значений в программу GEOGRAPHY. Там же расположены астрономические показатели выбранной местности, среди которых наиболее важные – время восхода и захода Солнца для каждого дня года. Климатические показатели местности – облачность, запылённость, усреднённое значение альбедо и пр. рассматриваются в программе GEOGRAPHY посезонно. Вычисленное в GEOGRAPHY значение интенсивности солнечной радиации является приближённым, основанным на интегральных данных. Такой подход требует значительного уточнения и согласования со специальной системой слежения за Солнцем,

являючись важливим елементом системи приёма. Но алгоритмизация работы этой системы – отдельная самостоятельная задача, рассмотрение которой не входит в объект исследования данной работы.

Вычисленное в GEOGRAPHY значение интенсивности солнечной радиации  $E_C$  передаётся в программу SUN, в которой моделируется лучистый теплоперенос в системе «Солнце – концентратор – теплоприёмник». Математическая модель этого процесса базируется на интегральном соотношении (1), в котором учтено большинство факторов, влияющих на данный процесс:

$$E_{ПП} = \frac{E_C}{2\pi} \iint_{S_K} \frac{\beta_K f(\varphi) \cdot \xi(\bar{l}_{КП}) \cdot \chi(\bar{l}_{КП}) \cos(-\bar{l}_C, \bar{n}_K) \cos(\bar{l}_{КП}, -\bar{n}_{ПП}) dS_K}{l_{КП}^2 \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \sin \varphi d\varphi} \quad (1)$$



Рис.1. Структурная схема созданного программного модуля

К таким факторам относятся геометрические показатели концентратора и теплоприёмника: площадь концентратора  $S_K$ ; величина, характеризующая взаимное расположение концентратора и теплоприёмника в пространстве  $\cos(\bar{l}_{КП}^0, -\bar{n}_{ПР})$ ; величина, характеризующая ориентацию концентратора на Солнце  $\cos(-\bar{l}_C^0, \bar{n}_K)$ ; длина вектора, соединяющего произвольную точку концентратора и теплоприёмника  $l_{КП}$ . Отражательная способность материала зеркала характеризуется величиной  $\beta_K$ , а неравномерность распределения энергии в пучке, который идёт от Солнца к концентратору и от концентратора к теплоприёмнику учитывается введением функции индикатрисы излучения  $f(\varphi)$ .

В соотношении (1) входят также функции типа Хевисайда  $\xi(\bar{l}_{КП})$  и  $\chi(\bar{l}_{КП})$ , которые указывают, попал ли луч, идущий от концентратора на поверхность теплоприёмника. Возможность непопадания луча на поверхность теплоприёмника связана с наличием аберраций – отклонений поверхности концентратора от идеальной формы. Такие отклонения могут быть технологического и эксплуатационного характера. Одним из методов их учёта является использование вероятностного подхода. В частности, предполагалось, что величины углов, характеризующих аберрации, подчиняются нормальному вероятностному закону.

Математическая модель лучистого теплопереноса в системе «Солнце – концентратор – теплоприёмник» реализована в программе SUN методом Монте-Карло, что обусловлено физической картиной явления. Результатом работы программы SUN является не только вычисление плотности теплового потока, что падает на поверхность теплоприёмника, но и вычисление геометрических размеров трубчатого теплоприёмника, который расположен в фокусе концентратора. Полученные значения являются исходными данными для программы TEMPERATURE по вычислению полей температур внутри теплоприёмника.

Численный алгоритм программы TEMPERATURE базируется на математической модели по вычислению безразмерного поля температур  $\vartheta(R, \Theta, Z)$  в круглой трубе. Система уравнений Навье – Стокса для такой геометрии существенно упрощается и состоит из уравнения энергии и выражения для профиля скорости  $W_Z(R)$ , что характеризует стабилизированное течение теплоносителя при разных режимах.

Уравнение энергии в безразмерных координатах имеет вид:

$$W_Z(R) \frac{\partial \vartheta(R, \Theta, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \vartheta(R, \Theta, Z)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta(R, \Theta, Z)}{\partial R} + \frac{1}{4\pi^2 R^2} \frac{\partial^2 \vartheta(R, \Theta, Z)}{\partial \Theta^2}, \quad (2)$$

и дополняется нетривиальными граничными условиями на внешней стороне теплоприёмной трубы. В частности, из SUN в программу TEMPERATURE передаётся дискретное значение плотности теплового потока, вычисленное методом Монте-Карло. Этот же метод позволяет определить геометрические размеры фокусного пятна, которое занимает лишь часть теплоприёмной поверхности трубы. Именно с этим связано введение в уравнение (2) угловой координаты.

В программу TEMPERATURE также передаётся значения профиля скорости  $W_Z(R)$  из подпрограммы SPEED. В SPEED предусмотрено вычисление квадратичного профиля скорости для ламинарного течения теплоносителя, а также несколько вариантов турбулентного профиля. Анализ физической модели процесса, температурный режим, который характерен для данных систем, позволил сделать вывод, что наилучшие характеристики при турбулентном режиме обеспечивает профиль скорости Рейхардта. Подтверждение этого приводится в [11], где сравниваются коэффициенты турбулентного переноса, рассчитанные по моделям Прандтля-Кармана, Рейхардта и Дайслера. В турбулентном ядре все модели показывают хорошее согласование с экспериментом и могут считаться равнозначными. В пристеночной области двухслойная модель Прандтля и трёхслойная модель Кармана дают грубую аппроксимацию. Формулы Рейхардта и Дайслера в непосредственной близости от стенки отличаются незначительно, но кривая модели Рейхардта лучше аппроксимирует изменение коэффициента турбулентного переноса в пристеночной области, поэтому этому методу было отдано предпочтение.

Для расчёта температурного поля внутри теплоприёмной трубы использовался метод контрольного объема. Неявная маршевая схема позволила обеспечить устойчивость решения и оптимизировать время расчёта. Выбор шага расчётной сетки определялся критерием устойчивости, в качестве которого выбиралось сеточное число Пекле, характерное для схемы «против потока». Алгоритм для численного решения параболического уравнения (2) базировался на расщеплении по радиальной и угловой координате с последующей реализацией метода прогонки. По завершению расчёта определялась бреднеинтегральная температура на выходе из канала. При постоянных значениях плотности и теплоёмкости теплоносителя эта величина в безразмерных переменных имеет вид:

$$\bar{q}_{CP} = \frac{\bar{T} - T_0}{T_{BX} - T_0} = 4 \int_0^1 (1 - R^2) \mathcal{G}(R, \Theta) R dR .$$

Такая величина является определяющей для вычисления интегрального значения мощности теплового потока в канале и сравнения его с проектными параметрами. В случае существенного отклонения результатов от заданных параметров в рамках итерационного процесса происходит уточнение выбранных геометрических, динамических или теплофизических параметров.

#### Выводы

Проведённая методология позволяет, без использования стандартных прикладных пакетов и дорогостоящих экспериментальных исследований, максимально быстро провести расчёт проектных параметров системы приёма солнечного излучения термодинамической солнечной станции. В созданном программном алгоритме реализована математическая модель, в которой учтены все наиболее важные физические аспекты, влияющие на энергетические показатели системы приёма параболоцилиндрических станций. Методика легко может быть адаптирована для расчёта перспективных комбинированных станций, а также других энергетических систем с концентраторами разных типов.

#### Список использованной литературы

1. Peter Gevorkian. Large-Scale Solar Power System Design. An Engineering Guide for Grid-Connected Solar Power Generation – McGraw –Hill, New York, 2011. – P.378
2. Werner Vogel, Henry Kalb. Large-Scale Solar Thermal Power: Technologies, Costs and Development – WILEY-VCH Verlag GmbH & Co, 2010. – 461 P.
3. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Мультифизическое моделирование электротехнических устройств – Теоретична електротехніка та електрофізика. – 2015, №2. – С.3 – 15.
4. Усовершенствованные средства инженерного анализа для принятия обоснованных решений о производстве изделий – [www.siemens.com/plm/nxcae](http://www.siemens.com/plm/nxcae) - Режим доступа: <http://www.ideal-plm.ru/uEditor/files/4/NXCAE.pdf>
5. Кныш Л.И. Особенности эксплуатации солнечных коллекторов с учётом климатических, географических и астрономических факторов / Кныш Л.И. // Международный научный журнал «Альтернативная энергетика и экология» – 2015. – №15–16(179–180). – С. 10 – 14.
6. Борцов А.В., Потовская Е.И. Определение интенсивности солнечного излучения для наклонной принимающей поверхности // Вісник НТУ «ХПИ». – 2013. – №59(1032) – С. 34 – 39.
7. Кныш Л.И. Численное моделирование лучистого теплопереноса в системе концентрации солнечного излучения «параболоцилиндрический концентратор - трубчатый теплоприёмник» / Л.И. Кныш // ISSN 1819–8058, Відновлювана енергетика – 2012. – #3(30). – С. 26 – 32.
8. Гаевский А.Ю., Ушкаленко О.В. Расчёт распределения мощности электромагнитного излучения в солнечных концентраторах // Альтернативная энергетика и экология. – 2014. – №23. – С.39 – 44.
9. Ароян О.С., Геруни С.П. Программа расчёта параметров солнечного параболоцилиндрического концентратора // Международный научный журнал «Альтернативная энергетика и экология» – 2005. – №11(31). – С. 42 – 46.
10. Knysh L.I. Selecting the flow regime of the heat transfer in the heat receivers of solar energy plant with cylindrical parabolic concentrators // Knysh L.I. // International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology. – 2014. – № 15, (155). – С. 20 –25.
11. Петухов Б.С. Теплообмен в ядерных энергетических установках. / Б.С. Петухов, Л.Г. Генин, С.А. Ковалёв. – М.,1974. – 408 стр.

УДК 004.942:519.6

V.T. LAZURIK, G.F. POPOV, SAWAN SALAH

V.N. Karazin Kharkiv National University

Z. ZIMEK

Institute of Nuclear Chemistry and Technology

**APPROBATION METHODS OF NUMERICAL DIFFERENTIATION THE DEPTH  
DOSE DISTRIBUTION MEASURED WITH APPLICATION DOSIMETRY WEDGE  
METHOD**

*Approbation methods of numerical differentiation the depth dose distribution of electron emission is performed on the base of measured data obtained with dosimetry wedge method application. The stability of these methods is evaluated in respect to the value of random component of the measured data uncertainty.*

*Keywords: numerical differentiation, the depth dose distribution, electrons energy.*

В.Т. ЛАЗУРИК, Г.Ф. ПОПОВ, САВАН САЛАХ

Харківський Національний Університет ім.В.Н.Каразіна

З. ЗІМЕК

Інститут Ядерної Хімії та Технологій. Варшава, Польща

**АПРОБАЦІЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦЮВАННЯ ГЛИБИННОГО РОЗПОДІЛУ ДОЗИ  
ВИПРОМІНЮВАННЯ, ВИМІРЯНОГО МЕТОДОМ ДОЗИМЕТРИЧНОГО КЛИНУ**

*Апробація методів чисельного диференціювання глибинного розподілу дози електронного випромінювання виконується на основі даних, отриманих в спеціально проведених вимірюваннях. Оцінюється стійкість цих методів до величини випадкової складової похибки результатів вимірювань.*

*Ключові слова: чисельне диференціювання, розподіл дози випромінювання, енергія електронів.*

В.Т. ЛАЗУРИК, Г.Ф. ПОПОВ, САВАН САЛАХ

Харьковский Национальный Университет им.В.Н.Каразина

З. ЗИМЕК

Институт Ядерной Химии и Технологий. Варшава, Польша

**АПРОБАЦИЯ МЕТОДОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ГЛУБИННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОЗЫ  
ИЗЛУЧЕНИЯ, ИЗМЕРЕННОГО МЕТОДОМ ДОЗИМЕТРИЧЕСКОГО КЛИНА**

*Апробация методов численного дифференцирования глубинного распределения дозы электронного излучения выполняется на основе данных, полученных в специально проведенных измерениях. Оценивается устойчивость этих методов к величине случайной составляющей погрешности результатов измерений.*

*Ключевые слова: численное дифференцирование, распределение дозы излучения, энергия электронов.*

**The problem formulation**

Computer modeling of depth dose distributions in the irradiated objects requires the data sets related both to the properties undergoing radiation treatment, and the topical parameters of radiation installation. The standards [1, 2] describe the formal procedures for the electron energy determination as fundamental parameter of radiation installations equipped with electron accelerators. The methods of electron energy determination, which are commonly used in radiation centers, are based on depth dose distribution measurements with dosimetric wedge or stack of plates application. When the results of measurement are composed as discrete data sets, the formal procedures for electron energy determination demand the solution of incorrect mathematical task - numerical differentiation of depth dose distribution deposited by electron beam.

**Analysis of recent investigations and publications**

The comparison of numerical differentiation methods of depth dose deposited by electron beam with the use of various types approximations of the sets of discrete data are given in literature [3]. The values of the first and second derivatives with polynomial approximation method and fitting of semi-empirical model to the results of numerical experiments were calculated. It has been shown that methods of fitting the semi-empirical models or polynomial approximation allow with satisfactory accuracy calculate the values of first derivative of dose distribution as function of depth. It should be noticed, that considered computational methods for the values of second derivatives the dose distribution in depth are only suitable for estimation. However, according to the paper [3], estimation accuracy of computational methods performed on the basis of the results of numerical experiments is

obtained by Monte Carlo method with a very small statistical error. It is obvious, that assessment accuracy of the measurements results should be performed taking into account the effect of random errors of the processed data.

Therefore in the paper [4] the statistical errors connected to the results of numerical experiments were chosen comparable to the errors of measurement results performed with standard methods in radiation technology centers (3-5%). Comparisons computational methods of calculating the practical range of electrons were performed on the basis of the data set obtained by simulation with Monte Carlo method of depth distributions of electron radiation dose using software RT-Office [5].

The results presented in literature [4] allow formulate recommendations for the choice of processing method of measurement and electron energy determination. In particular it should be noticed that the method of fitting the semi-empirical model and approximation method with polynomial of the 4th degree of measured depth dose distribution allow with high accuracy calculate the values the effective energy of electrons.

**Formulation of research objective**

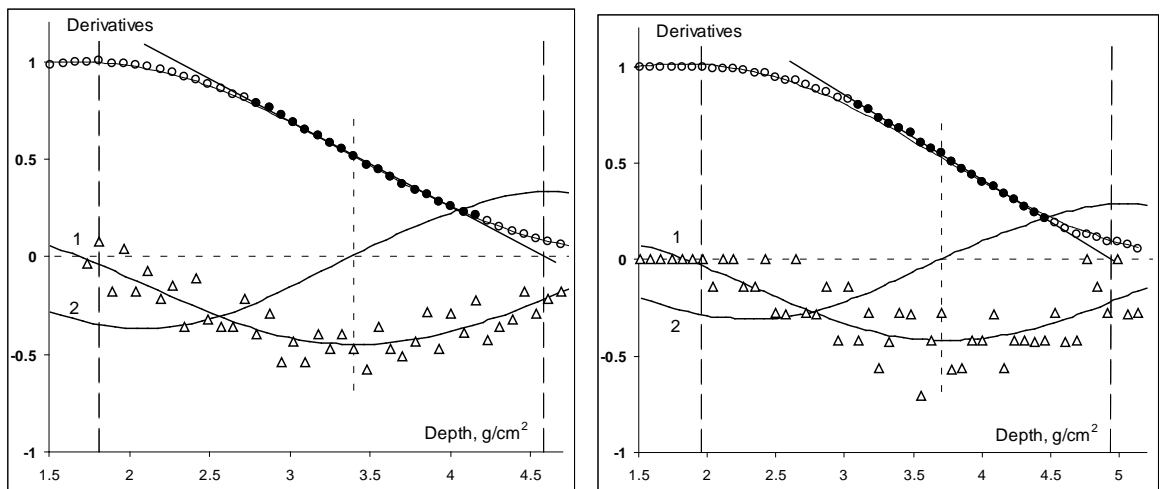
The methods of numerical differentiation of the depth dose distribution of electron radiation is continued in this paper with the data base obtained in performed experiments [6] with the use of standard dosimetric wedge made of aluminum. Computing methods for determination the first and second derivatives of the dose distributions with respect to depth which use the fitting semi-empirical model or approximation with polynomial of 4th degree the measurement results were investigated. It was estimated on the basis of experimental data processing the stability of these computational methods to the value of random component of the errors of processed data.

**The use of numerical differentiation methods of dose distribution with respect to depth.**

Determination the first and second derivatives of dose distribution with respect to depth based on a parametric fit of semi-empirical electron energy absorption model to measured results were performed according to the procedure described in literature [3].

Fig. 1 (left) shows the results of numerical differentiation data related to depth dose distribution in the standard dosimetry wedge, which were obtained by averaging the three sets of measurements performed during radiation processing in radiation-technological facility in "regime 1" of irradiation [3].

Fig. 1 (right) shows the calculation results of derivatives for the case "1" and dose distribution measurements performed in "regime 2" of irradiation.



**Fig.1. The depth dose distribution and the first and second derivatives of dose distribution with respect to depth, calculated on the basis of method parametric fitting of semiempirical model to the measurement results. Empty circles - data measuring the dose distribution, filled circles - selected data for the linear approximation (solid line), triangles - the results of the numerical differentiation of measurement data. Solid curves - dose distribution, the first derivative (curve 1) and the second derivative (curve 2) dose distribution with respect to depth.**

As can be seen from the Fig. 1 the method of parametric fitting of semi-empirical model allows to perform satisfactory of evaluation derivatives of dose with respect to depth, random measurement error distributions of depth dose distribution defined by standard methods in radiation processing (sterilization) centers.

Approximation with a polynomial of 4th degree of measured data was applied to the "broad" area of the depth dose distribution where is observed a decrease of the dose value.

The lower boundary of this area was considered as the position depth of maximum dose value  $D_{max}$ . If  $D_{max}$  value is available in a set of depth dose distribution data, the boundary region is considered to be the greatest depth value of this set.

The upper boundary of the depth dose distribution was considered for evaluation the value of practical range of electrons penetration  $R_p$ , calculated on the base of linear interpolation of data in the region depths of (0.8 - 0.2)  $D_{max}$ .

The procedure for determination the value of  $R_p$  and the boundary field of depth (vertical lines) allocated for processing of data using a polynomial approximation of the 4th degree are shown in Fig. 1.

Fig. 2 shows the results of numerical differentiation the dose distributions using the approximation of measurement results (shown in Fig. 1) polynomials of 4th degree in "wide" area of depths.

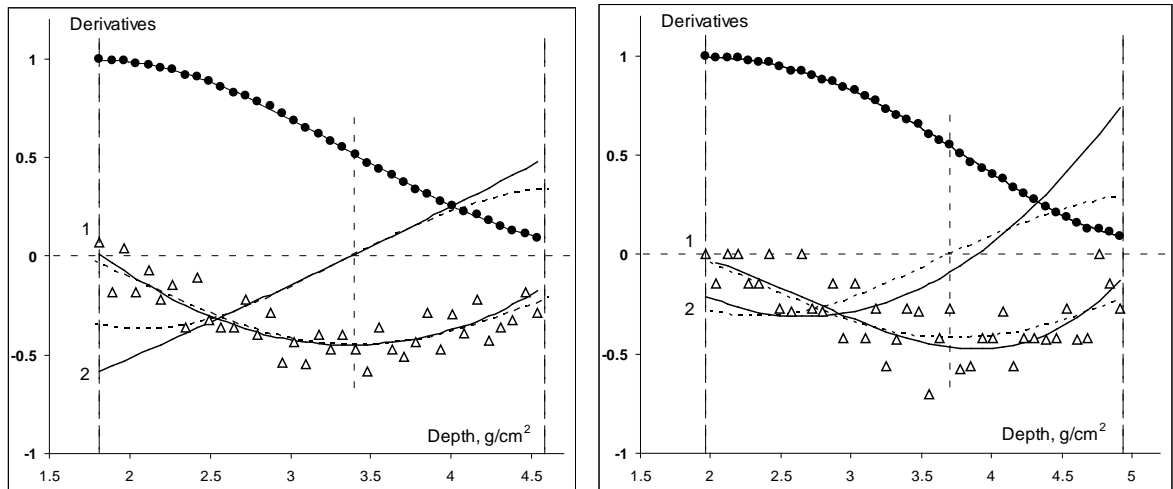


Fig.2. Approximation with a polynomial of 4th degree the measurement results in "wide" area of depths. Circles filled - selected measurement results for the approximation. The curve passes through the filled circles - approximation data. Solid curves 1 and 2 the first and second derivatives of dose with respect to depth, calculated on the basis of a polynomial approximation.

Fig. 3 shows the results of numerical differentiation of dose distribution using the approximation of measurement results (shown in Fig. 1) with polynomials of 4th degree in the region of depth dose distribution, where close to a linear relationship is observed and decrease of depth dose distribution ("narrow" area of depth). The region of depth dose value in diapason from 0.8 to 0.2 of  $D_{max}$  was used.

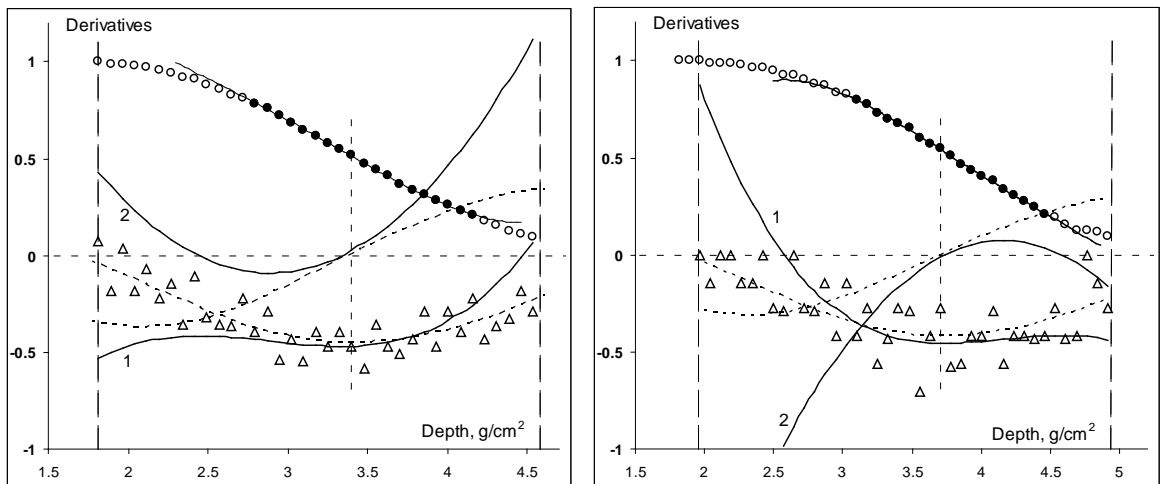


Fig.3. Approximation with a polynomial of the 4th degree of measurement results in "narrow" area of depths. Empty circles - data measuring the dose distribution, filled circles - selected measurement results for the approximation. The curve passes through the filled circles - approximation data. Solid curves 1 and 2 - the first and second derivatives of dose with respect to depth, calculated on the basis of a polynomial approximation.

The dashed lines presented on Fig. 2 and 3 show the first and second derivatives of the dose calculated on the basis of a parametric fitting of semi-empirical model.

As can be seen on Fig. 2 derivatives which were calculated on the base of the method of polynomial approximation dose measurement results in "wide" area of depths are in satisfactory agreement with calculated data in the semi-empirical model. When polynomial approximation of dose measurement results in the "narrow" area of the depth dose distribution are applied the derivatives are greatly differ from those calculated in the semi-empirical model. It can be observed even the qualitative difference of the derivatives according to results presented on Fig. 3. However, the values of derivatives at point "inflection" (vertical dotted line) are close to depth dose distribution and hence the value of  $R_p$ , calculated using these methods will coincide with good accuracy.

### The results and conclusions

The application of parametric fitting semi-empirical model and the polynomial approximation of the 4th degree of data over a wide range of depth dose distribution were compared. It can be concluded on the basis of the results comparison that these methods of numerical differentiation of the dose distribution are resistant to the value of the random component of the data error to be processed. This conclusion means that sets of experimental data usually obtained in radiation technology center could be applied for more deep investigation to characterize the electron energy based on numerical studies presented in literature [4].

Methods for measuring the polynomial approximation results in a narrow range of depths, where there is a linear decrease of the depth dose distribution, are not resistant to the random component of the error data to be processed, as shown in the presented examples. This means that the formal use of polynomial approximation of measurement results to solve practical problems of a class of numerical differentiation dose distribution can lead to great uncertainty and error in results of calculation. In particular this conclusion applies to the proposed in literature [7] method, where practical range of the electrons was determined on the base of polynomial of the 4th degree approximation of the electronic measurement of radiation dose distribution in the depths with linear decrease of the depth dose distribution.

### References

1. ICRU REPORT 35. Radiation dosimetry: electron beams with energies between 1 and 50MeV,1984.–160p.
2. ISO/ASTM Standard 51649, Practice for dosimetry in an e-beam facility for radiation processing at energies between 300 keV and 25 MeV. Annual Book of ASTM Standards. Vol. 2005.12.02.
3. V.T. Lazurik, G.F. Popov, S. Salah, Z. Zimek. Evaluation of accuracy of the methods for obtaining spatial characteristics of electron radiation depth-dose distribution.// Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, –2015. –Series «Math. Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», Issue 28. – p. 126-139
4. V.T. Lazurik, G.F. Popov, Z. Zimek, R.V. Lazurik, Sowan Salah. Comparison of methods of processing the results of measurements of depth dose distributions of electron radiation.// Information Processing Systems. – 2016. – № 3(140). – p. 82-87.
5. V.T. Lazurik, V.M. Lazurik, G. Popov, Yu. Rogov, Z. Zimek. Information System and Software for Quality Control of Radiation Processing // IAEA: Collaborating Center for Radiation Processing and Industrial Dosimetry, Warsaw: Poland. 2011. – 220 p.
6. V.T. Lazurik, V.M. Lazurik, G. Popov, Z. Zimek. Determination of electron beam parameters on radiation-technological facility for simulation of radiation processing // East European Journal of Physics. – 2014. – Vol. 1. No.3. – p. 76-81.
7. Lisanti T.F. Calculating electron range values mathematically // Radiation Physics and Chemistry. – 2004. – Vol. 71. – P. 581 –584.



УДК 517.958:536.2

В.П. ЛЯШЕНКО, Е.Б. КОБИЛЬСКАЯ

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского

О.П. ДЕМЬЯНЧЕНКО

Азовский морской институт Одесской национальной морской академии

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В  
СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ ИСТОЧНИКОВ**

*В работе рассмотрена математическая модель температурного поля в сферической области с импульсными условиями теплообмена с окружающей средой. Рассмотрены модели нагрева и охлаждения области. Решение нелинейной начально-краевой задачи сведено к решению интегрального уравнения типа Гаммерштейна*

*Ключевые слова: краевая задача, сферическая область, импульсный источник тепла*

V.P. LYASHENKO, E.B. KOBILSKAYA

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskiy National University

O.P. DEMYANCHENKO

Mariupol, Azov maritime institute of National university "Odessa maritime academy"

**MODELING OF HEAT DISTRIBUTION IN THE SPHERICAL AREA UNDER THE  
INFLUENCE IMPULSIVE HEAT SOURCES**

*A mathematical model of the temperature field in spherical area with impulsive conditions of heat exchange with the environment is considered in the work. Models heating area and the cooling area are considered in the work. The solution of the nonlinear initial boundary value problem is reduced to the solution of the integral equation of Hammerstein type*

*Key words: boundary value problem, spherical area, impulsive heat sources*

В.П. ЛЯШЕНКО, О.Б. КОБИЛЬСЬКА

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

О.П. ДЕМ'ЯНЧЕНКО

Азовський морський інститут Національного університету "Одеська морська академія"

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА У СФЕРИЧНІЙ ОБЛАСТІ ПІД ДІЄЮ  
ІМПУЛЬСНИХ ДЖЕРЕЛ**

*У роботі розглянута математична модель температурного поля у сферичній області з імпульсними умовами теплообміну з навколишнім середовищем. Розглянуто моделі нагріву і охолодження області. Розв'язок нелінійної початково-крайової задачі зведено до розв'язання інтегрального рівняння типу Гаммерштейна*

*Ключові слова: крайова задача, сферична область, імпульсне джерело тепла*

**Постановка проблемы**

Исследование процессов теплообмена, как правило, связано с проведением натуральных экспериментов по измерению температуры и теплофизических параметров поверхности и внутренних областей исследуемого объекта. Поэтому информацию о температурном поле получают из ограниченного множества точек наблюдения, расположенных внутри или на поверхности исследуемого объекта [1]. Учитывая данные наблюдений, на основе математической модели, путём решения прямой или обратной задачи теплопроводности, определяются температурные распределения, восстанавливаются параметры теплового процесса [2].

В астрофизике и геофизике одной из важных задач есть задача моделирования температурного поля  $U = U(r, \theta, \varphi, t)$  во вращающемся с угловой скоростью  $\omega = const$  шаре  $r \leq R$ , когда направление теплового потока интенсивностью  $q = const$  ортогонально оси вращения. С математической точки зрения большинство космических объектов можно рассматривать как шары, – тела, ограниченные сферой.

**Формулировка цели работы**

Целью работы является построение математической модели температурного поля сферической области с импульсными условиями теплообмена с окружающей средой.

**Изложение основного материала исследования**

Рассмотрим температурное поле планеты или астероида, облучаемого тепловым потоком со стороны звезды. Предположим, что на облучаемой поверхности имеет место теплообмен по закону Ньютона, а на не облучаемой – по законам Ньютона и Стефана-Больцмана. Тогда для определения температуры шара  $U(r, \theta, \phi, t)$  получаем следующую нелинейную начально-краевую задачу в области  $\Omega \times t = \{0 < r < R, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi, t > 0\}$

$$\Delta U - \frac{1}{a^2} U_t = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad t > 0$$

$$U(r, \theta, \phi, 0) = U_0 = const, \quad U(r, \theta, \phi, t) = U(r, \theta, \phi + 2\pi, t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} + h_2 U \Big|_{r=R} = \begin{cases} \left( h_2 U_c + \frac{q}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right) f(z) & 0 < \theta < \pi, \quad \omega t < \phi < \omega t + \pi \\ \left( (h_2 - h_1) U + h_1 U_c + \kappa (U_c^4 - U^4) \right) f(z) & 0 < \theta < \pi, \quad \omega t + \pi < \phi < \omega t + 2\pi \end{cases} \quad (1)$$

Здесь:  $\Delta$  – оператор Лапласа в сферической системе координат;  $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ ,  $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$ ,  $\kappa = \frac{\xi\sigma}{\lambda}$ ,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $c$  – теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $\alpha_i$  – коэффициент теплообмена,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $\xi$  – степень черноты поверхности шара,  $U_c$  – температура охлаждающей среды,  $R$  – радиус шара,  $f(z)$  – периодическая безразмерная кусочно- монотонная функция.

Решение задачи ищем в виде решения эквивалентного интегрального уравнения типа Фредгольма по угловым координатам  $0 < \phi < 2\pi$  и  $0 < \theta < \pi$  и типа Вольтерра по времени для  $t > 0$ . Перейдем к сферическим координатам воспользовавшись второй формулой Грина и проинтегрировав по  $r$ , получим

$$\int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R V \left( \Delta U - \frac{1}{a^2} U_t \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt =$$

$$= \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R V \Delta U r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt - \frac{1}{a^2} \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R V U_t r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt,$$

Составим разность

$$\int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \left[ V \left( \Delta U - \frac{1}{a^2} U_t \right) - U \left( \Delta V + \frac{1}{a^2} V_t \right) \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt =$$

$$= \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \left( V \frac{\partial U}{\partial r} - U \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Big|_0^R R^2 \sin \theta d\theta d\phi dt - \frac{1}{a^2} \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (UV)'_t r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt.$$

Получаем искомую вторую формулу Грина

$$\int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \left[ V \left( \Delta U - \frac{1}{a^2} U_t \right) - U \left( \Delta V + \frac{1}{a^2} V_t \right) \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt =$$

$$= \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \left[ V \left( \frac{\partial U}{\partial r} - h_2 U \right) - U \left( \frac{\partial V}{\partial r} - h_2 V \right) \right] \Big|_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta d\phi dt -$$

$$- \frac{1}{a^2} \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (UV)'_t r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt. \quad (2)$$

Кроме формулы Грина для решения задачи введем также функцию Грина  $G = G(r, \theta, \phi, t)$ . Ее можно получить как решение сопряженной задачи

$$\Delta_{r,\theta,\phi}G + \frac{1}{a^2}G_t = -\delta(r-\rho)\delta(\theta-\xi)\delta(\phi-\psi)\delta(t-\tau),$$

$$0 < r, \rho < R, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi, t, \tau > 0$$

$$G = 0, \quad t > \tau; \quad G < \infty, \quad r = 0$$

$$G_r + h_2G|_{r=R} = 0, \quad G|_{\phi+2\pi} = G|_{\phi}.$$

Здесь:  $\delta(r-\rho), \delta(\theta-\xi), \delta(\phi-\psi)$  - дельта-функции Дирака в сферической системе координат.

Полагая в (2)  $V = G$  и учитывая (1) и (3), получаем искомое интегральное уравнение относительно  $W(\theta, \varphi, t)$ , когда  $0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0$ .

$$\int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} G \cdot 0 + U \delta(r-\rho)\delta(\theta-\xi)\delta(\phi-\psi)\delta(t-\tau)r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt =$$

$$= \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} \left[ G \left( f(z) \left( h_2 U_c + \frac{q}{\lambda} \sin \theta \right) \right) \right] \Big|_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta d\phi dt +$$

$$+ \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\xi t+2\pi} \int_0^{\pi} \left[ G \left( \left( (h_2 - h_1)U + h_1 U_c + \kappa (U_c^4 - U^4) \right) f(z) \right) \right] \Big|_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta d\phi dt +$$

$$+ \frac{1}{a^2} \int_0^{\tau+0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U_0 G(r, \rho; \theta, \zeta; \phi - \psi; 0 - \tau) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Откуда

$$U(\rho; \zeta; \psi; \tau) = U_n(\rho; \zeta; \psi; \tau) -$$

$$- \int_0^{\tau} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} G(R, \rho; \theta - \zeta; \phi - \psi; t - \tau) \left[ (h_1 - h_2)W + \kappa W^4 \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi dt,$$

где

$$U_n(\rho, \zeta, \psi, \tau) = \frac{U_0}{a^2} \int_0^{\tau} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(r, \rho; \theta - \zeta; \phi - \psi; 0 - \tau) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi +$$

$$+ \int_0^{\tau} \int_{\omega t}^{\omega t+\pi} \int_0^{\pi} G(R, \rho; \theta - \zeta; \phi - \psi; t - \tau) \left( h_2 U_c + \frac{q}{\lambda} \sin \theta \right) f(z) R_2 \sin \theta d\theta d\phi dt +$$

$$+ \left( h_1 U_c + \kappa U_c^4 \right) f(z) \int_0^{\tau} \int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} G(R, \rho; \theta - \zeta; \phi - \psi; t - \tau) R^2 \sin \theta d\theta d\phi dt.$$

Обозначив

$$U(R, \theta, \phi, t) = W(\theta, \phi, t); \quad G(\rho; \theta - \zeta; \phi - \psi; t - \tau) = R^2 G(R, \rho; \theta - \zeta; \phi - \psi; t - \tau),$$

$$G(\theta - \zeta; \phi - \psi; t - \tau) = G(R; \theta - \zeta; \phi - \psi; t - \tau); \quad (h_1 - h_2 + \kappa W^3)W = \Phi[W(\theta, \phi, t)],$$

получим распределение температуры на поверхности шара в виде

$$W(\zeta, \psi, \tau) = W_n(\zeta; \psi; \tau) - \int_0^{\tau} \int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} G(\theta - \zeta; \phi - \psi; t - \tau) \Phi[W(\theta, \phi, t)] \sin \theta d\theta d\phi dt.$$

По найденному значению  $W(\zeta; \phi; \tau)$  из (6) можно квадратурой (4) найти температуру в любой точке шара.

Функцию Грина - решение задачи (3), ищем в виде

$$G(r, \rho; \theta, \zeta; \phi - \psi; t - \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} g_{jc}(r, \theta, t) \cos j\phi + g_{js}(r, \theta, t) \sin j\phi.$$

Условію періодичності  $G|_{\phi+2\pi} = G|_{\phi}$  она удовлетворяет, причем  $j$  – целое,  $j = \overline{0, \infty}$ . Подставив предполагаемую форму решения в уравнение задачи (3), определим функции  $g_{jc}(r, \theta, t)$  и  $g_{js}(r, \theta, t)$ .

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left( \Delta_{r,\theta} - \frac{j^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) (g_{j,c}(r, \theta, t) \cos j\phi + g_{j,s}(r, \theta, t) \sin j\phi) = -\delta(r - \rho) \delta(\theta - \zeta) \delta(\phi - \psi) \delta(t - \tau).$$

Умножим обе части полученного равенства на  $\cos k\phi$  и проинтегрируем по  $\phi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ . Затем поступим так же, предварительно умножив равенство на  $\sin k\phi$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos k\phi \sum_{j=0}^{\infty} \left( \Delta_{r,\theta} - \frac{j^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) (g_{j,c}(r, \theta, t) \cos j\phi + g_{j,s}(r, \theta, t) \sin j\phi) d\phi = \\ & = -\delta(r - \rho) \delta(\theta - \zeta) \delta(t - \tau) \int_0^{2\pi} \cos k\phi \delta(\phi - \psi) d\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sin k\phi \sum_{j=0}^{\infty} \left( \Delta_{r,\theta} - \frac{j^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) (g_{j,c}(r, \theta, t) \cos j\phi + g_{j,s}(r, \theta, t) \sin j\phi) d\phi = \\ & = -\delta(r - \rho) \delta(\theta - \zeta) \delta(t - \tau) \int_0^{2\pi} \sin k\phi \delta(\phi - \psi) d\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \Delta_{r,\theta} - \frac{j^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \pi g_{j,c}(r, \theta, t) = -\cos j\psi \delta(r - \rho) \delta(\theta - \zeta) \delta(t - \tau) \\ \sum_{j=0}^{\infty} \left( \Delta_{r,\theta} - \frac{j^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \pi g_{j,s}(r, \theta, t) = -\sin j\psi \delta(r - \rho) \delta(\theta - \zeta) \delta(t - \tau) \end{cases}$$

Пусть  $g_{j,c}(r, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \bar{g}_{j,c}(r, \theta, t) \cos j\psi$ ,  $g_{j,s}(r, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \bar{g}_{j,s}(r, \theta, t) \sin j\psi$ , тогда

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \Delta_{r,\theta} - \frac{j^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{g}_{j,c}(r, \theta, t) = -\delta(r - \rho) \delta(\theta - \zeta) \delta(t - \tau) \\ \sum_{j=0}^{\infty} \left( \Delta_{r,\theta} - \frac{j^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{g}_{j,s}(r, \theta, t) = -\delta(r - \rho) \delta(\theta - \zeta) \delta(t - \tau), \end{cases}$$

Откуда следует, что  $\bar{g}_{j,c}(r, \theta, t) = \bar{g}_{j,s}(r, \theta, t) = \bar{g}_j(r, \theta, t)$ .

Тогда выражение для функции Грина  $G$  имеет вид

$$G = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi} (\bar{g}_j(r, \theta, t) \cos j\psi \cos j\phi + \bar{g}_j(r, \theta, t) \sin j\psi \sin j\phi) \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \cos j(\phi - \psi) \bar{g}_j(r, \theta, t), \text{ где}$$

$\bar{g}_j(r, \theta, t)$  решение уравнения

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{j^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{g}_j(r, \theta, t) = \\ & = -\delta(r - \rho) \delta(\theta - \zeta) \delta(t - \tau). \end{aligned} \tag{7}$$

После преобразований получим функцию Грина в виде

$$G(r, \rho; \theta, \zeta; \phi - \psi; t - \tau) = \eta(\tau - t) \frac{a^2}{\pi R^2} \times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R} r\right) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R} \rho\right) P_{nj}(\cos \theta) P_{nj}(\cos \zeta) \cos j(\phi - \psi)}{\sqrt{r \rho} (n+j)! \left(1 + \frac{(h_2 R - n - 1)(h_2 R + n)}{\mu_{nm}}\right) J_{n+\frac{1}{2}}^2(\mu_{nm})} e^{a^2 \left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 (t - \tau)} \quad (8)$$

В результате преобразований уравнения (4) и (6) превращаются в нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна, которое решается численными методами

$$U(\rho, \zeta, \psi, \tau) = U_n(\rho, \zeta, \psi, \tau) - \frac{a^2}{\pi \sqrt{R}} \int_0^T \int_{\omega t + \pi}^{\omega t + 2\pi} \int_0^\pi \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R} \rho\right) P_{nj}(\cos \theta) \cos j(\phi - \psi) \Phi(W)}{\sqrt{\rho} (n+j)! (h_2 R - n - 1)(h_2 R + n) \mu_{nm}^2 J_{n+\frac{1}{2}}^2(\mu_{nm})} \times e^{a^2 \left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 (t' - \tau')} \cdot \left. \begin{array}{l} \frac{e^{a^2 \left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}}{e^{a^2 \left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T} - 1} \quad t' < \tau' \\ \frac{1}{e^{a^2 \left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T} - 1} \quad t' > \tau' \end{array} \right\} \times \sin \theta d\theta d\phi dt.$$

**Выводы**

Предложен алгоритм численно – аналитического решения начально-краевой задачи определения температурного поля сферической области со сложными граничными условиями. В результате интегральных преобразований начально-краевые задачи для уравнений теплопроводности преобразованы в нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна и соответствующую квадратуру для определения периодического квазистационарного температурного поля.

**Список использованной литературы**

1. Weill A., Shitzer A., Baryoseph P. (1993): Finite element analysis of the temperature field around two adjacent cryo-probes. J. Biomech. Eng. 115, 374 – 379.
2. Lyashenko V., Kobilskaya E., Control of heat source in a heat conduction problem”, in Application of Mathematics in technical and Natural Sciences (AMiTaNS’14), AIP CP, edited by Michail D. Todorov, American Institute of Physics, Melville, NY, 2014, pp. 651-654.

УДК 539.3

Е.А. МАКАРЕНКОВ, А.В. СЯСЕВ, В.Ю. КЛИМ  
Днепропетровский национальный университет имени Олеса Гончара**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА**

*Получено аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности с граничными условиями третьего рода для двухсвязной области длинного эксцентрического цилиндра, поперечное сечение которого представляет собой эксцентрическое кольцо с расположенными на оси  $Ox$  центрами внутренней и внешней окружностей. Для решения поставленной краевой задачи использованы преобразования Лапласа и функции Бесселя первого и второго рода.*

*Ключевые слова: толстостенный полый эксцентрический цилиндр, нестационарные температурные поля, двухсвязная область.*

Є.А. МАКАРЕНКОВ, А.В. СЯСЕВ, В.Ю. КЛИМ  
Дніпропетровський національний університет імені Олеса Гончара**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРУ**

*Отримано аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності з граничними умовами третього роду для двозв'язної області довгого эксцентричного циліндру, поперечний переріз якого має вигляд эксцентричного кільця з розташованими на осі  $Ox$  центрами внутрішнього та зовнішнього кіл. Для розв'язання задачі використано перетворення Лапласа та функції Бесселя першого та другого родів.*

*Ключові слова: товстостінний порожнистий эксцентричний циліндр, нестационарні температурні поля, двозв'язна область.*

E.A. MAKARENKOV, A.V. SIASIEV, V.Y. KLYM  
Oles Honchar Dnipropetrovsk National University**THE SOLVING OF HEAT EXCHANGE TASK FOR HOLLOW CYLINDER**

*The analytical solution of the nonstationary heat exchange task with third-form boundary conditions for two-relations domain for long eccentric cylinder that centers of the internal and external ring are on the axes  $Ox$  is obtained. The Laplace transform and Bessel functions are used for solving task.*

*Key words: thick hollow eccentric cylinder, nonstationary temperature fields, two-relations domain.*

**Постановка проблемы**

В сложных конструкциях для атомной энергетики, летательных аппаратов широко используются элементы, имеющие форму полого эксцентрического цилиндра. При воздействии высокотемпературного газового или жидкостного потока, проходящего через внутреннюю полость цилиндра, создается неравномерный нагрев стенок элемента, определяемый особенностью конструкции. Вместе с тем повышенный интерес наблюдается к вопросу исследования нестационарных температурных полей, возникающих в элементах конструкций вследствие кратковременного воздействия высоких температур. Определение наибольшей неравномерности распределения таких температурных полей, а значит и возникновение критического термонапряженного состояния элементов, позволит прогнозировать нарушения рабочих режимов эксплуатации конструкции в целом.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Решение подобной задачи методом конечных интегральных преобразований для ограниченного цилиндра с непрерывно действующим источником тепла и граничными условиями третьего рода на трех границах приведено в работе [4]. Интегральные преобразования Фурье, Бесселя, Вебера первого и второго рода были использованы авторами работы [5] для решения нестационарных краевых задач в случае однородных цилиндрических круговых областей. В работах [7,8] подобная задача решена методом факторизации с использованием конечного интегрального преобразования смешанной задачи математической физики для кругового конечного цилиндра с заданной начальной температурой.

**Формулирование цели исследования**

Цель работы заключается в получении аналитического решения нестационарной задачи теплопроводности с граничными условиями третьего рода для двухсвязной области.

**Изложение основного материала исследования**

Рассмотрим плоское температурное поле длинного эксцентрического цилиндра, поперечное сечение которого имеет вид (рис.1). Расстояние между центрами ограничивающих окружностей обозначим через  $l$ .

С каждой из ограничивающих полостей связываем свою систему координат  $x_m, y_m$  ( $m=1,2$ ), для которой выполняется соотношение [1]:

$$x_m + iy_m = r_m e^{i\theta_m}, \quad (m=1,2). \quad (1)$$

При этом индекс 1 относится у внешнему контуру, индекс 2 – к внутреннему (рис.1).

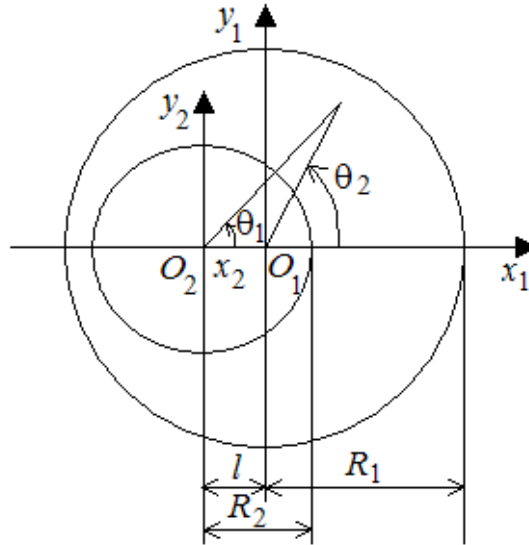


Рис. 1. Поперечное сечение эксцентрического цилиндра

Для определения неизвестного температурного поля  $T$  решаем уравнение теплопроводности:

$$\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad (2)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho_j^2} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial \rho_j} + \frac{1}{\rho_j^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2}$  ( $j=1,2$ );  $\rho_1 = \frac{r_1}{R_2}$ ;  $\rho_2 = \frac{r_2}{R_2}$ ;  $\tau = \frac{at}{R_2^2}$ ;  $a$  – коэффициент

температуропроводности;  $t$  – время при следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho_j} - \gamma_j (T - T_c^{(j)}(\theta)) = 0, \quad \gamma_j = \frac{k_j(\theta)}{\lambda_T} \quad (j=1,2); \quad \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}, \quad \rho_2 = 1, \quad (3)$$

где  $T_c^{(1)}(\theta)$ ,  $T_c^{(2)}(\theta)$ ,  $k_1(\theta)$ ,  $k_2(\theta)$  – соответственно температуры и коэффициенты теплообмена среды на внешней и внутренней границах области. В качестве начального условия при  $t=0$  принималась температура  $T=0$ .

Для решения поставленной краевой задачи (2), (3) применим преобразования Лапласа [2]. Тогда уравнение (2) в изображениях записывается следующим образом:

$$\Delta T^* + \beta T^* = 0, \quad \beta^2 = -S. \quad (4)$$

Граничные условия в изображениях примут вид:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \rho_1} - \gamma_1 \left( T^* - (T_c^{(1)})^* \right) = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial \rho_2} - \gamma_2 \left( T^* - (T_c^{(2)})^* \right) = 0. \quad (5)$$

Решением задачи (4), (5) является следующее соотношение:

$$T^* = T_1^* + T_2^*,$$

где  $T_1^*$  – температурное поле в сплошном цилиндре;  $T_2^*$  – температурное поле, обусловленное наличием произвольно расположенной полости.

Принимая во внимание периодический закон изменения неизвестной функции вдоль координаты  $\theta$ , запишем выражения:

$$T_1^* = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n^{(1)} J_n(\beta \rho_1) + B_n^{(1)} N_n(\beta \rho_1) \right] \left[ A_n^{(2)} \cos n\theta_1 + B_n^{(2)} \sin n\theta_1 \right],$$

$$T_2^* = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n^{(3)} J_n(\beta \rho_2) + B_n^{(3)} N_n(\beta \rho_2) \right] \left[ A_n^{(4)} \cos n\theta_2 + B_n^{(4)} \sin n\theta_2 \right],$$

где  $J_n(\beta\rho_i), N_n(\beta\rho_i), (i=1,2)$  – функции Бесселя первого и второго рода.

Так как температура на оси сплошного цилиндра ( $\rho_1 = 0$ ) должна быть конечной, функция  $T_1^*$  не должна содержать бesselеву функцию второго рода, которая стремится к бесконечности при  $\rho_1 \rightarrow 0$ , следовательно  $B_n^{(1)} = 0$ , с другой стороны функция  $T_2^*$  не может содержать бesselеву функцию первого рода от мнимого аргумента  $\beta = i\sqrt{s}$ , так как она стремится к бесконечности при  $\rho_2 \rightarrow \infty$  и поэтому  $B_n^{(3)} = 0$ . Из условия симметричности температурного поля относительно оси, проходящей через точки  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , находим, что  $B_n^{(2)} = B_n^{(4)} = 0$ .

Таким образом, общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$T^* = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n^{(1)} J_n(\beta\rho_1) \cos n\theta_1 + C_n^{(2)} N_n(\beta\rho_2) \cos n\theta_2]. \quad (6)$$

Сведем рассматриваемую температурную задачу к бесконечной системе уравнений в области изображений [3]. Для удовлетворения граничных условий на внешнем ( $\rho_1, \theta_1$ ) и на внутреннем ( $\rho_2, \theta_2$ ) контурах необходимо представить решение (6) соответственно в системах  $(\rho_1, \theta_1)$  или  $(\rho_2, \theta_2)$ . Для этого применим теорему сложения функций кругового цилиндра.

Представим связь между двумя произвольно расположенными системами координат следующим образом (рис. 2).

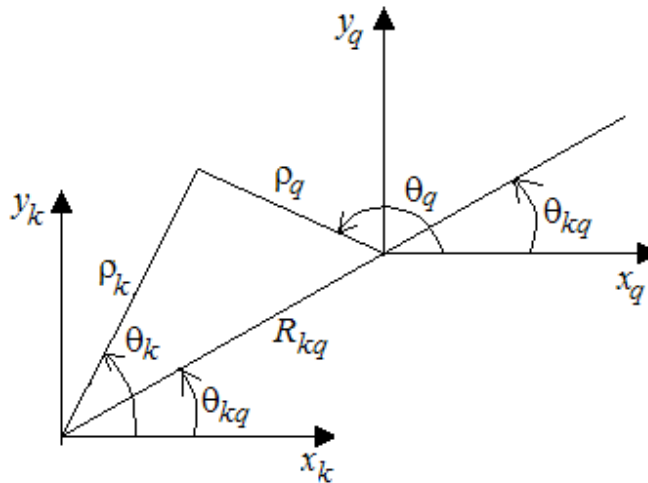


Рис. 2. Связь между двумя произвольно расположенными системами координат

Приведем теорему сложения цилиндрических функций для двух случаев [1]:

1) если  $\rho_k < R_{kq}$

$$b_n(\beta\rho_q) \cos n\theta_q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_{n-p}(\beta R_{kq}) J_p(\beta\rho_k) [\cos(n-p)\theta_{kq} \cos p\theta_k - \sin(n-p)\theta_{kq} \sin p\theta_k];$$

2) если  $\rho_k > R_{kq}$

$$b_n(\beta\rho_q) \cos n\theta_q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n-p}(\beta R_{kq}) b_p(\beta\rho_k) [\cos(n-p)\theta_{kq} \cos p\theta_k - \sin(n-p)\theta_{kq} \sin p\theta_k].$$

На рис. 1 представлена двухсвязная область. Положение произвольной точки в первой и второй системах координат описывается следующим образом:  $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ ;  $z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ . Таким образом, для внешнего контура можно записать, что  $z_1 = z_2 - l, q=1, k=2, R_{21} = l, \theta_{21} = 0$ ; для внутреннего контура –  $z_2 = z_1 + l, q=2, k=1, R_{12} = l, \theta_{12} = \pi$ .

В этом случае теорема сложения функций Бесселя первого и второго рода имеет соответствующий вид для случаев:

1) при  $\rho_k = \rho_2 < l$  имеем:



$$J_n(\beta\rho_1) \cos n\theta_1 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n-p}(\beta l) J_p(\beta\rho_2) \cos p\theta_2 =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} J_{n-p}(\beta l) J_p(\beta\rho_2) \cos p\theta_2 + \sum_{p=1}^{\infty} J_{n+p}(\beta l) J_p(\beta\rho_2) \cos p\theta_2,$$

где  $p' = -p$ .

С учетом того, что  $J_{-p} = (-1)^p J_p$ , получим следующее выражение:

$$J_n(\beta\rho_1) \cos n\theta_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p [J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l)] J_p(\beta\rho_2) \cos p\theta_2, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_p = 0,5$  при  $p = 0$  и  $\varepsilon_p = 1$  при  $p > 0$ .

2) при  $\rho_k = \rho_1 > l$  имеем:

$$N_n(\beta\rho_2) \cos n\theta_2 = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p [J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l)] J_p(\beta\rho_1) \cos p\theta_1. \quad (8)$$

Таким образом, используя соотношения (7), (8), для двух систем координат общее решение (6) представим следующим образом:

1) в системе координат  $(\rho_1, \theta_1)$

$$T^* = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ C_p^{(1)} J_p(\beta\rho_1) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n^{(2)} [J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l)] N_p(\beta\rho_1) \right\} \cos p\theta_1; \quad (9)$$

2) в системе координат  $(\rho_2, \theta_2)$

$$T^* = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ C_p^{(2)} N_p(\beta\rho_2) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n^{(1)} [J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l)] J_p(\beta\rho_2) \right\} \cos p\theta_2. \quad (10)$$

Представим  $(T_C^{(1)})^*$ ,  $(T_C^{(2)})^*$  в виде рядов Фурье

$$(T_C^{(1)})^* = \sum_{p=0}^{\infty} (T_C^{(1)})_p \cos p\theta_1, \quad (T_C^{(2)})^* = \sum_{p=0}^{\infty} (T_C^{(2)})_p \cos p\theta_2, \quad (11)$$

где  $(T_C^{(1)})_p$ ,  $(T_C^{(2)})_p$  – коэффициенты рядов Фурье.

После подстановки выражений (9) – (11) в граничные условия (5), получаем следующие зависимости:

$$-\gamma_1 \sum_{p=0}^{\infty} (T_C^{(1)})_p \cos p\theta_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ C_p^{(1)} [\beta J_p(\beta\rho_1) - \gamma_1 J_p(\beta\rho_1)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n^{(2)} [J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l)] [\beta N_p(\beta\rho_1) - \gamma_1 N_p(\beta\rho_1)] \right\} \cos p\theta_1, \quad (12)$$

$$-\gamma_2 \sum_{p=0}^{\infty} (T_C^{(2)})_p \cos p\theta_2 = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ C_p^{(2)} [\beta N_p(\beta) + \gamma_2 N_p(\beta)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n^{(1)} [J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l)] [\beta J_p(\beta) - \gamma_2 J_p(\beta)] \right\} \cos p\theta_2. \quad (13)$$

Введем следующие обозначения:

$$A_p^{(1)} = \beta J_p(\beta\rho_1) - \gamma_1 J_p(\beta\rho_1), \quad A_p^{(2)} = \beta N_p(\beta) + \gamma_2 N_p(\beta),$$

$$A_{np}^{(1)} = \varepsilon_n [J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l)] [\beta N_p(\beta\rho_1) - \gamma_1 N_p(\beta\rho_1)],$$

$$T_p^{(1)} = -\gamma_1 (T_c^{(1)})_p, \quad T_p^{(2)} = \gamma_2 (T_c^{(2)})_p.$$

Приравняем левые и правые части зависимостей (12) и (13) при одинаковых гармониках и получим две бесконечные системы алгебраических уравнений с неизвестными  $C_n^{(1)}$ ,  $C_n^{(2)}$ :

$$A_p^{(1)} C_p^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{np}^{(1)} C_n^{(2)} = T_p^{(1)}, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

$$A_p^{(2)} C_p^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{np}^{(2)} C_n^{(1)} = T_p^{(2)}, \quad p = 0, 1, \dots. \quad (15)$$

Исследование квазирегулярности и единственности решения бесконечности систем при условии, что параметр  $\beta$  ограничен, проведено по аналогии с работой [4]. Решение бесконечной системы уравнений (14), (15) осуществлено в нулевом приближении [3].

#### Выводы

В результате исследования получено аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для эксцентрического полого цилиндра с поперечным сечением в виде эксцентрического кольца, которое позволило получить достаточно простые решения поставленной задачи.

#### Список использованной литературы

1. Гузь, О. М. Про застосування теореми додавання циліндричних функцій до розв'язування лінійних задач механіки у випадку скінченних багатозв'язних областей / О. М. Гузь // Доп. АН УРСР. – 1966. – №8. – С. 996 – 999.
2. Гузь, О. М. Задача Діріхле для рішення Гельмгольца для эксцентричного кільця / О. М. Гузь // Доп. АН УРСР. – 1966. – №10. – С. 1271 – 1275.
3. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. – С. 30 – 56.
4. Кашеев, М. В. Решение задачи теплопроводности для цилиндра конечных размеров с внутренними источниками тепла / М. В. Кашеев // Журнал Ученые записки Российского гос. соц. ун-та., 2009. – №7 (1). – С. 218 – 222.
5. Конет, І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Кам'янець-Подільськ. держ. пед. ун-т. – Чернівці: Прут, 2001. – 310 с.
6. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Вшшая школа, 1967. – 600 с.
7. Макаренко, Е. А. Температурное поле теплоизолированного по торцам цилиндра при конвективном теплообмене на образующих / Е.А. Макаренко, А. В. Сяев // Дніпропетровськ, ДНУ: Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка.– 2015. – Т. 23. – № 5. – Вип. 19. – С. 9 – 14.
8. Siasiev, A.V. Mathematical simulation of building up the shells of heated bodies of revolutio / A.V. Siasiev, A.A. Siasieva // Topical areas of fundamental and applied research V. Proceedings of the Conference. North Charleston, USA, 22-23.12.2014.– CreateSpace, 2015. – Vol. 1. – P. 131-133.

УДК 535.36

О.В. МАЧУЛЯНСЬКИЙ, Б.Б. БАБИЧ, В.О. МАЧУЛЯНСЬКИЙ, Н.П. ТАРАСОВСЬКА  
Національний технічний університет України "КПІ"**МОДЕЛЮВАННЯ НАНОСТРУКТУРНИХ МЕТАЛОДІЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ  
ДЛЯ ВИКОРИСТАННЯ В ЯКОСТІ ОПТИЧНИХ ФІЛЬТРІВ**

*Розраховані спектральні характеристики електромагнітного відгуку відсікаючих прозорих оптичних фільтрів на основі наноструктурних металодіелектричних систем в спектральному діапазоні 0,2 – 2 мкм. Визначена ефективна діелектрична проникність на основі теорії Бруггемана. Встановлено взаємозв'язок оптичних властивостей таких систем з їх електромагнітними характеристиками та структурними параметрами. Надані рекомендації щодо можливості створення оптичних фільтрів з заданими спектрально-селективними характеристиками на основі наноструктурних металодіелектричних систем.*

*Ключові слова:* прозорі оптичні фільтри, наноструктурні металодіелектричні системи, чисельне моделювання.

А.В. МАЧУЛЯНСКИЙ, Б.Б. БАБЫЧ, В.А. МАЧУЛЯНСКИЙ, Н.П. ТАРАСОВСКАЯ  
Национальный технический университет Украины "КПИ"**МОДЕЛИРОВАНИЕ НАНОСТРУКТУРНЫХ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ  
ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В КАЧЕСТВЕ ОПТИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ**

*Рассчитаны спектральные характеристики электромагнитного отклика отсекающих прозрачных оптических фильтров на основе наноструктурных металлодиэлектрических систем в спектральном диапазоне 0,2 – 2 мкм. Определена эффективная диэлектрическая проницаемость на основе теории Бруггемана. Установлена взаимосвязь оптических свойств таких систем с их электромагнитными характеристиками и структурными параметрами. Даны рекомендации по возможности создания оптических фильтров с заданными спектрально-селективными характеристиками на основе наноструктурных металлодиэлектрических систем.*

*Ключевые слова:* прозрачные оптические фильтры, наноструктурные металлодиэлектрические системы, численное моделирование.

А.В. МАЧУЛЯНСЬКИЙ, Б.В. БАБЫЧ, В.А. МАЧУЛЯНСЬКИЙ, Н.П. ТАРАСОВСКАЯ  
National Technical University of Ukraine "KPI"**MODELLING OF NANOSTRUCTURAL METALDIELECTRIC SYSTEMS FOR USE AS  
OPTICAL FILTERS**

*Spectral characteristics of an electromagnetic response of the cutting transparent optical filters on the basis of nanostructural metaldielectric systems in the spectral range of 0,2 – 2 microns are calculated. Effective dielectric permeability on the basis of Bruggeman's theory is defined. The interrelation of optical properties of such systems with their electromagnetic characteristics and structural parameters is established. Recommendations for creation of optical filters with the set spectral and selective characteristics on the basis of nanostructural metaldielectric systems are given whenever possible.*

*Keywords:* transparent optical filters, nanostructural metaldielectric systems, numerical modeling.

**Вступ. Аналіз досліджень та публікацій. Постановка проблеми**

Наноструктурні металодіелектричні системи володіють унікальними електромагнітними властивостями, що представляє їх перспективними для оптоелектроніки та лазерної техніки [1].

Особливий інтерес приділяється прозорим оптичним фільтрам, які використовуються в якості селективних покриттів для фотоелектричних і фототермічних перетворювачів енергії, відсікаючих фільтрів, функціональних енергоефективних покриттів тощо [2].

Аналіз науково-технічної та патентної літератури показав, що в даний час для розробки таких оптичних фільтрів в основному використовуються багатошарові інтерференційні структури. Такі структури складаються з по чергово розміщених тонких шарів високопровідних металів срібла, золота, міді та їх сплавів з іншими металами, а також діелектриків, прозорих у видимому та інфрачервоному діапазоні електромагнітного випромінювання. Шари металів забезпечують високі значення коефіцієнта відбивання електромагнітної енергії в інфрачервоній області спектру, а шари діелектриків – зменшують відбивання і підвищують пропускання фільтра в видимому діапазоні спектру.

Для збільшення селективності інтерференційних фільтрів, як правило, вдаються до збільшення числа металевих і діелектричних шарів.

Проте такі оптичні фільтри [3] мають суттєві недоліки, а саме: складність технології виготовлення і прецизійного контролю параметрів багат шарових структур; недостатня механічна міцність; висока собівартість покриттів; деградація параметрів тощо.

Попередні оцінки показали, що наноструктурні металодіелектричні системи, що містять нанорозмірні частинки металу, які розподілені в прозорій діелектричній матриці, за своїми характеристиками перевершують складні традиційні багат шарові системи [3, 4]. Такі двофазні наноструктурні металодіелектричні системи можуть бути реалізовані у вигляді нанорозмірних моношарів металевих частинок або їх багат шарових комбінацій.

В роботі [5] показано, що експлуатаційна стабільність металодіелектричних структур з нанорозмірною металевою компонентою визначається властивостями діелектричної компоненти. У зв'язку з цим особливий інтерес представляють діелектричні матеріали на основі оксинітрида алюмінію, які мають високі захисні властивості та хімічну стійкість. Крім того керуючи технологічними параметрами синтезу можна змінювати їх оптичні параметри [6].

Властивості таких наноструктурних систем залежать від електрофізичних властивостей окремих компонентів, концентрації фаз та їх геометричних розмірів.

Тому при розробці та синтезі таких матеріалів необхідно враховувати їх структуру, дисперсійні та розмірні залежності параметрів їх окремих компонент.

Однак відомі підходи [7] не враховують вищевказаних факторів при прогнозуванні характеристик оптичних фільтрів.

Таким чином, ці проблеми можуть бути вирішені за допомогою моделювання та оптимізації оптично прозорих фільтрів на основі наноструктурних металодіелектричних систем з використанням методів, які враховують електромагнітні параметри і мікроструктуру компонентів таких систем.

#### Мета дослідження

Метою даної роботи є моделювання спектральних характеристик електромагнітного відгуку відсікаючих прозорих оптичних фільтрів на основі наноструктурних металодіелектричних систем з використанням моделі ефективного середовища з урахування електромагнітних параметрів і мікроструктури компонентів наноструктурних систем.

#### Модель наноструктурної металодіелектричної системи

Для моделювання спектральних характеристик електромагнітного відгуку відсікаючих прозорих оптичних фільтрів на основі наноструктурних металодіелектричних систем використовували алгоритм на основі методу матриць переносу [7-9].

Перевагою дано методу є те, що він не накладає жодних обмежень на кількість шарів і може бути використаний для розрахунку як багат шарових, так і одношарових структур.

Розрахунки виконані при наступних обмеженнях:

- нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі;
- шарувата структура складається з  $N$  плоскопаралельних, однорідних, ізотропних шарів;
- кожен шар характеризується ефективною товщиною  $d_i$  ( $i$  – індекс шару), спектральними

комплексними електромагнітними параметрами: комплексна діелектрична проникність  $\varepsilon_i^*$ , комплексна магнітна проникність  $\mu_i^*$ ;

- наноструктурна система розташована між двома напівбезкінечними однорідними та ізотропними середовищами (в нашому випадку – повітря з показником заломлення рівним одиниці);
- нанорозмірна металева компонента випадково розподілена в матеріалі матриці;
- наноструктурна металодіелектрична система характеризується комплексною ефективною діелектричною проникністю:

$$\varepsilon_{\lambda i e f}^* = \varepsilon_{1 \lambda e f} - i \varepsilon_{2 \lambda e f}, \quad (1)$$

де  $\varepsilon_{1 \lambda e f}$ ,  $\varepsilon_{2 \lambda e f}$  – дійсна та уявна частина комплексної ефективною діелектричної проникності.

У оптичному діапазоні спектру електромагнітного випромінювання для металевої компоненти  $\mu_i^* = 1$ .

Для опису та аналізу комплексної діелектричної проникності металодіелектричних систем використовується модель ефективного середовища, зокрема теорія Бруггемана [10].

Використання моделі «ефективного середовища» для наноструктурних металодіелектричних систем виправдане двома обставинами: малими, в порівнянні з довжиною хвилі світла ( $\lambda$ ), розмірами металевих нанорозмірних частинок і хаотичністю розподілу їх в діелектричній матриці.

Згідно цієї теорії ефективна комплексна діелектрична проникність металодіелектричних систем пов'язана з діелектричною проникністю  $\epsilon_{мет}$  і об'ємною концентрацією металевих включень, розподілених в ізотропній матриці з діелектричною проникністю  $\epsilon_{\delta}$ .

На основі вищепредставлених підходів розроблений алгоритм розрахунку в програмному середовищі MatLAB для енергетичних коефіцієнтів пропускання і відбивання металодіелектричних систем.

В якості вхідних даних для розрахунку ефективної комплексної діелектричної проникності металодіелектричних систем для металевої компоненти застосовувалися значення оптичних параметрів срібла, наведених в роботі [11], а для діелектричної компоненти значення діелектричної проникності, характерне для оксинітриду алюмінію. Значення показника заломлення плівок оксинітриду алюмінію змінюються в інтервалі від 1,4 до 2,5 в залежності від технологічних параметрів їх синтезу методом реактивного магнетронного розпилення [6].

**Результати моделювання**

Приклади результатів розрахунків спектральних залежностей дійсної та уявної частин діелектричної проникності на основі теорії Бруггемана наноструктурного металодіелектричного шару наведені на рис. 1

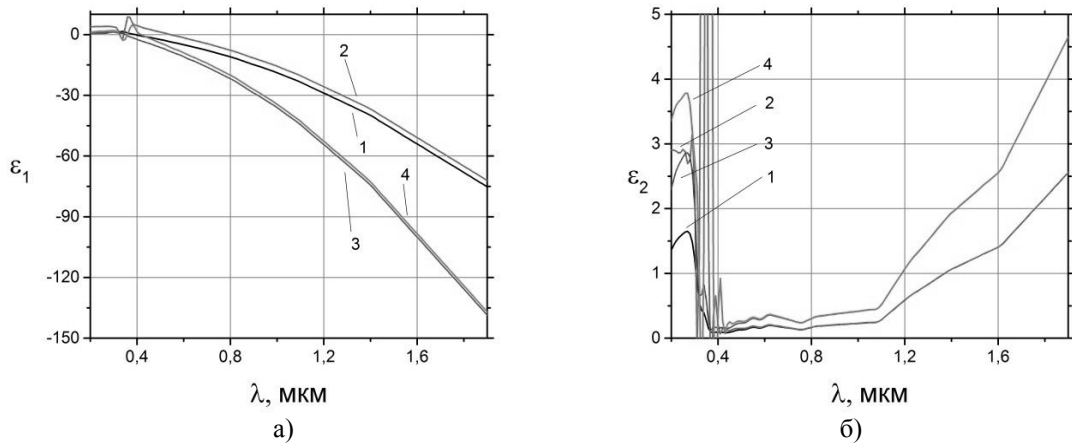


Рис. 1. Спектральні залежності дійсної (а) та уявної (б) частин діелектричної проникності наноструктурного металодіелектричного шару при різних значеннях фактору заповнення металевих включень  $f$  та діелектричної проникності діелектричної матриці  $\epsilon_{\delta}$ : 1 –  $f = 0,5$ ;  $\epsilon_{\delta} = 1,96$ ; 2 –  $f = 0,5$ ;  $\epsilon_{\delta} = 5,25$ ; 3 –  $f = 0,8$ ;  $\epsilon_{\delta} = 1,96$ ; 4 –  $f = 0,8$ ;  $\epsilon_{\delta} = 5,25$

З рис. 1 видно, що спостерігається дисперсія комплексної діелектричної проникності в досліджуваному спектральному діапазоні для розрахованих модельних структур металодіелектричних систем. При цьому маємо значний ріст абсолютних значень дійсної та уявної частин діелектричної проникності при збільшенні концентрації металевої компоненти.

Результати чисельного моделювання спектральних залежностей коефіцієнтів відбивання R та пропускання T наноструктурних металодіелектричних систем при різних значеннях параметрів їх структури представлені на рис. 2-4.

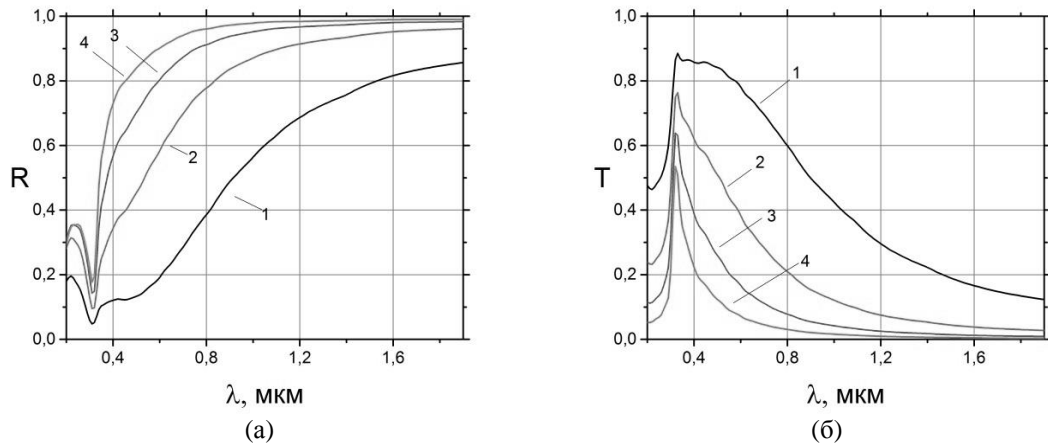


Рис. 2. Спектральні залежності коефіцієнтів відбивання (а) та пропускання (б) оптичних фільтрів при  $\epsilon_{\delta} = 1,96$  для різних товщин наноструктурного металодіелектричного шару  $d_H$ : 1 – 10 нм; 2 – 20 нм; 3 – 30 нм; 4 – 40 нм

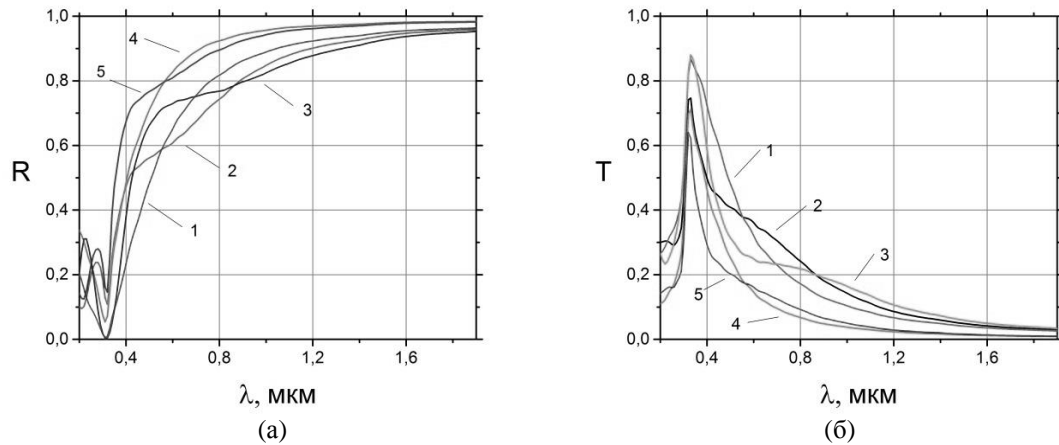


Рис. 3. Спектральні залежності коефіцієнтів відбивання (а) та пропускання (б) оптичних фільтрів при  $\epsilon_D = 1,96$ , для різних товщин  $d_H$  та товщини діелектричного шару  $d_D$ : 1 –  $d_H = 20$  нм;  $d_D = 40$  нм; 2 –  $d_H = 20$  нм;  $d_D = 100$  нм; 3 –  $d_H = 20$  нм;  $d_D = 150$  нм; 4 –  $d_H = 30$  нм;  $d_D = 50$  нм; 5 –  $d_H = 30$  нм;  $d_D = 100$  нм

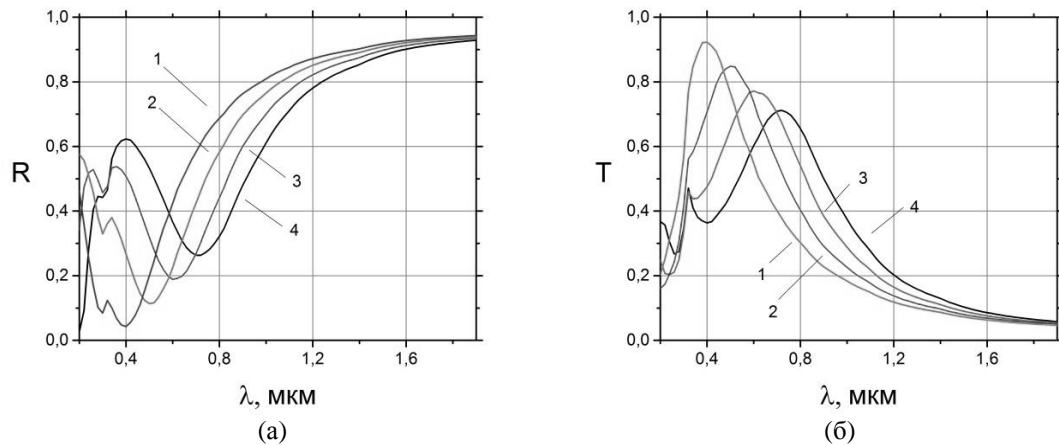


Рис. 4. Спектральні залежності коефіцієнтів відбивання (а) та пропускання (б) оптичних фільтрів при  $\epsilon_D = 5,25$ , для різних товщин  $d_H$  та  $d_D$ : 1 –  $d_H = 20$  нм;  $d_D = 20$  нм; 2 –  $d_H = 20$  нм;  $d_D = 30$  нм; 3 –  $d_H = 20$  нм;  $d_D = 40$  нм; 4 –  $d_H = 20$  нм;  $d_D = 50$  нм

Аналізуючи результати проведеного моделювання було встановлено, що варіюючи структурні та електромагнітні параметри металодіелектричної системи, а саме концентрацію нанорозмірних металевих включень, товщини металодіелектричної структури, діелектричну проникність металеві та діелектричної компонент, можемо задавати необхідні спектрально-селективні характеристики прозорих оптичних фільтрів.

Наприклад, з наведених на рис. 2-4 спектральних залежностей слідує, що варіюючи діелектричну проникність діелектричної компоненти з 1,96 до 5,25 або її товщину, можемо регулювати спектральну селективність оптичного фільтра (порогові значення довжини хвилі) в інтервалі від 0,4 до 0,9 мкм, при цьому мінімальне та максимальне значення коефіцієнтів відбивання та пропускання змінюються від 0,2 до 0,9.

### Висновки

Чисельне моделювання електромагнітного відгуку в спектральному діапазоні 0,2 – 2 мкм прозорих оптичних фільтрів на основі наноструктурних металодіелектричних систем з використанням теорії ефективного середовища Бруггемана встановило взаємозв'язок між оптичними характеристиками фільтрів та їх структурними і електромагнітними параметрами металодіелектричних компонент.

Використання для діелектричної компоненти діелектричної проникності, що відповідає реальним значенням оксинітриду алюмінію, синтезованого та дослідженого авторами в роботі [6], дозволяє проводити оптимізацію технологічних процесів формування наноструктурних металодіелектричних систем для прозорих оптичних фільтрів з заданими характеристиками у видимому і ближньому інфрачервоному діапазоні.

Таким чином, варіюючи структурні та електромагнітні параметри металодіелектричної системи, зокрема товщини металодіелектричної структури, концентрацію нанорозмірних металевих включень, діелектричну проникність металевої та діелектричної компонент, можемо змінювати порогові значення довжини хвилі фільтра в інтервалі від 0,4 до 0,9 мкм, що дає можливість створювати оптичні фільтри з заданими спектрально-селективними характеристиками.

#### Список використаної літератури

1. Moulin E., Sukmanowski J., Luo P. et al. Improved light absorption in thin-film silicon solar cells by integration of silver nanoparticles // *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2008. V. 354. P. 2488-2491.
2. О.Н. Гадамский, К.К. Алтунин, Н.М. Ушаков, И.Д. Кособудский, В.Я. Подвигалкин, Д.М. Кульбацкий. Высокоэффективные просветляющие наноструктурные оптические покрытия для солнечных элементов // *ЖТФ* – 2010, Т 80, №6. – с. 83-89.
3. Агнихотри О., Гунта Б. Селективные поверхности солнечных установок М., 1984, 273 с.
4. L.V. Maksimov, A.V. Anan'ev, V.N. Bogdanov, T.S. Markova, S.N. Smerdin, O.V. Yanush Optical losses of multi component glasses for fibers and methods of their reduction // *Optics and Optoelectronics. Proc. SPIE. Warsaw. Poland*. 2006. – Vol. 5. P. 55-59.
5. Золотухин И.В., Калинин Ю.В., Ситников А.В. Нанокompозитные структуры на пути в наноэлектронику // *Природа* – 2006, № 1. – с.11-19.
6. A. Borisova, A. Machulyansky, M. Rodionov, Y. Yakimenko, B. Babych “Properties of Aluminum Oxynitride Films Prepared by Reactive Magnetron Sputtering” – *IEEE XXXIV International Scientific Conference “Electronics and Nanotechnology”* (Ahril, 16-19th, 2014) – p.122-125.
7. Теллен, О. Конструирование многослойных интерференционных светофильтров [Текст] / О. Теллен // *Физика тонких пленок*. – 1972. – Т. 5. – С. 46-83.
8. Розенберг, Г. В. Оптика тонкослойных покрытий [Текст] / Г. В. Розенберг. – М.: Наука, 1958. – 570 с.
9. Борн, М. Основы оптики [Текст] / М. Борн, Д. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 719 с.
10. Виноградов А. П. Электродинамика композитных материалов / Под ред. Б. З. Каценеленбаума. М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 208 с.
11. P. B. Johnson and R. W. Christy, “Optical constants of transition metals” *Phys. Rev. B* 9, 5056–5069 (1974).

УДК 62-50

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара

**СИНТЕЗ АДЕКВАТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА  
ВЫПЛАВКИ СТАЛИ**

*Рассмотрена задача синтеза адекватной математической модели физического процесса в алгебраической форме. Показано, что такие модели являются локальными и их существует бесконечное множество. Найдены условия, при которых можно получить адекватную модель. В качестве примера реального физического процесса был выбран процесс выплавки стали. Показано, что классический метод наименьших квадратов не позволяет получить адекватную модель.*

*Ключевые слова: адекватные математические модели, алгебраическая форма, алгоритм определения параметров, алгебраическая модель выплавки стали.*

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара

**СИНТЕЗ АДЕКВАТНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ВИПЛАВКИ СТАЛІ**

*Розглянута задача синтезу адекватної математичної моделі фізичного процесу у алгебраїчній формі. Показано, що такі моделі є локальними і їх існує нескінченна множина. Знайдені умови, за яких можливо отримати адекватну модель. У якості прикладу реального фізичного процесу було вибрано процес виплавки сталі. Показано, що класичний метод найменших квадратів не дозволяє отримати адекватну модель.*

*Ключові слова: адекватні математичні моделі, алгебраїчна форма, алгоритм ідентифікації параметрів, алгебраїчна модель виплавки сталі.*

Yu.L. MENSNIKOV

Dnepropetrovsk National University

**SYNTHESIS OF ADEQUATE MATHEMATICAL MODEL OF STEEL PRODUCTION**

*The problem of synthesis of adequate mathematical model of the physical process in algebraic form was considered. It is shown that such models are local and there are an infinite set of them. The conditions in which is possible to obtain an adequate model are investigated. As the example of real physical process the steelmaking process was chosen. It is shown that the classical method of least squares does not allow receiving adequate model.*

*Keywords: adequate mathematical models, algebraic form, parameters identification algorithm, algebraic model of steelmaking.*

**Постановка проблеми**

Во многих случаях математическая модель физического процесса строится в виде линейных алгебраических соотношений между характеристиками этого процесса. Такого типа модели получили значительное распространение в технике, экологии, экономике и т.д. [1, 2]. Для обоснованного применения линейных математических моделей в алгебраической форме необходимо принимать во внимание, что они могут быть построены при определенных условиях.

Сформулируем общие условия, при которых возможно построение математических моделей в алгебраической форме. Во-первых, физический процесс удовлетворяет условию циклической повторяемости, т.е. от одного цикла к любому другому циклу не изменяется характер процесса (порядок следования операций, последовательность и величина внешних воздействий, граничные условия, время протекания процесса и т.д.). Примерами таких процессов могут быть процесс выпечки хлеба, выплавки стали. В такой ситуации возможно построить некоторое условное отображение исходных параметров процесса в конечные характеристики:

$$\sigma = F(\rho), \quad (1)$$

где  $\sigma \in \Sigma \subset R^m$  есть  $m$ -мерный вектор итоговых характеристик,  $\rho \in \Omega \subset R^n$  есть  $n$ -мерный вектор исходных характеристик процесса,  $F: \Omega \rightarrow \Sigma$  есть некоторое отображение.

Естественно, что выбор исходных параметров и конечных результатов (характеристик) зависит от целей изучения процесса. Согласно условию циклической структуры и параметры отображения остаются



неизменными в процессе изучения. Отображение  $F : \Omega \rightarrow \Sigma$  должно удовлетворять как минимум следующим условиям, имеется ввиду возможность построения в дальнейшем алгебраической модели:

- отображение однозначно;
- отображение инъективно;
- область определения односвязная;
- отображение непрерывно, т.е. малые изменения исходных данных приводят к малым изменениям конечных результатов.

Следует отметить, что в силу погрешности исходных данных затруднительно выполнить проверку этих условий.

Если указанные выше условия выполнены, тогда можно отображение (1) рассматривать как нелинейные алгебраические соотношения

$$\sigma = \Phi(\rho), \tag{2}$$

где  $\Phi : \Omega \rightarrow \Sigma$  есть некоторая алгебраическая функция. При этом параметры алгебраической математической модели  $\Phi : \Omega \rightarrow \Sigma$  физического процесса будут постоянными.

Если ограничиться только малыми изменениями характеристик  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)^T, ((\cdot)^T$  – знак транспонирования) в малой окрестности точки  $\rho^0 = (\rho_1^0, \rho_2^0, \dots, \rho_n^0)^T$ , тогда любую гладкую функцию  $\Phi(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$  в уравнении (2) можно приближенно заменить линейной зависимостью:

$$B \rho = \sigma, \tag{3}$$

где  $B$  есть матрица линейных математических моделей связи вектора  $\rho$  с вектором  $\sigma$  размером  $n \times m$ .

Рассмотрим одну строку в (3):

$$b_{k,1} \rho_1 + b_{k,2} \rho_2 + \dots + b_{k,n} \rho_n = \sigma_k, \quad k = \overline{1, m}, \tag{4}$$

где  $b_{k,1}, b_{k,2}, \dots, b_{k,n}$  есть параметры приближенной математической модели связи показателей  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  физического процесса с показателем  $\sigma_k$ .

В работе [3] даны определения адекватности линейных алгебраических математических моделей. Очевидно, что без выполнения условий адекватности любой математической модели дальнейшее ее использование не является обоснованным.

Из особенностей рассматриваемых физических процессов вытекают следующие свойства линейных адекватных алгебраических математических моделей физического процесса [3]:

1. Адекватные линейные алгебраические математические модели при любом выборе параметров модели являются приближенными;
2. Адекватные линейные алгебраические математические модели хорошо описывают реальный физический процесс лишь в некоторой малой окрестности точки  $\rho^0$  изменения переменных (свойство локальности).

При построении адекватных математических моделей желательно, чтобы количество исходных данных для расчетов параметров адекватной алгебраической математической модели было минимальным. Кроме того, для целей дальнейшего использования таких моделей необходимо, чтобы алгоритм синтеза адекватной алгебраической математической модели обеспечивал устойчивые к малым изменениям исходных данных результаты [4].

**Изложение основного материала исследования.**

Один из возможных алгоритмов синтеза адекватной математической модели предложен в работах [3, 4]. Он базируется на методе идентификации с использованием реальных измерений. При этом предполагается, что количество измерений характеристик процесса минимально и равно количеству этих переменных. В рамках этого алгоритма задача синтеза адекватной линейной математической модели с  $n$  переменными  $q_1, q_2, \dots, q_n$  относительно переменной  $q_1$  с количеством измерений каждой переменной равным  $n$  в детерминированной постановке, как задача решения алгебраической системы [3–4] с ограничениями:

$$A_p(q_2, q_3, \dots, q_n)z = q_1 = u_1, \tag{5}$$

где оператор  $A_p(q_2, q_3, \dots, q_n)z$  определяется следующим образом

$$A_p(q_2, q_3, \dots, q_n)z = z_1 q_2 + z_2 q_3 + \dots + z_{n-1} q_n + z_n e,$$

где  $e$  – единичный вектор размерности  $n$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$  – искомый вектор параметров математической модели процесса,  $q_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in})^T, i = \overline{1, n}$ .

Измерения переменных  $q_1, q_2, \dots, q_n$  получены экспериментальным путем, поэтому предполагается, что каждое измерение  $q_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$  имеет погрешность, максимальная величина которой известна априори [5]:

$$|q_{ij} - q_{ij}^{ex}| \leq \delta_i, 1 \leq j \leq n, i = 1, 2, \dots, n, \delta_i \leq \delta_0, \tag{6}$$

где  $q_{ij}^{ex}$  – точное измерение переменной  $q_{ij}$ .

Обозначим через  $p$  вектор из пространства  $E^{n(n-1)} = E^n \oplus E^n \oplus \dots \oplus E^n$ :

$$p^T = (q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}, q_{31}, q_{32}, \dots, q_{n1}, \dots, q_{nn})^T,$$

где  $E^n$  есть евклидово векторное пространство размерности  $n$  со стандартной нормой.

Каждый вектор  $q_i$  может принимать значение в замкнутой области  $D_i \subset E^n$ , согласно неравенствам (6). Вектор  $p$  может принимать значения в замкнутой области  $D = D_2 \oplus D_3 \oplus \dots \oplus D_n \subset E^{n(n-1)}$ . Каждому вектору  $p$  из области  $D$  соответствует определенный оператор  $A_p$ . Множеству  $D \subset E^{n(n-1)}$  будет соответствовать класс операторов  $\{A_p\} = K_A$ .

Представим уравнения (5) как

$$A_p z = u_{\delta_1}, \tag{7}$$

где  $u_{\delta_1} = q_i \in U = E^n; z \in Z = E^n; \|u_{\delta_1} - u_1^{ex}\|_U \leq \delta_1, u_1^{ex}$  – точная правая часть уравнения (7);

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta \in D} \|A_{p_\alpha} - A_{p_\beta}\|_{Z \rightarrow U} \leq h_1;$$

$\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_Z$  – нормы в векторном евклидовом пространстве.

Задачу построения адекватных математических моделей в алгебраической форме можно сформулировать таким образом: определить вектор  $z \in Z$ , который при подстановке в уравнение (7) дает вектор  $A_p z$ , который отличается по норме от  $u_{\delta_1}$  на величину меньшую  $\delta_1$ .

Примером задачи синтеза является задача построения линейной алгебраической математической модели процесса выплавки стали с заданными компонентами [3, 4]. Этот процесс является циклически устойчивым и допускает описание с помощью линейной математической модели в малой окрестности выбранной точки в области переменных. Начальными данными для расчета были выбраны данные из работы [5] о химическом составе, параметрах термообработки и прочности стали, которые представлены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для расчетов

$N/N$	$C$ $q_2 \times 10$	$Si$ $q_3 \times 10$	$Mn$ $q_4 \times 10$	$P$ $q_5 \times 100$	$S$ $q_6 \times 10$ 0	$Cr$ $q_7 \times 10$	$Ni$ $q_8 \times 10$	$Cu$ $q_9 \times 10$ 0	$Ti$ $q_{10} \times 10$	$\sigma$ $q_1$
1	6,1	3,2	6,8	0,7	1,3	0,7	0,5	2,8	0,8	990
2	4,6	3,3	7,1	1,0	0,8	2,2	0,6	2,5	0,7	917
3	5,2	3,3	7,0	0,5	0,5	1,8	0,5	2,2	0,9	915
4	6,0	3,0	8,0	0,9	0,9	0,8	0,5	2,3	0,9	1049
5	5,7	3,3	8,4	0,6	0,5	0,7	0,5	2,4	0,8	1039
6	6,6	3,3	7,3	0,8	0,7	1,9	0,5	1,9	0,6	1156
7	6,8	3,2	7,6	1,0	1,0	1,9	1,2	2,7	0,5	1147
8	6,7	2,9	7,6	1,4	1,1	1,8	1,3	2,4	0,6	1166
9	6,6	3,3	7,9	0,9	1,3	1,8	1,2	2,2	0,5	1186
10	6,5	3,5	7,9	0,9	1,2	1,8	1,3	2,5	0,6	1186

В табл. 1 были приняты следующие обозначения (для химического состава стали состав элементов даны в массовых процентах):  $C(q_2)$  – количество углерода;  $Si(q_3)$  – количество кремния;  $Mn(q_4)$  – количество марганца;  $P(q_5)$  – количество фосфора;  $S(q_6)$  – количество серы;  $Cr(q_7)$  – количество хрома;  $Ni$

$(q_8)$  – количество никеля;  $Cu (q_9)$  – количество меди;  $Ti (q_{10})$  – количество титана;  $\sigma (q_1)$  – предел прочности стали в МПа.

Для решения системы (7) применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова [3, 4].

Выбор параметра регуляризации проводился методом невязки и получена величина  $\alpha = 0.317$ .

Решение системы (7) при этом имеет вид:

$$z = (1086; 1731; -166; 8.67; -1448; -25.3; 10.98; -82.43; -31.1; 12.0)^T.$$

В результате получена следующая линейная математическая модель процесса выплавки стали:

$$q_1 = 1086q_2 + 1731q_3 - 166q_4 + 8,7q_5 - 1448q_6 - 25,3q_7 + 11q_8 - 82,4q_9 - 31,1q_{10} + 12,0.$$

Для дополнительной проверки адекватности полученной математической модели в алгебраической форме был выполнен расчет показателя  $q_1^M$  согласно модели с каждым из 10 экспериментов и выполнено сравнение с реальным показателем  $q_1$  (см. табл. 1).

$$q_1^M = (1024.7, 978.2, 1000.9, 1065.8, 1067.2, 1090.9, 1122.3, 1113.8, 1123.9, 1120.9)^T.$$

$$q_1^{табл} = (990; 916; 915; 1049; 1039; 1156; 1147; 1166; 1186; 1186)^T.$$

На основе данных (см. табл. 1) построена математическая модель (множественная регрессия) методом наименьших квадратов. Модель имеет следующий вид:

$$q_1 = -396125q_2 - 28293,85q_3 - 624110q_4 + 309267q_5 + 11102177,5q_6 - 5688042q_7 - 948137q_8 - 1636719q_9 + 21092993q_{10} - 4402668.$$

Аналогичным образом найдены значения последнего столбца согласно модели:

$$q_1^{МНК} = (90588.4, -5742, 146018.4, 1484.7, 97474.2, -59451, 46360, -47551., -61704.8, -40366.5)^T.$$

Проведенные расчеты показывают, что предлагаемый алгоритм идентификации параметров математической модели в алгебраической форме дает адекватную модель с коэффициентами, которые устойчивы к малым изменениям исходных данных. Такие математические модели могут быть использованы для прогнозирования поведения процесса. С этой целью для нескольких малых окрестностей области изменения параметров физического процесса синтезируются свои адекватные модели, далее их параметры экстраполируются (интерполируются) на новые окрестности области изменения параметров физического процесса и проводится математическое моделирование в новых условиях без использования экспериментальных данных в этих условиях. Классический метод наименьших квадратов не позволяет гарантировано синтезировать адекватные математические модели.

#### Выводы

В работе предложен один из возможных алгоритмов идентификации параметров адекватной локальной линейной математической модели описания на примере динамической системы, движение которой описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

#### Список использованной литературы

1. Kuchuk F. J. Pressure Transient Formation and Well Testing. Dev. in Petr. Science / F.J. Kuchuk, M. Onur, F. Hollaender.— Elsevier Science, USA, 2010. — Vol. 57. — 414 p.
2. Алексанян И.Ю. Математическое моделирование тепло-массо-переноса при распылительной сушке растительных экстрактов / И.Ю. Алексанян, Ю.А. Максименко, Ю.С. Феклунова // Вестник Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ. — 2013. — № 1. — С. 9–13.
3. Menshikov Yu.L. Identification of Mathematical Model Parameters of Stationary Process / Yu.L. Menshikov // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2014. — Vol.2. — № 5. — PP. 189–193.
4. Menshikov Yu.L. Features of Parameters Identification of Algebraic Mathematical Models / Yu.L. Menshikov // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT). — 2014. — Vol. 4. — № 5. — 5 p.
5. Тогобицкая Д.Н. Информационно-математическое обеспечение оценки влияния химического состава на свойства колесной стали / Д.Н. Тогобицкая, А.И. Бабаченко, А.С. Козачек и др. // Наукові вісті. Сучасні проблеми металургії. — Дніпропетровськ: НМетау, 2013. — №16. — С. 51–56.

УДК 004.942

В.Ф. МИРГОРОД

АО“Элемент”

И.М. ГВОЗДЕВА

Национальный университет “Одесская морская академия”

Е.В. ДЕРЕНГ

Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ВОЛЬТЕРРЫ С СЕПАРАБЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ**

*Предлагается и обосновывается подход к исследованию свойств динамических объектов, представленных математическими моделями в виде систем интегральных уравнений Вольтерры II-го рода. Подход основан на нахождении резольвентных решений систем интегральных уравнений с сепарабельными ядрами. Рассмотрено преобразование системы интегральных уравнений к системе эквивалентных дифференциальных уравнений. Установлена взаимосвязь резольвентных решений интегральных уравнений и фундаментальных решений эквивалентных дифференциальных уравнений. Построена математическая модель газотурбинного двигателя в виде системы интегральных уравнений Вольтерры II-го рода.*

*Ключевые слова: математическая модель, система интегральных уравнений, эквивалентное преобразование, резольвента.*

В.Ф. МИРГОРОД

ВАТ“Елемент”

І.М. ГВОЗДЕВА

Національний університет “Одеська морська академія”

Є.В. ДЕРЕНГ

Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины

**АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ СИСТЕМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ З  
СЕПАРАБЕЛЬНИМИ ЯДРАМИ**

*Пропонується і обґрунтовується підхід до дослідження властивостей динамічних об'єктів, представлених математичними моделями у вигляді систем інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду. Підхід заснований на встановленні резольвентних рішень систем інтегральних рівнянь із сепарабельними ядрами. Розглянуто перетворення системи інтегральних рівнянь до системи еквівалентних диференціальних рівнянь. Встановлений взаємозв'язок резольвентних рішень інтегральних рівнянь і фундаментальних рішень еквівалентних диференціальних рівнянь. Побудована математична модель газотурбінного двигуна у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду.*

*Ключові слова: математична модель, система інтегральних рівнянь, еквівалентне перетворення, резольвента.*

V.F.MYRHOROD

Limited Company “Element”

I.M.HVOZDEVA

National university “Odessa maritime academy”

E.V. DERENH

Pukhov's Institute of Simulation Problems in Power NAS Ukraine

**ANALYTICAL SOLUTIONS OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS SYSTEMS WITH  
SEPARABLE KERNELS**

There is offered and grounded the approach to investigation of properties of dynamic objects, presented by mathematical models as systems of Volterra integral equations of the second kind. The approach is based on finding the resolvent solutions of systems of Volterra integral equations of the second kind with separable kernels. The transformation of integral equations system to the system of equivalence differential equations is considered. The interconnection of resolvent solutions of integral equations and fundamental solutions of equivalent differential equations is determined. The mathematical model of gas turbine engine as a system of Volterra integral equations of the second kind is developed.

Keywords: mathematical model, the system of integral equations, equivalent transformation, resolvent.

**Введение**

Проблемным вопросом построения математических моделей (ММ) динамических объектов, предназначенных для реализации в системах управления и диагностики реального времени, является отыскание компромисса между необходимой точностью и вычислительной сложностью. Важная научно-прикладная задача состоит в расширении возможных форм математического описания процессов изменения управляемого состояния динамических объектов для отыскания таких из них, которые при сохранении адекватности реальным процессам позволили бы упростить их численную реализацию.

Известные преимущества интегральных моделей, в частности интегральных уравнений Вольтерры II-го рода и их систем, определяют необходимость и практическую значимость рассмотрения методов отыскания различных форм их аналитических решений на основе решения соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

**Постановка проблемы и цель исследования**

Теории интегральных уравнений (ИУ) посвящены ряд фундаментальных работ [1–3]. В справочной литературе [3,4] детально рассмотрены методы и алгоритмы вычислительной реализации, соответствующие программные средства. Аналитические решения уравнения для резольвенты описаны только для ряда частных случаев [1–3]. Обобщения решения уравнения для резольвенты [5,6] предложены для ряда важных прикладных задач. Необходимость численной реализации ММ непосредственно в составе систем реального времени требует систематического рассмотрения вопросов отыскания аналитических решений интегральных уравнений, применяемых в качестве математических моделей исследуемых объектов. В первую очередь это касается интегральных уравнений Вольтерры II-го рода, имеющих широкую область применения в прикладных задачах и для которых разработаны эффективные методы численного решения [3].

Целью настоящего исследования является разработка методов аналитического решения систем интегральных уравнений Вольтерры II-го рода с сепарабельными ядрами на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

**Основные результаты**

Рассмотрим систему ИУ Вольтерры II-го рода с сепарабельным ядром

$$\vec{y}(x) = \vec{f}(x) + \int_a^x K(x, s) \vec{y}(s) ds = \vec{f}(x) + C(x) \int_a^x B(s) \vec{y}(s) ds, \tag{1}$$

где  $\dim(\vec{y}(x)) = \dim(\vec{f}(x)) = n$ , строки матрицы  $C(x)$  и столбцы матрицы  $B(x)$  являются системами линейно независимых функций [1,3]. Эквивалентная (1) система дифференциальных уравнений устанавливается введением вектор-функции

$$\vec{\omega}(x) = \int_a^x B(s) \vec{y}(s) ds, \tag{2}$$

и соответствующего линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\vec{\omega}(x)}{dx} = B(x) \vec{y}(x), \tag{3}$$

с нулевыми начальными условиями.

Из (1) получим

$$\vec{y}(x) = \vec{f}(x) + C(x) \vec{\omega}(x).$$

Согласно (3)

$$\frac{d\vec{\omega}(x)}{dx} = B(x) [C(x) \vec{\omega}(x) + \vec{f}(x)] = B(x) C(x) \vec{\omega}(x) + B(x) \vec{f}(x).$$

Из приведенных выражений следует, что система ИУ (1) при условии (2) эквивалентно матричному дифференциальному уравнению в виде математической модели пространства состояний (ММПС)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}(x)}{dx} &= A(x) \vec{\omega}(x) + B(x) \vec{f}(x) \\ \vec{y}(x) &= C(x) \vec{\omega}(x) + D(x) \vec{f}(x), \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

где  $A(x) = B(x)C(x)$ , и  $D(x) = E$ .

Из (1) и (4) следует, что для обеспечения существования и единственности решения (4) матрицы  $C(x)$  и  $B(x)$  должны быть квадратными при дополнительном условии, что строки матрицы  $C(x)$  и

столбцы матрицы  $B(x)$  являются системами линейно независимых функций. Проведенные преобразования дают основание сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение.** Если в системе интегральных уравнений Вольтерры II-го рода (1) матричное ядро является сепарабельным вида

$$K(x, s) = C(x)B(s),$$

и, кроме того, строки матрицы  $C(x)$  и столбцы матрицы  $B(x)$  являются системами линейно независимых функций, то решением уравнения для резольвенты

$$R(x, s) = K(x, s) + \int_s^x K(x, \lambda)R(\lambda, s)ds, \quad (5)$$

является функция

$$R(x, s) = C(x)F(x, s)B(s),$$

где  $F(x, s)$  представляет собой фундаментальную матрицу – решение следующего дифференциального уравнения

$$\frac{dF'(s, x)}{dx} = -B(x)C(x)F(s, x) = -A(x)F(s, x) \quad (6)$$

с начальным условием, равным единичной матрице.

**Необходимость** приведенных утверждений следует из подстановки ядра и резольвенты в (5)

$$C(x)F(x, s)B(s) = C(x)B(s) + C(x) \int_s^x B(\lambda)C(\lambda)F(\lambda, s)d\lambda B(s). \quad (7)$$

Необходимым условием для выполнения равенства (6) является следующее условие

$$F(x, s) = E + \int_s^x B(\lambda)C(\lambda)F(\lambda, s)d\lambda = 0. \quad (8)$$

Выражения (6) и (8) являются эквивалентными формами уравнения для фундаментальной матрицы, что и устанавливает необходимость представленного Утверждения.

Таким образом, эквивалентной формой системы интегральных уравнений Вольтерры II-го рода (1) с сепарабельными ядрами являются дифференциальные уравнения динамической системы с векторным входом и векторным выходом в пространстве состояний (4), решение которых, и, следовательно, решение системы (1) имеет вид

$$\vec{y}(x) = \vec{f}(x) + \int_a^x R(x, s)\vec{f}(s)ds = \vec{f}(x) + C(x) \int_a^x F(x, s)B(s)\vec{y}(s)ds,$$

где матрица  $F(x, s)$  определяется решением (6).

**Достаточность** в общем случае следует из единственности решения системы интегральных уравнений (1). Если решение (5) не единственно, а имеется два решения  $R_1(x, s)$  и  $R_2(x, s)$  то они оба должны удовлетворять уравнению (5)

$$R_1(x, s) = K(x, s) + \int_s^x K(x, \lambda)R_1(\lambda, s)ds,$$

$$R_2(x, s) = K(x, s) + \int_s^x K(x, \lambda)R_2(\lambda, s)ds,$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем следующее интегральное уравнение

$$R_1(x, s) - R_2(x, s) = K(x, s) + \int_s^x K(x, \lambda)[R_1(\lambda, s) - R_2(\lambda, s)]ds,$$

Полученное уравнение является интегральным уравнением Вольтерры I-го рода, которое, как известно [1], имеет только нулевое решение, следовательно,  $R_1(x, s) = R_2(x, s)$ .

**Пример.** Исходной гипотезой для построения ММ установившихся режимов газотурбинного двигателя (ГТД) является предположение, согласно которому энергетический параметр двигателя в виде степени повышения давления, определяющей тяговые характеристики ГТД, связан с оборотами его турбин зависимостью вида

$$\pi_k(G_t) = \sum_{i=1}^N a_{1i}(G_t)n_i(G_t), \quad (9)$$

а градиенты оборотов турбин по расходу топлива, в свою очередь, определяются этим энергетическим параметром

$$\frac{dn_i(G_t)}{dG_t} = b_{1i}(G_t)\pi_k(G_t), i = \overline{1, N}. \quad (10)$$

где  $\{a_{1i}(G_t)\}, \{b_{1i}(G_t)\}$  – системы линейно независимых функций.

Из соотношений (9) и (10) непосредственно следует эквивалентная ММ в виде интегрального уравнения Вольтерры II-го рода с сепарабельным ядром

$$\pi_k(G_t) = \sum_{i=1}^N a_{1i}(G_t)n_i(G_{nt}) + \sum_{i=1}^N a_{1i}(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} b_{1i}(s)\pi_k(s) ds \quad (11)$$

Идентификация ММ (11) выполнена по статическим характеристикам и базам данных испытаний трехвального двигателя и дала приемлемые результаты [7]. Среднеквадратическое отклонение по основным параметрам (переменным) двигателя не превышает 1.5 %.

Преимущества ММ (11) представляются достаточно значительными: основные характеристики двигателя определяются небольшой совокупностью линейно независимых функций, которые имеют ясное физическое содержание и довольно несложно определяются по экспериментальным данным.

Сформируем аналогичную ММ по температурному режиму ГТД.

$$T_g(G_t) = \sum_{i=1}^N a_{2i}(G_t)n_i(G_{nt}) + \sum_{i=1}^N a_{2i}(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} b_{2i}(s)T_g(s) ds \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) являются независимыми, что не отражает физическую сущность явлений в исследуемом объекте. Уточнение приведенных ММ предлагается в виде системы ИУ Вольтерры II-го рода

$$\left. \begin{aligned} \pi_k(G_t) &= \sum_{i=1}^N a_{1i}(G_t)n_i(G_{nt}) + \sum_{i=1}^N a_{1i}(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} b_{1i}(s)\pi_k(s) ds + \alpha_1(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} \beta_1(s)T_g(s) ds, \\ T_g(G_t) &= \sum_{i=1}^N a_{2i}(G_t)n_i(G_{nt}) + \sum_{i=1}^N a_{2i}(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} b_{2i}(s)T_g(s) ds + \alpha_2(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} \beta_2(s)\pi_k(s) ds, \end{aligned} \right\}, (13)$$

которая отражает взаимозависимость степени повышения давления и температурного режима двигателя.

**Заключение.** Предлагаемый подход к установлению решений некоторых типов систем интегральных уравнений Вольтерра II-го рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту, дает возможность исследовать новые классы решений таких уравнений с различной правой частью.

#### Выводы и перспективы дальнейших исследований

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением класса возможных типов систем интегральных уравнений Вольтерры II-го рода, для которых могут быть получены аналитические решения уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

#### Список использованной литературы

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т. 4. – Ч. 1. – 336 с.
2. Забрейко П.П. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
3. Верлань А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Техника, 1986. – 700 с.
4. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – К.: Наук. Мысль, 1986. – 584 с.
5. Миргород В.Ф. Обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра второго рода / В.Ф. Миргород // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 68–80.
6. Миргород В.Ф. Эквивалентные преобразования интегральных и дифференциальных математических моделей / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева // Матер. междунар. научн. конф. “Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта”. – 18-22 мая 2009. – 2009. – Евпатория – Т. 1. – С. 88–91.
7. Миргород В. Ф. Модальная и интегральная формы математических моделей газотурбинных двигателей / В.Ф. Миргород, В.М. Грудинкин // Вестник двигателестроения. – 2008. – № 3. – С. 185–189.

УДК 519.6

М.Р. ПЕТРИК, Д.М. МИХАЛИК, О.Ю.ПЕТРИК  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя  
М.І. ШИНКАРИК  
Тернопільський національний економічний університет

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДВОКОМПОНЕНТНОЇ ДЕСОРБЦІЇ В НАНОПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

*Розглянуто проблему математичного моделювання та дослідження кінетики десорбції в нанопористому середовищі, яка враховує масоперенос на двох рівнях – на рівні між частинками середовища та в самих частинках. Побудовано точний аналітичний розв'язок з використанням операційного числення. Проведено числове моделювання основних кінетичних параметрів процесу двокомпонентної десорбції.*

*Ключові слова: математичне моделювання, десорбція, кінетичні параметри, інтегральні перетворення*

М.Р. ПЕТРИК, Д.М. МИХАЛИК, О.Ю.ПЕТРИК  
Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя  
М.И. ШИНКАРИК  
Тернопольский национальный экономический университет

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ДЕСОРБЦИИ В НАНОПОРИСТОЙ СРЕДЕ

*Рассмотрена проблема математического моделирования и исследования кинетики десорбции в нанопористых среде, которая учитывает массоперенос на двух уровнях - уровне между частицами среды и в самих частицах. Построено точное аналитическое решение с использованием операционного исчисления. Проведено численное моделирование основных кинетических параметров процесса двухкомпонентной десорбции.*

*Ключевые слова: математическое моделирование, десорбция, кинетические параметры, интегральные преобразования*

M.R. PETRYK, D.M. MYKHALYK, O.Y.PETRYK  
Ternopil National Ivan Pul'uj Technical University  
M.I. SHYNKARYK  
Ternopil National Economic University

### MATHEMATICAL MODELING OF BINARY DESORPTION IN NANOPOROUS MEDIA

*The problem of mathematical modeling of desorption kinetics in nanoporous medium, which take into account mass transport on two levels - the level of protection between the particles and in the particles itself has been studied. An exact analytical solution using operational calculus has been build. Numerical modeling of the main kinetic parameters of the two-desorption process has been conducted.*

*Keywords: mathematical modeling, desorption, kinetic parameters, integral transforms*

#### Постановка проблеми

Створення сучасних ресурсо- та енергозберігаючих технологій в галузі хімічної, фармацевтичної, харчової промисловостей ставить ряд задач по вивченню процесів десорбції матеріалів. Нестационарної процес десорбції в насиченому молекулами сорбату порах адсорбенту є зворотнім до адсорбції ним вхідного потоку газу чи рідини і відбувається за рахунок внутрішніх градієнтів концентрацій в мікро- і макропорах сорбенту, як правило нагрітого до температури, що забезпечує режим протікання десорбції. Опис кінетики в значній мірі опирається на використанні подібності елементів уявлень кінетики адсорбції [1]. Маючи якісно розроблену математичну модель адсорбції, можна скористатись основними балансовими рівняннями, враховуючи основні напрями переносу субстанції, специфіку початково-крайових умов та умов рівноваги, можна у такий спосіб отримати якісну модель десорбції. Основними припущеннями побудови моделі десорбції на основі інтегральної схематизації процесу та ленгмюрівською ізотермою десорбції є наступні: десорбований потік газу рухається вздовж координати товщини нанопористого каталітичного середовища, попередньо нагрітого до температури десорбції, що відповідає десорбційній здатності адсорбційного каталізатора; здійснюється вздовж товщини пласти нанопористого середовища; десорбційний перенос адсорбтиву здійснюється за законом Фіка-Нернста; фазовий перехід адсорбтиву із простору мікро- і нанопорів середовища в міжчастинковий простір має рівноважний характер і визначається на основі опуклої ізотерми десорбції Ленгмюра.



**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Дослідження, що проводяться у цій області, як правило розглядають молекулярний транспорт окремих речовин в пористому середовищі, зумовлений масопереносом на макрорівні без врахування істотного впливу ефектів і особливостей мікро- і нанопереносу в частинках [2-4], які, як відомо, є лімітуючим і визначальним фактором загальної кінетики [2]. При цьому, головні проблеми міжмолекулярної взаємодії, що мають місце в реальних системах багатокомпонентної дифузії речовин, зважаючи на принцип Ленгмюра-Хіншенвуда [2], практично не досліджені. В попередніх працях авторів розроблено математичні моделі, методи числового моделювання та ідентифікації кінетичних параметрів для процесів адсорбції в цеолітних нанопористих середовищах [5-8].

**Мета роботи**

Метою роботи є математичне моделювання двокомпонентної десорбції в нанопористому середовищі з врахуванням як міжчастинкового масопереносу, так і ефекту масопереносу в порах частинок.

**Постановка задачі**

Розглядається складна система масопереносу двох дифундованих компонент в каталітичному середовищі мікрочастинок нанопористої структури. Процеси дифузії в таких системах визначаються двома типами масопереносу: дифузія в макропори в міжчастинковому просторі (intercrystallite space), і дифузією в мікро- і нанопорах частинок - кристалітів (intraparticle space). Нанопористий шар товщиною  $l$  складається з великої кількості пористих частинок, що розглядаються як мікроструктури сферичної форми радіуса  $R$  ( $0 < R < l < \infty$ ), які містять компоненти адсорбату (рис.1). Процес дифузії для двох газів здійснюється в осьовому напрямку  $z$  простору макропор (від  $l$  до  $0$ ) і в радіальному просторі мікропор для кожної частки (від  $R$  до  $0$ ). Приймаються такі допущення: градієнти концентрацій у макропорах і мікропорах еволюють до настання рівноваги; теплові ефекти є незначними; дифузія відбувається за законом Генрі; всі нанопористі частинки мають однаковий розмір і є щільно упаковані для кожного шару середовища [1-3].

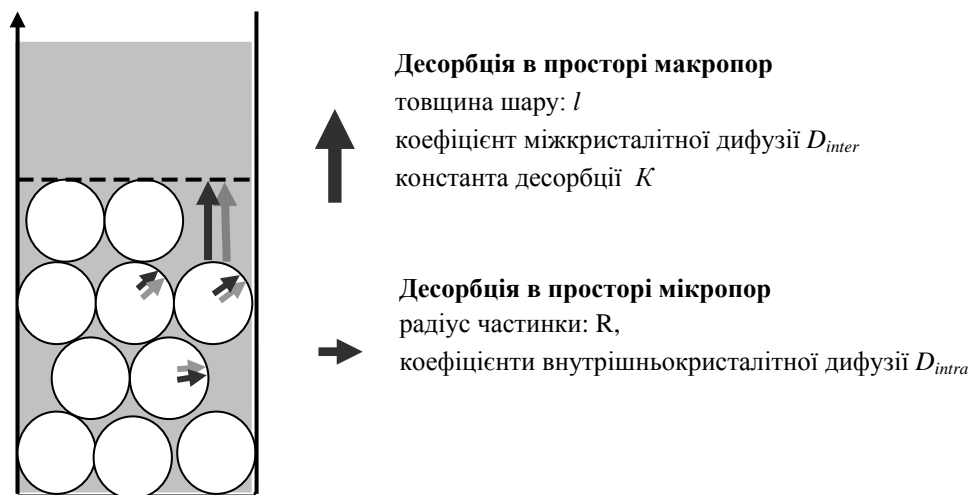


Рис. 1 Схематизація двокомпонентної десорбції в середовищі пористих частинок

Математична модель, що описує кінетику десорбції газів в розглядуваній системі з урахуванням зазначених фізичних факторів може бути описана, як наступна задача.

На областях  $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$ ,  $(\Omega = (0, L), 0 < L = 1)$  концентрації  $C_s(t, Z)$ ,  $Q_s(t, X, Z)$ , задовольняють системі рівнянь в частинних похідних

$$\frac{\partial C_s(t, Z)}{\partial t} = \frac{D_{inter_s}}{l^2} \frac{\partial^2 C_s}{\partial Z^2} + e_{inter} K_s \frac{D_{intra_s}}{R^2} \left( \frac{\partial Q_s}{\partial X} \right)_{X=l}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q_s(t, X, Z)}{\partial t} = \frac{D_{intra_s}}{R^2} \left( \frac{\partial^2 Q_s}{\partial X^2} + \frac{2}{X} \frac{\partial Q_s}{\partial X} \right) \tag{2}$$

Початкові умови

$$C_s(t=0, Z) = 1; \quad Q_s(t=0, X, Z) = Q_{s\infty}; \quad X \in (0, 1), Z \in \Omega, \tag{3}$$

Крайові умови для концентрацій  $C_s$

$$C_s(t, l) = 0, \quad \frac{\partial C_s}{\partial Z}(t, Z = 0) = 0, \quad t \in (0, T); \quad (4)$$

Крайові умови для кожної точки  $(Z, t) \in \Omega_T$  для концентрацій  $Q_s$  по радіусу частинки  $X$  :

$$\frac{\partial}{\partial X} Q_s(t, X = 0, Z) = 0 \quad (\text{умова симетрії}), \quad (5)$$

$$Q_s(t, X = l, Z) = C_s(t, Z) \quad (\text{умова рівноваги}), \quad t \in (0, T), \quad Z \in \Omega; \quad (6)$$

Рівняння (1) описує масоперенос в просторі макропор, а рівняння (2) – дифузію в просторі мікропор сферичних складових частинок з радіусом  $R$  і центром в точці  $Z \in \Omega$ .

Точний аналітичний розв'язок задачі (1)-(6) (для моделювання концентрацій в припущенні, що коефіцієнти  $D_{intra_s}$ ,  $D_{inter_s}$  є відомі) можна побудувати з використанням операційного методу Гевісайда [9].

В припущенні що шукані функції  $C_s$  і  $N_s$  ( $N_s = X \cdot Q_s$ ), як розподіли концентрацій від часу та координати є оригіналами по Лапласу, то розв'язок рівняння (2) в зображеннях матиме вигляд [10]

$$N_s^*(p, X, Z) = C_s^*(p, Z) \frac{\operatorname{sh}\left(R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}X\right)}{\operatorname{sh}\left(R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}\right)} + \int_0^1 E_s^*(p, X, \zeta) Y_s(1/2) d\zeta, \quad s = \overline{1, 2}, \quad (7)$$

де функція впливу Коші має вигляд:

$$E_s^*(p, X, \zeta) = \frac{1}{R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}} \begin{cases} \operatorname{sh}\left(R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}(1-\zeta)\right) \frac{\operatorname{sh}\left(R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}X\right)}{\operatorname{sh}\left(R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}\right)}, & 0 < X < \zeta < 1 \\ \operatorname{sh}\left(R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}(1-X)\right) \frac{\operatorname{sh}\left(R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}\zeta\right)}{\operatorname{sh}\left(R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}\right)}, & 0 < \zeta < X < 1 \end{cases} \quad (8)$$

Повертаючись в (8) до оригіналу за Лапласом з використанням теореми Гевісайда про розвинення в ряд, отримаємо [9]:

$$E_s(t, X, \zeta) = L^{-1}[E_s^*(p, X, \zeta)] = \frac{2D_{intra_s}}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{cases} (-1)^{k+1} \sin(\eta_k(1-\zeta)) \sin(\eta_k X) e^{-D_{intra_s} \eta_k^2 t}, & 0 < \zeta < X < 1 \\ (-1)^{k+1} \sin(\eta_k(1-X)) \sin(\eta_k \zeta) e^{-D_{intra_s} \eta_k^2 t}, & 0 < X < \zeta < 1 \end{cases}, \quad (9)$$

де  $\eta_k = k\pi$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ .

Роблячи підстановку отриманого розв'язку  $N_s(p, X, Z)_{X=l} = C_s(p, Z)$  в рівняння для міжчастинкової десорбції отримаємо:

$$\frac{d^2 C_s^*}{dZ^2} - \gamma_s^2(p) C_s^* = -\frac{l^2}{D_{inter_s}} C_{s\infty}(Z), \quad (10)$$

$$\gamma_s^2(p) = \frac{3}{e_{inter}} \frac{l^2}{R^2} \frac{D_{intra_s}}{D_{inter_s}} \left( \frac{e_{inter}}{3} \frac{R^2}{D_{intra_s}} p - R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}} \operatorname{cth}\left(R\sqrt{\frac{p}{D_{intra_s}}}\right) + 1 \right). \quad (11)$$

Загальний розв'язок рівняння (10) з врахуванням крайових та початкових умов має вигляд [9]:

$$C_s^*(p, Z) = -\frac{l^2}{D_{inter_s}} \int_0^1 K_s^*(p, Z, \xi) C_{s\infty}(\xi) d\xi, \quad s = \overline{1, 2}. \quad (12)$$

де  $K_s^*(p, Z, \xi)$  - функція Коші

Повертаючись в (12) до оригіналу за Лапласом з використанням теореми Гевісайда про розвинення в ряд, отримаємо [9]:

$$K_s(t, Z, \xi) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{D_{int r a_s}}{R^2} \tilde{\beta}_k^2 t} \sin(\gamma_s(\tilde{\beta}_k)(1-\xi)) \cos(\gamma_s(\tilde{\beta}_k)Z)}{\cos(\gamma(\tilde{\beta}_k)) \tilde{\gamma}(\tilde{\beta}_k)}, & 0 < Z < \xi < 1 \\ -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{D_{int r a_s}}{R^2} \beta_{jn}^2 t} \sin(\gamma_s(\beta_{jn})(1-Z)) \cos(\gamma_s(\beta_{jn})\xi)}{(2n-1)(-1)^n \tilde{\gamma}(\beta_{jn})}, & 0 < \xi < Z < 1 \end{cases} \quad (13)$$

тут  $\tilde{\beta}_k, k = \overline{1, \infty}$  є коренями трансцендентного рівняння  $\frac{e_{inter}}{3} \beta^2 - \beta \operatorname{ctg} \beta + 1 = 0$ ,

В результаті, розв'язок задачі (1)-(6) для функції  $C_s(t, Z)$  набуде вигляду:

$$C_s(t, Z) = \frac{l^2}{D_{inter_s}} \int_0^1 K_s(t, Z, \xi) C_{s_0}(\xi) d\xi, \quad s = \overline{1, 2}. \quad (14)$$

Тоді, функцію  $Q_s$ , зважаючи, що  $N_s = X \cdot Q_s$ , можна записати у вигляді

$$N_s(p, X, Z) = C_s(p, Z) \frac{l^2}{D_{inter_s}} \int_0^1 K_s(t, Z, \xi) \frac{\sin(\beta X)}{\sin(\beta)} C_{s_0}(\xi) d\xi + \int_0^1 E_s(p, X, \zeta) Y_s(1/2) d\zeta, \quad s = \overline{1, 2}, \quad (15)$$

де функції впливу Коші у міжчастинковому просторі  $E_s(p, X, \zeta)$  та внутрішньочастинковому просторі  $K_s(t, Z, \xi)$  для кожної із десорбованих компонент визначаються відповідно формулами (8) і (13) відповідно.

Таким чином, в результаті побудовано розв'язок прямої задачі багатокомпонентної десорбції (1)-(6), що визначається формулами (14) та (15).

### Висновки

Для математичної моделі десорбції, яка враховує масоперенос на двох рівнях – на рівні між частинками середовища та в самих частинках, побудовано точний аналітичний розв'язок з використанням методів операційного числення. Отриманий розв'язок моделі може бути використаний для задачі ідентифікації кінетичних параметрів десорбції, і зокрема дифузійних коефіцієнтів, що дозволить суттєво підвищити точність числового моделювання.

### Список використаної літератури

1. Золотарев П.П. О некоторых теоретических моделях кинетики сорбции и десорбции и их взаимосвязи // Сорбционные и хроматографические процессы. 2010. Т. 10. Вып. 6. С.853-863
2. Kärger, J. Diffusion fundamentals / Kärger, J., Grinberg F., Heitjans P. – Leipziger Unviersite, Leipzig, 2005. – 615p.
3. Gladen L.F., Mantle M.D. and Sederman J. Handbook of Heterogeneous Catalysis, 2nd Edition Eds: G. Ertl, H. Knözinger, F. Schüth, J. Weitkamp, Wiley-VCH, Weinheim. 2008.
4. N'Gokoli-Kekele P. An analytical study of molecular transport in a zeolite crystallite bed / N'Gokoli-Kekele P., Springuel-Huet, M.-A., Fraissard J. // Adsorption. – 2002. – 8(3). – P. 35-44.
5. Petryk M. Mathematical modeling and visualization of gas transport in a zeolite bed using a slice selection procedure / Petryk M., Leclerc S., Canet D., Fraissard J. // Diffusion Fundamentals. – 2007. – 4. – P. 11.1-11.23.
6. M. Petryk The Competitive Diffusion of Gases in a zeolite bed: NMR and Slice Procedure, Modelling and Identification of Parameters / M. Petryk, S. Leclerc, D. Canet, I.V. Sergienko, V.S. Deineka, J. Fraissard // The Journal of Physical Chemistry C. ACS (USA), 2015.- Vol. 119.- Issue 47. – 26519–26525.
7. Petryk M. Parameter Identification of Competitive Diffusion of Nanoporous Particles Media Using Gradient Method and the Heviside's Operational Method // Radioelectronics & Informatics Journal. – 2015. – Volume 68. – Issue 1. – P. 30–36. (IEEE, Computer Society USA, TTTC, ISSN).
8. Petryk M. et al. Mathematical Modeling and Research for Diffusion Process in Multilayer and Nanoporous Media. Fluid Transport in Nanoporous Materials.(W.C. CONNER and J. FRAISSARD, eds.), NATO Science Series, Series II : Mathematics, Physics and Chemistry, Springer Publishers, Netherlands – 2006 - vol. 219, P.685-655.
9. Лыков А.В. Тепломассообмен (Справочник).- М.: Энергия, 1971. - 560с.
10. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних і нанопористих середовищах / Ленюк М.П., Петрик М.Р. К. Наукова думка, 2000.– 372 с.

УДК 517.977.5:631.67

В.В. ПОЛИВОДА, Д.Г. ЛИТВИНЧУК, В.О. ГАВРИЛЕНКО  
Херсонський національний технічний університет**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИМІРЮВАННЯ ВОЛОГОСТІ В ЗЕРНОВІЙ МАСІ**

*Виконано аналіз методів вимірювання вологості зернової маси на хлібоприймальному підприємстві з точки зору можливості їх використання у процесі моделювання в сучасних системах керування технологічними процесами та системах прийняття рішень на хлібоприймальному підприємстві. Сформульовані цілі і задачі дослідження. Проведено моделювання процесу вимірювання вологості в зерновій масі за допомогою кондуктометричного методу, який використовується в сучасних експрес-аналізаторах вологості зерна.*

*Ключові слова: моделювання, вологість зернової маси, хлібоприймальне підприємство, система керування технологічними процесами, система прийняття рішень.*

В.В. ПОЛИВОДА, Д.Г. ЛИТВИНЧУК, В.А. ГАВРИЛЕНКО  
Херсонский национальный технический университет**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗМЕРЕНИЯ ВЛАЖНОСТИ В ЗЕРНОВОЙ МАССЕ**

*Выполнен анализ методов измерения влажности зерновой массы на хлебоприемных предприятиях с точки зрения возможности их использования в процессе моделирования в современных системах управления технологическими процессами и системах принятия решений на хлебоприемных предприятиях. Сформулированы цели и задачи исследования. Проведено моделирование процесса измерения влажности в зерновой массе с помощью кондуктометрического метода, который используется в современных экспресс-анализаторах влажности зерна.*

*Ключевые слова: моделирование, влажность зерновой массы, хлебоприемное предприятие, система управления технологическими процессами, система принятия решений.*

V.V. POLIVODA, D.G. LITVINCHUK, V.A. GAVRILENKO  
Kherson National Technical University**MODELING OF HUMIDITY MEASUREMENT PROCESS IN GRAIN**

*The paper gives a detailed analysis of methods for measuring humidity of grain on grain-enterprises from the point of view of the possibility of their use in the process of modelling in modern process control systems and decision-making systems at grain enterprises. The article describes the goals and tasks of the study. Much attention is given to modelling of humidity measurement process of grain by the conductometric method used in modern grain humidity express analyzers.*

*Keywords: modeling, grain humidity, grain-enterprise technological process control system, decision-making system.*

**Постановка проблеми**

Вологість є найважливішим показником якості зерна, тому її визначають при всіх технологічних операціях із зерном на хлібоприймальному підприємстві (ХПП) – прийомці, переміщенні, сушці, сепаруванні тощо [1]. Це пояснюється впливом води на життєдіяльність живих організмів, насамперед самого зерна і мікроорганізмів на його поверхні. Вологість характеризує кількість поживних речовин в зерні, а також його придатність до зберігання та переробки. Так, вологе зерно містить менше поживних речовин і непохитно при зберіганні. Зволоження активізує фізико-хімічні та фізіологічні процеси (дихання, проростання, розщеплення високомолекулярних біополімерів, активізація ферментів, набухання), все це ускладнює його зберігання та переробку. На поверхні вологого зерна починають швидко розвиватися мікроорганізми, також в зерновій масі збільшується число комах, кліщів та інших шкідників. Сукупність перерахованих процесів в зерні призводить до погіршення його якості і до його псування при зберіганні, в результаті при переробці збільшуються витрати енергії на дроблення зерна, знижується вихід і якість продукції, тому необхідно точно та швидко вимірювати важливий показник якості зерна – вологість [2].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Існують три групи методів визначення вологості: прямі і непрямі, а також комбіновані (рис. 1) [3]. Прямі методи ґрунтуються на визначенні втрати маси при сушінні (термічному, у високочастотному електричному полі, хімічному). Непрямі пов'язані з вимірюванням фізичних параметрів, що залежать від вологості (електропровідність, діелектричні втрати, діелектрична проникність).



Рис. 1. Методи визначення вологості зерна

Вимірювання вологості зерна на ХХП виконують згідно ГОСТ 13586.5–93 [4] за допомогою сушильної електричної шафи [5], проте цей метод дуже тривалий у часі, має відносно великі затрати енергії у порівнянні до інших методів вимірювання вологості, не виключається людський фактор при проведенні експерименту та розрахунках, що унеможливує використання цього методу в сучасних системах керування технологічних процесів (СКТП) на ХХП, у системах підтримки прийняття рішень (СППР) тощо. Тому використовують інші методи, наприклад вимірювання вологості зерна за допомогою експрес-аналізаторів [6, 7].

Доцільно розроблення нових методів вимірювання вологості, що базуються на непрямих методах.

#### Формулювання цілі дослідження

Ціллю дослідження є моделювання процесу вимірювання вологості у зерновій масі як задачі підсистеми контролю та прогнозування у СКТП та СППР зберігання зерна на ХПП.

Для досягнення поставленої цілі необхідно вирішити наступні основні задачі:

- виконати аналіз методів визначення вологості зернової маси;
- побудувати залежності для калібрування приборів експрес-аналізаторів вологості зерна;
- виконати моделювання процесу вимірювання вологості зерна за допомогою експрес-методу.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

При надходженні зерна на ХПП необхідно чітко знати, куди направляти ту чи іншу партію зерна: в зерносушарку, на зберігання в склад активного вентиляювання або в силос елеватора на тривале зберігання. При цьому необхідний експрес-метод, що дозволяє провести аналіз за декілька хвилин, інакше процес приймання зерна надзвичайно ускладнюється. Таким методом може бути визначення вологості за допомогою вологоміра зерна, який заміряє електропровідність зерна. Кількість води в зерні впливає на його електропровідність. В сухому стані воно виявляє властивості діелектрика, в той час як у вологому стає напівпровідником. У вологомірі зерно потрапляє в міжелектродний простір, через який пропускають електричний струм. Значення електропровідності зерна автоматично переводиться в значення вологості, виражене 0 відсотках, яке висвічується на цифровому табло приладу, весь процес займає всього 2-3 хв., що є великою перевагою даного методу. У вологомірі для вимірювання вологості зерна застосовується діелькометричний кондуктометричний метод – метод непрямого виміру вологості речовин, заснований на залежності діелектричної проникності цих речовин від їх вологості.

Основою електричних методів вимірювання вологості є залежність від параметрів вологості, що характеризують поведінку вологих матеріалів в електричних полях. Кондуктометричні методи засновані на вимірі електричної провідності матеріалу на постійному струмі і змінному струмі промислової або звукової частоти.

Прилад для вимірювання параметрів якості зернової маси – вологості та сорності – складається за таких блоків (рис. 2): датчик вологості, мікроконтролер, АЦП, датчик зображення, процесор управління, елементи вводу-виводу. Модуль вимірювання вологості зерна зображений на рис 3.

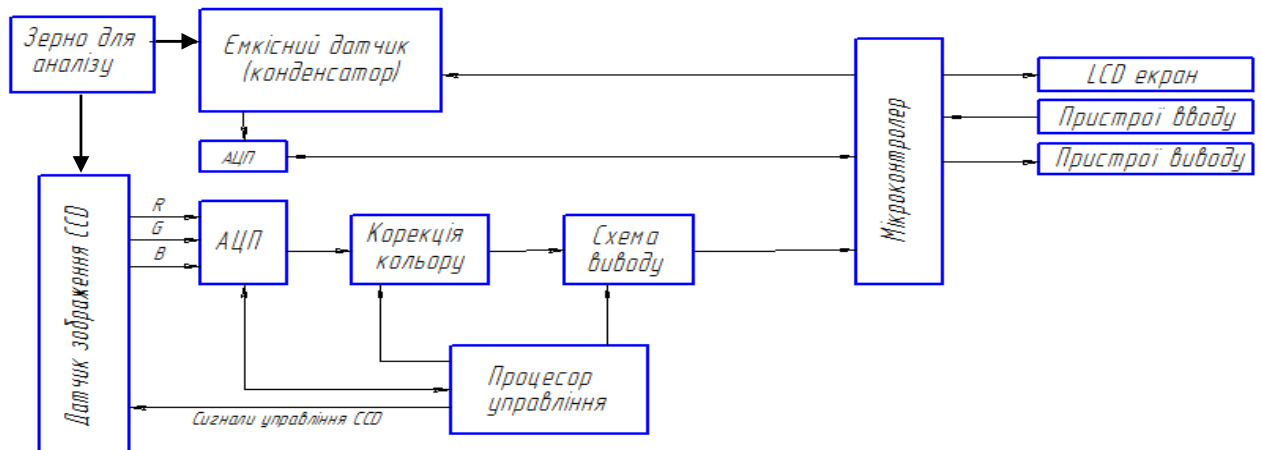
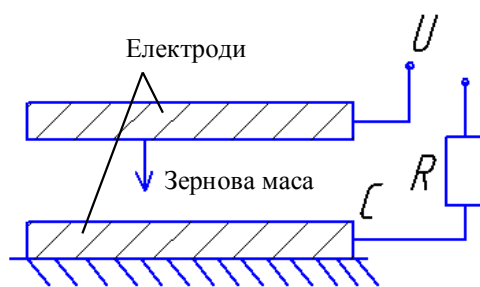


Рис. 2. Структурна схема приладу для вимірювання параметрів якості



а)

б)

Рис. 3. Модуль вимірювання вологості зерна:  
а – структурна схема вимірювача вологості; б – внутрішній вигляд модуля

Для випадку датчика вологості з використанням конденсатора з плоскими електродами площею  $S$ , розміщеними один від одного на відстані  $d$  в середовищі з діелектричною проникністю  $\epsilon$ , ємність виражається формулою:

$$C = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (1)$$

Вологовмісткі матеріали, будучи в сухому вигляді діелектриками, в результаті зволоження стають напівпровідниками. Питомий опір змінюється, отже, залежно від вологості в надзвичайно широкому діапазоні, що охоплює 12-18 порядків. Неоднорідність діелектрика, наявність у ньому води позначаються не тільки на величині питомої провідності, але і на якісних особливостях електропровідності: на її залежності від напруженості електричного поля і температури. Похибка ємкісних вологомірів відносно невелика та становить 0,2 ... 0,5%.

Таким чином, з точки зору економії часу і коштів ми приходимо до задачі обчислення наближених значень функції при будь-якому значенні аргументу на основі наявних табличних даних.

Це завдання вирішується шляхом наближеною заміни функції  $f(x)$  більш простою функцією  $\varphi(x)$ , яку неважко обчислювати при будь-якому значенні аргументу  $x$  в заданому інтервалі його зміни. Введену функцію можна використовувати не тільки для наближеного визначення чисельних значень  $f(x)$ , але й для проведення аналітичних розрахунків при теоретичному дослідженні моделі.

Наближення функції  $f(x)$  простішою функцією  $\varphi(x)$  називається апроксимацією. Апроксимуючу функцію  $\varphi(x)$  будують таким чином, щоб відхилення (в певному сенсі)  $\varphi(x)$  від  $f(x)$  в заданій області було найменшим. Поняття "малого відхилення" залежить від того, яким способом оцінюється близькість двох функцій.

Для того щоб провести апроксимацію, в лабораторії ПАТ "Херсонський комбінат хлібопродуктів", були проведені вимірювання вологості за допомогою вологоміра із застосуванням кондуктометричного методу. Бралися проби зерна, із заздалегідь відомою вологістю і засипалися в модуль для вимірювання вологості зерна та знімалися значення АЦП, які наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Результати експериментальних даних

Вологість зерна, %	11,1	11,1	11,1	11,9	11,9	11,9	12,2	12,2	12,2	12,5	12,5	12,5	13,1	13,1	13,1
Значення АЦП	344	345	344	368	370	368	379	383	380	399	402	396	431	432	432
	342	341	343	370	369	368	384	386	383	397	406	408	435	435	435
	347	347	347	375	370	375	384	379	384	396	414	400	433	437	436
	348	344	341			370	383	381	386	395	404	397	438	431	437
	345	345	348				379		384	394	405	407	434	435	434
	341	344					382		380	403	415	401	437	432	
		341								401	411	405	432	436	
											410				
										405					
Середнє арифметичне	345	343,9	344,6	371	370	370	382	382,3	383	398	408	402	434	434	434,8
Повне середнє арифметичне	344,31			370,41			382,3			402,6			434,36		

За допомогою програмного пакету Mathcad, знайдено функцію апроксимації вимірювання вологості та отриманий графік апроксимації (рис. 4).

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

$$a = -159,98355; \quad b = -1.2552482; \quad c = -0.0030822921; \quad d = 2,5550214 \cdot 10^{-6}. \tag{1}$$

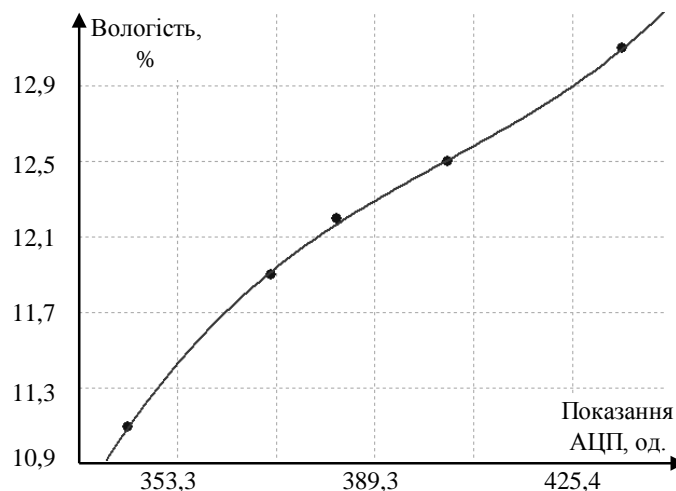


Рис. 4. Результат апроксимації отриманих вимірювань вологості

Зерно засипається в ємність, у якій знаходиться датчик вологості і через 1 секунду на LCD дисплеї відображається значення вологості в процентах. Результат відправляється у СКТП або СППР ХПП через термінальну програму: на рис 5,а зображено результати вимірювання вологості сухого зерна, яке відображається у відсотках (в дужках – значення датчика АЦП), а на рис. 5,б – вологого зерна.

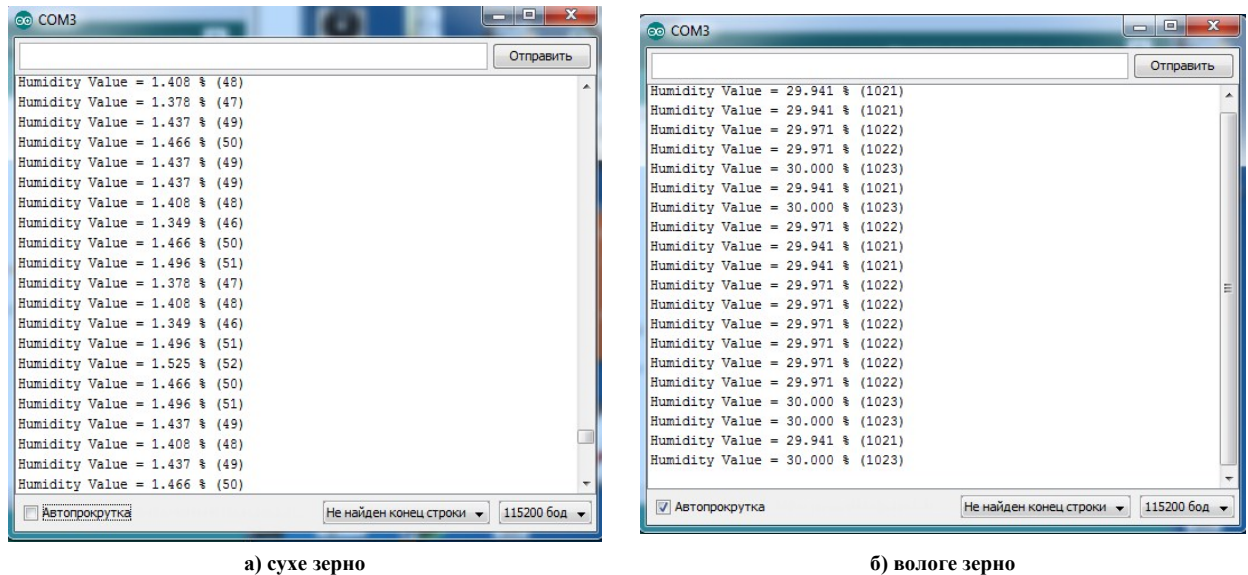


Рис. 5. Результати модулю для вимірювання вологості зерна

### Висновки

Моделювання процесу вимірювання вологості зерна показало, що вимірювання вологості зерна за допомогою кондуктометричного методу дозволяє використовувати його у системах керування технологічних процесів на хлібоприймальних підприємствах. Завдяки високій швидкодії, відносно невеликих затрат на обладнання, виключення людського фактору виникає можливість своєчасно фіксувати відхилення стану зернової маси від належного та оперативно приймати рішення щодо технологічних процесів зберігання зерна на ХПП.

### Список використаної літератури

1. Поливода В.В. Повышение эффективности контроля состояния зерновой массы при хранении / В.В. Поливода, А.М. Бражник // Проблемы інформаційних технологій. — 2010. — №1 (007). — С. 126—130.
2. Влияние влажности на качество зерна [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://agroportal.su/vlazhnost-zerna.html>.
3. Влажность зерна [Электронный ресурс] / Зооинженерный факультет МСХА. — Режим доступа: <http://www.activestudy.info/vlazhnost-zerna/>.
4. ДСТУ ISO 712:2015 (ISO 712:2009, IDT). Зернові та продукти з них. Визначення вмісту вологи. Контрольний метод. Чинний з 01.01.2016 за наказом Держспоживстандарту №208 від 25.12.2015. — К.: Держспоживстандарт України, 2015. — 15 с.
5. Шкаф сушильный электрический СЭШ-3М [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://zerno-ek.com/?page=catalog&cat=174>.
6. Измеритель влажности зерна Mini GAC [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.olis.com.ua/rus/izmeritel-vlazhnosti-zerna-mini-gac.html>
7. Влагомер зерна WILLE-55 [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.akwa.com.ua/vlagomer-zerna-wile-55.htm>.



УДК 629.439

В.А. ПОЛЯКОВ, Н.М. ХАЧАПУРИДЗЕ  
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины**МОДЕЛЬ ТЯГИ ЛИНЕЙНОГО СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ**

*Объектом исследования является тяговая сила линейного синхронного двигателя магнитолевитирующего поезда. Цель исследования – получение корректного описания реализации такой силы. Выявлены рациональные парадигмы исследования. Рассмотрены имеющиеся версии искомой модели. Описаны их достоинства и недостатки. Выбраны рациональные расчётные схемы элементов двигателя. При исследовании принята интегративная парадигма. Для упрощения модели введены адекватные допущения. Выражения для компонентов тяги найдены как силы Ампера. Описана электродинамика обмоток двигателя. Приведён пример, верифицирующий пригодность построенной модели.*

*Ключевые слова: магнитолевитирующий поезд, линейный синхронный двигатель, интегративная парадигма исследования.*

В.О. ПОЛЯКОВ, М.М. ХАЧАПУРИДЗЕ  
Институт транспортных систем та технологій НАН України**МОДЕЛЬ ТЯГИ ЛІНІЙНОГО СИНХРОННОГО ДВИГУНА**

*Об'єктом дослідження є тягова сила лінійного синхронного двигуна магнитолевитирующего поїзда. Ціль дослідження – одержання коректного опису реалізації такої сили. Виявлено раціональні парадигми дослідження. Розглянуто наявні версії шуканої моделі. Описано їхні достоїнства й недоліки. Обрано раціональні розрахункові схеми елементів двигуна. При дослідженні прийнята інтегративна парадигма. Для спрощення моделі введені адекватні припущення. Вирази для компонентів тяги знайдені як сили Ампера. Описано електродинаміку обмоток двигуна. Наведено приклад, який верифікує придатність побудованої моделі.*

*Ключові слова: магнитолевітуючий поїзд, лінійний синхронний двигун, інтегративна парадигма дослідження.*

V.A. POLYAKOV, N.M. HACHAPURIDZE  
Institute of Transport Systems and Technologies of Ukraine's National Academy of Sciences**MODEL OF LINEAR SYNCHRONOUS MOTOR'S TRACTION**

*A traction force of a magnetically levitated train's linear synchronous motor is the research object. To provide a correct description of such force's realization is the aim of research. The rational research paradigms have been revealed. The existing versions of the required model have been considered. Their advantages and disadvantages have been described. The rational design schemes of motor's components have been selected. The integrative paradigm has been adopted in the investigation. Adequate assumptions have been entered for model simplification. The expressions for the traction components were found as the Ampere's forces. The electrodynamic of motor's windings has been described. The example which verifies suitability of the constructed model is given.*

*Keywords: magnetically levitated train, linear synchronous motor, integrative research paradigm.*

**Анализ последних исследований и публикаций**

Во многих случаях для целей тяги магнитолевитирующих поездов (МЛП) целесообразно использовать линейные синхронные двигатели (ЛСД) [1]. Процессы, протекающие в их различных элементах, взаимосвязаны и являются частями единого суперпроцесса электромагнитно-механического энергопреобразования. Существенная сложность таких процессов побуждает исследователей к поиску путей сепаратного изучения их отдельных компонентов, ключевым из которых является электромагнитный. Его составляющие порознь с успехом могут изучаться [2] в рамках теорий электрических цепей, либо электромагнитного поля. Поэтому, различные версии математической модели (ММ) процесса тяги (ПТ) ЛСД МЛП строились [3, 4] исходя из указанных автономных парадигм его моделирования.

**Постановка проблемы**

Анализ свойств имеющихся версий ММ ПТ ЛСД МЛП свидетельствует о том, что каждая из них обладает как преимуществами, так и недостатками. Версия модели, исходящая из теории электрических цепей, достаточно функциональна. Но основным недостатком её уравнений является нестационарность их коэффициентов, вызываемая изменчивостью взаимных индуктивностей контуров фаз якоря, как между собой, так и с контурами возбуждения, при изменении положения муутера (подвижных частей ЛСД). Это снижает ценность версии, поскольку затрудняет моделирование [5]. Версия же модели, базирующаяся на

теории поля, менее ресурсоёмка, однако и менее практична – вследствие ограниченности её общности, вызываемой недостаточной адекватностью предпосылок построения этой версии.

**Формулирование цели исследования**

*Задача исследования.* Изложенное свидетельствует об актуальности создания ММ ПТ ЛСД МЛП, ассимилирующей достоинства имеющихся версий такой модели, но свободной от их недостатков [5, 6]. Синтез такой модели является основной задачей настоящей работы.

**Изложение основного материала исследования**

*Процесс исследования.* Тяга ЛСД является результатом взаимодействия неподвижных друг относительно друга магнитных полей токов его индуктора и якоря. Поэтому, при построении искомой ММ ПТ, в качестве его паттерна должен быть принят элементарный акт такого взаимодействия, который может быть описан выражением закона Ампера [7]:

$$f_{\lambda\chi} = l_{\lambda\chi} \cdot i^{\lambda} \cdot B_{\lambda\chi} \cdot \sin \alpha_{\lambda\chi}, \tag{1}$$

где  $f_{\lambda\chi}$  – сила, взаимодействия полей, создаваемых токами, текущими в цепях  $\chi$ -го прямолинейного элемента  $\lambda$ -го контура индуктора двигателя и его якоря;

$l_{\lambda\chi}, i^{\lambda}, B_{\lambda\chi}, \alpha_{\lambda\chi}$  – длина упомянутого элемента, ток в нём, индукция (условно однородного – в пределах элемента) магнитного поля, в котором элемент находится, а также угол между  $\vec{i}^{\lambda}$  и  $\vec{B}_{\lambda\chi}$ .

Расчётные схемы обмоток возбуждения и якоря двигателя приняты, соответственно, в виде набора гальванически не связанных проводящих прямоугольных рамок, соответствующих контурам криомодулей, и трёхфазной электрической сети, каждой фазе которой соответствует отдельный контур. Тогда, в произвольный момент времени, тяга двигателя определима как векторная сумма величин  $\vec{f}_{\lambda\chi} \forall \lambda \in [1, N], \chi \in [1, 4]$ , каждая из которых, – это результат взаимодействия поля тока в одном из контуров возбуждения с полем, создаваемым якорной обмоткой. В последнем выражении,  $N$  – число указанных контуров возбуждения.

Динамика электрического компонента упомянутого взаимодействия определяется уравнениями второго закона Кирхгофа [7]. Подсистема “контур возбуждения – якорная обмотка”, как правило, вырождена [8] – ёмкостные показатели её элементов пренебрежимо низки. Потому, в инерциальной системе отсчёта  $Qi^v \forall v \in [A, B, C, M]$ , указанным уравнениям может быть придан вид [7]:

$$u_{\rho} = L_{\rho} \cdot \frac{d}{dt} i^{\rho} + L_{\rho\mu} \cdot \frac{d}{dt} i^{\mu} + r_{\rho} \cdot i^{\rho} \quad \forall \rho, \mu \in [A, B, C, M], \tag{2}$$

где  $u_{\rho}, L_{\rho}, L_{\rho\mu}, r_{\rho} \quad \forall \rho, \mu \in [A, B, C, M]$  – электродвижущие силы (э. д. с.) источников, собственные и взаимные индуктивности, а также омические сопротивления элементов описываемой парциальной подсистемы;

$i^{\rho}, i^{\mu} \quad \forall \rho, \mu \in [A, B, C, M]$  – токи в контурах якоря и возбуждения;

$A, B, C, M$  – индексы, соответствующие этим контурам;

$t$  – текущее время.

Поскольку муوتر ЛСД движется относительно его статора, то многие из величин  $L_{\rho\mu} \forall \rho, \mu \in [A, B, C, M]$  имеют переменные во времени значения. Это, в свою очередь, приводит к нестационарности коэффициентов уравнений (2) и, как отмечено, существенно снижает практическую ценность версии модели. С целью устранения указанного недостатка, ПТ ЛСД следует рассматривать относительно координатной системы, в которой обмотки двигателя условно взаимно неподвижны. В таком качестве, удобнее всего принять [5] отсчётную систему  $C_{\alpha} \eta^{\lambda} \quad \forall \lambda \in [1, 3]$ , жёстко связанную с  $\alpha$ -тым контуром обмотки возбуждения двигателя. Инерциальной  $C_{\alpha} \eta^{\lambda} \quad \forall \lambda \in [1, 3]$ , в общем случае, не является. В то же время, весьма желательно [9], чтобы уравнения, описывающие динамику электрической подсистемы ЛСД, имели тензорный характер. Такие уравнения могут быть получены [10], из равенств типа (2), путём замены в них локальных производных  $\frac{d}{dt}$  абсолютными  $\frac{D}{dt}$ , а также перехода в этих равенствах к

координатам  $\eta^\lambda \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$ . По отношению к произвольному вектору  $\eta^\beta$ , соотношение между упомянутыми производными, как известно, имеет вид [10]:

$$\frac{D}{dt}\eta^\beta = \frac{d}{dt}\eta^\beta + e_{\beta\kappa\nu} \cdot \omega_\kappa \cdot \eta^\nu, \quad (3)$$

где  $e_{\beta\kappa\nu}, \omega_\kappa$  - символ Леви-Чивита, а также вектор угловой скорости вращения  $C_\alpha \eta^\lambda \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$ .

После осуществления указанной замены производных, соотношения, полученные из (2), приобретают тензорный характер. Поэтому, в частности, их форма становится инвариантной по отношению к координатам, в которых они записаны. Переход же к координатам  $\eta^\lambda \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$  выполняется согласно выражениям:

$$\eta^\lambda = g_\rho^\lambda \cdot i^\rho \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1,3}], \quad (4)$$

где  $g_\rho^\lambda$  – матрица преобразования координат:

$$g_\rho^\lambda = \frac{\partial \eta^\lambda}{\partial i^\rho} \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1,3}]. \quad (5)$$

В свою очередь, выражения для связей вида

$$\eta^\lambda = \eta^\lambda(i^\rho) \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1,3}] \quad (6)$$

могут быть получены исходя из того, что [5], в процессе описываемого координатного преобразования, одним из его инвариантов являются, в частности, амплитудные значения токов, протекающих в рассматриваемых контурах.

С помощью же матрицы

$$g_\lambda^\rho = \frac{\partial i^\rho}{\partial \eta^\lambda} = (g_\rho^\lambda)^T \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1,3}], \quad (7)$$

осуществимо обратное преобразование

$$i^\rho = g_\lambda^\rho \cdot \eta^\lambda \forall \rho \in [A, B, C, M]; \lambda \in [\overline{1,3}]. \quad (8)$$

После описанных преобразований, уравнения (2) приобретают вид

$$u_\lambda = L_\lambda \cdot \left( \frac{d}{dt}\eta^\lambda + e_{\lambda\alpha\nu} \cdot \omega_\alpha \cdot \eta^\nu \right) + L_{\lambda\zeta} \cdot \left( \frac{d}{dt}\eta^\zeta + e_{\zeta\alpha\sigma} \cdot \omega_\alpha \cdot \eta^\sigma \right) + r_\lambda \cdot \eta^\lambda \forall \lambda, \nu, \zeta, \sigma \in [\overline{1,3}]. \quad (9)$$

Таким образом, уравнения (9) имеют постоянные коэффициенты, являются тензорными и описывают токовую динамику ЛСД в координатах  $\eta^\lambda \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$ . После их (как правило – численного) разрешения относительно переменных  $\eta^\lambda \forall \lambda \in [\overline{1,3}]$ , последние, с использованием соотношений (8), могут быть преобразованы в координаты  $i^\rho \forall \rho \in [A, B, C, M]$ , значения которых определяют реальные токи в контурах двигателя.

Магнитная цепь ЛСД предполагается ненасыщенной [3]. Поэтому она может считаться условно-линейной подсистемой и, следовательно, к ней применим принцип аддитивности. Исходя из этого, результирующее поле фазы якорной обмотки двигателя в любой точке геометрического пространства  $O\vec{E}_\chi \forall \chi \in [\overline{1,3}]$ , в котором реально движется муотер относительно статора, может описываться как сумма полей, создаваемых в этой точке отдельными катушками такой фазы:

$$B_{\alpha q} = B_{\alpha\kappa q} \cdot e^\kappa; e^\kappa = 1; \forall \kappa \in [\overline{1, n_p}], q \in [\overline{1,3}], \quad (10)$$

где  $n_p$  – число прямоугольных катушек [1], включённых в каждую из фаз якоря;

$B_{\alpha q}, B_{\alpha \kappa q} \forall \kappa \in [1, n_p]; q \in [1, 3]$  – пространственные компоненты индукции поля, создаваемого всей обмоткой фазы  $\alpha$  якоря, а также её отдельными катушками в рассматриваемой точке этого пространства.

В свою очередь, значения величин  $B_{\alpha \kappa q} \forall \kappa \in [1, n_p]; q \in [1, 3]$  определимы согласно выражениям [11]:

$$B_{\alpha \kappa 1} = -\frac{i^*}{4 \cdot \pi} \cdot \left\{ \left[ F_{12}(k_1', \varphi', \eta) + F_{12}(k_3', \varphi', \eta) \right]_{\varphi_1' = x_0 - l}^{\varphi_2' = x_0 - l - d} - \left[ F_{12}(k_2', \psi', \eta) + F_{12}(k_4', \psi', \eta) \right]_{\psi_1' = x_0 + l}^{\psi_2' = x_0 + l + d} \right\}_{\eta_1 = z_0 + h}^{\eta_2 = z_0 - h};$$

$$B_{\alpha \kappa 2} = -\frac{i^*}{4 \cdot \pi} \cdot \left\{ \left[ F_{12}(k_1, \varphi, \eta) + F_{12}(k_4, \varphi, \eta) \right]_{\varphi_1' = x_0 + l}^{\varphi_2' = x_0 + l + d} - \left[ F_{12}(k_2, \psi, \eta) + F_{12}(k_3, \psi, \eta) \right]_{\psi_1 = y_0 + a}^{\psi_2 = y_0 + a + d} \right\}_{\eta_1 = z_0 + h}^{\eta_2 = z_0 - h};$$

$$\left\{ F_{12}(k, \varphi, \eta) \right\}_{\eta_1 = z_0 + h}^{\eta_2 = z_0 - h} = \left\{ \eta \cdot \arctg \frac{k \cdot \varphi - \eta^2}{\eta \cdot \sqrt{(k + \varphi)^2 + \varphi^2 + \eta^2}} - \right. \\ \left. - \varphi \cdot \operatorname{arsh} \frac{k + \varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \eta^2}} - \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arsh} \frac{k + 2 \cdot \varphi}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot \eta^2}} \right\}_{\eta_1 = z_0 + h}^{\eta_2 = z_0 - h};$$

$$B_{\alpha \kappa 3} = -\frac{i^*}{4 \cdot \pi} \cdot \left\{ \left[ f_3^0(k_1, \varphi, \eta) + f_3^0(k_4, \varphi, \eta) \right]_{\varphi_1 = y_0 - a}^{\varphi_2 = y_0 - a - d} - \left[ f_3^0(k_2, \psi, \eta) + f_3^0(k_3, \psi, \eta) \right]_{\psi_1 = y_0 + a}^{\psi_2 = y_0 + a + d} \right\} +$$

$$+ \left\{ \left[ f_{31}(k_1', \varphi', \eta) + f_{31}(k_3', \varphi', \eta) \right]_{\varphi_1' = x_0 - l}^{\varphi_2' = x_0 - l - d} - \left[ f_{31}(k_2', \psi', \eta) + f_{31}(k_4', \psi', \eta) \right]_{\psi_1' = x_0 + l}^{\psi_2' = x_0 + l + d} \right\}_{\eta_1 = z_0 + h}^{\eta_2 = z_0 - h}$$

$$\forall \kappa \in [1, n_p];$$

$$f_{31}(k, \varphi, \eta) = -\eta \cdot \operatorname{arsh} \frac{k + \varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \eta^2}} + \varphi \cdot \arctg \frac{(k + \varphi) \cdot \eta}{\varphi \cdot \sqrt{(k + \varphi)^2 + \varphi^2 + \eta^2}};$$

$$f_{32}(k, \varphi, \eta) = \sqrt{2} \cdot \eta \cdot \operatorname{arsh} \frac{k + 2 \cdot \varphi}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot \eta^2}} - k \cdot \arctg \frac{(k + 2 \cdot \varphi) \cdot \eta}{k \cdot \sqrt{(k + \varphi)^2 + \varphi^2 + \eta^2}};$$

$$f_3^0(k, \varphi, \eta) = f_{31}(k, \varphi, \eta) + f_{32}(k, \varphi, \eta);$$

$$k_1' = -k_1 = [(y_0 - a) - (x_0 - l)]; \quad k_2' = -k_2 = [(y_0 + a) - (x_0 + l)];$$

$$k_3' = k_3 = -[(y_0 + a) + (x_0 - l)]; \quad k_4' = k_4 = -[(y_0 - a) + (x_0 + l)], \quad (11)$$

где  $i^*$  – плотность тока на единицу площади сечения обмотки катушки;

$2 \cdot h, d$  – высота и толщина её обмотки;

$2 \cdot l, 2 \cdot a$  – размеры её же внутреннего пространства;

$x_0, y_0, z_0$  – координаты точки пространства, в которой описывается поле.

В выражениях (11), кроме того:

$$i^* = 0,5 \cdot i \cdot w \cdot (h \cdot d)^{(-1)}, \quad (12)$$

где  $w$  – число витков катушки.

Далее, в (12), вместо  $i$ , могут последовательно подставляться значения фазовых токов якоря  $i^{\rho} \forall \rho \in [A, B, C]$  и, согласно (11) и (10), находятся компоненты  $B_{\rho q} \forall \rho \in [A, B, C], q \in [1, 3]$  индукции поля, создаваемого каждым из них.

Пространство системы  $O\Xi_{\chi} \forall \chi \in [1, 3]$  – евклидово. Поэтому мгновенное значение модуля вектора полной индукции поля, создаваемого током  $\rho$ -ой фазы якоря, может быть определено выражением

$$B_{\rho} = \sqrt{B_{\rho q}^{(2)} \cdot e^q}; e^q = 1 \forall \rho \in [A, B, C], q \in [1, 3]. \quad (13)$$

Каждое из значений  $B_{\alpha}$  пропорционально порождающему его  $i^{\alpha}$ , изменяющемуся косинусоидально. Поэтому индукция полного поля якоря в целом изменяется [5] согласно закону

$$B_{res} = 1,5 \cdot B_{max} \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t); j^{(2)} = -1, \quad (14)$$

где  $B_{max}, \omega$  – амплитуда и частота изменения индукции поля одного из токов  $i^{\rho} \forall \rho \in [A, B, C]$ .

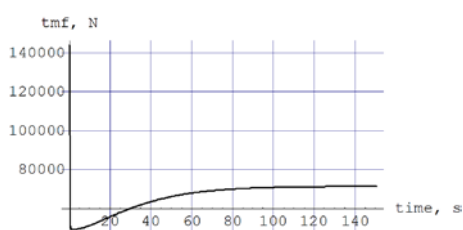


Рис. 1 Сила тяги ЛСД МЛП

В качестве примера результатов реализации созданной модели, на рисунке приведена полученная осциллограмма силы тяги ЛСД в режиме разгона МЛП. Анализ этого результата свидетельствует о работоспособности модели, а поэтому – о её пригодности, после верификации и необходимой адаптации к нуждам конкретных практических задач, к использованию в процессе исследований динамики МЛП, оснащённых ЛСД.

### Выводы

Создана версия ММ ПТ ЛСД МЛП, ассимилирующая достоинства версий модели, созданных в рамках автономных парадигм теорий цепей и поля, но свободная от недостатков таких версий. Этим исчерпывающе решена задача настоящей части исследования.

### Список использованной литературы

1. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / В. А. Дзензерский, В. И. Омеляненко, С. В. Васильев, В. И. Матин, С. А. Сергеев – К.: Наук. думка, 2001. – 479 с.
2. Вольдек А.И. Электрические машины / А. И. Вольдек – Л.: Энергия, 1984 – 832 с.
3. Поляков В.А. Динамика тяговой электромагнитной подсистемы магнитолевитирующего поезда / В.А. Поляков, Н.М. Хачапуридзе // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". – № 1015. – Вип. 19. – X., 2012. – С. 268-273.
4. Поляков В.А. Динамика тяговой подсистемы магнитолевитирующего поезда (полевая парадигма исследования) / В. А. Поляков, Н. М. Хачапуридзе // Науковий вісник Херсонської морської академії – 2013. – № 1 (8). С. 258 - 266.
5. Электрические машины (специальный курс) / Г.А. Сипайлов, Е.В. Кононенко, К.А. Хорьков – М.: Высш. шк., 1987. – 287 с.
6. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин / И.П. Копылов – М.: Высш. шк., 2001. – 327 с.
7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи / Л.А. Бессонов – М.: Высш. шк., 1996. – 578 с.
8. Львович А.Ю. Электромеханические системы / А.Ю. Львович – Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. – 296 с.
9. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике / Г. Крон – М., Л.: Госэнергоиздат, 1955. – 275 с.
10. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский – М.: Наука, 1967. – 644 с.
11. Бирюков В.А. Магнитное поле прямоугольной катушки с током / В.А. Бирюков, В.А. Данилов // Журнал технической физики. – 1961. – Т. XXXI, № 4. – С. 428 – 435.

УДК 532.516

Д.А. РЕДЧИЦ

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины

С.В. МОЙСЕЕНКО

Херсонский национальный технический университет

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ  
ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА ВБЛИЗИ ЭКРАНА**

*Проведены расчеты турбулентного обтекания контура транспортного средства вблизи экрана. Выделены физические особенности структуры течения вокруг транспортного средства и выполнен анализ коэффициентов давления, трения, подъемной силы и силы лобового сопротивления. Проведен сравнительный анализ интегральных и распределенных аэродинамических характеристик контура автомобиля с экспериментальными данными.*

*Ключевые слова: транспортное средство, турбулентный поток, уравнения Навье-Стокса*

Д.О. РЕДЧИЦЬ

Институт транспортних систем і технологій НАН України

С.В. МОЙСЕЄНКО

Херсонський національний технічний університет

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ ТУРБУЛЕНТНОЮ ТЕЧІЄЮ  
ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ ПОБЛИЗУ ЕКРАНУ**

*Проведено розрахунки турбулентного обтікання контуру транспортного засобу поблизу екрану. Виділені фізичні особливості структури течії навколо транспортного засобу і виконано аналіз коефіцієнтів тиску, тертя, підйомної сили і сили лобового опору. Проведено порівняльний аналіз інтегральних та розподілених аеродинамічних характеристик контуру автомобіля з експериментальними даними.*

*Ключові слова: транспортний засіб, турбулентний потік, рівняння Нав'є-Стокса*

D.O. REDCHYTS

Institute of Transport Systems and Technologies of Ukrainian National Academy of Science

S.V. MOISEENKO

Kherson National Technical University

**NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOW AROUND VEHICLE  
IN GROUND PROXIMITY**

*The calculations of turbulent flow over the vehicle contour in ground proximity were carried out. Physical characteristics of flow structure around vehicle were marked out and the analysis of pressure, friction, lift and drag forces coefficients was carried out. A comparative analysis of distributed aerodynamic characteristics of the car contour with the experimental data was carried out.*

*Keywords: vehicle, turbulent flow, Navier-Stokes equations*

**Введение**

Увеличение парка грузового автотранспорта приводит к росту потребления дизельного топлива. Поэтому вопрос экономии топлива является актуальным в условиях рыночной конкуренции грузовых перевозок. Для автотягача с прицепом расход топлива на преодоление силы лобового сопротивления при скоростях порядка 80 км/ч становится сопоставим с расходом топлива на трение качения колес. А при скорости 110 км/ч расход топлива на преодоление силы лобового сопротивления составляет уже 65% от общего расхода. Поэтому уменьшение лобового сопротивления на 20-25% может привести к снижению расхода топлива на 10-15%.

На сегодняшний день оптимизация аэродинамической формы автотягачей с прицепом проводится путем многократных продувок в аэродинамических трубах. В ближайшем будущем CFD (Computational Fluid Dynamics) расчеты могут существенно уменьшить число необходимых продувок в аэродинамических трубах, и, как следствие, снизить конечную стоимость изделия.

**Цель работы**

Целью работы является математическое моделирование физических процессов при турбулентном обтекании транспортного средства вблизи экрана турбулентным потоком.

**Краткое описание натурального эксперимента.** Для компьютерного моделирования обтекания транспортного средства вблизи экрана турбулентным потоком была выбрана компоновка наземной транспортной системы (Ground Transportation System – GTS), которая отражает геометрию автотягача с прицепом, в просторечии – «фура». Причинами выбора данной компоновки послужило то, что она исследовалась специалистами NASA, SANDIA, по ней имеются достоверные экспериментальные данные, а также присутствуют сложные физические эффекты с точки зрения механики жидкости и газа. Экспериментальное изучение наземной транспортной системы проведено в Исследовательском центре Эймса (NASA) [1]. В упрощенной компоновке автотягача с прицепом не рассматриваются зеркала, колеса, зазор между тягачом и прицепом, мелкие элементы конструкции. Экспериментальные данные включают в себя набор интегральных и распределенных характеристик, основные из которых – коэффициенты давления и трения.

#### **Постановка задачи математического моделирования**

В настоящей работе для исследования процессов аэродинамики наземной транспортной системы применяются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса несжимаемой жидкости, замкнутые дифференциальной однопараметрической моделью Spalart-Allmaras (SA). В качестве начальных условий задавались параметры невозмущенного потока во всей расчетной области. На внешней границе применялись неотражающие граничные условия. На поверхности твердого тела ставилось условие прилипания.

В качестве характерного размера выбирается длина GTS модели равная 2.47 м. Высота составляет 0.44 м. Переднее скругление (кабина водителя) представляет собой четверть эллипса, малый радиус которого равен 0.22 м, а большой – 0.38 м. Зазор между экраном и моделью – 0.07 м. Скорость потока воздуха в аэродинамической трубе – 78 м/с (0.22 М). Число Рейнольдса, рассчитанное по длине –  $1.53 \cdot 10^7$ .

Расчетная сетка представляет собой сетку типа Chimera, которая состоит из двух блоков с общим числом узлов  $10^5$ . Первый блок – это O-сетка, связанная с телом, а второй – прямоугольная сетка, которая прилегает к поверхности (экрану). Первый шаг сетки составлял  $10^{-6}$  м.

**Численный метод.** Система исходных уравнений записывалась относительно произвольной криволинейной системы координат. Согласование полей давления и скорости осуществлялось с помощью метода искусственной сжимаемости, модифицированного для расчета нестационарных задач [2]. Для создания дискретного аналога исходных уравнений в качестве базовых использовались регулярные сетки. В неодносвязных областях применялись многоблочные вычислительные технологии, в которых размерность отдельных пересекающихся сеток (блоков) не связана между собой. Такой подход позволил выработать единую методологию расчета течений вязкой жидкости вокруг тел сложной геометрической формы.

Интегрирование системы исходных уравнений осуществлялось численно с использованием метода контрольного объема. Для конвективных потоков использовалась противопоточная аппроксимация Rogers-Kwak, основанная на схеме Roe третьего порядка точности [2]. В моделях турбулентности для аппроксимации конвективных слагаемых применялась схема TVD с ограничителем потоков ISNAS третьего порядка. Производные в вязких членах аппроксимировались центрально-разностной схемой второго порядка. Алгоритм решения уравнений базируется на трехслойной неявной схеме с подитерациями по псевдовремени второго порядка точности по физическому времени. Полученная блочно-матричная система линейных алгебраических уравнений решалась методом минимизации обобщенной невязки GMRES с LU(0) предобуславливанием.

#### **Результаты и обсуждение**

В результате проведенных расчетов турбулентного обтекания профиля автомобиля вблизи экрана выделены физические особенности структуры течения и выполнен анализ коэффициентов давления, подъемной силы и силы лобового сопротивления. Получены распределения полей давления (рис. 1 а), компонент скорости (рис. 1 б), линий тока во всей области и вблизи автотягача с прицепом (рис. 2), а также значения интегральных и распределенных характеристик (рис. 3). Полученная картина обтекания модели автотягача с прицепом носит нестационарный характер. Данная модель относится к плохо обтекаемым телам. Размеры отрывной зоны превосходят длину транспортной системы в несколько раз.

При обтекании автотягача с прицепом происходит ускорение потока в районе кабины и в зазоре между экраном (рис. 1). Над кабиной водителя происходит падение давления, обусловленное резким ускорением потока в данной области. В дальнейшем давление восстанавливается и становится почти постоянным до края прицепа. В следе формируется рециркуляционное течение с противоположно направленным основному потоку течением. Вихри в донной части модели попеременно сходят с верхней и нижней поверхности. Наличие массивных вихрей приводит к уменьшению донного давления. Большой перепад давления между лобовой и донной частями тягача приводит к большим значениям лобового сопротивления.

В зазоре реализуется равномерное течение, аналогичное течению в канале, за исключением небольшой области вблизи кабины. В донной части течение по своей структуре близкое к вихревой дорожке Кармана. Отрыв потока возникает в донной части прицепа с острых кромок, а также в нижней части кабины вблизи поверхности. Отрыв потока наглядно иллюстрируют линии тока (рис. 2).

Получено распределение коэффициента давления по поверхности модели (рис. 3 а). Заметное различие по коэффициенту давления между экспериментальными и расчетными данными на верхней поверхности связано с двумерной постановкой задачи. Направление растекания потока ограничено в отличие от трехмерной постановки. Это же проявляется и в распределении коэффициента трения в передней части модели (рис. 3 б). В то же время общее распределение коэффициента трения удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

Расчетное значение коэффициента силы лобового сопротивления составляет 0.37, а полученное экспериментальным путем – 0.27. Коэффициент подъемной силы равен 1.19.

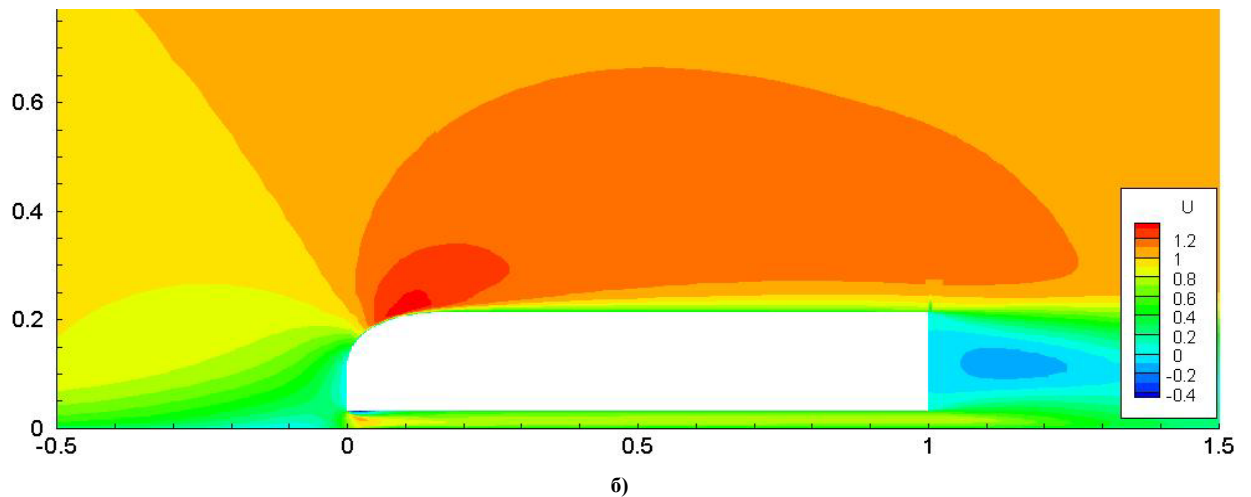
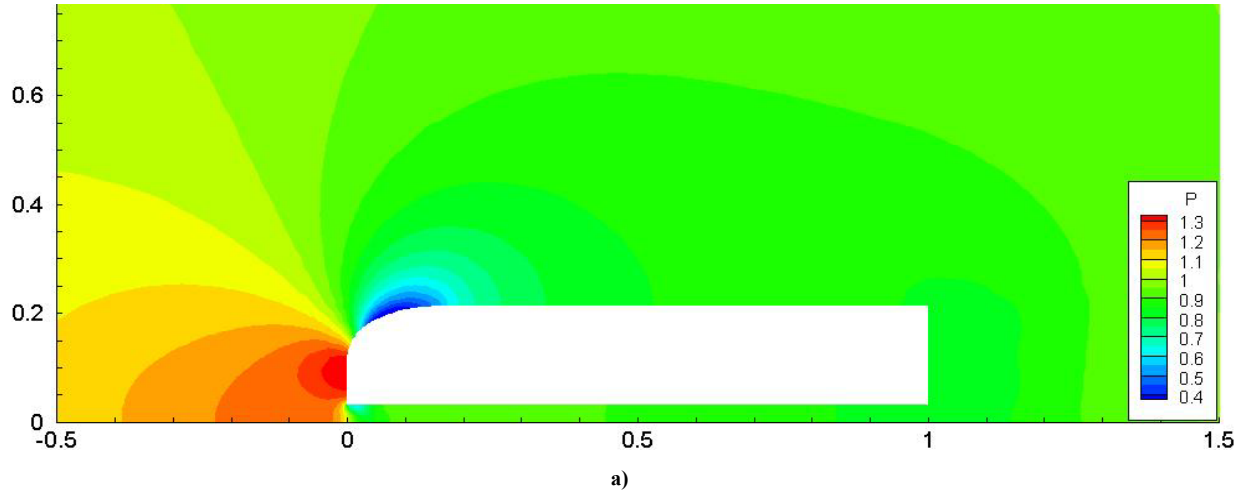
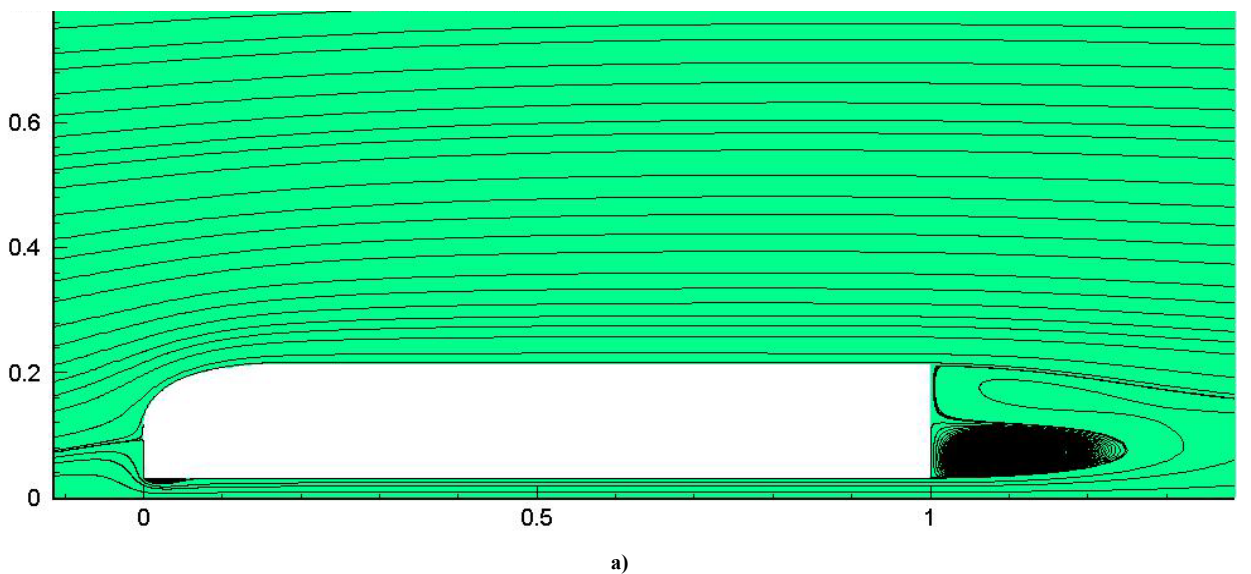


Рис. 1. Распределение давления (а) и продольной компоненты скорости (б) вблизи авто тягача с прицепом





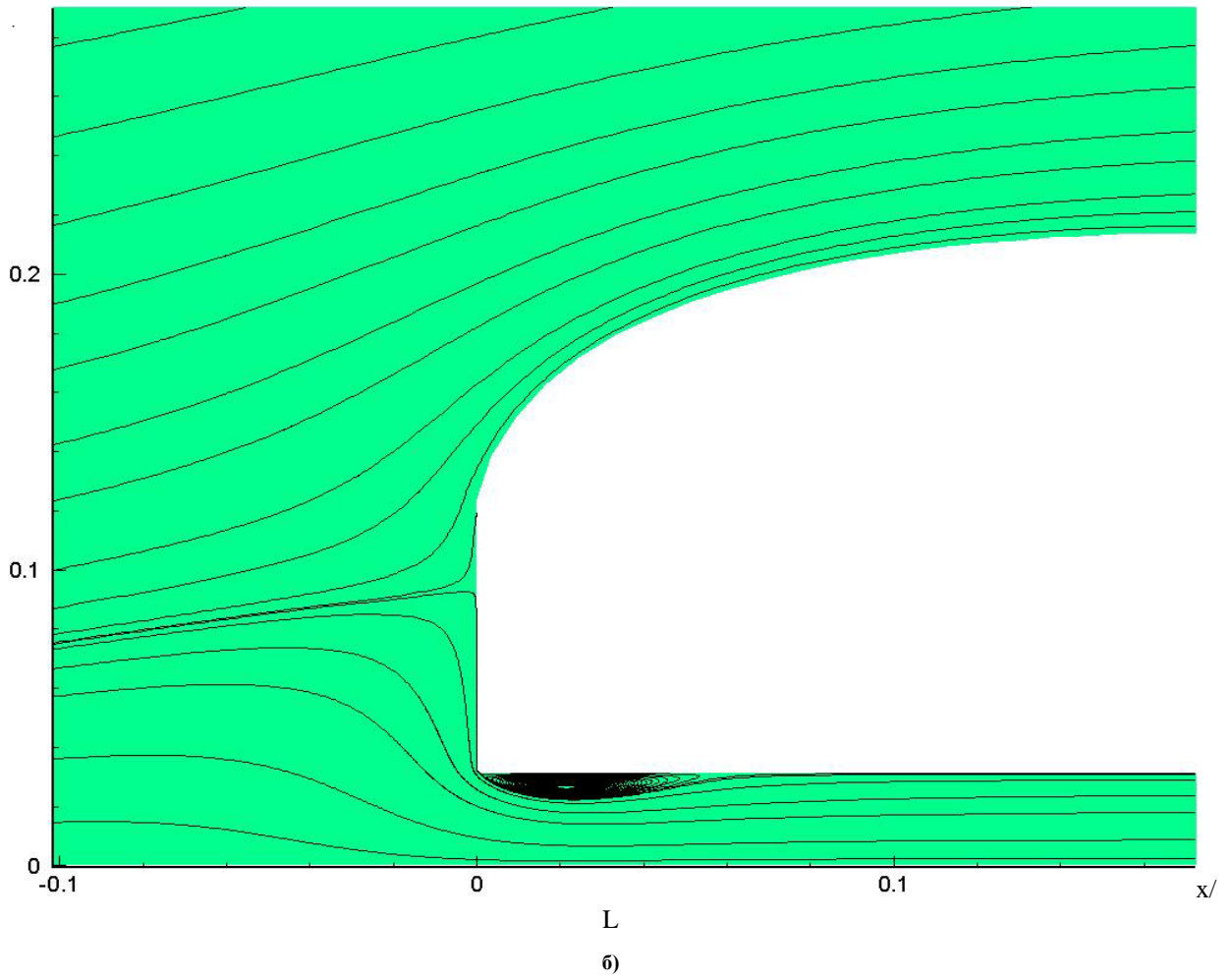
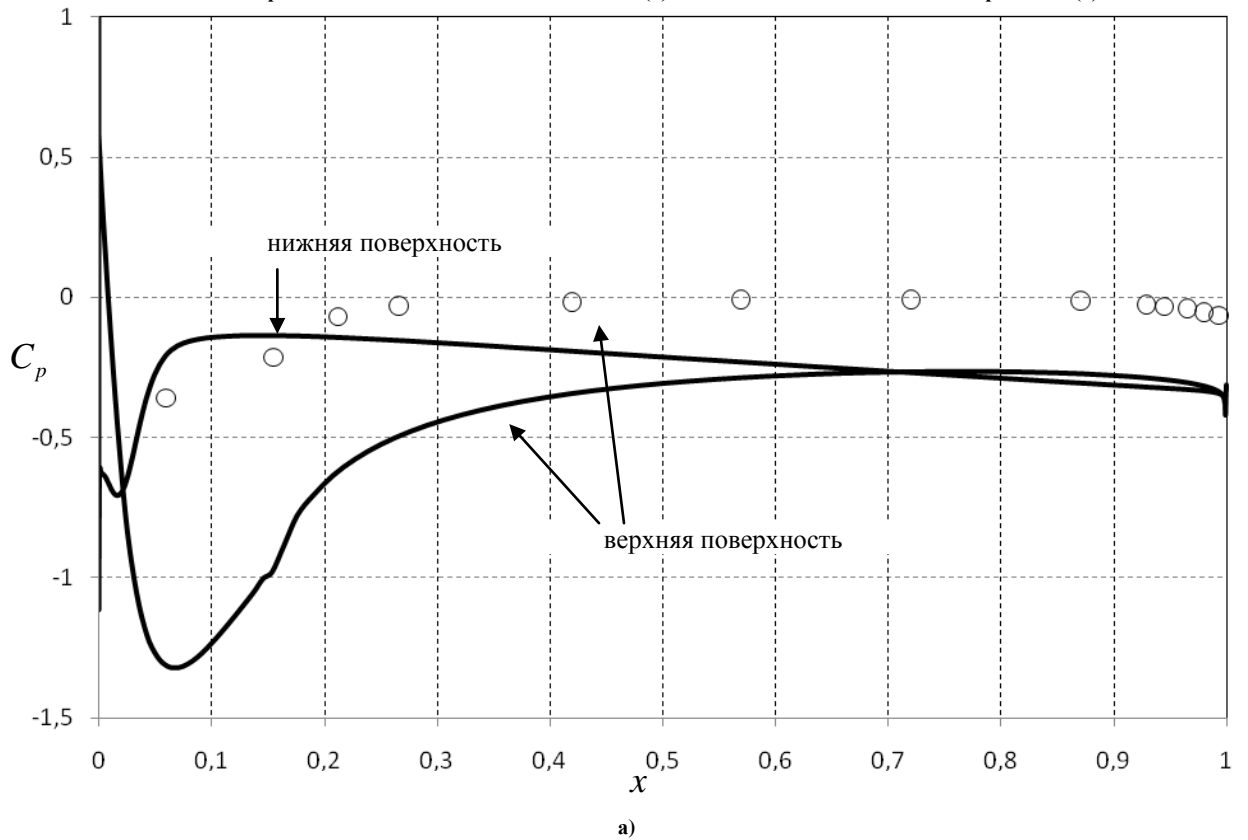


Рис. 2. Распределение линий тока во всей области (а) и вблизи кабины автотягача с прицепом (б)



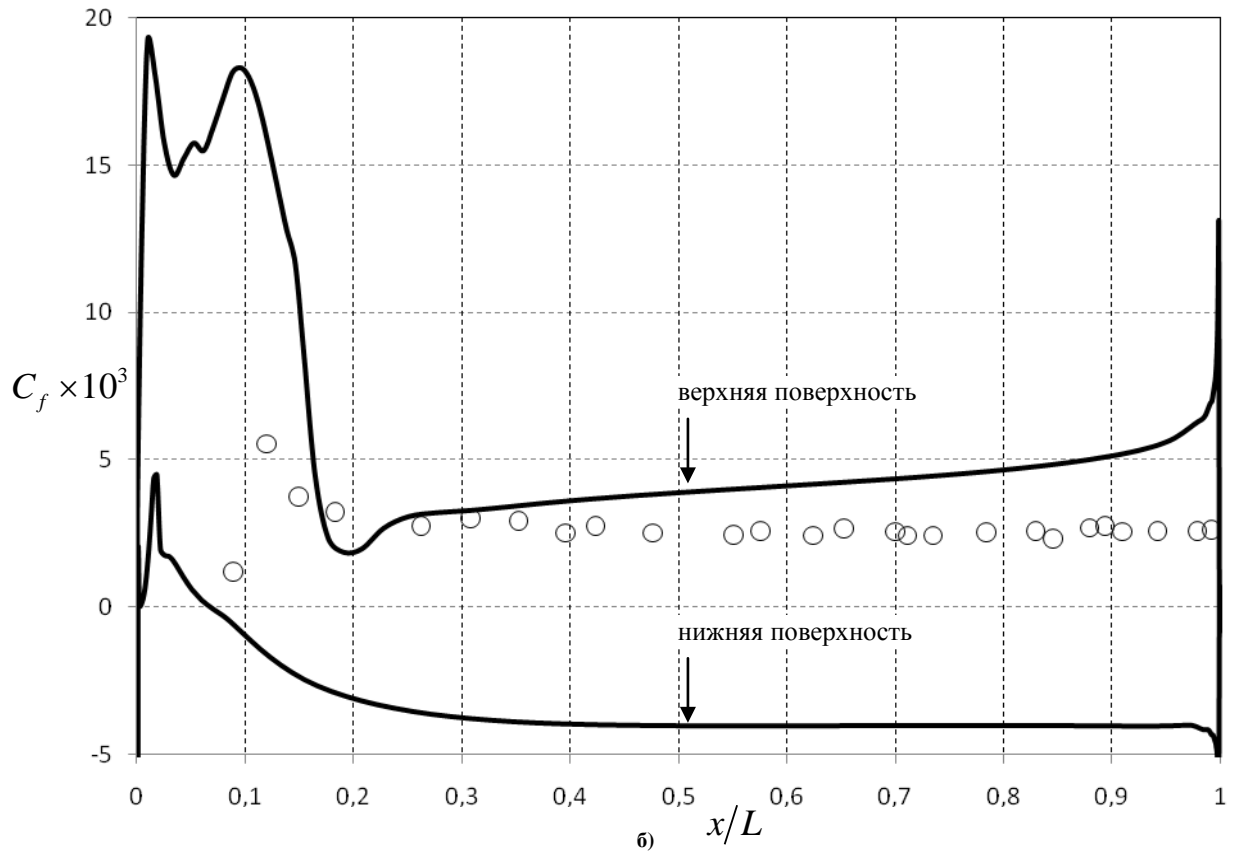


Рис. 3. Распределение коэффициентов давления (а) и трения (б) по верхней и нижней поверхности автотягача с прицепом (o - эксперимент [1], — - настоящая работа)

### Заключение

Показана применимость разработанного специализированного CFD пакета к задачам аэродинамики наземного транспорта. Двумерная постановка задачи позволяет выявлять основные физические эффекты обтекания и получать быстрые оценки влияния формы транспортного средства на его аэродинамические характеристики.

### Список использованной литературы

1. An experimental study of the ground transportation system (GTS) model in the NASA Ames 7- by 10-ft wind tunnel [Text] / B. L. Storms, J. C. Ross, J. T. Heineck, S. M. Walker, D. M. Driver, G. G. Zilliac// NASA/TM-2001-209621. – 2001.
2. Rogers, S.E. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations [Text] / S.E. Rogers, D. Kwak // Journal Numerical Mathematics. – 1991. – Vol. 8. – P. 43 – 64.

УДК 519.7:626.54

А.В. РУДАКОВА, О.В. ПОЛИВОДА, А.А. ОМЕЛЬЧУК  
Херсонский национальный технический университет**ПРОЦЕДУРА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА  
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КРУПНОГАБАРИТНОГО ОБЪЕКТА**

*Рассмотрены особенности построения модели процесса перемещения крупногабаритного объекта на примере спуска судна на слипе. Проведен анализ эффективности применения разных методов идентификации (стохастической аппроксимации и наименьших квадратов) параметров линеаризованной модели в пространстве состояний. Исследованы проблемы настройки алгоритмов, связанные с выбором начальных расчетных значений и весовых коэффициентов, которые влияют как на их сходимость, так и на величину ошибки.*

*Ключевые слова: идентификация, стохастическая аппроксимация, метод наименьших квадратов, сходимость, ошибка.*

Г.В. РУДАКОВА, О.В. ПОЛИВОДА, А.А. ОМЕЛЬЧУК  
Херсонський національний технічний університет**ПРОЦЕДУРА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ПЕРЕМІЩЕННЯ  
ВЕЛИКОГАБАРИТНОГО ОБ'ЄКТУ**

*Розглянуто особливості побудови моделі процесу переміщення великогогабаритного об'єкта на прикладі спуску судна на сліпі. Проведено аналіз ефективності застосування різних методів ідентифікації (стохастичної апроксимації і найменших квадратів) параметрів лінеаризованої моделі в просторі станів. Досліджено проблеми настройки алгоритмів, пов'язані з вибором початкових розрахункових значень і вагових коефіцієнтів, які впливають як на їх збіжність, так і на величину помилки.*

*Ключові слова: ідентифікація, стохастична апроксимація, метод найменших квадратів, збіжність, похибка.*

G.V. RUDAKODA, O.V. POLYVODA, A.A. OMECHUK  
Kherson National Technical University**IDENTIFICATION PROCEDURE OF MODEL PARAMETERS OF LARGE OBJECTS MOVEMENT**

*The features of the model building process of moving large object on the example of vessel descent on the slip are considered. The analysis of the effectiveness of different identification methods (stochastic approximation and least squares) of the linearized model parameters in the state space is performed. The problems of algorithms settings associated with the choice of the initial and calculated values of weighting coefficients, which affect both their convergence and the magnitude of the error, are researched.*

*Keywords: identification, stochastic approximation, least squares method, convergence, error.*

**Постановка проблеми**

Перемещение крупногабаритных объектов осуществляется посредством взаимосвязанной работы комплекса электрических приводов и механизмов. Процессы перемещения происходят в нестационарных условиях при воздействии внешних факторов, которые существенно изменяются на протяжении всего пути, что зачастую приводит к возникновению нештатных ситуаций. Надежное функционирование таких комплексов возможно только при согласованном управлении компонентами системы. При оперативном управлении работой электромеханических комплексов периодически возникают задачи идентификации параметров модели процесса перемещения [1].

**Анализ последних исследований и публикаций**

Согласно современной теории управления синтез оптимальных управляющих воздействий основывается на линеаризованной модели системы, представленной в пространстве состояний [2]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}. \end{cases} \quad (1)$$

Моделирование особенностей перемещения крупногабаритного объекта рассмотрим на примере процесса спуска судна на слипе. Силы, действующие на распределенный, движущийся по направлению оси  $x$  объект «судно-тележки», показаны на рис. 1. Во время процесса перемещения происходит два вида

движения: поступательное со скоростью  $v$  и ускорением  $a$ , и вращательное с угловой скоростью  $\omega$  и углом поворота  $\varphi$ .

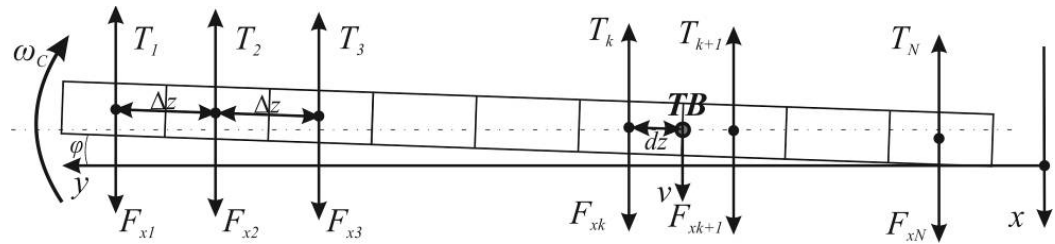


Рис. 1. Действие сил на объект «судно-тележки»

На основе анализа уравнений движения сформулированы уравнения состояния модели объекта «судно-тележки» в пространстве состояний в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N F_{xi}(x_1) - \frac{T_m}{m} \sum_{i=1}^N u_i, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \quad \dot{x}_4 = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N (T_m u_i - F_{xi}(x_1)) \cdot [(k-i)\Delta z + dz] \cdot \cos x_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_1 = l$  – перемещение центра масс судна вдоль оси  $x$ ;  $x_2 = v$  – скорость поступательного движения центра масс вдоль оси  $x$ ;  $x_3 = \varphi$  – угол поворота судна;  $x_4 = \omega$  – скорость вращения судна;  $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N)^T$  – вектор управления,  $u_i = T_i / T_m$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $T_i$  – сила натяжения троса  $i$ -й тележки;  $T_m$  – предельно допустимое натяжение троса;  $F_{xi}(l_i)$  – величина нагрузки на  $i$ -й привод, обусловленная силами, влияющими на тележку в точке траектории движения  $l_i$ ;  $m = m_c + N \cdot m_T$  – масса объекта «судно-тележка»,  $m_c$  – масса судна,  $N$  – количество тележек,  $m_T$  – масса тележки;  $J$  – момент инерции судна;  $\Delta z$  – расстояние между центрами соседних тележек;  $dz$  – расстояние от точки вращения (ТВ) (центра масс объекта) к центру  $k$ -й тележки.

Уравнения выхода модели имеют вид

$$y_j = x_1 - [(k-j)\Delta z + dz] \sin x_3, \quad j = \overline{1, r}, \quad (3)$$

где  $r$  – количество выходов, необходимых для идентификации параметров движения сложного объекта.

Разработанная в пространстве состояний модель перемещения судна на слипе, которая учитывает все существенные внешние факторы, является нелинейной, 4-го порядка [3].

В результате линеаризации была получена математическая модель в пространстве состояний в векторно-матричной форме

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}, \quad \bar{y} = \mathbf{C}(k) \cdot \bar{x}, \quad (4)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , имеют постоянную структуру, но изменяются в зависимости от условий функционирования системы и имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_1 & K_1 & \dots & K_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 K_2 & q_2 K_2 & \dots & q_N K_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 & 0 \\ 1 & 0 & q_N & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{A}$  определяются как  $a_{21} = f_{21}(x_{1s}, x_{3s})$ ,  $a_{23} = f_{23}(x_{1s})$ ,  $a_{41} = f_{41}(x_{1s}, x_{3s})$ ,  $a_{43} = f_{43}(x_{1s})$ , где  $x_{1s}, x_{3s}$  – элементы вектора стабильного состояния объекта

$\mathbf{x}_s = (x_{1s}, \dots, x_{4s})^T$ ;  $K_1 = -T_m/m$ ,  $K_2 = T_m/J$  – масштабные коэффициенты;  $q_i = (k-i)\Delta z + dz$ ,  $i = \overline{1, N}$  – удаленность центра  $i$ -й тележки от точки вращения; элементы матрицы  $\mathbf{C}$  соответствуют структуре системы измерения.

Для поиска неопределенных значений компонент матрицы  $\mathbf{A}$ , соответствующих конкретным условиям перемещения, необходимо использовать процедуру идентификации. Для осуществления процедуры идентификации разработано много методов: градиентный, стохастической аппроксимации, метод наименьших квадратов, корреляционный, частотный и др., однако не все они пригодны для использования при управлении в реальном времени [4].

**Формулирование цели исследования**

Целью исследований является сравнительный анализ эффективности применения различных методов идентификации для определения параметров линеаризованной модели процесса перемещения крупногабаритного объекта.

**Изложение основного материала исследования**

Рассмотрим процедуры идентификации с использованием методов рекуррентной стохастической аппроксимации и наименьших квадратов для определения параметров модели процесса перемещения судна на слипе, представленной в виде (5).

1. Метод стохастической аппроксимации.

Для реализации метода стохастической аппроксимации задаются начальные значения компонент вектора состояний объекта и модели  $\mathbf{x}_o[0] = \mathbf{x}_m[0]$ , а также матрицы  $\mathbf{A}[0]$ . При известной динамике управления и вектора состояний объекта  $\mathbf{u}[k]$ ,  $\mathbf{x}_o[k]$  для  $k = 1, 2, 3, \dots, N$  определяют значения компонент вектора состояния модели  $\mathbf{x}_m[k]$ , вектор отклонения состояний объекта и модели  $\mathbf{e}[k]$ , и матрицу  $\mathbf{\Gamma}[k]$  с помощью соотношений [5]:

$$\mathbf{x}_m[k] = \mathbf{A}[k-1] \cdot \mathbf{x}_m[k-1] + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}[k-1], \tag{6}$$

$$\mathbf{e}[k] = \mathbf{x}_o[k] - \mathbf{x}_m[k], \tag{7}$$

$$\mathbf{\Gamma}[k] = \mathbf{I}_n \cdot \frac{\gamma}{k}, \quad \gamma > 0, \tag{8}$$

тогда рекуррентный алгоритм настройки матрицы  $\mathbf{A}$  записывается как

$$\mathbf{A}[k] = \mathbf{A}[k-1] + \mathbf{\Gamma}[k] \cdot \mathbf{e}[k] \cdot \mathbf{x}_m^T[k]. \tag{9}$$

Окончание этапа идентификации происходит при малых отклонениях значений компонент матрицы  $\mathbf{A}$ , т.е. при условии  $|a_{ij}[k] - a_{ij}[k-1]| < \delta$ , для всех  $i, j$ .

В процессе расчетов с использованием рекуррентного метода стохастической аппроксимации лучшие результаты получены с использованием коэффициента настройки алгоритма  $\gamma = 0,5$  и  $\Delta t = 1$ , при начальных значениях вектора состояний модели  $\mathbf{x}_m[0] = [0 \ 0,05 \ 0 \ 0]^T$ . Начальные и конечные значения компонент матрицы  $\mathbf{A}$  имеют следующий вид

$$\mathbf{A}[0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}[300] = \begin{bmatrix} 1,061 & -0,651 & 0,064 & 2,016 \cdot 10^{-3} \\ 0,012 & 0,356 & -9,77 \cdot 10^{-4} & 4,78 \cdot 10^{-4} \\ 0,087 & -0,081 & 0,51 & 2,4 \cdot 10^{-4} \\ -2,03 \cdot 10^{-5} & 2,57 \cdot 10^{-4} & 1,7 \cdot 10^{-6} & 0,5 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Изменение значений компонент матрицы  $\mathbf{A}$  в процессе расчетов показано в таблице 1.

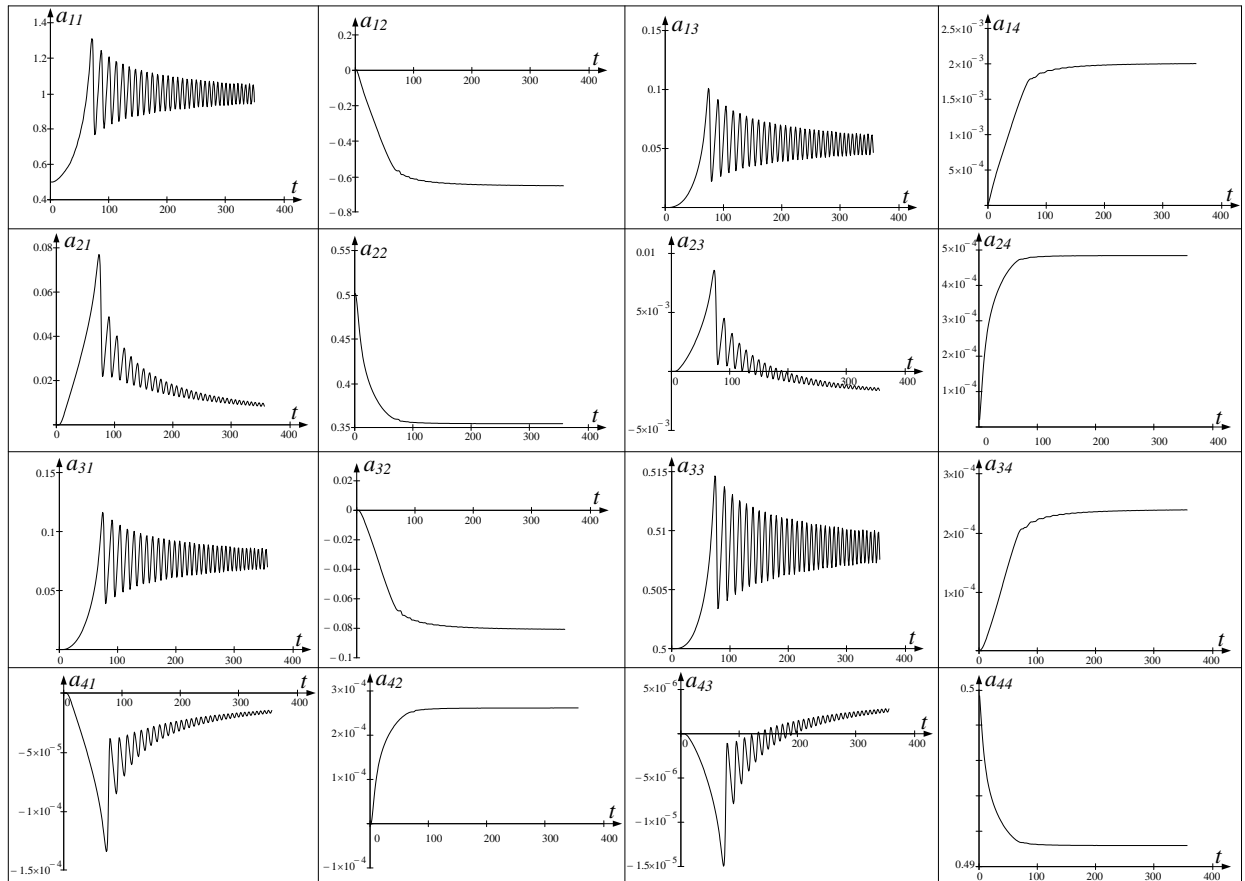
Структура полученных матриц (10) существенно отличается от структуры матрицы, полученной в результате линеаризации нелинейной модели движения (5). Время окончания этапа идентификации методом рекуррентной стохастической аппроксимации составило  $t > 350$  с, что является недопустимо большим при перемещении судна, так как уже при  $t = 300$  с изменяются внешние условия движения крупногабаритного объекта и требуется определение новых значений матрицы  $\mathbf{A}$ .

Согласно теории [5], точность метода стохастической аппроксимации может рассматриваться только при  $t \rightarrow \infty$  [3], следовательно его нецелесообразно использовать при идентификации параметров модели для решения задач управления перемещением крупногабаритным объектом в реальном времени.

Целесообразно осуществить анализ эффективности более точных методов идентификации в системе управления, которые позволяют сохранять структуру матриц линеаризованной модели процесса перемещения судна на слипе, например метод наименьших квадратов [5].

Таблица 1.

Динамика подстройки значений компонентов матрицы **A** с использованием метода стохастической аппроксимации



2. Метод наименьших квадратов.

Использование метода наименьших квадратов для идентификации параметров матрицы **A** математической модели (4) позволило получить две системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_{21}, a_{23}, a_{41}, a_{43}$

$$\begin{cases} a_{21} \sum_{k=0}^N x_1^2[k] + a_{23} \sum_{k=0}^N x_3[k] \cdot x_1[k] = \sum_{k=0}^N \dot{x}_2[k] \cdot x_1[k] - \sum_{k=0}^N b_1[k] \cdot x_1[k], \\ a_{21} \sum_{k=0}^N x_1[k] \cdot x_3[k] + a_{23} \sum_{k=0}^N x_3^2[k] = \sum_{k=0}^N \dot{x}_2[k] \cdot x_3[k] - \sum_{k=0}^N b_1[k] \cdot x_3[k], \end{cases} \quad (11)$$

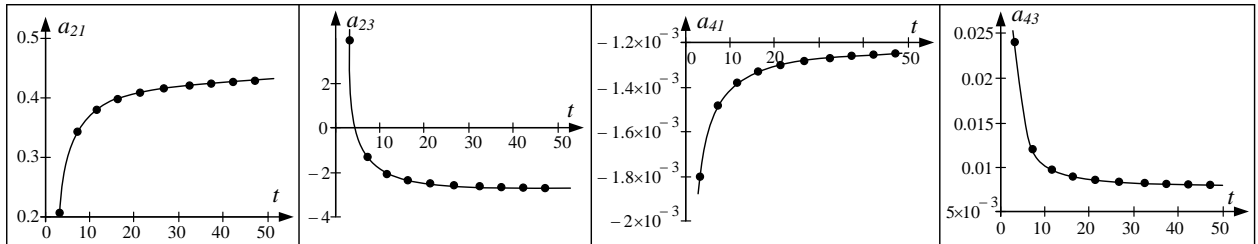
$$\begin{cases} a_{41} \sum_{k=0}^N x_1^2[k] + a_{43} \sum_{k=0}^N x_3[k] \cdot x_1[k] = \sum_{k=0}^N \dot{x}_4[k] \cdot x_1[k] - \sum_{k=0}^N b_2[k] \cdot x_1[k], \\ a_{41} \sum_{k=0}^N x_1[k] \cdot x_3[k] + a_{43} \sum_{k=0}^N x_3^2[k] = \sum_{k=0}^N \dot{x}_4[k] \cdot x_3[k] - \sum_{k=0}^N b_2[k] \cdot x_3[k], \end{cases} \quad (12)$$

где значения производных  $\dot{x}_2[k]$  и  $\dot{x}_4[k]$  определяются из соотношений  $\dot{x}_2[k] = \frac{x_2[k] - x_2[k-1]}{\Delta t}$  и  $\dot{x}_4[k] = \frac{x_4[k] - x_4[k-1]}{\Delta t}$  соответственно;  $x_i[k]$ ,  $i = \overline{1,4}$  – известные значения вектора состояний объекта  $\mathbf{x}_0[k]$ ;  $b_1[k] = K_1 \sum_{i=1}^N u_i[k]$  и  $b_2[k] = K_2 \sum_{i=1}^N q_i \cdot u_i[k]$  характеризуют значения управлений на  $k$ -м шаге.

Изменение значений компонентов матрицы **A** в процессе расчетов показано в таблице 2.

Таблица 2.

**Динамика подстройки значений компонентов матрицы **A** с использованием метода наименьших квадратов**



Полученные в процессе использования метода наименьших квадратов значения компонентов матрицы **A** имеют следующий вид

$$\mathbf{A}[50] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,423 & 0 & -2,66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,25 \cdot 10^{-3} & 0 & 8 \cdot 10^{-3} & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Матрица **A** (13) при идентификации методом наименьших квадратов сохраняет структуру модели (4), а время окончания этапа идентификации  $t > 40$  с, что соизмеримо с допустимым временем.

При изменении внешних условий перемещения крупногабаритного объекта необходимо снова активировать процесс идентификации. Условие активации этапа идентификации  $|y_o(t) - y_m(t)| > \varepsilon$ .

**Выводы и перспективы дальнейших исследований**

Исследование эффективности процедуры идентификации параметров модели перемещения судна на слипе рекуррентным методом стохастической аппроксимации подтвердило проблемы настройки алгоритма, связанные с выбором начальных расчетных значений и весовых коэффициентов, которые влияют как на его сходимость, так и на величину ошибки, а также выявило превышение допустимого времени, отведенного на оценку параметров модели. При идентификации параметров модели для адаптивного управления в реальном времени процессом перемещения крупногабаритного объекта целесообразно использовать метод наименьших квадратов.

**Список использованной литературы**

1. Омельчук А.А. Оптимізація процесів оперативного керування суднопідйомним комплексом типу сліп: дис. ... кандидата техн. наук: 05.13.07 / Омельчук Антон Анатолійович. – Херсон, 2015. – 182 с.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учеб. пособие. / Д.П. Ким– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464с.
3. Omelchuk A.A. Optimal control of the ship's motion at the cross slipway / A.A. Omelchuk, G.V. Rudakova, O.V. Polivoda // Праці Одеського політехнічного університету. – 2015. – Вип. 3(47). – С. 75 – 84.
4. Райбман Н.С. Идентификация объектов управления (обзор) / Н.С. Райбман // Автоматика и телемеханика. – 1979. – Вып. 6. – С. 80 – 93.
5. Киричков В.Н. Автоматика и управление в технических системах. В 11-ти кн. Кн.2. Идентификация объектов систем управления технологическими процессами / В.Н. Киричков; под ред. А.А. Краснопрошиной. – К.: Выща шк. 1990. – 263 с.

УДК 534.1:539.3

Н.В. СМЕТАНКІНА, С.В. УГРИМОВ, О.М. ШУПІКОВ  
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НЕСТАЦІОНАРНОГО  
ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВОГО ОСКЛІННЯ ПРИ РОЗПОДІЛЕНИХ ТА  
ЛОКАЛІЗОВАНИХ СИЛОВИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

*У статті розглядаються питання математичного моделювання напружено-деформованого стану багатошарового оскління при розподілених та локалізованих у просторі навантаженнях. Поведінка оскління моделюється на основі різних двовимірних теорій багатошарових пластин. Досліджено напруження у триплексах при імпульсному та ударному навантаженнях. Результати розрахунку порівнюються із експериментальними даними та даними розрахунку на основі методу скінченних елементів.*

*Ключові слова:* багатошарове оскління, напружено-деформований стан, локалізоване навантаження, удар.

Н.В. СМЕТАНКИНА, С.В. УГРИМОВ, А.Н. ШУПИКОВ  
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОГО  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО ОСТЕКЛЕНИЯ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И  
ЛОКАЛИЗОВАННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ**

*В статье рассматриваются вопросы математического моделирования напряженно-деформированного состояния многослойного остекления при распределенных и локализованных в пространстве нагрузениях. Поведение остекления моделируется на основе разных двумерных теорий многослойных пластин. Исследованы напряжения в триплексах при импульсном и ударном нагружении. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными и данными расчета на основе метода конечных элементов.*

*Ключевые слова:* многослойное остекление, напряженно-деформированное состояние, локализованное нагружение, удар.

N.V. SMETANKINA, S.V. UGRIMOV, O.M. SHUPIKOV  
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine**MATHEMATICAL MODELING OF NONSTATIONARY DEFORMATION PROCESS OF  
MULTILAYER GLAZING AT DISTRIBUTED AND LOCALIZED LOADINGS**

*The paper presents problems of mathematical modeling of the strain-stressed state of a multilayer glazing at the distributed and localized in space load. The glazing behavior is modeled based on different two-dimensional theories of multilayer plates. Stresses in triplexes are investigated at impulse and shock load. Calculation results are compared with experimental data and results of calculation by the finite element method.*

*Keywords:* multilayer glazing, strain-stressed state, localized loading, impact.

**Постановка проблеми**

Багатошарове оскління широко використовується у сучасних транспортних засобах та будівництві. Багатошарова структура дозволяє створити більш безпечні в експлуатації конструкції, які мають меншу вагу. Таке оскління складається з декількох шарів силікатного скла (СС), між якими знаходяться тонкі шари полівінілбутирала (ПВБ). Також у деяких варіантах оскління використовується органічне скло та полікарбонат, але вони є менш стійкими до поверхневих пошкоджень та втрачають із часом свої оптичні характеристики. При цьому СС сприймає основне силове навантаження, а ПВБ поєднує шари у пакеті. При цьому фрагменти СС при руйнуванні шарів залишаються на клейовому шарі та не є додатковою загрозою для людини у вигляді уламків.

Існуючі правила проектування світлопрозорих конструкцій ґрунтуються на аналізі їх міцності при впливі різних навантажень в залежності від призначення оскління. Наприклад, це дія вітрового навантаження на оскління будівель [1, 2], навантаження при зіткненні птаха з осклінням кабіни літака [3], тощо. Ці навантаження розподілені на відносно великій частині поверхні скла, характерний розмір якої значно перевищує товщину пакету. Але досить часто оскління знаходиться під впливом локалізованих



навантажень. Так, оскління локомотивів проектується з урахуванням можливого удару твердим тілом, а при проектуванні будівельного скла у деяких країнах враховується вплив часток, що принесені вітром [4, 5].

**Аналіз публікацій за темою дослідження**

У більшості випадків розрахунок напружено-деформованого стану (НДС) оскління базується на застосуванні класичних двовимірних теорій багатошарових конструкцій, які є орієнтованими на аналіз міцності відносно тонких пластин з неістотною відмінністю механічних властивостей шарів при дії розподілених навантажень. Аналіз НДС оскління при впливі локалізованих навантажень потребує використання більш точних теорій. Ще складнішою є проблема розрахунку відгуку оскління на удар твердим тілом, коли навантаження є локалізованим в просторі, а контактна сила та розмір зони контакту змінюються у часі та заздалегідь невідомі. Детальний аналіз сучасних двовимірних теорій багатошарових пластин наведено у роботах [6, 7].

Таким чином, розробка ефективних методів розрахунку нестационарних коливань багатошарового оскління при локалізованому навантаженні залишається актуальною задачею.

**Мета статті**

Метою роботи є розробка ефективного методу розрахунку параметрів НДС оскління при локалізованому навантаженні, викликаному ударом твердим тілом.

**Основна частина**

**Математична модель багатошарового оскління.** Будемо розглядати багатошарове скло як багатошарову шарнірно оперту пластину, оскільки кріплення оскління здійснюється через гумовий ущільнювач до рамки, яка жорстко закріплюється у отворі. Багатошарова пластина складається з  $I$  шарів сталої товщини  $h_i$ . Пластина віднесена до декартової системи координат, яка зв'язана із зовнішньою поверхнею першого шару. На координатній поверхні  $Ox_1x_2$  конструкція займає область  $\Omega$ , обмежену довільним контуром  $\Gamma$ . На оболонку діють нестационарні навантаження  $\mathbf{P} = \{p_j(x_1, x_2, t)\}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Припускається, що контакт між шарами виключає їхнє розшарування та взаємне проковзування.

Поведінка пластини описується рівняннями узагальненої теорії багатошарових пластин [8 – 10]

$$u_v^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_v + \sum_{k=1}^K \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{vk}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{vk}^i \right], \quad v = 1, 2,$$

$$u_3^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_3 + \sum_{\ell=1}^L \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^\ell u_{3\ell}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^\ell u_{3\ell}^i \right], \quad (1)$$

де  $h_j^k = (h_j)^k$ ,  $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$ ,  $\delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i$ ,  $i = \overline{1, I}$ ;  $u_\alpha^i$  ( $\alpha = \overline{1, 3}$ ) – переміщення точки  $i$ -го шару у

напрямку осі  $Ox_\alpha$ ;  $u_v, u_3, u_{vk}^i, u_{3\ell}^i$  – коефіцієнти розвинення, які є функціями аргументів  $x_1, x_2, t$ ;  $K, L$  – максимальні степені поперечної координати для площинних ( $\alpha = 1, 2$ ) і поперечних ( $\alpha = 3$ ) переміщень точок  $i$ -го шару, які обираються в залежності від необхідної точності.

Прийняті кінематичні гіпотези при  $K=1, L=0$  еквівалентні гіпотезам Е.І. Григолока та П.П. Чулкова [11], при  $K=1, L=1$  уточненій теорії першого порядку [8, 12], при  $K=3, L=2$  – уточненій теорії високого порядку [8].

Деформації шарів визначаються відповідно до формул Коші [8]. Напруження і деформації у шарах пов'язані законом Гука. Зусилля і моменти  $i$ -го шару визначаються за формулою

$$N_{\alpha\beta}^{ik} = N_{\beta\alpha}^{ik} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (x_3 - \delta_{i-1})^k p_{\alpha\beta}^i dx_3, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad i = \overline{1, I},$$

де  $p_{\alpha\beta}^i$  – компоненти тензора напружень в  $i$ -му шарі.

Рівняння руху багатошарової пластини та граничні умови впливають з варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона з урахуванням гіпотез (1).

Рівняння руху в зусиллях та моментах для багатошарової пластини має вигляд [8, 10]:

$$\sum_{i=1}^I [L_\alpha^i - I_{\alpha 1}^i] + p_\alpha = 0,$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_\alpha} + N_{\alpha 2,2}^{ik_\alpha} - k_\alpha N_{\alpha 3}^{ik_\alpha-1} + h_i^{k_\alpha} \sum_{j=i}^{I-1} [L_\alpha^{j+1} - I_{\alpha 1}^{j+1}] - I_{\alpha k_\alpha+1}^i = 0, \quad (2)$$

де  $L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}$ ,  $L_2^i = N_{22,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}$ ,  $L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0}$ ,

$$I_{\alpha r}^i = \frac{\rho_i h_i^r}{r} \left( u_{\alpha 0,tt} + \sum_{k=1}^{K_\alpha} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k,tt}^j + \frac{r h_i^k}{k+r} u_{\alpha k,tt}^i \right] \right), \quad \alpha = \overline{1,3}, \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Кількість рівнянь та граничних умов залежить від числа шарів і дорівнює  $(2K + L)I + 3$ .

**Метод розв’язання.** Метод розв’язання системи рівнянь (2) для прямокутних шарнірно опертих багатошарових пластин полягає у наступному. Переміщення і зовнішні навантаження розвиваються у ряди по функціям, які задовольняють граничні умови, в результаті чого задача про коливання багатошарової пластини зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для пластин, що мають складну форму у плані, для розв’язання використовується метод занурення [8, 12, 13]. Згідно з цим методом замість вихідної пластини розглядається допоміжна шарнірно оперта прямокутна пластина з тією ж композицією шарів. В області  $\Omega$  допоміжна пластина навантажена так само, як і вихідна пластина. Тотожність НДС в області  $\Omega$  допоміжної пластини стану вихідної пластини забезпечується шляхом додавання компенсуючих навантажень  $q_j^{comp}(\varphi, t)$ ,  $j = \overline{1, 3I+3}$ , які неперервно розподілені вздовж контуру  $\Gamma$ .

**Математична модель ударного імпульсу при ударі птахом.** Модель імпульсу тиску, що виникає при зіткненні багатошарового оскління зі птахом, базується на гіпотезі, що птах розглядається як еліпсоїд обертання з півосями  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Експериментально встановлено, що область взаємодії птаха з елементом оскління є еліптичною площадкою [13], а компоненти вектора зовнішнього навантаження в системі (2) можуть бути подані у вигляді

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(\tau_b - t)] F(t),$$

де  $\tau_b$  – час дії імпульсу;  $F(t) = P_0 \left[ 1 - \frac{(x-x_1)^2}{u_b^2} - \frac{(y-y_1)^2}{v_b^2} \right]^{1/2}$ ;  $u_b$  и  $v_b$  – півосі площадки навантаження, які встановлюються на основі експериментальних даних;  $x_1$  и  $y_1$  – координати точки перетинання траєкторії центра маси птаха з елементом оскління.

Залежність  $P_0 = P_0(t)$  також встановлюється на основі експериментальних даних [3, 13].

**Низькошвидкісний удар твердим тілом по осклінню.** Досліджується динамічна поведінка вертикально закріпленого багатошарового скла при ударі твердою часткою по зовнішній поверхні першого шару оскління зі швидкістю  $V_0$ . Аналогічно роботі [4], частка моделюється кулею радіусом  $R$  і масою  $M$ .

Припускається, що область взаємодії кулі зі склом є круг радіусу  $a(t)$ , а контактний тиск розподілений по площадці навантаження, відповідно до закону

$$p_3(x_1, x_2, t) = P_0(t) \left[ 1 - \frac{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}{a^2} \right]^{1/2}, \quad p_1 = p_2 = 0,$$

де  $x_{10}, x_{20}$  – координати точки зіткнення частки зі склом в початковий момент часу.

Система рівнянь, яка описує нестационарну поведінку пластини (2), доповнюється рівнянням руху тіла, що завдає удар, та умовою сумісності переміщень індентора та пластини

$$u_3^1(x_{10}, x_{20}, 0, t) + \alpha(t) - z(t) \geq 0,$$

де  $\alpha(t)$  – контактне зближення,  $z = z(t)$  – переміщення індентора.

Контактне зближення визначалось на основі закону Герца

$$\alpha = k P^{2/3}.$$

Коефіцієнт  $k$ , який залежить від форми і матеріалу взаємодіючих тіл обчислювався за допомогою формул, отриманих О.М. Дінніком [14]

$$k = \left[ \frac{9}{256} \frac{(\theta_1 + \theta)^2}{R} \right]^{1/3}, \quad \theta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}, \quad \theta = \frac{4(1 - \nu^2)}{E},$$

де  $E, \nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона для матеріалу кулі,  $E_1, \nu_1$  – аналогічні характеристики для першого шару пластини.

Радіус області контакту  $a(t)$  обчислюється за формулою

$$a(t) = \left[ \frac{3}{16} R P(t) (\theta + \theta_1) \right]^{1/3}.$$

Розв'язок рівняння руху індентора одержано за допомогою інтегрального перетворення Лапласу. Значення контактної сили визначається з умови сумісності переміщень на кожному кроці за часом.

**Аналіз результатів чисельних досліджень.** Розглянуто процес нестационарного деформування багатошарових пластин при локалізованому імпульсному та ударному навантаженнях.

Досліджено розподіл напружень вздовж товщини тришарових пластин (триплексів) при розподілених і локалізованих навантаженнях. Імпульсне навантаження  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $p_3 = P_0(H(t) - H(t - t_1))$  рівномірно розподілено по прямокутній площадці  $a_i \leq x_i \leq b_i$  ( $i = 1, 2$ ) на зовнішній поверхні першого шару ( $H(t)$  – функція Хевісайда). Час дії навантаження  $t_1 = 1,8 \cdot 10^{-3}$  с.

На рис. 1 наведено розподіл напружень вздовж товщини посередині тришарової пластини ( $A = 0,42$  м,  $B = 0,47$  м,  $h_1 = h_3 = 0,012$  м,  $h_2 = 0,002$  м), зовнішні шари якої виконані із СС з такими характеристиками:  $E_i = 6,67 \cdot 10^4$  МПа,  $\rho_i = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_i = 0,22$  ( $i = 1, 3$ ). Другий шар виконано із ПВБ:  $E_2 = 2,74 \cdot 10^2$  МПа,  $\rho = 1,2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_2 = 0,38$ . Тут  $E_i$  – модуль пружності,  $\nu_i$  – коефіцієнт Пуассона,  $\rho_i$  – щільність  $i$ -го шару. На рис. 1, а показано розподіл напружень вздовж товщини пластини при імпульсному навантаженні, рівномірно розподіленому по всій поверхні першого шару ( $P_0 = 10,13$  кПа), а на рис. 1, б – при імпульсному навантаженні, яке рівномірно розподілено по квадрату із стороною 5 мм посередині пластини ( $P_0 = 80$  МПа). Суцільна лінія відповідає теорії {3,2}, а пунктир – теорії {1,0}.

Встановлено, що під час дії локалізованих навантажень розподіл напружень вздовж товщини пластини під площею навантаження, має нелінійний характер, який не відображає теорія {1,0}. При впливі розподілених навантажень розподіл напружень є лінійним, а дані, які отримані за теоріями {1,0} та {3,2}, практично співпадають.

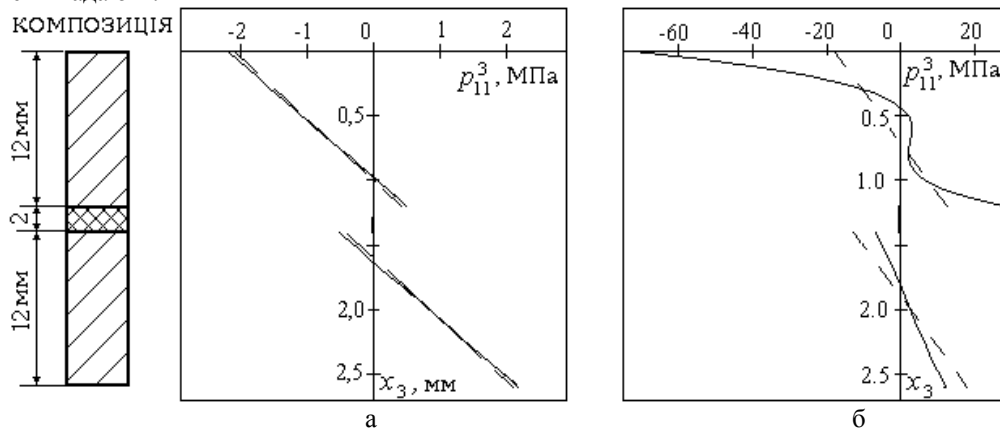


Рис. 1 Розподіл напружень вздовж товщини

Для перевірки вірогідності отриманих результатів проведено порівняння результатів розрахунку НДС реального оскління при ударному впливі з експериментальними даними. Розглянуто деформування авіаційного оскління при ударі птахом та архітектурного оскління при ударі твердими частками. У першому випадку оскління підлягає впливу навантаження, що розподілене по значній частині поверхні скла, а у другому має місце локалізоване навантаження.

Теоретично й експериментально досліджено реакцію елемента оскління літара кабін літака АН-24 на удар птаха. Шари оскління виконані з матеріалів з наступними характеристиками:  $E_i = 6,12 \cdot 10^4$  МПа (модуль пружності),  $\nu_i = 0,22$  (коефіцієнт Пуассона),  $i = 1, 3, 5$ ;  $E_2 = 1$  МПа,  $E_4 = 280$  МПа,  $\nu_i = 0,39$ ,  $i = 2, 4$ ;  $\rho_i = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 1, 3, 5$ ,  $\rho_i = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 2, 4$  (густина матеріалу);  $h_1 = 5$  мм,  $h_2 = 5$  мм,  $h_3 = 6$  мм,  $h_4 = 2$  мм,  $h_5 = 10$  мм (товщини шарів). Розрахунок проводився на основі теорії {1, 0}. Удар

наносився в середину покривного скла паралельно осі фіюзеляжу. Експериментальне дослідження проводилося методом динамічної ширококугової тензометрії [3, 8, 13].

На рис. 2 показана розрахункова схема елемента оскління й позначена точка  $C$ , у якій досліджувалися деформації. Геометричні параметри елемента оскління такі:  $l_1 = 0,36$  м,  $l_2 = 0,39$  м,  $l_3 = 0,34$  м,  $l_4 = 0,45$  м,  $R_i = 0,04$  м,  $i = \overline{1,4}$ . На рис. 3 наведена залежність від часу головної деформації  $\varepsilon_1^5$  в точці  $C$  при ударі птаха 1,74 кг зі швидкістю 99,07 м/с. Результатам розрахунку відповідає суцільна лінія, результатам експерименту – пунктирна. Добре узгодження розрахункових і експериментальних даних підтверджує вірогідність результатів, одержаних за допомогою розробленої методики, що застосовується для розрахунку напружень в елементах оскління.

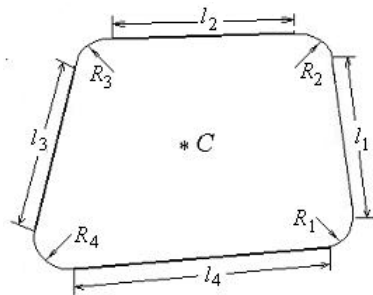


Рис. 2. Розрахункова схема елемента оскління

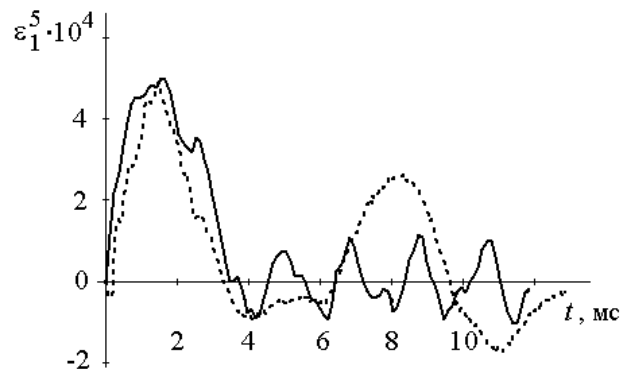


Рис. 3. Реакція елемента оскління на удар птаха

Досліджено динамічну поведінку тришарового архітектурного скла (305 x 305 мм) різної товщини при ударі твердою часткою  $M = 2$  г,  $R = 3,97$  мм на швидкості 9,1 м/с посередині зовнішньої поверхні першого шару. (табл.1). Зовнішні шари конструкції виготовлені із СС з характеристиками  $E = 72$  ГПа,  $\nu = 0,25$ ,  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup> та з'єднані за допомогою ПВБ з характеристиками  $E_2 = 2,74 \cdot 10^2$  МПа,  $\nu_2 = 0,38$ ,  $\rho = 1100$  кг/м<sup>3</sup>. Характеристики твердої частки  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0,29$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Розрахунок проводився на основі теорії [3, 2].

У табл. 1 наведено результати розрахунків максимальних значень деформацій посередині зовнішньої поверхні третього шару за запропонованим методом при використанні теорії [3,2], методом скінченних елементів на базі комплексу LS-DYNA 2D [4, 5], а також експериментальні дані [4, 5].

Таблиця 1

Товщини та деформації шарів тришарового скла

Скло	Товщина шарів, мм			Деформації, $\varepsilon_r \cdot 10^6$		
	1 шар	2 шар	3 шар	Запропонований метод	метод скінченних елементів	експеримент
1	2,98	0,76	2,98	590	580	580
2	4,78	0,76	4,78	333	330	360
3	4,81	1,52	4,81	265	310	260
4	4,66	2,29	4,66	290	310	280

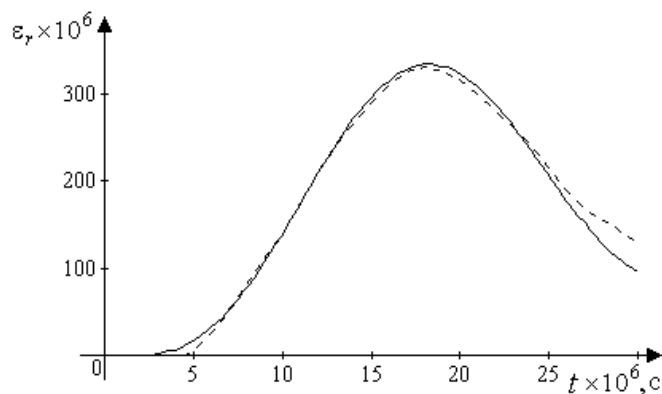


Рис. 4. Деформації в оскління

На рис. 4 показано змінення деформацій за часом посередині зовнішньої поверхні третього шару для скла № 2. Суцільна лінія відповідає результатам розрахунку за запропонованим методом, пунктирна – за методом скінченних елементів на базі комплексу LS-DYNA2D [4, 5].

#### Висновки й перспективи подальших досліджень

Розглянуто процеси деформування багатошарового оскління при розподіленому та локалізованому навантаженні. На основі узагальненої теорії запропоновано метод визначення НДС оскління при ударному навантаженні. На ряді прикладів розрахунку тришарового оскління показано працездатність та високу ефективність запропонованого методу. Встановлено, що при розподіленому навантаженні характер розподілу напружень вздовж товщини пластини є лінійним, а при локалізованому – нелінійним. Тому використання теорій, заснованих на лінійному розподілі переміщень, призводить до значних похибок для випадку, коли розміри площі навантаження є близькими до товщини пластини.

Запропонований підхід дозволяє скоротити витрати і час на передпроектні дослідження і натурні випробування.

Роботу виконано у рамках Цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України «Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин» («Ресурс-2»).

#### Список використаної літератури

1. ДСТУ Б В.2.6-23-2001 (ГОСТ 23166-99) Конструкції будинків і споруд. БЛОКИ ВІКОННІ. Загальні технічні умови – На заміну ГОСТ 23166; Чинний від 01.01.2002. – УДК691.11.023.1/2:006.354; МКС 91.060.50.
2. Борискина И.В., Шведов Н.В., Плотников А.А. Проектирование современных оконных систем гражданских зданий. – М.: АСВ, 2000. – 176 с.
3. Shupikov A.N. Bird dummy for investigating the bird-strike resistance of aircraft components / A.N. Shupikov, S.V. Ugrimov, N.V. Smetankina, V.G. Yareschenko, G.G. Onhirsky, V.P. Ukolov, V.F. Samoylenko, V.L. Avramenko // Journal of Aircraft.– 2013.–Vol. 50, N 3.– P. 817-826.
4. Behr R.A Dynamic strain in architectural laminated glass subjected to low velocity impact from small projectiles / R.A. Behr, P.A. Kremer, L.R. Dharani, F.S. Ji, N.D. Kaiser // Journal of Materials Science.– 1999.–Vol. 34.–P. 5746–5756.
5. Flocker F.W. Low velocity impact resistance of laminated architectural glass / F.W. Flocker, L.R. Dharani // Journal of Architectural Engineering – 1998.– Vol. 1, N 4. – P. 12–17.
6. Григолюк Э.И., Статика упругих слоистых оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – М.: НИИ Механики МГУ, 1999. – 215 с.
7. Пискунов В.Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В.Г. Пискунов, А.О. Рассказов // Прикл. механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22–56.
8. Шупиков А.Н. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов. – Харьков: Изд-во ХНЭУ, 2004.– 252 с.
9. Ugrimov S.V. Layered orthotropic plates. Generalized theory / S.V. Ugrimov, A.N. Shupikov // Composite Structures. – 2015. – Vol. 129, N 1. – P. 224–235.
10. Ugrimov S.V. Generalized theory of multilayer plates //Int. J. Solids and Structures.– 2002.– Vol. 39, N4.– P.819-839.
11. Григолюк Э.И. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных прогибах / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1964. – № 5.– С. 109–117.
12. Smetankina N.V. A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment / N.V. Smetankina, A.N. Shupikov, S.Yu. Sotrikhin, V.G. Yareschenko// Trans. ASME. J. Appl. Mechanics. – 2008.– Vol. 75, N 5. – P. 051004-1–051004-9.
13. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н.В. Сметанкина.– Харьков: Міськдрук, 2011.– 376 с.
14. Динник А.Н. Избранные труды: В 2-х т. / А.Н. Динник.– Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – Т.1. –350 с.

УДК 531.39

С.В. ТАРАСОВ, А.С. ТАРАСОВ

Институт транспортних систем і технологій НАН України

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОНСОЛЬНЫХ ФРАГМЕНТОВ УПРУГИХ  
ЛОПАСТЕЙ Н-РОТОРОВ ДАРЬЕ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА**

*Получена модель динамики консольных лопастей и их фрагментов Н-ротора Дарье для исследования колебательных процессов в потоке воздуха под действием активных аэродинамических сил и консервативных силовых факторов. Предложена методика учета аэродинамических сил, действующих на балки, поперечные сечения которых представляют симметричные аэродинамические профили. Расчетная схема модели позволяет учитывать упругость консольной заделки, реальный разнос мест расположения на хорде центров изгиба, центров масс и давления. Учтена нелинейность распределенных аэродинамических нагрузок. Модель позволяет учитывать изменение координат на хорде центра давления в зависимости от угла атаки. Получена упрощенная линейная математическая модель, которая описывает малые возмущения угловых координат элемента лопасти в её движении вокруг точки подвеса.*

*Ключевые слова: модель динамики, Н-ротор Дарье, консольные лопасти и их фрагменты, аэродинамические силы, линейная модель*

С.В. ТАРАСОВ, А.С. ТАРАСОВ

Институт транспортних систем і технологій НАН України

**МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ КОНСОЛЬНИХ ФРАГМЕНТІВ ПРУЖНИХ ЛОПАТЕЙ Н-РОТОРІВ  
ДАР'Є В СТРУМІ ПОВІТРЯ**

*Отримана модель динаміки консольних лопатей та їх фрагментів Н-ротору Дар'є для дослідження коливальних процесів в струмі повітря під дією активних аеродинамічних сил та консервативних силових факторів. Запропонована методика врахування аеродинамічних сил, діючих на балки, поперечні перерізи яких є симетричні аеродинамічні профілі. Розрахункова схема моделі дозволяє враховувати пружність консольного закріплення, реальний рознос місць розташування на хорді центрів вигину, центрів мас і тиснення. Врахована нелінійність розподілених аеродинамічних навантажень. Модель дозволяє враховувати зміну координат на хорді центру тиснення в залежності від кута атаки. Отримана спрощена лінійна математична модель, яка описує малі збурення куткових координат елементу лопаті в її русі коло точки підвісу.*

*Ключові слова: модель динаміки, Н-ротор Дар'є, консольні лопаті та їх фрагменти, аеродинамічні сили, лінійна модель*

S.V. TARASOV, A.S. TARASOV

Institute of Transport Systems and Technologies of Ukrainian National Academy of Science

**MODELING THE DYNAMICS OF CONSOLE FRAGMENTS OF ELASTIC DARRIEUS ROTOR'S  
BLADES IN THE AIRFLOW**

*A model of the dynamics of cantilever blades and their fragments of Darrieus rotor is obtained for the study of oscillatory processes in the airflow under the action of the active aerodynamic forces and conservative force factors. Proposed an accounting method of the aerodynamic forces acting on the beam which cross-sections are symmetrical airfoils. Design model takes into account the elasticity of the cantilever seal (cap), a real location positions on the chord of bending centers, mass centers and pressure. Noted nonlinearity of distributed aerodynamic loads. The model takes into account the change of coordinates on the chord of the pressure center depending on the angle of attack. We obtain a linear mathematical model that describes the small perturbations of the angular coordinates of the blade element in its movement around the point of suspension.*

*Keywords: dynamics model, Darrieus rotor, cantilevered blade, fragments of cantilevered blade, aerodynamic forces, linear model*

**Постановка проблеми. Аналіз публікацій по темі досліджень**

Типовим елементом Н-роторів Дар'є вертикально-осевих ВЭУ (ВОВЭУ) різного конструктивного виконання є консольні фрагменти лопатей і траверс з різними аеродинамічними профілями сечень. На рисунках 1, 2 приведені в якості типового прикладу існуючі ВОВЭУ з модифікаціями Н-ротора Дар'є малої і середньої потужності, в конструкції роторів яких присутні такі консольні фрагменти. Мало вивченим явищем,

имеющим место в некоторых рабочих режимах таких роторов, является аэроупругая неустойчивость возникающая при совместных изгибно-крутильных колебаниях указанных фрагментов конструкции. Колебательные процессы, возникающие в роторе, могут приводить к разрушению конструкции лопастей и их отрыву в результате усталостных деформаций. На рисунке 3 приведена фотография места отрыва лопасти кессонной конструкции от траверсы на ВОВЭУ мощностью 20 кВт.



Рис. 1. ВОВЭУ малого класса мощности (до 30 кВт) с Н-ротором Дарье



Рис. 2. ВОВЭУ среднего класса мощности (420 кВт) с Н-ротором Дарье

В работах [1-3], посвященных моделированию динамики некоторых режимов работы элементов роторов горизонтально-осевых ВЭУ, роторов Дарье классической конструкции с замкнутой кинематической схемой, вертолетных лопастей, рассмотрены вопросы исследования колебательных процессов ряда упругих элементов конструкции, отличающихся от рассматриваемых характером обтекания и особенностями конструктивных схем.

**Формулирование цели исследования**

Формирование модели динамики консольных лопастей и их фрагментов Н-ротора Дарье для исследования их колебательных процессов в потоке воздуха под действием активных аэродинамических сил и консервативных силовых факторов. Получение на ее основе уравнений малых колебаний в линейном приближении в безразмерной форме и соотношений для исследования свойств возмущенного движения.

**Основная часть**

Расчетная схема модели учитывает упругость консольной заделки, реальный разнос мест расположения на хорде центров изгиба, центров масс и давления, изменение координат на хорде центра давления в зависимости от угла атаки (рис.4).

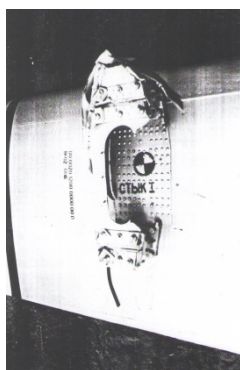


Рис. 3. Фотография места отрыва лопасти кессонной конструкции от траверсы

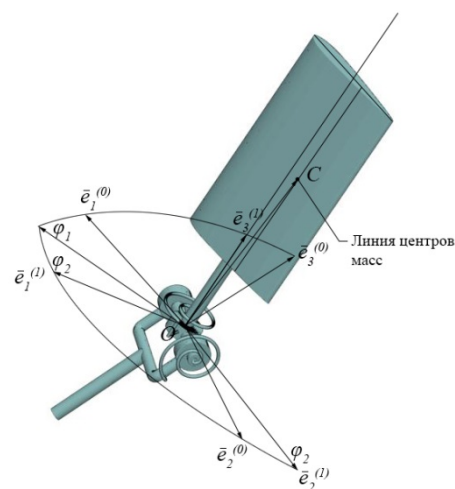


Рис. 4. Кинематическая схема механической системы и базисы отсчета

Для описания текущей конфигурации рассматриваемой механической системы введены базисы отсчета  $\bar{e}^{(0)}$  и  $\bar{e}^{(1)}$ . Неподвижный базис  $\bar{e}^{(0)}$  расположен в месте заделки упругой балки (в эквивалентном

механізмі зв'язан з неподвижною рамкою шарнира  $O$  з полюсом в точці пересічення лінії центрів изгиба и хорды торцевого сечения лопасти (рис.4). Базис  $\bar{e}^{(1)}$  зв'язан з лопастью, имеет полюс в центре шарнира  $O$ , совпадающий с полюсом неподвижного базиса  $\bar{e}^{(0)}$ , а его базисный вектор  $\bar{e}_3^{(1)}$  направлен вдоль линии центрів изгиба лопасти.

Для описания текущей конфигурации механизма в качестве обобщенных координат использованы углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в шарнире  $O$ , реализующем вращательную кинематическую пару 4-го класса. Схема отсчета углов в шарнире приведена на рисунке 4.

Введенные базисы отсчета  $\bar{e}^{(0)}$  и  $\bar{e}^{(1)}$  связывает матрица направляющих косинусов  $A^{10}$  [4]

$$\bar{e}^{(1)} = A^{10} \bar{e}^{(0)}, \quad A^{10} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 & 0 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Для вычисления аэродинамических сил, действующих на механизм, необходимы текущие значения составляющих вектора скорости обтекания лопасти  $\bar{W}$  в плоскости, нормальной к линии центрів изгиба (или нормальной к плоскости проходящей через хорды) и текущие значения угла атаки лопасти. Их расчет производится с использованием проекций вектора  $\bar{W}$  в связанном с лопастью базисе  $\bar{e}^{(1)}$ . Этот вектор формируется из скорости потока воздуха  $\bar{V}_\infty$  и скорости собственного движения лопасти в этом потоке  $\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{R}$  и имеет вид  $\bar{W} = \bar{V}_\infty - \bar{V} = \bar{V}_\infty - \bar{\omega} \times \bar{R}$ , где  $\bar{\omega}$  - вектор мгновенной угловой скорости лопасти как тела с одной неподвижной точкой относительно базиса  $\bar{e}^{(0)}$ , а  $\bar{R}$  - радиус-вектор, задающий положение некоторой характерной точки в базисе  $\bar{e}^{(1)}$ . Матричный аналог развернутого выражения для  $\bar{W}$

в базисе  $\bar{e}^{(1)}$  имеет вид  $W^1 = A^{10} V_\infty^0 - \overset{\vee}{\omega} R^1$ , где  $W^1, \overset{\vee}{\omega}, R^1$  - матрицы, соответствующие векторам  $\bar{W}, \bar{\omega}$  и  $\bar{R}$ , сформированные из их проекций в базис  $\bar{e}^{(1)}$  ( $\overset{\vee}{\omega}$  - кососимметричная матрица);  $V_\infty^0 = (V_1^0 \ V_2^0 \ V_3^0)^T$  - матрица проекций вектора  $\bar{V}_\infty$  в базисе  $\bar{e}^{(0)}$ .

В соответствии со схемой поворотов в шарнире  $O$  (рис.4) проекции вектора мгновенной угловой скорости  $\bar{\omega}$  в базисе  $\bar{e}^{(1)}$  выражаются через обобщенные координаты и скорости следующим образом -  $\omega_1^1 = \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2, \omega_2^1 = \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2, \omega_3^1 = \dot{\varphi}_2$ . С учетом этого матрица проекций  $W^1$  представима в виде

$$W^1 = \begin{pmatrix} V_1^0 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + V_2^0 \sin \varphi_2 - V_3^0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_1 R_3^1 \cos \varphi_2 \\ -V_1^0 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + V_2^0 \cos \varphi_2 + V_3^0 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 R_3^1 \sin \varphi_2 \\ V_1^0 \sin \varphi_1 + V_3^0 \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Такой вид имеют проекции вектора скорости обтекания  $\bar{W}$  в базисе  $\bar{e}^{(1)}$  в случае, если в качестве точки приведения выбрать точку пересечения линии центрів изгиба и хорды, для которой  $R_2^1 = 0$  [4].

Очевидно, что для каждой текущей конфигурации механизма, характеризуемой фиксированными значениями кинематических параметров  $\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ , вектор  $\bar{W}$  для точек проведения расположенных на хорде будет иметь различную величину и направление, т.к. в этом случае  $W_i^1 = W_i^1(R_3^1)$ .

Вектор нормальной составляющей скорости обтекания лопасти  $\bar{W}_n$  (составляющей вектора  $\bar{W}$  в плоскости нормальной к линии центрів изгиба) для каждого поперечного сечения лопасти параллелен плоскости базисных векторов  $\bar{e}_1^{(1)}, \bar{e}_2^{(1)}$ , поэтому  $\bar{W}_n = W_1^1 \bar{e}_1^{(1)} + W_2^1 \bar{e}_2^{(1)}$ . Модуль этого вектора

$W_n = \sqrt{(W_1^1)^2 + (W_2^1)^2}$ . Текущий угол атаки для каждого поперечного сечения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_1^0 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + V_2^0 \sin \varphi_2 - V_3^0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_1 R_3^1 \cos \varphi_2}{-V_1^0 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + V_2^0 \cos \varphi_2 + V_3^0 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 R_3^1 \sin \varphi_2} \quad (3)$$



при предположении, что точка приведения вектора  $\bar{W}$  расположена на линии центров изгиба, т.е.  $W_i^1 = W_i^1(R_3^1)$ ,  $\theta = \theta(R_3^1)$  в каждой текущей конфигурации.

В соответствии с теорией балок, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, на лопасть действуют распределенные сила лобового сопротивления и подъемная сила с векторными компонентами в каждом сечении соответственно. Эти силы действуют в плоскостях, перпендикулярных линии центров изгиба, и зависят от нормальной составляющей  $\bar{W}_n$  скорости обтекания лопасти. Векторная компонента  $\bar{q}_n$  в каждом поперечном сечении лопасти совпадает по направлению с вектором нормальной составляющей  $\bar{W}_n$  вектора скорости обтекания лопасти  $\bar{q}_n = \frac{1}{2} \rho W_n^2 C_n b \bar{e}_n$ , а векторная компонента распределенной подъемной силы  $\bar{q}_L = \frac{1}{2} \rho W_n^2 C_L b \bar{e}_L$  и перпендикулярна  $\bar{q}_n$ . Здесь  $\bar{e}_n$  - базисный вектор, сонаправленный с нормальной составляющей вектора скорости обтекания  $\bar{W}$ ;  $\bar{e}_L$  - базисный вектор, направленный перпендикулярно  $\bar{e}_n$  вверх (для каждого поперечного сечения);  $C_n = C_n(\theta)$ ,  $C_L = C_L(\theta)$  - аэродинамические коэффициенты, зависящие от угла атаки; вид этих функциональных зависимостей определяется экспериментальным путем;  $b$  - характерный размер, например, длина хорды.

Полагается, что рассчитанные таким образом силы приложены в центре давления каждого конкретного сечения. Они в силу зависимости от  $\bar{W}_n$ ,  $C_n$  и  $C_L$  в каждой текущей конфигурации в соответствии со сделанным ранее предположением о точке приведения  $\bar{W}$  являются функциями координаты сечения  $R_3^1$  в базисе  $\bar{e}^{(1)}$ , т.е.  $\bar{q}_n = \bar{q}_n(R_3^1)$ ,  $\bar{q}_L = \bar{q}_L(R_3^1)$ .

Величины нормальной и продольной по отношению к плоскости хорд поперечных сечений результирующих распределенных аэродинамических сил находятся путем интегрирования выражений

$$N = \int_0^L q_1^1 dR_3^1, \quad T = \int_0^L q_2^1 dR_3^1. \quad \text{Здесь} \quad q_1^1 = q_n \sin \theta + q_L \cos \theta \quad \text{и} \quad q_2^1 = q_n \cos \theta - q_L \sin \theta$$

- проекции

равнодействующих векторных компонент  $\bar{q}_n$  и  $\bar{q}_L$  в каждом сечении лопасти в базисе  $\bar{e}^{(1)}$ . Матрицы проекций векторов  $\bar{N}$  и  $\bar{T}$  в базисе  $\bar{e}^{(1)}$  имеют вид  $N^1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ ,  $T^1 = \begin{pmatrix} 0 & T_2^1 & 0 \end{pmatrix}^T$ .

Аэродинамические силы  $\bar{q}_n$  и  $\bar{q}_L$ , будучи приложенными в центрах давления сечений лопасти, создают распределенный скручивающий аэродинамический момент относительно линии центров изгиба. В каждом сечении составляющая этого момента будут определяться функцией  $\mu = -[q_n(\tau_d - \tau_0) \sin \theta + q_L(\tau_d - \tau_0) \cos \theta]$ , а величина равнодействующего скручивающего момента

$$\text{определяется интегралом} \quad M = \int_0^L \mu dR_3^1. \quad \text{Его направление совпадает с базисным вектором} \quad \bar{e}_3^{(1)}, \quad \text{а матрица}$$

$$\text{проекций в базисе} \quad \bar{e}^{(1)} \quad \text{имеет вид} \quad M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_3^1 \end{pmatrix}^T.$$

Координаты  $\tau_d$  центра давления и  $\tau_0$  центра изгиба для каждого сечения отсчитываются от носка профиля лопасти. Координата центра давления для каждого сечения является функцией его угла атаки, так как определяется с использованием графической зависимости коэффициента давления  $C_d$  от угла атаки  $\theta$  по формуле  $\tau_d = C_d(\theta)b$ , где  $b$  - хорда профиля сечения.

Векторы нормальной и продольной результирующих аэродинамических сил создают моменты относительно центра шарнира  $O$ . Плечи этих сил равны расстояниям от полюса  $O$  до точек пересечения плоскостей их действия с осью, задаваемой базисным вектором  $\bar{e}_3^{(1)}$  (осью центров изгиба в нашем случае).

Для нахождения координат точек приложения равнодействующих на оси базисного вектора  $\bar{e}_3^{(1)}$  воспользуемся соотношениями для определения координаты центра тяжести эпюр, распределённых по произвольному закону сил. Координата определяется из отношения статического момента площади эпюры относительно оси координат к площади эпюры, а именно

$$z_N = \frac{\int_0^L z q_1^1(z) dz}{\int_0^L q_1^1(z) dz} = \frac{\int_0^L z (q_n \sin \theta + q_L \cos \theta) dz}{\int_0^L (q_n \sin \theta + q_L \cos \theta) dz}, \quad z_T = \frac{\int_0^L z q_2^1(z) dz}{\int_0^L q_2^1(z) dz} = \frac{\int_0^L z (q_n \cos \theta - q_L \sin \theta) dz}{\int_0^L (q_n \cos \theta - q_L \sin \theta) dz} \quad (4)$$

Таким образом, в текущем положении лопасти, приложенные к ней распределённые аэродинамические силы приводятся к векторам нормальной и продольной равнодействующим силам  $\bar{N}$  и  $\bar{T}$  с координатами их точек приложения на ней  $z_N$  и  $z_T$ , а также вектору результирующего скручивающего момента  $\bar{M}$  относительно базисного вектора  $\bar{e}_3^{(1)}$  (или линии центров изгиба).

При нахождении обобщенных аэродинамических сил, приведенных к обобщенным координатам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , найденную систему аэродинамических сил приводим к центру шарнира  $O$ . Главный момент определяется выражением  $\bar{M}_0 = \bar{M} + \bar{r}_N \times \bar{N} + \bar{r}_T \times \bar{T}$ , где  $\bar{r}_N$ ,  $\bar{r}_T$  - радиусы-векторы, соединяющие полюс  $O$  с точкой пересечения линий действия сил  $\bar{N}$  и  $\bar{T}$  с линией центров изгиба соответственно. Векторные проекции главного момента от совокупности аэродинамических силовых факторов, приложенных к лопасти в базисе  $\bar{e}^{(1)}$ , имеют вид:  $\bar{M}_{01}^1 = -r_T T_2^1 \bar{e}_1^{(1)}$ ,  $\bar{M}_{02}^1 = r_N N_1^1 \bar{e}_2^{(1)}$ ,  $\bar{M}_{03}^1 = M_3^1 \bar{e}_3^{(1)}$ .

Обобщенные силы  $Q_{1a}$  и  $Q_{2a}$  за счет действия аэродинамических силовых факторов находим как коэффициенты при виртуальных перемещениях  $\delta\varphi_1$  и  $\delta\varphi_2$  в выражении элементарной работы главного момента аэродинамических сил  $\delta w = -r_T T_2^1 \sin \varphi_2 \delta\varphi_1 + r_N N_1^1 \cos \varphi_2 \delta\varphi_1 + M_3^1 \delta\varphi_2$ . Таким образом  $Q_{1a} = -r_T T_2^1 \sin \varphi_2 + r_N N_1^1 \cos \varphi_2$ ,  $Q_{2a} = M_3^1$ .

Обобщенные силы, обусловленные потенциальными силовыми факторами, – силами реакции пружин в шарнире  $O$  и слой веса лопасти - находятся с использованием выражения потенциальной энергии системы  $\Pi = \Pi_{II} + \Pi_P = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \varphi_2^2 + mg \left( \frac{L}{2} \cos \varphi_1 + r_C \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \right)$  следующим образом:

$$Q_{1II} = \partial \Pi / \partial \varphi_1 = c_1 \varphi_1, \quad Q_{2II} = \partial \Pi / \partial \varphi_2 = c_2 \varphi_2, \quad Q_{1P} = -\partial \Pi / \partial \varphi_1 = mg \left( \frac{L}{2} \sin \varphi_1 - r_C \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \right),$$

$Q_{2P} = -\partial \Pi / \partial \varphi_2 = -mg (r_C \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)$ . При определении обобщенной консервативной силы, обусловленной силой веса, полагается, что центры масс всех поперечных сечений лопасти в силу их симметричности лежат на их хордах. Так как лопасть по предположению имеет постоянное по длине поперечное сечение, а ее масса равномерно распределена по длине, то центры масс всех сечений лежат на одной линии – линии центров масс – отстоящей от линии центров изгиба на расстоянии  $r_C$ . В этом случае центр масс лопасти расположен в ее срединном сечении на расстоянии  $r_C$  от линии центров изгиба, а его положение в базисе  $\bar{e}^{(1)}$  задается радиус-вектором  $\bar{R}_C$  (рис.4).

При выводе уравнений динамики механизма использовался формализм уравнений Лагранжа 2-го рода. Шарнирно закрепленная лопасть представляет собой вращающееся тело с одной неподвижной точкой.

Ее кинетическая энергия  $T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \Theta^0 \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \left[ (I_{11}^0 \sin^2 \varphi_2 + I_{22}^0 \cos^2 \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + I_{33}^0 \dot{\varphi}_2^2 + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 I_{23}^0 \cos \varphi_2 \right]$ .

При получении развернутой записи выражения кинетической энергии использовался тензор инерции лопасти в точке  $O$  в виде

$$\Theta^0 = \Theta^C + m \left( E r_C^2 - \bar{r}_C \bar{r}_C \right) = \begin{pmatrix} I_{11}^C + m(y_C^2 + z_C^2) & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^C + m z_C^2 & -m y_C z_C \\ 0 & -m y_C z_C & I_{33}^C + m y_C^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $m$  - масса лопасти;  $\bar{r}_C$  - радиус-вектор центра масс по отношению к точке  $O$ . В соответствии с лагранжевым формализмом уравнения динамики имеют вид

$$\begin{cases} (I_{11}^0 \sin^2 \varphi_2 + I_{22}^0 \cos^2 \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + I_{23}^0 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \\ + 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (I_{11}^0 + I_{22}^0) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - I_{23}^0 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = Q_1 \\ I_{23}^0 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_1 + I_{33}^0 \ddot{\varphi}_2 - (I_{11}^0 + I_{22}^0) \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1^2 = Q_2 \end{cases} \quad (6)$$

Стоящие в правой части обобщенные силы формируются из обобщенных сил, обусловленных аэродинамическими силовыми факторами, и группы обобщенных сил, обусловленных потенциальной энергией сил гравитации и упругости.

Исследование устойчивости движения консольных фрагментов лопастей и траверс для выяснения условий возникновения флаттера проведены на основе уравнений малых колебаний в линейном приближении в безразмерной форме. Они получены из нелинейных дифференциальных уравнений (6) [4]. В рамках теории малых возмущений система (6) запишется следующим образом

$$\begin{aligned} I_{22}^0 \ddot{\varphi}_1 + I_{23}^0 \ddot{\varphi}_2 &= Q_1, \\ I_{23}^0 \dot{\varphi}_1 + I_{33}^0 \dot{\varphi}_2 &= Q_2. \end{aligned} \quad (7)$$

В [4] найден упрощенный вид обобщенных сил  $Q_i (i=1,2)$  с учетом следующего из экспериментальных данных приближения  $C_{n0} \ll \dot{C}_{L0}$ ; полагалось, что поток воздуха направлен вдоль хорды покоящейся лопасти и имеет скорость  $U$ , т.е.  $V_\infty^0 = (0 \ 0 \ U)^T$ ; моменты сил веса в линейном приближении не учитывались

$$Q_1 = \frac{1}{2} \dot{M}_{L0} \left( -\frac{2}{3} \frac{L}{U} \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 \right) - c_1 \varphi_1, \quad Q_2 = -\dot{m}_{L0} \left( \varphi_2 - \frac{L}{2U} \dot{\varphi}_1 \right) - c_2 \varphi_2, \quad (8)$$

где  $\dot{M}_{L0} = \frac{1}{2} \rho U^2 S L \dot{C}_{L0}$  - вращательная (по углу атаки) производная момента подъемной силы  $Q_L$  на плече, равном размаху лопасти;  $\dot{m}_{L0} = \frac{1}{2} \rho U^2 S h_0 \dot{C}_{L0}$  - вращательная производная момента подъемной силы на плече  $h_0$ , равном смещению центра давления

$$h_0 = C_{d0} b - \tau_0 > 0. \quad (9)$$

Величина  $h_0$  представляет собой смещение центра давления относительно центра тяжести. Для статической аэродинамической устойчивости профиля необходимо, чтобы  $h_0 > 0$ . Результатом упрощений [4] является система двух уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} I_{22}^0 \ddot{\varphi}_1 + I_{23}^0 \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \dot{M}_{L0} \left( -\frac{2}{3} \frac{L}{U} \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 \right) + c_1 \varphi_1 &= 0, \\ I_{23}^0 \dot{\varphi}_1 + I_{33}^0 \dot{\varphi}_2 + \dot{m}_{L0} \left( \varphi_2 - \frac{L}{2U} \dot{\varphi}_1 \right) + c_2 \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнениях (10) хорошо представлены слагаемые, описывающие инерционные, аэродинамические и упругие моменты, действующие на лопасть в её возмущенном движении вращения вокруг точки подвеса  $O$ . Источник возмущенного движения определяется величинами малых возмущений в начальных условиях. Нулевым значениям начальных возмущений соответствует тривиальное решение системы (состояние покоя). Масштабирование времени  $t = \frac{L}{U} \bar{t}$  приводит (10) к виду (точка сверху это уже производная по безразмерному времени  $\bar{t}$ )

$$\begin{aligned} J_{22}^0 \ddot{\varphi}_1 + J_{23}^0 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{3} \dot{M}_{L0} \dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \dot{M}_{L0} \varphi_2 + c_1 \varphi_1 &= 0, \\ J_{23}^0 \dot{\varphi}_1 + J_{33}^0 \dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \dot{m}_{L0} \dot{\varphi}_1 + (\dot{m}_{L0} + c_2) \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$J_{22}^0 = I_{22}^0 \frac{U^2}{L^2}, \quad J_{23}^0 = I_{23}^0 \frac{U^2}{L^2}, \quad J_{33}^0 = I_{33}^0 \frac{U^2}{L^2}. \quad (12)$$

Матричный аналог (11) имеет вид

$$A\ddot{\Phi} + B\dot{\Phi} + C\Phi = 0, \quad (13)$$

где  $A, B, C$  – матрицы коэффициентов инерционных, аэродинамических и упругих моментов

$$A = \begin{pmatrix} J_{22}^0 & J_{23}^0 \\ J_{23}^0 & J_{33}^0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \dot{M}_{L0} & 0 \\ -\frac{1}{2} \dot{m}_{L0} & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & -\frac{1}{2} \dot{M}_{L0} \\ 0 & (\dot{m}_{L0} + c_2) \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Нетривиальные частные решения системы (13) ищутся в виде

$$\Phi = We^{kt}, W = (W_1 W_2)^T. \quad (15)$$

где  $W$  – вектор, определяемый начальными условиями.

Подстановка (15) в (13) дает систему уравнений по определению вектора начальных возмущений  $W$

$$(Ak^2 + Bk + C)W = 0. \quad (16)$$

с характеристическим уравнением [4]

$$a_0 k^4 + a_1 k^3 + a_2 k^2 + a_3 k + a_4 = 0 \quad (17)$$

и коэффициентами, определяемыми равенствами

$$a_0 = J_{22}^0 J_{33}^0 - J_{23}^0 J_{23}^0, a_1 = \frac{1}{3} \dot{M}_{L0} J_{33}^0 + \frac{1}{2} \dot{m}_{L0} J_{23}^0, a_2 = (\dot{m}_{L0} + c_2) J_{22}^0 + \frac{1}{2} \dot{M}_{L0} J_{23}^0 + c_1 J_{33}^0, \quad (18)$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \dot{M}_{L0} \left( \frac{1}{4} \dot{m}_{L0} + c_2 \right), a_4 = c_1 (\dot{m}_{L0} + c_2).$$

Все коэффициенты характеристического уравнения положительны. Их значения определяются семью параметрами. Три из них - инерционные моменты  $J_{22}^0, J_{23}^0, J_{33}^0$  лопасти (приведенные к масштабу времени); два параметра  $\dot{M}_{L0}, \dot{m}_{L0}$  - моменты аэродинамического воздействия на каждый вид вращения лопасти; два параметра  $c_1, c_2$  характеризуют упругие свойства в точке подвеса.

Таким образом, исследование свойств возмущенного движения лопасти в линейном приближении свелось к определению четырех корней алгебраического уравнения (17) в зависимости от семи параметров.

#### Выводы

Получена модель динамики консольных лопастей и их фрагментов Н-ротора Дарье для исследования колебательных процессов в потоке воздуха под действием активных аэродинамических сил и консервативных силовых факторов – их веса и сил упругих реакций в месте консольной заделки. Предложена методика учета аэродинамических сил, действующих на балки, поперечные сечения которых представляют симметричные аэродинамические профили. Расчетная схема модели позволяет учитывать упругость консольной заделки, реальный разнос мест расположения на хорде центров изгиба, центров масс и давления. Учтена нелинейность распределенных аэродинамических нагрузок. Модель позволяет учитывать изменение координат на хорде центра давления в зависимости от угла атаки.

Модель динамики лопасти подвергнута асимптотическому анализу в рамках теории малых возмущений ее движения в окрестности положения равновесия. Получена упрощенная линейная математическая модель, которая описывает малые возмущения угловых координат элемента лопасти в её движении вокруг точки подвеса. Сформированная линейная модель движения лопасти позволила найти простые выражения для величин, описывающих инерционные, аэродинамические и упругие моменты и учесть при этом все основные внешние факторы, влияющие на характеристики возмущений.

#### Список использованной литературы

1. Thresher R.W. A computer analysis of wind turbine blade dynamic loads/R.W.Thresher, A.D.Wright, E.L.Hershberg//Transaction of the ASME. Journal of Solar Energy Engineering. – 1986. – Vol.108,№2. – P.17-25.
2. Popelka D. Aeroelastic Stability Analysis of a Darrieus Wind Turbine/SANDIA National Laboratory, SANDIA Report SAND82-0672, February 1982.
3. Джонсон У.Теория вертолета:Кн.2/У.Джонсон. – М.:Мир, 1983. – 516с.
4. Разработка прикладных методов моделирования и расчета аэродинамики и динамики перспективных систем энергообеспечения: Отчет о НИР (промежуточн.)/ИТСТ НАН Украины «Трансмаг»; рук. Дзензерский В.А.; исполн. Тарасов С.В. – Днепропетровск, 2014. – 315с. – ГР 0110U006964.

УДК 004.942:[519.6+519.873]

Д.О. ТОПЧИЙ, А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могилы, г. Николаев

### КОМПЬЮТЕРНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВЕНАДЦАТЬЮ ТЕРМОЭЛЕМЕНТАМИ. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

*В статье представлены результаты компьютерного тестирования нестационарного температурного поля квадратной пластины с двенадцатью термоэлементами с использованием стандартного базиса бикубической интерполяции. Благодаря использованию программных комплексов MathCAD 14 и Компас 3D V11 были получены иллюстративные образы двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве нестационарного температурного поля в фиксированные моменты времени.*

*Ключевые слова: серендипов конечный элемент третьего порядка, базисная функция, нестационарное температурное поле, динамические термоэлементы.*

Д.О. ТОПЧИЙ, А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили, м. Миколаїв

### КОМП'ЮТЕРНЕ ТЕСТУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВЕНАДЦЯТЬМА ТЕРМОЕЛЕМЕНТАМИ. ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ

*У статті надаються результати комп'ютерного тестування нестационарного температурного поля квадратної пластины з дванадцятьма термоелементами з використанням стандартного базису бікубічної інтерполяції. Завдяки використанню програмних комплексів MathCAD 14 і Компас 3D V11 були отримані ілюстративні образи двовимірних поверхонь у тривимірному евклидовому просторі нестационарного температурного поля у фіксовані моменти часу.*

*Ключові слова: серендипів скінченний елемент третього порядку, базисна функція, нестационарне температурне поле, динамічні термоелементи.*

D.O. TOPCHYI, A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University, c. Nikolaev

### COMPUTER TESTING OF A NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELD OF A SQUARE PLATE WITH TWELVE THERMOELEMENTS. REVIEW OF THE RESULTS

*In the article the results of computer testing of a non-stationary temperature field of a square plate with twelve thermoelements with the using of a standard basis of bicubic interpolation are shown. Due to use of MathCAD 14 and Компас 3D V11 software solutions the illustrative images of the two-dimensional surfaces in a three-dimensional euclidian space of a non-stationary temperature field were obtained at random points of time.*

*Keywords: serendipity finite element of the third order, basis function, non-stationary temperature field, dynamic thermoelements.*

#### Введение

Компьютерная диагностика (тестирование) стационарных и нестационарных физических полей (в частном случае – температурных полей), на пластинах и брусках различных конфигураций, является актуальной задачей в инженерных расчётах, а именно: 1) визуализация формообразования поверхностей (рельефов) (не)-стационарных физических полей; 2) нахождение искомой физической величины (температуры) в произвольной точке пластины (бруска) в любой (произвольный) момент времени.

Влияние базиса на исследуемое поле элемента очень велико: некоторые базисы в отдельных точках занижают поле, а некоторые – завышают его. С помощью компьютерного тестирования удалось обнаружить явление стойкости серендиповых поверхностей по отношению к базису. Были сформулированы условия стойкости поля относительно базиса на серендиповых элементах 2-го, 3-го и 4-го порядков, как в двумерном, так и в трёхмерном пространствах. Фактически, представители конструктивной теории серендиповых аппроксимаций рассматривали аспекты стационарного температурного поля [1–11]. Рассмотрим серендипов конечный элемент (СКЭ) заданной конфигурации (треугольник, квадрат, правильный  $k$ -угольник, куб) на границе которого равномерно расположены  $n$  узлов. С геометрической и топологической точек зрения [12, 13] задача аппроксимации заключается в получении двумерного многообразия  $M^2$  (поверхности гомеоморфной плоскости  $E^2$ ) –  $U(x,y)$  в трёхмерном евклидовом

пространстве  $E^3$  ( $x, y, z$  – измерения) и, в общем случае, трёхмерного ( $\max \dim(M) = 4$ ) многообразия  $M^3 - U(x,y,z)$  в четырёхмерном евклидовом пространстве  $E^4$ , которые проходят через точки  $(x_i, y_i, U_i)$  и  $(x_i, y_i, z_i, U_i)$  соответственно. Уравнения поверхностей в форме Лагранжа:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot U_i, \quad U(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot U_i, \quad \text{где } \{N_i\} - \text{ базис СКЭ, } U_i - \text{ известные}$$

аппликаты (темпусаты). Полевые функции  $U(x,y)$  и  $U(x,y,z)$  моделируют поверхности стационарных температурных полей  $T(x,y)$  и  $T(x,y,z)$  соответственно. Наличие серендипового конечного элемента предоставляет возможность сформулировать краевую задачу с дискретными условиями Дирихле на границе. Температуры  $T(x,y)$  или  $T(x,y,z)$  в произвольной точке пластины (бруска), заданной геометрической формы, определяются через набор (множество) граничных температур  $\{T_i\}$  с помощью следующих

$$\text{интерполяционных полиномов: } T(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot T_i, \quad T(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot T_i. \text{ В каждом граничном}$$

узле  $i$  функционирует термоэлемент, который поддерживает постоянную температуру. В конце 20-го века была создана информационная технология на языке Turbo Pascal [14] для компьютерной диагностики скалярных физических полей.

Уравнения нестационарных поверхностей  $U(x,y,t)$  (в строгом смысле – трёхмерное ( $\max \dim(M) = 4$ ) многообразие в четырёхмерном евклидовом пространстве  $E^4$ ) и  $U(x,y,z,t)$  ((четырёх)-трёхмерное ( $\max \dim(M) = 5$ ) многообразие в пятимерном евклидовом пространстве  $E^5$ ), которые проходят через точки  $(x_i, y_i, U_i(t))$  и  $(x_i, y_i, z_i, U_i(t))$  соответственно, в форме Лагранжа имеют следующий вид:

$$U(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot U_i(t), \quad U(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot U_i(t), \quad \text{где } \{N_i\} - \text{ базис СКЭ, } U_i(t) - \text{ функции}$$

изменения аппликат (темпусат). Полевые функции  $U(x,y,t)$  и  $U(x,y,z,t)$  моделируют поверхности нестационарных температурных полей  $T(x,y,t)$  и  $T(x,y,z,t)$  соответственно. Очевидно, что наличие серендипового конечного элемента даёт возможность сформулировать "нестандартную" краевую задачу с дискретными условиями Дирихле на границе. Температуры  $T(x,y,t)$  или  $T(x,y,z,t)$  в произвольной точке пластины (бруска) в любой момент времени определяются через набор (множество) граничных температур

$$\{T_i(t)\} \quad \text{с помощью интерполяционных полиномов: } T(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot T_i(t),$$

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot T_i(t). \text{ В каждом граничном узле } i \text{ функционирует динамический термоэлемент}$$

(который имеет собственный температурный режим). Вышеуказанная формулировка "нестандартной" краевой задачи является тривиальным следствием (расширением) аналогичной задачи для стационарного поля.

Иллюстративный образ  $U(x,y,z)$  в трёхмерном евклидовом пространстве  $E^3$  ( $x, y, z$  – измерения) является отображением (проекцией) трёхмерного ( $\max \dim(M) = 4$ ) многообразия  $M^3$  на  $E^3$ . Иллюстративный образ  $U(x,y,t)$  в трёхмерном евклидовом пространстве  $E^3$  ( $x, y, z$  – измерения) является отображением (проекцией) трёхмерного ( $\max \dim(M) = 4$ ) многообразия  $M^3$  на  $E^3$ . Иллюстративный образ  $U(x,y,z,t)$  в трёхмерном евклидовом пространстве  $E^3$  ( $x, y, z$  – измерения) является отображением (проекцией) четырёх-трёхмерного ( $\max \dim(M) = 5$ ) многообразия на  $E^3$ . А ргіогі, обладая множеством фиксированных значений времени ( $t = \text{fix}$ ), получение иллюстративного образа  $U(x,y,t)$  в трёхмерном евклидовом пространстве  $E^3$ , автоматически сводится к получению двумерного многообразия  $M^2 - U(x,y)$  (имеет место процедура отображения  $E^2 \rightarrow E^3$ ).

С помощью программных пакетов Компас 3D V11, MathCAD 14, Maple 17 было осуществлено тестирование (визуализация) нестационарных температурных полей  $U(x,y,t)$  и  $U(x,y,z,t)$  на следующих серендиповых конфигурациях: 1) квадрат с четырьмя термоэлементами (билинейная интерполяция) [15];

2) квадрат с восемью термоэлементами (биквадратическая интерполяция) с использованием стандартного и альтернативного базисов [16]; 3) квадрат с двенадцатью термоэлементами (бикубическая интерполяция) с использованием альтернативного базиса [17]; 4) гексагон с шестью термоэлементами [18]; 5) треугольник с шестью термоэлементами [19]; 6) куб с тридцатью двумя термоэлементами с использованием стандартного и альтернативного базисов [16].

На основе результатов конструктивной теории серендиповых аппроксимаций с использованием компоненты из "the theory of plafales" [20–22] была создана информационная технология на С# [23] для тестирования нестационарных физических (температурных) полей. Ключевое назначение указанной информационной технологии – рендеринг в режиме реального времени (обработка результатов "на лету") процедуры визуализации полевых функций  $U(x, y, t)$ .

#### Анализ последних достижений и публикаций

В основе работы лежат публикации [15–19].

#### Формулирование цели исследования

Основная цель статьи – визуализация двумерных поверхностей нестационарного температурного поля в фиксированные моменты времени с использованием стандартного базиса СКЭ третьего порядка.

#### Изложение основного материала исследования

Зададим температурные режимы термоэлементов в двенадцати узлах серендипового конечного элемента третьего порядка (рис. 1):

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \cos t; T_2(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right); T_3(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right); T_4(t) = \sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right); \\ T_5(t) &= \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right); T_6(t) = \sin\left(6t + \frac{\pi}{4}\right); T_7(t) = \cos\left(7t + \frac{\pi}{2}\right); T_8(t) = \sin\left(8t + \frac{\pi}{3}\right); \\ T_9(t) &= \cos\left(9t + \frac{\pi}{2}\right); T_{10}(t) = \sin\left(9t + \frac{\pi}{6}\right); T_{11}(t) = \cos\left(9t + \frac{\pi}{4}\right); T_{12}(t) = \sin\left(10t + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Температура в произвольной точке квадратной пластины и в любой момент времени определяется следующей формулой:

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^{12} N_i(x, y) \cdot T_i(t), \quad (2)$$

где  $N_i(x, y)$  – базисные функции бикубической интерполяции,  $T_i(t)$  – температурные режимы термоэлементов.

Стандартный базис бикубической интерполяции [24]:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{32}(1+x)(1-y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{32}(1+x)(1+y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_4(x, y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1+y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_5(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-3x), \quad N_6(x, y) = \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1+3x), \\ N_7(x, y) &= \frac{9}{32}(1-y^2)(1+x)(1-3y), \quad N_8(x, y) = \frac{9}{32}(1-y^2)(1+x)(1+3y), \\ N_9(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1+y)(1+3x), \quad N_{10}(x, y) = \frac{9}{32}(1-x^2)(1+y)(1-3x), \\ N_{11}(x, y) &= \frac{9}{32}(1-y^2)(1-x)(1+3y), \quad N_{12}(x, y) = \frac{9}{32}(1-y^2)(1-x)(1-3y). \end{aligned} \quad (3)$$

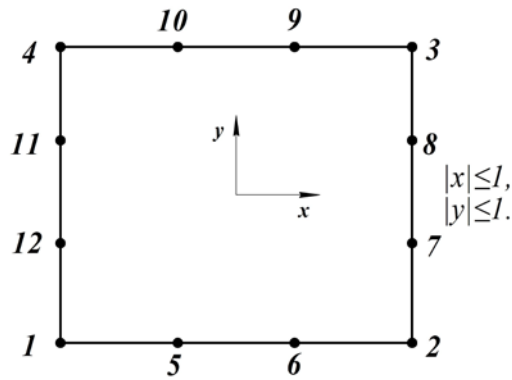


Рис. 1. Серендипов конечный элемент третьего порядка

С помощью программных комплексов MathCAD 14 и Компас 3D V11 были получены иллюстративные образы двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве нестационарного температурного поля (2). Продемонстрируем скриншоты (рис. 2, рис. 3) в следующие моменты времени:  $t = 10$  с, 30 с, 50 с, 100 с.

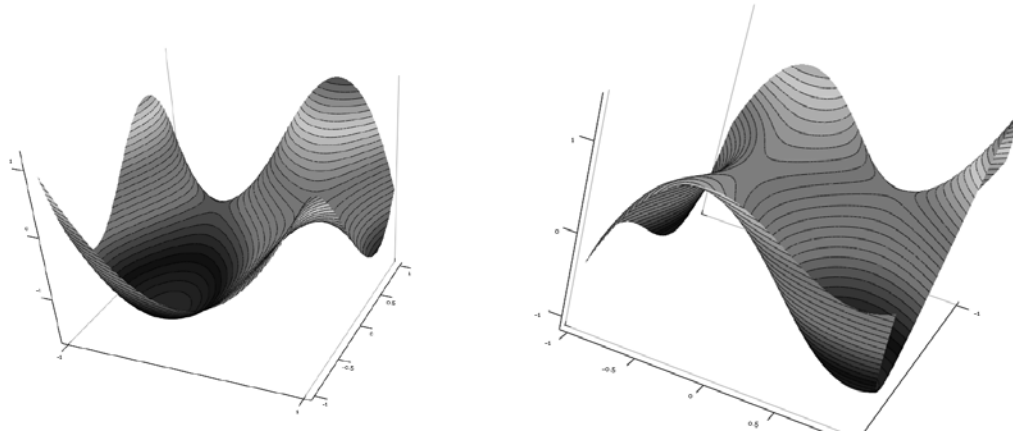


Рис. 2. Поверхности температурных полей  $t = 10$  с (слева) и  $t = 30$  с (справа)

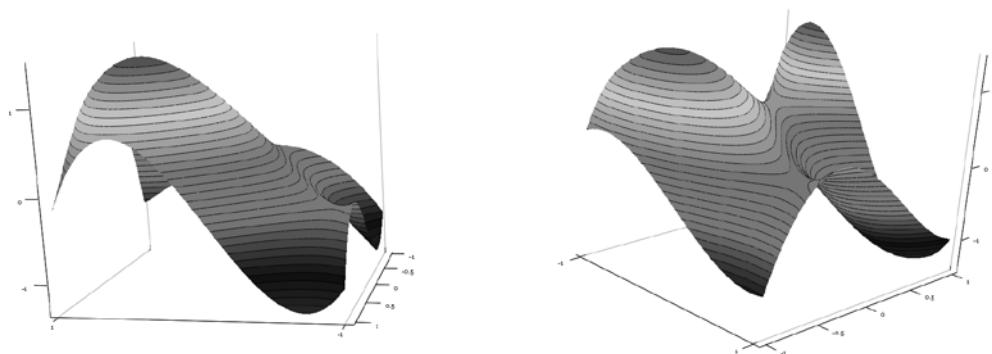


Рис. 3. Поверхности температурных полей  $t = 50$  с (слева) и  $t = 100$  с (справа)

### Выводы

Благодаря использованию программных комплексов MathCAD 14 и Компас 3D V11 были получены иллюстративные образы двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве нестационарного температурного поля в фиксированные моменты времени. Существующие программные комплексы, такие как MathCAD и Maple, при выполнении вышеописанной задачи – визуализации поверхности нестационарного физического (температурного) поля, выполняют пре-рендеринг в отвлечённом режиме. Информационная технология [23], практической реализацией которой выступает программно-технический



комплекс "Тестирование нестационарных температурных полей с динамическими термоэлементами", реализует визуализацию в режиме реального времени, обладает удобным пользовательским интерфейсом (юзабилити) и не имеет аналогов. На основании предлагаемой методики возникает интерес осуществить тестирование нестационарного температурного поля пластины квадратной формы с шестнадцатью термоэлементами и октагональной формы соответственно.

#### Список использованной литературы

1. Гучек П.И. Моделирование конечных элементов серендипова семейства для исследования температурных полей / П.И. Гучек, Е.И. Литвиненко, М.С. Буба, А.Н. Хомченко // Проблемы пожарной безопасности: сб науч. тр. – К.: МВД Украины, 1995. – С. 75 – 77.
2. Камаева С.О. Анализ стойкости поля относительно базисов пространственного серендипового элемента 2-го порядка / С.О. Камаева, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. – Вып. 1 (34). – С. 13 – 16.
3. Камаева С.О. Ансамблирование конечных элементов с альтернативными базисами / С.О. Камаева // Материалы V международной научно-практической конференции "Актуальные проблемы современных наук – 2009". – Польша, 2009. – Т. 21. – С. 74 – 76.
4. Камаева С. О. Восстановление температурного поля пластины невыпуклой формы / С. О. Камаева // Материалы V международной научно-практической конференции "Эффективные инструменты современных наук – 2009". – Прага, 2009. – Т. 14. – С. 23 – 26.
5. Камаева С.О. Геометрические модели и методы конструктивного восстановления физических полей : дисс. ... кандидата техн. наук: 01.05.02 / Светлана Олеговна Камаева. – Харьков, 2010. – 218 с.
6. Камаева С.О. Исследование температурного поля в областях невыпуклой формы / С.О. Камаева // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2007. – Вып. 2 (28). – С. 137 – 141.
7. Камаева С.О. Стойкость скалярного поля относительно базисов серендипового элемента / С.О. Камаева, А.Н. Хомченко // Геометрическое и компьютерное моделирование. – Харьков, 2009. – Вып. 22. – С. 25 – 31.
8. Хомченко А.Н. Геометрическое моделирование стационарных тепловых полей в областях сложной формы / А.Н. Хомченко, С.О. Камаева // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелитополь, 2008. – Вып. 4. Прикладна геометрія, інженерна графіка. – Т. 38. – С. 34–43.
9. Хомченко А. Н. Дискретные модели температурных полей в областях сложной формы / А.Н. Хомченко, С.О. Камаева // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. – Черновцы: Изд-во Чернов. нац. ун-т им. Ю. Федьковича, 2008. – Вып. 16. – С. 293 – 311.
10. Хомченко А.Н. Конструирование серендиповых поверхностей, нечувствительных к изменению функций формы / А. Н. Хомченко, С. О. Камаева // Научные заметки. – Луцк: ЛГТУ, 2008. – Вып. 22. – С. 366 – 371.
11. Хомченко А. Н. Критерий инвариантности температурных полей серендиповых элементов относительно альтернативных функций формы / А. Н. Хомченко, С. О. Камаева // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математического моделирования, прогнозирования и оптимизации" (г. Каменец-Подольский, 5–6 июня 2008 г). – Каменец-Подольский, 2008. – Вып. 1. – С. 191 – 196.
12. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1975. – 224 с.
13. Мищенко А.С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 298 с.
14. Литвиненко Е.И. Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей: дисс. ... кандидата техн. наук: 05.13.06 / Елена Ивановна Литвиненко. – Херсон, 1999. – 172 с.
15. Топчий Д.О. Влияние температурных режимов термоэлементов на динамику температурного поля / Д.О. Топчий, А.Н. Хомченко // Научные работы. Серия: Компьютерные технологии. – Николаев: Изд-во Черноморского государственного университета имени П. Могилы, 2014. – Вып. 225. – Т. 237. – С. 110 – 112.
16. Topchyi D. Testing of a non-stationary temperature fields with dynamic thermoelements / D. Topchyi // Electronic scientific journal "Researches of technical sciences". – 2014. – Release 3 (13). – P. 32 – 41.
17. Топчий Д.О. Тестирование нестационарного температурного поля квадратной пластины с двенадцатью термоэлементами на альтернативном базисе / Д. О. Топчий // Материалы X международной научно-практической конференции "Актуальные научные достижения – 2014". – Прага: Образование и Наука, 2014. – Вып. 13. – С. 37 – 40.
18. Топчий Д.О. Тестирование нестационарного температурного поля пластины гексагональной формы с шестью термоэлементами / Д.О. Топчий, А.Н. Хомченко // Материалы X международной научно-

- практической конференции "Динамика научных исследований – 2014". – Пшемьсль: Наука и исследования, 2014. – Вып. 8. – С. 71 – 74.
19. Топчий Д.О. Компьютерное тестирование нестационарного температурного поля треугольной пластины с шестью термоэлементами / Д.О. Топчий // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2014. – Вып. 3 (50) . – С. 499 – 501.
  20. Topchy D. The theory of plafales: the proof of P versus NP problem / D. Topchy. – Brentwood: Best Global Publishing, 2011. – 634 p.
  21. Topchy D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems [Электронный ресурс] / D. Topchy. – Brentwood: Best Global Publishing, 2013. – 695 p. – Режим доступа: <http://eleanor-cms.ru/uploads/book.pdf>
  22. Topchy D. The theory of plafales: Applications of new cryptographic algorithms and platforms in Military complex, IT, Banking system, Financial market [Электронный ресурс] / D. Topchy // XLII KONFERENCJA ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI: Тез. докл. конф. (Закопаны, 27 авг. – 3 сент. 2013 г.). – Варшава, 2013. – С. 58. – Режим доступа: <http://www.impan.pl/~zakopane/42/Topchy.pdf>
  23. Топчий Д.О. Программно-технический комплекс "Тестирование нестационарных температурных полей с динамическими термоэлементами" / Д.О. Топчий // Электронный научный журнал "Отраслевые аспекты технических наук". – Издательство ИНГН, 2015. – Выпуск 4 (46). – С. 27 – 37.
  24. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббиа. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.

УДК 004.9

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Н.В. СТАРУН, Т.А. СЕЛУЯНОВА  
Херсонський національний технічний університет**ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДВОХ ЗАДАЧ МСЕ**

*В статті доводиться твердження про те, що задача побудови гармонічного базису для скінченного елемента і задача побудови базису, який забезпечує мінімальне значення сліду матриці жорсткості елемента, за певних умов є еквівалентними задачами і приводять до побудови одного і того ж самого базису. Доведення виконано для скінчених елементів у формі прямокутних трикутників. Також обговорюються можливості розповсюдження твердження на скінченні елементи у формі різносторонніх трикутників і прямокутників.*

*Ключові слова: слід матриці жорсткості, гармонічні функції, точність розв'язку.*

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Н.В. СТАРУН, Т.А. СЕЛУЯНОВА  
Херсонский национальный технический университет**ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ЗАДАЧ МКЭ**

*В статье доказывается утверждение о том, что задача построения гармонического базиса для конечного элемента и задача построения базиса, который обеспечивает минимальное значение следа матрицы жесткости элемента, при определенных условиях являются эквивалентными задачами и приводят к построению одного и того же базиса. Доказательство выполнено для конечных элементов в форме прямоугольных треугольников. Также обсуждаются возможности распространения утверждения на конечные элементы в форме разносторонних треугольников и прямоугольников.*

*Ключевые слова: след матрицы жесткости, гармонические функции, точность решения.*

G.Ya. TULUCHENKO, N.V. STARUN, T.A. SELUYANOVA  
Kherson National Technical University**ABOUT EQUIVALENCE OF TWO PROBLEMS BY FEM**

*In this paper we prove the statement that the task of building a harmonious basis for finite element and the task of building the base, which provides the minimum value of trace of element's stiffness matrix, are equivalent problem under certain conditions, and lead to the construction of the same basis. The proof is made for finite elements with shape of rectangular triangles. It also discusses the possibility of extending statement by finite elements with shape of scalene triangles and rectangles.*

*Keywords: trace of stiffness matrix, harmonic functions, accuracy of solution.*

**Постановка проблеми**

Знаходження критеріїв для визначення якості базисів скінчених елементів, за якими можливе достовірне прогнозування точності розв'язків граничних та крайових задач, які отримують за методом скінчених елементів (СЕ), до цього часу є остаточно нерозв'язаною проблемою. Необхідною умовою хороших апроксимаційних властивостей базисів у методі скінчених елементів вважається мінімально можливе значення сліду матриці жорсткості СЕ [1]. З іншого боку відомо, що збіжність розв'язку, отриманого за МСЕ, є оптимальною, якщо використовувані базисні функції задовольняють однорідному диференціальному рівнянню, яке відповідає диференціальному рівнянню досліджуваної задачі [2]. Зокрема, при розв'язанні крайової задачі з рівнянням Пуассона доцільно, щоб базисні функції задовольняли рівнянню Лапласа, тобто були гармонічними. Таким чином, при розв'язанні задач вказаного виду обґрунтованим є використання базисів, побудованих за двома підходами: 1) у результаті мінімізації сліду матриці жорсткості елемента; 2) у результаті знаходження гармонічних базисних функцій. Порівняння розв'язків цих задач побудови базисів не здійснювалося.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

У роботі [1, С. 126] доводиться, що для двох конформних СЕ вища точність розв'язку отримується на тому елементі, для якого слід матриці жорсткості є меншим.

У роботі [2], як відзначалося вище, показано, що тими ж властивостями володіють елементи з гармонічними базисами.

**Формулювання мети дослідження**

Показати, що базис, який отримують для трикутного або прямокутного СЕ довільного порядку серендипового виду у результаті розв'язання задачі мінімізації сліду матриці жорсткості, і базис, який

складається із гармонічних функцій, що на границях елемента співпадають із стандартними базисними функціями, є тотожними базисами.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Доведення твердження, яке сформульовано у меті дослідження, виконаємо на прикладі СЕ у формі прямокутного трикутника. Після цього покажемо можливості поширення доведення на СЕ у формі різносторонніх трикутників та прямокутників.

Введемо наступні позначення:

$\Omega$  – скінченний елемент у формі прямокутного трикутника;

$NS$  – стандартний базис елемента  $\Omega$  (можливо отриманий в результаті операції внутрішньої конденсації);

$NM$  – базис, який мінімізує слід матриці жорсткості для елемента  $\Omega$ ;

$NH$  – базис, який складається із функцій гармонічних всередині елемента  $\Omega$  і таких, що співпадають на границі елемента  $\Omega$  зі стандартними базисними функціями.

$k^{(e)}$  – матриця жорсткості/теплопровідності скінченного елемента  $\Omega$ .

Для скінченного елемента  $\Omega$  у формі прямокутного трикутника будемо шукати базисні функції зі спеціальними властивостями  $NM_p$  і  $NH_p$  у вигляді сум стандартної базисної функції  $NS_i$  і поправочної функції  $WM_p$  (або  $WH_p$  відповідно), які саме і забезпечують наявність у базису нових властивостей:

$$NM_p \approx NS_p + WM_p, \text{ де} \tag{1}$$

$$WM_p \approx g(x; y) \cdot \sum_{i=0}^Q \sum_{j=0}^{i+j=Q} a_{i,j}^{(p)} x^i y^j, \tag{2}$$

$$NH_p \approx NS_p + WH_p, \text{ де} \tag{3}$$

$$WH_p \approx g(x; y) \cdot \sum_{i=0}^Q \sum_{j=0}^{i+j=Q} b_{i,j}^{(p)} x^i y^j, \text{ де} \tag{4}$$

$Q$  – найвищий степінь полінома, що визначає кількість доданків у частинній сумі ряду;  $a_{i,j}^{(p)}, b_{i,j}^{(p)} \in R$  – шукані коефіцієнти поправочних функцій;  $n$  – кількість вузлів в СЕ;  $p = \overline{1; n}$ ;  $g(x; y)$  – функція, яка є добутком рівнянь сторін СЕ.

Зрозуміло, що рівності (1-4) виконуються точно, коли параметр  $Q$ , що визначає кількість доданків у частинних сумах рядів, прямує до нескінченності:  $Q \rightarrow \infty$ .

**Задача мінімізації матриці жорсткості.** Матриця жорсткості/теплопровідності досліджуваного скінченного елемента для граничної задачі з рівнянням Лапласа обчислюється за формулою [1]:

$$k^{(e)} = \iint_{\Omega} (B^T \cdot D \cdot B) dx dy, \tag{5}$$

де  $D_{xx}, D_{yy}$  – коефіцієнти пружності/теплопровідності середовища за напрямками координатних осей;

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 \\ 0 & D_{yy} \end{pmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів пружності/теплопровідності середовища;}$$

$B$  та  $B^T$  – матриця та транспонована матриця частинних похідних базисних функцій СЕ. Слід матриці жорсткості (5) за умови одиначної матриці коефіцієнтів пружності середовища обчислюється за формулою:

$$trace(k^{(e)}) = \sum_{p=1}^n \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial NM_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial NM_p}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy, \tag{6}$$

де  $NM_p$  – базисні функції;  $p = \overline{1; n}$ ;  $n$  – кількість вузлів в СЕ.

Таким чином, для обраної структури базисних функцій (1-2) найкращим базисом для СЕ має бути той, для якого

$$trace(k^{(e)}) \rightarrow \min. \tag{7}$$

**Задача побудови гармонічних базисних функцій.** Кожна шукана гармонічна базисна функція  $NH_p$  виду (3-4) є розв'язком задачі Діріхле (всередині СЕ вона задовольняє рівнянню Лапласа)

$$\frac{\partial^2 NH_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NH_p}{\partial y^2} = 0, \tag{8}$$

а на границі елемента співпадає із стандартною базисною функцією:

$$NH_p \Big|_{\Gamma} = NS_p. \tag{9}$$

Підставимо вираз (3) базисної функції  $NH_p$  у рівняння (8) і граничні умови (9). Після підстановки отримаємо задачу Діріхле для рівняння Пуассона з нульовими граничними умовами відносно шуканої функції  $WH_p$ :

$$\frac{\partial^2 WH_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 WH_p}{\partial y^2} = - \left( \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \right), \tag{10}$$

$$WH_p \Big|_{\Gamma} = 0 \tag{11}$$

В. Рігцем із співробітниками доведено, що розв'язання граничної задачі (10-11) еквівалентне розв'язанню задачі мінімізації функціонала:

$$\Phi_p = \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial WH_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial WH_p}{\partial y} \right)^2 + 2 \cdot f_p \cdot WH_p \right) dx dy \rightarrow \min, \tag{12}$$

де  $f_p = - \left( \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \right)$ ,  $p = \overline{1;n}$ .

Напишемо функціонал (12) у більш зручній для аналізу формі:

$$\Phi_p = \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial WH_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial WH_p}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy + 2 \cdot \iint_{\Omega} f_p \cdot WH_p dx dy \rightarrow \min, \quad p = \overline{1;n}. \tag{13}$$

**Визначення геометричної форми СЕ.** Із формул (6) і (12, 13) видно, що для визначення виразів функціоналів необхідно обчислювати подвійні інтеграли по області СЕ, що потребує підстановки границь інтегрування в отримувані вирази. Доведення виконаємо для СЕ у формі прямокутного трикутника. Локальну систему координат в СЕ визначимо як на рис. 1.

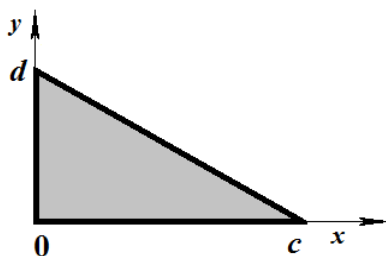


Рис. 1. Локальна система координат у трикутному СЕ

Функція  $g(x; y)$ , яка є добутком рівнянь сторін СЕ, для трикутника з рис. 1 має вигляд:

$$g(x; y) = xy \cdot (dx + cy - cd)$$

Введемо ще дві функції:

$$\varphi(x) = -\frac{d}{c} \cdot (x - c);$$

$$\psi(y) = -\frac{c}{d} \cdot (y - d).$$

Звернемо увагу на те, що

$$g(x; y) \Big|_{y = \varphi(x)} = x \cdot \left( -\frac{d}{c} \cdot (x - c) \right) \cdot \left( dx + c \cdot \left( -\frac{d}{c} \cdot (x - c) \right) - cd \right) = 0;$$

$$g(x; y) \Big|_{x=\psi(y)} = \left( -\frac{c}{d} \cdot (y-d) \right) \cdot y \cdot \left( d \cdot \left( -\frac{c}{d} \cdot (y-d) \right) + cy - cd \right) = 0.$$

Отже,

$$WH_p \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{і} \quad WH_p \Big|_{y=\varphi(x)} = 0; \tag{14}$$

$$WH_p \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{і} \quad WH_p \Big|_{x=\psi(y)} = 0. \tag{15}$$

Доведемо, що задача мінімізації функціонала (6) є тотожною до задачі мінімізації функціоналів (13).

Відзначимо, що функціонал (6) є сумою додатних доданків, тому його мінімальне значення складається із суми мінімальних значень кожного окремого доданка, тобто задача мінімізації сліду матриці жорсткості розпадається на  $n$  незалежних задач мінімізації для кожної окремої базисної функції  $NM_p$ ,  $p = \overline{1; n}$ :

$$T_p = \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial NM_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial NM_p}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \rightarrow \min, \quad p = \overline{1; n}. \tag{16}$$

Для їх розв'язання підставимо вирази для шуканих базисних функцій  $NM_p$  (1-2) у функціонали виду (16):

$$\begin{aligned} T_p &= \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial NM_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial NM_p}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p + \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p + \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right)^2 \right) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \right)^2 \right) dx dy + \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right)^2 \right) dx dy + \\ &+ 2 \cdot \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right) dx dy + 2 \cdot \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right) dx dy. \end{aligned} \tag{17}$$

Обчислимо подвійні інтеграли із двох останніх доданків формули (17) за допомогою методу інтегрування частинами.

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right) dx dy = \int_0^d dy \int_{x=0}^{x=\psi(y)} \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right) dx = \\ &= \left\| \begin{array}{l} u = \frac{\partial NS_p}{\partial x} \quad du = \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} dx \\ dv = \frac{\partial WM_p}{\partial x} dx \quad v = WM_p \end{array} \right\| = \int_0^d \left( \frac{\partial NS_p}{\partial x} \cdot WM_p \Big|_{x=0}^{x=\psi(y)} - \int_{x=0}^{x=\psi(y)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} dx \right) dy = \\ &= \left\| \text{за формулами (15)} \right\| = \int_0^d \left( 0 - 0 - \int_{x=0}^{x=\psi(y)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} dx \right) dy = - \int_0^d \left( \int_{x=0}^{x=\psi(y)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} dx \right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} \cdot WM_p dx dy . \\
 I_2 &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right) dx dy = \int_0^c dx \int_{y=0}^{y=\varphi(x)} \left( \frac{\partial NS_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial WM_p}{\partial y} \right) dy = \\
 &= \left\| \begin{array}{l} u = \frac{\partial NS_p}{\partial y} \quad du = \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} dy \\ dv = \frac{\partial WM_p}{\partial y} dy \quad v = WM_p \end{array} \right\| = \int_0^c \left( \frac{\partial NS_p}{\partial y} \cdot WM_p \Big|_{y=0}^{y=\varphi(x)} - \int_{y=0}^{y=\varphi(x)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} dy \right) dx = \\
 &= \left\| \text{за формулами (14)} \right\| = \int_0^c \left( 0 - 0 - \int_{y=0}^{y=\varphi(x)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} dy \right) dx = - \int_0^c \left( \int_{y=0}^{y=\varphi(x)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} dy \right) dx = \\
 &= -\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \cdot WM_p dx dy .
 \end{aligned}$$

Отже, сума подвійних інтегралів  $I_1 + I_2$  у формулі (17) набуває значення:

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= -\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} \cdot WM_p dx dy - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \cdot WM_p dx dy = \\
 &= -\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \right) \cdot WM_p dx dy = \iint_{\Omega} f_p \cdot WM_p dx dy .
 \end{aligned} \tag{18}$$

Таким чином, функціонали з формули (17) остаточно мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 T_p &= \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \right)^2 \right) dx dy + \\
 &+ \iint_S \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right)^2 \right) dx dy + 2 \cdot \iint_{\Omega} f_p \cdot WM_p dx dy .
 \end{aligned} \tag{19}$$

Функціонали  $T_p$  (19) і  $\Phi_p$  (13) відрізняються наявністю у виразі функціонала (13) подвійного інтеграла  $\iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \right)^2 \right) dx dy$ .

Нагадаємо, що у функціоналах  $T_p$  (19) шуканими є функції  $WM_p$ , а у функціоналах  $\Phi_p$  (13) шуканими є функції  $WH_p$ . Задачі мінімізації функціоналів розв'язуються за допомогою систем рівнянь, в яких частинні похідні від функціоналів за невідомими коефіцієнтами  $a_{i,j}^{(p)}$  функцій  $WM_p$  (або за невідомими коефіцієнтами  $b_{i,j}^{(p)}$  функцій  $WH_p$ ) дорівнюють нулю. Доданок, на який відрізняються функціонали  $T_p$  (19) і  $\Phi_p$  (13), не містить невідомих коефіцієнтів  $b_{i,j}^{(p)}$ . Отже, частинні похідні від нього

за невідомими коефіцієнтами  $b_{i,j}^{(p)}$  дорівнюють нулю. Таким чином, при розв'язанні обох задач мінімізації функціоналів  $T_p$  (19) і  $\Phi_p$  (13) ми отримуємо одну і ту саму систему лінійних алгебраїчних рівнянь (з точністю до позначень), яка має єдиний розв'язок.

Також зауважимо, що у доведенні у явному вигляді не використовуються вирази стандартних базисних функцій  $NS_p$ , тому доведення залишається в силі для СЕ серендипового типу довільного порядку у формі прямокутних трикутників.

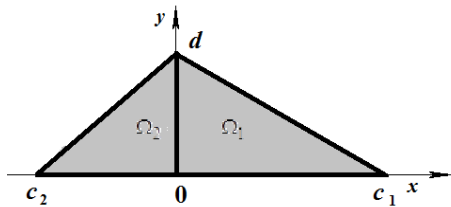


Рис. 2. СЕ у формі рівностороннього трикутника

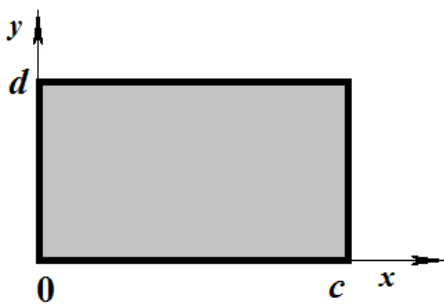


Рис. 3. СЕ у формі прямокутника

**Зауваження 1.** Оскільки подвійний інтеграл володіє властивістю адитивності відносно областей інтегрування  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  ( $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ), тому доведення може бути розповсюджене на СЕ у формі рівносторонніх трикутників, які можна подати як об'єднання двох прямокутних трикутників (рис. 2).

**Зауваження 2.** У випадку використання прямокутних скінченних елементів доведення відрізняється визначенням функцій  $g(x; y)$ ,  $\varphi(x)$  і  $\psi(y)$ . Для прямокутного СЕ ці функції дорівнюють:

$$g(x; y) = xy \cdot (x - c) \cdot (y - d);$$

$$\varphi(x) = d; \quad \psi(y) = c.$$

Виконувані у доведенні перетворення від цього не змінюються.

Таким чином нами доведено твердження.

**Твердження.** Задача побудови базису для трикутного або прямокутного СЕ довільного порядку, що складається із гармонічних функцій, які на границі скінченного елемента співпадають із стандартними базисними функціями, і задача побудови базису, при використанні якого мінімізується слід матриці жорсткості для задачі Діріхле, є еквівалентними задачами. Вони приводять до побудови одного і того самого базису.

**Висновки та перспективи подальших досліджень.**

У літературі з методу СЕ гармонічні базисні функції традиційно будують у вигляді тригонометричних рядів. Виконати доведення твердження про еквівалентність двох задач МСЕ вдається, головним чином, завдяки відмові від вказаної структури гармонічних базисних функцій і подання їх у вигляді степеневих рядів, коефіцієнти яких визначаються за методом Рітца. Суттєвою для доведення твердження є обрана авторами структура поправочних функцій, яка дозволяє виконати низку важливих перетворень. Доцільним є перенесення дослідження аналогічних задач у тривимірний простір.

**Список використаної літератури**

1. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. — М.: Стройиздат, 1993. — 664 с.
2. Юлдашев О.И. Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации [Электронный ресурс] / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // Объединенный институт ядерных исследований. Лаборатория информационных технологий. Научный отчет 2006-2007. — Дубна: Объединенный институт ядерных исследований, 2007. — С. 317—320. — Режим доступа к отчету: [http://lit.jinr.ru/Reports/SC\\_report\\_06-07/pdfall/p317.pdf](http://lit.jinr.ru/Reports/SC_report_06-07/pdfall/p317.pdf).



УДК 532.3

В.В. УДОВЕНКО, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

**СРАВНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ПРОФИЛЕЙ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ЧИСЛЕННОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕЖИМОВ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ**

*В работе предложен метод расчета аэродинамических характеристик профилей, основанный на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса. Изучена плоская задача. Рассматривается стационарное турбулентное двухмерное обтекание исследуемого объекта вязким сжимаемым газом. Проведено сравнение численных результатов с натурными экспериментами в аэродинамической трубе при различных углах атаки и числах Маха, которое свидетельствует о достоверности и эффективности разработанного метода.*

*Ключевые слова: аэродинамические характеристики, нестационарные уравнения Навье-Стокса, осреднение по Рейнольдсу*

В.В. УДОВЕНКО, О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Институт проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

**ПОРІВНЯННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОФІЛІВ З  
РЕЗУЛЬТАТАМИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ РЕЖИМІВ ТРАНСЗВУКОВОГО  
ОБТІКАННЯ**

*В роботі запропоновано метод розрахунку аеродинамічних характеристик профілів, що заснований на осереднених за Рейнольдсом рівняннях Нав'є-Стокса. Досліджена плоска задача. Розглянуто стаціонарне турбулентне двовимірне обтікання об'єкту, що досліджується, в'язким стислим газом. Проведене порівняння числових результатів з натурними експериментами в аеродинамічній трубі при різних кутах атаки та числах Маха, що демонструє вірогідність і ефективність розробленого методу.*

*Ключові слова: аеродинамічні характеристики, нестационарні рівняння Нав'є-Стокса, осереднення за Рейнольдсом.*

V. UDOVENKO, E. STRELNIKOVA

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems

**COMPARISON OF PROFILE EXPERIMENTAL AERODYNAMIC CHARACTERISTICS WITH  
NUMERICAL SIMULATION RESULTS AT TRANSONIC FLOW REGIMES**

*The method of numerical simulation of the profile aerodynamic characteristics is developed. The method is based on RANS equations. The 2D problem was under consideration. The stationary turbulence 2D flow of the research object by viscid compressible fluid was investigated. The comparison was accomplished of results obtained with pilot experiments in wind tunnel that has been validated the efficiency and reliability of the proposed method.*

*Key words: aerodynamic characteristics, Navier - Stockes non-stationary equations, Reynolds average equations*

**Актуальность проблемы**

Современная авиационная промышленность при разработке и проектировании новых летательных аппаратов требует создания профилей с высоким аэродинамическим качеством. Сегодня профиль должен обладать множеством заданных качеств одновременно. Для исследования аэродинамических характеристик используются несколько методов аэродинамического проектирования: прямой метод, который заключается в исследовании аэродинамических характеристик существующего объекта, метод оптимизации, который используется для построения геометрии объекта и будет обладать заданными аэродинамическими характеристиками.

В настоящее время наиболее часто применимым является прямой метод проектирования, однако он обладает большими недостатками. Достижение нужных аэродинамических характеристик происходит путем исследования различных модификаций существующего объекта. Каждая такая модификация подразумевает создание натурной модели и дальнейшей трудоемкой работы по исследованию ее в аэродинамической трубе, а также анализу полученных данных. Количество модификаций существующего объекта для достижения требуемых характеристик напрямую зависит от проектировщика. В связи с этим современные методы аэродинамического проектирования для сокращения итераций подбора требуемой геометрии

профіля все більше опираються на результати численного моделювання. Первые численные методы, опирающиеся на математическую модель линеаризованного потенциального течения, дают лишь общие аэродинамические характеристики обтекания профиля и удовлетворительно работают вплоть до местных скоростей течения, равных скорости звука. Современное проектирование требует детальной картины распределения давления на профиле, определения характеристик местных скачков уплотнения, исследования срывных процессов на критических углах атаки.

**Цель исследования**

Целью данного исследования является решение задачи высокорейнольдсового трансзвукового обтекания профиля и дальнейшее сравнение полученных результатов с натурными трубными экспериментами. Решение такой задачи позволит определить целесообразность создания математической модели, основанной на осреднённых по Рейнольдсу нестационарных уравнениях Навье-Стокса, описывающих нестационарное, трансзвуковое обтекание профиля.

**Изложение основного материала исследования. Метод решения**

Для расчета максимально полных аэродинамических характеристик, то есть при высокорейнольдсовом трансзвуковом обтекании, рассматривается стационарное турбулентное двухмерное обтекание исследуемого объекта вязким сжимаемым газом. Такое течение может быть описано системой осредненных по Рейнольдсу нестационарных уравнений Навье-Стокса, записанных, в общем случае, в локальной криволинейной вращающейся с постоянной скоростью  $\Omega$  системе координат

$$\frac{\partial QJ}{\partial t} + \frac{\partial F^j}{\partial \xi^j} = H, \tag{1}$$

где  $Q$  – вектор консервативных переменных в декартовой системе координат;

$F^j = F_i \xi_i^j J$  – вектор потоков в криволинейной системе координат;

$F_i$  – вектор потоков в декартовой системе координат;

$t$  – время;

$\xi^j$  – криволинейные координаты;

$\xi_i^j$  – метрические коэффициенты;

$J$  – якобиан преобразования координат.

Вектор консервативных переменных  $Q$  и вектор потоков  $F_i$  в декартовой системе координат  $x_i$  имеют вид (предполагается вращение относительно оси  $x_3$ )

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho h \end{pmatrix}, F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{i1} p - \tau_{i1} \\ \rho u_i u_2 + \delta_{i2} p - \tau_{i2} \\ \rho u_i u_3 + \delta_{i3} p - \tau_{i3} \\ (\rho h + p) u_i - \tau_{ik} u_k + q_i \end{pmatrix}, H = J \begin{pmatrix} 0 \\ 2\rho u_2 \Omega + \rho \Omega^2 r_1 \\ -2\rho u_1 \Omega + \rho \Omega^2 r_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $\rho, u_i, p$  – плотность, компоненты скорости и давление;

$\tau_{ik}$  – эффективные напряжения трения;

$q_i$  – эффективные тепловые потоки;

$$h = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u_i u_i - \Omega^2 r^2}{2} + k;$$

$\gamma$  – показатель адиабаты;

$k$  – кинетическая энергия турбулентности (КЭТ);

$r, r_1, r_2$  – расстояние от оси вращения и его проекции на оси координат;

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Метрические коэффициенты и якобиан преобразования координат записываются как

$$\xi_i^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi^j}{\Delta x_i}, J = \left| \xi_i^j \right| = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{jkl} \xi_1^j \xi_2^k \xi_3^l,$$

где  $\varepsilon_{jkl}$  – символ Леви-Чивиты.

Эффективные напряжения трения представляют собой сумму вязких и турбулентных напряжений

$$\tau_{ik} = \bar{\tau}_{ik} + \hat{\tau}_{ik},$$

где  $\bar{\tau}_{ik} = 2\mu \left( S_{ik} - \frac{1}{3} S_{ll} \delta_{ik} \right)$ ;

$\mu = \rho\nu$  – коэффициент динамической вязкости;

$\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \text{компоненты тензора скоростей деформаций.}$$

Аналогично эффективные тепловые потоки представляют собой сумму молекулярного и турбулентного теплового потока

$$q_i = \bar{q}_i + \hat{q}_i,$$

где  $q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$ ;

$\lambda$  – коэффициент молекулярной теплопроводности;

$T$  – температура.

Здесь и далее производные по декартовым направлениям определяются в соответствии с выбранным преобразованием координат

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} = \xi_i^j \frac{\partial}{\partial \xi^j}.$$

При записи уравнений (1) часто потоки  $F^j$  расщепляются на «вязкие»  $F_V^j$  и «невязкие»  $F_I^j$  составляющие, причем последние полностью соответствуют потокам системы уравнений Эйлера

$$F^j = F_I^j + F_V^j = \xi_i^j J \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{i1} p \\ \rho u_i u_2 + \delta_{i2} p \\ \rho u_i u_3 + \delta_{i3} p \\ (\rho h + p) u_i \end{pmatrix} + \xi_i^j J \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_{i1} \\ -\tau_{i2} \\ -\tau_{i3} \\ -\tau_{ik} u_k + q_i \end{pmatrix}.$$

В качестве граничных условий для уравнений (1) обычно задаются следующие параметры. На входе – полное давление и температура, а также углы, определяющие направление потока. На выходе – статическое давление. На стенках – условие прилипания.

**Численные результаты. Сравнение с экспериментом.**

Исследования проводились для широко известного симметричного профиля NASA 0012. Условия численного эксперимента заключались в расчете обтекания при числах Маха от 0.3 до 0.8; углах атаки от  $\alpha = -2^\circ$  до критического угла при возникновении срыва потока; числах Рейнольдса, рассчитанных по формуле  $Re = 8 * M * 10^6$ . Аэродинамические характеристики профиля NASA0012, полученные численными методами и в трубном эксперименте, сравнивались как по значениям суммарных характеристик  $C_x(\alpha), C_y(\alpha), C_z(C_x)$ , так и по виду распределения давления по нижней и верхней поверхностям профиля  $Cp = f(x)$ .

Для сравнения результатов численного эксперимента были выбраны трубные эксперименты NASA [1] и «ЦАГИ» [2]. На рис. 1 - 6 показаны зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки при различных числах Маха, полученные численно и экспериментально. На рис. 7 – 10 показаны распределения давления по поверхности профиля для различных чисел Маха и углов атаки. Выбранные в качестве примера сочетания чисел Маха и углов атаки не случайны. Так, на умеренных числах Маха ( $M=0,3$ ) показано распределение давления на больших углах атаки, когда на верхней поверхности профиля возникает большое разрежение, растет градиент давления, что способствует в дальнейшем возникновению отрыва потока и неустойчивости течения (см. рис. 11). На больших числах Маха ( $M=0,6$ ) при увеличении угла атаки на верхней поверхности профиля формируется характерная зона с постоянной величиной давления (см. рис. 8,12), за которой формируется местный скачок уплотнения.

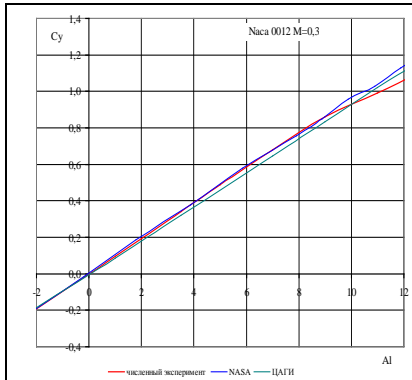


Рис. 1 Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки для  $M=0,3$

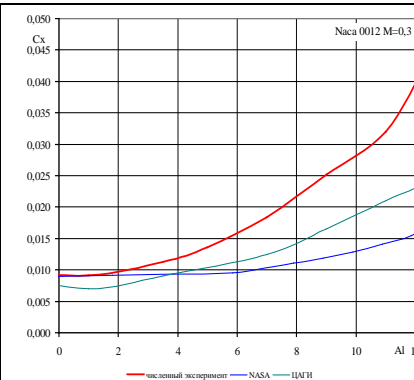


Рис. 2 Зависимость коэффициента сопротивления от угла атаки для  $M=0,3$

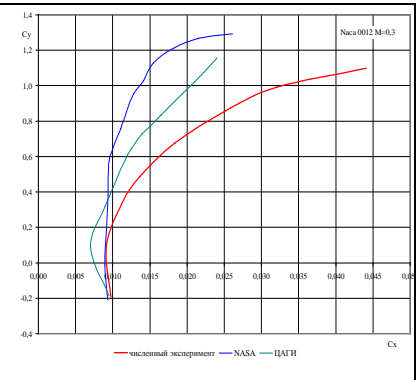


Рис. 3 Поляра 1 рода

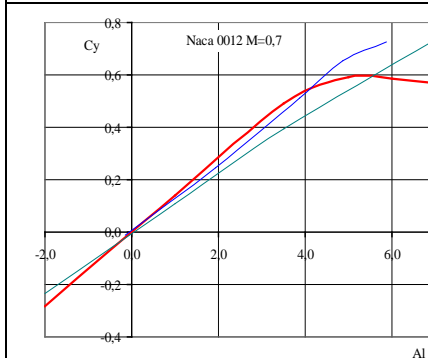


Рис. 4 Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки для  $M=0,7$

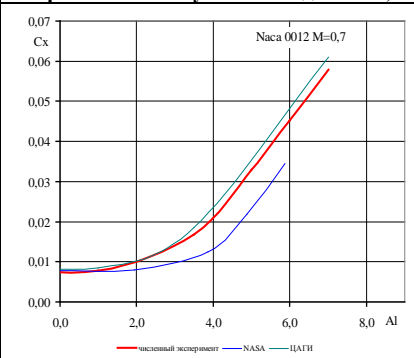


Рис. 5 Зависимость коэффициента сопротивления от угла атаки для  $M=0,7$

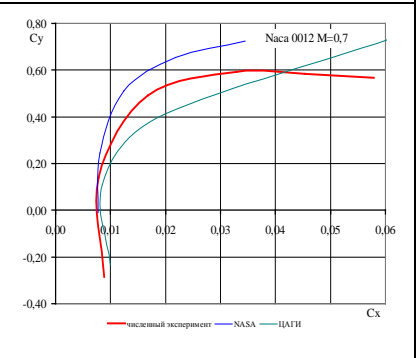


Рис. 6 Поляра 1 рода

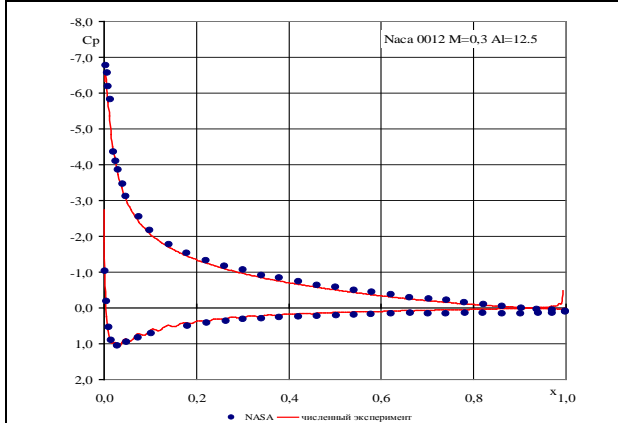


Рис. 7 Распределение давления по поверхности профиля для  $M=0,3 \alpha = 12,5$

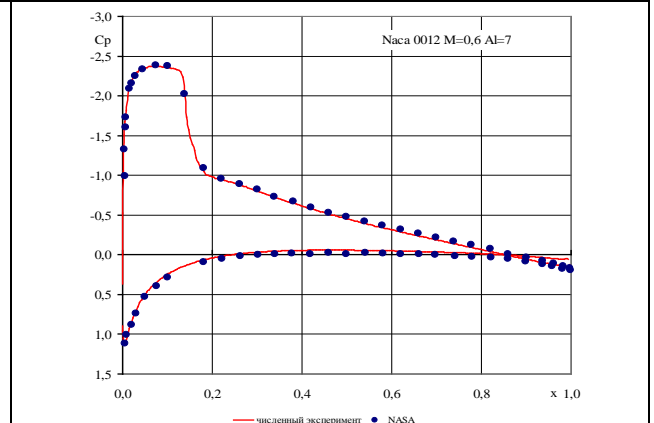


Рис. 8 Распределение давления по поверхности профиля для  $M=0,6 \alpha = 7$

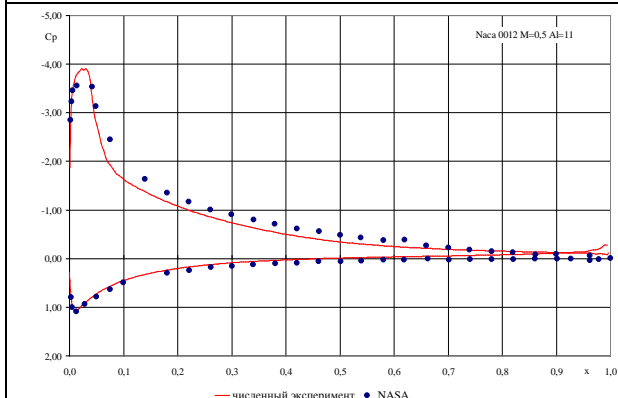


Рис. 9 Распределение давления по поверхности профиля для  $M=0,5 \alpha = 11$

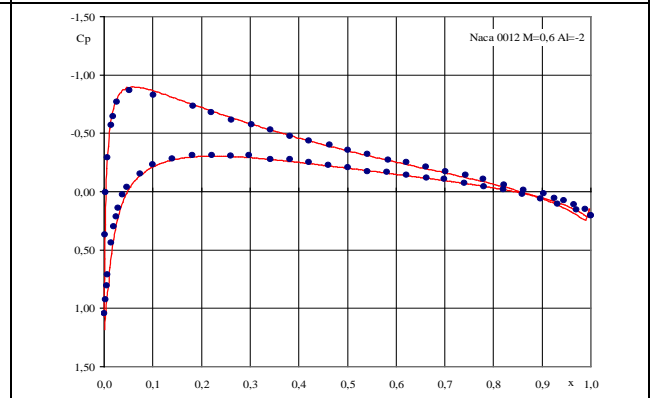
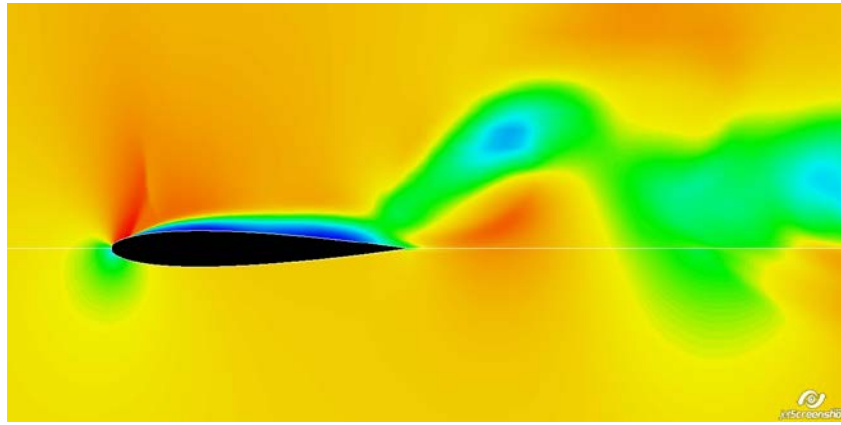
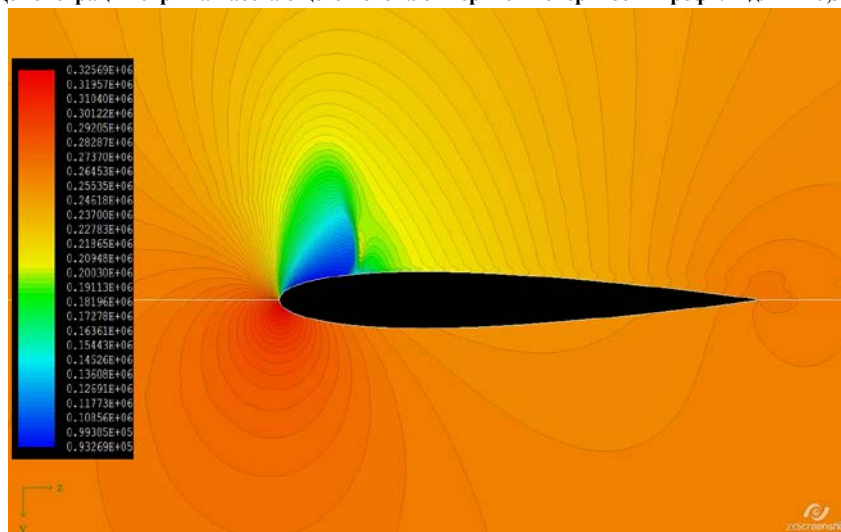


Рис. 10 Распределение давления по поверхности профиля для  $M=0,6 \alpha = -2$

Рис. 11 Демонстрація отрыва набегающего потока от верхней поверхности профиля для  $m=0,3$   $\alpha = 16^\circ$ Рис. 12 Демонстрація отрыва набегающего потока от верхней поверхности профиля для  $m=0,6$   $\alpha = 7^\circ$ 

### Выводы и перспективы дальнейших исследований

Рассмотрено стационарное турбулентное двухмерное обтекание профиля NASA 0012 вязким сжимаемым газом. Проведено сравнение численных результатов с натурными экспериментами в аэродинамической трубе при различных углах атаки и числах Маха, которое свидетельствует о достоверности и эффективности разработанного метода. Предполагается развитие предложенного метода на случай нестационарного плоского турбулентного обтекания с индивидуальным построением расчетной сетки для каждого временного шага в исследуемом процессе.

### Список используемой литературы

1. Миль М.Л., Некрасов А.В., Браверманн А.С. и др. Вертолеты. Расчет и проектирование.- М.: Машиностроение, 1966.- Кн. 1- 456 с.
2. Harris,C.D.,Two-Dimensional Aerodynamic Characteristics Of The NACA 0012 Airfoil In the Langley 8-Foul Transonic Pressure Tunnel, NASA TM-81927 (1981)

УДК 539.3

Л.А. ФИЛЬШТИНСЬКИЙ, Д.Н. НОСОВ, А.А. ЕРЕМЕНКО  
Сумський державний університет, Україна**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ НОВЫХ  
МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ, ОСЛАБЛЕННЫХ ТРЕЩИНАМИ**

*В работе методом сингулярных интегральных уравнений рассмотрена краевая задача магнитоэластичности для плоской анизотропной среды, ослабленной трещинами достаточно произвольных конфигураций. Построено точное решение для случая произвольно ориентированной прямолинейной трещины в пластинке. Получены асимптотические представления полевых величин в окрестности вершин разрывов, с использованием которых выведены формулы для коэффициентов интенсивности механических, электрических и магнитных величин, а также потоков энергии в вершинах трещин.*

*Ключевые слова: магнитоэластичная (МЭУ) среда, трещина, интегральные представления полевых величин, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности механических, электрических и магнитных величин, потоки энергии в вершинах.*

Л.А. ФИЛЬШТИНСЬКИЙ, Д.М. НОСОВ, Г.А. ЕРЕМЕНКО  
Сумський державний університет, Україна**КРАЙОВА ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РУЙНУВАННЯ НОВИХ МАГНИТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ  
МАТЕРІАЛІВ, ПОСЛАБЛЕНИХ ТРІЩИНАМИ**

*В роботі методом сингулярних інтегральних рівнянь розглянуто крайову задачу магнитоелектропружності для плоского анізотропного середовища, ослабленого тріщинами досить довільних конфігурацій. Побудовано точний розв'язок для випадку довільно орієнтованої прямолінійної тріщини в пластині. Отримані асимптотичні подання польових величин в околі вершин розривів, з використанням яких виведені формули для коефіцієнтів інтенсивності механічних, електричних і магнітних величин, а також потоків енергії в вершинах тріщин.*

*Ключові слова: магнитоелектропружне середовище, тріщина, інтегральні подання польових величин, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності механічних, електричних і магнітних величин, потоки енергії у вершинах.*

L.A. FILSHTINSKII, D.M. NOSOV, H.A. EREMenKO  
Sumy State University, Ukraine**THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF FRACTURE MECHANICS OF NEW  
MAGNETOELECTROELASTIC MATERIALS WEAKENED BY CRACKS**

*In the paper the boundary-value problem of magnetoelasticity for plain anisotropic medium weakened by cracks of rather arbitrary configurations is considered by the method of singular integral equations. Exact solution was constructed for the example of arbitrarily oriented rectilinear crack in the plate. The asymptotic representations of the field quantities in the vicinity of crack tips were obtained. Then using the latter formulae for intensity factors of mechanical, electrical, and magnetic magnitudes and crack tip energy fluxes were derived.*

*Keywords: the magnetoelastic medium, crack, integral representations of the field quantities, singular integral equations, intensity factors of mechanical electrical and magnetic values, energy fluxes in tips.*

**Постановка проблеми**

В связи с созданием новых керамических, в частности магнитоэластичных материалов, полученных спеканием редкоземельных элементов (Terfenol-D), в начале XXI века возникло новое направление в механике – электромагнитоупругость. Полученные новые материалы обладают многими замечательными свойствами, в частности гигантской магнитострикцией, однако страдают значительным трещинообразованием в процессе эксплуатации. В связи с этим возникает необходимость в разработке механики разрушения таких материалов, ослабленных трещинами.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $Ox_1x_2$  бесконечную МЭУ пластинку ослабленную трещинами  $\Gamma_j (j = \overline{1, n})$ . Будем считать, что  $\Gamma_j$  ляпуновские дуги и  $(\bigcap \Gamma_j = \emptyset)$ . На бесконечности зададим равномерные поля механических напряжений  $\sigma_{ij}$ , а также компоненты

электрической и магнитной индукций  $D_1, D_2$  и  $B_1, B_2$ , а на берегах трещин равномерное распирающее давление  $p_j$  (рис.1).

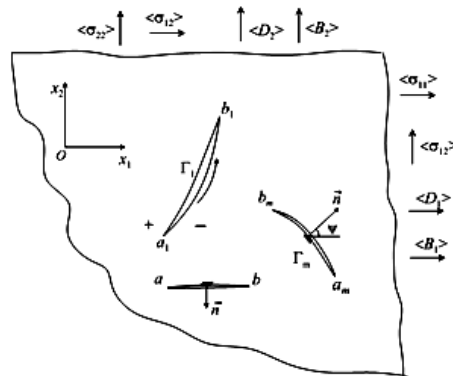


Рис. 1. Пластина с трещинами под действием равномерных физических полей на бесконечности

Задача заключается в построении алгоритма, позволяющего определить поля в пластине и характеристики разрушения в вершинах трещин.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Магнитоэластопругие (МЭУ) материалы впервые были обнаружены Ван Сухтеленем (1972 г.) и Ван Раном (1974 г.), которые выяснили, что феррит-сегнетоэлектрические композиты обладают как пьезоэлектрической (ПЭ), так и пьезомагнитной (ПМ) фазами, представляя магнитоэлектрический эффект сопряжения. Далее исследования в этой области были продолжены в работах [1, 2, 3].

**Изложение основного материала исследования**

**Постановка задачи и метод решения.** Математическая модель двумерной магнитоэластопругости содержит:

- материальные уравнения [4]:

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & v_{11} & v_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & v_{12} & v_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & v_{11} & v_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & v_{12} & v_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ 2\sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; \quad (1)$$

- дифференциальные уравнения равновесия, электро- и магнитостатики [5, 6]:

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} &= 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (k=1,2); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \quad \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad \partial_1 H_2 + \partial_2 H_1 = 0; \quad (3)$$

- соотношения Коши:

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad 2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1; \quad (4)$$

- условие совместности деформаций:

$$\partial_1^2 e_{22} + \partial_2^2 e_{11} = 2\partial_1 \partial_2 e_{12}. \quad (5)$$

К этим соотношениям необходимо присоединить соответствующие механические, электрические и магнитные краевые условия на границе тела.

В (1)–(5):  $s_{ij} = s_{ij}^{DB}$  – коэффициенты деформации, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей,  $g_{kj} = g_{kj}^{DB}$  и  $p_{kj} = p_{kj}^{DB}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженности, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{kl} = \beta_{kl}^\sigma$ ,  $\chi_{kl} = \chi_{kl}^\sigma$  и  $\nu_{kl} = \nu_{kl}^\sigma$  – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях;  $u = (u_1, u_2)$  – вектор перемещения;  $\sigma_{ij}$  и  $e_{ij}$  – тензоры напряжения и деформации;  $D_i$  и  $B_i$  – компоненты векторов электрической и магнитной индукции;  $E_i$  и  $H_i$  – электрическая и магнитная напряженности полей.

Комплексные представления полевых величин [7]:

$$\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_1(1, \mu_k) \Phi_k(z_k),$$

$$\{D_1, D_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_2(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \quad (6)$$

$$\{B_1, B_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_3(1, \mu_k) \Phi_k(z_k),$$

$$\{E_1, E_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^E \Phi_k(z_k), \quad \{H_1, H_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^H \Phi_k(z_k), \quad (7)$$

$$\{u_1, u_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k, q_k\} \varphi_k(z_k),$$

$$z = x_1 + ix_2, \quad z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z,$$

где  $\Phi_k(z_k)$  – аналитические функции своих комплексных переменных, характеристические числа  $\mu_k$ , величины  $A_j$ ,  $\alpha_k^H$  и  $\alpha_k^E$ ,  $p_k$ ,  $q_k$  заданы.

### Краевая задача для магнитоэластичной пластинки с трещинами

Механические, электрические и магнитные краевые условия на берегах разреза  $\Gamma_m$  представим в виде.

$$X_{1n}^\pm = -p \cos \psi, \quad X_{2n}^\pm = -p \sin \psi, \quad p = \{p_m \in \Gamma_m\}, \quad D_n^\pm = D_n^{0\pm}, \quad B_n^\pm = B_n^{0\pm} \quad (8)$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу разреза  $\Gamma_m$  (при движении от его начала  $a_m$  к концу  $b_m$ ),  $\psi$  – угол между положительной нормалью к левому берегу и лучом  $Ox_1$ ,  $X_{kn}^\pm$ ,  $D_n^\pm$ ,  $B_n^\pm$  – компоненты вектора напряжения, нормальные компоненты векторов электрической и магнитной индукций на берегах разреза.

Краевые условия представим в виде:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{jk} a_k(\psi) [\Phi_k] = [F_j^0], \quad (j = \overline{1,4}), \quad a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{jk} a_k(\psi) (\Phi_k^+ + \Phi_k^-) = (F_j^+ + F_j^-), \quad (j = \overline{1,4}), \quad (9)$$

где  $R_{jk}$  – известные комбинации материальных коэффициентов,  $F_j$  – известные правые части.

Для решения краевой задачи теории функций (9) воспользуемся обобщением формализма, разработанного одним из авторов в [8]. Комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  представим в виде обобщенных интегралов типа Коши

$$\Phi_k(z_k) = C_k + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - z_k} ds, \quad (10)$$

$$\zeta_k = \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta, \quad \omega_k(\zeta) = \{\omega_k^{(m)}(\zeta), \zeta \in \Gamma_m\}.$$



Здесь  $ds$  – элемент дуги в физической плоскости,  $C_k$  – постоянные которые должны обеспечить условия на бесконечности,  $\omega_k$  определяются из краевых условий на  $\Gamma$  и некоторых дополнительных условий.

С использованием представлений (10) краевые условия (8) свеем к матричному сингулярному интегральному уравнению:

$$\int_{\Gamma} K(\zeta, \zeta_0) q(\zeta) ds = \pi N(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma, \quad \text{Im } q = 0, \quad (11)$$

$$K(\zeta, \zeta_0) = \text{Re} \left\{ R G(\zeta, \zeta_0) R^{-1} \right\}, \quad q(\zeta) = \{q_1(\zeta), q_2(\zeta), q_3(\zeta), q_4(\zeta)\}^T,$$

$$q = R \omega, \quad R = \|R_{jk}\|,$$

$$G(\zeta, \zeta_0) = \text{diag} \left\{ \frac{a_1(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{01}}, \frac{a_2(\psi_0)}{\zeta_2 - \zeta_{02}}, \frac{a_3(\psi_0)}{\zeta_3 - \zeta_{03}}, \frac{a_4(\psi_0)}{\zeta_4 - \zeta_{04}} \right\},$$

$$N(\zeta_0) = \left\{ -p \cos \psi_0 - N_1(\zeta_0), -p \sin \psi_0 - N_2(\zeta_0), D_n^0 - N_3(\zeta_0), B_n^0 - N_4(\zeta_0) \right\}^T,$$

$$q = (q^{(m)}, \zeta \in \Gamma_m), \quad D_n^0 = \frac{D_n^{0+} + D_n^{0-}}{2}, \quad B_n^0 = \frac{B_n^{0+} + B_n^{0-}}{2}.$$

Для замыкания решения привлечем условие однозначности перемещений электрических и магнитных потенциалов:

$$\int_{\Gamma_m} q^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad (m = \overline{1, M}). \quad (12)$$

Асимптотика решения в вершинах трещин. Используя выражения для асимптотики интеграла типа Коши в вершинах разрезов [9], находим главные асимптотики полевых величин:

$$\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{ \mu_k^2, -\mu_k, 1 \} A_{11}(1, \mu_k) \Psi_k^c + 0(1),$$

$$\{D_1, D_2\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{ \mu_k, -1 \} A_{12}(1, \mu_k) \Psi_k^c + 0(1),$$

$$\{B_1, B_2\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{ \mu_k, -1 \} A_{13}(1, \mu_k) \Psi_k^c + 0(1), \quad (13)$$

$$\{E_1, E_2\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{ 1, \mu_k \} \alpha_k^E \Psi_k^c + 0(1),$$

$$\{H_1, H_2\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{ 1, \mu_k \} \alpha_k^H \Psi_k^c + 0(1),$$

$$\Psi_k^c = \frac{\Omega_k(\pm 1)}{\sqrt{\zeta'_k(\pm 1)}} (\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c)^{-\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

где верхний знак соответствует концу трещины  $c = b$ , нижний – началу  $c = a$ .

В механике разрушения коэффициенты интенсивности механических, электрических и магнитных величин в вершинах трещин определяются формулами [1,10]:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_n), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \tau_{ns}), \quad K_D = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} D_n), \quad K_B = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} B_n). \quad (15)$$

Окончательно эти величины получаем в виде:

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{ Q_1(\pm 1) \cos \psi_c + Q_2(\pm 1) \sin \psi_c \},$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{ -Q_1(\pm 1) \sin \psi_c + Q_2(\pm 1) \cos \psi_c \}, \quad (16)$$

$$K_D = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} Q_3(\pm 1), \quad K_B = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} Q_4(\pm 1),$$

где  $Q_j = \frac{q_j(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1-\beta^2}}$ .

**Пример.** Прямолинейная произвольно ориентированная трещина в пластинке. Получено точное решение:

$$K_I = \sqrt{\pi l} \left\{ p + \langle \sigma_{11} \rangle \cos^2 \psi + \langle \sigma_{12} \rangle \sin 2\psi + \langle \sigma_{22} \rangle \sin^2 \psi \right\},$$

$$K_{II} = \sqrt{\pi l} \left\{ \frac{\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{11} \rangle}{2} \sin 2\psi + \langle \sigma_{12} \rangle \cos 2\psi \right\},$$

$$K_D = \sqrt{\pi l} \left\{ \langle D_1 \rangle \cos \psi + \langle D_2 \rangle \sin \psi \right\},$$

$$K_B = \sqrt{\pi l} \left\{ \langle B_1 \rangle \cos \psi + \langle B_2 \rangle \sin \psi \right\}.$$

Поток энергии необходимый для продвижения трещины за вершину,  $C$ , на малую величину  $cc'$  вдоль касательной определяется формулой :

$$\Delta A_{\Delta l} = \frac{1}{2} \int_{cc'} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} D_j^{(0)} n_j [\varphi_i^{(E)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^{(H)}] ds$$

где  $\sigma_{ij}^{(0)}$ ,  $D_j^{(0)}$ ,  $B_j^{(0)}$  определены до продвижения трещины, а  $u_i^{(1)}$ ,  $\varphi_i^{(E)}$ ,  $\varphi_i^{(H)}$  – скачки соответствующих величин на отрезке  $cc'$ .

**Результаты расчетов.** Рассматривалась электромагнитоупругая пластина из керамики *Terfenol-D*, поляризованная вдоль оси  $x_2$  [6], содержащая прямолинейные трещины:  $x_1 = l\beta$ ,  $x_2 = 0$ ,  $l = 1$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$  и  $x_1 = k\beta \cos \alpha$ ,  $x_2 = k\beta \sin \alpha + h$ ,  $k = 0.5$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ , расположенная над ней под углом  $\alpha$  и расстоянием между центрами трещин  $h = 2$ .

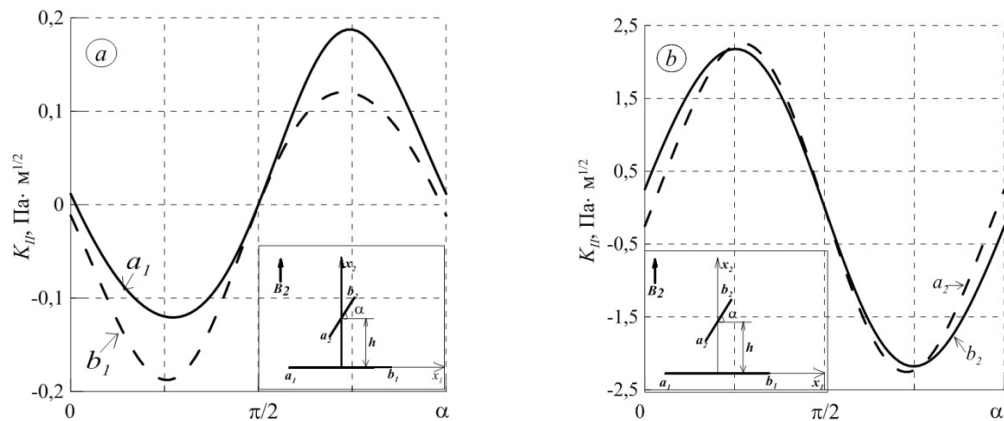


Рис. 2.  $K_{II}$  для прямолинейной трещины в зависимости от угла  $\alpha$ , когда на бесконечности действует магнитная индукция  $\langle B_2 \rangle = 1$  Тл. Сплошная линия соответствует вершине трещины  $a$ , пунктирная – вершине  $b$ .

**Выводы**

Из полученных результатов следует, что коэффициенты интенсивности механических напряжений могут существенно зависеть от действующих на бесконечности магнитных и электрических полей. Например, при действии на бесконечности  $\langle D_2 \rangle = 1$  Кл·м<sup>-2</sup>,  $K_I$ , из конфигураций двух трещин, где одна неподвижная горизонтальная, а вторая произвольно ориентированная прямолинейная, то для горизонтальной трещины равен 0÷80.

**Список использованной литературы**

1. Bao-Lin Wang, Yiu-Wing Mai. (2007). Applicability of the crack-face electromagnetic boundary conditions for fracture of magnetoelastic materials. International journal of solids and structures, 2 (44), 387-398.
2. Hua-dong Yong, You-he Zhou. (2007). Transient response of a cracked magnetoelastic strip under anti-plane impact. International Journal of Solids and Structures, 2 (44), 705-717.
3. Ke-qiang Hu, Guo-qiang Li. (2005). Electro-magneto-elastic analysis of a piezoelectromagnetic strip with a

- finite crack under longitudinal shear. *Mechanics of Materials*, 9 (37), 925-934.
4. Nan CW. (1994) Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases. *Phys Rev B Condens Matter*, 50(9), 6082-6088.
  5. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. — М.: Наука, 1986. — 160 с.
  6. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. — Донецк: Юго-Восток, 2011. — 232 с.
  7. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде / Л.А. Фильштинский // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1976. — № 5. — С. 91-97.
  8. Фильштинский Л.А. Плоская задача магнитоупругости для пьезомагнитной среды с трещинами / Л.А. Фильштинский, Д.Н. Носов, А.А. Еременко // Физико-химическая механика материалов. — 2015. — Т. 51. — № 2. — С. 109-115.
  9. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. — М.: Физматгиз, 1962. — 599 с.
  10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. — М.: Наука, 1974. — 640 с.

УДК 519.3

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могили

И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

**ГАУССОВА КРИВИЗНА СЕРЕНДИПОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
ИЛИ КАК ПРОГНУТЬ КОНОИД**

*В работе на примере конечного элемента биквадратичной интерполяции показана роль гауссовой кривизны поверхностей базисных функций и её влияние на интегральные характеристики конечного элемента. Новые модели получены путём усовершенствования классических методов Уачспресса и Тейлора.*

*Ключевые слова: серендипов конечный элемент, базисные функции, коноид, гиперболический параболоид.*

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморський національний університет імені Петра Могили

І.О. АСТІОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

**ГАУССОВА КРИВИНА СЕРЕНДИПОВИХ ПОВЕРХОНЬ АБО ЯК ПРОГНУТИ КОНОІД**

*У роботі на прикладі скінченного елемента біквадратичної інтерполяції показана роль гауссової кривини поверхонь базисних функцій та її вплив на інтегральні характеристики скінченного елемента. Нові моделі отримані шляхом удосконалення класичних методів Уачспресса і Тейлора.*

*Ключові слова: серендипів скінченний елемент, базисні функції, коноїд, гіперболічний параболоїд.*

A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

I.A. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

**GAUSSIAN CURVATURE OF SERENDIPITY SURFACES OR HOW TO DEFLECT CONOID**

*By the example of finite element of biquadratic interpolation the role of Gaussian surface curvature of basis functions as well as its influence on integral characteristics of finite element are shown. The new models are received by means of improvement of classic methods of Wachspress and Taylor.*

*Key words: serendipity finite element, basis functions, conoid, hyperbolic paraboloid.*

**Введение**

Статья посвящена анализу явления физической неадекватности интегральных характеристик серендиповых моделей конечных элементов (КЭ). Этот недостаток наблюдается на всех (без исключения) серендиповых КЭ высших порядков. Однако, в монографической литературе по МКЭ этому явлению практически не уделяют должного внимания. Нам известна только одна книга [1], в которой приведены естественные спектры узловых нагрузок от силы тяжести серендиповых элементов второго и третьего порядков. При этом автор [1] советует читателю смириться с аномальными свойствами стандартных серендиповых КЭ, поскольку в математическом обеспечении МКЭ не существует иных интерполяционных базисов. Иллюзия единственности была развеяна в 1982 г. [2], когда удалось найти альтернативные базисы на КЭ третьего порядка. Оказалось, что источником физической неадекватности серендиповых моделей аппроксимации являются неугловые поверхности базиса (коноиды), которые как бы «навязывают» угловым узлам отрицательные нагрузки. Чтобы устранить отрицательные нагрузки, достаточно заменить (полностью или частично) «жесткую» поверхность нулевой гауссовой кривизны (коноид) более «мягкой» поверхностью отрицательной гауссовой кривизны – гиперболическим параболоидом (гипаром). Ниже мы покажем, как прогнуть коноид.

**Анализ предшествующих результатов, цель работы**

Серендиповы КЭ известны с 1968 г. [3]. По признанию самих авторов, финитные базисные функции были найдены подбором, их назвали стандартным базисом. Самое простое определение серендипова КЭ дано в [4]: серендипов элемент – это лагранжевы элемент того же порядка, только без внутренних узлов. Проблема устранения нежелательных внутренних узлов лагранжевой интерполяции заинтересовала многих специалистов. В теории серендиповых аппроксимаций наряду с методом обратной матрицы стали применять метод конденсации (редукции) [5], метод Тейлора [6] и др. К сожалению, ни один из этих методов не позволил выйти за рамки стандартных моделей [3]. В начале 70-х годов XX столетия

появились интересные результаты геометрического моделирования в работах Уачспресса [7]. Как правило, Уачспресс конструировал дробно-рациональные базисы для КЭ в форме многоугольника. Обнаружив вероятностное содержание его метода «product of planes», мы предложили новый подход [2, 8] к построению полиномиальных базисов для серендиповых КЭ. Наш опыт работы с элементами серендипова семейства показывает, что наилучшие результаты даёт комбинированный метод [9], включающий алгебраическое, геометрическое моделирование и компьютерное экспериментирование.

Цель работы – на примере конечного элемента биквадратичной интерполяции  $Q_8$  показать роль гауссовой кривизны «промежуточных» поверхностей и её влияние на интегральные характеристики КЭ. «Мягкие» (в смысле В. И. Арнольда) модели можно получить путём усовершенствования классических методов Уачспресса и Тейлора.

**Основная часть**

Из названия статьи нетрудно понять, что в данном случае удобнее воспользоваться геометрическим моделированием. На рис. 1 показан серендипов элемент  $Q_8$  и линии нулевого уровня (пунктиром) «угловой»  $N_1(x, y)$  и «промежуточной»  $N_5(x, y)$  поверхностей стандартной модели [1, 3, 5].

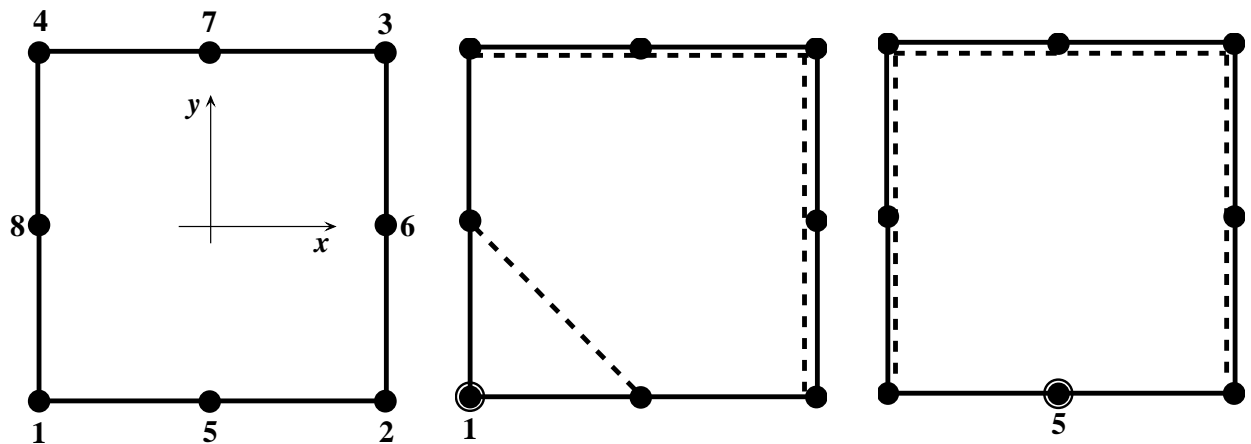


Рис. 1 Элемент  $Q_8$  и линии нулевого уровня финитных поверхностей  $N_1(x, y)$  и  $N_5(x, y)$  ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ )

Чтобы составить представление о стандартном базисе  $Q_8$ , достаточно привести уравнения двух функций:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y), \\
 N_5(x, y) &= \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Остальные шесть функций легко получить из (1). Это удобная модель для иллюстрации классического метода Уачспресса, хотя сам Уачспресс серендиповы элементы не рассматривал.

Заметим, что автор [7] конструировал финитные поверхности путём «перемножения плоскостей». При этом необходимо соблюдать требования интерполяционной гипотезы Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) = 1,
 \tag{2}$$

где  $i$  – номер функции,  $k$  – номер узла.

Как видим,  $N_1(x, y)$  – это композиция трех плоскостей, проходящих через точку  $(-1; -1; 1)$ . Остальные две точки для каждой из плоскостей выбираются из условия (2). Аналогично  $N_5(x, y)$  – это композиция трех плоскостей, проходящих через точку  $(0; -1; 1)$ . В серендиповом семействе особый интерес представляют «промежуточные» функции. Это они привели к нарушению физической адекватности спектра узловых нагрузок [1] на всех стандартных элементах высших порядков. Наши предшественники необоснованно ограничили (линейным законом) характер изменения поверхности  $N_i(x, y)$  вдоль нормали к стороне, на которой лежит промежуточный узел  $i$ . Так возникли коноиды – поверхности с нулевой гауссовой кривизной.

Коноид – это линейчатая поверхность, все прямолинейные образующие которой параллельны одной и той же плоскости и пересекают одну и ту же прямую (ось коноида). Коноид входит в семейство каталановых поверхностей, которые в первой половине 19 века изучал бельгийский математик Е. Catalan. Коноиды господствуют в составе стандартных базисов серендиповых КЭ высших порядков: 4 коноида на  $Q 8$ , 8 – на  $Q 12$  и 12 – на  $Q 16$ . Поверхности с нулевой гауссовой кривизной делают стандартную серендипову модель «жесткой». Противоестественность поузлового распределения нагрузки от единичной массовой силы [1] обусловлена жесткостью стандартных поверхностей. Например, для модели  $Q 8$  нагрузка в угловых узлах равна  $\gamma_i = -\frac{1}{12}, i = 1, 2, 3, 4$ ; в промежуточных –  $\gamma_i = \frac{1}{3}, i = 5, 6, 7, 8$ . С физической точки зрения под жесткостью понимают избыточную сопротивляемость изгибу. С математической точки зрения – это безальтернативность как результат единственности решения задачи локализации распределенной нагрузки. Так модель «мстит» за идеализацию. Вывод очевиден – нужно прогнуть коноид, т.е. сконструировать альтернативные «промежуточные» поверхности знакопеременной гауссовой кривизны. Понятно, что условия (2) необходимо сохранить.

Покажем, как построить «мягкие» промежуточные поверхности методом «перемножения» плоскостей. Для этого достаточно прямолинейные образующие коноида заменить вогнутыми квадратичными параболоми. По Уачспрессу такая конструкция получается перемножением двух плоскостей, так что теперь  $N_5(x, y)$  – это результат «перемножения» двух параболических цилиндров (выпуклого и вогнутого):

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2(1+\beta)}(1-x^2)(1-y)(\beta-y), \tag{3}$$

где  $y = 1, y = \beta$  – следы пересечения плоскости носителя параболическим цилиндром.

Для построения поверхности  $N_1(x, y)$  нам потребуется ещё одна промежуточная поверхность

$$N_8(x, y) = \frac{1}{2(1+\beta)}(1-y^2)(x-1)(\beta-x). \tag{4}$$

Если распространить идеи Тейлора [6] на нестандартные функции (3) и (4), получим

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y) - \frac{1}{2}(N_5(x, y) + N_8(x, y)). \tag{5}$$

Изменяя параметр  $\beta$ , мы регулируем прогиб промежуточных поверхностей. Нами установлена связь между узловой нагрузкой  $\gamma_i$  и  $\beta$ :

$$\beta = \frac{9\gamma_i - 1}{3 - 9\gamma_i}, \quad i = 5, 6, 7, 8. \tag{6}$$

Теперь покажем примеры «мягких» моделей  $Q 8$ , реализующих физически адекватные спектры узловых нагрузок. Напомним, что мы стремимся устранить отрицательные нагрузки в угловых узлах элемента.

Естественно начать с угловой нагрузки  $\frac{1}{36}$ , отвечающей элементу  $Q 9$  биквадратичной интерполяции. Достаточно показать две функции серендипова семейства  $N_1(x, y)$  и  $N_5(x, y)$ .

Модель А.

$$(\gamma_i = -\frac{1}{36}, i = 1, 2, 3, 4; \gamma_i = \frac{2}{9}, i = 5, 6, 7, 8):$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)xy; \quad N_5(x, y) = \frac{1}{4}(1-x^2)(1-y)^2.$$

Поверхность  $N_5(x, y)$  имеет отрицательную гауссову кривизну над всей областью  $Q 8$ .

Модель В.

$$(\gamma_i = \frac{2}{36}, i = 1, 2, 3, 4; \gamma_i = \frac{7}{36}, i = 5, 6, 7, 8):$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(5xy + x + y + 1); N_5(x, y) = \frac{1}{16}(1-x^2)(5y^2 - 8y + 3).$$

Теперь  $\frac{7}{10}$  поверхности  $N_5(x, y)$  имеет отрицательную гауссову кривизну. Остальная часть поверхности имеет положительную гауссову кривизну.

Модель С.

$$(\gamma_i = \frac{3}{36}, i = 1, 2, 3, 4; \gamma_i = \frac{1}{6}, i = 5, 6, 7, 8):$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(3xy + x + y + 1); N_5(x, y) = \frac{1}{8}(1-x^2)(3y^2 - 4y + 1).$$

В этом случае  $\frac{2}{3}$  поверхности  $N_5(x, y)$  имеет отрицательную гауссову кривизну. Заметим, что такое распределение весов встречается в методе конечных разностей на вычислительном шаблоне повышенной точности. К этому распределению приводит стержневая аналогия и правило Симпсона.

Модель D.

$$(\gamma_i = \frac{1}{8}, i = 1, \dots, 8):$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(15xy + 7x + 7y + 7);$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{32}(1-x^2)(15y^2 - 16y + 1).$$

Эта модель интересна тем, что нагрузка распределена равномерно. При этом  $\frac{8}{15}$  области  $Q_8$  накрыто поверхностью с отрицательной гауссовой кривизной.

### Выводы

Жесткие ограничения на поведение промежуточных поверхностей  $N_i(x, y)$  внутри носителя приводят к «парадоксу Зенкевича» [1]. Отрицательные нагрузки в угловых узлах элемента можно устранить, если вернуть в интерполяционный базис девятый моном  $x^2y^2$ . Зависимость интегральных характеристик серендиповых полиномов от гауссовой кривизны поверхностей до сих пор не изучалась, хотя нам известны и другие способы восстановления девятого монома. Нетрудно предположить, что во всех случаях конструирования физически адекватных серендиповых моделей коноиды уступают место поверхностям знакопеременной гауссовой кривизны. В этом контексте трудно удержаться от афоризма: «Лучше отрицательная кривизна Гаусса, чем отрицательная нагрузка Зенкевича».

### Список использованной литературы

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
2. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. – Ив.-Франковск, 1982. – 6 с. Деп. в ВИНТИ, № 1213.
3. Ergatoudis I. Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Int. J. Solids Struct. – V.4. – 1968. – P. 31-42.
4. Немчинов Ю. И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов) / Ю. И. Немчинов. – К. : Будівельник, 1982. – 232 с.
5. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
6. Taylor R. L. On the completeness of shape functions for finite element analysis / R. L. Taylor // J. Num. Meth. Eng. – 4., 1. – P. 17-22.
7. Wachspress E. L. A rational finite element basis / E. L. Wachspress. – Academic Press: New York, 1975. – 344 p.
8. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А. Н. Хомченко. – Ив.-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – 7 с. Деп. в ВИНТИ, № 5167.
9. Астионенко И. А. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика. – № 5(60). Вып. 16. – Белгород: БелГУ, 2009. – С. 15-31.

УДК 519.3

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могилы

Е.И. ЛИТВИНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

**НЕМАТРИЧНЫЕ СХЕМЫ КОНДЕНСАЦИИ НА СЕРЕНДИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ**

*В работе на примере конечного элемента бикубической интерполяции конструируются математически обоснованные и физически адекватные серендиповы базисы путем исключения «внутренних» функций бикубического лагранжева базиса. Предложенная мультимодальная схема редукции позволяет устранить внутренние узлы, сохранив неузловые параметры в интерполяционном полиноме. Именно неузловые параметры позволяют управлять интегральными характеристиками конечноэлементных моделей.*

*Ключевые слова: конечный элемент, базисные функции, интерполяционный полином, нематричные схемы конденсации.*

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморський національний університет імені Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

**НЕМАТРИЧНІ СХЕМИ КОНДЕНСАЦІЇ НА СЕРЕНДИПОВИХ ЕЛЕМЕНТАХ**

*У роботі на прикладі скінченного елемента бікубічної інтерполяції побудовані математично обґрунтовані і фізично адекватні серендипові базиси шляхом виключення «внутрішніх» функцій бікубічного лагранжева базису. Запропонована мультимодальна схема редукції дозволяє виключити внутрішні вузли, при цьому зберігаючи невузлові параметри в інтерполяційному поліномі. Саме невузлові параметри дозволяють керувати інтегральними характеристиками скінченноелементних моделей.*

*Ключові слова: скінченний елемент, базисні функції, інтерполяційний поліном, нематричні схеми конденсації.*

A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

Ye.I. LITVINENKO

Kherson National Technical University

**NON-MATRIX SCHEMES OF CONDENSATION ON SERENDIPITY ELEMENTS**

*In the research by the example of finite element of biquadratic interpolation the mathematically proved and physically adequate serendipity bases are built by means of excluding of “internal” functions of bicubic Lagrange bases. The suggested multimodal scheme of reduction allows to eliminate internal nodes keeping non-nodal parameters in the interpolation polynomial. These are non-nodal parameters which allow to control integral characteristics of finite element models.*

*Key words: finite element, basis functions, interpolation polynomial, non-matrix schemes of condensation*

**Введение**

Термин «конденсация» в методе конечных элементов (МКЭ) означает снижение размерности системы уравнений при помощи исключения некоторых степеней свободы. Чтобы сократить общее число исходных степеней свободы, редуцированная система уравнений должна быть выражена в терминах заранее выбранных степеней свободы, которые хотят оставить. На конечных элементах высших порядков обычно избавляются от внутренних степеней свободы. Правда, матричный подход, как правило, приводит к физически неадекватным моделям. Поэтому лучше начинать с интегральных характеристик базисных функций. Речь идет о спектре узловых нагрузок, вызванных силой тяжести элемента. Понятно, что это обратная задача, когда по заказному спектру находят базис, реализующий такой спектр. Как известно, обратные задачи решаются неоднозначно, так что у пользователя появляется возможность выбирать. В статье на примере элемента бикубической интерполяции (12 узлов) конструируются математически обоснованные и физически адекватные серендиповы базисы путем исключения «внутренних» функций лагранжева базиса (12 узлов).



**Анализ предшествующих результатов, цель работы**

Матричная конденсация (редукция) описана в [1, 2]. Нематричные подходы описаны в [3, 4]. В работе [3] преобразование лагранжевых моделей в серендиповы выполнено в терминах узловых нагрузок. Процедура распределения внутренних нагрузок по граничным узлам основана на линейной комбинации вкладов отдельных внутренних узлов. В настоящей работе предложены более простые и понятные схемы конденсации. В статье [4] все внутренние нагрузки сконцентрированы в барицентре элемента. Такая унимодальная схема порождает семейство 13-параметрических моделей. Ниже мы используем мультимодальную схему, позволяющую увеличить число параметров, управляющих формообразованием базисных функций. Цель работы – привлечь внимание разработчиков математического обеспечения к нематричным схемам конденсации.

**Основная часть**

На рис. 1 показаны схемы исключения внутренних узлов лагранжева КЭ бикубической интерполяции (16 узлов).

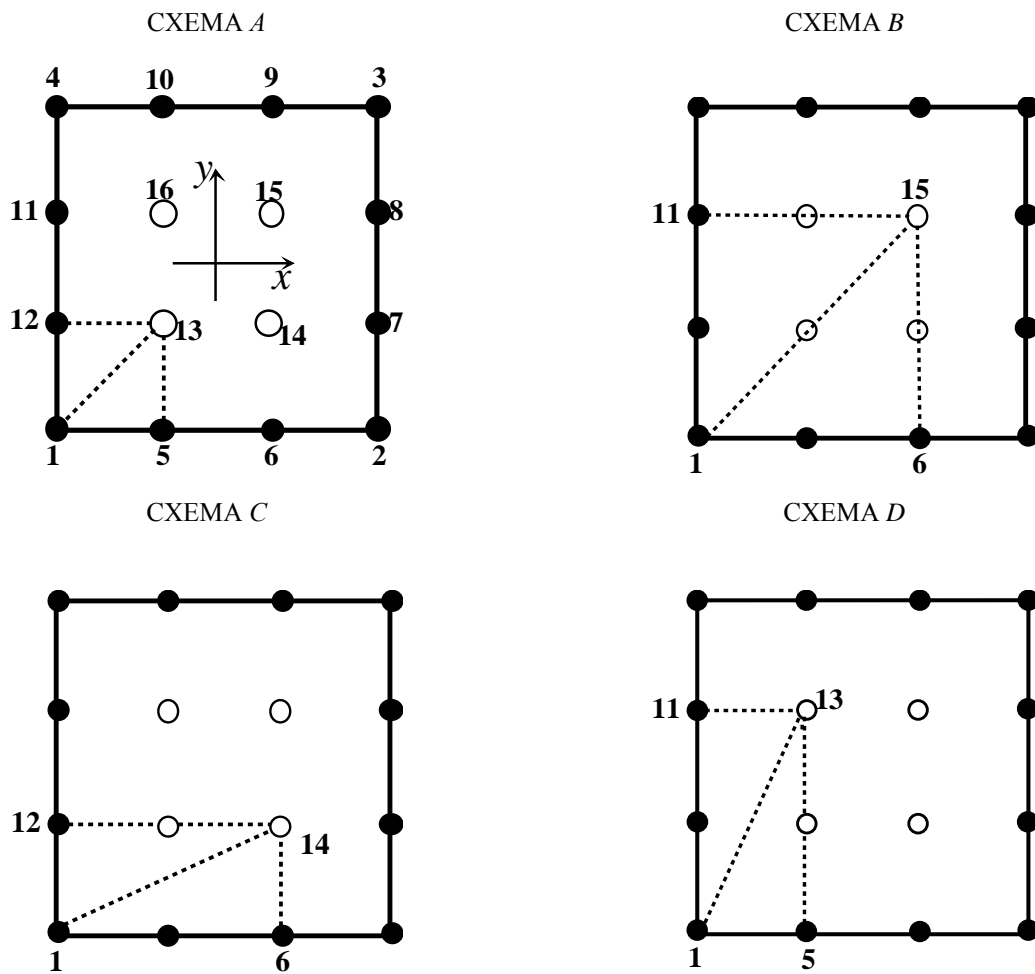


Рис. 1. Схемы исключения внутренних узлов лагранжева КЭ

Для получения серендипова базиса (12 полиномов) мы используем следующие функции лагранжева базиса:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{256} (1-x)(1-y)(1-9x^2)(1-9y^2), \\
 N_5(x, y) &= -\frac{9}{256} (1-x^2)(1-3x)(1-y)(1-9y^2), \\
 N_{13}(x, y) &= \frac{81}{256} (1-x^2)(1-y^2)(1-3x)(1-3y).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Остальные функции  $N_i(x, y)$  лагранжева базиса генерируются функциями (1). Достаточно применить осевую и центральную симметрию и перестановку  $x$  и  $y$ . Все «угловые» функции получаются из

$N_1(x, y)$ , «промежуточные» функции – из  $N_5(x, y)$ , «внутренние» – из  $N_{13}(x, y)$ . Интерполянт записывают так:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{16} N_i(x, y) \cdot f_i, \quad (2)$$

где  $f_i$  – известные значения функции  $f(x, y)$  на границе КЭ и его внутренних узлах. Базисные функции удовлетворяют гипотезе Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{16} N_i(x, y) = 1. \quad (3)$$

В данном случае интерполянт (2) на границах квадрата  $x = \pm 1, y = \pm 1$  изменяется по закону кубической параболы (бикубическая интерполяция).

Спектр узловых нагрузок от силы тяжести КЭ, как обычно, определяется по правилу интегрального усреднения:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad (4)$$

где  $D$  – область интегрирования ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ ),  $S$  – площадь области  $D$ ,  $\gamma_i$  – нагрузка в узле  $i$ . Вычисления по формуле (4) дают:

$$\gamma_i = \frac{1}{64}, i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{3}{64}, i = 5, 6, \dots, 12; \quad \gamma_i = \frac{9}{64}, i = 13, 14, 15, 16.$$

Заметим, что классическая задача лагранжевой интерполяции функции одного аргумента легко обобщается на функции двух аргументов путем прямого перемножения коэффициентов Лагранжа (1). В отличие от лагранжевых, серендиповы КЭ не имеют одномерных аналогов. Эта специфическая особенность серендипова семейства вызывает определенные трудности и привлекает внимание заинтересованных специалистов.

Предлагаемые схемы (рис. 1) исключают появление физически неадекватных спектров узловых нагрузок типа модели Зенкевича [5]. Моделирование серендипова базиса почти не нуждается в пояснениях. Каждая внутренняя функция корректирует три граничных функции. Получение функций  $\bar{N}_1(x, y), \bar{N}_5(x, y)$  и  $\bar{N}_{12}(x, y)$  покажем на модели  $A$ .

Выберем физически естественный спектр узловых нагрузок. Например,  $\gamma_i = 0, i = 1, 2, 3, 4; \gamma_i = \frac{1}{8}, i = 5, \dots, 12$ . Узловые нагрузки серендипова и лагранжева базисов связаны следующей корректирующей зависимостью:

$$\bar{\gamma}_1 = \gamma_1 + \alpha \cdot \gamma_{13}; \quad \bar{\gamma}_5 = \gamma_5 + \beta \cdot \gamma_{13}; \quad \bar{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \beta \cdot \gamma_{13}. \quad (5)$$

В данном случае  $\alpha = -\frac{1}{9}; \beta = \frac{5}{9}$ .

Заметим, что  $\alpha + 2\beta = 1$ .

Из (5) следует:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(x, y) &= N_1(x, y) - \frac{1}{9} N_{13}(x, y); \quad \bar{N}_5(x, y) = N_5(x, y) + \frac{5}{9} \cdot N_{13}(x, y), \\ \bar{N}_{12}(x, y) &= N_{12}(x, y) + \frac{5}{9} \cdot N_{13}(x, y). \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка полиномов (1) в (6) дает:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(x, y) &= \frac{1}{128} (1-x)(1-y)(1-3x)(1-3y)(-4-3x-3y), \\ \bar{N}_5(x, y) &= \frac{9}{64} (1-x^2)(1-y)(-6x-y+1), \\ \bar{N}_{12}(x, y) &= \frac{9}{64} (1-y^2)(1-x)(-x-6y+1). \end{aligned} \quad (7)$$

Этих функций достаточно, чтобы получить весь базис модели  $A$ .

Если воспользоваться схемой  $C$ , получим новый базис с тем же спектром узловых нагрузок:

$$\begin{aligned}\bar{N}_1(x, y) &= \frac{1}{128} (1-x)(1-y)(1+3x)(1-3y)(-4-6x-3y-9xy), \\ \bar{N}_6(x, y) &= \frac{9}{128} (1-x^2)(1-y)(1+3x)(1-3y)(2+y), \\ \bar{N}_{12}(x, y) &= \frac{9}{64} (1-y^2)(1-x)(1+3x)(1-3y)(1+2x).\end{aligned}\tag{8}$$

Этих функций достаточно, чтобы получить весь базис модели *C*. Аналогично получается модели *B* и *D*. Во всех случаях удовлетворяется интерполяционная гипотеза (3), а интерполянт (2) имеет теперь 12 слагаемых. Интересно отметить, что «угловые» поверхности всех моделей в центре КЭ имеют одинаковые аппликаты  $\bar{N}_i(0; 0) = -\frac{1}{32}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Такое же свойство имеют все «промежуточные» поверхности

$\bar{N}_i(0; 0) = \frac{9}{64}$ ,  $i = 5, \dots, 12$ . Вдоль границ КЭ все функции изменяются одинаково по закону кубической параболы так, что сохраняется межэлементная непрерывность. Внутри КЭ рельеф поверхности  $N_i(x, y)$  существенно зависит от схемы конденсации. Деформация квадратного шаблона в прямоугольный (рис. 1) вызывает нарушения геометрической изотропии базисной функции. Однако это не имеет нежелательных последствий, так как аномалии сглаживаются под действием других функций базиса.

#### Выводы

Мультимодальная схема редукции позволяет устранить внутренние узлы, сохранив неузловые параметры. Именно неузловые параметры позволяют управлять интегральными характеристиками моделей. При алгебраическом подходе такая возможность исключена.

#### Список использованной литературы

1. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 482 с.
3. Литвиненко Е. И. Внутренние моды конечных элементов: преобразование лагранжевых моделей в серендиповы / Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. Вып. 2 (45). – Херсон: ХНТУ, 2012. – С. 205-210.
4. Астионенко И. А. Конечные элементы высших порядков и барицентрическая конденсация / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. Вып. 3 (50). – Херсон: ХНТУ, 2014. – С. 208-212.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

УДК 551.2/3

Г.П. ШЕРЕМЕТ, Д.Б.ВЕНГРОВИЧ, І.Н. ГУБАР  
Інститут геофізики ім. С.И. Субботіна НАН України, ВГВ**МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ПОЛЯ НАПРУЖЕНЬ  
В НЕОДНОРІДНОМУ ГЕОФІЗИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ**

*Ми поєднали експериментальні дослідження і числові розрахунки для дослідження еволюції полів напружень в динамічних процесах для моделей структурованого середовища.*

*Ключові слова: еволюція, поле напружень, геофізичне середовище.*

Г.П. ШЕРЕМЕТ, Д.Б.ВЕНГРОВИЧ, І.Н. ГУБАР  
Інститут геофізики ім. С.И. Субботіна НАН України, ОГВ**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ  
ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

*Мы провели совместные экспериментальные исследования и численные расчеты эволюции полей напряжений в динамических процессах для моделей структурированной среды.*

*Ключевые слова: эволюция, поле напряжений, геофизическая среда.*

G.P. SHEREMET, D.B. VENGROVICH, I.N. GUBAR  
Institute of Geophysics S.I. Subbotin NAS of Ukraine, DGE**MODELING OF STRESS EVOLUTION IN INHOMOGENEOUS GEOPHYSICAL MEDIA**

*We had combined the experimental researches and numerical calculations for the study of evolution of the stress fields in dynamic processes for the models of the structured environment.*

*Keywords: evolution, stress fields, geophysical environment.*

**Постановка проблеми**

Згідно сучасних досліджень, характерними особливостями тріщинуватого геофізичного середовища є ієрархічна будова і наявність неоднорідностей, що проявляється на мікро-, мезо- і макрорівні масштабу. В динамічних задачах ієрархія блоків породжує ієрархію характерних часів взаємодії між сусідніми елементами структури, що, як правило, не розглядається в моделях суцільного середовища [1-3]. Дослідження складних процесів взаємодії в геофізичному середовищі з ієрархічною будовою актуальні, зокрема, для фізичного обґрунтування особливостей еволюції хвильових полів, що використовується нами для побудови нових технологій інтенсифікації видобування вуглеводнів [4].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

В роботі методами математичного та фізичного (поляризаційно-оптичного і тензометричного) моделювання [5-7] вивчена еволюція напружень, що виникають при квазістатичному і імпульсному навантаженні моделей структурно-неоднорідного середовища. Досліджувались дискретні моделі двохвимірних упаковок із фотопружних дисків та суцільні моделі з включеннями дисків. Структурні елементи – гранули діаметром 10 або 20 мм – розміщувались між двома прозорими пластинками в жорсткій обмежувальній рамці. Диски-гранули були виготовлені із оптично-чутливих полімерів, їх механічні властивості (пружно-пластичне рівняння стану) були отримані нами окремо.

Особливістю і складністю математичного моделювання в даному випадку є сумісне використання методу скінченних елементів та розв'язків контактних задач для гранульованого середовища. В експерименті ж кінограми ізохром, отримані методом динамічної фотопружності [6] для імпульсно-навантажуваних моделей, давали повну інформацію про динаміку процесів, амплітуди і швидкості поширення хвиль напружень. Експериментальні дані співставлялися із розрахунковими.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Результати квазістатичних експериментів (рис. 1б, 2б) і розрахунків (рис. 1а, 2а) показують, що в структурованому середовищі в процесі самоорганізації утворюються локалізовані структури навантаження, ланцюги напружень тощо, які в динамічних процесах визначають характер розповсюдження хвиль.

Надалі в таких моделях вивчались процеси розповсюдження локалізованих і періодичних хвиль, згенерованих зовнішнім ударом або звуковим генератором. На рис.1б приведені отримані експериментально загальні картини розподілу напружень в щільній упаковці пружних дисків однакового діаметру у випадку їх утримання жорсткими стінками і втиснення всередину упаковки додаткових елементів. На рис.1а приведені результати чисельного моделювання аналогічного експерименту методом елементної динаміки. Темні

відрізки між гранулами – інтенсивність міжгранульних сил на момент врівноваження системи. Від розміру втиснених всередину упаковки додаткових елементів залежить картина утворюваних силових ланцюжків. В областях включень на структурних елементах зароджуються в певних напрямках силові ланцюги напружених гранул.

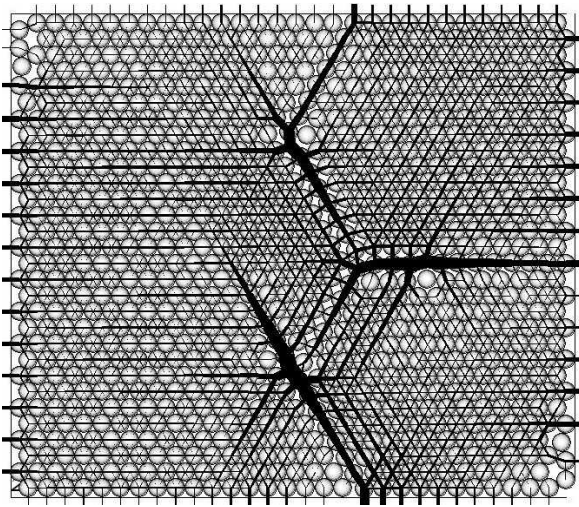


Рис. 1а. Результат чисельного моделювання експерименту з трьома розпираючими гранулами, отриманий методом елементної динаміки. Темні відрізки між гранулами – інтенсивність міжгранулярних сил на момент врівноваження системи (динамічний розрахунок).

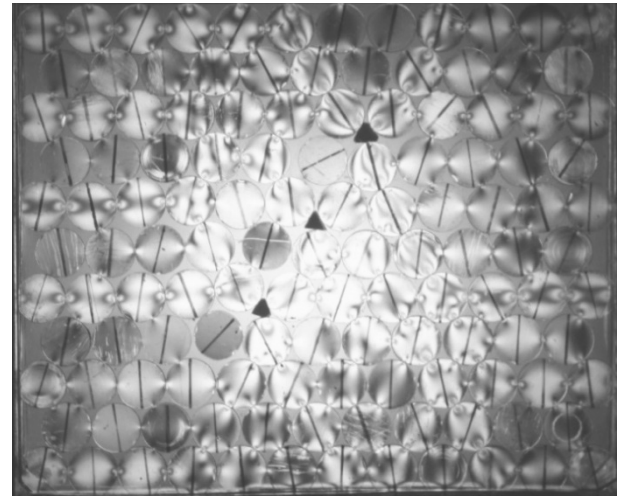


Рис. 1б. Напружено-деформований стан регулярної упаковки гранул з оптично-чутливого полікарбонату, створений додатковими (в центрі) трьома розпираючими гранулами. Риски нанесені на гранулах, фіксують кути їх поворотів поляризаційно-оптичним методом – квазістатика.

При імпульсних режимах деформування таких неоднорідних моделей спостерігалось групування гранул в кластери, проходження імпульсного збурення по них у вигляді усамітнених хвиль солітоподібного типу (компактонів). При дослідженні динамічних процесів в таких структуровано-навантажених середовищах вивчались параметри нелінійних хвиль. Вивчено вплив пластичності на досліджувані процеси, закономірності розворотів гранул та динаміку перерозподілу навантаження вздовж розгалужених ланцюгів.

Результат чисельного моделювання скінченноелементної моделі з розрахунком контактних взаємодій для пластини з полікарбонату з отворами, в яких розміщені гранули, приведений на рис. 2 а. – ізольовані величини  $\sigma_x$  –  $\sigma_y$ , аналогічний результат експерименту – рис. 2 б.

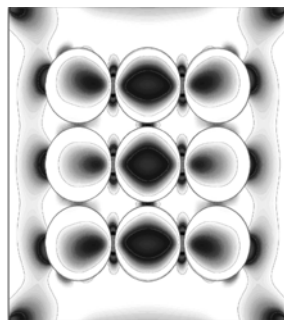


Рис. 2 а.

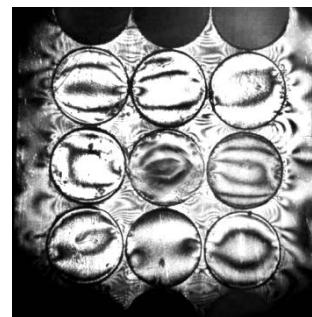


Рис. 2 б.

Для аналізу проходження імпульсного збурення по силовим ланцюгам у вигляді усамітнених хвиль солітоподібного типу проводились експерименти з ланцюговими одновимірними моделями при навантаженні з допомогою бійка, маса якого дорівнювала масі диска ланцюга. Бійок прискорювався шляхом електропідживлення на ньому мідної фольги або мікрочаряду єврокапсуля або капсуля Жевело-Н. При проходженні збурення в ланцюгових моделях з однакових гранул (дисків діаметром 20 мм, товщиною 5 мм) спостерігалось формування компактону (рис. 3). Отримана інформація про характеристики еволюції таких хвиль: амплітуди та фазові швидкості, тривалість контакту гранул, просторові розміри компактонів.

На рис. 4 приведені визначені по кінограмам ізохром залежності максимальних напружень від часу в центрі диску ланцюжка дисків поліметилметакрилата діаметром 0,04 м (кр. 1) і в центрі контактуючого із ним диска-включення в ланцюжок діаметром 0,02 м (кр. 2).

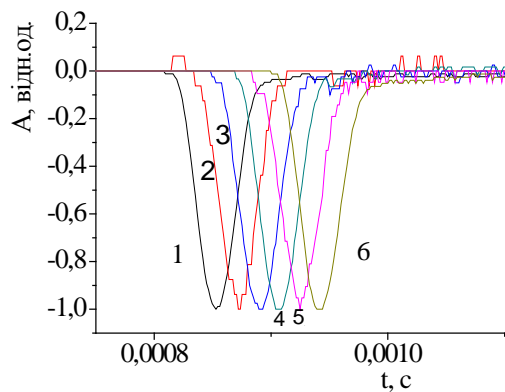


Рис. 3. Криві поздовжнього деформування 1-6 в центрах відповідно 5-10 дисків ланцюга дисків з полікарбонату діаметром 0,02 м при проходженні компактона.

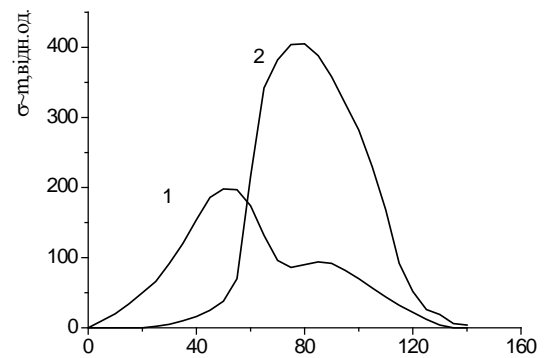


Рис. 4. Максимальні значення динамічних напружень ( $\sigma_m \sim m$ ) на вісі симетрії досліджуваних ланцюжків, при проходженні збурення від електропідривання сворокапсуля, поблизу міждисккових контактів не перевищували 12 МПа, а в центрі дисків ланцюжка діаметром 0,04 м і в центрі диска - включення діаметром 0,02 м не досягали 2 і 4 МПа, відповідно. діючих сил навантаження і реакції опору ланцюжка

Отримані результати свідчили про те, що в одновимірних ланцюгах однакових дисків з включенням, розміри і вага якого відрізняються від характеристик диска, в процесі їх деформування при проходженні довгохвильового збурення, поле напружень має нерівноважний характер і найбільші напруження реалізуються на меншому диску – включенні (рис. 4).

В умовах динамічного ударного навантаження, суттєвими стають динамічні ефекти, коли інерція елементів структури впливає на еволюцію поля напружень. При цьому характеристики довгохвильового імпульсу навантаження визначають миттєві значення поля напружень.

#### Список використаної літератури

1. Даниленко В.А. Нелінійні математичні моделі середовищ з часовою та просторовою нелокальністю / В.А. Даниленко, Т.Б. Даневич, С.І. Скуратівський. – Київ: Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, 2008. – 86 с.
2. Садовський М.А. Автомодальність геодинамічних процесів / М.А. Садовський // Вестник АН СССР. – 1986. – №8. – С.3-11.
3. Панин В.Е. Структурні рівні деформації твердих тел / В.Е. Панин, Ю.В. Гриняев, Т.Ф. Елсукова, А.Г. Иванчин // Известия вищих учебных заведений. Физика. –1982. – №6. – С. 5-28.
4. Нагорний В.П. Імпульсні методи відновлення продуктивності водозабірних свердловин. Довідник. – Київ: Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, 2011. – 187 с.
5. Венгрович Д.Б. Исследование превращений динамической загрузки в неоднородной зернистой среде / Д.Б. Венгрович, И.Н. Губарь, Г.П. Шеремет // Материалы IX Международной научной конференции "Импульсные процессы в механике сплошных сред" (г. Николаев, 15-19 августа 2011 г.) – Николаев: КП "Миколаївська обласна друкарня", 2011. – С. 94-97.
6. Докукин А.В. Исследование массива горных пород методами фотомеханики и др. / А.В. Докукин, В.Ф. Трумбачев, О.К. Славин М.: Наука. – 1982. – 272 с.
7. Метод фотоупругости. Т. 2 / Под общ. ред. Г.Л. Хесина. – М.: Стройиздат, 1975. – 367 с.

УДК 539.3

Ю.С. ШУВАЛОВА

Український державний університет залізничного транспорту

Д.В. КРЮТЧЕНКО

Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України

Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ  
КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКИХ РЕЗЕРВУАРАХ**

*В работе предложен метод расчета свободных и вынужденных колебаний жидкости в оболочке вращения с жесткими стенками под действием силы тяжести. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение безвихревое. Метод решения основан на сведении задачи к системе сингулярных интегральных уравнений для определения потенциала скоростей. Численная реализация задачи основана на применении метода граничных элементов с применением специальных квадратур. Проведен анализ сходимости численного решения. Определены частоты и формы колебаний жидкости в жесткой цилиндрической оболочке.*

*Ключевые слова: свободные колебания, сила тяжести, метод граничных элементов*

Ю.С. ШУВАЛОВА

Український державний університет залізничного транспорту

Д.В. КРЮТЧЕНКО

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

**ИНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В  
ЖОРСТКИХ РЕЗЕРВУАРАХ**

*В роботі запропоновано метод розрахунку вільних та вимушених коливань рідини в оболонці обертання з жорсткими стінками під дією сили тяжіння. Припускається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух є безвихоревим. Метод ґрунтується на зведенні задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь для визначення потенціалу швидкостей. Чисельна реалізація задачі використовує метод граничних елементів із застосуванням спеціальних квадратур. Проведено аналіз збіжності чисельного розв'язку. Визначені частоти і форми коливань рідини в жорсткій циліндричній оболонці.*

*Ключові слова: вільні коливання, сила тяжіння, метод граничних елементів*

Yu. SHUVALOVA

Ukrainian State University of Railway Transport

D. KRUTCHENKO

A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems

E. STRELNIKOVA

A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems

V.N. Karazin Kharkiv National University

**INTEGRAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF LIQUID FREE AND FORCED VIBRATIONS IN  
RIGID RESERVOIRS**

*In this paper we present a method for estimating the free and forced vibrations of the liquid in a shell of revolution with rigid walls under the force of gravity. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one and its flow induced by vibrations of the shell is irrotational. The method is based on reduction of the problem considered to the system of singular integral equations for the velocity potential. The numerical simulation is based on the boundary element method using the special quadratures. The convergence analysis has been accomplished. The modes and frequencies of the rigid cylindrical shell were obtained.*

*Keywords: free vibrations, hydro –elastic interaction, finite and boundary element methods, different filling level.*

**Формулирование проблемы и анализ последних исследований и публикаций**

Плескание можно описать как интенсивное движение свободной поверхности жидкости, находящейся в резервуаре, под действием внезапно приложенной нагрузки.

В работе [1] приведена классификация колебаний свободной поверхности жидкости в резервуарах. Выделяются три формы плесканий, а именно: а) поперечные плескания, б) вертикальные плескания, в) плескания при вращении. Плескание – это феномен, который проявляется при использовании емкостей в широком диапазоне промышленного применения: в контейнерах для хранения сжиженного газа, топливных баках ракет и самолетов, в резервуарах грузовых танкеров. Известно, что именно частично заполненные резервуары испытывают действие наиболее интенсивных плесканий, когда возникает высокое давление на стенки резервуара, что может привести к разрушению конструкции или потере устойчивости. Первые научные работы в этом направлении появились в 1960-х годах и были посвящены изучению плесканий жидкого топлива в баках ракетополетов. Очевидно, что характер поведения жидкости в топливном баке существенно влияет на динамику полета. Это стимулировало интерес к проблеме плесканий в начале 60-х годов прошлого столетия, особенно после начала космических программ СССР и NASA (Gemini and Apollo programs). К этим исследованиям относятся работы [2–3]. Анализ современных исследований, посвященных проблемам плескания жидкости в резервуарах, проведен в обзорах Р.А. Ибрагима [4–5].

В большинстве работ изучаются свободные колебания жидкости в плоской или осесимметричной постановках. Данная статья посвящена изучению свободных и вынужденных колебаний жидкости в произвольных резервуарах, имеющих вид оболочки вращения.

#### Постановка задачи и формулирование цели исследования

Рассматривается задача о колебаниях жидкости в жесткой оболочке вращения. Обозначим смоченную поверхность оболочки через  $S_1$ , а свободную поверхность –  $S_0$ . Пусть декартова система координат  $Oxyz$  связана с оболочкой, свободная поверхность жидкости  $S_0$  совпадает с плоскостью  $xOy$  в состоянии покоя. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, начавшееся из состояния покоя, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей жидкости  $\Phi$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа. Величину давления  $p$  на стенки оболочки определим из линеаризованного интеграла Коши–Лагранжа по формуле [6]:

$$p = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz + a_s(t)x \right) + p_0,$$

в которой  $g$  – ускорение свободного падения,  $z$  – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении,  $\rho_l$  – плотность жидкости,  $p_0$  – атмосферное давление,  $a_s(t)$  – сейсмическое ускорение,  $x$  – горизонтальная координата точки жидкости.

На свободной поверхности жидкости потребуем выполнения следующих условий:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0,$$

где функция  $\zeta(x, y, t)$  описывает форму и положение свободной поверхности.

Таким образом, для потенциала скоростей имеем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right|_{S_0} = 0.$$

Требуется определить неизвестные функции  $\zeta$  и  $\Phi$ . Это позволит изучить изменение уровня заполнения как функцию времени в различных точках свободной поверхности. Полученные данные дадут возможность оценить вероятность выплескивания опасного заполнителя при действии импульсных и сейсмических нагрузок.

#### Изложение основного материала исследования

**Метод решения.** Представим потенциал  $\Phi$  в виде:

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \varphi_k. \tag{1}$$

Для функций  $\varphi_k$  имеем следующие краевые задачи:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \tag{3}$$

Продифференцируем второе из соотношений (3) по  $t$  и подставим в полученное равенство выражение для  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ . Далее представим функции  $\varphi_k$  в виде  $\varphi_k(t, x, y, z) = e^{i\lambda_k t} \varphi_k(x, y, z)$ . Приходим к проблеме собственных значений, при этом на свободной поверхности будет выполнено равенство:



$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k. \tag{4}$$

Для уравнения свободной поверхности получим выражение:

$$\zeta = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}. \tag{5}$$

В цилиндрической системе координат искомые базисные функции допускают представления:

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha \theta. \tag{6}$$

Здесь  $\alpha$  – номер гармоники. Таким образом, отдельно рассматриваются частоты и формы свободных колебаний для различных  $\alpha$ .

Действуя аналогично [7], приходим к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_1; \\ \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[ \frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_{\alpha}(k) - F_{\alpha}(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_{\alpha}(k) n_z \right\}; \\ \Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} (1 - 4\alpha^2)^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad F_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \\ a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2rr_0, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}. \end{aligned}$$

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (7) осуществлено методом граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности [6, 7]. Отметим, что ядра в интегральных операторах (7) имеют логарифмическую особенность. Для вычисления таких интегралов неприменимы стандартные квадратурные формулы, поскольку подынтегральные функции резко меняются внутри элемента. Для их вычисления в данной работе применен метод, описанный в [8].

**Численные результаты.** Рассмотрена задача о собственных колебаниях жидкости в жесткой цилиндрической оболочке – коническом баке. Параметры оболочки принимались следующими: радиус оболочки  $R = 1$  м, уровень заполнения жидкостью  $H = 1$  м. Аналитические значения собственных частоты и формы колебаний жидкости определяются формулами, полученными в [5]. Численно собственные частоты колебаний жидкости  $\chi^2/g$  в цилиндрической оболочке определены по методике, описанной выше. Здесь рассмотрены неосесимметричные колебания, соответствующие параметру  $\alpha = 1$  в формуле (6).

На рис. 1 изображены три первые формы свободных колебаний жидкости в жесткой цилиндрической оболочке.

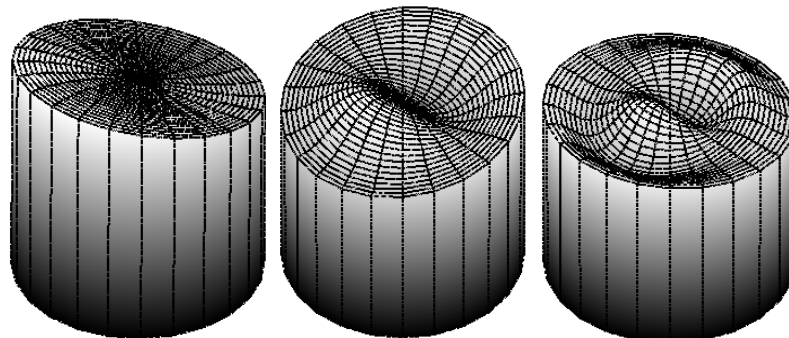


Рис. 1. Формы колебаний жидкости в цилиндрической оболочке,  $\alpha = 1$

В табл. 1 приведено сопоставление частот колебаний жидкости в цилиндрической оболочке, полученных численно методом граничных элементов (МГЭ) с постоянной аппроксимацией плотности [6] и методом граничных элементов с разбиением на подобласти [9] с аналитическим решением [5].

При использовании метода [6] меридиан оболочки разбивался на 120 граничных элементов (ГЭ), днище – также на 120 ГЭ, радиус свободной поверхности – на 100 ГЭ. При использовании метода [9] расчетная область делилась на две подобласти, каждая из которых содержала по 260 ГЭ. В обоих вариантах МГЭ использовались граничные элементы с постоянной аппроксимацией плотности. Дальнейшее увеличение числа элементов не приводило к существенному изменению результатов.

Таблица 1

**Аналитические и численные значения частот колебаний жидкости**

Номер гармоники	Метод решения	Номер частоты				
		<i>n=1</i>	<i>n=2</i>	<i>n=3</i>	<i>n=4</i>	<i>n=5</i>
$\alpha=1$	[6]	1.657	5.332	8.538	11.709	14.868
	[9]	1.657	5.332	8.540	11.711	14.889
	[5]	1.657	5.329	8.536	11.706	14.864

Оба варианта метода граничных элементов показывают практически одинаковую точность, но при использовании метода граничных элементов с разбиением на подобласти матрица разрешающей системы уравнений имеет меньшую размерность. На рис. 2 представлены аналитические и численные данные для первых трех форм колебаний жидкости при  $\alpha=1$ . Цифры 1, 2, 3 отвечают первой, второй и третьей формам. Сплошными линиями показаны аналитические решения, точками, квадратиками и кружочками помечены численные результаты.

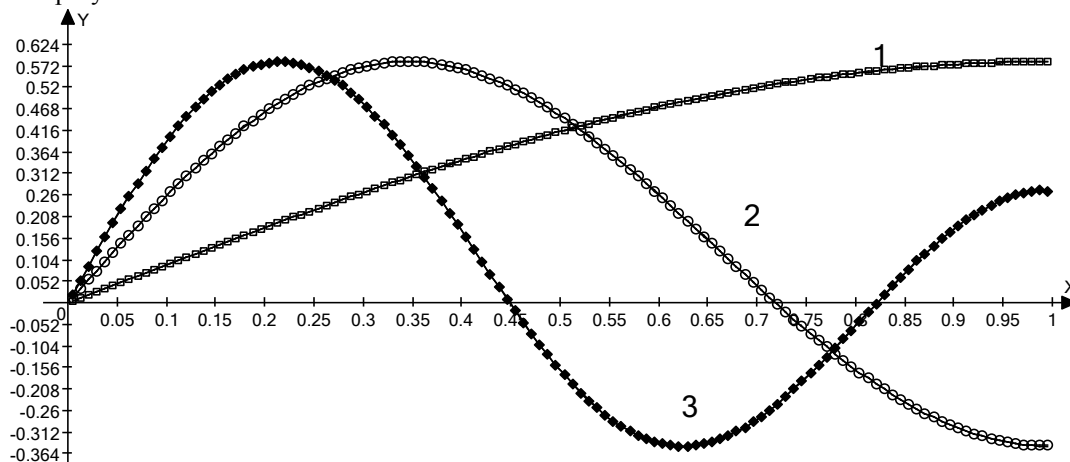


Рис. 2. Сравнение аналитических и численных данных для собственных форм колебаний

Полученные результаты позволили рассмотреть задачу о вынужденных колебаниях жидкости в цилиндрической оболочке под действием сейсмической нагрузки.

Рассматривалась сейсмическая нагрузка, которая описывается функцией:

$$a_s(t) = 0.02 \sin(\pi / 5) \cos(2\pi t), \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$a_s(t) = 0, \quad t \geq 5$$

График этой функции показан на рис. 3а).

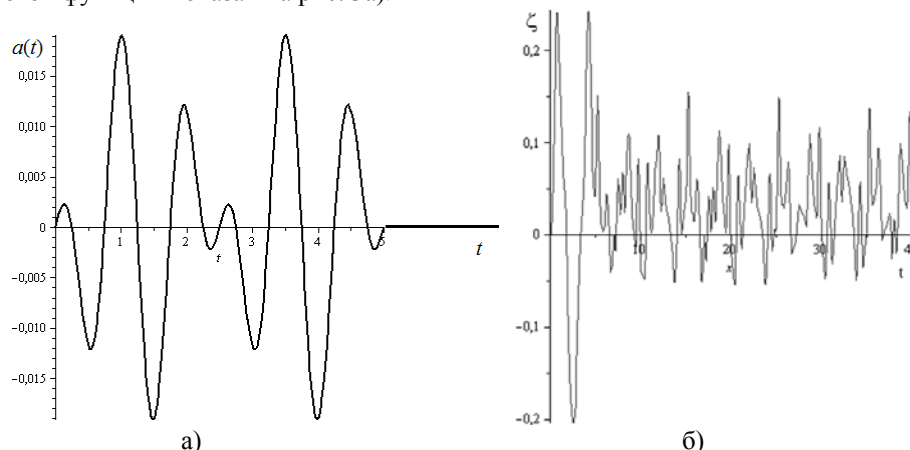


Рис. 3. Сейсмическая нагрузка и уровень подъема свободной поверхности.

Для определения неизвестных функций  $\zeta$  и  $\Phi$  в случае действия вынуждающей силы имеем следующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz + a_s(t)x = \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_k + g \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} + a_s(t)x = 0. \quad (8)$$

Поскольку  $x = \rho \cos \theta$ , то для решения задачи в линейном приближении достаточно рассматривать только собственные формы, отвечающие первой гармонике. Воспользовавшись ортогональностью собственных форм колебаний жидкости в цилиндрическом резервуаре и граничным условием на свободной поверхности (4), получим после скалярного произведения соотношения (8) на  $\varphi_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) следующую систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{d}_m(t) + \chi_m^2 d_m(t) + a_s(t) \int_0^R \rho \varphi_m(\rho, H) d\rho = 0, \quad m = 1, \dots, M$$

Данная система дифференциальных уравнений была решена операционным методом. На рис. 3 б) приведен график изменения уровня подъема свободной поверхности в ее центральной точке в зависимости от времени на интервале  $[0, 40]$ .

### Выводы

Построена математическая модель и разработаны теоретические основы численного метода анализа свободных и вынужденных колебаний жидкости в жестком резервуаре, имеющем форму оболочки вращения. Метод основан на применении интегральных уравнений для определения потенциала скоростей жидкости. При численной реализации использован метод граничных элементов. В дальнейшем предполагается обобщение результатов на случай резервуаров с упругими стенками.

### Список использованной литературы

1. Olsen H. What is sloshing? / H. Olsen // Seminar on Liquid Sloshing. — Det Norske Veritas, 1976.
2. Abramson H.N. Liquid sloshing in spherical tanks / H.N. Abramson // AIAA/ — 1963. — J. 1. — P. 384—389.
3. Abramson H.N. Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers / H.N. Abramson // Applied Mechanics Reviews. — 1963. — I. 16. — P. 501—506.
4. Ibrahim R.A. Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics. / R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, T. Ikeda // Applied Mechanics Reviews. — 2001. — Vol. 54. — № 2. — P. 133—199.
5. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. — New York: Cambridge University Press, 2005. — 948 p.
6. Gnitko V. Forced vibrations of tanks partially filled with liquid under seismic load / V. Gnitko, U. Marchenko, V. Naumenko, E. Strelnikova // Proc. of XXXIII Conference "Boundary elements and other mesh reduction methods" (New Forest, UK, 28-30 June 2011). — Ashurst Lodge: WIT Press, 2011. — Vol. 52. WIT Transactions on Modeling and Simulation. — P. 285—296.
7. Глушич П.А. Собственные колебания жидкости в жестких оболочках вращения / П.А. Глушич, В.И. Гнитко, В.В. Науменко, Е.А. Стрельникова // Вестник Херсонского Национального технического университета. — 2015. — №3(54). — С. 103—107.
8. Naumenko V.V. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods / V.V. Naumenko, H.A. Strelnikova // Engineering analysis with boundary elements. — 2002. — №26. — PP. 95—98.
9. Gnitko V. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles / Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. // Journal of Basic and Applied Research International. — 2016. — №17(1) — PP.75-87

**ЕКОНОМІЧНІ НАУКИ**

УДК 332.155:519.6

Г.В. АБРАМОВА, Г.С. АБРАМОВ  
Херсонський національний технічний університет**СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ВИРОБНИЦТВА І ЙОГО ПРИБУТКОВОСТІ**

*В роботі проведений системний аналіз сільськогосподарського виробництва, як складної суттєво багатофакторної системи. На основі математичного моделювання побудовано чотирьохфакторну мультиплікативну модель неокласичного типу для прибутку. Модель доведена до практичного користування шляхом побудови відповідної номограми, яка дає можливості для дослідження, моделювання і прогнозування рівня прибутку, як функції матеріальних витрат.*

*Ключові слова: сільськогосподарське виробництво, прибуток, математична модель, номограма.*

Г.В. АБРАМОВА, Г.С. АБРАМОВ  
Херсонский национальный технический университет**СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ СЕЛЬСЬКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА И ЕГО ПРИБЫЛЬНОСТИ**

*В работе проведен системный анализ сельскохозяйственного производства, как сложной существенно многофакторной системы. На основе математического моделирования построена четырёхфакторная мультипликативная модель неоклассического типа для прибыли. Модель доведена до практического пользования путем построения соответствующей номограммы, которая даёт возможности для исследования, моделирования и прогнозирования уровня прибыли, как функции материальных затрат.*

*Ключевые слова: сельскохозяйственное производство, прибыль, математическая модель, номограмма.*

G.V. ABRAMOVA G.S. ABRAMOV  
Kherson National Technical University**SYSTEM ANALYSIS OF AGRICULTURAL PRODUCTION AND ITS PROFITABILITY**

*The work carries out a systematic analysis of agricultural production, as essentially a complex multi-factor system. On the basis of mathematical modeling a multivariate multiplicative model of the neoclassical type of profit is built. Model brought to practical use by constructing appropriate nomograms, which gives opportunities for research, modeling and forecasting earnings level, as a function of material costs.*

*Keywords: agricultural production, profit, mathematical model, a nomogram.*

**Постановка проблеми**

Дослідження економіки аграрного виробництва на відміну від інших галузей ускладнюється із-за суттєвої багатофакторності і стохастичності виробництва, де вагому роль грає людський і природні фактори з притаманними їм нестабільністю і непередбачуваністю. Моделювання такого роду процесів неможливо без системного підходу.

**Аналіз публікацій за темою дослідження**

Розглядаючи процеси, що відбуваються в сільському господарстві, слід зазначити, що тут ми маємо об'єктивну невизначеність, обумовлену функціонуванням об'єктів біологічної природи. Ще Е. Шредингер [1] вказував на принципово стохастичний характер біологічних процесів, тому що фізичні й хімічні закони, які, як відомо, відіграють важливу роль у житті організмів, є статистичними. Він же встановив залежність між розмірами біологічної структури й величиною похибки діючих біологічних законів.

На необхідність проведення системного аналізу сільськогосподарського виробництва вказують В.Г. Афанасьєв, Вайнштейн Н.Ю., Гатаулин А.М., Тунеев М.М. [2-6]. Однак ці вимоги в більшості робіт носять в основному декларативний характер, а якісний, і тим більш кількісний аналіз цієї найважливішої галузі народного господарства з позицій системного підходу в значній мірі недостатній або і зовсім відсутній.

В останні роки вітчизняні та зарубіжні вчені визначають аграрні відносини як складну систему, в якій відбуваються екологічні, соціальні та економічні процеси, і відмічають необхідність регулювання та вивчення аграрних відносин у контексті синергетики [ 7- 9].

### Мета статті

Провести аналіз аграрного сектору економіки, як системи із властивим їй комплексом системних характеристик; побудувати багатофакторні регресійні моделі, що відображають залежність прибутку сільськогосподарських підприємств від ряду суттєвих факторів.

### Основна частина

Аграрні відносини можна визначити як складну, динамічну, стохастичну, відкриту систему. Тому розвиток цієї системи і діяльність аграрного підприємства в ній потребує вивчення за допомогою способів, які надає синергетика.

Щоб відкрита система успішно діяла в оточуючому середовищі, потрібний деякий ступінь її пристосованості, який відбивається у зв'язках системи і середовища. Подібний ступінь пристосованості називається узгодженістю системи з середовищем. Рівень узгодженості динамічних систем, що змінюються в часі, істотно впливає на їх еволюцію та життєвий цикл [10].

Зовнішнє середовище характеризується такими властивостями, як складність, рухомість та невизначеність. Складність середовища виявляється в кількості факторів, через які воно впливає на систему, та можливі зміни цих факторів. Для виявлення факторів, що істотно впливають на систему, опису сукупності впливів самої системи на середовище, корисно структурувати середовище, тобто розглянути його як систему, яка доповнює основну. Для цього потрібно виявити основні частини середовища, що мають зв'язки з основною системою, та дослідити взаємозв'язки цих частин. На рисунку 1 наведена найпростіша структура зовнішнього середовища системи аграрного підприємства у ринковій економіці.

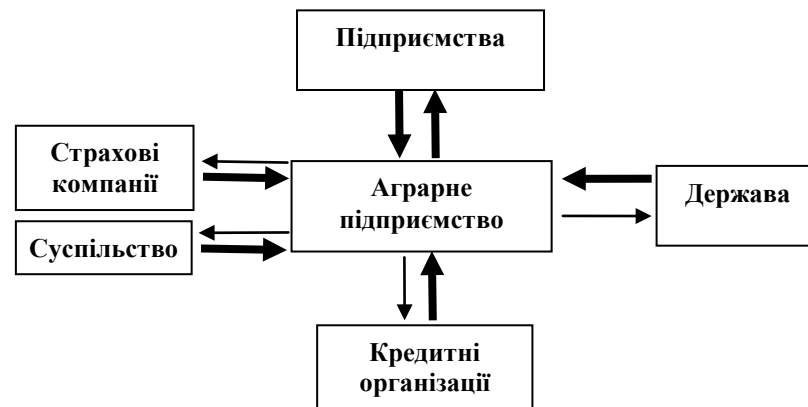


Рис. 1 Зовнішнє середовище аграрного підприємства як системи

На цьому рисунку ступінь жирності стрілок відображає ступінь суттєвості відповідного впливу, зв'язку між суб'єктами системи.

Для здійснення господарської діяльності сільськогосподарське підприємство встановлює зв'язки з різними суб'єктами: з підприємствами (переробними, посередницькими, кінцевими споживачами, постачальними та підрядними), державою (державним бюджетом, державною податковою адміністрацією, обласними та районними державними адміністраціями на рівні сільськогосподарських управлінь, управлінь екології), кредитними організаціями (банками, кредитними установами), страховими компаніями тощо.

Якщо до середовища системи входить суспільство, то важливою частиною такого середовища може бути його соціокультурна компонента. Узгодженість системи з соціокультурною компонентою називається інгерентністю системи. На сьогоднішній день однією з основних проблем системи сільськогосподарського виробництва в Україні є саме соціокультурний компонент.

До останнього часу розвиток сільських територій розглядався через сільське господарство; асигнування на невиробничі цілі спрямовувалися через підприємства-виробники. Однак такі сфери як водо- і газопостачання, медичне обслуговування та освіта, транспортне сполучення та зв'язок, фінансова та інформаційна інфраструктури, надання послуг консалтингу та дорадництва – є самостійними об'єктами фінансування та розвитку. Ці послуги є недоступними у деяких регіонах України і тому їх надання повинно бути вирішене на державному рівні через галузі соціальної, освітньої, фінансової, транспортної, комунальної політики, охорони здоров'я та інші.

Вплив аграрного сектору в цілому на середовище може бути досить відчутним, тому що дана галузь є життєво-необхідною в будь-якому суспільстві і розглядається, як пріоритетна, при визначенні напрямку соціально-економічного розвитку у більшості країн світу. В даній галузі формується до 14% валової доданої вартості країни. З тим, що зворотній вплив аграрного сектору економіки на зовнішнє середовище не суттєвий, (на який вказує Б.І. Смагін [9]), можна погодитися лише в частині впливу окремого сільськогосподарського виробництва, так як кожне конкретне підприємство має незначну кількість ресурсів і володіє низьким соціально-економічним потенціалом. Це є однією з найбільш істотних особливостей сільського господарства, яку відзначив ще видатний американський учений, лауреат Нобелівської премії з економіки П. Самуельсон [11]. Він виявив, що існує одна велика галузь виробництва, яка відповідає моделям

досконалої конкуренції і основним принципам механізму пропозиції і попиту - це сільськогосподарське виробництво. Сільськогосподарське виробництво на теперішній час в Україні ведеться переважно фермерськими господарствами, які, як правило, не настільки великі і потужні, щоб монополізувати ринок. Р. Піндайк і Д. Рубинфельд також відзначають, що «більшість сільськогосподарських ринків близькі до ринків досконалої конкуренції» [12]. Незважаючи на державне втручання, яке в розвинених країнах досить значне, вхід і вихід на сільськогосподарські ринки суттєво вільний. Слід зауважити, що ресурси сільськогосподарського підприємства недостатньо мобільні, що в певній мірі обмежує вільний вихід з даного ринку, але в довгостроковій перспективі цей бар'єр, як правило, долається, і таким чином можна констатувати, що в аграрному секторі виконуються дві основні умови досконалої конкуренції:

- на ринку сільськогосподарської продукції діє велика кількість продавців, кожен з яких не може його монополізувати і суттєво впливати на ціни;

- продавці можуть вступати на ринок і залишати його вільно.

Отже виходячи із вищевикладеного можна сказати, що сільське господарство – це галузь з досконалою конкуренцією, яка в інших галузях економіки нечасто зустрічається.

Звичайно відкрита система має властивість тією чи іншою мірою пристосовуватись до змін у зовнішньому середовищі і повинна це робити, щоб продовжувати своє існування та діяльність.

Від того наскільки зв'язки аграрного підприємства з вищезгаданими суб'єктами будуть стабільними та гнучкими, залежить і ефективність його роботи, насамперед прибутковості.

Найбільш важливими параметрами, за якими система та середовище взаємодіють, є ступені складності та організації. Звичайно для успішної дії системи в середовищі постійних складностей та рівня організації їй потрібно мати адекватний рівень складності та організації. У середовищі зі змінними складністю та організацією система повинна мати такий рівень складності та організації, який забезпечує їй можливість адаптації — здатності належним чином пристосуватись до змін середовища, що веде до підвищення ефективності функціонування системи. Для побудови штучної системи з адаптацією необхідно мати моделі системи, її зовнішнього середовища та їхніх змін. Адаптація звичайно відбувається через зміни параметрів системи, зміни її станів та властивостей або ж шляхом багаторівневих структурно-функціональних перебудов.

Якщо система недостатньо узгоджена з середовищем, то покращити дію системи можна одним з трьох способів:

1) шляхом змін у системі досягти потрібного рівня узгодженості;

2) зробити систему узгодженою шляхом відповідних змін в оточуючому середовищі;

3) пристосувати систему і середовище один до одного, утворюючи «зустрічні» зміни в системі, та середовищі.

Важливу роль при виборі методу відіграє те, наскільки складно та швидко можна зробити подібні зміни. Якщо система або середовище досить інерційні, зміни в них раціонально робити поступово, за певною стратегією (так званий еволюційний шлях змін) [10]. Саме аграрні відносини мають досить велику інерційність.

Динамічність системи сільського господарства обумовлюється функціонуванням середовища, в якому воно існує. Це середовище саме по собі не є статичним. Воно динамічне, тому що завжди змінюється, піддаючись як зовнішнім, так і внутрішнім впливам. А сільськогосподарське виробництво також безперервно змінюється в результаті технологічного прогресу, змін у соціальній сфері і т.д.

Сільське господарство є системою зі стохастичним принципом дії і постійно знаходиться у стані невизначеності від впливу зовнішнього середовища, тому що існує невизначеність у природних умовах, трудових, фінансових, матеріальних ресурсах, нормативно законодавчому полі та ін. Тому серйозна увага повинна приділятися різносторонньому аналізу результатів, які отримуються при різних умовах зовнішнього середовища. На основі проведеного аналізу повинно прийматися остаточне рішення про якісні, кількісні і структурні показники розвитку виробництва. Неминучою реакцією будь-якої системи на зміни в забезпеченні її ресурсами, є адаптація до нових умов. Однак інерційність, яка властива виробничо-економічним системам, значно звужує можливість адаптації й часто приводить до того, що при зменшенні об'ємів ресурсів, що використовуються, знижується випуск продукції, – відбувається так звана пасивна адаптація.

Значний вплив на функціонування сільськогосподарського виробництва мають некеровані, а часто й неконтрольовані фактори. Тим більше значення мають математичні моделі, які можна побудувати, наприклад, методом кореляційно-регресійного аналізу на основі статистичних даних. Такі моделі дають змогу провести оцінки, аналіз і моделювання впливу різних контрольованих факторів сільськогосподарського виробництва на його ефективність, а саме на прибуток.

Аналіз прибутковості сільськогосподарських підприємств Херсонської області в галузі рослинництва, проведений на основі статистичних матеріалів за період з 2000 по 2014 р., виявив значиму залежність від матеріальних витрат насамперед від затрат на насіння, нафтопродукти, електроенергію та оплату послуг сторонніх організацій.

За допомогою кореляційно-регресійного аналізу побудовано багатофакторну модель прибутку мультиплікативного типу:

$$Y = 0.0701X_1^{1.781}X_2^{-1.457}X_3^{0.888}X_4^{0.217}, \quad (1)$$

яка зображена на рисунку 2 у вигляді номограми.

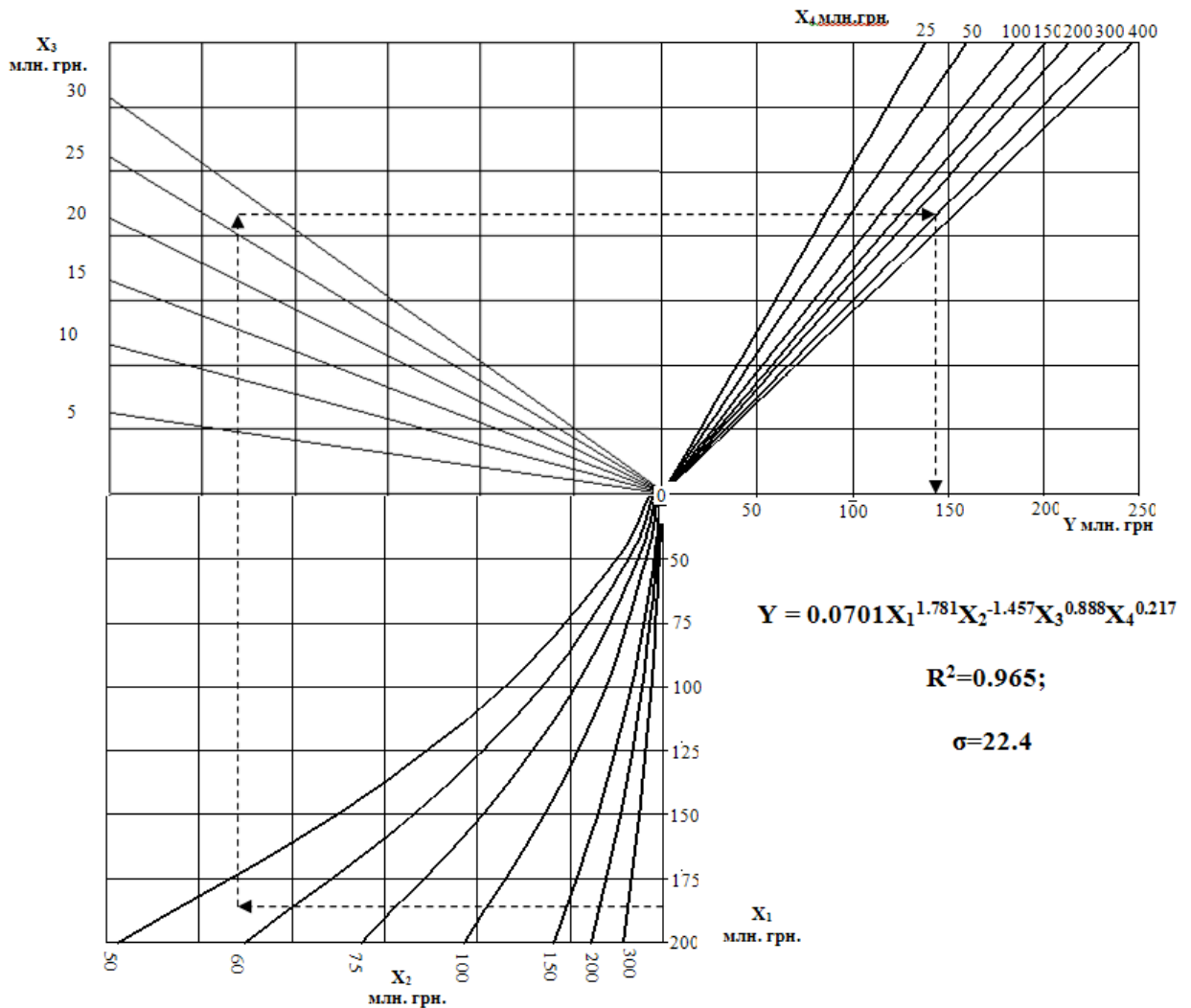


Рис. 2 Номограма багатофакторної моделі прибутку сільськогосподарських підприємств по рослинництву (Y), як функція матеріальних витрат X1, X2, X3, X4: (насіння, нафтопродукти, електроенергія, оплата послуг сторонніх організацій)

Наведена модель має високий показник коефіцієнту детермінації  $R^2=0.965$ , який показує високу адекватність побудованої моделі і припустиму для практичного використання стандартну похибку регресії.

Мультиплікативна неокласична модель виду (1) дає можливість безпосередньо визначити коефіцієнти еластичності для кожного з факторів, а саме: показники ступенів при кожному з факторів і є відповідні еластичності, що дає можливість виявити найбільш впливові фактори і здійснити їх ранжування відповідно ступеня впливовості. Наприклад, показник ступеня при фактору  $X_1$  показує, що збільшення витрат на насіннєвий матеріал на 1% призведе до збільшення прибутку на 1,78%, і навпаки, збільшення витрат на нафтопродукти (фактор  $X_2$ ) на 1% призведе до зменшення прибутку на 1,46%. Останнє дає можливість оцінити негативний вплив збільшення цін нафтопродуктів на прибутковість галузі рослинництва.

Наведемо декілька прикладів використання номограми.

Приклад 1. Обираємо значення фактору  $X_1$  (на даній номограмі обране значення зазначеного фактору знаходиться на рівні 180 млн. грн.) рухаємося в напрямку стрілки вздовж вісі  $X_2$  обираючи значення цього фактору (в даному випадку це близько 55 млн. грн.), рухаємося вгору по стрілці для вибору значення фактору  $X_3$  (в наведеному прикладі це приблизно 27-28 млн. грн.), рухаючись по стрілці вправо в перший квадрант обираємо значення  $X_4$  (в нашому прикладі це 300 млн. грн.) і на сам кінець спускаємося по стрілці вниз на вісь Y отримаємо прогнозоване значення прибутку при даному наборі значень вхідних факторів (в нашому випадку це приблизно 148 млн. грн.).

Приклад 2. Можливий і зворотній напрямок руху по номограмі, тобто вирішення оберненої задачі: задаючись бажаним значенням прибутку і рухаючись по номограмі проти часової стрілки крок за кроком обираємо значення вхідних параметрів моделі, які б забезпечили даний рівень прибутку. Ця задача має

безліч можливих рішень і залежить від реальної можливості забезпечення того чи іншого рівня кожного з факторів, в кінці кінців, від ступеня їх реальної досяжності.

Приклад 3. Використання номограми не обмежується наведеними прикладами. Можливий і зустрічний рух по наведеній діаграмі. Наприклад задаючи бажане значення прибутку і відомі значення деяких факторів із моделі (1) можна знайти необхідні величини інших факторів, які б забезпечили досягнення вибраного результату по прибутку. При такій постановці задачі номограма дає можливість визначити існування рішення і якщо воно існує, то визначити множину можливих значень для факторів, які визначаються, а також норму їх заміщення (в деяких межах зменшення значення одного з факторів може бути компенсовано збільшенням значення іншого фактору).

Приклад 4. Наведена номограма надає широкі можливості для оцінки можливих меж значень прибутку, якщо відомі межі, в яких можуть змінюватися вхідні фактори моделі. Тобто, якщо відомі межі, в яких з деякою довірою вірогідністю можуть знаходитися значення кожного з факторів, можна рухаючись по наведеній номограмі поступово від одного до іншого фактору «полосою» значень, де кожна «полоса» відображає межі варіювання можливих значень даного фактору. В кінці такого процесу ми вийдемо і на відповідну «полосу» значень прибутку, тобто будемо мати оцінки можливих відхилень від середнього прогнозного значення прибутку (песимістичний і оптимістичний прогноз).

#### Висновки та перспективи подальших досліджень

Аграрне виробництво це складна система, суттєво багатфакторна, зі складною структурою взаємодії факторів, зі значним впливом стохастичної компоненти (людський фактор, погодні умови, нестабільна ринкова кон'юнктура тощо). Аналіз такого роду систем неможливий без використання сучасних методів економіко-математичного моделювання, множинної регресії, багатокритеріальної оптимізації та інших методів.

В роботі на основі математичного моделювання побудовано чотирихфакторну мультиплікативну модель неокласичного типу для прибутку галузі рослинництва в Херсонській області, як функцію значимих матеріальних витрат. Модель доведена до практичного користування шляхом побудови відповідної номограми, за допомогою якої можна визначити прогнозний рівень прибутку при заданому рівні матеріальних витрат, або визначити необхідний рівень певних витрат для досягнення бажаного рівня прибутку. Номограма також дає можливість оцінити похибку оцінюваного значення прибутку, якщо відомі похибки відповідних матеріальних витрат. В цілому наведена номограма, в рамках побудованої математичної моделі, відкриває широкі можливості для дослідження, моделювання і прогнозування рівня прибутку, як функції матеріальних витрат.

Перспективи подальших досліджень бачимо в побудові виробничих функцій по окремим видам сільськогосподарських культур для вивчення впливу на прибутковість трудових і матеріальних ресурсів, а також вивчення впливу різних компонентів у структурі матеріальних витрат.

#### Список використаної літератури

1. Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физика. / Э Шредингер. М.: Атомиздат, 1972. – 88с.
2. Афанасьев В.Г. Мир живого: системность, эволюция и управление./ В.Г. Афанасьев. – М.: Политиздат, 1986. – 334с.
3. Балыков В. Система показателей экономической эффективности / В. Балыков // АПК: Экономика, управление, 2000-№7, С. 19 – 22.
4. Вайнштейн Н.Ю. Моделирование и оптимизация аграрно-промышленных образований / Н.Ю. Вайнштейн, С.Е. Илюшонок. Новосибирск: Наука, 1985. -246с.
5. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А.М. Гатаулин, Г.В. Гаврилов, Т.М. Сорокина и др., Под ред. А.М. Гатаулина. –М.: Агропромиздат, 1990. – 432с.
6. Тунеев М.М. Экономико-математические методы в организации сельскохозяйственного производства / М.М. Тунеев, В.Ф. Сухоруков. – М.: Колос, 1977. – 224с.
7. Ходаківський Є.І. Синергетичні засади розвитку агроекономічної системи / Є.І. Ходаківський. – Житомир: Рута, 2008. – 18 с.
8. Черданцев В.П. Принципы изменения управления АПК на основе саморегулирования / В.П. Черданцев // Аграрный вестник Урала №12(54), 2008, С. 15 – 18.
9. Смагин Б.И. Экономический анализ и статистическое моделирование аграрного производства. Монография / Б.И. Смагин. - Мичуринск.: МичГАУ, 2007. – 153 с.
10. Пономаренко О.І. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі: Навч. посібник / О.І. Пономаренко, В.О. Пономаренко. – К.: –Либідь, 1995. – 240 с.
11. Самуэльсон П. Экономика, Т.1 / П. Самуэльсон. – М.: НТО «Алгон»; ВНИИСИ: «Машиностроение», 1993. – 335 с.
12. Пиндайк Р. Микроэкономика / Р. Пиндайк, Д. Рубинфельд. – М.: «Экономика», «Дело», 1992. – 510 с.



УДК 681.51.015

Т.В. КРИЖАНОВСЬКА, Т.С. КЛЕЦЬКА, А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ  
Державний економіко-технологічний університет транспорту**МОДЕЛЮВАННЯ ПОКАЗНИКІВ РИНКУ ПРАЦІ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕЙРОСІТЬОВИХ МЕТОДІВ**

*Розглянуто можливість застосування нейросітьових методів для прогнозування показників ринку праці під час прийняття рішень в управлінні соціально-економічними системами. Наведено загальну схему прогнозування часових рядів з використанням нейронних мереж, розроблено алгоритм виділення вхідних послідовностей. Побудовано нейросітьову прогноуючу модель для короткострокового прогнозування рівня зареєстрованого безробіття регіону.*

*Ключові слова: нейросітьові методи, ринок праці, прогнозування.*

Т.В. КРИЖАНОВСКАЯ, Т.С. КЛЕЦКАЯ, А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ  
Государственный экономико-технологический университет транспорта**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЫНКА ТРУДА С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МЕТОДОВ**

*Рассмотрена возможность применения нейросетевых методов для прогнозирования показателей рынка труда при принятии решений в управлении социально-экономическими системами. Приведена общая схема прогнозирования временных рядов с использованием нейронных сетей, разработан алгоритм выделения входных последовательностей. Построена нейросетевая прогнозирующая модель для краткосрочного прогнозирования уровня зарегистрированной безработицы региона.*

*Ключевые слова: нейросетевые методы, рынок труда, прогнозирование.*

Т.В. КРЫЖАНОВСКА, Т.С. КЛЕЦКА, А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ  
State Economy and Technology University of Transport**MODELING OF THE LABOUR MARKET INDICATORS USING NEURAL NETWORK METHODS**

*The possibility of applying neural network techniques to predict the labor market indicators for decision-making in the management of socio-economic systems is considered. The general circuit time series prediction using neural network algorithm of allocation of input sequences is given. Neuronet forecasting model was constructed for a short-term forecasting of registered unemployment in the region.*

*Keywords: neural network techniques, the labor market, forecasting.*

**Постановка проблеми**

Проблеми аналізу та прогнозування динаміки зайнятості та ринку праці, їх структурних характеристик є одними з найцікавіших, але складних задач економіки. Складнощі, що виникають при її розв'язанні обумовлені багатьма причинами: недостатня якість і кількість вхідних даних, зміни середовища, у якому протікає процес, вплив суб'єктивних факторів. Але саме якісний прогноз є ключем до розв'язання багатьох соціально-економічних задач. Однією з таких задач є прогнозування показників ринку праці регіону.

Відомості про показники ринку праці, зокрема, про безробіття населення, є важливим індикатором соціально-економічного становища регіону. На їх фундаменті формуються показники, які використовуються регіональними управлінськими структурами, і є основою для прийняття рішень та напрямків проведення соціальної політики.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Задача прогнозування в загальному випадку зводиться до одержання оцінки майбутніх значень упорядкованих у часі даних на основі аналізу вже наявних даних. Відомі різні алгоритми пошуку закономірностей в існуючих даних. Поряд зі стандартними методами, що використовують параметричні моделі, останнім часом з цією метою почали застосовуватися інші підходи, зокрема, апарат нейронних мереж.

Нейромережі належать до класу нелінійних адаптивних систем з архітектурою [1], що умовно імітує нервову тканину з нейронів [1,4]. Математична модель нейрона являє собою деякий універсальний нелінійний елемент із можливістю широкої зміни і налаштування його характеристик. В одній з найбільш розповсюджених нейромережових архітектур – багатошаровому перцептроні зі зворотним поширенням похибки – моделюється робота нейронів у складі ієрархічної мережі, де кожен нейрон прошарку з'єднаний

своїми виходами з входами нейронів наступного прошарку. На нейрони вхідного прошарку подаються значення вхідних параметрів, на основі яких проводяться обчислення, необхідні для прийняття рішень, прогнозування розвитку ситуації і т.п. Ці значення розглядаються як сигнали, що передаються в наступний прошарок. Величина послаблення або підсилення сигналу залежить від числових (вагових) значень, що приписуються міжнейронним зв'язкам. У результаті цього на виході нейрона вихідного прошарку продукується значення, що розглядається як відповідь, реакція всієї мережі на введені значення вхідних параметрів.

Нейромережа складається з декількох прошарків: вхідний, внутрішні (приховані) і вихідні прошарки. Вхідний прошарок реалізує зв'язок з вхідними даними, вихідний – з вихідними. Внутрішніх прошарків може бути один і більше. В кожному прошарку міститься декілька нейронів.

Для використання нейромережі надалі, її треба "навчити" на прикладах, для яких відомо і значення вхідних параметрів, і правильні відповіді на них.

#### Формулювання мети дослідження

Метою нашого дослідження є створення моделі прогнозу за допомогою апарату нейронних мереж рівня безробіття на прикладі статистичних даних ринку праці Львівської області.

Як об'єкт дослідження будемо використовувати часовий ряд, що описує щомісячний рівень (кількість) зареєстрованих безробітних Львівської області [2] за період 2006-2008 рр. (рис. 1).

Будувати прогноз на майбутнє будемо, ґрунтуючись на даних минулих періодів, тобто припускаючи, що кількість зареєстрованих безробітних на наступний місяць залежить від кількості зареєстрованих безробітних за попередні місяці. Це значить, що вхідними факторами для моделі можуть бути кількість безробітних за поточний, попередній місяць і т.д., а результатом повинні бути кількість зареєстрованих безробітних за наступний місяць.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Для побудови нейронної мережі скористаємось програмою Deductor Studio аналітичної платформи Deductor [3,4], яка є основою для прийняття кінцевих прикладних рішень в області аналізу даних. Реалізовані в Deductor технології дозволяють на базі єдиної архітектури пройти всі етапи побудови аналітичної системи від створення бази даних до автоматичного підбору моделей і візуалізації отриманих результатів.

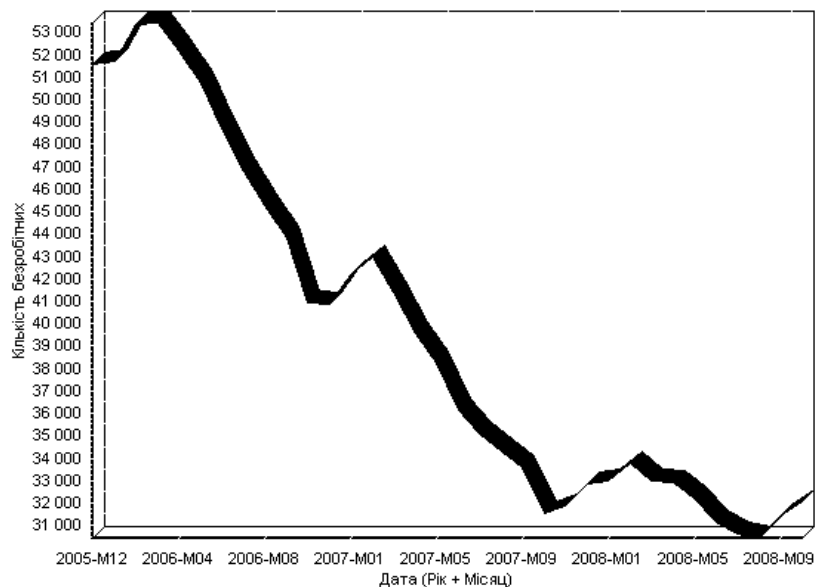


Рис. 1. Динаміка кількості зареєстрованих безробітних Львівської області

Суттєвим фактором для аналізу часового ряду та прогнозу є визначення сезонності. Графічний аналіз вхідних даних не дає змогу зробити висновки про їх сезонність, тому необхідно перевірити їх на наявність автокореляції. Метою автокореляційного аналізу є встановлення ступеня статистичної залежності між різними значеннями (відліками) випадкової послідовності, що утворює поле вибірки даних. В процесі автокореляційного аналізу розраховуються коефіцієнти кореляції (міра взаємної залежності) для двох значень вибірки, що віддалені один від одного на визначену кількість відліків, які називаються лагом. Сукупність коефіцієнтів кореляції для всіх лагів є автокореляційною функцією ряду (АКФ):

$$R(k) = \text{corr}(X(t), X(t + k)),$$

де  $k > 0$  – ціле число(лаг).

Провівши оцінку значення функції автокореляції та її поведінку, можна зробити висновок про характер аналізуючої послідовності і наявність в ній періодичності. В Deductor Studio інструментом, призначеним для вивчення періодичності, є інструмент «Автокореляція».

Припустимо, що сезонність, якщо вона має місце, не більше року. Виходячи з цього будемо шукати залежність від місяця, двох, ..., п'ятнадцяти місяців тому. Кількість кроків обираємо більше 12, щоб визначити на якому місяці року має місце пік коефіцієнта автокореляції, після чого спостерігається його спад.

Діаграма отриманої АКФ (рис.2) показує, що спочатку кореляція дорівнює одиниці, тобто значення залежить саме від себе. Далі залежність спадає, і потім на діаграмі ми бачимо пік, тобто максимальне значення АКФ знаходиться на 10-му відліку(лагу). Це свідчить про наявність періодичності, яка дорівнює 10 місяців. Таким чином, номер відліку, що відповідає максимальному значенню, показує кількість місяців, після яких спостерігається та ж тенденція кількості зареєстрованих безробітних.

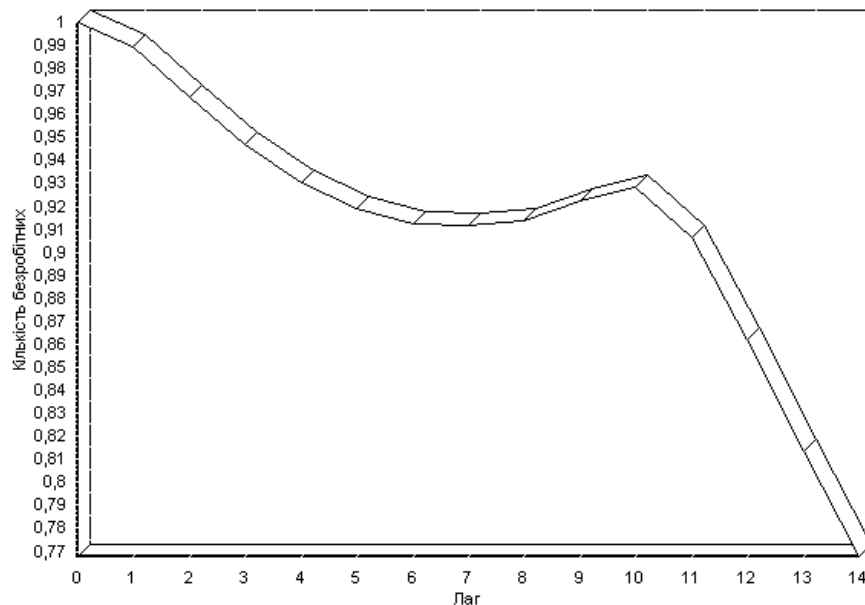


Рис. 2. Діаграма автокореляційної функції

При прогнозуванні елементів часових рядів за допомогою нейронних мереж необхідно подавати на вхід моделі значення декількох суміжних відліків вхідного набору даних. Такий метод відбору даних називається методом ковзних вікон (вікно – оскільки виділяється тільки деяка неперервна ділянка даних, ковзне – оскільки це вікно «рухається» вздовж множини даних).

Авторегресійний аналіз виявив наявність 10-місячної періодичності. В зв'язку із цим було вирішено будувати прогноз на місяць уперед, ґрунтуючись на даних за 1, 2, 9 і 10 місяців тому. Використовуючи відповідний інструмент Deductor Studio, одержимо дані (рис. 3), які трансформуються до «ковзного вікна» так, що будуть доступні всі потрібні фактори для побудови прогнозу.

Тепер як вхідні фактори можна використати «Кількість безробітних – 10», «Кількість безробітних – 9» – дані, які відповідають кількості безробітних за 10 і 9 місяців назад (щодо прогнозованого місяця), а також «Кількість безробітних – 2» і «Кількість безробітних – 1» - дані за 2 попередні місяці. Як вихідне поле позначимо стовпчик «Кількість безробітних».

Для побудови моделі прогнозу скористаємося інструментом «Нейронна мережа» програми Deductor Studio. Після підготовки таблиці з даними основними кроками програми є налаштування структури та навчання нейромережі (прогнозування на 1 місяць вперед).

Для визначення структури нейромережі вкажемо наступні параметри (рис. 4):

- кількість нейронів у вхідному прошарку – 4;
- кількість прихованих прошарків – 1;
- кількість нейронів у вихідному прошарку – 1.

№	Поле	Значение
1	12 Лаг	10
2	9.0 Кількість безробітних-10	1
3	9.0 Кількість безробітних-9	0,989350017549877
4	9.0 Кількість безробітних-8	0,967370469837899
5	9.0 Кількість безробітних-7	0,946572826680572
6	9.0 Кількість безробітних-6	0,930588259395979
7	9.0 Кількість безробітних-5	0,918718605262977
8	9.0 Кількість безробітних-4	0,912265286238613
9	9.0 Кількість безробітних-3	0,911471266395815
10	9.0 Кількість безробітних-2	0,913484981795159
11	9.0 Кількість безробітних-1	0,922632165560421
12	9.0 Кількість безробітних	0,928426050316579

Рис. 3. Трансформовані до «ковзного вікна» дані

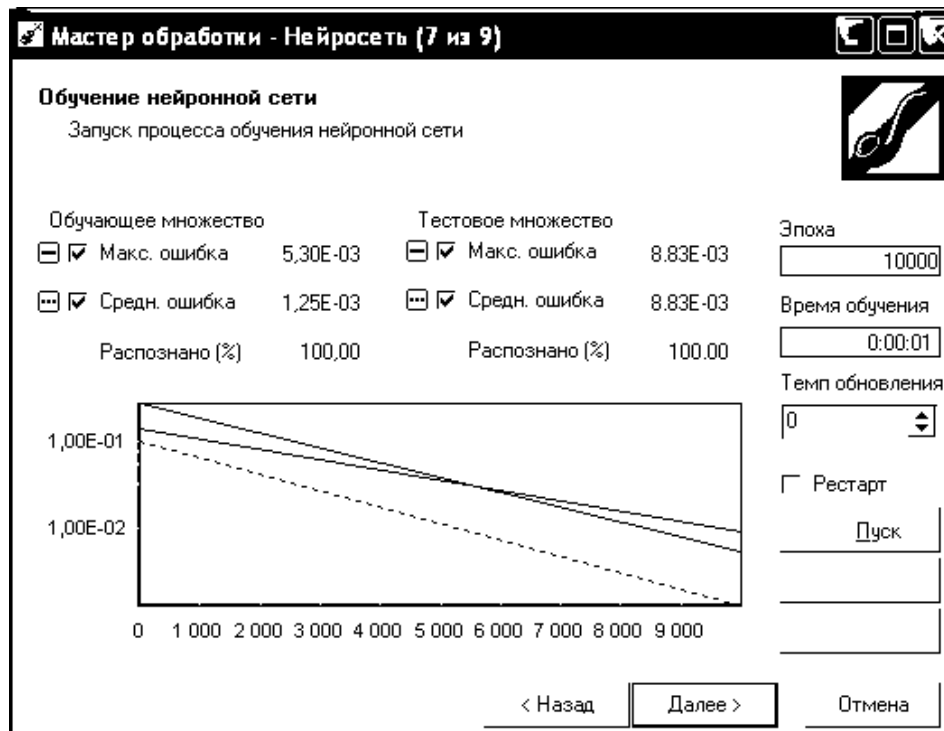


Рис. 4. Навчання нейронної мережі

Як функцію активації (нелінійну функцію, що обчислює вихідний сигнал формального нейрона) виберемо сигмоїду:

$$f(x) = \frac{x}{c + |x|},$$

де  $x$  – вихід нейрона, а  $c$  – характеристика крутості функції.

Для навчання нейромережі використаємо метод Resilient Propagation (Rprop) [5]. Алгоритм використовує так зване «навчання по епохах», коли корекція ваг відбувається після пред'явлення мережі всіх прикладів з навчальної вибірки. Перевага цього методу полягає в тому, що навчання мережі відбувається в 4-5 разів швидше, ніж стандартний алгоритм Backprop. Задамо умову зупинки навчання при досягненні епохи значенню 10000 і будемо вважати приклад розпізнаним, якщо похибка менше 0,005.

На наступному кроці запускаємо процес навчання й спостерігаємо за зміною величини похибки й відсотком розпізнаних прикладів у навчальних і тестових множинах. У нашому випадку бачимо, що на епосі № 10000 у навчальній і тестовій множинах розпізнано 100%. Фрагмент цього процесу проілюстровано на Рис. 4.

В результаті ми одержали багатоваріантну нейронну мережу, що здатна прогнозувати кількість зареєстрованих безробітних на короткотерміновий період.

Після побудови моделі для аналізу її якості подамо отримані результати у вигляді діаграми моделі розсіювання (рис. 5), що являє собою графік, на якому по горизонтальній осі відкладені цільові значення навчальних прикладів, а по вертикальній – значення, які оцінені моделлю.

З огляду на діаграму розсіювання відхилення прогнозованих значень від реальних достатньо невелике. Більша частина точок зосереджена на невеликій відстані від лінії ідеальних оцінок і знаходиться у межах заданого «коридору» похибки. Графік спостережуваних і прогнозованих значень (рис. 5) показує, що побудована модель адекватно відображає сезонність і тренд вхідного часового ряду.

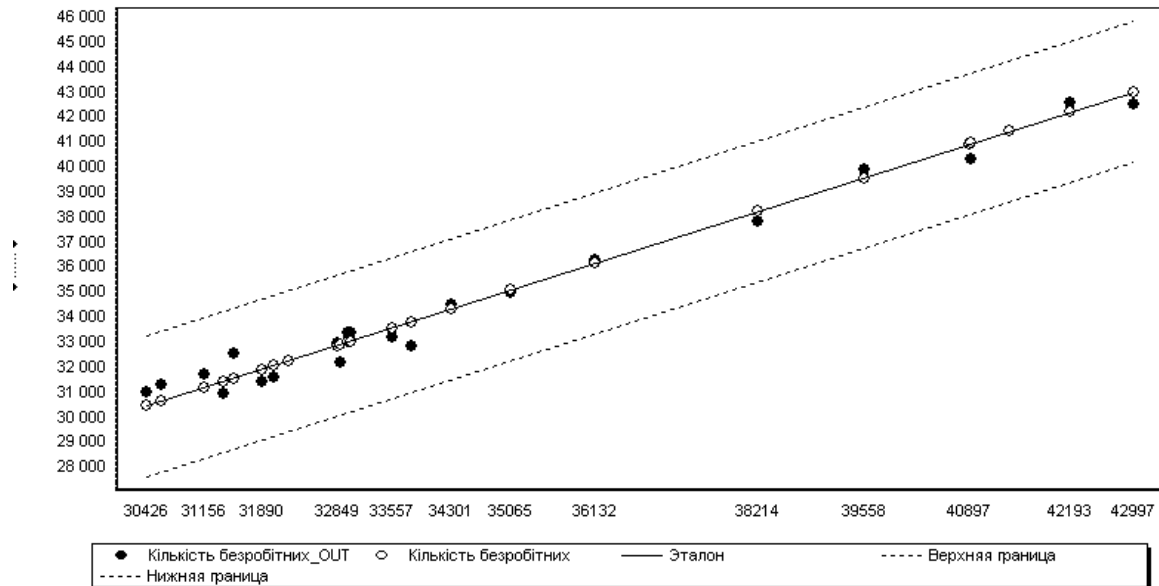


Рис. 5. Діаграма розсіювання (відхилення) прогнозованих значень від реальних

Тепер залишилося одержати необхідний прогноз. Для цього використаємо інструмент «Прогнозування», вказавши горизонт прогнозу (на який термін будемо прогнозувати) рівний одиниці.

Побудована діаграма прогнозу (рис. 6) свідчить, що розходження між реальним і прогнозованим значенням складає 10%, що підтверджує достатньо високу якість короткострокового прогнозу за допомогою апарата нейронних мереж.

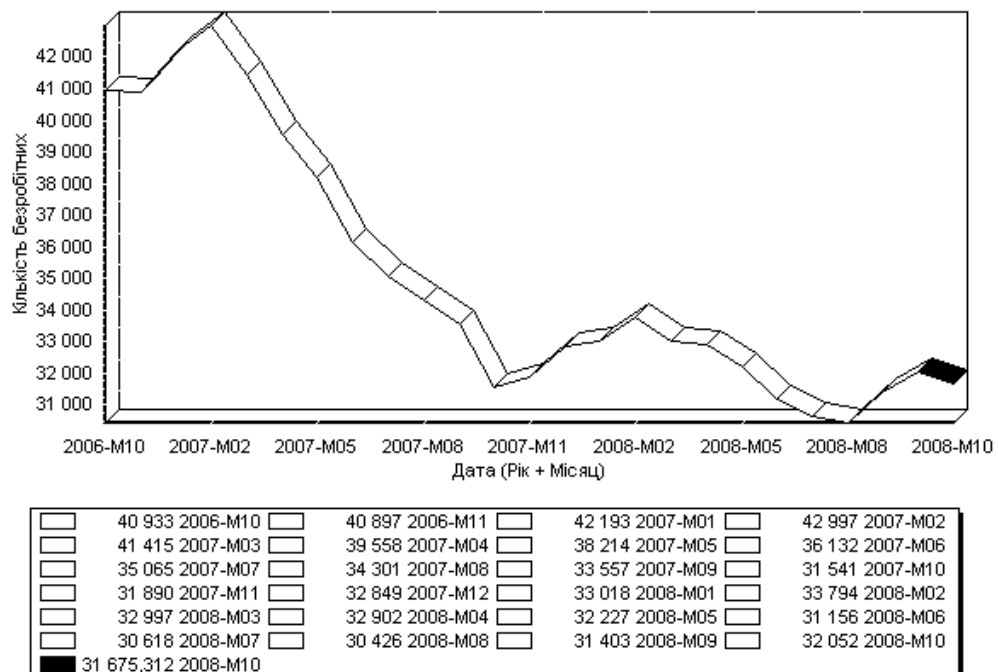


Рис. 6. Діаграма прогнозу (чорна лінія – прогнозоване значення)

При надходженні нових даних значення прогнозу буде змінюватись, адаптуючись до нової інформації. Адаптивні прогнози формуються при автоматизованому доучуванні нейронних мереж. При цьому при короткостроковому прогнозуванні доучування повинне бути щомісячним на нових даних. Адаптивні прогнози визначають як основний режим ковзної вибірки. Суть його полягає в тому, що перед черговим тестуванням здійснюється доучування нейронної мережі на вибірці, що включає дані минулого періоду. У запропонованій функціонуючій інформаційно-аналітичній платформі Deductor цей режим легко реалізувати.

#### Висновки

У статті розглянуто можливість застосування нейросітьових методів для прогнозування показників ринку праці під час прийняття рішень в управлінні соціально-економічними системами. Як інструмент аналізу даних запропоновано використовувати аналітичну платформу Deductor. Наведено загальну схему прогнозування часових рядів з використанням нейронних мереж, розроблено алгоритм виділення вхідних послідовностей, побудовано нейросітьову прогнозуючу модель для короткострокового прогнозування рівня зареєстрованого безробіття регіону. Розглянуто залежність значення прогнозу від зміни початкових даних, продемонстрована його адаптивність до нової інформації. Описано процес формування адаптивних прогнозів при автоматизованому доучуванні нейронних мереж. Запропоновано встановити термін доучування нейронної мережі при короткостроковому прогнозуванні в розмірі одного місяця на нових даних.

Проведені дослідження продемонстрували можливість і доцільність використання апарату нейронних мереж для задач прогнозування показників ринку праці.

Розглянутий приклад продемонстрував, як за допомогою програм спеціальної аналітичної платформи прогнозувати часовий ряд, що описує щомісячні показники ринку праці регіону. Розглянутий принцип прогнозування часового ряду (виявлення сезонності, побудова моделі прогнозу та побудова прогнозу часового ряду) забезпечили достовірний результат прогнозування кількості зареєстрованих безробітних періодом на один місяць і якість побудови моделі прогнозу.

#### Список використаної літератури

1. Нейроинформатика / [Горбань А.Н., Дунин-Барковский В.Л., Кирдин А.Н. и др.]. – Новосибирск: Наука, 1998. – 296с.
2. Головне управління статистики у Львівській області [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Режим доступу: <http://www.lv.ukrstat.gov.ua> (дата звернення 30.03.2015) – Назва з екрана.
3. BaseGroup Labs. Технологии анализа данных – [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Режим доступу: <http://www.basegroup.ru> (дата звернення 18.02.2015) – Назва з екрана.
4. Чубукова И.А. Data Mining [Електронний ресурс] : навч. посіб./ Чубукова И.А. – М.: Интернет-университет информационных технологий: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2006. – 382 с.
5. Riedmiller M. direct adaptive method for faster backpropagation learning: The RPROP algorithm./ M. Riedmiller, H.Braun. . – San Francisco: Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks. – 1993. – pp.586-591.
6. Кіліна Т.М. Використання нейросітьових методів для прогнозування показників ринку праці / Т.М. Кіліна, Т.В. Крижановська. – 36. наук. праць ДЕТУТ: Серія «Транспортні системи і технології». – К.: ДЕТУТ, 2009. – Вип. 14. – С. 139-151.

## ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 334.75:519.83:514.18

Є.О. АДОНЬЄВ

Запорізький національний університет

В.М. ВЕРЕЩАГА

Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького

ЗАСТОСУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ВІДГУКУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ  
СТАЛОГО ЕНЕРГЕТИЧНОГО РОЗВИТКУ МІСТ

*У статті розглядається проблема багатofакторного моделювання сталого енергетичного розвитку міст. Для вирішення даної проблеми пропонується спосіб формалізованого геометричного моделювання поверхні, що відображає процеси двопараметричної зміни одного фактору, який входить до складу факторів економічної моделі. Вихідною інформацією для побудови поверхні відгуку, що відображає зміну фактору, є статистичні дані, отримані за результатами спостереження за цим фактором. Мінімальна кількість зафіксованих статистичних спостережень повинна бути не меншою, ніж дев'ять: три уздовж одного параметру та три уздовж другого параметру. Треба зауважити, що можна побудувати поверхню, що відображає зміну фактору, і з меншою кількістю вихідних даних, але при цьому буде зростати похибка відтворення зміни фактору, і це питання знаходиться за межами матеріалу даної статті. В статті розглядається виведення точкових рівнянь, що відображають поверхню зміни фактору для вихідних статистичних даних у кількості  $3 \times 3$ ,  $3 \times 4$  і  $4 \times 4$ , тобто, відповідно, дев'ять, дванадцять та шістнадцять вихідних статистичних вимірювань за різних умов.*

*Ключові слова: стійкий розвиток, поверхня відгуку, економічні фактори, економічна модель.*

Е.А. АДОНЬЕВ

Запорожский национальный университет

В.М. ВЕРЕЩАГА

Мелитопольский государственный педагогический университет им. Б. Хмельницкого

ПРИМЕНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТКЛИКА  
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УСТОЙЧИВОГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ГОРОДОВ

*В статье рассматривается проблема многофакторного моделирования устойчивого энергетического развития городов. Для решения этой проблемы предлагается способ формализованного геометрического моделирования поверхности, отражающей процессы двухпараметрического изменения одного фактора, входящего в состав факторов экономической модели. Исходной информацией для построения поверхности отклика, отражающей изменения фактора, являются статистические данные, полученные в результате наблюдений за этим фактором. Минимальное количество зафиксированных статистических наблюдений должно быть не менее девяти: три вдоль одного параметра и три вдоль другого параметра. Следует заметить, что можно построить поверхность, отражающую изменения фактора, и с меньшим количеством исходных данных, но при этом будет увеличиваться погрешность воспроизводства изменений фактора, и этот вопрос находится за пределами материала данной статьи. В статье рассматривается вывод точечных уравнений, отражающих поверхность изменения фактора для исходных статистических данных в количестве  $3 \times 3$ ,  $3 \times 4$  та  $4 \times 4$ , то есть, соответственно, девять, дванадцать и шестнадцать исходных статистических измерений в разных условиях.*

*Ключевые слова: устойчивое развитие, поверхность отклика, экономические факторы, экономическая модель.*

Y.O. ADON'YEV

Zaporizhzhya National University

V.M. VERESHCHYAGA

Melitopol State Pedagogical University named after B. Khmelnytsky

RESPONSE SURFACE USING IN MODELLING  
OF SUSTAINABLE ENERGY DEVELOPMENT OF CITIES

*The article depicts the problem of multivariate modeling of cities sustainable energy development. To solve this problem this article provides a method formalized geometric modeling surface that reflects the processes two-parametric change one factor that is part of the factors of economic model. The background for the construction of the response surface, reflecting the change factor is statistical data received on the results of monitoring of this*

factor. The minimum number of fixed statistical surveys should be not less than nine: three along one parameter and three along the second parameter. Note that it is possible to build a surface that reflects the change factor using less input data, but it will increase the error changes reproducing a factor, and this issue is beyond the material of this article. In the article the withdrawal point equations reflecting change factor surface for the input statistics of the number  $3 \times 3$ ,  $3 \times 4$  and  $4 \times 4$ , that is, respectively, nine, twelve and sixteen output statistical measurements under different conditions.

*Keywords: sustainable development, surface response, economic factors, the economic model.*

### Постановка проблеми

В теперішній час паливно-енергетичний комплекс України працює, фактично, у кризових умовах. Зокрема, житлово-комунальне господарство (ЖКГ), як один із основних споживачів енергоресурсів, характеризується вкрай неефективним енергоспоживанням, високими втратами, зношеними мережами та обладнанням. Для реформування енергосистеми ЖКГ необхідне залучення значних інвестицій, в тому числі з іноземних джерел. Наразі, найбільш ефективним є підхід, заснований на принципах сталого розвитку територій. В цьому випадку, при визначенні портфелю пріоритетних інвестиційних проектів, необхідно одночасно враховувати велику кількість економічних, екологічних та соціальних факторів в розрізі довгострокового планування. Економіко-математичні моделі, покладені в основу систем підтримки прийняття таких управлінських рішень, є складними та багатфакторними. Основною проблемою моделювання сталого енергетичного розвитку є велика варіативність набору вихідних факторів, в залежності від особливостей конкретного населеного пункту (міста). Зміна кількості та якості факторів моделі завжди призводить до її перебудови, що практично означає створення нової моделі. Це є суттєвою вадою процесу моделювання. Тому модель, розроблена для одного міста, не може бути напряму (без складної переробки) застосована для іншого міста. Таким чином, розробка універсального методу багатфакторного моделювання, який дозволить змінювати набори вихідних факторів без істотної зміни структури моделі, є актуальною.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Проблеми моделювання, вимоги до моделей, які були розглянуті вище, знаходяться у відповідності до проаналізованих результатів досліджень [1–8]. Окремо слід відзначити методіку швидкої оцінки енергетичного розвитку міст, розроблену Всесвітнім банком [9]. Основні показники міста, що досліджується, вводяться до бази даних і порівнюються з аналогічними показниками інших міст. На підставі цього визначаються галузі міського господарства, реалізація інвестпроектів в яких дасть максимальний ефект. Для цих галузей система пропонує набори готових проектів, які вже були успішно реалізовані в інших містах. Однак, цей метод виведення за аналогією або порівняння є дуже загальним і приблизним, він враховує тільки головні фактори. Багато індивідуальних, значущих для кожного конкретного міста, факторів залишаються поза увагою, що може привести до неоптимального використання інвестицій. Враховуючи усе сказане відносно методу виведення за аналогією, здобуваємо додаткове підтвердження того, що поставлена мета створення узагальненої моделі, яка не змінюється при якісній та кількісній зміні факторів, є актуальною. Більш доцільним є застосування поверхонь відгуку [10], що являють собою функцію одного або декількох факторів, мірність яких визначається розмірністю процесу, що включає ці фактори. Для побудови поверхні відгуку спочатку необхідно визначити її каркас, складовою якого є лінії. Розглянемо побудову параболі другого ступеня у якості лінії каркасу поверхні відгуку, виведення якої наведемо за результатами досліджень [11]. Нехай три довільні точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  визначають площину для параболі другого порядку. Невласну точку  $C_\infty$  визначимо за допомогою напрямку променя  $[CT_c)$  (рис.1).

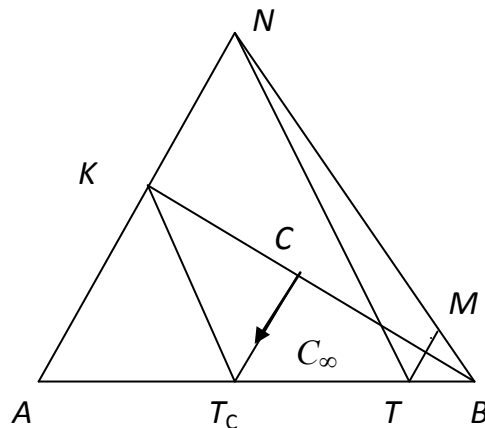


Рис. 1 Геометрична схема визначення змінюваної точки  $M$ , що пробігає через усі точки параболі



Пояснимо алгоритм побудови точки  $M$  параболі.

1. Точки  $A$  і  $B$  з'єднуємо, дістаємо відрізок  $[AB]$ .
2. Визначаємо невласну точку  $C_\infty$  відношенням  $t_c = \frac{T_c A}{BA}$ .
3. Змінювану точку  $T$  переміщуємо зміною параметру  $t = \frac{TA}{BA}, 0 \leq t \leq 1$ .
4.  $CT_c$  – пряма, що визначає невласну точку  $C_\infty$ .
5.  $AKN \parallel CT_c$ .
6.  $K = AN \cap BC$ .
7.  $N = AK \cap TN \parallel KT_c$ .
8.  $M = BN \cap TM \parallel CT_c$ .

У разі, якщо прийняти  $t_c = \frac{1}{2}; t = 1 - t; t_c = 1 - t_c$ , то точкове рівняння для змінюваної точки  $M$

матиме вигляд:

$$M = (A - C)\bar{t}(1 - 2t) + (C - B)t(1 - 2t) + C \tag{1}$$

Застосовуючи (1) для геометричної схеми (рис.2), у якій уздовж ребер  $A_i$  прийнято параметр  $U$ , а уздовж ребра  $M_1M_2M_3$  – параметр  $V$ .

У роботі [12] отримано, точкове рівняння змінюваної кривої  $M_1M_2M_3$ , яке і є точковим рівнянням шуканої поверхні відгуку:

$$M = [A_{11}\bar{u}(1 - 2u) + 4A_{12}u\bar{u} + A_{13}u(2u - 1)]\bar{v}(1 - 2v) + 4[A_{21}\bar{u}(1 - 2u) + 4A_{22}u\bar{u} + A_{23}u(2u - 1)]v\bar{v} + [A_{31}\bar{u}(1 - 2u) + 4A_{32}u\bar{u} + A_{33}u(2u - 1)]v(2\bar{v} - 1). \tag{3}$$

Як бачимо, сегмент поверхні  $M$  (3), побудований на дев'яти дійсних точках з довільно обраними трьома невластими точками. У роботі [10] було здобуте точкове рівняння на базі шістнадцяти дійсних точок (рис. 3), ребрами поверхні якого є графіки поліномів третього ступеня, і змінюваної кривої  $M_1M_2M_3M_4$ .

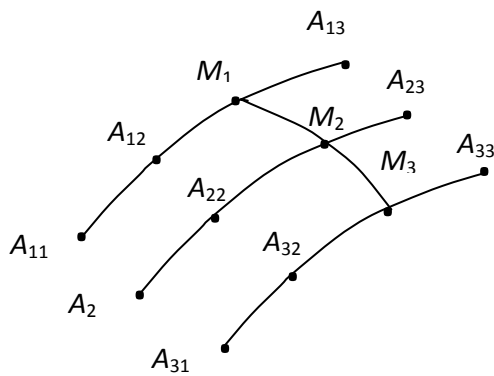


Рис. 2 Геометрична схема поверхні відгуку для одного фактора

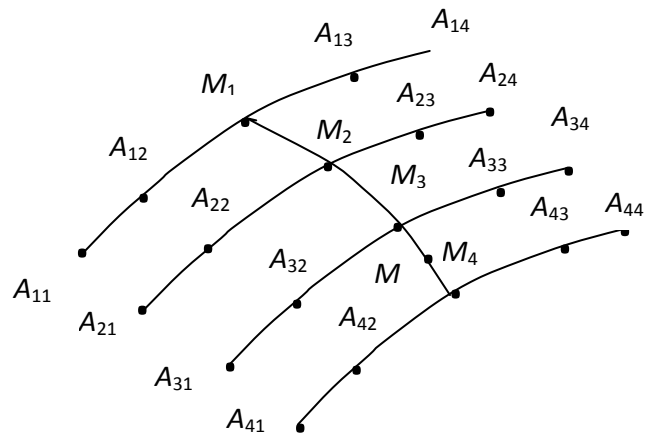


Рис. 3 Геометрична схема сегменту поверхні відгуку, побудованого на базі 16-ти дійсних опорних точок

Точкове рівняння для змінюваної точки  $M$ , що знаходиться на дузі  $M_1M_2M_3M_4$ , відповідає точковому рівнянню поверхні відгуку для фактору, що розглядається, та має вигляд:

$$M = M_1\bar{v}(1 - 3v)(1 - \frac{3}{2}v) + 9M_2v\bar{v}(1 - \frac{3}{2}v) + \frac{9}{2}M_3v\bar{v}(3v - 1) + M_4v(3v - 1)(\frac{3}{2}v - 1),$$

або у розкритому, відносно  $M_i$ , вигляді:

$$\begin{aligned}
 M = & [A_{11}\bar{u}(1-3u)(1-\frac{3}{2}u) + 9A_{12}u\bar{u}(1-\frac{3}{2}u) + \frac{9}{2}A_{13}u\bar{u}(3u-1) + \\
 & + A_{14}u(3u-1)(\frac{3}{2}u-1)]\bar{v}(1-3v)(1-\frac{3}{2}v) + 9[A_{21}\bar{u}(1-3u)(1-\frac{3}{2}u) + \\
 & + 9A_{22}u\bar{u}(1-\frac{3}{2}u) + \frac{9}{2}A_{23}u\bar{u}(3u-1) + A_{24}u(3u-1)(\frac{3}{2}u-1)]v\bar{v}(1-\frac{3}{2}v) + \\
 & + \frac{9}{2}[A_{31}\bar{u}(1-3u)(1-\frac{3}{2}u) + 9A_{32}u\bar{u}(1-\frac{3}{2}u) + \frac{9}{2}A_{33}(3u-1) + \\
 & + A_{34}u(3u-1)(\frac{3}{2}u-1)]v\bar{v}(3v-1) + [A_{41}\bar{u}(1-3u)(1-\frac{3}{2}u) + \\
 & + 9A_{42}u\bar{u}(1-\frac{3}{2}u) + \frac{9}{2}A_{43}u\bar{u}(3u-1) + \\
 & + A_{44}u(3u-1)(\frac{3}{2}u-1)]v(3v-1)(\frac{3}{2}v-1).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Точкові рівняння (3) і (4) є доволі складними за рахунок того, що для їхнього здобуття виконувалось об'єднання простих точкових форм з подальшими їх перетвореннями. На наш погляд, більш раціональним є послідовний розв'язок простих точкових форм, коли попередні розрахунки включаються до подальшого виконання.

В усіх задачах, які запропоновані до розв'язання у цій статті, використовується геометричний апарат точкового БН-числення [13], що являє собою геометрію відношень однорідних об'єктів, основою яких є просте відношення трьох точок прямої.

**Формулювання мети дослідження**

Ціллю запропонованих досліджень, що являють собою розвиток проаналізованих вище, є розробка, для окремого фактору, нового способу моделювання, у якому виконується послідовно декілька простих розрахунків замість одного складного. Для цього створено узагальнену формалізовану геометричну модель економічного процесу, яка дозволяє, без зміни її структури, варіювати кількісно та якісно факторами зі змінною кількістю властивостей (параметрів) у цих факторах. Такий підхід дозволяє спростити процес моделювання сталого енергетичного розвитку міст, уникнути помилок при створенні складного точкового продукту і зменшити час виконання розрахунків.

**Виклад основного матеріалу дослідження**

Поділення складного кінцевого точкового рівняння на декілька простих, які необхідно виконати послідовно, назвемо способом точкових агрегатів [13]. Дамо визначення точкового агрегату.

Точковий агрегат – це сукупність точкових форм, що розташовані та виконуються у визначеній послідовності, яка зберігається і для розрахунків усіх параметрів фактору, що моделюється. Покажемо створення точкових агрегатів на прикладах, що розглядалися вище. Точкове рівняння (1) отримано при умові, що  $t_c = \frac{1}{2}$ , якщо узяти довільним  $t_c = t_{ic}$ , де  $0 \leq t_c \leq 1$ , тобто  $t_{ic}$  дискретно фіксує значення  $t_c$  у

визначених межах, то (1) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
 M = & [A^2(1-t)\frac{\bar{t}_c-t}{t_c} + AB[(t-1)\frac{\bar{t}_c-t}{t_c} - (1-t)(\frac{t}{t_c} + 1)] + AC(1-t)\frac{t}{t_c t_c} + \\
 & + BC(t-1)\frac{t}{t_c t_c} + B^2(t-1)(\frac{t}{t_c} - 1) + B(A-B)]/(A-B).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Точковий агрегат, що відповідає (5), запишемо у вигляді послідовної сукупності

$$\left[ \begin{aligned}
 & t_c = t_{rc}; \bar{t}_{rc} = 1 - t_{rc}; 0 \leq t_{rs} \leq 1; t = t_s; \bar{t}_s = 1 - t_s; 0 \leq t_s \leq 1; \\
 & T_{rc} = (B-A)t_{rc} + A; T_s = (B-A)t_s + A; \\
 & K_r = \frac{C - Bt_{rc}}{\bar{t}_{rc}}; N_{rc} = \frac{(K_r - T_{rc})(T_s - A)}{T_{rc} - A} + T_s; \\
 & M_{rs} = \frac{(T_s - B)(N_{rc} - B)}{A - B} + B.
 \end{aligned} \right. \tag{6}$$

За допомогою сукупності (6) дістанемо дугу параболи, хордою якої є відрізок  $AB$ . Нехай кожна з точок симплексу  $A, B, C$  визначається десятьма параметрами  $A(P_{A1}, P_{A2}, \dots, P_{A9}, P_{A10}), B(P_{B1}, \dots, P_{B10}),$

$C(P_{C1}, \dots, P_{C10})$ , тоді необхідно для кожного з десяти параметрів відповідно скласти розрахункові сукупності для прийнятих  $t_{rc} = const, t_s = const$ .

$$\left[ \begin{aligned} &t_{rc} = const; t_s = const; \bar{t}_{rc} = const; \bar{t}_s = const; \\ &P_{T_{ci}} = (P_{Bi} - P_{Ai})t_{rc} + P_{Ai}; P_{Ti} = (P_{Bi} - P_{Ai})t_s + P_{Ai}; \\ &P_{Ki} = \frac{P_{Ci} - P_{Bi}t_{rc}}{\bar{t}_{rc}}; P_{Ni} = \frac{(P_{Ki} - P_{T_{ci}})(P_{Ti} - P_{Ai})}{P_{T_{ci}} - P_{Ai}} P_{Ai}; \\ &P_{Mi} = \frac{(P_{Ti} - P_{Bi})(P_{Ni} - P_{Bi})}{(P_{Ai} - P_{Bi})} + P_{Bi}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Змінюючи  $i = \overline{1,10}$ , здобудемо усі десять параметрів  $P_{M1}, \dots, P_{M9}, P_{M10}$ , що визначають точку  $M$  процесу. Для побудови поверхні відгуку, що відповідає рис. 2, необхідно прийняти з (6)  $A=A_{11}:A_{21}:A_{31}$ ;  $B=A_{12}:A_{22}:A_{32}$ ;  $C=A_{13}:A_{23}:A_{33}$  і, застосувавши тричі (6), визначити ребра  $A_{11}A_{12}A_{13}$ ,  $A_{21}A_{22}A_{23}$ ,  $A_{31}A_{32}A_{33}$ , відповідно, для визначення змінюваних точок  $M_1, M_2, M_3$ , положення яких розраховуються при умові, що  $u_1 = u_2 = u_3$ . Якщо прийняти  $A=M_1$ ;  $B=M_2$ ;  $C=M_3$  і застосувати точковий агрегат (6), то отримаємо змінювану точку  $M$ , значення якої відповідатиме значенню з точкового рівняння (3). Таким чином, схематично точковий агрегат, що відповідає (3), можна відобразити:

$$\left[ \begin{aligned} &M_1 = \text{застосувати (6) до точок } A_{11}, A_{12}, A_{13}; \\ &M_2 = \text{застосувати (6) до точок } A_{21}, A_{22}, A_{23}; \\ &M_3 = \text{застосувати (6) до точок } A_{31}, A_{32}, A_{33}; \\ &M = \text{застосувати (6) до точок } M_1, M_2, M_3. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Із застосуванням точкових агрегатів стає можливим розв'язувати задачі побудови поверхонь відгуку шляхом застосування комбінацій (рис. 4, рис. 5).

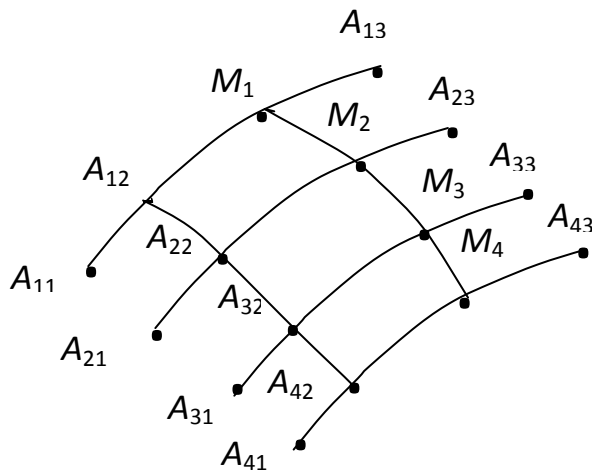


Рис. 4. Комбінація 3x4

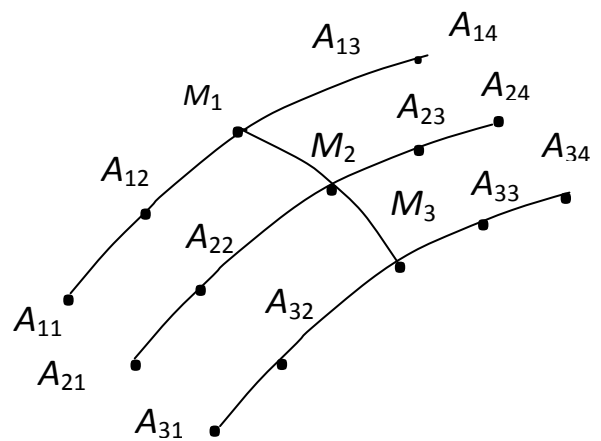


Рис. 5. Комбінація 4x3

Для комбінацій 3x4 (рис. 4) необхідно застосувати точковий агрегат (6) чотири рази, а потім скористатися точковим рівнянням (4). Для комбінації 4x3 (рис. 5) необхідно три рази застосувати для точок  $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, A_{i4}$  точкове рівняння аналогічне (4) і визначити точки  $M_1, M_2, M_3$ , а потім до них застосувати точковий агрегат аналогічний (6). При цьому, для кожної з комбінацій не потрібно виводити точкове рівняння і переписувати програмну реалізацію.

**Висновки**

За результатами досліджень був запропонований спосіб точкових агрегатів, який дозволяє з попередньо визначеною щільністю дискретно подати поверхню відгуку щодо зміни фактору будь-якого процесу. Вихідними даними для способу точкових агрегатів є емпірично визначені стани процесу, зняття яких рівномірно розподілене в усій області визначення цього процесу. Застосування способу точкових агрегатів спрощує розрахунки через заміну однієї складної точкової форми на декілька простих, що поспіль виконуються. За рахунок цього, спрощується програмна реалізація розрахунків та скорочуються витрати комп'ютерних ресурсів, стає можливим виконувати різні комбінації щодо кількості вихідних даних, не змінюючи модулі програм. За рахунок застосування точкового БН-числення кількість параметрів, що визначають фактор, може бути будь-якою і змінюватись у ході проведення комп'ютерних експериментів. Програмна реалізація, при цьому, не зміниться, зміниться тільки кількість циклів. Одною із головних

переваг запропонованого способу побудови поверхонь відгуку є те, що для кожного з факторів вони будуються окремо, без встановлення взаємозалежностей одного фактора від іншого. Хоча, після побудови поверхонь відгуку для декількох факторів завжди є можливість встановити певні взаємозалежності між ними. Така можливість є дуже важливою у дослідженнях процесів шляхом моделювання та проведення комп'ютерних експериментів, які потребують кількісної та якісної зміни факторів.

Запропоновані спосіб побудови поверхні відгуку та спосіб точкових агрегатів, що реалізовані за допомогою геометричного апарату точкового БН-числення, на наш погляд, мають перспективи застосування у моделюванні сталого енергетичного розвитку територій (міст) завдяки тому, що через оптимізацію кожного фактору окремо можна знайти оптимальне рішення для всього процесу, який моделюється.

#### Перелік використаної літератури

1. Катренко А.В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації / А.В. Катренко. – Львів: Науковий світ – 2000, 2003. – 424 с.
2. Старр М. Управление производством: Пер. с англ. / М. Старр – М.: Прогресс, 1968. – 398 с.
3. Соколицин С.А. Организация и оперативное управление машиностроительным производством / С.А. Соколицин, Б.И. Кузин – Л.: Машиностроение, 1988 – 527 с.
4. Козловский В.А. Производственный и операционный менеджмент / В.А. Козловский, Т.В. Маркина, В.М. Макаров – СПб.: Специальная литература, 1998 – 366 с.
5. Краснощеков П.С. Принципы построения моделей / П.С. Краснощеков, А.А. Петров – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 264 с.
6. Петров А.А. Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент / А.А. Петров – М.: Наука, 1996. – 327 с.
7. Петров А.А. Опыт математического моделирования экономики / А.А. Петров, И.Г. Поспелов, А.А. Шананин – М.: Энергоиздат, 1996. – 544 с.
8. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры [2-е изд., испр.] / А.А. Самарский, А.П. Михайлов – М.: Физматгиз, 2001. – 320 с.
9. Tool for Rapid Assessment of City Energy (TRACE): Helping Cities Use Energy Efficiently [Electronic resource] — Mode of access: <http://www.esmap.org/TRACE>
10. Радев С.Ю., Верещага В.М. Побудова поверхні відгуку в БН-численні для геометричного моделювання процесів. / С.Ю. Радев, В.М. Верещага // Матеріали II-ї Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Прикладна геометрія, дизайн та об’єкти інтелектуальної власності”. – К.: ДІА, 2013 р. - Випуск 2. – с.167-171.
11. Бумага А.І. Точкове рівняння дуги параболи другого порядку / А.І. Бумага // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”. – К.: КНУБА, 2012. – Випуск 90. - С. 49-52.
12. Кучеренко В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченної множини точок : дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / Вадим Владимирович Кучеренко; Дніпр. нац. ун-т.- Дніпропетровськ, 2013. – 187с.
13. Точечное исчисление / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш [под ред. Верещаги В.М.] // Мелитополь: Изд-во МГПУ имени Богдана Хмельницкого, 2015. – 234 с.

УДК 004.946

Н.М. АУШЕВА, Б.М. ПЕДОС

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

## ІНТЕРАКТИВНЕ УПРАВЛІННЯ ПОВЕРХНЯМИ ЗАСОБАМИ МОБІЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ

*Робота присвячена проблемі геометричного моделювання поверхонь та інтерактивного керування формою за допомогою мобільних пристроїв. У роботі розглянуто методи створення складних геометричних об'єктів на основі порцій Без'є та описано метод гладкого склеювання порцій. Розглянуто способи створення інтерфейсу користувача системи керування візуальними даними та запропоновано підхід до створення гібридного інтерфейсу для інтерактивного керування поверхнями загальнодоступними засобами. Запропонований підхід передбачає об'єднання можливостей керування графічними даними існуючих інтерфейсів мобільних телефонів, а також додає засоби інтерактивного керування тривимірними об'єктами за рахунок використання пристроїв позиціонування (гіроскопа та акселерометра).*

*Ключові слова:* геометричне моделювання, криві Без'є, порції Без'є, мобільні пристрої, інтерактивне керування.

Н.Н. АУШЕВА, Б.Н. ПЕДОС

Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт"

## ІНТЕРАКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЯМИ СРЕДСТВАМИ МОБИЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

*Робота посвящена проблеме геометрического моделирования поверхностей и интерактивного управления формой с помощью мобильных устройств. В работе рассмотрены методы создания сложных геометрических объектов на основе порций Безье и описан метод гладкого склеивания порций. Рассмотрены способы создания интерфейса пользователя системы управления визуальными данными и предложен подход к созданию гибридного интерфейса для интерактивного управления поверхностями общедоступными средствами. Предложенный подход предполагает объединение возможностей управления графическими данными существующих интерфейсов мобильных телефонов, а также добавляет средства интерактивного управления трехмерными объектами за счет использования устройств позиционирования (гироскопа и акселерометра).*

*Ключевые слова:* геометрическое моделирование, кривые Безье, порции Безье, мобильные устройства, интерактивное управление.

N.M. AUSHEVA, B.M. PEDOS

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"

## INTERACTIVE SURFACES CONTROL BY MEANS OF MOBILE DEVICES

*The work deals with the problem of geometric modeling of surfaces and interactive form management by means of mobile devices. In this work the methods of creating complex geometry-based portions of Bezier and smooth portions bonding method were described. The methods of creating the user interface of the visual data management system and an approach to creating hybrid interface for interactive surfaces control by generally available means was proposed. The approach will combine graphical data management capabilities of existing mobile phone's interfaces and capabilities of three-dimensional objects interactive control by using positioning devices (gyroscope and accelerometer).*

*Keywords:* geometric modeling, Bezier curves, Bezier portions, mobile devices, interactive control.

### Постановка проблеми

Бурхливий розвиток засобів обробки інформації, підвищення рівня автоматизації процесів виробництва і керування призводить до зростання ролі людського чинника. У сучасних умовах візуалізація даних стала основним способом взаємодії користувача з інформаційною системою. Більшість сучасних CAD/CAM систем не мають механізмів інтерактивного керування геометричними об'єктами загальнодоступними засобами. Тому доцільно провести дослідження стосовно використання сучасних мобільних пристроїв для керування об'єктами з метою створення алгоритмічного та програмного комплексу для інтерактивного керування поверхнями за допомогою мобільних телефонів.

**Аналіз останніх досліджень**

У роботі [4] описані загальні методи створення математичних моделей складних геометричних форм. Автором роботи [1] досліджуються методи побудови гладких поверхонь на основі порції Без'є. Розроблена методика моделювання дозволяє створювати поверхні з високим порядком гладкості без розрахунку похідних у каркасних точках. Праці [5] та [6] описують методи створення інтерактивного інтерфейсу користувача для маніпулювання графічними даними. У роботі [6] для керування складними поверхнями у тривимірному просторі пропонується використовувати гіроскоп та акселерометр, що має надати системі більшої інтерактивності.

**Формулювання цілей дослідження (постановка завдання)**

Розробка технології керування складними геометричними поверхнями засобами мобільних пристроїв.

**Основна частина**

В основі форм сучасних продуктів виробництва, промислового обладнання та побутових товарів лежать поверхні довільної форми. При виробництві для створення складних виробів необхідно отримувати ці поверхні у вигляді математичних моделей. Зазвичай довільна форма задається за допомогою криволінійних поверхонь.

Поверхні другого порядку мають досить обмежені можливості при створенні складних геометричних форм. Бікубічні поверхні Кунса надають більш гнучкий і потужний засіб розробки поверхонь, однак їх практичне використання ускладнюється необхідністю задання точної, інтуїтивно-неочевидної математичної інформації, наприклад рівнянь кривих, що не надає можливості керування формою поверхні в інтерактивному режимі [4].

Завдяки простоті задання і виконання операцій, поверхні Без'є знайшли широке застосування в комп'ютерній графіці для моделювання гладких поверхонь. Поверхня Без'є цілком лежить в опуклій оболонці своїх опорних точок. Ця властивість дозволяє здійснювати інтуїтивно зрозуміле управління параметрами поверхні в графічному інтерфейсі за допомогою її опорних точок. Крім того, афінні перетворення поверхні (перенесення, масштабування та ін.) також можуть бути виконані через застосування відповідних перетворень до опорних точок. Саме тому для створення комп'ютерних моделей складних геометричних форм були використані поверхні Без'є.

Поверхню Без'є (рис. 1) будемо задавати у наступному вигляді [2]:

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{i,n}(u) K_{j,m}(v) \tag{1}$$

де  $u, v \in (0, 1)$ , а  $J_{i,n}$  та  $K_{j,m}$  – багаточлени Бернштейна в параметричних напрямках  $u$  та  $v$ , а  $B_{i,j}$  – вершини сітки контрольних точок.

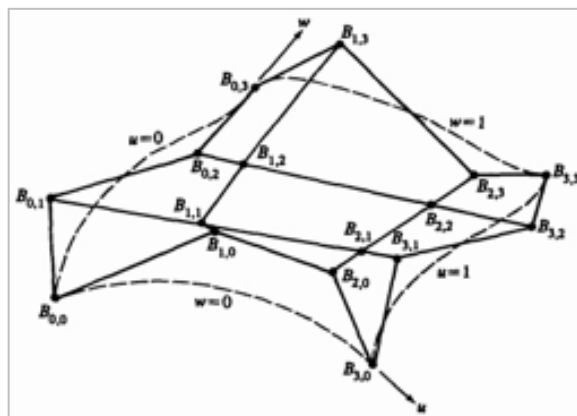


Рис. 1. Поверхня Без'є та вершини характеристичного многокутника

Багаточлени Бернштейна розраховуються на основі рівнянь [2]:

$$\begin{aligned}
 J_{n,i}(u) &= \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \\
 K_{m,j}(v) &= \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j} \\
 \binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
 \binom{m}{j} &= \frac{m!}{j!(m-j)!}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Елементи  $B_{ij}$  – це вершини сітки контрольних точок, що задають поверхню. Індеси  $n$  та  $m$  на одиницю менше числа вершин багатокутника в напрямках  $u$  та  $v$ , відповідно (рисунок 1).

Найбільш поширеними є бікубічні поверхні Без'є ( $n = m = 3$ ) з 16 контрольними точками. Поверхні більш високих порядків для практичних цілей (в тому числі і при комп'ютерному моделюванні) використовуються рідше, так як при обробці вимагають більшого обсягу обчислень, і відповідно, потребують значно більше часу для моделювання складних об'єктів [3].

Існує досить багато складних за формою геометричних тіл та об'єктів, для яких не існує аналітичного задання. Такими об'єктами є кузови автомобілів, фюзеляжі літаків, корпуси кораблів, скульптури тощо. Для побудови таких геометричних форм окремі поверхні можуть бути послідовно об'єднані в кусково-гладкі поверхні.

Для побудови гладкої поверхні необхідно виконати склеювання за першим порядком гладкості. Розглянемо умови гладкості для порції Без'є на основі кривих третього порядку.

Представимо чотирикутну порцію Без'є у вигляді [1]:

$$r(u, v) = r_0(1-u)^3 + 3r_1u(1-u)^2 + 3r_2u^2(1-u) + r_3u^3, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned} r_0 &= r_{00}(1-v)^3 + 3r_{01}v(1-v)^2 + 3r_{02}v^2(1-v) + r_{03}v^3, \\ r_1 &= r_{10}(1-v)^3 + 3r_{11}v(1-v)^2 + 3r_{12}v^2(1-v) + r_{13}v^3, \\ r_2 &= r_{20}(1-v)^3 + 3r_{21}v(1-v)^2 + 3r_{22}v^2(1-v) + r_{23}v^3, \\ r_3 &= r_{30}(1-v)^3 + 3r_{31}v(1-v)^2 + 3r_{32}v^2(1-v) + r_{33}v^3. \end{aligned} \tag{4}$$

Нехай задано порції  $r^{(1)}(u, v)$  та  $r^{(2)}(u, v)$ . Для того, щоб гладко склеїти дві порції, необхідно, щоб три дотичні вектори  $r_u^{(1)}$ ,  $r_u^{(2)}$  та  $r_v$  лежали в одній дотичній площині (рисунок 2) [4].

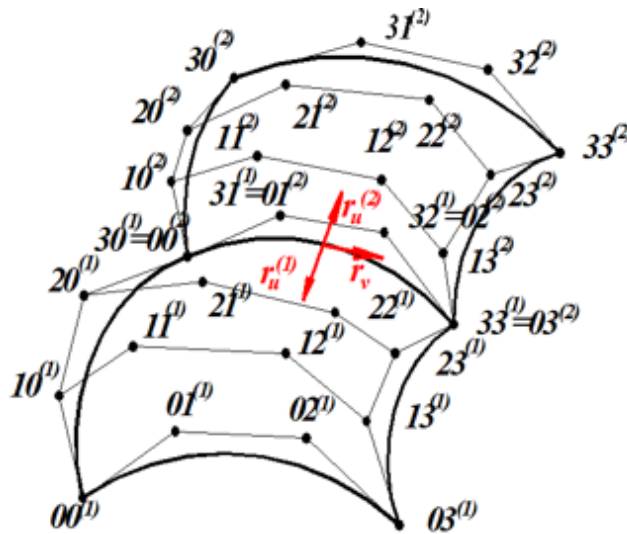


Рис. 2. Склеювання порцій Без'є

Для цього необхідно розраховувати дотичний вектор до другої порції на основі дотичних векторів до першої порції [1]:

$$r_u^{(2)}(0, v) = \lambda(v)r_u^{(1)}(1, v) + \mu(v)r_v^{(1)}(1, v), \tag{5}$$

де  $\lambda(v)$  та  $\mu(v)$  – деякі скалярні функції.

На основі загальної умови були виведені умови склеювання порцій Без'є через точки характеристичних чотирикутників [1]:

$$\begin{aligned} (r_{10}^{(2)} - r_{30}^{(1)}) &= \lambda(r_{20}^{(1)} - r_{30}^{(1)}) + 3\mu_0(r_{31}^{(1)} - r_{30}^{(1)}) \\ (r_{13}^{(2)} - r_{33}^{(1)}) &= \lambda(r_{23}^{(1)} - r_{33}^{(1)}) + 3\mu_1(r_{33}^{(1)} - r_{32}^{(1)}) \\ (r_{11}^{(2)} - r_{31}^{(1)}) &= \lambda(r_{21}^{(1)} - r_{31}^{(1)}) + 2\mu_0(r_{32}^{(1)} - r_{31}^{(1)}) + \mu_1(r_{31}^{(1)} - r_{30}^{(1)}) \\ (r_{12}^{(2)} - r_{32}^{(1)}) &= \lambda(r_{22}^{(1)} - r_{32}^{(1)}) + \mu_0(r_{33}^{(1)} - r_{32}^{(1)}) + 2\mu_1(r_{32}^{(1)} - r_{31}^{(1)}) \end{aligned} \tag{6}$$

При  $\lambda(v) = 0$  та  $\mu(v) = 0$  виконується умова колінеарності векторів при перетині граничної кривої (рисунок 3).

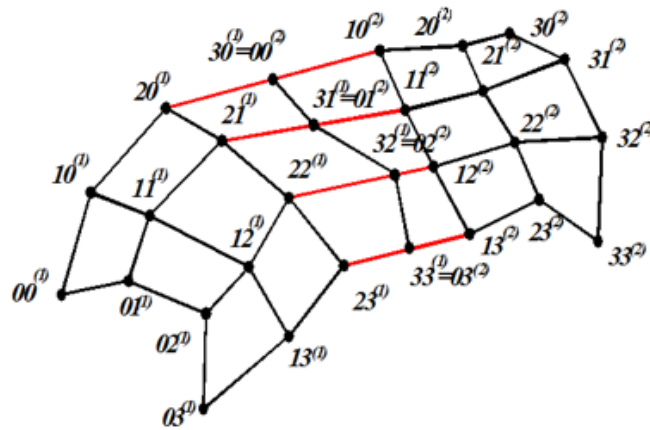


Рис. 3. Гладке склеювання порцій Без'є

Для керування поверхнями необхідно розробити зручний та інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, що дозволить би маніпулювати геометричними об'єктами в інтерактивному режимі.

Інтерактивність – це поняття, що розкриває характер і ступінь взаємодії між об'єктами. В інформаційних системах інтерактивність – це здатність системи адекватно реагувати на дії користувача, виконуючи ту чи іншу операцію.

Інтерактивне керування геометричними об'єктами (або поверхнями) передбачає їх налаштування без прямої зміни параметрів, а за допомогою зрозумілих людині дій та жестів. Так, наприклад, для повороту об'єкту необхідно повернути пристрій вводу, а не налаштовувати відповідний кут повороту.

Система інтерактивного керування складними геометричними об'єктами, заснована на використанні мобільних пристроїв, дозволить створити пульт дистанційного керування із мобільного телефону шляхом використання усіх видів інтерфейсу (графічного, сенсорного, multitouch тощо), що надає телефон [5].

Текстовий інтерфейс дозволяє керувати графічними даними лише у вигляді команд (набору літерно-цифрових символів). Графічний інтерфейс користувача надає більш потужні можливості при роботі з графічними даними, але не дозволяє у зручний спосіб маніпулювати тривимірними об'єктами. Сенсорний інтерфейс надає великі можливості для керування об'єктами у звичний для людини спосіб за рахунок використання природних жестів, але, з іншого боку, не надає засобів для керування поверхнями у тривимірному просторі.

Тому для інтерактивного керування поверхнями необхідно створити гібридний інтерфейс користувача, що об'єднав би можливості керування графічними даними існуючих інтерфейсів, а також додав би засоби інтерактивного керування тривимірними об'єктами.

Використання фізичних пристроїв позиціонування (гіроскопа та акселерометра) мобільного телефону дозволяє відстежувати зміну положення телефону у просторі та його орієнтацію, що надає можливість розширити способи взаємодії з користувачем на основі даних про ці маніпуляції. Такий підхід до побудову інтерфейсу користувача дозволяє зробити керування розміщенням об'єкта у просторі більш інтуїтивно зрозумілим та подібним людським рухам у реальному житті [6].

Об'єднання усіх наведених вище технологій, наявних майже у будь-якому сучасному мобільному пристрої, дозволяє створити гібридний інтерфейс для інтерактивної взаємодії користувача з системою керування геометричними об'єктами засобами мобільних телефонів. У такій системі multitouch-жести відповідають за керування камерою, гіроскоп – за обертання керованого об'єкта навколо своєї осі, а акселерометр – за переміщення об'єкта у просторі.

Графічний інтерфейс користувача використовується як основа для побудову механізмів взаємодії з програмним комплексом. Він надає базовий функціонал для керування системою, але залишає простір для розширення способів взаємодії користувача з програмним комплексом.

Для керування орієнтацією геометричного об'єкта у тривимірному просторі використовується гіроскоп, що дозволяє зробити керування розташуванням інтуїтивно зрозумілим та наближеним до маніпулювання об'єктами у реальному житті.

Програмний комплекс для інтерактивного керування поверхнями передбачає наявність двох основних складових: програмного забезпечення для побудову складних геометричних об'єктів та мобільного додатку для інтерактивного керування процесом побудову, маніпулювання отриманими поверхнями та їх віддаленого налаштування.

Програмне забезпечення для побудову гладких поверхонь було створене на базі Unity3D, а мобільний додаток був розроблений під мобільну платформу iOS. Взаємодія двох програм реалізована через



мережу. На рис. 4 зображена поверхня, створена засобами розробленого програмного забезпечення. Поверхня складатиметься з чотирьох порцій, гладко склеєних між собою.

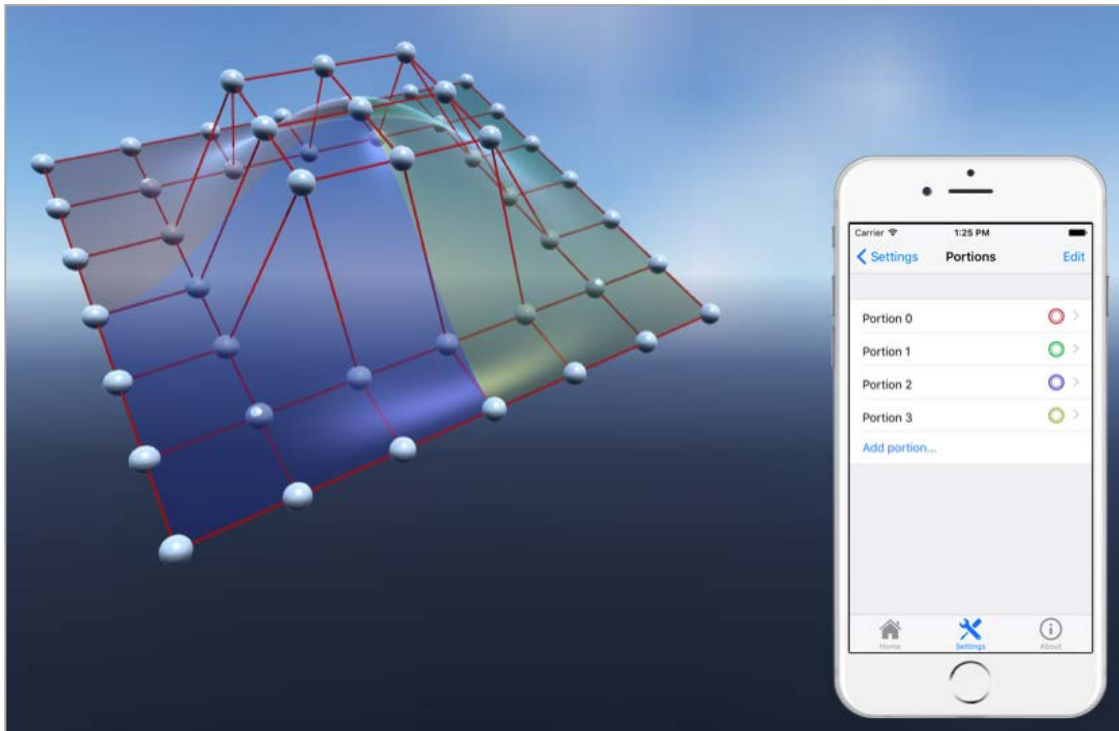


Рис. 4. Інтерфейс створеного програмного забезпечення

#### Висновки

Аналіз існуючих методів побудови геометричних моделей показав, що для побудови складних геометричних форм в системі інтерактивного керування поверхнями доцільно використовувати поверхні Без'є. Дослідження можливостей сучасних мобільних пристроїв стосовно засобів керування геометричними об'єктами дозволили розробити гібридний інтерфейс користувача за рахунок поєднання існуючих засобів людинно-машинної взаємодії, що надаються мобільними телефонами, та інструментів відстеження зміни положення мобільного пристрою у просторі. Таке поєднання дозволяє надати системі управління поверхнями інтуїтивно зрозумілих та звичних для людини засобів керування, а також досягається більш висока динамічність системи, необхідна для підтримки інтерактивного процесу проектування.

#### Список використаної літератури

1. Аушева Н.М. Інтерактивне конструювання криволінійних обводів та гладких поверхонь / Н.М. Аушева, Р.Б. Берлінський // Водний транспорт. Збірник наукових праць Київської державної академії водного транспорту. – К.: КДАВТ, 2001. – №2. – С. 155-159
2. Бляшке В. Дифференціальна геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна / В. Бляшке. М.: Наука – Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. – 330 с.
3. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Т. Позняк – Москва: Наука, 1981. – 232 с.
4. Роджерс Д. Математические основы машинной графики / Дж. Адамс, Д. Роджерс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
5. Педос Б.М. Система інтерактивного керування геометричними об'єктами за допомогою мобільних пристроїв / Б.М. Педос., Н.М. Аушева // Сучасні аспекти розробки програмного забезпечення: Збірник наукових праць III науково-практичної дистанційної конференції молодих вчених і фахівців з розробки програмного забезпечення (м. Черкаси, 15 квітня 2016 р). – Черкаси: видавець Чабаненко Ю.А., 2016. – 182 с.
6. Педос Б.М. Система інтерактивного керування геометричними об'єктами за допомогою мобільних пристроїв / Б.М. Педос., Н.М. Аушева // Сучасні проблеми наукового забезпечення енергетики: Матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції аспірантів, магістрантів і студентів, присвяченої 85 річчю теплоенергетичного факультету (м. Київ, 18-21 квітня 2016 р). – Том. 2. – НТУУ "КПІ", 2016. – С. 60.

УДК 515:69.02

А.Ю. БРАЙЛОВ, В.И. ПАНЧЕНКО, В.А. УСТЯНСКИЙ  
Одесская государственная академия строительства и архитектуры**ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ТОЧЕК КРОВЛИ  
ИСТОРИЧЕСКОГО ЗДАНИЯ**

*В настоящей работе исследована геометрическая модель определения координат точек кровли исторического здания с применением инженерного геодезического прибора. Построение геометрической модели определения координат точек кровли необходимо для разработки конструкторской документации. Выявлена проблема и определены первостепенные задачи. Суть проблемы заключается в противоречии между необходимостью определить единую комплексную характеристику объекта и наличием возможности измерить только отдельные различные параметры такой характеристики. Аналитически доказана возможность практического использования разработанной геометрической модели.*

*Ключевые слова: геометрическая модель, уравнение прямой в пространстве, точка, координаты, методика, конструкторская документация.*

О.Ю. БРАЙЛОВ, В.І. ПАНЧЕНКО, В.А. УСТЯНСЬКИЙ  
Одеська державна академія будівництва та архітектури**ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ТОЧОК КРОВЛІ ІСТОРИЧНОГО  
БУДИНКУ**

*У даній роботі досліджено геометричну модель визначення координат точок покрівлі історичної будівлі із застосуванням інженерного геодезичного приладу. Побудова геометричної моделі покрівлі необхідна для розробки конструкторської документації. Виявлено проблему і визначені першочергові завдання. Суть проблеми полягає в протиріччі між необхідністю визначити єдину комплексну характеристику об'єкту і існуванням можливості заміряти тільки окремі різні параметри такої характеристики. Аналітично доведена можливість практичного використання розробленої геометричної моделі.*

*Ключові слова: геометрична модель, рівняння прямої в просторі, точка, координати, методика, конструкторська документація.*

A.Yu. BRAILOV, V.I. PANCHENKO, V.A. USTYANSKIY  
Odessa State Academy of Civil Building and Architecture**GEOMETRICAL MODEL FOR THE DETERMINATION OF POINTS COORDINATES OF THE  
HISTORICAL BUILDING ROOF**

*In the present work the geometrical model for the development of points coordinates of the historical building roof with using an engineering geodetic device is investigated. Construction of the geometrical model of the roof is needed for the development of the design documentation. The problem is revealed and tasks for its solution are defined. The problem essence consists in the contradiction between necessity to define the uniform complex characteristic of object and the ability to measure the geometry of the roof only particular some particular parameters of such characteristic. Possibility of practical use of the developed geometrical model is proved analytically.*

*Keywords: geometrical model, the straight line equation in space, a point, coordinates, a technique, the design documentation.*

**Актуальность исследования**

Важной функцией любого общества является сохранение культурного наследия для будущих поколений. К культурному наследию относится историческая часть любого города. Поэтому внешний вид зданий исторической части города необходимо сохранить.

Таким образом, объектом исследования является историческое здание.

К особенности исторического здания можно отнести – ветхость кровли (аварийное состояние стропильной системы, разрушения кровельного покрытия).

Поскольку без сохранения кровли невозможно сохранить фасады и целостность здания, то, в первую очередь, должна быть сохранена историческая форма кровли и её целостность.

**Постановка проблемы**

Для ремонта, восстановления и реконструкции кровли здания необходима техническая документация.

Техническая документация для исторического здания может отсутствовать или не содержать требуемых данных. Поэтому *создание технической документации* для сохранения первичного вида кровли при ремонте, восстановлении и реконструкции здания является актуальной проблемой.

Для сохранения существующего вида кровли необходимо определить её габаритные размеры, длины и уклоны скатов кровельного покрытия.

Поскольку, как правило, кровля исторического здания находится в аварийном состоянии, то непосредственный физический контакт с объектом исследования не допускается.

При непосредственном (прямом) определении геометрических параметров кровли существует возможность дополнительных повреждений несущих нагрузку конструкций и её покрытия.

Следовательно, необходима разработка методики бесконтактного определения геометрических параметров кровли исторического здания.

Для бесконтактного определения координат точек кровли в некоторой единой системе измерения необходимо разработать геометрическую модель (аппарат измерения) определения координат точки объекта для заданного расположения инженерного геодезического оборудования.

*Суть проблемы* заключается в *противоречии* между необходимостью определить *единую комплексную характеристику* объекта (положение конструктивного элемента в пространстве) и наличием возможности измерить только *отдельные различные параметры* такой характеристики (угол места, азимут и т.п.). Такое противоречие может быть разрешено разработкой геометрической модели получения требуемого результата.

#### Анализ исследований и публикаций

Получить координаты точки объекта можно с помощью электронных инженерно-геодезических приборов [3–5].

Электронный тахеометр обладает возможностью получения координат точки отдаленного объекта без вспомогательного оборудования и материалов, но при условии возможности произвести съемку. Для съемки требуется получить три параметра, необходимых операционной системе оборудования. Такими тремя параметрами являются два угла поворота зрительной трубы относительно начала отсчёта в горизонтальной и вертикальной плоскости и расстояние от прибора до точки исследуемого объекта. Угол поворота зрительной трубы в вертикальной плоскости относительно горизонтального положения называется *углом места*. Угол поворота зрительной трубы в горизонтальной плоскости относительно направления на север называется *азимутальным углом* или азимутом.

Существуют роботизированные тахеометры с функцией сканирования, которые облегчают работу оператора и обладают повышенной точностью. После проведения изысканий таким прибором с применением функции наземного лазерного сканирования получают облако точек, которое можно позиционировать как трехмерную модель исследуемого объекта.

В тоже время, стоимость таких электронных инженерно-геодезических приборов чрезвычайно высока. Стоимость электронного тахеометра в Украине в 2016 году составляет около 5000\$, роботизированного тахеометра около 20000\$.

Поэтому *разработка геометрической модели* для экспериментального (эмпирического) определения координат точки объекта, снижающей затраты для получения результата, *актуальна*.

#### Цель и задачи исследования

*Целью статьи* является разработка геометрической модели определения координат точки объекта для заданного расположения геодезического оборудования.

*Задачи исследования:*

1. Разработать геометрическую модель для экспериментального (эмпирического) определения координат точки объекта.
2. Создать аналитическую модель для разработанной геометрической модели.
3. Доказать аналитически возможности практического использования разработанной геометрической модели.

#### Основной материал исследования

Структурно геометрическая модель для экспериментального бесконтактного определения координат точки объекта состоит из следующих компонентов:

1. Точка  $C(x_C; y_C; z_C)$  объекта исследования (рис. 1).
2. Трехмерная декартова система координат  $OXYZ$  с началом координат (рис. 2) в точке  $O(0; 0; 0)$ .
3. Точка  $A(x_A; y_A; z_A)$  – первая точка зрения. Точка  $A$  соответствует первому положению геодезического прибора.
4. Точка  $B(x_B; y_B; z_B)$  – вторая точка зрения. Точка  $B$  соответствует второму положению геодезического прибора.
5. Проецирующий луч  $AC$ , соединяющий точку зрения  $A$  с точкой исследования  $C$ .
6. Проецирующий луч  $BC$ , соединяющий точку зрения  $B$  с точкой исследования  $C$ .

7. Некоторая точка  $A_1$ , принадлежащая лучу  $AC$ , и некоторая точка  $B_1$  принадлежащая лучу  $BC$  (рис. 2).

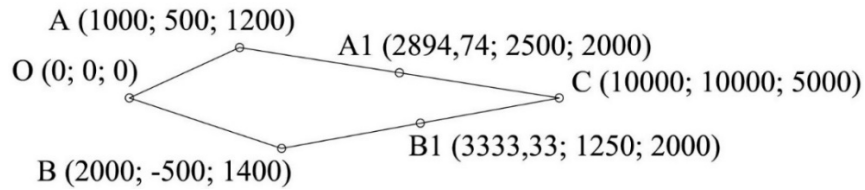


Рис. 1. Двухмерная геометрическая модель экспериментального (эмпирического) определения координат точки объекта.

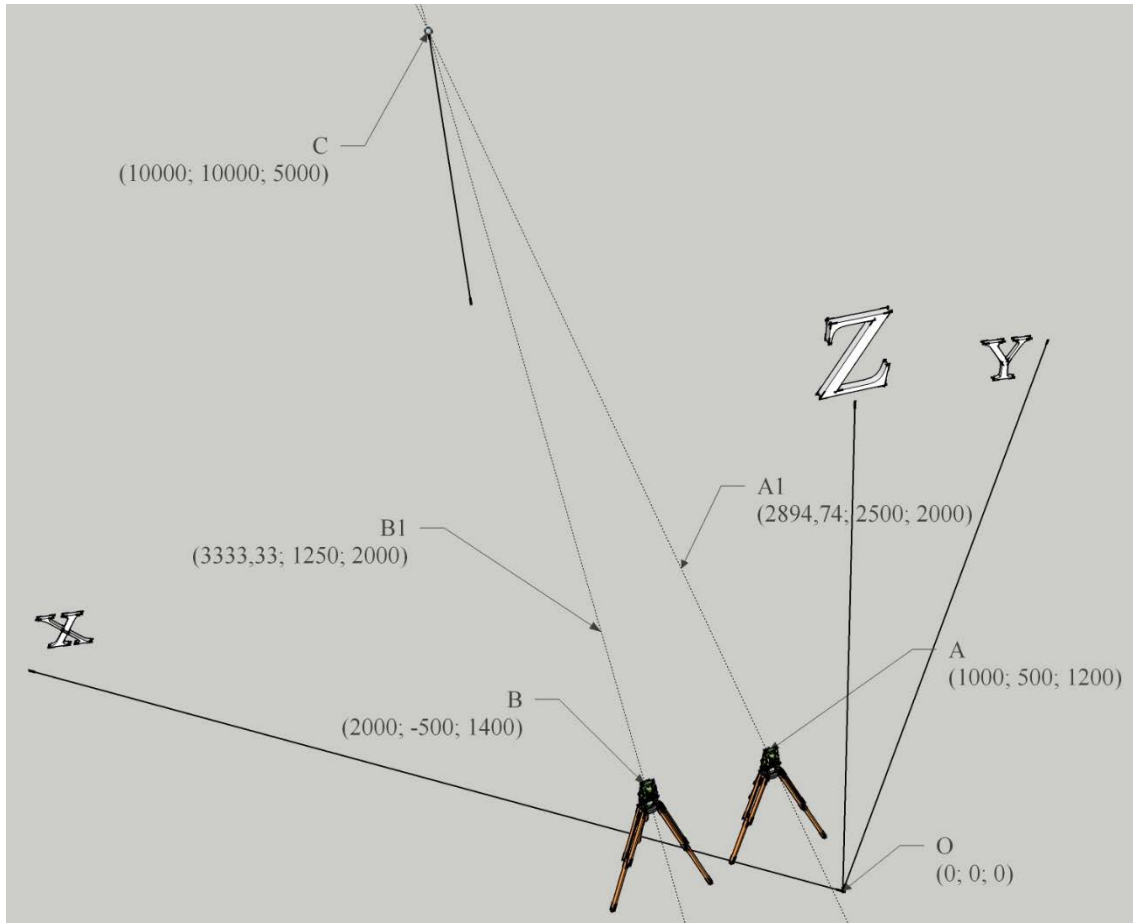


Рис. 2. Трехмерная геометрическая модель экспериментального (эмпирического) определения координат точки объекта.

Аналитическая модель разработанной геометрической модели состоит из следующих компонентов.

1. Каноническое уравнение прямой линии:

$$\frac{x - x_A}{\rho_1} = \frac{y - y_A}{\rho_2} = \frac{z - z_A}{\rho_3}, \tag{1}$$

где  $x_A, y_A, z_A$  – координаты некоторой заданной точки  $A(x_A; y_A; z_A)$  в пространстве в системе  $OXYZ$ ,  
 $x, y, z$  – координаты произвольной точки  $A(x; y; z)$  в пространстве на проецирующем луче;

$\rho_1, \rho_2, \rho_3$  – координаты направляющего вектора  $\vec{\rho}(\rho_1; \rho_2; \rho_3)$ , совпадающего с проецирующим лучом.

2. Уравнение прямой линии, проходящей через две заданные точки  $A(x_A; y_A; z_A)$  и  $A_1(x_{A_1}; y_{A_1}; z_{A_1})$  :

$$\frac{x - x_A}{x_{A_1} - x_A} = \frac{y - y_A}{y_{A_1} - y_A} = \frac{z - z_A}{z_{A_1} - z_A}, \tag{2}$$

где  $\vec{AA_1}(x_{A_1} - x_A; y_{A_1} - y_A; z_{A_1} - z_A)$  – направляющий вектор с координатами

$$\rho_{1,A} = x_{A1} - x_A, \rho_{2,A} = y_{A1} - y_A, \rho_{3,A} = z_{A1} - z_A. \quad (3)$$

3. Уравнение прямой линии, заданной точкой  $A(x_A; y_A; z_A)$  и параллельным ей вектором  $\vec{\rho}(\rho_{1,A}; \rho_{2,A}; \rho_{3,A})$  в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \rho_{1,A} \cdot t + x_A, \\ y = \rho_{2,A} \cdot t + y_A, \\ z = \rho_{3,A} \cdot t + z_A. \end{cases} \quad (4)$$

где  $t$  – параметр, определяющий положение точки на проецирующем луче.

4. Система уравнений для определения значения параметра  $t$ , при котором два проецирующих луча пересекаются в точке  $C$  :

$$\begin{cases} \rho_{1,A} \cdot t_A + x_A = \rho_{1,B} \cdot t_B + x_B, \\ \rho_{2,A} \cdot t_A + y_A = \rho_{2,B} \cdot t_B + y_B, \\ \rho_{3,A} \cdot t_A + z_A = \rho_{3,B} \cdot t_B + z_B. \end{cases} \quad (5)$$

где  $t_A$  – параметр, определяющий положение точки на проецирующем луче  $A$  ;

$t_B$  – параметр, определяющий положение точки на проецирующем луче  $B$  ;

$$\rho_{1,B} = x_{B1} - x_B, \rho_{2,B} = y_{B1} - y_B, \rho_{3,B} = z_{B1} - z_B. \quad (6)$$

– координаты направляющего вектора.

*Докажем аналитически возможность практического использования разработанной геометрической модели.*

Пусть заданы координаты точек зрения геометрических приборов:

$$A(1000; 500; 1200), \quad B(2000; -500; 1400),$$

и вспомогательные точки образования проецирующих лучей:

$$A1(2894,74; 2500; 2000), \quad B1(3333,33; 1250; 2000).$$

Двухмерная геометрическая модель проведенного эксперимента изображена на рис. 1. Трехмерная модель проведенного эксперимента изображена на рис. 2.

Необходимо *определить* координаты точки  $C$  аналитическим способом.

*Доказательство.* 1. Определим координаты направляющих векторов  $\rho_A$  и  $\rho_B$  с помощью уравнений (3) и (6):

$$\rho_A(\rho_{1,A} = 2894,74 - 1000 = 1894,74; \rho_{2,A} = 2500 - 500 = 2000, \rho_{3,A} = 2000 - 1200 = 800), \quad (7)$$

$$\rho_B(\rho_{1,B} = 3333,22 - 2000 = 1333,33; \rho_{2,B} = 1250 - (-500) = 1750; \rho_{3,B} = 2000 - 1400 = 600). \quad (8)$$

2. Подставим значения (7) и (8) в систему уравнений (5).

Получим систему уравнений (9):

$$\begin{cases} 1874,94 \cdot t_A + 1000 = 1333,33 \cdot t_B + 2000, \\ 2000 \cdot t_A + 500 = 1750 \cdot t_B - 500, \\ 800 \cdot t_A + 1200 = 600 \cdot t_B + 1400. \end{cases} \quad (9)$$

3. Из первого уравнения системы (9) выразим параметр  $t_A$  через параметр  $t_B$  :

$$t_A = (1333,33 \cdot t_B + 1000) / 1874,94. \quad (10)$$

4. Подставляем (10) во второе уравнение системы (9):

$$2000 \cdot ((1333,33 \cdot t_B + 1000) / 1874,94) - 1750 \cdot t_B + 1000 = 0.$$

Преобразуем последнее полученное уравнение к виду:

$$1407,402 \cdot t_B + 1055,554 + 1750 \cdot t_B + 1000 = 0$$

и, приведя в данном равенстве подобные члены, определим значение параметра  $t_B$  :

$$t_B = 5,9999 \approx 6. \quad (11)$$

5. Подставим (11) в (10), определим значение параметра  $t_A$  :

$$t_A = (1333,33 \cdot 6 + 1000) / 1874,94 = 4,75. \quad (12)$$

Таким образом, получены значение параметра  $t_B \approx 6$ , соответствующее точке  $C$  на луче  $BB1$ , и значение параметра  $t_A = 4,75$ , соответствующее точке  $C$  на луче  $AA1$ .

6. Определим координаты точки  $C$  на луче  $AA1$  и координаты точки  $C$  на луче  $BB1$ , записав систему уравнений (4) для этих лучей:

$$x^{AA1} = \rho_{1,A} \cdot t_A + x_A; y^{AA1} = \rho_{2,A} \cdot t_A + y_A; z^{AA1} = \rho_{3,A} \cdot t_A + z_A, \quad (13)$$

$$x^{BB1} = \rho_{1,B} \cdot t_B + x_B; y^{BB1} = \rho_{2,B} \cdot t_B + y_B; z^{BB1} = \rho_{3,B} \cdot t_B + z_B. \quad (14)$$

7. Подставив в уравнение (13) и (14) значения (11), (12), (7), (8), координаты точек  $A$  и  $B$ , получим координаты точки  $C$ :

$$\begin{cases} x_C^{AA1} = 1894,74 \cdot 4,75 + 1000 = 10000, \\ y_C^{AA1} = 2000 \cdot 4,75 + 500 = 10000, \\ z_C^{AA1} = 800 \cdot 4,75 + 1200 = 5000. \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} x_C^{BB1} = 1333,33 \cdot 6 + 2000 = 10000, \\ y_C^{BB1} = 1750 \cdot 6 - 500 = 10000, \\ z_C^{BB1} = 600 \cdot 6 + 1400 = 5000. \end{cases} \quad (16)$$

Сравнивая координаты точки  $C$  на луче  $AA1$  и координаты точки  $C$  на луче  $BB1$ , убеждаемся в том, что их значения одинаковы. Таким образом, точка  $C$  действительно является точкой пересечения разных лучей  $AA1$  и  $BB1$ .

Следовательно, созданная аналитическая модель соответствует разработанной геометрической модели.

Таким образом, аналитически доказана возможность применения разработанной геометрической модели.

#### Выводы

1. Разработанная геометрическая модель может использоваться для бесконтактного определения координат точки объекта при заданном расположении геодезического оборудования.

2. Данная геометрическая модель является основанием для разработки программного обеспечения геодезического оборудования и наглядной схемой использования оборудования инженером.

#### Список использованной литературы

1. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986 – 544 с.
2. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
3. Геодезические инструменты SOKKIA. Серия CX. Руководство по эксплуатации. [Электронный ресурс] – Japan: TOPCON CORPORATION. – 75-1 Hasunuma-cho, Itabashi-ku, Tokyo 174-8580. – 312 с. – Режим доступа: <http://www.topcon.co.jp>.
4. Тахеометр Trimble Серия S. Руководство пользователя, версия 06.00, артикул 57021001. [Электронный ресурс] – USA: Trimble Navigation Limited, Engineering and Construction Division, 645 North Mary Avenue, PO Box 3642, Sunnyvale, CA 94085, USA, ноябрь 2008. – 160 с. – Режим доступа: <http://www.trimble.com>.
5. Электронный тахеометр Trimble серии M3 DR. Руководство пользователя, версия 1.00, редакция А. [Электронный ресурс] – USA: Trimble Navigation Limited, Engineering and Construction Division, 5475 Kellenburger Road Dayton, Ohio 45424-1099 USA, декабрь 2009. – 50 с. – Режим доступа: <http://www.trimble.com>.

УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ, Л.О. ТУЛУПОВА

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

І.В. ВОРОНЦОВА

Полтавський коледж нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

### ВИЗНАЧЕННЯ ОДНОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ ЛАНЦЮГОМ ПОСЛІДОВНИХ СУПЕРПОЗИЦІЙ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ВЕЛИЧИННИ РЕКУРЕНТНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ

*В роботі проведено дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій пар точок для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів із врахуванням величини рекурентної залежності, що є прообразом зовнішнього формоутворюючого навантаження у статико-геометричному способі дискретного геометричного моделювання.*

*Ключові слова: статико-геометричний спосіб, геометричний апарат суперпозицій, величина рекурентної залежності, коефіцієнти суперпозицій.*

О. В. ВОРОНЦОВ, Л. А. ТУЛУПОВА

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

И. В. ВОРОНЦОВА

Полтавский колледж нефти и газа Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ЦЕПЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУПЕРПОЗИЦИЙ С УЧЕТОМ ВЕЛИЧИНЫ РЕКУРЕНТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

*В работе проведено исследование организации цепи последовательных суперпозиций пар точек для дискретного моделирования одномерных геометрических образов с учетом величины рекурентной зависимости, которая является прообразом внешней формообразующей нагрузки в статико-геометрическом способе дискретного геометрического моделирования.*

*Ключевые слова: статико-геометрический способ, геометрический аппарат суперпозиций, величина рекурентной зависимости, коэффициенты суперпозиции.*

O.V. VORONTSOV, L.A. TULUPOVA

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

I.V. VORONTSOVA

Poltava Petroleum Geological College of Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

### DETERMINATION OF ONE-DIMENSIONAL GEOMETRIC IMAGES BY A CHAIN OF SUCCESSIVE SUPERPOSITIONS CONSIDERING A VALUE OF RECURRENT DEPENDENCE

*In the article we have investigated an organization of a chain of successive superpositions of pairs of some points for discrete modeling of one-dimensional geometric images, considering a value of recurrent dependence. This dependence is a prototype of some external forming load in the static – geometrical method of discrete geometrical modeling.*

*Keywords: static-geometric method, geometrical apparatus of superpositions, value of recurrent dependence, superposition coefficients.*

#### Постановка проблеми

Формування дискретних моделей геометричних образів статико-геометричним способом, зокрема моделей просторових покриттів, на стадії ескізного проектування, керування формою модельованих поверхонь, зміна окремих параметрів вимагає повторної операції складання і вирішення великих систем лінійних рівнянь. Залучення математичного апарату числових послідовностей і геометричного апарату суперпозицій для формування геометричних образів значно розширює можливості статико-геометричного способу дискретного моделювання.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дослідженню властивостей суперпозицій дискретних точкових множин присвячено дисертацію [1], у якій, зокрема, було розглянуто можливість керування формою розтягнутих сіток на основі функціонального додавання, статті [2–4], в яких доведено ряд властивостей вищезазначених суперпозицій та зроблено висновок про перспективність всебічного дослідження геометричного апарату суперпозицій. У статті [5] показано, що суперпозиція  $n$  точок може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій.

Актуальними є дослідження можливих варіантів ланцюгів суперпозицій з метою виведення аналітичних залежностей визначення координат довільного вузла двовимірного геометричного образу, як суперпозиції координат заданих вузлів.

**Формулювання мети дослідження**

Метою даної роботи є дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій пар точок для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів, оскільки властивості, які має одновимірна множина точок, можуть бути узагальнені до двовимірної множини, що формується за тими ж законами, якщо одновимірну множину розглядати як складову каркаса двовимірної. Властивості дискретної моделі двовимірного геометричного образу також можуть бути одержані узагальненням відповідних властивостей одновимірного.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Одним з принципів статико-геометричного способу конструювання кривих ліній (одновимірних геометричних образів) є управління формою кривої шляхом зміни типу розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження.

При формуванні дискретних образів на основі геометричного апарату суперпозицій формоутворюючою величиною є величина рекурентної залежності, що тотожна зовнішньому навантаженню у статико-геометричному способі.

Розглянемо можливість формування дискретного каркасу заданої функціональної залежності шляхом заміни суперпозиції  $n$  заданих точок ланцюгом послідовних суперпозицій пар точок із врахуванням формоутворюючої величини рекурентної залежності.

Суперпозиція 2 пари точок  $1$  і  $3$  числової послідовності

$$y_i = 0,2i^2, \tag{1}$$

що показана на рис. 1, може бути представлена у вигляді [2]:

$$u_2 = u_1 \cdot k_2^{13} + u_3 \cdot \left(1 - k_2^{13}\right) + P_i^2, \tag{2}$$

де  $u$  – узагальнене позначення відповідної координати, що одержана в результаті суперпозиції точок  $1$  і  $3$ ,

$k_2^{13}$  – перший із двох коефіцієнтів суперпозиції точок  $1$  і  $3$  для точки  $2$ ,

а  $P_i^2$  – величина рекурентної залежності, що є аналогом дискретної величини зовнішнього формоутворюючого навантаження, прикладеного до вузлової точки  $2$ .

Суперпозиція трьох точок послідовності (1) запишеться у вигляді:

$$y_4^{1-3-5} = k_1 y_1 + k_2 y_3 + \left(1 - k_1 - k_2\right) y_5. \tag{3}$$

Покажемо, що при певній залежності між коефіцієнтами, суперпозицію (3) можна одержати як послідовність двох суперпозицій:

$$y_2 = k_2^{1-3} y_1 + \left(1 - k_2^{1-3}\right) y_3 + P_i^2, \tag{4}$$

$$y_4 = k_4^{3-5} y_3 + \left(1 - k_4^{3-5}\right) y_5 + P_i^4. \tag{5}$$

Із (4):

$$y_3 = \frac{1}{1 - k_2^{1-3}} \left( y_2 - k_2^{1-3} y_1 - P_i^2 \right) \tag{6}$$

Підставляючи (6) до (5), одержимо:

$$y_4 = \frac{-k_2^{1-3} k_4^{3-5}}{1 - k_2^{1-3}} y_1 + \frac{k_4^{3-5}}{1 - k_2^{1-3}} y_2 + \left(1 - k_4^{3-5}\right) y_5 + \left[ P_i^4 - \frac{k_4^{3-5} P_i^2}{1 - k_2^{1-3}} \right], \tag{7}$$

де



$$P_4^{3-5} = \left[ P_i^4 - \frac{k_4^{3-5} P_i^2}{1-k_2^{1-3}} \right] - \text{величина рекурентної залежності.}$$

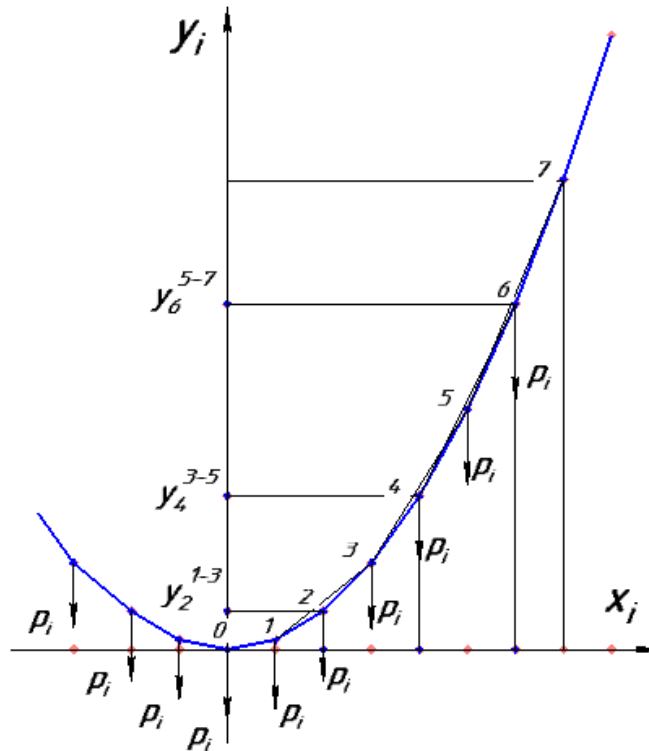


Рис. 1. Дискретний аналог числової послідовності  $y_i = 0, 2i^2$ , як ланцюг послідовних суперпозицій: 1-3, 3-5, 5-7, ...

Порівнюючи (7) із (3), де відповідні коефіцієнти суперпозиції повинні бути рівними, можна записати:

$$\begin{cases} k_1^{(4)} = \frac{-k_2^{1-3} k_4^{3-5}}{1-k_2^{1-3}} \\ k_2^{(4)} = \frac{k_4^{3-5}}{1-k_2^{1-3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2^{1-3} = -\frac{k_1^{(4)}}{k_2^{(4)}} \\ k_4^{3-5} = k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \end{cases}, \quad (8)$$

де  $k_2^{13}$  – перший із двох коефіцієнтів суперпозиції точок 1 і 3 для точки 2,  $k_4^{3-5}$  – перший із двох коефіцієнтів суперпозиції точок 3 і 5 для точки 4,  $k_1^{(4)}$  – перший із трьох коефіцієнтів суперпозиції точок 1, 3 і 5 для точки 4,  $k_2^{(4)}$  – другий із трьох коефіцієнтів суперпозиції точок 1, 3 і 5 для точки 4.

За умови (8) пара суперпозицій (4) і (5) буде тотожною суперпозиції (3).

Суперпозицію чотирьох точок послідовності (1):

$$y_6^{1-3-5-7} = k_1 y_1 + k_2 y_3 + k_3 y_5 + (1-k_1-k_2-k_3) y_7 \quad (9)$$

можна одержати як ланцюг трьох пар послідовних суперпозицій:

$$y_2 = k_2^{1-3} y_1 + (1-k_2^{1-3}) y_3 + P_i^2, \quad (10)$$

$$y_4 = k_4^{3-5} y_2 + \left(1 - k_4^{3-5}\right) y_5 + P_i^4, \tag{11}$$

$$y_6 = k_6^{5-7} y_5 + \left(1 - k_6^{5-7}\right) y_7 + P_i^6. \tag{12}$$

Із (11):

$$y_5 = \frac{1}{1 - k_4^{3-5}} \left( y_4 - k_4^{3-5} y_3 - P_i^4 \right) \tag{13}$$

Підставляючи (13) до (12), одержимо:

$$y_6 = \frac{-k_4^{3-5} k_6^{5-7}}{1 - k_2^{1-3}} y_3 + \frac{k_6^{5-7}}{1 - k_4^{3-5}} y_4 + \left(1 - k_6^{5-7}\right) y_7 + \left[ P_i^6 - \frac{k_6^{5-7} P_i^4}{1 - k_4^{3-5}} \right], \tag{14}$$

де

$$P_6^{5-7} = \left[ P_i^6 - \frac{k_6^{5-7} P_i^4}{1 - k_4^{3-5}} \right] - \text{величина рекурентної залежності}.$$

Далі, за аналогією із (8), одержимо:

$$\begin{cases} k_1^{(6)} = \frac{-k_4^{3-5} k_6^{5-7}}{1 - k_4^{3-5}} \\ k_2^{(6)} = \frac{k_6^{5-7}}{1 - k_4^{3-5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_4^{(6)} = -\frac{k_1^{(6)}}{k_2^{(6)}} \\ k_6^{(6)} = k_1^{(6)} + k_2^{(6)} \end{cases}. \tag{15}$$

Узагальнюючи вищевикладене, можемо записати формули залежності коефіцієнтів суперпозиції  $n$ -го числа точок послідовності (1) для даної організації ланцюга суперпозицій.

$$y_{2n}^{1-3 \dots (n-2) \cdot n} = k_1 y_1 + k_2 y_3 + k_3 y_5 + \dots + k_n y_{2n-1} + \left(1 - k_1 - k_2 - \dots - k_n\right) y_{2n+1};$$

$$k_1^{(6)} = -k_2^{(6)} \left[ k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \right],$$

$$k_1^{(8)} = k_2^{(6)} k_2^{(8)} \left[ k_2^{(4)} + k_2^{(4)} - 1 \right] = -k_2^{(6)} k_2^{(8)} + k_2^{(6)} k_2^{(8)} \left[ k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \right],$$

$$k_1^{(10)} = -k_2^{(8)} k_2^{(10)} + k_2^{(6)} k_2^{(8)} k_2^{(10)} - k_2^{(6)} k_2^{(8)} k_2^{(10)} \left[ k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \right],$$

.....

$$k_1^{(2m)} = (-1)^m \left[ k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \right] \prod_{i=3}^m k_2^{(2i)} + (-1)^{m-1} \sum_{s=1}^{n_1} \prod_{i=2s+1}^m k_2^{(2i)} + (-1)^m \sum_{s=1}^{n_2} \prod_{i=2s+2}^m k_2^{(2i)},$$

де:

$$n_1 = \left[ m; 2 \right] - 1, \quad n_2 = \left[ (m-1); 2 \right] - 1. \text{ Символ «} \frac{a}{b} \text{» означає цілочисельне ділення, } [a : b] \text{ – частку}$$

від цілочисельного ділення  $a$  на  $b$ .

Формула обчислення величини рекурентної залежності у загальному вигляді для даної організації ланцюга суперпозицій матиме вигляд (16):

$$P_{4}^{3-5} = P_{i}^{4} - \frac{k^{3-5} P_{i}^{2}}{1 - k_{2}^{1-3}};$$

$$P_{6}^{5-7} = P_{i}^{6} - \frac{k^{5-7} P_{i}^{4}}{1 - k_{4}^{3-5}};$$

.....;

.....;

$$P_{2m}^{(2m-1)-(2m+1)} = P_{i}^{2m} - \frac{k^{(2m-1)-(2m+1)}}{1 - k_{(2m-2)}^{(2m-3)-(2m-1)}} P_{i}^{(2m-2)}. \quad (16)$$

Вірність виведених формул нескладно перевірити підставивши конкретні числові значення послідовності (1).

### Висновки

У статті показано, що суперпозиція  $n$  точок дискретного аналогу заданої числової послідовності може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій із врахуванням величини рекурентної залежності. Встановлено залежність між коефіцієнтами суперпозиції ланцюга пар точок і коефіцієнтами суперпозиції  $n$  точок. Дослідження різних варіантів організації ланцюгів суперпозицій дозволять вивести аналітичні залежності для визначення координат довільних вузлів двовимірних геометричних образів, як суперпозиції координат заданих вузлів.

### Список використаної літератури

1. Чан Хонг Хай. Управление формой растянутых систем на основе функционального сложения: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / Ч.Х. Хай. – К., 1994. – 124 с.
2. Ковалев, С.Н. О суперпозициях / С.Н. Ковалев // Прикладна геометрія та інженерна графіка : зб. наук. праць – Вип. 84. – К.: КНУБА, 2010. – С. 38–42.
3. Воронцов, О.В. Властивості суперпозицій точкових множин / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка : зб. наук. праць – Вип. 86. – К.: КНУБА, 2010. – С. 345–349.
4. Воронцов, О.В. Определение дискретных аналогов классов элементарных функций суперпозициями одномерных точечных множеств [Электронный ресурс] / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Universsum: Технические науки: электрон. научн. журн. – 2014. – №3(4). – Режим доступа: <http://7universsum.com/ru/tech/archive/item/1135>.
5. Вязанкин, В.А. Замена суперпозиции конечного числа точек цепью последовательных суперпозиций пар точек / В.А. Вязанкин, А.В. Мостовенко // Прикладна геометрія та інженерна графіка : зб. наук. праць – Вип. 84. – К.: КНУБА, 2010. – С. 296–300.

УДК 514.18

Е.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК  
Таврический государственный агротехнологический университет  
В.А. ПАХАРЕНКО

Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

## ФОРМИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОТОННОЙ КРИВОЙ ЛИНИИ

*В работе исследована зависимость закономерности изменения вдоль кривой линии радиусов соприкасающихся окружностей и сфер, хода кривой от параметров ее полярного торса. Предложена классификация кривых линий, исходя из динамики изменения ее дифференциально-геометрических характеристик. Определены условия, обеспечивающие заданные геометрические свойства кривой.*

*Ключевые слова: монотонная кривая, полярный торс, соприкасающаяся окружность, соприкасающаяся сфера, ход кривой.*

Є.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК  
Таврійський державний агротехнологічний університет  
В.О. ПАХАРЕНКО

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

## ФОРМУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОТОННОЇ КРИВОЇ ЛІНІЇ

*У роботі досліджено залежність закономірності зміни уздовж кривої лінії радіусів стичних кіл та сфер, ходу кривої від параметрів її полярного торсу. Запропоновано класифікацію кривих ліній виходячи з динаміки зміни її диференціально-геометричних характеристик. Визначено умови, що забезпечують задані геометричні властивості кривої.*

*Ключові слова монотонна крива, полярний торс, стичне коло, стична сфера, хід кривої.*

E.A. GAVRILENKO, YU.V. KHOLODNYAK  
Tavria State Agrotechnological University  
V.O. PAHARENKO  
Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmelnytsky

## FORMING OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF MONOTONOUS CURVE

*The dependence of law of change along the contour of radius of the adjoining circles and spheres, trend of curve on the parameters of its polar torso is researched in this article. The classification of curves based on the dynamics of changes of its differential-geometric characteristics is proposed. The conditions that provide defined geometrical properties of the curve are defined.*

*Keywords: monotonous curve, polar torso, osculating circle, tangent sphere, trend of curve.*

### Постановка проблемы

Формирование одномерных обводов по заданным условиям – одна из востребованных задач геометрического моделирования. Одномерные обводы могут использоваться для приближенных вычислений, построения графиков, описывающих явления и процессы, в качестве линейных элементов определителя поверхности.

На данный момент наиболее разработаны методы моделирования одномерных обводов участками аналитически заданных кривых, состыкованных в исходных точках с заданным порядком гладкости. Свойства обвода определяются функциями, задающими участки кривых, и характеристиками кривых в граничных точках.

Наращивание условий, накладываемых на участок обвода, требует увеличения параметрического числа формирующей его кривой. При этом возникают особые точки: точки перемены возрастания-убывания кривизны, смены хода кривой, точки перегиба и самопересечения. Неконтролируемое возникновение особых точек снижает качество получаемого решения.

Задачей разрабатываемого нами направления вариативного дискретного геометрического моделирования на основе пространственных угловых параметров является создание единой методики формирования плоских и пространственных одномерных обводов с обеспечением заданных геометрических свойств и особых условий. Формируемая кривая представлена упорядоченным множеством принадлежащих ей точек и дифференциально-геометрическими характеристиками кривой. Кривая формируется сгущением, предполагающим определение для исходного точечного ряда промежуточных точек.

Такой подход позволяет отказаться от аналитического представления участков кривой и формировать обвод исходя из заданных геометрических свойств.

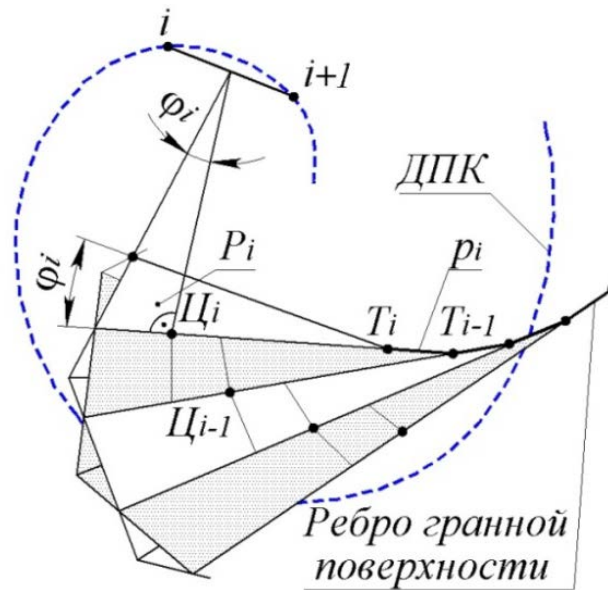
Для реализации задачи необходимо разработать критерии оценки геометрических характеристик дискретно представленной кривой линии.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Геометрические характеристики пространственной кривой линии могут определяться через параметры ее полярного торса [1]. Полярный торс является огибающей поверхностью нормальных плоскостей кривой линии. Ребро возврата полярного торса – геометрическое место соприкасающихся сфер кривой. Касательные к ребру возврата – оси кривизны, на которых расположены центры соприкасающихся окружностей. Таким образом, параметры полярного торса однозначно определяют кривизну, кручение, радиусы соприкасающихся сфер и динамику изменения их значений вдоль кривой.

Способ формирования одномерного обвода на основе дискретного аналога полярного торса предложен в [2]. Обвод формируется сгущением исходного точечного ряда по участкам постоянного хода, вдоль которых радиусы кривизны и соприкасающихся сфер монотонно возрастают или убывают. Кривую, соответствующую указанным требованиям, будем называть монотонной.

Аналог полярного торса – гранная полярная поверхность, образованная участками плоскостей ( $P_i$ ), перпендикулярных хордам, соединяющим последовательные исходные точки, и проходящих через середины хорд (рис. 1).



**Рис. 1. Формирование гранной поверхности перпендикулярных плоскостей**

Прямые пересечения перпендикулярных плоскостей ( $p_i$ ) являются аналогами осей кривизны формируемой кривой, а ломаная, образованная этими прямыми, представляет ребро возврата полярного торса.

Точки сгущения назначаются в плоскостях  $P_i$ , в результате чего получаем гранную полярную поверхность, состоящую из сколь угодно большого числа граней. В результате последовательных сгущений, в пределе, получим полярный торс, однозначно определяющий геометрические характеристики сформированного обвода.

**Формулирование цели исследования**

Определить требования к параметрам и расположению полярного торса, определяющего монотонную кривую линию с заданными геометрическими свойствами.

**Изложение основного материала исследования**

Рассмотрим кривую линию  $l$ , как траекторию движения точки  $M$ , принадлежащей нормальной плоскости  $N$ , обкатывающей полярный торс, ребро возврата которого – кривая правого хода (см. рис.2).

Геометрические характеристики кривой  $l$  определяются характеристиками ребра возврата полярного торса, направлением обкатывания торса плоскостью  $N$  и расположением точки  $M$  в этой плоскости.

На рис. 2 изображен момент, когда плоскость  $N$  касается полярного торса по прямой  $f$  – касательной ребра возврата в некоторой точке  $F$ .

Направление движения точки  $F$  вдоль ребра возврата определяется направлением обкатывания полярного торса плоскостью  $N$ . Ребро возврата разделяет полярный торс на две полости, которые сформированы полукасательными положительного и отрицательного направлений соответственно. Полукасательной положительного направления будем считать половину прямой  $f$ , в направлении которой направлен вектор скорости точки  $F$ .

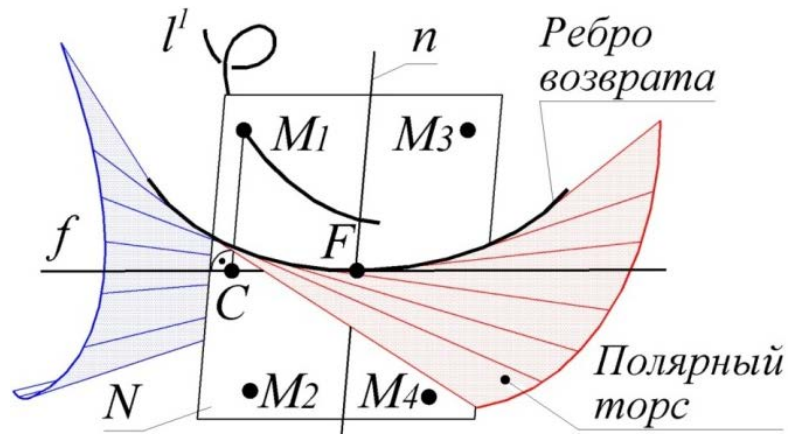


Рис. 2. Формирование монотонной кривой линии

Проведем в плоскости  $N$  прямую  $n$ , которая пересекает касательную  $f$  под прямым углом в точке  $F$ . Прямые  $f$  и  $n$  разделяют плоскость  $N$  на четыре части. В каждой четверти назовем точку –  $M^1, M^2, M^3, M^4$  и определим геометрические характеристики кривых линий  $l^1, l^2, l^3, l^4$ , которые являются траекториями движения этих точек. Механизм формирования характеристик кривой рассмотрим на примере линии  $l^1$ .

Пусть плоскость  $N$  перемещается таким образом, что ее четверть, в которой расположена точка  $M^1$  (первая четверть) накатывается на полость полярного торса, которая сформирована полукасательными положительного направления. Это означает, что на торс также накатывается четвертая четверть плоскости  $N$ , а вторая и третья четверти скатываются с него.

Для кривой  $l$  прямая  $f$  является осью кривизны, а точка  $F$  – центром соприкасающейся сферы (ССФ) в точке  $M$  [1]. Главная нормаль проходит через точку  $M$  перпендикулярно оси кривизны и пересекается с ней в центре соприкасающейся окружности (СО) – точке  $C$ .

Накатывание первой четверти плоскости  $N$  на полярный торс означает, что вдоль траектории движения точки  $M^1$  значения радиусов кривизны (расстояние  $|C, M|$ ) монотонно убывают.

Динамика изменения вдоль кривой  $l$  радиусов соприкасающихся сфер определяется расположением точки  $M$  относительно прямой  $n$ . Для кривой  $l^1$  механизм формирования радиусов соприкасающихся сфер показан на рис. 3.

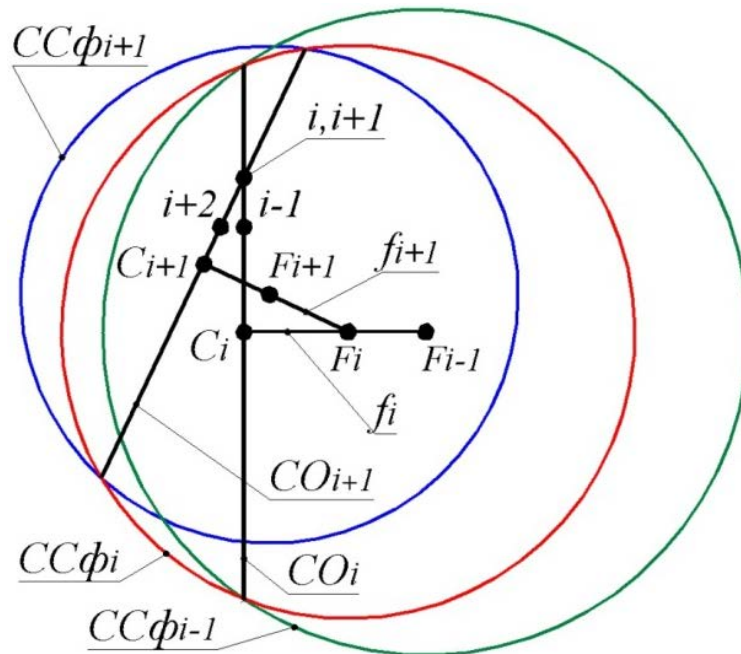


Рис. 3. Формирование геометрических характеристик кривой линии

$ССФ_i$ , определяемая бесконечно близкими точками  $i-1, i, i+1, i+2$ , изображена таким образом, что направление взгляда направлено вдоль касательной прямой  $t_i \equiv (i, i+1)$ . Соприкасающиеся окружности –  $СО_i$  (определяется точками  $i-1, i, i+1$ ) и  $СО_{i+1}$  ( $i, i+1, i+2$ ) будем считать расположенными на  $ССФ_i$ . Эти окружности получаем в пересечении  $ССФ_i$   $i$ -й и  $i+1$ -й соприкасающимися плоскостями –  $СП_i$  и  $СП_{i+1}$ , соответственно. Центр  $ССФ_i$  – точка  $F_i$ . Это точка пересечения осей кривизны, проходящих через центры кривизны  $C_i$  и  $C_{i+1}$ .  $ССФ_{i-1}$  определяется  $СО_i$  и бесконечно близкой точкой  $i-2$ , расположенной на кривой  $l$

за пределами  $CC\phi_i$ . Центр  $CC\phi_{i-1}$  – точка  $F_{i-1}$ , принадлежит оси кривизны  $(C_i, F_i)$ . При этом  $|C_i, F_i| < |C_i, F_{i-1}|$ . Соприкасающуюся окружность  $CO_{i-1}$ , которая определяется точками  $i-2, i-1, i$ , получаем в пересечении  $CC\phi_{i-1}$  и  $CP_{i-1}$ . При этом  $CP_{i-1}$  пересекает отрезок  $[C_i, F_{i-1}]$ . Таким образом, последовательные соприкасающиеся окружности определяют соприкасающуюся сферу, а последовательные соприкасающиеся сферы пересекаются по соприкасающейся окружности.

Ось кривизны  $f_i$  представлена как прямая, проходящая через принадлежащие ребру возврата полярного торса бесконечно близкие точки  $F_{i-1}$  и  $F_i$ . Соприкасающиеся сферы с центрами в этих точках пересекаются по соприкасающейся окружности с центром в точке  $C_i$ . Соотношение  $|C_i, F_{i-1}| > |C_i, F_i|$  означает убывание радиусов соприкасающихся сфер вдоль  $l^1$ .

Расположение последующих бесконечно близких точек  $i-3, i+4, \dots$  за пределами предыдущей соприкасающейся сферы обеспечивает монотонное изменение значений радиусов соприкасающихся сфер и окружностей:

$$\dots < R_{CC\phi_{i+1}} < R_{CC\phi_i} < R_{CC\phi_{i-1}} < \dots, \\ \dots < R_{CO_{i+1}} < R_{CO_i} < R_{CO_{i-1}} < \dots$$

Эта закономерность определяется взаимным положением последовательных  $CO$  и  $CC\phi$ , аналогичным показанному на рисунке. Кривая линия постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в одном направлении, расположена за пределами ее соприкасающихся сфер.

Рассмотрим ось кривизны  $f$  как прямую, обкатывающую ребро возврата полярного торса, а центр соприкасающейся сферы  $F$  как точку, перемещающуюся по прямой  $f$ . Вместе с точкой  $F$  вдоль оси кривизны перемещается и прямая  $n$  (см. рис.2). Тогда точки плоскости  $N$ , в направлении которых перемещается прямая  $n$ , в данный момент перемещаются по кривой, вдоль которой радиусы соприкасающихся сфер монотонно убывают.

Ход кривой  $l$  определяется ходом ребра возврата ее полярного торса и расположением в нормальной плоскости  $N$  точки  $M$ .

На рис. 3 бесконечно близкие оси кривизны  $f_i$  и  $f_{i+1}$  представлены как прямые, пересекающиеся в центре  $F_i$  соприкасающейся сферы. Тогда при накатывании нормальной плоскости на полярный торс главная нормаль  $n_i$  кривой  $l^1$ , перпендикулярная оси кривизны  $f_i$ , вращается относительно касательной к кривой в точке  $M_i$  стремясь занять положение  $n_{i+1}$ . При этом центр кривизны  $C_i$  удаляется от точки  $F_i$ , принадлежащей ребру возврата.

Рассмотренная схема показывает, что точка  $M$ , расположенная в четверти плоскости  $N$ , которая накатывается на полость полярного торса, образованную полукасательными положительного направления, перемещается по кривой  $l$ , ход которой совпадает с ходом ребра возврата ее полярного торса. Из этого следует, что  $l^1$  и  $l^3$  – кривые правого хода, а  $l^2$  и  $l^4$  – кривые левого хода.

Аналогичный анализ параметров, определяющих перемещение точек  $M^2, M^3, M^4$  позволяет установить характеристики соответствующих кривых линий:  $l^1$  (п,  $R : <, R_{cf} : <$ ) – кривая правого хода, вдоль которой радиусы кривизны ( $R$ ) и соприкасающихся сфер ( $R_{cf}$ ) убывают;  $l^2$  (л,  $R : >, R_{cf} : <$ ) – кривая левого хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей возрастают, а радиусы соприкасающихся сфер убывают;  $l^3$  (п,  $R : >, R_{cf} : >$ ) – кривая правого хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают;  $l^4$  (л,  $R : <, R_{cf} : >$ ) – кривая левого хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей убывают, а радиусы соприкасающихся сфер возрастают.

Если направление обкатывания полярного торса поменять на противоположное, точки  $M$  будут перемещаться по тем же траекториям, но в обратном направлении. Ход соответствующих кривых линий останется прежним, а динамика изменения радиусов соприкасающихся окружностей и сфер поменяется на противоположную. Следовательно, точка  $M^1$  превращается в  $M^3$  (при реверсном обкатывании движется по кривой с характеристиками  $l^3$ ),  $M^3$  – в  $M^1$ ,  $M^2$  – в  $M^4$ ,  $M^4$  – в  $M^2$ .

Анализ закономерностей расположения соприкасающихся окружностей и сфер вдоль кривой  $l^2$  ( $l^4$ ) показал, что линия постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в разных направлениях, расположена внутри своих соприкасающихся сфер.

Полярный торс, ребро возврата которого кривая линия левого хода, определяет другие четыре варианта сочетаний геометрических характеристик кривых линий:  $l^5$  (л,  $R : <, R_{cf} : <$ ),  $l^6$  (п,  $R : >, R_{cf} : <$ ),  $l^7$  (л,  $R : >, R_{cf} : >$ ),  $l^8$  (п,  $R : <, R_{cf} : >$ ).

Таким образом, существует восемь различных вариантов сочетаний направления возрастания радиусов кривизны, радиусов соприкасающихся сфер и хода вдоль монотонных кривых. Все варианты можно определить тремя параметрами:

- направление хода ребра возврата полярного торса кривой;
- направление обкатывания полярного торса нормальной плоскостью кривой;
- расположение в нормальной плоскости точки, описывающей при своем движении монотонную кривую.

Частным случаем монотонной кривой, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в одном направлении ( $l^1, l^3, l^5, l^7$ ), будем считать кривую постоянной кривизны. Кривая постоянной кривизны расположена за пределами своих соприкасающихся сфер, а ее линия центров кривизны совпадает с ребром возврата полярного тора.

Частным случаем монотонной кривой, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в разных направлениях ( $l^2, l^4, l^6, l^8$ ), будем считать сферическую кривую линии.

Любую кривую можно рассматривать как состоящую из участков монотонных кривых, состыкованных в особых точках.

К особым точкам первой группы отнесем точки стыковки монотонных кривых, определяемых одним полярным торсом. Это могут быть точки нулевого радиуса кривизны или точки в которых центр кривизны совпадает с центром соприкасающейся сферы.

Ко второй группе отнесем точки стыковки монотонных кривых, определяемых различными полярными торсами. Полярные торсы ( $ПТ_1$  и  $ПТ_2$ ) касаются по оси кривизны, соответствующей такой особой точке (см. рис. 4).

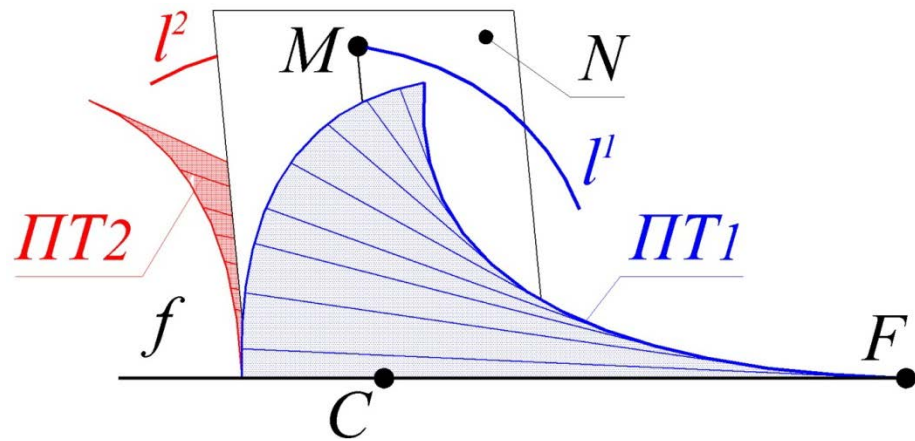


Рис. 4. Формирование особой точки пространственной кривой линии

#### Выводы

В результате проведенных исследований определены условия, при которых полярный торс определяет монотонную кривую линию – кривую постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер монотонно возрастают или убывают. Установлены возможные варианты сочетаний характеристик монотонных кривых и соответствующие параметры их полярных торсов. Полученные зависимости позволяют формировать на основе точечных рядов произвольной конфигурации одномерные обводы с заданными геометрическими свойствами и минимальным, по условиям задачи, числом особых точек.

#### Список использованной литературы

1. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия / М.Я. Выгодский. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.
2. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование одномерных обводов с заданными дифференциально геометрическими свойствами / Е.А. Гавриленко // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2015. – Вип. 3 (54). – С. 555-559.



УДК 514.18

О.М. ГУМЕН

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

С.Є. ЛЯСКОВСЬКА

Національний університет "Львівська політехніка"

Є.В. МАРТИН

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

**БАГАТОВИМІРНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ**

*Розглядаються задачі науки і техніки, для розв'язування яких використовується інструментарій прикладної багатовимірної геометрії із залученням багатовидів  $n$ -вимірних евклідових просторів. Представлений метод показано на прикладі створення моделі залежності  $n$ 'яти змінних. Метод є універсальним і може бути поширений на подані числами різної розмірності параметрів охоплюючі евклідові та проєктивні простори.*

*Ключові слова: багатовимірні простори, евклідові, проєктивні та фазові простори, багатопараметричні залежності, багатовиди.*

Е.Н. ГУМЕН

Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт"

С.Е. ЛЯСКОВСКАЯ

Национальный университет "Львовская политехника"

Е.В. МАРТЫН

Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности

**МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ**

*Рассматриваются задачи науки и техники, для решения которых применяется инструментарий прикладной многомерной геометрии с привлечением многообразий  $n$ -мерных евклидовых пространств. Представленный метод показан на примере создания модели зависимости пяти переменных. Метод является универсальным и может быть распространен на поданные числами разной размерности параметров охватывающие евклидовые и проективные пространства.*

*Ключевые слова: многомерные пространства, евклидовые, проективные и фазовые пространства, многопараметрические зависимости, многообразия.*

O.M. GUMEN

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"

S.E. LYASKOVSKA

National University "Lviv Polytechnic"

E.V. MARTYN

Lviv State University of Life Safety

**MULTIDIMENSIONAL GEOMETRY IN APPLIED PROBLEMS**

*Addressing the challenge of science and technology, for which the tools of applied multidimensional geometry are used involving manifolds of  $n$ -dimensional Euclidean spaces. The method of creating a model shown in the example is based on five variables. The method is generic and can be extended to represented by the numbers of the different dimensions of parameters covering Euclidean and projective spaces.*

*Keywords: multidimensional spaces, Euclidean, projective and phase spaces, multivariate dependences, manifolds.*

**Постановка проблеми**

Засоби прикладної багатовимірної геометрії посідають належне місце серед інструментарію розв'язування розмаїтих задач науки і техніки із змінними багатьма параметрами одночасно. Враховуючи обмежені можливості для проведення експериментальних досліджень, все більш актуальним є широке використання таких засобів.

У прикладній багатовимірній геометрії як геометричні моделі багатопараметричних залежностей різної фізичної природи використовують багатовиди. Найзручніший спосіб конструювання поверхонь передбачає виділення відповідної поверхні (багатовиду) із сімейства таких поверхонь.

Перспективним є поєднання математичних методів з наступною візуалізацією моделей, поданих гіперповерхнями та багатовидами охоплюючих просторів на основі геометричного інструментарію їх відображення. Створення моделей нових об'єктів та систем передбачає паралельний аналіз перебігу в них багатопараметричних процесів.

Так як все затребуванішою на практиці стає візуалізація складних багатопараметричних процесів із залученням апарату багатовимірної геометрії, то побудова багатовидів як моделей цих процесів набуває особливої актуальності при вирішенні практичних задач.

#### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Багатовимірна геометрія широко застосовується в математиці і фізиці для наочного представлення рівнянь з кількома невідомими, функцій декількох змінних і систем з декількома ступенями свободи. Та, звісно ж, цим не обмежується область її застосування у практиці. До безлічі завдань, що вирішуються за допомогою багатовимірної геометрії, відносяться завдання про знаходження більш вигідних варіантів перевезень, завдання про найвигідніші способи розкрою матеріалу, найбільш ефективні режими роботи підприємств, завдання про складання виробничих планів і т. п. [1]. Той факт, що ці завдання, як і більш складні прикладні технічні задачі, вирішуються геометрично (причому, як правило, в просторах, що мають розмірність більшу трьох) свідчить про важливість і своєчасність продовження досліджень у галузі багатовимірної геометрії в сучасному науковому світі. Необхідність використання  $n$ -вимірних просторів диктується також математичними завданнями фізики, хімії, біології та інших областей знання.

Прикладні завдання багатовимірної геометрії стосовно методів побудови багатовимірних просторів і геометричних образів у цих просторах ефективно вирішуються за допомогою  $n$ -вимірного моделювання. Розв'язання поставлених задач здійснюється за універсальним алгоритмом, що підходить для будь-якого числа вимірів, причому у вирішенні навіть найскладніших проблем отримується наочний результат.

Багато вчених зосереджувались на вивченні і розвитку багатовимірної геометрії. Великий вклад у поширення і розроблення положень прикладної багатовимірної геометрії зробили наші вчені: Гумен М.С., Ковальов С.М., Корчинський В.М., Найдіш В.М., Мартин С.В., Гумен О.М., Ляковська С.Є. та інші [2-12].

Так, професор М.С. Гумен розробив геометричні основи теорії багатовидів  $n$ -вимірного евклідового простору  $E^n$ , запропонувавши системний підхід до їх досліджень [2, 3, 6]. Результатом створених підходів до конструювання моделей складних багатопараметричних залежностей стали методи геометричного розв'язування технічних задач, зокрема, багатокритеріальних по кількох критеріях оптимізації одночасно.

Професором Найдішем В.М. використано засоби ортогонального і аксонометричного зображення геометричних об'єктів багатовимірних евклідових просторів при конструюванні сільськогосподарських механізмів [10]. Зокрема, запропоновано оригінальне розв'язання задачі зображення багатовимірної характеристики привідного двигуна такого механізму. Професор Ковальов С.М. розробив засади нової геометричної теорії формування багатовимірних дискретних геометричних об'єктів за допомогою геометричної інтерпретації математичного апарату числових послідовностей [5,12]. Професором Корчинським В.М. створено геометричні моделі та виконано дослідження багатопараметричних процесів формування просторових розподілів яскравості видових даних дистанційного зондування Землі [11]. Проф. Гумен О.М. показала можливість проєкціювання геометричних образів багатовимірного простору у підпростори нижчої розмірності при моделюванні проєктивних  $n$ -просторів стосовно дослідження перебігу нестационарних процесів у багатопараметричних системах візуалізацією гіперповерхонь фазових просторів [7,8]. Професор Мартин С.В. приділив увагу дослідженню геометрії комплексного простору стосовно формування областей стійкості та оптимізації параметрів регульованих систем [4,6]. К.т.н. Ляковська С.Є. дослідила геометричне моделювання багатопараметричних систем способом епюра  $n$ -простору [9].

Їх теоретичні напрацювання все ширше знаходять своє практичне застосування у конкретних прикладних задачах, що свідчить про тісний зв'язок науки з практикою. У сучасному баченні науковців багатовимірна геометрія тісно взаємодіє з іншими галузями науки. Моделювання перебігу різних процесів, створення моделей явищ і систем дозволяють унаочнити досліджувані багатопараметричні залежності, встановити певні закони впливу і механізми взаємодії між параметрами. А це необхідна передумова успішного розв'язання цілого ряду прикладних задач.

#### **Формулювання цілі дослідження**

Використання методів геометричного моделювання, особливо наочної візуалізації, стає необхідним для практичної роботи. Тому ціллю даної статті є розгляд таких задач науки і техніки, для розв'язування яких застосовується інструментарій прикладної багатовимірної геометрії.

#### **Виклад основного матеріалу дослідження**

Дослідження багатопараметричних технічних систем супроводжуються геометричними уявленнями багатовидів  $n$ -вимірних евклідових просторів, поширеними на утворені числами вищої розмірності евклідові та проєктивні простори. Геометричні інтерпретації особливо ефективні, якщо при проведенні досліджень враховувати постійність одного з параметрів, що дозволяє трактувати його значення як слід гіперплощини відповідного фазового простору.

Аналізуємо 3-вимірний багатовид 5-простору ( $n = 5; k = 3$ ). Визначається системою із двох ( $n - k = 2$ ) своїх проєкцій на координатних 2-, 3- або 4-вимірних підпросторах. Розмірність координатних підпросторів при цьому визначається кількістю змінних, між якими накладається зв'язок. Кількість проєкцій завжди

дорівнює кількості  $(n - k)$  зв'язків, що накладаються між змінними. У даному випадку повинні бути задані два такі зв'язки (два рівняння) між двома, трьома, чотирма (в одному з можливих сполучень) або змішано: двома і трьома, двома і чотирма, трьома і чотирма змінними. Нехай цей зв'язок заданий, наприклад, між двома парами змінних у вигляді:

$$\begin{cases} x_2 = f(x_1); \\ x_3 = f(x_2). \end{cases}$$

Тоді ці рівняння визначають у 5-вимірному просторі пару проектуючих гіперциліндрів, взаємний перетин яких дає 3-вимірний багатовид.

Аналогічно визначається 3-багатовид перетином відповідних пар гіперциліндрів при зв'язках між змінними в інших можливих сполученнях подібно розглянутому прикладу з чотирма змінними. На практиці частіше доводиться розв'язувати обернені задачі – для деякого 3-вимірного багатовиду знаходять систему описуючих його рівнянь або одержують графічне його зображення на епюрі. Для розв'язання цієї задачі скористаємося приведеними вище положеннями. Відносимо 3-багатовид до деякої натуральної системи координат  $Ox_1x_2x_3x_4x_5$  5-вимірного простору (рис. 1).

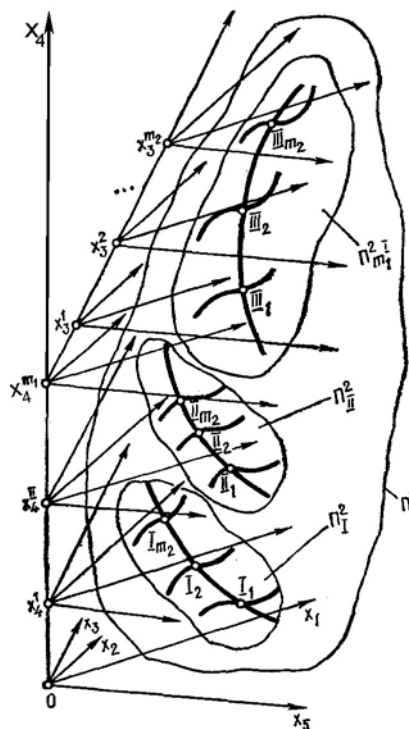


Рис. 1. Схема утворення 3-просторових каркасних ліній 3-вимірного багатовиду  $P^3$  5-вимірного простору

Виділимо каркас багатовиду у гіперплощинах рівня  $x_4 = x_4^i, x_4^ii, \dots, x_4^{mi}$ . Елементами цього каркасу являються 2-вимірні багатовиди  $P_1^2, P_2^2, \dots, P_m^2$  знайдені в січних гіперплощинах рівня. Для кожного з одержаних 2-багатовидів у утримуючих їх 4-вимірних гіперплощинах виділяються каркаси в 3-вимірних підпросторах рівня  $x_3 = x_3^i, x_3^{ii}, \dots, x_3^{mi}$ . Елементами каркасів 2-багатовидів є лінії  $I_1, I_2, I_m^2; II_1, II_2, II_m^2; III_1, III_2, III_m^2$ , відповідно, для 2-багатовидів  $P_1^2, P_2^2, \dots, P_m^2$ . Отже, лінії належать 3-вимірним підпросторам рівня, паралельним  $Ox_1x_2x_3$ .

Спроектуємо всі лінії каркасу разом із тими підпросторами рівня, що їх містять, на координатні площини. При цьому на підпростір  $Ox_1x_2x_3$  криві проектується без змін. Для однозначного задавання 3-просторової кривої достатньо мати дві її проекції на двовимірні координатні площини (дві із трьох площин її простору). Приймемо за такі площини, наприклад,  $Ox_1x_2$  і  $Ox_1x_3$ . Крім цих двох площин для визначеності кресленника, тобто для забезпечення однозначності завдання 3-багатовиду на епюрі, необхідно додати ще дві координатні площини, наприклад, площини  $Ox_2x_3$  і  $Ox_4x_5$ .

Для 3-багатовиду можна також будувати перетин підпросторами рівня і згущувати каркас, якщо цього вимагає конкретна прикладна задача.

Пропонований підхід до дослідження багатовидів дозволяє візуально представити досліджувану залежність у вигляді відповідного геометричного об'єкта та дає можливість порівняння його з еталонною

моделлю, розглядає з найбільш загальних позицій їхні властивості, дозволяє аналізувати зв'язки між змінними.

### Висновки

У розглянутому прикладі досліджувалася залежність п'яти змінних. Аналогічно у прикладній багатовимірній геометрії працює алгоритм розв'язку задач з моделюванням залежностей будь-якого числа змінних різної фізичної природи. Таким чином, використання багатовидів як геометричних моделей досліджуваних залежностей є універсальним і дозволяє глибше уявити складний механізм взаємозв'язків та наочно представити перебіг процесів у системі  $n$  змінних.

Дослідженням створених геометричних моделей при розв'язуванні багатопараметричних задач науки і техніки передують розроблення та вибір належного геометричного інструментарію. За сучасного динамічного технічного розвитку існує великий запит на продовження досліджень у цьому напрямку. Тому подальший розвиток прикладної багатовимірної геометрії буде скеровано саме на пошук та розроблення новітніх засобів, зокрема геометричних, моделювання об'єктів та систем.

### Список використаної літератури

1. Сиденко Л. Компьютерная графика и геометрическое моделирование / Л. Сиденко. – М.: Питер, 2009. – С.27-39.
2. Гумен Н.С. Геометрические основы теории многообразий евклидоваго  $n$ -пространства применительно к геометрическому моделированию многопараметрических систем: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / Гумен Н.С. – К., 1992. – 53 с.
3. Гумен М.С. Геометрична інтерпретація моделі комплексного простору / М.С. Гумен, Є.В. Мартин // Сучасні проблеми геометричного моделювання. Ч.1. – Харків: ХІПБ, 1998. – С.139-143.
4. Мартин Є.В. Геометрія комплексного простору стосовно формування областей стійкості та оптимізації параметрів регульованих систем: дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / Є.В. Мартин. – К., 2000. – 284 с.
5. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. / Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. – Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256 с.
6. Гумен Н.С. Применение многомерной геометрии при решении некоторых технических задач / Н.С. Гумен // Технология и автоматизация машиностроения. – К.: Техника, 1970. – В.6. – С. 18-25.
7. Гумен О.М. Моделювання проєктивних  $n$ -просторів багатопараметричних технічних систем: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / О.М. Гумен. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – 36 с.
8. Ванін В.В. Рациональні багатовиди як неевклідові проєктивні простори / В.В. Ванін, М.С. Гумен, О.М. Гумен // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – Вип.2. – К.: НТУУ "КПІ", 2006. – С.139-143.
9. Ляковська С.Є. Геометричне моделювання багатопараметричних систем способом епюра  $n$ -простору: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / С.Є. Ляковська. – К., 2011. – 284 с.
10. Найдыш В.М. Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / В.М. Найдыш. – М., 1983. – 33 с.
11. Корчинський В.М. Інваріантні геометричні моделі ідентифікації та аналізу проєкційних зображень: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / В.М. Корчинський. – К., 1999. – 32 с.
12. Ковальов С.М. Параметризація симплексів у багатовимірних просторах / С.М. Ковальов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 75. – С. 16-18.

УДК 519.85

А.Н. ДАНИЛИН, В.В. КОМЯК, В.М. КОМЯК, А.Н. СОБОЛЬ

Национальный университет гражданской защиты Украины

А.В. ПАНКРАТОВ

Институт проблем машиностроения НАН Украины

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНО-ПОТОЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЮДСКИХ И ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ**

*Предложены математическая модель индивидуально-поточного движения индивидов и подход, позволяющий свести поиск локального экстремума целевой функции к решению последовательности задач нелинейного программирования.*

*Ключевые слова: математическая модель, нелинейное программирование, оптимизация.*

О.М. ДАНИЛІН, В.В. КОМЯК, В.М. КОМЯК, О.М. СОБОЛЬ

Національний університет цивільного захисту України

О.В. ПАНКРАТОВ

Інститут проблем машинобудування НАН України

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ІНДИВИДУАЛЬНО-ПОТОЧНОГО РУХУ ЛЮДСЬКИХ ТА ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ**

*Запропоновано математичну модель індивідуально-поточного руху індивідів та підхід, який дозволяє звести пошук локального екстремуму цільової функції до розв'язку послідовності задач нелінійного програмування.*

*Ключові слова: математична модель, нелінійне програмування, оптимізація.*

A.N. DANILIN, V.V. KOMYAK, V.M. KOMYAK, A.N. SOBOLOV

National University of Civil Protection of Ukraine

A.V. PANKRATOV

Institute for Mechanical Engineering Problems of National Academy of Sciences of Ukraine

**MATHEMATICAL MODEL OF INDIVIDUAL-FLOW FOOT TRAFFIC AND TRAFFIC FLOWS**

*The mathematical model of individual-stream motion of individuals and an approach that is reduced the search of a local extremum of objective function to the solving of problem's sequence of the nonlinear programming are offered.*

*Keywords: mathematical model, nonlinear programming, optimization.*

**Постановка проблеми**

В настоящий момент моделирование движения потоков людей и транспортных средств представляет собой область науки, которая интенсивно развивается благодаря процессу мировой глобализации и увеличению численности населения на Земле. Как известно, крупные города привлекают к себе все большее количество иммигрантов, что приводит к увеличению нагрузки на транспортную систему городов и усложняет процессы городского планирования. Также следует отметить, что крупные современные города характеризуются наличием большого количества высотных зданий, при этом вопросы обеспечения безопасной жизнедеятельности в этих зданиях относятся к числу приоритетных. Одним из подходов к повышению уровня безопасности пребывания людей в высотных зданиях является моделирование движения людских потоков с целью минимизации времени эвакуации из данных зданий. В связи с этим, необходимость расчета параметров людских и транспортных потоков породила особый интерес к разработке геоинформационных систем специального назначения: симуляторов толпы, дающих возможность измерения, оптимизации и визуализации подобных потоков. Таким образом, существует актуальная научно-прикладная проблема моделирования индивидуально-поточного движения людских и транспортных потоков. Одним из шагов, направленных на решение данной проблемы, является разработка соответствующей математической модели.

**Анализ последних достижений и публикаций**

Наличие обширной и разнообразной эмпирической базы натурных наблюдений за людскими потоками в зданиях различного назначения, на которую ориентировались теоретические исследования [1–2], привело к необходимости теоретического обоснования зависимостей между параметрами людских потоков. В этих же работах [1–2] был предложен графоаналитический метод определения параметров людских потоков который, несмотря на трудоемкость для проектной практики, недостаточно полно отражает словесное описание процесса движения людей.

В связи с этим, появилась проблема математического описания зависимостей между параметрами людских потоков и описания изменений состояний потока (его перемещений) в пространстве. Трудности моделирования людских потоков и незнание их закономерностей привело к попыткам подмены процессов движения реальных людских потоков моделями процессов иной физической природы. Так, например, моделируют параметры людских потоков, используя вместо них поток заявок или гидроанalogию [3–4]. Возможны и другие аналогии, которые реализованы при помощи соответствующих компьютерных программ [5]. Указанные подходы получили свою оценку в научной литературе: "Одних интересует структура и закономерности явления, приводящие к наблюдаемому результату, других – только сами результаты. Первые, моделируя, пытаются воспроизвести структуру и закономерности явления, вторые – только результаты, не вдаваясь в реальные механизмы их появления" [6].

В настоящее время одними из наиболее распространенных являются такие программные продукты:

– "Флоутек" [7], созданный на основе упрощенных аналитической и имитационно-стохастической моделей;

– "Эватек" [8], в котором реализуется индивидуально-поточная модель движения людских потоков.

Следует отметить индивидуально-поточную модель движения людских потоков, разработанную ВНИИПО МЧС России [9]. Так, результаты сравнения моделей, на основе которых был разработан программный комплекс "Флоутек", с индивидуально-поточной моделью говорят о том, что использование индивидуально-поточной модели приводит к определению таких параметров процесса эвакуации, которые неадекватны требуемым при вероятности эвакуации, равной 0,999 (показано на зависимостях плотности потока от времени прохождения) [9].

На основании этих же исследований можно сделать вывод о том, что в настоящее время отсутствует модель индивидуально-поточного движения индивидов, адекватная реальному потоку. Интерес к данной модели обоснован также необходимостью моделирования гетерогенных потоков, в которых разные группы людей (транспортных средств) имеют различные цели и характеристики.

#### Формулирование цели исследования

Целью статьи является построение математической модели индивидуально-поточного движения потоков людей (транспортных средств) и разработка подхода к ее реализации.

#### Изложение основного материала исследования

*Постановка задачи.* Пусть исходные данные о путях движения индивидов задаются в виде, представленном на рис. 1.

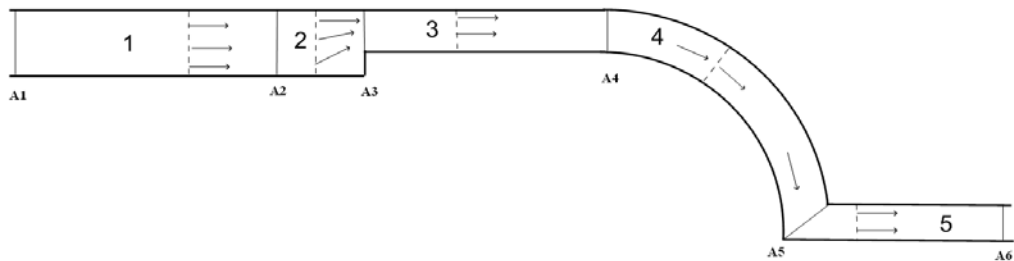


Рис. 1. Представление пути движения

Путь разделен на области, пронумерованные, соответственно,  $1, 2, \dots, m$  (для данного примера  $m = 5$ ) и ограниченные разделителями  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$ . Каждая область характеризуется одинаковым законом формирования основного направления движения и видом движения попавших в неё людей. Рассматриваются два вида движения – по прямой (области 1 – 3, 5) и по дуге окружности (область 4).

Для определения основного направления движения обозначим  $m$ -ую область через  $\Omega_m$ , при этом разделитель  $A_m$  осуществляет трансляцию для областей с прямолинейным видом движения или же перемещается с вращением для областей с круговым видом движения таким образом, чтобы ему принадлежала анализируемая точка. В случае, если коридор в области равномерно изменяет свою ширину, то соответствующим образом меняется длина отрезка-разделителя.

Для областей, в которых реализуется прямолинейное движение, перемещение из анализируемой точки представляется в виде вектора, соединяющего данную точку с точкой на соответствующем разделителе (с учетом коэффициента гометегии). Определение основного направления движения для этого случая наглядно проиллюстрировано на рис. 1 во второй области. Для определения основного направления движения в области  $\Omega_4$  используется соединение вышеуказанных точек разделителей дугами окружностей.

Далее производится случайное размещение индивидов в области движения (или непосредственно в области, или же за дверьми в прилегающих помещениях), причем характеристики индивидов подчинены нормальному закону распределения.

Не теряя общности рассуждений, предположим, что каждый индивид представляется в виде эллипса, большая полуось которого перпендикулярна к направлению движения. Для каждого из индивидов, поступивших в область движения, на каждом шаге (с заданным временным интервалом, например, 1 сек.) определяется основное направление и вид движения, после чего (возможно) вносятся небольшие индивидуальные изменения характеристик (скорости, направления, ускорения и т.п.). Угол поворота эллипса определяется между перпендикуляром к большой полуоси и вектором основного направления движения.

Следующий шаг – составление системы неравенств, обеспечивающей как непересечение всех эллипсов, моделирующих индивидов, так и их принадлежность области движения. Целевая функция в данном случае представляет собой максимум совокупного движения (пройденного всеми индивидами суммарного расстояния). Таким образом, полученная задача нелинейного программирования может быть решена при помощи солвера IPOPT. Данный процесс является итерационным и завершается после выхода индивидов из заданной области.

Очевидно, что для реализации предлагаемого подхода существует необходимость в аналитическом представлении условий непересечения эллипсов между собой, а также условий непересечения эллипсов с кругами и эллипсов с полуплоскостями [10–11].

Рассмотрим математическую модель индивидуально-поточного движения потока людей на примере задачи эвакуации.

Пусть область эвакуации не имеет круговых участков (для упрощения выкладок) и на  $k$ -ой итерации в области эвакуации  $\Omega_m$  находится  $N_k$  человек с параметрами размещения  $u_{ki} = (x_{ki}, y_{ki}, \theta_{ki})$ ,  $i = 1, \dots, N_k$ , где  $(x_{ki}, y_{ki})$  – координаты размещения начала локальной системы координат (текущая точка), а  $\theta_{ki}$  – угол поворота  $i$ -ого эллипса  $E_i$  с размерами полуосей  $(a_i, b_i)$ , служащего моделью  $i$ -ого человека. Для каждой текущей точки с координатами  $(x_{ki}, y_{ki})$  определяется вектор скорости  $\vec{v}_{ki} = (v_{ki,x}, v_{ki,y})$ .

Тогда математическая модель подзадачи на  $k$ -ой итерации может быть сформулирована в виде поиска максимума совокупного движения людей, находящихся в области эвакуации, т.е.

$$\max_{u \in W_k \subset R^n} F(u), \quad F(u) = \Delta t \sum_{i=1}^{N_k} |\vec{v}_{ki}|, \quad (1)$$

$$u = (x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2, \dots, x_{N_k}, y_{N_k}, \theta_{N_k}),$$

на области допустимых решений  $W_k$ , заданной системой ограничений:

$$x_i = x_{ki} + v_{ki,x} \Delta t, \quad (2)$$

$$y_i = y_{ki} + v_{ki,y} \Delta t, \quad (3)$$

$$\theta_i = \theta_{ki} + \Delta \theta_{ki}, \quad (4)$$

$$\Phi_{ij}(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N_k - 1, \quad j = i + 1, \dots, N_k, \quad (5)$$

$$\Phi_i(x_i, y_i, \theta_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N_k, \quad (6)$$

$$0 < \Delta t \leq 1, \quad (7)$$

где  $n = 3N_k$ ,  $\Phi_{ij}(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \geq 0$  – условие непересечения эллипсов  $E_i$  и  $E_j$  [10],  $\Phi_i(x_i, y_i, \theta_i) \geq 0$  – условие принадлежности эллипса  $E_i$  области  $\Omega_m$  [11],  $\Delta t$  – шаг по времени,  $\Delta \theta_{ki} = \hat{\theta}_{ki} - \theta_{ki}$ ,  $\hat{\theta}_{ki}$  – угол поворота эллипса в точке  $(x_{ki} + v_{ki,x} \Delta t, y_{ki} + v_{ki,y} \Delta t)$ , поскольку большая полуось эллипса, транслированного в указанную точку, должна быть перпендикулярна основному направлению движения для этой точки.

*Замечание.* При наличии круговых участков сущность модели (1)–(7) не меняется, но усложняется ее запись, так как добавляются условия движения эллипсов по дугам окружностей.

Поскольку при построении функций вида (5) и (6) используются операции максимума и минимума [10], то задача (1)–(7) относится к задачам негладкой оптимизации. По способу построения область допустимых решений  $W$  может быть представлена в виде объединения  $\eta$  ( $\eta$  – некоторое большое число, зависящее от количества и вида объектов) подобластей вида

$$W_k = \bigcup_{s=1}^h W_{ks}, \tag{8}$$

где  $W_k$  описывается системой неравенств с гладкими функциями в левой части.

Представление области допустимых решений в виде объединения подобластей (8) позволяют свести поиск локального экстремума задачи (1)-(7) к решению последовательности задач нелинейного программирования при помощи следующего алгоритма.

1. Обозначим начальную точку для задачи (1)-(7):

$$u^l = (x_{k1}, y_{k1}, \theta_{k1}, x_{k2}, y_{k2}, \theta_{k2}, \dots, x_{kN_k}, y_{kN_k}, \theta_{kN_k}), l = 0$$

(она принадлежит  $W_k$  по способу построения).

2. Генерируем по координатам начальной точки  $u^l$  подобласть  $W_{ks_l}$  из (8), содержащую эту точку. Если данные области уже исследованы, процесс решения закончен.
3. Начиная движение из точки  $u^l$ , находим локальный максимум функции  $F(u)$  на области  $W_{ks_l}$ . Обозначаем полученную точку локального экстремума  $u^{l+1}$ .
4. Принимаем  $l = l + 1$  и переходим к шагу 2.

Поскольку возможные перемещения эллипсов определяются средней скоростью движения человека за секунду, то они сравнимы с размерами эллипсов. Следовательно, количество подобластей, которые достаточно исследовать, на несколько порядков меньше теоретического значения величины  $\eta$ . Следует также учесть, что исходной является задача моделирования движения потока, а не задача получения с заданной точностью локального экстремума задачи (1)-(7). Практические исследования показали, что при решении вполне достаточно ограничиться двумя-тремя итерациями вышеизложенного алгоритма.

Декомпозиция задачи (1)-(7). При моделировании движения сотен людей процесс решения задачи (1)-(7) будет весьма ресурсоемким, поскольку ограничения (5) состоят из  $C_{N_k}^2$  неравенств, включающих в себя Phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей [11]. С другой стороны, следует отметить, что система (2)-(4) накладывает довольно жесткие ограничения на возможные положения эллипса (рис. 2).

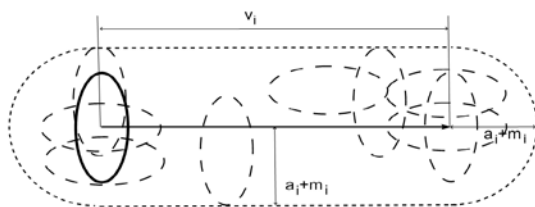


Рис. 2. Вид области, в которой гарантированно находится эллипс в ходе решения задачи (1)-(7).

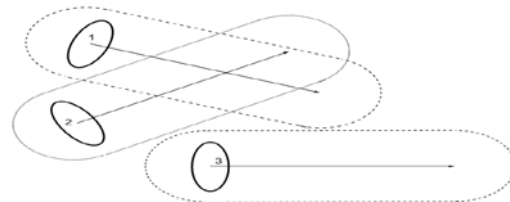


Рис. 3. Учет области возможного расположения эллипсов

Таким образом, при решении задачи можно исключить из (5) условия взаимного непересечения эллипсов, соответствующие области которых не пересекаются. Для ситуации, показанной на рис. 3, условия взаимного непересечения первого и третьего, а также второго и третьего эллипсов можно игнорировать.

Следует отметить, что условие непересечения областей пары эллипсов  $E_i$  и  $E_j$  совпадает с условием расположения отрезков с вершинами  $(x_{ki}, y_{ki})$ ,  $(x_{ki} + v_{ki,x}\Delta t, y_{ki} + v_{ki,y}\Delta t)$ , и  $(x_{kj}, y_{kj})$ ,  $(x_{kj} + v_{kj,x}\Delta t, y_{kj} + v_{kj,y}\Delta t)$  на расстоянии, не меньшем  $\rho_{ij} = a_i + m_i + a_j + m_j$ , где  $m_i$  и  $m_j$ , соответственно, возможные уклонения эллипсов  $E_i$  и  $E_j$  от основного направления движения.

Подобный подход используется для условий размещения эллипсов в прямолинейных участках области  $\Omega_m$ . Для круговых участков области рассматриваются условия нахождения на заданном расстоянии двух дуг или же дуги с отрезком.

Однако при увеличении значений  $N_k$  размерность задачи может оказаться слишком большой. Но при имитации эвакуации по коридорам, когда длина области значительно превышает ее ширину, легко разбить задачу на подзадачи меньшей размерности и решить ее приближенно. Для этого область эвакуации разбивается на зоны, и поочередно параметры размещения объектов во всех зонах, кроме одной,



фиксируются. Так, для ситуации, представленной на рис.1, вначале фиксируются параметры размещения эллипсов для всех зон, кроме пятой. После решения подзадачи для пятой зоны параметры находящихся в ней объектов фиксируются и решается оптимизационная подзадача для четвертой зоны. И так далее.

Предложенные средства декомпозиции позволяют существенно снизить ресурсоемкость процесса оптимизации целевой функции (1) и использовать предложенный подход для моделирования широкого спектра ситуаций.

#### Выводы

В статье предложена математическая модель индивидуально-поточного движения людских и транспортных потоков, позволяющая имитировать возникновение заторов и заблаговременно вносить изменения как в существующие, так и в проектируемые объекты городского планирования. Дальнейшие исследования будут направлены на разработку методов, алгоритмического и программного обеспечения для моделирования индивидуально-поточного движения.

#### Список использованной литературы

1. Предтеченский В.М. Проектирование зданий с учетом организации движения людских потоков / В.М. Предтеченский, А.И. Милинский. – М.: Стройиздат, 1969. – 248 с.
2. Предтеченский В.М. Проектирование зданий с учетом организации движения людских потоков / В.М. Предтеченский, А.И. Милинский. – М.: Стройиздат, 1979. – 375 с.
3. Таранцев А.А. Определение параметров людского потока при свободном движении // Пожаровзрывобезопасность. – 2004. – Т. 13. – № 5. – С. 64–69.
4. Таранцев А.А. Об одной задаче моделирования эвакуации с использованием теории массового обслуживания // Пожаровзрывобезопасность. – 2002. – №3. – С. 34–37.
5. Холщевников В.В. Обзор компьютерных программ моделирования эвакуации зданий и сооружений / В.В. Холщевников, Д.А. Самошин, Н.Н. Галушка // Пожаровзрывобезопасность. – 2002. – Т. 11. – № 5. – С. 40–49.
6. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / Р. Шеннон. – М.: Мир, 1978. – 418 с.
7. Karkin I.N. Flowtech VD – computer-simulation method from evacuation calculation / I.N. Karkin, A.P. Parfenenko // International Scientific and Technical Conference Emergency Evacuation of People from Buildings. – Warsaw, 2011. – P. 111–118.
8. Валидация и верификация эвакуационной модели СИТИС: Эватек. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://sitis.ru/doc/2502%20Эватек%20валидация%20и%20верификация.pdf>.
9. Холщевников В.В. Сопоставление различных моделей движения людских потоков и результатов программно-вычислительных комплексов / В.В. Холщевников, А.П. Парфененко // Пожаровзрывобезопасность. – 2015. – Т. 24. – №5. – С. 68–74.
10. Стоян Ю.Г. Полный класс Ф-функций для базовых двумерных  $\varphi$ -объектов / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова, Н.И. Чернов, А.В. Панкратов // Доп. НАН України. – 2010. – № 12. – С. 25–30.
11. Панкратов А.В. Phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей / А.В. Панкратов // Радиоэлектроника и информатика. – 2015. – 2(69). – С. 6–9.

УДК 515.18 + 528.74

В.М. КОРЧИНСКИЙ

Днепропетровский национальный университет  
имени Олеса Гончара**ИНФОРМАЦИОННО-ГРАФИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ОБРАБОТКИ  
МНОГОМЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО  
ЗОНДИРОВАНИЯ**

*Предложена информационная технология обработки многомерных цифровых сигналов дистанционного зондирования Земли (на примере многоспектральных видовых данных), обеспечивающая независимую обработку данных различных спектральных каналов и редукцию их размерности без потери информации и с контролируемым уровнем ее потерь.*

*Ключевые слова: растровое изображение, ортогонализация, информативность, дискретное ортогональное преобразование, развертка Пеано-Гильберта.*

В.М. КОРЧИНСКИЙ

Дніпропетровський національний університет  
імені Олеса Гончара**ИНФОРМАЦИОННО-ГРАФИЧНА ТЕХНОЛОГІЯ ОБРОБКИ БАГАТОВИМІРНИХ ЦИФРОВИХ  
ДАНИХ ДИСТАНЦІЙНОГО ЗОНДУВАННЯ**

*Запропонована інформаційна технологія оброблення багатовимірних цифрових сигналів дистанційного зондування Землі (на прикладі багатоспектральних видових даних), що забезпечує незалежну обробку даних різних спектральних каналів та редукцію їх вимірності без втрати інформації й з контрольованим рівнем її втрат.*

*Ключові слова: растрове зображення, ортогоналізація, інформативність, дискретне ортогональне перетворення, розгортка Пеано-Гільберта.*

V.M. KORCHINSKY

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

**INFORMATIONAL-GRAPHIC TECHNOLOGY OF PROCESSING THE MULTIDIMENSIONAL  
REMOTE SENSING DATA**

*The information technology for processing of the many-dimensional digital signals of remote sensing of Earth (on an example of the multispectral images), providing independent data processing of various spectral channels and a reduction of their dimension without the information loss and with controllable level of its losses is offered.*

*Keywords: the raster image, orthogonalization, selfdescriptiveness, discrete orthogonal transformations, Peano-Gilbert development.*

**Постановка проблеми**

Современные средства дистанционного зондирования Земли с аэрокосмических носителей, формируют цифровые данные, зафиксированные в значительном количестве спектральных интервалов электромагнитного излучения – носителя видовой информации. Совокупность таких данных образует многомерный геометрический объект; применительно к видовой информации – многоспектральное изображение (МСИ) распределений яркости зафиксированных изображений образует многомерный геометрический объект – многоспектральное изображение (МСИ). Многомерные данные, представляющие фиксированный материальный объект, зафиксированные в различных спектральных интервалах (применительно к МСИ – компоненты многоспектрального изображения), физически взаимосвязаны, вследствие чего какая-либо обработка лишь одной из его составляющих влечет за собой изменения в представлении иных составляющих, количественное описание которых затруднено из-за неполной информации о передаточных характеристиках датчика информации. Другой фактор, усложняющий интерпретацию многомерных данных, является следствием необходимости обработки значительных объемов содержащейся в них информации. Поэтому актуальна проблема редукции размерности МСИ (сжатия информации) как с возможностью полного восстановления данных, так и с незначительной потерей содержащейся в них информации, несущественной для достоверной интерпретации полученных изображений.

### Анализ публикаций

Современные аппаратные средства дистанционного зондирования фиксируют данные, полученные в различных спектральных интервалах, в цифровом виде (применительно к МСИ – в растровом формате). Основной метод редукции размерности таких данных состоит в векторизации этих составляющих, которая сводится к аппроксимации распределений яркости исходных растровых изображений совокупностью графических примитивов, которая, однако, не обеспечивает взаимно-однозначного соответствия между точечным представлением первичного растрового изображения и его визуализацией в терминах векторной графики [1]. Среди альтернативных подходов к проблеме снижения размерности первичных видовых данных, базирующихся на ликвидации корреляционной связи между распределениями яркости изображений отдельных спектральных каналов, отметим метод главных компонент [2, 3]. Применение МГК в такой постановке требует значительных вычислительных ресурсов и может быть связано с утратой вычислительной устойчивости [4].

Наиболее распространенные в настоящее время методы компрессии (сжатия) первичных видовых данных базируются на дискретном косинусном преобразовании, преобразованиях Уолша-Адамара и Хартли [5], дискретных ортогональных преобразованиях, определенных на развертках двумерных сигналов типа Пеано-Гильберта [6].

### Формулировка целей статьи

Цель статьи состоит в разработке метода информационного координатного описания МСИ, обеспечивающего ортогонализацию двумерных векторных представлений отдельных спектральных составляющих, и на этой основе – двух способов компрессии МСИ: без утрат информации при восстановлении и с минимизацией информационных потерь и обеспечением контролируемого уровня достоверности тематического анализа изображений.

### Основная часть

В данной работе предложен альтернативный подход к компрессии многоспектральных данных, базирующийся на многомерном векторном представлении МСИ, предложенном в [7].

Посредством упорядочения растровых представлений изображений каждого спектрального канала вдоль строк (либо столбцов), формируются многомерные векторы  $\mathbf{x}_{nm}^{(i)}$ , где  $i = \overline{1, k}$ ,  $k$  – количество спектральных составляющих МСИ;  $n, m$  – размерности раstra по горизонтальной и вертикальной осям изображения. Множество полученных векторов образует матрицу  $\mathbf{M}_{nm \times k}$ , ортогонализация столбцов которой производится посредством ее сингулярного представления. Для оценки информационной значимости ортогонализированных изображений использовались их информационные энтропии. Компрессия данных в обеспечением их полной реконструкции осуществлялась на основе многомерной развертки Пеано-Гильберта [6]. Реконструкция распределений яркости МСИ после исключения информационно малозначимых компонент реализуется операциями, обратными выполненным на этапе ортогонализации.

На рис. 1–6 приведены изображения шести спектральных каналов МСИ, зафиксированные в существенно различных спектральных диапазонах, с указанием соответствующих длин волн излучения – носителя видовой информации. Информационные энтропии ортогонализированных изображений спектральных каналов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Канал	0.52 мкм- 0.60 мкм	0.63 мкм- 0.69 мкм	0.78 мкм- 0.86 мкм	1.60 мкм- 1.70 мкм	2.15 мкм- 2.19 мкм	2.36 мкм- 2.43 мкм
Энтропия, бит	2.4614	0.2723	0.1169	1.0756	0.2473	1.5921

Изображения спектральных каналов 0.63 мкм - 0.69 мкм, 2.15 мкм - 2.19 мкм, 2.36 мкм - 2.43 мкм являются наименее значимыми в информационном отношении. После их исключения была проведена реконструкция МСИ, результат которой для каналов 0.52 мкм – 0.60 мкм и 2.36 мкм – 2.43 мкм представлен на рис. 7–8.

Нетрудно видеть, что исключение ряда ОИСК незначительно сказалось на виде реконструированных изображений при практическом сохранении их информационной значимости. Между тем, объем МСИ после редукции его размерности уменьшился на 34 %.

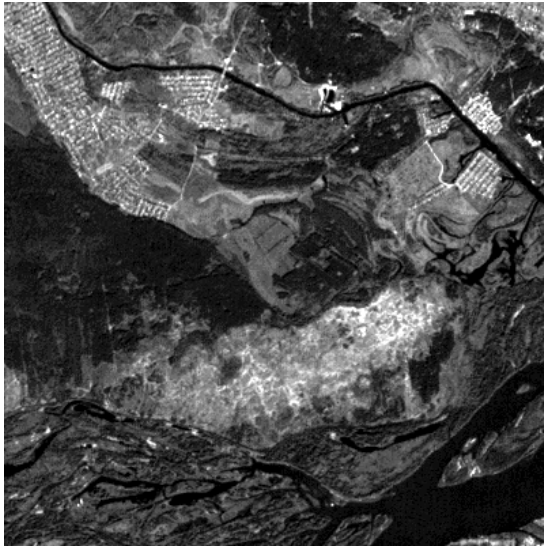


Рис. 1. Изображение канала 620 нм - 670 нм

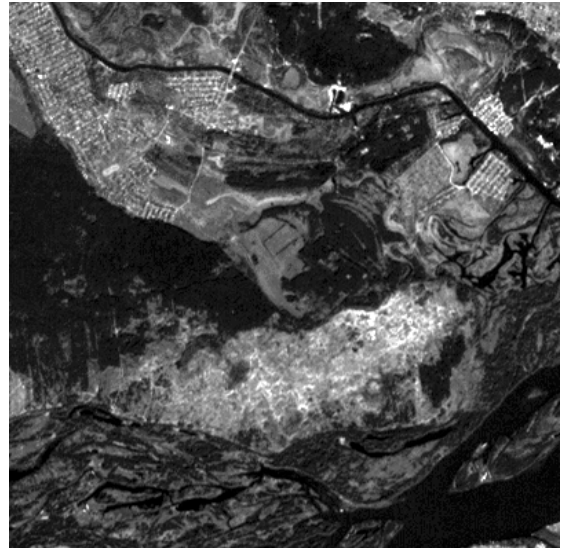


Рис. 2. Изображение канала 841 нм - 846 нм

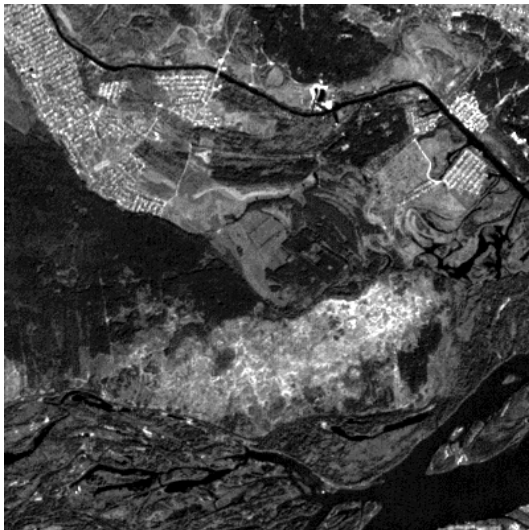


Рис. 3. Изображение канала 469 нм - 965 нм

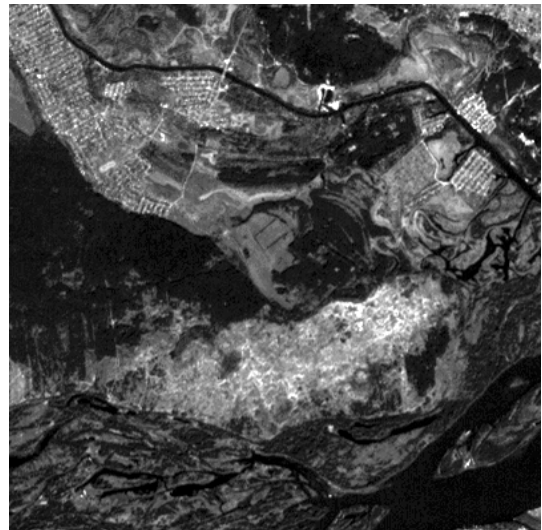


Рис. 4. Изображение канала 965 нм - 81060 нм

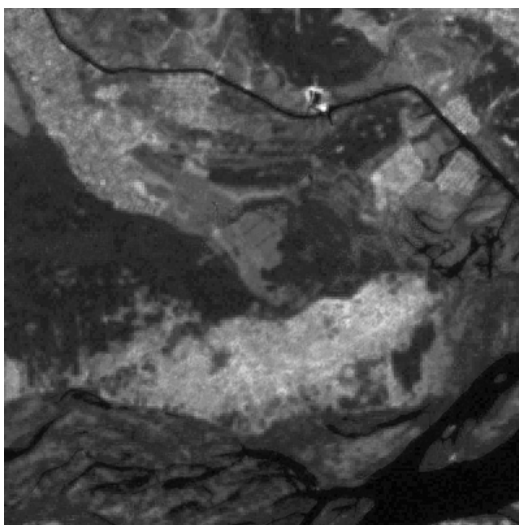


Рис. 5. Изображение канала 10.225 мкм – 12.334 мкм

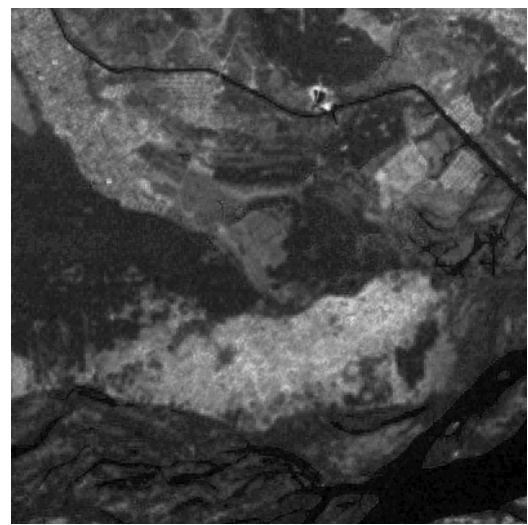


Рис. 6. Изображение канала 14.235 мкм – 14.3845 мкм



Рис. 7. Реконструированное изображение 1

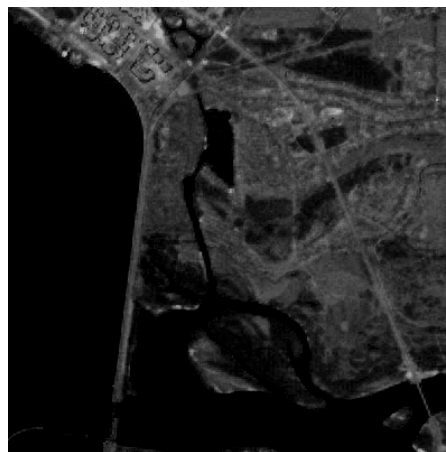


Рис. 8. Реконструированное изображение 2

### Выводы

В работе предложен эффективный метод снижения размерности первичных видовых данных ДЗЗ, зафиксированных в растровых форматах компьютерной графики. В сравнении с известными способами редукции размерности первичных видовых данных метод практически сохраняет информационную значимость редуцированных изображений, существенную для их тематической интерпретации.

Перспективы дальнейших исследований по проблематике данной работы связаны с совмещением в одном графическом объекте изображений различных спектральных каналов МСИ с различным пространственным и радиометрическим разрешением.

### Список использованной литературы

1. Герцелян Д. Векторизация растровых изображений / Д. Герцелян // Пространственные данные. – 2009. – № 3. – С. 36-43.
2. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
3. Muresan D.D. Adaptive Principal Components and Image Denoising / D.D. Muresan // Proceedings 2003 International Conference on Image Processing (ICIP). – 2003. – Vol. 1. – P. 101-104
4. Россиев А.А. Итерационное моделирование неполных данных с помощью многообразий малой размерности / А.А. Россиев. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2005. – 256 с.
5. Gonzalez R.C. Digital Image Processing / R.C. Gonzalez, R.E. Woods. – N.-Y.: Prentice Hall. – 464 p.
6. Федосеев В.А. Компрессия изображений с помощью дискретных ортогональных преобразований, определенных на развертках двумерных сигналов / В.А.Федосеев // Компьютерная оптика. – 2005. – № 28. – С. 132-135.
7. Корчинский В.М. Многомерное векторное представление распределений яркости многоспектральных растровых изображений дистанционного зондирования Земли / В.М.Корчинский // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон, 2014. – № 3 (50). – С. 90-93.

УДК 514.18

В.А. ЛЕБЕДЕВ, А.В. НАЙДЫШ, Н.А.РУБЦОВ

Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

**ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ  
ДИСКРЕТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ УГЛОВ СГУЩЕНИЯ**

*В работе рассмотрены особенности вычислительной реализации метода вариативного дискретного геометрического моделирования на основе углов сгущения.*

*Ключевые слова: углы сгущения, интерполяция, угловая параметризация, моделирование, дискретно представленная кривая (ДПК), сопроводительная ломаная линия (СЛЛ).*

В.О. ЛЕБЕДЕВ, А.В. НАЙДИШ, М.О.РУБЦОВ

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

**ОСОБЛИВОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТА ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ДИСКРЕТНОЇ  
ІНТЕРПОЛЯЦІЇ НА ОСНОВІ КУТІВ СГУЩЕННЯ**

*У роботі розглянуті особливості обчислювальної реалізації методу варіативного дискретного геометричного моделювання на основі кутів згущення.*

*Ключові слова: кути згущення, інтерполяція, кутова параметризація, моделювання, дискретно представлена крива (ДПК), супровідна ламана лінія (СЛЛ).*

V.O. LEBEDEV, A.V.NAYDYSH, N.A.RUBCOV

Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmelnytsky

**FEATURES COMPUTERS AND SOFTWARE IMPLEMENTATION DISCRETIONARY  
INTERPOLATION BASED ON THE CORNER CONDENSED**

*The paper discusses the features of computer implementation of the method of variable discrete geometric modeling based thickening angles.*

*Keywords: thickening angles, interpolation, angular parameterization, simulation, discretely presented curve (DPC), accompanying broken line (ABL).*

**Постановка проблемы**

Сгущение (дискретная интерполяция) дискретно представленных кривых (ДПК) является одним из важнейших направлений развития дискретного геометрического моделирования (ДГМ). Обладая значительными преимуществами по сравнению с непрерывными методами интерполяции, методы сгущения не зависят от системы координат представления ДПК, их расположения и геометрических характеристик (наличие выпуклых, переходных участков, особых точек и т.д.).

Предлагаемая работа является продолжением направления исследований в рамках вариативного дискретного геометрического моделирования, а именно в рамках использования соотношений между угловыми параметрами в процессе сгущения.

Продолжение исследований позволяет повысить точность моделирования благодаря тому, что полученная геометрическая модель кривой является неосциллирующей, сокращаются сроки проектирования, что очень важно при решении прикладных задач, обусловленных производством.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Ближайшими по тематике работами, где представлена вычислительная реализация методов дискретной интерполяции (сгущение) дискретно представленных кривых с использованием угловых параметров, являются диссертационные исследования Лебедева В.А [1]. Эти исследования были продолжены в работе [2]. При этом были получены важные результаты, разработано программное обеспечение для расчета точек сгущения и визуализации результатов интерполяции. При использовании созданного программного обеспечения достигается высокая точность, возможность локальной коррекции при отсутствии осцилляции. Однако при этом не уделено должного внимания автоматизации процесса моделирования и его адаптации (упрощению инженерно-расчетных методик для решения прикладных задач в условиях производства).

**Формулирование цели исследования**

Провести анализ вычислительной реализации геометрического моделирования формы дискретно представленной плоской кривой на основе методов вариативного дискретного геометрического моделирования при использовании углов сгущения.

**Изложение основного материала исследования**

Общий вычислительный алгоритм метода дискретной интерполяции на основе углов сгущения состоит из следующих структурных частей:

1. Определение длины звеньев ДПК.
2. Расчет углов наклона звеньев к оси.
3. Определение углов смежности до сгущения.
4. Расчет углов сгущения.
5. Определение углов смежности после сгущения.
6. Расчет локальных координат точек сгущения.
7. Определение глобальных координат точек сгущения.

Программная реализация метода была проведена в табличном редакторе EXCEL. Это позволяет легко изменять входные данные и проводить коррекцию результатов с помощью изменения параметров сгущения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2														
3		i	x	y	l	al	g0	g1	b-	b+	xl	yl	xs	ys
4		0	0	0	38,210	47,121	24,096	12,048	6,024	6,024			0,000	0,000
5		0,5						12,048			19,105	2,016	11,523	15,372
6		1	26	28	43,463	23,025	24,096	12,048	6,024	6,024			26,000	28,000
7		1,5						17,732			28,798	3,039	51,315	42,061
8		2	66	45	37,162	-23,806	46,831	23,416	11,708	11,708			66,000	45,000
9		2,5						15,708			9,376	1,943	75,362	42,993
10		3	100	30	39,051	-39,806	16,000	8,000	4,000	4,000			100,000	30,000
11		3,5						15,691			29,187	2,041	123,729	12,883
12		4	130	5	50,090	-86,566	46,761	23,381	11,690	11,690			130,000	5,000
13		4,5						19,337			19,711	4,078	135,251	-14,431
14		5	133	-45	43,829	-117,150	30,583	15,292	7,646	7,646			133,000	-45,000
15		5,5						9,442			8,295	1,114	130,206	-52,889
16		6	113	-84	49,649	-124,330	7,181	3,591	1,795	1,795			113,000	-84,000
17		6,5						3,591			24,824	0,778	99,642	-104,939
18		7	85	-125			7,181	3,591	1,795	1,795			85,000	-125,000
19														

Рис. 1. Окно расчета точек сгущения в табличном редакторе EXCEL

Визуальное отображение данных осуществлено с помощью диаграмм. Средство "Диаграммы" в табличном редакторе EXCEL является хорошим инструментом для построения возможных графиков и диаграмм, наглядно отображающих содержащиеся в таблице данные.

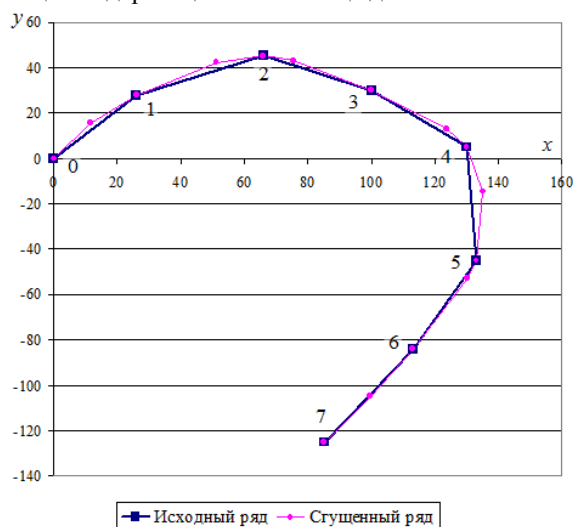


Рис. 2. Графическое изображение исходной и сгущенной ДПК в табличном редакторе EXCEL

Поиск максимального значения был осуществлен с помощью команды "Поиск решений". Но проведение расчетов в табличном редакторе имеет некоторые неудобства:

- при увеличении количества входных данных, необходимо вручную изменять формулы расчета;
- проведение последующих шагов сгущения требует перенастройки схемы вычисления;
- для использования табличного редактора EXCEL необходимо приобрести лицензию.

Еще один вариант программной реализации метода был осуществлен средствами символьного процессора Maple. Выбор этого программного продукта объясняется его широкими возможностями, а именно:

- символьное программирование;
- наличие команд, которые существенно упрощают программный алгоритм;
- удобная визуализация графических результатов.

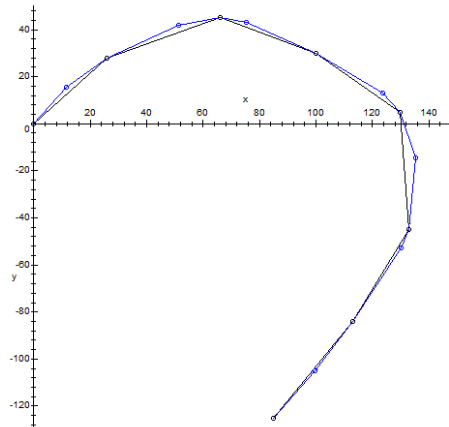


Рис. 3. Графическое изображение исходной и сгущенной ДПК в символьном процессоре Maple

Вместе с тем, использование символьного процессора Maple имеет и некоторые недостатки:

- необходимо владение специфическими знаниями программирования в символьном процессоре Maple;
- программы Maple не имеют возможностей для создания удобного интерфейса;
- проведение коррекции результатов с помощью изменения параметров сгущения является затруднительным.

Поэтому рассмотрев указанные варианты программной реализации, было принято решение о создании авторского варианта на основе языка программирования высокого уровня C#.

В программной реализации "Моделирование" реализуется метод дискретной интерполяции на основе углов сгущения, а также рассматриваются особые случаи сгущения (учет априорной информации, ДПК с переходными и прямолинейными участками). Для ввода исходных данных и вывода результатов используются текстовые файлы.

i	x	y	длина звена [i+1]	углы наклона звеньев	углы смежности до сгущения	углы смежности после сгущения	угол сгущения В-	угол сгущения В+	локальные точки сгущения x	локаль точек сгущен
0	0	0	38,20994634908...	47,12109639666...	24,09560438813...	12,04780219406...	6,023901097033...	6,023901097033...		
0,5						12,04780219406...			19,10497317454...	2,016071
1	26	28	43,46262762420...	23,025492008528	24,09560438813...	12,04780219406...	6,023901097033...	6,023901097033...		
1,5						17,73175997877...			21,73131381210...	2,293216
2	66	45	37,16180835212...	-23,8059435184...	46,83143552698...	23,41571776349...	11,70785888174...	11,70785888174...		
2,5						15,70776577519...			18,580904176062	3,850576
3	100	30	39,05124837953...	-39,8055710922...	15,99962757380...	7,999813786903...	3,999906893451...	3,999906893451...		
3,5						15,69010652977...			19,52562418976...	1,365332
4	130	5	50,08991914547...	-86,5663696375...	46,76079854528...	23,38039927264...	11,69019963632...	11,69019963632...		
4,5						19,33602765137...			25,04495957273...	5,182094
5	133	-45	43,82921400162...	-117,149681697...	30,58331206023...	15,29165603011...	7,645828015058...	7,645828015058...		
5,5						9,440961889488...			21,91460700081...	2,941875
6	113	-84	49,64876634922...	-124,330217195...	7,180535497720...	3,590267748860...	1,795133874430...	1,795133874430...		
6,5						3,590267748860...			24,82438317461...	0,778027
7	85	-125			7,180535497720...	3,590267748860...	1,795133874430...	1,795133874430...		

Рис. 4. Окно расчета точек сгущения в программе "Моделирование"

Визуальное отображение данных осуществляется с помощью отдельного окна. Сначала отображается исходная ДПК, затем сгущенная ДПК.



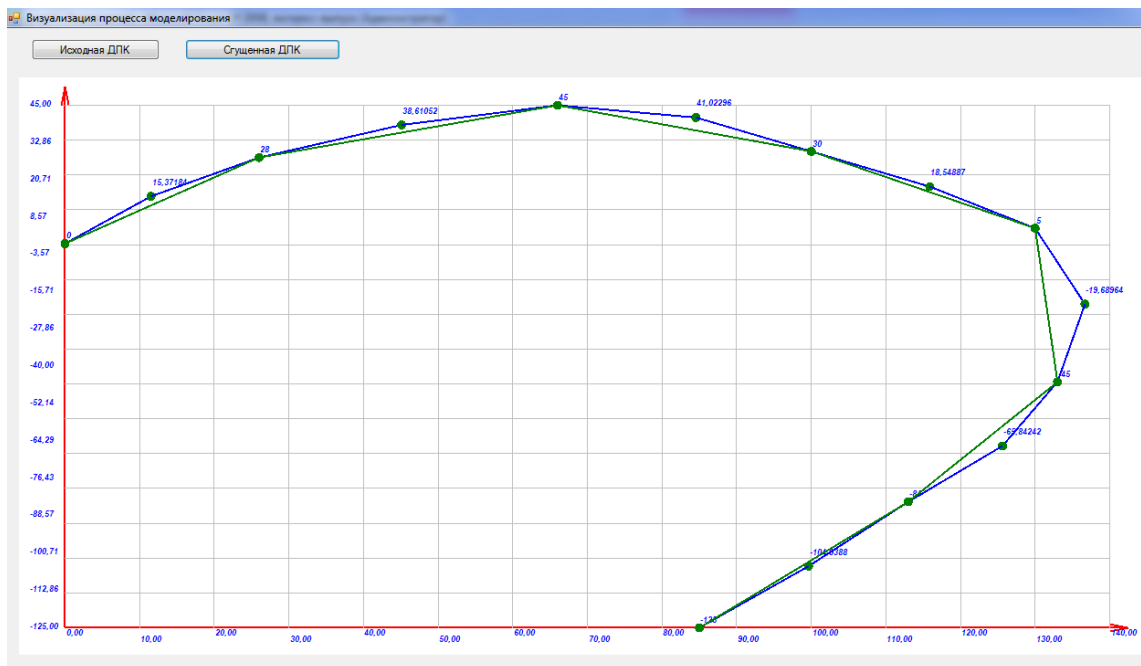


Рис. 5. Графическое изображение исходной и сгущенной ДПК в программе "Моделирование"

Существующая версия реализации "Моделирование" предполагает доработки следующих вопросов:

- коррекция результатов с помощью изменения параметров сгущения;
- оптимизация файловой структуры вспомогательных файлов.

#### Выводы

Проведенные в работе исследования подтвердили правильность полученных геометрических моделей. Кроме того, в результате выполнения расчетов не происходило накопление вычислительной погрешности, что косвенно свидетельствует об устойчивости методов вариативного дискретного геометрического моделирования с использованием углов сгущения. В качестве дальнейших исследований вызывает интерес внедрение методов геометрического моделирования с использованием углов сгущения в автоматизированные системы проектирования.

#### Список использованной литературы

1. Лебедев В.А. Дискретная интерполяция плоских дискретно представленных кривых линий на основе углов сгущения : Дис. ... канд. техн. Наук : 05.01.01 / Владимир Александрович Лебедев; Таврическая гос. агротехническая академия. — Мелитополь, 2004. — 194 с. — Библиогр.: С.167-181.
2. Найдиш А.В. Обчислювальна реалізація моделей на основі кутової параметризації / А.В. Найдиш, В.О. Лебедев, В.С. Волошина // Матеріали V-ої Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених". Випуск 5. – К.: ДІЯ, 2016. – С. 191-195.

УДК 514.18

А.І. ЛІТВИНОВ, А.В. НАЙДИШ, І.Г. БАЛЮБА  
Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТОРСОВИХ ПОВЕРХОНЬ ІЗ ДВОМА ПАРАБОЛІЧНИМИ НАПРЯМНИМИ, В РАМКАХ АПАРАТУ БН-ЧИСЛЕННЯ**

*Засобами апарату БН-числення досліджено спосіб геометричного моделювання торсових поверхонь із двома параболічними напрямними, що належать площинам, які перетинаються. Також отримано точкові рівняння, які визначають торсові поверхні з наперед заданими властивостями.*

*Ключові слова: торсова поверхня, парабола, напрямна, дуга кривої, апарат БН-числення, паралельні вісі.*

А.И. ЛИТВИНОВ, А.В. НАЙДЫШ, И.Г. БАЛЮБА  
Мелитопольский государственный педагогический университет им. Б.Хмельницкого**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ДВУМЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ НАПРАВЛЯЮЩИМИ, В РАМКАХ АППАРАТА БН-ИСЧИСЛЕНИЯ**

*Средствами аппарата БН-исчисления, исследован способ геометрического моделирования торсовых поверхностей с двумя параболическими направляющими, которые принадлежат пересекающимся плоскостям. Также получены точечные уравнения, которые определяют торсовые поверхности с наперед заданными свойствами.*

*Ключевые слова: торсовая поверхность, парабола, направляющая, дуга кривої, апарат БН-исчисления, параллельные оси.*

A.I. LITVINOV, A.V. NAYDYSH, I.G. BALUBA  
Melitopol State Pedagogical University named after Bohdan Khmelnytsky**GEOMETRIC MODELING OF THE TORSION SURFACES WITH TWO PARABOLIC GUIDES BY THE BN-CALCULUS APPARATUS**

*The method of geometric modeling of the torsion surfaces with two parabolic guides, which lie in intersecting planes, is investigation by means of the BN-calculus apparatus. The points equations, that define the torsion surface with predetermined conditions, are obtained also.*

*Keywords: torsion surface, parabola, guide, arc curve, BN-calculus, parallel axis.*

**Постановка проблеми**

Завдяки властивостям, які дають можливість розгорнення на поверхню без складок та розривів, торсові поверхні добре зарекомендували себе у різних галузях промисловості. Для проведення досліджень та інженерних розрахунків необхідно мати інструментарій, що дозволяє швидко та точно змоделювати поверхню.

На поточному рівні розвитку апарату БН-числення актуальною проблемою є отримання способів та методів аналітичного опису торсових поверхонь і їх систематизація. Знайдені рішення дозволять значно розширити інструментарій апарату, по-новому розглянути прикладні задачі моделювання торсів та розширити можливості для їх використання.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Питаннями геометричного моделювання торсових поверхонь займалися видатні вчені, зокрема Обухова В.С., Підгорний О.Л., Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М., Кривошапко С.Ф., Балюба І.Г. та ін.

Найбільш повно та систематично питання алгоритмів конструювання, аналітичного опису і класифікації торсових поверхонь виклав у своїй роботі "Енциклопедия аналитических поверхностей" [1] професор Кривошапко. У роботі надано практично всі можливі види торсових поверхонь, їх векторні та параметричні форми задання. Однак, конструювання поверхонь таким чином призводить до формування складних систем із тригонометричних рівнянь, що, у свою чергу, потребує значних витрат розрахункових ресурсів.

Важливо відзначити дисертаційні дослідження Балюби І.Г. [2], які дозволили створити апарат БН-числення, що відкрив нові можливості у геометричному моделюванні об'єктів. Його учнями, а саме Конопацьким Є.В. та Давиденко І.П. у працях [3, 4] було суттєво розширено інструментарій апарату. Їх наукові здобутки надали можливість аналітичного опису кривих, які є основою побудови різноманітних торсових поверхонь.

Близькими до теми статті є дослідження Несвідоміна В.М. [5] в області побудови складних геометричних моделей, зокрема торсових поверхонь. У цій роботі було визначено перелік недоліків методів синтетичної геометрії, таких як велика трудомісткість процесу, ручне виконання графічних побудов та недостатня точність, що в загалом сповільнює конструювання моделей. Усунення цих недоліків можливо тільки із використанням сучасних інформаційних технологій.

**Формулювання цілей дослідження**

Побудувати геометричні моделі торсових поверхонь з двома параболічними напрямними, що належать різним площинам, які перетинаються, та отримати їх аналітичний опис у БН-численні.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

1. Торсова поверхня з двома параболою, осі яких перетинаються.

Нехай задано симплекс  $ABCD$  (рис. 1). Відповідно до алгоритму, представлено у роботі [1], розглянемо параболу  $D_1KD_2$ , що розташована у симплексі  $D_1DD_2$ , який належить грані  $BDC$  та параболу  $A_1KA_2$ , що розташована у симплексі  $A_1AA_2$ , яка належить грані  $BAC$ . Згідно із типом шуканої торсової поверхні осі параболічних напрямних повинні перетинатись. У нашому випадку грані  $BDC$  і  $BAC$  перетинаються у ребрі  $BC$ , а отже і осі параболічних напрямних, що знаходяться на відповідних гранях – перетинаються, що забезпечує виконання заданої умови.

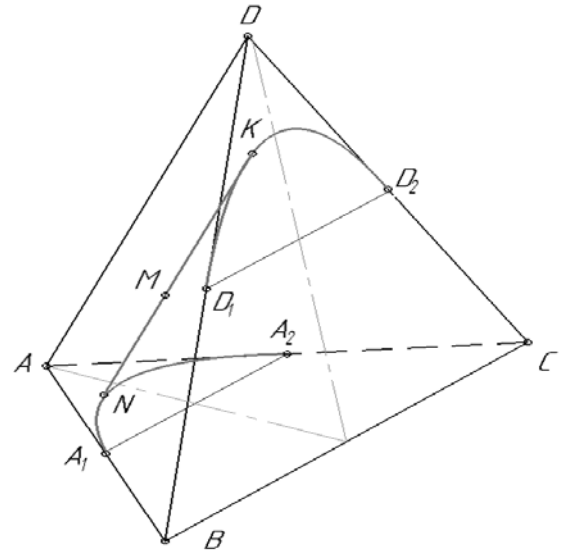


Рис. 1. Геометрична схема конструювання тора з двома параболою, осі котрих перетинаються

У симплексі  $D_1DD_2$  визначимо дугу параболу  $D_1KD_2$  як криву одного відношення [4] і задамо її наступним точковим рівнянням:

$$K = D_1 \cdot \bar{u}^2 + 2D \cdot u \cdot \bar{u} + D_2 \cdot u^2. \tag{1}$$

Визначимо точки  $D_1$  і  $D_2$  як середини відрізків  $BD$  і  $DC$ , отже  $D_1 = \frac{B+D}{2}$ , а  $D_2 = \frac{D+C}{2}$ .

Підставимо значення точок  $D_1$  та  $D_2$  до рівняння (1):

$$K = \left[ \frac{B+D}{2} \right] \bar{u}^2 + 2D u \bar{u} + \left[ \frac{D+C}{2} \right] u^2. \tag{2}$$

Після перетворень отримаємо:

$$K = B \frac{\bar{u}^2}{2} + D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] + C \frac{u^2}{2}. \tag{3}$$

У симплексі  $A_1AA_2$  точки  $A_1$  і  $A_2$  також визначені як середини відрізків  $BA$  і  $AC$  відповідно. Звідси, аналогічно визначимо рівняння для параболу  $A_1NA_2$ :

$$N = B \frac{\bar{u}^2}{2} + A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] + C \frac{u^2}{2}. \tag{4}$$

Рівняння твірної торсової поверхні визначимо як точкове рівняння прямої:

$$M = K \cdot v + N \cdot \bar{v}. \tag{5}$$

Підставимо рівняння (3) і (4) до рівняння (5) та після перетворень отримаємо:

$$M = A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] \bar{v} + B \frac{\bar{u}^2}{2} + C \frac{u^2}{2} + D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] v. \tag{6}$$

Представимо точкове рівняння (6) у параметричному вигляді:

$$x_M = x_A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] \bar{v} + x_B \frac{\bar{u}^2}{2} + x_C \frac{u^2}{2} + x_D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] v, \tag{7}$$

$$y_M = y_A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] \bar{v} + y_B \frac{\bar{u}^2}{2} + y_C \frac{u^2}{2} + y_D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] v,$$

$$z_M = z_A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] \bar{v} + z_B \frac{\bar{u}^2}{2} + z_C \frac{u^2}{2} + z_D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] v.$$

Результат роботи рівняння (6) зображено на рис. 2.

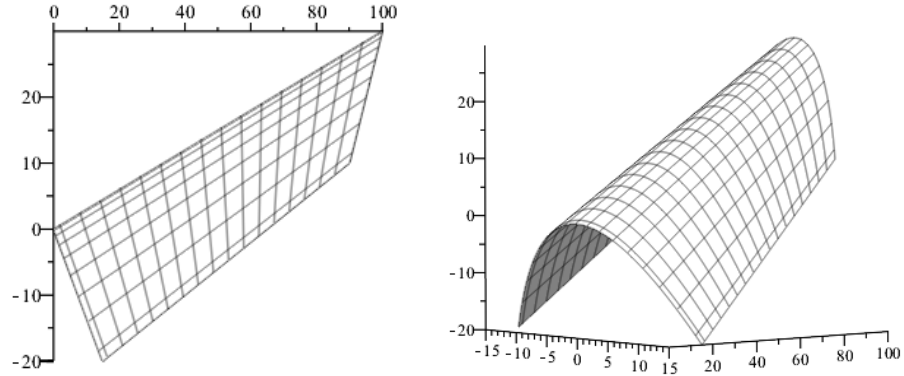


Рис. 2. Торсова поверхня із двома параболами, осі яких перетинаються

2. Торсова поверхня з двома параболами, що належать площинам, які перетинаються, але з паралельними осями.

Нехай задано симплекс  $ABCD$  (рис. 3).

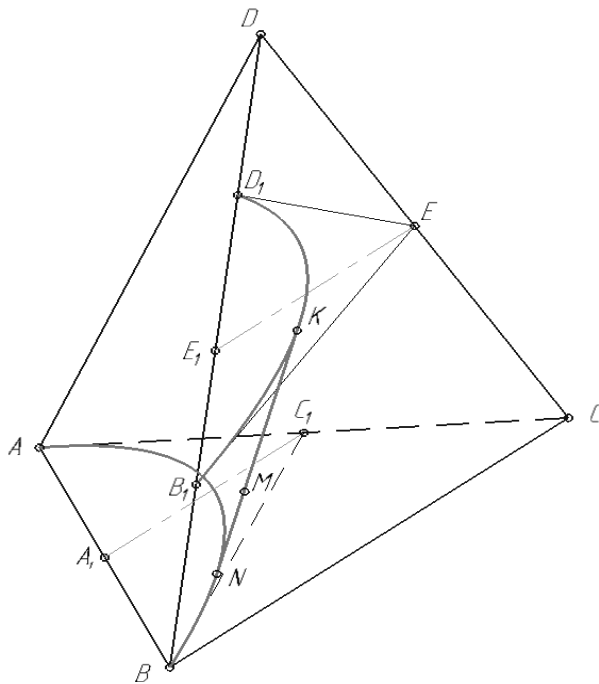


Рис. 3. Геометрична схема конструювання торса із двома параболами, що належать до площин, які перетинаються, але з паралельними осями

Відповідно до алгоритму, наданому у роботі [1], розглянемо відрізок  $E_1E$ , що належить грані  $DCB$ , і відрізок  $A_1C_1$ , що належить грані  $ACB$ . Точки  $E_1$  і  $E$  визначені як середини ребер  $DB$  і  $DC$ , утворюючи середню лінію трикутника  $DCB$ , звідси випливає, що  $E_1E \parallel BC$ . Точки  $A_1$  і  $C_1$  визначені як середини ребер  $AB$  і  $AC$ , утворюючи середню лінію трикутника  $ACB$ , звідси випливає, що відрізок  $A_1C_1 \parallel BC$ . Згідно із властивістю паралельності прямих, якщо  $E_1E \parallel BC$  і  $A_1C_1 \parallel BC$ , то  $E_1E \parallel A_1C_1$ , а отже вісі  $E_1E$  та  $A_1C_1$  парабол  $D_1KB_1$  і  $ANB$  паралельні. Перша необхідна умова існування поверхні виконана.

Згідно із типом шуканої торсової поверхні параболічні напрямні мають належати площинам, які перетинаються. У нашому випадку парабола  $D_1KB_1$  належить грані  $DCB$ , а парабола  $ANB$  належить грані  $ACB$ , які в свою чергу перетинаються у ребрі  $BC$ , що забезпечує виконання другої необхідної умови існування поверхні.

У симплексі  $D_1EB_1$  визначимо дугу параболі  $D_1KB_1$  як криву одного відношення [4] і задамо її наступним точковим рівнянням:

$$K = D_1 \cdot \bar{u}^2 + 2E \cdot u \cdot \bar{u} + B_1 \cdot u^2. \tag{8}$$

Точки  $E_1$  і  $E$  визначені як середини ребер  $DB$  і  $DC$ , отже  $E_1 = \frac{D+B}{2}$  та  $E = \frac{D+C}{2}$ . Точки  $D_1$  і  $B_1$  визначені як середини відрізків  $DE_1$  і  $E_1B$  відповідно. Звідси:

$D_1 = \frac{D + E_1}{2} = (D + \frac{D+B}{2})/2 = \frac{3D+B}{4}$ ,  $B_1 = \frac{E_1 + B}{2} = (\frac{D+B}{2} + B)/2 = \frac{D+3B}{4}$ . Підставимо значення точок  $D_1$ ,  $E$  і  $B_1$  до рівняння (8):

$$K = \left[ \frac{3D+B}{4} \right] \cdot \bar{u}^2 + 2 \left[ \frac{D+C}{2} \right] \cdot u \cdot \bar{u} + \left[ \frac{D+3B}{4} \right] \cdot u^2. \tag{9}$$

Після перетворень отримаємо:

$$K = D \left[ \frac{3\bar{u}^2}{4} + u\bar{u} + \frac{u^2}{4} \right] + C u \bar{u} + B \left[ \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right]. \tag{10}$$

У симплексі  $AC_1B$  точки  $A_1$  і  $C_1$  визначимо як середини відрізків  $AB$  і  $AC$ , а отже,  $A_1 = \frac{A+B}{2}$  і  $C_1 = \frac{A+C}{2}$ . Визначимо дугу параболи  $ANB$  як криву одного відношення [4] і задамо точковим рівнянням, підставив значення точок  $A_1$  і  $C_1$ .

$$N = A \cdot \bar{u}^2 + 2 \left[ \frac{A+C}{2} \right] \cdot u \cdot \bar{u} + B \cdot u^2. \tag{11}$$

Після перетворень отримаємо:

$$N = A \bar{u} + C u \bar{u} + B u^2. \tag{12}$$

Рівняння твірної торсової поверхні визначимо як точкове рівняння прямої:

$$M = K \cdot v + N \cdot \bar{v}. \tag{13}$$

Підставимо рівняння (10) і (13) до рівняння (13) та після перетворень отримаємо:

$$M = A u \bar{v} + B \left[ u^2 \bar{v} + \left( \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right) v \right] + C u \bar{u} + D \left[ \frac{3u^2}{4} + u \bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right] v. \tag{14}$$

Представимо точкове рівняння (14) у параметричному вигляді:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A u \bar{v} + x_B \left[ u^2 \bar{v} + \left( \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right) v \right] + x_C u \bar{u} + x_D \left[ \frac{3u^2}{4} + u \bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right] v, \\ x_M &= y_A u \bar{v} + y_B \left[ u^2 \bar{v} + \left( \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right) v \right] + y_C u \bar{u} + y_D \left[ \frac{3u^2}{4} + u \bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right] v, \\ x_M &= z_A u \bar{v} + z_B \left[ u^2 \bar{v} + \left( \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right) v \right] + z_C u \bar{u} + z_D \left[ \frac{3u^2}{4} + u \bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right] v. \end{aligned} \tag{15}$$

Результат роботи рівняння (14) зображено на рис. 4.

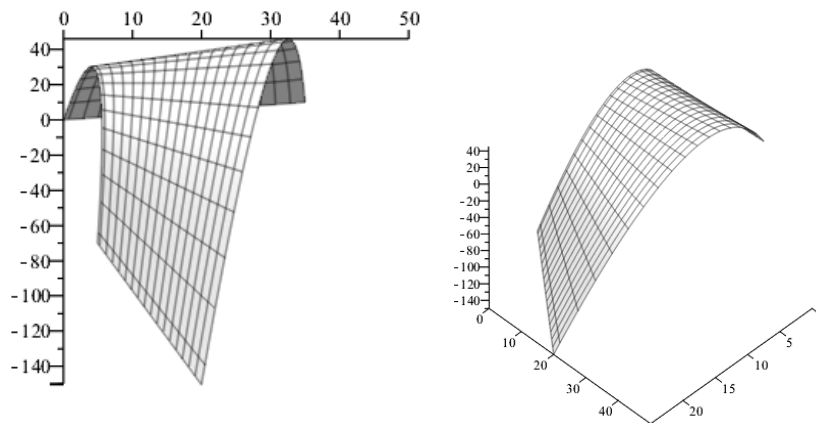


Рис. 4. Торсова поверхня із двома параболою, що лежать у площинах, які перетинаються, але з паралельними осями

### Висновки

Побудовано геометричні моделі торсових поверхонь з двома параболічними напрямними, що належать різним площинам, які перетинаються та сформовано їх аналітичний опис у БН-численні. Отримані точкові рівняння розширили інструментарій апарату БН-числення та дозволяють розглядати прикладні задачі, що стосуються зазначених у статті типів торсових поверхонь. Зокрема, ці результати дозволяють використовувати у якості напрямних інші криві другого порядку.

Зменшення кількості тригонометричних функцій в аналітичному описі та його обсягу дозволило зменшити розрахункову похибку та підвищити швидкість розрахунків.

У подальшому планується досліджувати підклас торсових поверхонь із двома плоскими напрямними кривими з метою виявлення більш досконалої класифікації та розробки відповідних способів моделювання поверхонь.

### Список використаної літератури

1. Кривошапко С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей / С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2010. – 560 с.
2. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления: автореф. дис. на соискание учен. степени доктора техн. наук : 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Иван Григорович. – К.: КГТУСА, 1995. – 36 с.
3. Конопацький Є.В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша: автореф. дис. на здоб. наук. ступеня канд. техн. наук : 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Євген Вікторович Конопацький; М-во аграрної політики та продовольства України, Таврійський держ. агротехнологічний ун-т. – Мелітополь, 2012. – 26 с.
4. Давиденко І.П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Иван Петрович Давиденко; Донбаська національна академія будівництва та архітектури. – Донецьк, 2012. – 169 с.
5. Несвідомін В.М. Комп'ютерні моделі синтетичної геометрії: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / Віктор Миколайович Несвідомін; КНУБА. – Київ, 2008. – 34 с.

УДК 514.18

М.М. МУКВИЧ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

### АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ЦИКЛОЇДИ

*У роботі здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди навколо її напрямної. Знайдено параметричні рівняння поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній. Параметричні рівняння сімей ізотропних кривих отримано із умови рівності нулю лінійного елемента поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній.*

*Ключові слова:* мінімальна поверхня, циклоїда, ізометрична сітка координатних ліній, лінійний елемент поверхні, ізотропна крива.

Н.Н. МУКВИЧ

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИЗОТРОПНЫХ КРИВЫХ, ЛЕЖАЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЦИКЛОИДЫ

*В работе осуществлено аналитическое описание минимальных поверхностей с помощью изотропных кривых, лежащих на поверхности вращения циклоиды вокруг ее направляющей. Получены параметрические уравнения поверхности вращения циклоиды, отнесенной к изометрической сети координатных линий. Параметрические уравнения семейств изотропных кривых определены из условия равенства нулю линейного элемента поверхности вращения циклоиды, отнесенной к изометрической сети координатных линий.*

*Ключевые слова:* минимальная поверхность, циклоида, изометрическая сетка координатных линий, линейный элемент поверхности, изотропная кривая.

M.M. MUKVICH

National University Of Life And Environmental Sciences Of Ukraine

### ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE MINIMAL SURFACE USING ISOTROPIC CURVED, LYING ON THE ROTATIONAL SURFACE OF THE CYCLOID

*The paper carried an analytical description of minimal surfaces with isotropic curves, that lie on the surface of the cycloid rotation around its directrix lines. Found parametric equation of the surface of rotation of the cycloid, referred to the isometric grid of the coordinate lines. Parametric equations families isotropic curves obtained from the condition that the linear element surface rotation cycloid, referred to the isometric grid of the coordinate lines.*

*Keywords:* minimal surface, cycloid, isometric grid of the coordinate lines, line element of the surface, isotropic curve.

#### Постановка проблеми

Геометричне моделювання мінімальних поверхонь розширює можливості формування поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. Наприклад, маючи найменшу площу для заданого опорного контура (просторової або плоскої кривої), геометрична форма мінімальних поверхонь забезпечує рівномірний розподіл зусиль для напруженого стану архітектурної конструкції [1, с. 152].

Перші дослідження мінімальних поверхонь належать Ж. Лагранжу (J. Lagrange), який сформулював варіаційну задачу [2, с. 683]: «Знайти поверхню найменшої площі, натягнуту на заданий контур» (1786 р.). Задаючи аналітично шукану поверхню у вигляді  $z = z(x; y)$ , Ж. Лагранж зробив висновок – функція  $z = z(x; y)$  повинна задовольняти рівняння (Ейлера-Лагранжа):

$$\left(1 + q^2\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + p^2\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\text{де: } p = \frac{\partial z}{\partial x}; q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Пізніше Г. Монж (G. Monge) в 1776 виявив, що умова мінімальності площі приводить до умови рівності нулю середньої кривини поверхні.

Гранична умова  $z|_G = \varphi(x; y)$  диференціального рівняння (1), яка застосовується для проектування архітектурних конструкцій, визначає проектну висоту поверхні на межі  $G$  області [1, 3, 4].

Знайти функцію  $z = z(x; y)$ , яка є розв'язком рівняння (1), у загальному випадку неможливо. Зокрема, при дослідженні геометрії архітектурних конструкцій для утворення точкового каркасу мінімальних поверхонь найчастіше використовують варіаційні [4, 5, 6] та кінцево-різницьові методи [1, 3].

Слід зазначити, що є інший напрям дослідження аналітичного опису мінімальних поверхонь – за допомогою властивостей функцій комплексної змінної, який дозволяє знайти параметричні рівняння мінімальних поверхонь. У цьому напрямі відомі праці видатних математиків К. Вейерштрасса, С.Лі, Б. Рімана, Г. Шварца, які використовували для аналітичного опису мінімальних поверхонь методи і результати теорії функцій комплексної змінної [2, 7]. У даній роботі також використано властивості функцій комплексної змінної та реалізовано метод аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній [11, 12].

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для аналітичного опису неперервного каркасу мінімальних поверхонь використовуються параметричні рівняння ізотропних кривих нульової довжини [7]. Побудову мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є реалізовано у дисертаційному дослідженні [8]. У дисертаційних дослідженнях [9, 10] учнів професора Пилипаки С.Ф. знайдено способи конструювання просторових ізотропних кривих за допомогою функцій комплексної змінної тільки для окремих випадків використання аналітичних функцій. Тому розширення способів утворення ізотропних кривих за допомогою функцій комплексної змінної є важливою умовою для дослідження проблеми аналітичного опису мінімальних поверхонь.

#### Формулювання цілей статті

Знайти аналітичний опис поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній та ізотропних кривих, що лежать на її поверхні. На основі вказаних ізотропних кривих побудувати мінімальні поверхні та приєднати до них мінімальні поверхні.

#### Виклад основного матеріалу дослідження

Розглянемо поверхню обертання, параметричні рівняння якої мають вигляд:

$$X(\tau; v) = \varphi(\tau) \cdot \cos v; \quad Y(\tau; v) = \varphi(\tau) \cdot \sin v; \quad Z(\tau; v) = \psi(\tau), \quad (2)$$

де  $\varphi = \varphi(\tau)$ ;  $\psi = \psi(\tau)$  – параметричні рівняння меридіана поверхні обертання.

У роботі [13] наведено алгоритм відшукування параметричних рівнянь меридіана поверхні обертання, при якому поверхня буде віднесена до ізометричних координат. Перехід від ортогональної до ізометричної сітки координат здійснюється за допомогою введення нової змінної  $t$ , яка пов'язана із змінною  $\tau$  наступним чином [13]:

$$t = \int \frac{\sqrt{(\varphi'_\tau)^2 + (\psi'_\tau)^2}}{\varphi} d\tau. \quad (3)$$

Розглянемо поверхню обертання циклоїди навколо її напрямної, тоді її параметричні рівняння мають вигляд:

$$X(\tau; v) = a(1 - \cos \tau) \cdot \cos v; \quad Y(\tau; v) = a(1 - \cos \tau) \cdot \sin v; \quad Z(\tau; v) = a(\tau - \sin \tau), \quad (4)$$

де  $a$  – параметр циклоїди;  $\tau \in [0; 2\pi)$ ;  $v \in [0; 2\pi)$ .

Знайдемо умову переходу до ізометричної сітки координат, підставивши параметричні рівняння циклоїди  $\varphi(\tau) = a(1 - \cos \tau)$ ;  $\psi(\tau) = a(\tau - \sin \tau)$  у (3). Після перетворень отримаємо залежність:

$$t = 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\tau}{4} \right|. \quad (5)$$

Виразимо із (5)  $\tau(t) = 4 \operatorname{arctg} e^{\frac{t}{2}}$  і підставимо у рівняння (4). Після перетворень отримаємо параметричні рівняння поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній:

$$\begin{aligned} X(t; v) &= \frac{8ae^t}{(1+e^t)^2} \cdot \cos v; \\ Y(t; v) &= \frac{8ae^t}{(1+e^t)^2} \cdot \sin v; \\ Z(t; v) &= a \left( 4 \operatorname{arctg} \left( e^{\frac{t}{2}} \right) + \frac{4e^{\frac{t}{2}}(e^t - 1)}{(1+e^t)^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$



Коефіцієнти першої квадратичної форми [7] поверхні обертання циклоїди, заданої параметричними рівняннями (6), мають вигляд:  $E = G = \frac{64a^2 e^{2t}}{(1+e^t)^4}$ ;  $F = 0$ . Тоді лінійний елемент поверхні обертання циклоїди (6), віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, можна записати у вигляді:

$$ds^2 = \frac{64a^2 e^{2t}}{(1+e^t)^4} \cdot (dv^2 + dt^2) \tag{7}$$

Розклавши на множники вираз (7) отримаємо:

$$ds^2 = \frac{64a^2 e^{2t}}{(1+e^t)^4} \cdot (dv - i \cdot dt)(dv + i \cdot dt),$$

де  $i$  – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$v = i \cdot t + C \quad \text{або} \quad v = -i \cdot t + C, \tag{8}$$

де  $C$  – довільна стала інтегрування. Вирази (8) називають координатами Дарбу (Darboux) [7].

Лінійний елемент (8) поверхні обертання циклоїди визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на поверхні. Тому при підстановці одного із виразів (8) у параметричні рівняння (6) отримаємо параметричні рівняння сім'ї уявних ізотропних кривих нульової довжини. Зокрема, при підстановці виразу  $v = i \cdot t + C$  у рівняння (6) для кожного значення  $C$  отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної кривої, яка лежить на поверхні обертання циклоїди:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{8ae^t}{(1+e^t)^2} \cdot \cos(i \cdot t + C); & z(t) &= a \left[ 4 \operatorname{arctg} \left( e^{\frac{t}{2}} \right) + \frac{4e^{\frac{t}{2}}(e^t - 1)}{(1+e^t)^2} \right]; \\ y(t) &= \frac{8ae^t}{(1+e^t)^2} \cdot \sin(i \cdot t + C); \end{aligned} \tag{9}$$

При знаходженні рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні для функцій комплексної змінної (9) уведемо заміну [7]:  $t = u + i \cdot v$ . Тоді отримаємо параметричні рівняння мінімальної поверхні  $X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)$ :

$$X(u, v) = \operatorname{Re}\{x(u + i \cdot v)\}; \quad Y(u, v) = \operatorname{Re}\{y(u + i \cdot v)\}; \quad Z(u, v) = \operatorname{Re}\{z(u + i \cdot v)\}; \tag{10}$$

та приєднаної мінімальної поверхні  $X^*(u, v), Y^*(u, v), Z^*(u, v)$ :

$$X^*(u, v) = \operatorname{Im}\{x(u + i \cdot v)\}; \quad Y^*(u, v) = \operatorname{Im}\{y(u + i \cdot v)\}; \quad Z^*(u, v) = \operatorname{Im}\{z(u + i \cdot v)\}. \tag{11}$$

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (9), маємо рівняння мінімальної поверхні ( $C$  – довільна стала):

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \frac{2a[\cos(C - 2v) + 2\cos(C - v) \cdot \operatorname{ch}(u) + \cos(C) \cdot \operatorname{ch}(2u)]}{(\cos v + \operatorname{ch} u)^2}; \\ Y(u, v) &= \frac{2a[\sin(C - 2v) + 2\sin(C - v) \cdot \operatorname{ch}(u) + \sin(C) \cdot \operatorname{ch}(2u)]}{(\cos v + \operatorname{ch} u)^2}; \\ Z(u, v) &= 2a \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{u}{2}} \cdot \cos \frac{v}{2}}{1 + e^{\frac{u}{2}} \cdot \sin \frac{v}{2}} + 2a \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{u}{2}} \cdot \cos \frac{v}{2}}{1 - e^{\frac{u}{2}} \cdot \sin \frac{v}{2}} + \frac{4a \cdot \cos \frac{v}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{u}{2} \cdot (2 - \cos v + \operatorname{ch} u)}{(\cos v + \operatorname{ch} u)^2}; \end{aligned} \tag{12}$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^*(u, v) = -\frac{4a \cdot \operatorname{sh}(u) \cdot [\sin(C - v) + \sin(C) \cdot \operatorname{ch}(u)]}{(\cos v + \operatorname{ch} u)^2}; \quad Y^*(u, v) = \frac{4a \cdot \operatorname{sh}(u) \cdot [\cos(C - v) + \cos(C) \cdot \operatorname{ch}(u)]}{(\cos v + \operatorname{ch} u)^2};$$

$$Z^*(u, v) = a \ln \left| \frac{1 + e^u + 2e^{\frac{u}{2}} \cdot \sin \frac{v}{2}}{1 + e^u - 2e^{\frac{u}{2}} \cdot \sin \frac{v}{2}} \right| + \frac{4a \cdot \cos \frac{u}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{v}{2} \cdot (2 + \cos v - \operatorname{ch} u)}{(\cos v + \operatorname{ch} u)^2}. \tag{13}$$

На рис.1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (12) і (13) відповідно при  $C = 0$ ;  $u \in [1,3; \dots, 2,8]$ ;  $v \in [1,4; \dots, 5]$ .

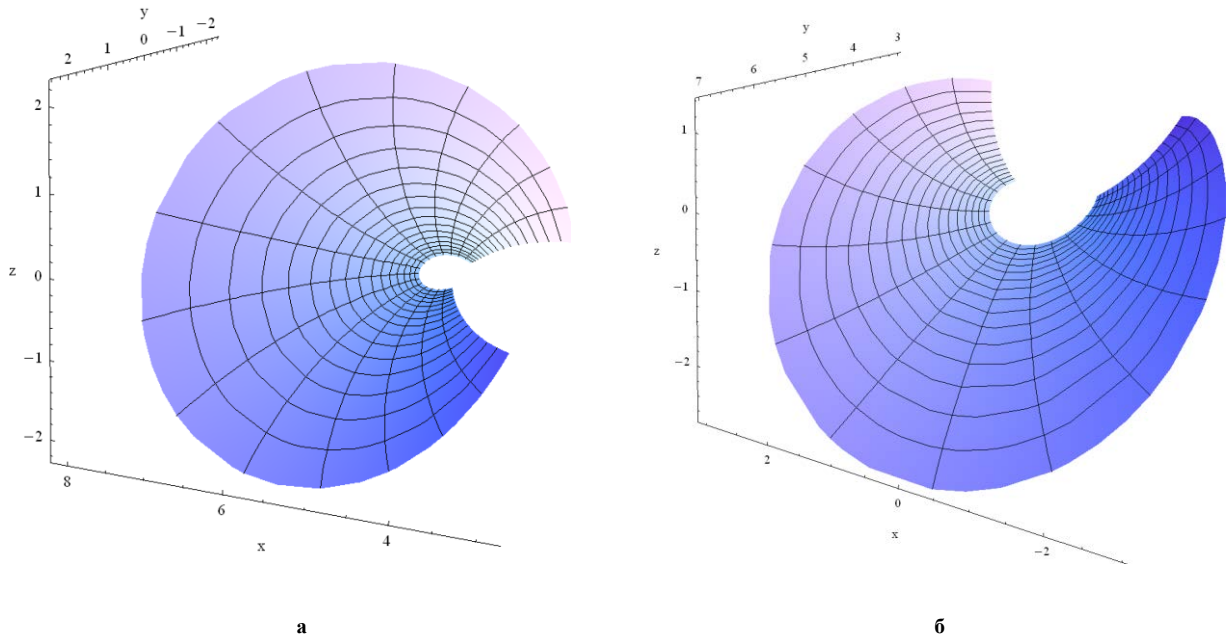


Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди:

- а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (12);
- б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (13).

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (12) та приєднаної поверхні (13) дорівнюють:

$$E = G = \frac{64a^2 e^{2u} (1 + e^u)^2}{(1 + e^{2u} + 2e^u \cos v)^3}; F = 0. \tag{14}$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (12), дорівнюють:

$$L = -N = -\frac{4a \cos \frac{v}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{u}{2} (\cos v + \operatorname{ch} u - 2 \cos v \cdot \operatorname{ch} u - 2)}{(\cos v + \operatorname{ch} u)^3}. \tag{15}$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні (13), дорівнюють:

$$L^* = -N^* = -\frac{4a \sin \frac{v}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{u}{2} (\cos v + \operatorname{ch} u + 2 \cos v \cdot \operatorname{ch} u + 2)}{(\cos v + \operatorname{ch} u)^3}. \tag{16}$$

Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм мінімальних поверхонь (12) та (13), перетворюють вираз середньої кривини  $H = \frac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)}$ , для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

Вираз (7) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = \frac{64a^2 e^{2t}}{(1 + e^t)^4} \cdot (dt - i \cdot dv)(dt + i \cdot dv). \tag{17}$$

Прирівнюючи до нуля праву частину рівності (17), після інтегрування отримаємо:

$$t = i \cdot v + C \quad \text{або} \quad t = -i \cdot v + C. \tag{18}$$

Підставивши вирази (18) або вираз  $v = -i \cdot t + C$ , отриманий із рівностей (8), у параметричні рівняння поверхні обертання циклоїди (6), отримаємо рівняння ще трьох сімей уявних ізотропних кривих нульової довжини. Для кожного значення  $C$  за допомогою знайдених ізотропних кривих можна побудувати мінімальні поверхні та приєднати до них. Але утворені мінімальні поверхні мають рівні коефіцієнти першої та другої квадратичних форм із мінімальними поверхнями (12) і (13) відповідно, тобто вони характеризуються спільними метричними властивостями та спільними властивостями кривини поверхні.

**Висновки**

На поверхні обертання циклоїди навколо її напрямної, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, для кожного значення  $C$  можна побудувати чотири сім'ї ізотропних кривих, і кожній кривій поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні.

**Список використаної літератури**

1. Расчёт оболочек сложной формы / [Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В.]. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с.
2. Математическая энциклопедия / [гл.ред. И.М. Виноградов]. – Т.3.– М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1982.– С.683–690.
3. Михайленко В.Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв. – Киев: Будівельник, 1978. – 112 с.
4. Абдюшев А.А. Проектирование неполигоих оболочек минимальной поверхности / А.А. Абдюшев, И.Х. Мифтахутдинов, П.П. Осипов // Известия КазГАСУ. – 2009. – №2(12). – С. 86-92.
5. Пульпинский Я.С. Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. техн. наук: спец. 05.13.18 "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" / Я.С. Пульпинский. – Пенза: Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2006. – 20 с.
6. Гацунаев М.А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / М.А. Гацунаев, Клячин А.А. // Уфимский математич. журнал. Т. 6. –2014.– №3.– С.3–16.
7. Фиников С.П. Теория поверхностей / Фиников С.П. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
8. Аушева Н.М. Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 / Н. М. Аушева. – К.: КНУБА, 2014. – 38 с.
9. Чернишова Е.О. Використання функцій комплексного змінного для побудови поверхонь технічних форм: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Е.О. Чернишова. – К.: КНУБА, 2007. – 20 с.
10. Коровіна І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інцидентії: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / І.О. Коровіна. – К.: КНУБА, 2012. – 20 с.
11. Муквич М.М. Конструювання мінімальних поверхонь за допомогою ізотропної кривої, яка лежить на конусі / М.М. Муквич // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". – Луцьк, видавництво Луцького національного технічного університету, 2015. – № 48. – С. 155–158.
12. Пилипака С.Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання астроїди / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– №6. – С. 91–95.
13. Несвидомин В.Н. Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности / В.Н. Несвидомин, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремец // «MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture».– Vol. 16, No 3. – Lublin – Rzeszov, 2014. – С. 58 – 65.

УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, І.Ю. ГРИЩЕНКО

Національний університет біоресурсів і природокористування України

А.В. ЧЕПИЖНИЙ

Сумський національний аграрний університет

### ДИНАМІКА ЧАСТИНКИ В СТИЧНІЙ ПЛОЩИНІ СУПРОВІДНОГО ТРИГРАННИКА ПЛОСКОЇ НАПРЯМНОЇ КРИВОЇ

Складено диференціальні рівняння відносного руху матеріальної частинки в стичній площині тригранника Френе. Їх складовими є натуральне рівняння напрямної плоскої кривої, швидкість руху тригранника вздовж напрямної кривої, параметричні рівняння відносного руху частинки та їх похідні. Система включає два диференціальні рівняння, до складу яких входить чотири невідомі функції. Для чисельного розв'язування системи дві функції потрібно задати, тобто накласти певні обмеження на умови руху.

Ключові слова: супровідний тригранник Френе, стична площина, матеріальна частинка, відносний та абсолютний рух, диференціальні рівняння відносного руху.

С.Ф. ПИЛИПАКА, И.Ю. ГРИЩЕНКО

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

А.В. ЧЕПИЖНИЙ

Сумской национальной аграрный университет

### ДИНАМІКА ЧАСТИЦЫ В СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ СОПРОВОЖДАЮЩЕГО ТРЕХГРАННИКА ПЛОСКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ

Составлено дифференциальные уравнения относительного движения материальной частицы в соприкасающейся плоскости трехгранника Френе. Их составляющими являются натуральное уравнение направляющей плоской кривой, скорость движения трехгранника вдоль направляющей кривой, параметрические уравнения относительного движения частицы и их производные. Система включает два дифференциальных уравнения, в состав которых входят четыре неизвестные функции. Для численного решения системы две функции необходимо задать, то есть наложить определенные ограничения на условия движения.

Ключевые слова: сопровождающий трехгранник Френе, соприкасающаяся плоскость, материальная частица, относительное и абсолютное движение, дифференциальные уравнения относительного движения.

S.F. PYLYPAKA, I.YU. GRISCHENKO

National university of life and environmental sciences of Ukraine

A.V. CHEPYZHNIY

Sumy National Agrarian University

### DYNAMICS OF THE CORPUSCLE IN THE ADJOINING PLANE OF THE THREE – EDGE OF THE FLAT DIRECTING CURVE

It is made differential equations of relative movement of a particle in an adjoining plane of a an three-edge of Frenet. Their components are the natural equation of a directing plane curve, a velocity of movement of a trihedron along a directing curve, the parametrical equations of relative movement of a particle and their derivatives. The system includes two differential equations which structure includes four unknown functions. For a numerical solution of system with two functions it is necessary to set, that is to superimpose certain restrictions on traffic conditions.

Keywords: an three-edge of Frenet, an adjoining plane, a particle, relative and absolute movement, differential equations of relative movement.

#### Постановка проблеми

Задачу, яка розглядається у статті, можна розглядати наступним чином. За стичну площину тригранника Френе приймемо кузов автомобіля, який рухається в горизонтальній площині вздовж криволінійної траєкторії. Орти дотичної і головної нормалі тригранника утворюють один із передніх кутів кузова, а орт бінормалі весь час спрямований вертикально вгору. Якщо в кузові знаходиться вантаж, то при переносному русі автомобіля вздовж криволінійної траєкторії він може ковзати по кузові на певних ділянках дороги в залежності від зміни швидкості і кривини дороги. З певним допущенням вантаж, який здійснює відносний рух у кузові, можна прийняти за матеріальну частинку. Задача знаходження траєкторії ковзання

частинки по кузові (тобто відносного руху) не є простою, оскільки абсолютне прискорення частинки є геометричною сумою переносного, відносного і коріолісового прискорень, напрям і модуль кожного із яких можуть бути змінними, залежними від траєкторії, шляху і швидкості автомобіля. Застосування супровідного тригранника Френе плоскої кривої (траєкторії переносного руху тригранника) дозволяє спростити розв'язок задачі на знаходження відносного руху частинки, а також дозволяє розв'язувати обернену задачу на знаходження кінематичних характеристик руху автомобіля при заданій траєкторії відносного руху.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Знаходження кінематичних характеристик складного руху точки, яка здійснює відносний рух в стичній площині супровідного тригранника Френе заданої плоскої кривої, наведено в праці [1]. Застосування тригранника Френе у ролі рухомої системи координат зумовлено тим, що він дозволяє застосувати широко відомі в диференціальній геометрії формули Френе для знаходження кінематичних характеристик точки, яка рухається у його системі [2, 3]. Щоправда, при цьому за незалежну змінну потрібно брати довжину дуги  $s$  траєкторії, вздовж якої рухається супровідний тригранник, а не час  $t$ , як це робиться при традиційних підходах [4–6]. Застосування тригранника Френе для визначення положень ланок плоского механізму розглянуто в праці [7].

**Формулювання мети досліджень**

Показати доцільність застосування тригранника і формул Френе при розв'язуванні прямої і оберненої задачі на динаміку матеріальної частинки, яка здійснює відносний рух в стичній площині тригранника.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Нехай у плоскій системі координат  $Oxy$  задано криву натуральним рівнянням  $k=k(s)$ , де  $k$  – кривина кривої в поточній точці  $A$  при значенні довжини дуги  $s$  кривої в цій точці (рис. 1). В точці  $A$  побудовано супровідний тригранник Френе, одиничні орти дотичної  $\vec{\tau}$  і головної нормалі якого  $\vec{n}$  знаходяться в площині кривої, а орт бінормалі  $\vec{b}$  перпендикулярний до неї і проєціюється в точку (рис.1). Радіус-вектор  $\vec{r}_B$ , який визначає положення точки  $B$  відносно нерухомої системи координат  $Oxy$ , можна задати при допомозі двох векторів:  $\vec{r}_A$ , який визначає положення вершини тригранника в системі  $Oxy$  і  $\vec{\rho}$ , який визначає положення точки  $B$  в системі тригранника:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \tag{1}$$

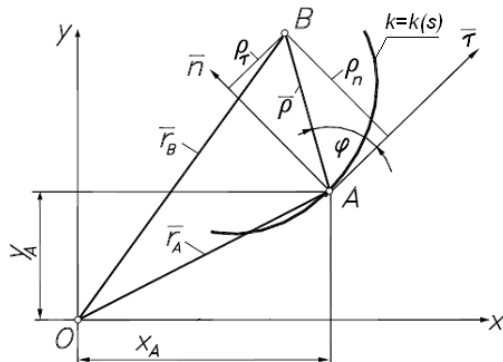


Рис. 1. Положення точки  $B$  по відношенню до двох систем: нерухомої  $Oxy$  і супровідного тригранника заданої кривої

Векторне рівняння (1) розписується в проєкціях на осі нерухомої системи координат і ми отримуємо параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки  $B$  у функції довжини дуги  $s$  заданої напрямної кривої [1]:

$$x_B = \rho \cos(\varphi + \int k ds) + \int \cos(\int k ds) ds; \tag{2}$$

$$y_B = \rho \sin(\varphi + \int k ds) + \int \sin(\int k ds) ds.$$

Напрямна крива задана у рухомій системі супровідного тригранника за допомогою полярної системи координат – відстанню  $\rho$  і кутом  $\varphi$ , відлік якого здійснюється від орта  $\vec{\tau}$  (рис. 1).

Якщо векторне рівняння (1) розписати у проєкціях на орти супровідного Френе, то набуває вигляду:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \tau \rho \cos \varphi + \vec{n} \rho \sin \varphi. \tag{3}$$

Диференціюючи параметричні рівняння (3) по змінній  $s$  із застосуванням формул Френе і маючи на увазі, що  $\rho=\rho(s)$  і  $\varphi=\varphi(s)$ , отримаємо абсолютну швидкість точки  $B$  в проєкціях на орти тригранника [1]:

$$\vec{v}_B = v_A \{ \tau [1 + \rho' \cos \varphi - \rho(k + \varphi') \sin \varphi] + \vec{n} [\rho' \sin \varphi + \rho(k + \varphi') \cos \varphi] \}, \tag{4}$$

де  $k=k(s)$  – натуральне рівняння напрямної кривої (траєкторії руху тригранника);

$v_A=v_A(s)$  – швидкість руху тригранника вздовж напрямної кривої.

Диференціюючи вираз (4) теж із застосуванням формул Френе, отримаємо абсолютне прискорення  $w_B$  точки  $B$  теж у проєкціях на орти тригранника:

$$\begin{aligned} \vec{w}_B = & \tau v_A \{ v_A' [1 + \rho' \cos \varphi - \rho(k + \varphi') \sin \varphi] + \\ & + v_A [\rho'' - \rho(k + \varphi')^2] \cos \varphi - v_A [2\rho'(k + \varphi') + k'\rho + \rho\varphi''] \sin \varphi \} + \\ & + \vec{n} v_A \{ v_A' [\rho' \sin \varphi + \rho(k + \varphi') \cos \varphi] + \\ & + v_A [\rho'' - \rho(k + \varphi')^2] \sin \varphi + v_A [2\rho'(k + \varphi') + k'\rho + \rho\varphi''] \cos \varphi + v_A k \}. \end{aligned} \tag{5}$$

Знаючи вектор абсолютного прискорення, можна скласти рівняння руху частинки у вигляді  $m\vec{w}_B = \vec{F}$ , де  $m$  – маса частинки,  $\vec{F}$  – вектор прикладених до частинки сил. Оскільки вектор абсолютного прискорення (5) отримано в проєкціях на орти тригранника, то і диференціальні рівняння руху частинки будемо складати в проєкціях на його орти.

Розглянемо найпростіший випадок, коли напрямною кривою є коло радіуса  $r_o$ . Це означає, що переносний рух тригранника є обертальним: його стична площина обертається навколо вертикальної осі із швидкістю  $v_A=r_o\omega$ , де  $\omega$  – кутова швидкість обертання площини. Якщо частинка попадає на неї, то починає здійснювати складний рух. Знайдемо закон руху. Швидкість руху тригранника  $v_A=r_o\omega=const$ ,  $k=1/r_o=const$ , отже  $v'_A=k'=0$ . Підставивши ці значення у (5), отримаємо проекції абсолютного прискорення на орти тригранника:

$$w_{B\tau} = \frac{\omega^2}{k^2} \{ \rho'' - \rho(k + \varphi')^2 \cos \varphi \} - [2\rho'(k + \varphi') + \rho\varphi''] \sin \varphi; \tag{6}$$

$$w_{Bn} = \frac{\omega^2}{k^2} \{ \rho'' - \rho(k + \varphi')^2 \sin \varphi \} + [2\rho'(k + \varphi') + \rho\varphi''] \cos \varphi + k.$$

Єдиною прикладеною силою в площині, що обертається (наприклад, диск) буде сила тертя  $fmg$ , де  $f$  – коефіцієнт тертя,  $m$  – маса частинки,  $g=9,81 \text{ м/с}^2$ . Вектор сили тертя буде спрямований в сторону, протилежну вектору відносної швидкості, тобто по дотичній до відносної траєкторії (до траєкторії ковзання частинки по диску). Його проекції на орти  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$  матимуть таке ж співвідношення, що і складові відносної швидкості  $\rho'_\tau$  і  $\rho'_n$ . Згідно (3) відносна траєкторія на орти тригранника описується наступними рівняннями:

$$\rho_\tau = \rho \cos \varphi; \quad \rho_n = \rho \sin \varphi. \tag{7}$$

Продиференціювавши (7), знайдемо проекції одиничного вектора дотичної до відносної траєкторії:

$$\rho'_\tau = \frac{\rho' \cos \varphi - \varphi' \rho \sin \varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}}; \quad \rho'_n = \frac{\rho' \sin \varphi + \varphi' \rho \cos \varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}}. \tag{8}$$

Склавши рівняння руху в проекціях на орти тригранника, після скорочення на масу  $m$  частинки одержимо систему двох диференціальних рівнянь у вигляді:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \{ \rho'' - \rho(k + \varphi')^2 \cos \varphi \} - [2\rho'(k + \varphi') + \rho\varphi''] \sin \varphi = -fg \frac{\rho' \cos \varphi - \varphi' \rho \sin \varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}}; \tag{9}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} \{ \rho'' - \rho(k + \varphi')^2 \sin \varphi \} + [2\rho'(k + \varphi') + \rho\varphi''] \cos \varphi + k = -fg \frac{\rho' \sin \varphi + \varphi' \rho \cos \varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}}.$$

Система диференціальних рівнянь (9) відносного руху частинки має громіздкий вигляд. Однак не важко замітити, що вона має певну симетрію: в лівих частинах при  $\sin \varphi$  і  $\cos \varphi$  стоять однакові вирази. Розв'язуючи систему (9) відносно них, отримаємо:

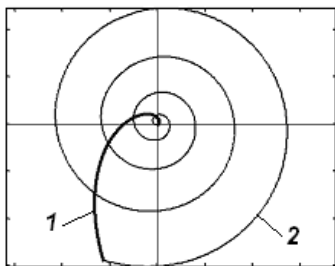


Рис. 2. Абсолютна - 1 і відносна - 2 траєкторії руху частинки при  $r_o=0,05 \text{ м}$ ,  $\omega=10 \text{ рад/с}$  і  $f=0,3$

$$\rho'' - \rho(k + \varphi')^2 = -fg \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}} - k \sin \varphi; \tag{10}$$

$$\rho\varphi'' + 2\rho'(k + \varphi') = -fg \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\rho\varphi'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}} - k \cos \varphi.$$

Залежності  $\rho=\rho(s)$  і  $\varphi=\varphi(s)$  як розв'язок системи диференціальних рівнянь (10) є параметричними рівняннями траєкторії відносного руху, а їх підстановка у (2) дасть параметричні рівняння абсолютної траєкторії. Рівняння (10) були розв'язані чисельними методами і за результатами розв'язку було побудовано траєкторії відносного і абсолютного руху частинки (рис. 2).

В цілому до складу вектора абсолютного прискорення входить чотири залежності змінної  $s$ : рівняння відносного руху  $\rho_\tau$  і  $\rho_n$ , форма траєкторії переносного руху тригранника – натуральне рівняння кривої  $k$ , швидкість  $v_A$  переміщення тригранника вздовж кривої. Оскільки рівнянь тільки двох, то на характер руху потрібно накладати обмеження. Такими обмеженнями в нашому випадку було коло ( $k=const$ ) і стала швидкість руху тригранника по ньому ( $v_A=const$ ).

Тепер поставимо обернену задачу: знайти такий характер руху, при якому частинка у відносному русі опише коло ( $\rho=const$ ) і обертатиметься по ньому з лінійною залежністю кута  $\varphi$  від довжини дуги  $s$  ( $\varphi=as$ ). Знайшовши похідні цих залежностей ( $\rho'=\rho''=0$ ,  $\varphi'=a$ ,  $\varphi''=0$ ) і підставивши них у рівняння (5), одержимо проекції вектора абсолютного прискорення на орти тригранника:

$$w_{B\tau} = v_A v'_A [I - \rho(k + a) \sin as] - v_A^2 \rho(k + a)^2 \cos as - v_A^2 k' \rho \sin as; \tag{11}$$

$$w_{Bn} = v_A v'_A \rho(k + a) \cos as - v_A^2 \rho(k + a)^2 \sin as + v_A^2 k' \rho \cos as + v_A^2 k.$$

Проекції одиничного вектора дотичної до відносної траєкторії згідно формул (8) запишуться:

$$\rho'_\tau = -\sin as; \quad \rho'_n = \cos as. \tag{12}$$

За аналогією із (9) система диференціальних рівнянь відносного руху частинки в проєкціях на орти супровідного тригранника запишеться (на відміну від (9), де диференціальні рівняння є рівняннями другого порядку, в даному випадку вони є диференціальними рівняннями першого порядку):

$$v_A v'_A [1 - \rho(k+a) \sin as] - v_A^2 \rho(k+a)^2 \cos as - v_A^2 k' \rho \sin as = fg \sin as; \tag{13}$$

$$v_A v'_A \rho(k+a) \cos as - v_A^2 \rho(k+a)^2 \sin as + v_A^2 k' \rho \cos as + v_A^2 k = -fg \cos as.$$

Розв'яжемо систему (13) відносно похідних невідомих функцій:

$$v'_A = \frac{v_A}{\cos as} [\rho(k+a)^2 - k \sin as]; \tag{14}$$

$$k' = \frac{\rho(k+a)\rho(2k+a)\sin as - \rho^2(k+a)^3 - k}{\rho \cos as} - \frac{fg}{\rho v_A^2}.$$

Чисельне інтегрування системи (14) показало, що такий рух може бути тільки на обмеженій ділянці переносної траєкторії із змінною швидкістю руху тригранника по ній. На рис. 3,а побудована траєкторія переносного руху тригранника довжиною 20 м. На початку руху, посередині траєкторії і в кінці руху зображено тригранник з матеріальною частинкою B в його системі, яка у відносному русі описує дугу кола. При прийнятому значенні  $a=0,05$  частинка в кінці шляху повертається на кут  $\varphi=as=1 \text{ рад}$ . Щоб такий відносний рух відбувся, потрібно триграннику рухатися із змінною швидкістю, яка зростає від 1 м/с до 8,5 м/с (рис. 3,б).

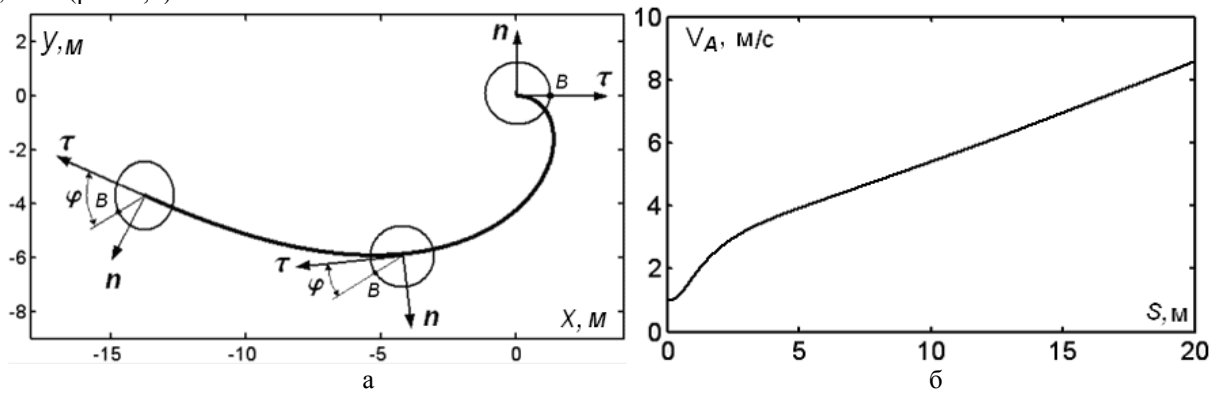


Рис. 3. Кінематичні характеристики переміщення частинки у складному русі при  $\rho=1 \text{ м}$ ,  $a=0,05$ ,  $f=0,3$ :  
 а) крива переносного руху тригранника  $k=k(s)$  з окремими його положеннями і частинкою B в його системі;  
 б) графік зміни швидкості  $v_A=v_A(s)$  переносного руху тригранника по кривій

Як видно із рис. 3,а, в кінці траєкторія переносного руху тригранника (зображена потовщеною лінією) наближається до прямої. За логікою, щоб точка B (матеріальна частинка) повернулася на кут  $\varphi=90^\circ$ , потрібне зростання швидкості тригранника. Як тільки вона досягне кута  $\varphi=90^\circ$ , тобто займе місце на головній нормалі, для подальшого руху частинки по колу потрібне гальмування тригранника і зміна кривини траєкторії переносного руху. Такий рух тригранника ми отримали при інших вихідних умовах: початкове положення точки брали не на орті дотичної, тобто при  $\varphi=0^\circ$ , а при  $\varphi=-60^\circ$ . Це дало можливість подовжити відносний рух частинки по колу. При  $a=0,3$  і довжині переносної траєкторії  $s=10,23 \text{ м}$  (до цих меж було можливе інтегрування) частинка при відносному русі по колу радіуса  $\rho=0,5 \text{ м}$  повернулася на кут  $\varphi=as=0,3 \times 10,23=3,07 \text{ рад}$  або  $176^\circ$  (рис. 4,а). Як видно із рисунка, траєкторія руху тригранника змінила знак кривини. Як і передбачалося, після зростання швидкості спостерігається гальмування, швидкість практично падає до нуля і тригранник зупиняється (рис. 4,б).

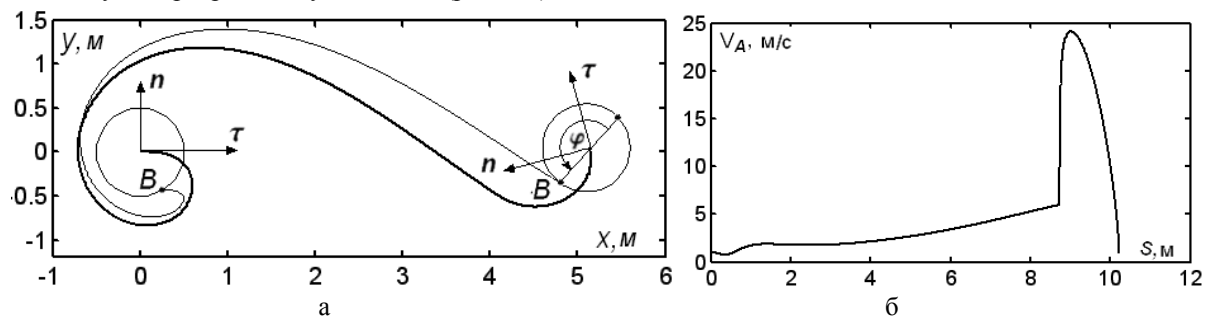


Рис. 4. Кінематичні характеристики переміщення частинки у складному русі при  $\rho=0,5 \text{ м}$ ,  $a=0,3$ ,  $f=0,3$ :  
 а) траєкторії переносного руху тригранника і абсолютного руху частинки з позначенням частинки B в системі тригранника на початку і кінці руху;  
 б) графік зміни швидкості  $v_A=v_A(s)$  переносного руху тригранника по кривій

Можна також дослідити відносний і абсолютний рухи частинки по знайдених кривих переносної траєкторії, але з постійною швидкістю руху тригранника по них. В цьому випадку невідомими функціями

будуть  $\rho=\rho(s)$  і  $\varphi=\varphi(s)$ , тобто рівняння відносного руху. Кривину  $k=k(s)$  і її похідну вважаємо відомими, оскільки беремо їх із робочого простору, одержаному при чисельному інтегруванні системи (14),  $v_A=const$ . Складаємо систему диференціальних рівнянь і знаходимо із неї вирази других похідних невідомих функцій:

$$\rho'' = \rho(k + \varphi')^2 - k \sin \varphi - \frac{fg\rho'}{v_A^2 \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}}; \quad \varphi'' = -2 \frac{\rho'}{\rho} (k + \varphi') - \frac{k}{\rho} \cos \varphi - \frac{fg\varphi'}{v_A^2 \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}} - k'. \quad (15)$$

За результатами чисельного інтегрування системи (15) для кривої переносного руху тригранника, зображеної на рис. 3,а, було побудовано абсолютні траєкторії руху частинки при сталих швидкостях руху тригранника 1,5 м/с і 2 м/с (рис. 5,а). При швидкостях, менших 1 м/с частинка практично не ковзає по стичній площині, тобто відносний рух рівний нулеві і абсолютна траєкторія збігається із траєкторією переносного руху тригранника.

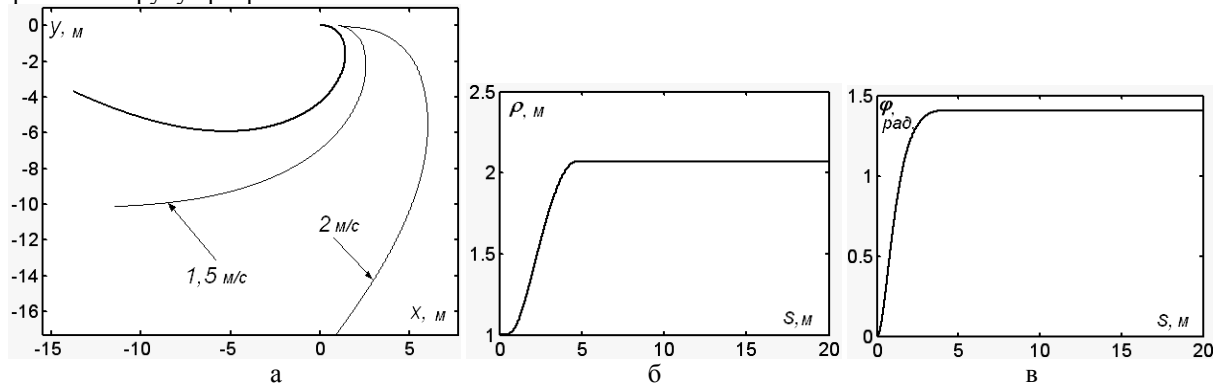


Рис. 5. Кінематичні характеристики переміщення частинки у складному русі при  $f=0,3$ ,  $v_A=const$ :  
 а) траєкторія переносного руху тригранника (потовщена лінія) і траєкторії абсолютного руху;  
 б) графік зміни відстані  $\rho=\rho(s)$  відносного руху частинки;  
 в) графік зміни кута  $\varphi=\varphi(s)$  відносного руху частинки

Для швидкості тригранника  $v_A=2$  м/с на рис. 5,а,б показано графіки залежностей  $\rho=\rho(s)$  і  $\varphi=\varphi(s)$ . Із них видно, що частинка здійснює відносний рух тільки на початку шляху (до 5 м), а потім вона зупиняється. Це і зрозуміло, оскільки кривина кривої зменшується, отже зменшується і відцентрова сила, яка змушує частинку ковзати по стичній площині тригранника.

### Висновки

Складені диференціальні рівняння дозволяють розв'язувати задачі на динаміку складного руху матеріальної частинки, яка знаходиться в стичній площині супровідного тригранника Френе плоскої кривої в горизонтальній площині. Можна розв'язувати не тільки пряму задачу на знаходження відносного руху частинки при заданій кривій переносного руху тригранника і його швидкості, а і обернену, тобто знаходити криву переносного руху і швидкість руху по ній тригранника при заданому відносному русі.

### Список використаної літератури

1. Чепижный А.В. Геометрия сложного движения точки на плоскости. Абсолютные скорость и траектория / А.В. Чепижный, С.Ф. Пилипака // Современный научный вестник. Научно-теоретический и практический журнал. — Белгород: Руснаучкнига, 2014. — № 17 (213). — С. 109—118.
2. Пилипака С.Ф. Кінематична інтерпретація руху супровідних тригранників Френе і Дарбу через внутрішні параметри кривих / С.Ф. Пилипака // Науковий вісник Національного аграрного університету. — К.: НАУ, 1998. — Вип. 4. — С. 143—146.
3. Пилипака С.Ф. Тригранник і формули Френе в задачах кінематики і динаміки матеріальної частинки у складному русі / С.Ф. Пилипака, Д.Г. Войтюк, М.К. Лінник // Науковий вісник Національного аграрного університету. — К.: НАУ, 2005. — Вип. 80. — С. 271—287.
4. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. — К.: УАСХН, 1960. — 283 с.
5. Заика П.М. Избранные задачи земледельческой механики / П.М. Заика. — К.: Изд-во УСХА, 1992. — 507 с.
6. Чепіжний А.В. Відносний рух частинки вздовж прямолінійної лопатки на відцентровому апараті / А.В. Чепіжний, В.М. Несвідомін, І.Ю. Грищенко // Сучасні проблеми моделювання. — Мелітополь: МДПУ, 2016. — Вип. 6. — С. 130—134.
7. Чепіжний А.В. Визначення положень ланок плоского механізму за допомогою системи тригранника Френе / А.В. Чепіжний, В.М. Бабка // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КНУБА, 2012. — Вип. 90. — С. 20—26.



УДК 004.6

В.В. СПИРИНЦЕВ, Н.А. ШИТИК  
Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара**АНАЛИЗ СОВРЕМЕННЫХ АРХИТЕКТУРНЫХ ШАБЛОНОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ПРИЛОЖЕНИЙ В СРЕДЕ IOS**

*Представлены результаты исследования основных архитектурных шаблонов (Model – View – Controller (MVC) и View – Interactor – Presenter – Entity – Router (VIPER)), используемых при проектировании приложений для мобильной платформы iOS. Выявлены их функциональные особенности, преимущества и недостатки. Освещены сферы их применения для выбора оптимальной стратегии при разработке корпоративных приложений.*

*Ключевые слова: паттерны, MVC, VIPER, диаграмма классов.*

V.V. SPIRINTSEV, M.A. SHYTIK  
Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара**АНАЛІЗ СУЧАСНИХ АРХІТЕКТУРНИХ ШАБЛОНІВ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ ДОДАТКІВ У СЕРЕДОВИЩІ IOS**

*Представлені результати дослідження основних архітектурних шаблонів (Model – View – Controller (MVC) і View – Interactor – Presenter – Entity – Router (VIPER)), що використовуються при проектуванні додатків для мобільної платформи iOS. Виявлено їхні функціональні особливості, переваги та недоліки. Висвітлено сфери їхнього застосування для вибору оптимальної стратегії при розробці корпоративних додатків.*

*Ключові слова: паттерни, MVC, VIPER, діаграма класів.*

V.V. SPIRINTSEV, M.A. SHYTIK  
Dnepropetrovsk National University named after Oles Honchar**THE ANALYSIS OF MODERN ARCHITECTURAL PATTERNS OF THE APPLICATIONS USED FOR PLANNING IS IN ENVIRONMENT OF IOS**

*The results of research of the basic architectural templates (Model – View – Controller (MVC) and View – Interactor – Presenter – Entity – Router (VIPER)) used for planning of appendixes for the mobile platform of iOS are presented. Their functional features, advantages and defects, are educed. The spheres of their application are lighted up for the choice of optimal strategy at development of corporate applications.*

*Keywords: patterns, MVC, VIPER, diagram of classes.*

**Постановка проблеми**

Корпоративные приложения чаще всего имеют дело с разнородными данными неограниченного объема и бизнес-правилами, логика которых усложнена большим количеством частных случаев, в условиях различия бизнес-процессов и представления данных. Кроме того, бизнес-требования могут изменяться во времени, и система должна быть адаптируемой к внесению изменений. В большинстве случаев, решаемые в процессе разработки таких приложений задачи являются однотипными. В связи с этим актуальными являются исследования в направлении проектирования и реализации шаблонного решения, которое одновременно должно быть достаточно гибким для реализации уникального для каждого приложения функционала. Шаблон (или паттерн) проектирования в разработке программного обеспечения – повторяемая архитектурная конструкция, представляющая собой решение проблемы проектирования в рамках некоторого часто возникающего контекста [1]. Суть проектирования архитектуры приложения – использовать современные инструменты, подходы и технологии для получения максимальной выгоды, с учетом требований и ограничений, вытекающих из поставленных задач. При этом необходимо максимально учитывать современные тенденции и тенденции ближайшего будущего для обеспечения максимальной прибыли через масштабируемость, гибкость и обслуживание. В качестве признаков эффективной архитектуры выделяют: сбалансированное распределение обязанностей между сущностями с жесткими ролями; тестируемость, простота использования и низкая стоимость обслуживания.

**Анализ последних исследований**

Для снижения сложности системы путём абстракции и разграничения полномочий классов используют принципы SOLID (Single Responsibility Principle, Open-Closed Principle, Liscov Substitution Principle, Interface Segregation Principle и Dependency Inversion Principle). SOLID – это пять основных принципов объектно-ориентированного программирования и проектирования, предназначенных для повышения вероятности создания системы, которую будет легко поддерживать и расширять в течение длительного времени [2]. Для удовлетворения проектируемой системы различным атрибутам качества

применяются архитектурные шаблоны. Наиболее популярным шаблоном построения системы для платформы iOS является шаблон Model – View – Controller (MVC), адаптированный под особенности реализации стандартных фреймворков UIKit и Foundation [3] (такой подход рекомендует использовать Apple в своих гайдлайнах по разработке). Однако при разработке крупных корпоративных приложений при помощи шаблона MVC можно столкнуться с такими проблемами, как сосредоточение кода в контроллерах, усложнение тестирования, недостаточная модульность, высокая связанность классов и т.д. В качестве альтернативы MVC (особенно при использовании Swift в качестве языка разработки) при проектировании архитектуры все чаще используют шаблон View – Interactor – Presenter – Entity – Router (VIPER), который позволяет избежать перечисленных недостатков архитектуры, однако при этом гораздо увеличивается количество классов, интерфейсов, и как следствие – кода в целом [1, 4].

#### Формулирование цели исследования

Цель работы заключается в осуществлении анализа современных архитектурных паттернов, изучении сфер их применения для выбора оптимальной стратегии при разработке корпоративных приложений для мобильной платформы iOS.

#### Основная часть

При разработке корпоративных приложений для мобильных платформ одним из самых популярных является шаблон MVC. При использовании MVC каждый класс в приложении выполняет одну из трех ролей: модель, контроллер или представление, при этом шаблон определяет не только роли, но и то, как объекты взаимодействуют друг с другом. Модель инкапсулирует данные, логику и правила обработки данных. Так как объекты моделей представляют собой знания в конкретной предметной области, они могут быть переиспользованы для решения подобных задач. Объекты моделей не должны обладать знанием о своем представлении и связи с пользовательским интерфейсом. Взаимодействие пользователей со слоем представления, следствием которого является создание или обновление данных, обрабатывается контроллером, который в свою очередь обновляет слой данных [4]. После того, как модель получает обновления (к примеру, данные, полученные из сети; уведомления от гироскопа и т.д.), она оповещает контроллер, который обновляет соответствующие представления. Модели делятся на активные и пассивные: активные модели хранят логику и алгоритмы, пассивные – данные. При разработке приложений с помощью фреймворка Cocoa Touch, в роли пассивных моделей обычно выступают наследники базового класса NSObject. В случае, если модели необходимо хранить в базе данных, это могут быть наследники NSManagedObject (предоставленные стандартной оболочкой для работы с базами данных в iOS – CoreData) [5], либо наследники объектов из сторонних решений – RLMObject из библиотеки Realm, MTLModel из Mantle и т.д. Ответственностью объектов представления является отображение данных для пользователей, реакция на пользовательские действия и передача уведомлений о них контроллеру. Фреймворк UIKit предоставляет большой набор стандартных компонентов слоя представления, а непосредственно разработку пользовательского интерфейса можно производить как из кода, так и с помощью инструмента xCode Interface Builder. Контроллер выступает посредником между моделью и представлением, а также может координировать задачи приложения и управлять жизненным циклом других объектов. MVC стал стандартом в современной разработке программного обеспечения для мобильных платформ благодаря разделению кода на бизнес-логику, управление процессом выполнения задач и отображение, что способствует масштабируемости и поддерживаемости [6].

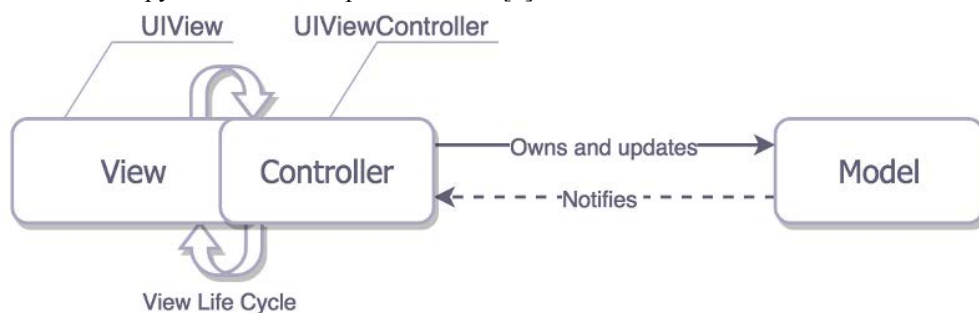


Рис. 1. Схема взаимодействия компонентов архитектуры MVC

Однако при значительном увеличении функционала использование MVC порождает некоторые проблемы. MVC не предусматривает разбиения функционала приложения на модули (как пример, частой ситуацией в разработке корпоративных приложений является существование синглтона NetworkClient, который выполняет запросы по авторизации, созданию пользовательского контента, поиску пользователей и т.д.). При существенном разрастании функционала количество таких универсальных классов увеличивается (сервисы, хелперы, модели), что значительно увеличивает связанность кода. Для наглядности рассмотрим схематическую диаграмму классов реального корпоративного приложения, построенную с помощью утилиты dependency-visualizer (каждый круг – это класс, стрелка между классами означает, что один из классов в своей реализации обращается к другому). Приложение построено на базе архитектуры MVC, но без разделения на модули.

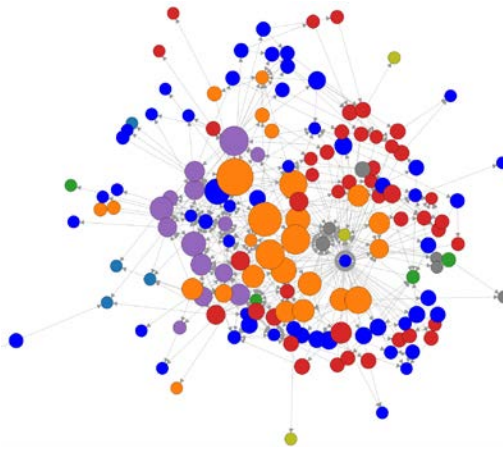


Рис. 2. Диаграмма классов приложения, разработанного с помощью MVC

Наличие большого количества связей между классами говорит о том, что необходимость изменения интерфейса одного из них повлечет за собой изменение реализации всех классов, которые от него зависят.

Одним из самых главных классов в Cocoa Touch является `UIViewController`, который управляет набором представлений, взаимодействием между ними и передачей обновлений от соответствующих моделей. Так как объекты-наследники `UIViewController` отвечают за весь отображаемый на экране интерфейс в момент времени, в них сосредотачивается весь код, который отвечает за получение данных из разнообразных источников (ответы на сетевые запросы; координаты от сервиса геолокации; уведомления от акселерометра и гироскопа и т.д.), обработку полученной информации, подготовку к отображению и непосредственно отображение. Такой подход нарушает принцип единой ответственности, усложняет тестирования, создает дополнительный порог сложности для понимания новыми членами команды.

Еще одним недостатком MVC при разработке для iOS является отсутствие явного выделения ответственности для навигации. В мобильных приложениях часто возникает необходимость осуществлять сложные переходы между пользовательскими сценариями, и, при проектировании с помощью шаблона MVC, код, который отвечает за навигацию (выбор того, на какой экран произойдет переход, наполнение соответствующего наследника `UIViewController`, осуществление анимированного перехода) остается в `ViewController` и добавляет еще одну ответственность к вышеперечисленным.

Для решения указанных проблем была предложена архитектура VIPER, которая является расширением MVC. Она более детально разделяет ответственности между слоями и вносит понятие модульности. Слой `View` совпадает в обеих архитектурах, `Interactor` является активной моделью и перенимает обязанности `Model` и `ViewController`, `Presenter` – слой, который отвечает за подготовку данных к отображению и передачу пользовательских событий к уровню `Interactor` (в MVC этими задачами занимался `ViewController`), `Entity` – пассивная модель, `Router` (часто также называемый `Wireframe`) – слой, отвечающий за навигацию.

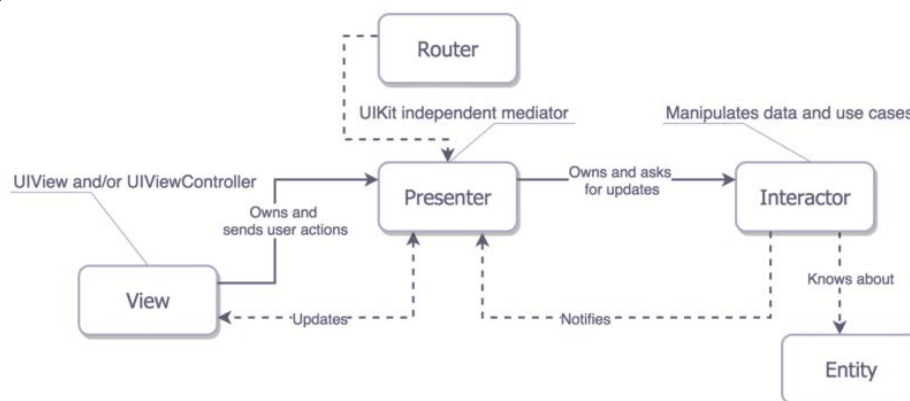


Рис. 3. Схема взаимодействия компонентов архитектуры VIPER

Взаимодействие между слоями происходит через интерфейсы (у класса, принадлежащего к любому из VIPER-слоев кроме `Entity` есть два протокола – ввода и вывода), поэтому один VIPER-модуль содержит как минимум пять классов и восемь интерфейсов. Большое количество шаблонного кода является главным недостатком VIPER, с которым частично можно бороться с помощью кодогенерации. Одной из широко используемых утилит для генерации Swift-кода является `Generamba`, разработанная iOS-командой компании `Rambler`, которая создает пустой VIPER-модуль со всеми классами и интерфейсами, добавляет его в файловую систему проекта и в файл проекта `.pbxproj`.

Пример модуля, который реализует отображения профиля текущего пользователя в корпоративном приложении.

```

// Слой Entity - пассивная модель
struct TextInfo {
    var collectionsDescriptionText = ""
    var descriptionText = ""
    var productsText = ""
}
// Слой Interactor - отвечает за получение и обработку данных из сети и оповещение слоя Presenter
// об обновлениях с помощью протокола InteractorOutput
protocol InteractorInput: class {
    weak var output: HomeInteractorOutput! { get set }
    func fetchHomeInfo()
}
protocol InteractorOutput: class {
    func interactorDidFetchTextInfo(homeInfo: TextInfo)
    func interactorDidFetchImageInfo(homeInfo: ImageInfo)
    func interactorHomeInfoFetchDidFail(error: NSError)
    func interactorDidFetchFullInfo()
}
class Interactor: InteractorInput {
    weak var output: InteractorOutput!
    private let apiClient: APIClient
    private var homeTextInfo = TextInfo()
    private var homeImageInfo = ImageInfo()
    // MARK: - InteractorInput
    func fetchHomeInfo() {
        let executor = Executor.mainThreadExecutor()
        var tasks = [Task]()
        let textInfoQuery = Content.homeQuery("key", containedIn: [TextInfoKey, ImageKey])
        let textInfoTask = textInfoQuery.findObjectsInBackground() { [weak self] task in
            if let homeTextInfo = task.result as? [Content] {
                self?.parseTextServerResponse(homeTextInfo)
            }
        }
        tasks = [textInfoTask]
        let combineTask = Task(forCompletionOfAllTasks: tasks)
        combineTask.continueWith({ [weak self] task in self?.didFinishLoading(task.error)})
    }
    // MARK: Response handling
    private func parseTextServerResponse(textContent: [Content]) {
        if let index = textContent.indexOf( {$0.key == TextInfoKey }) {
            let collectionsTextInfo = textContent[index]
            homeTextInfo.collectionsDescriptionText = collectionsTextInfo.textValue!
        }
        output.interactorDidFetchTextInfo(homeTextInfo)
    }
}
// Слой Presenter - отвечает за пользовательский ввод, запрос информации из слоя Interactor и
// обновление представления
protocol PresenterOutput: class {
    func homePresenterDidSelectMenu(presenter: Presenter)
    func homePresenterDidSelectCollections(presenter: Presenter)
}
class Presenter: ViewOutput, InteractorOutput {
    var interactor: InteractorInput!
    weak var output: PresenterOutput!
    weak var view: ViewInput
    private var homeInfoLoaded = false
    // MARK: ViewOutput
    func viewIsReady() {
        interactor.fetchHomeInfo()
    }
    func viewDidSelectCollections() {
        output.homePresenterDidSelectCollections(self)
    }
    // MARK: HomeInteractorOutput
    func interactorDidFetchTextInfo(homeInfo: HomeTextInfo) {
        view.applyTextInfo(homeInfo)
    }
    func interactorDidFetchImageInfo(homeInfo: HomeImageInfo) {
        view.applyImageInfo(homeInfo)
    }
}
// Создается модуль с помощью builder-метода. Важно заметить, что в архитектуре MVC класс
// UINavigationController относился к слою Controller, а в VIPER - к слою View.

private func presentHome(animated: Bool) {
    let viewController = UIStoryboard.Scene.Profile.instantiateViewController()
    modulePresenter = Presenter()
    modulePresenter.output = self
}

```

```

let interactor = Interactor(container: session.container)
modulePresenter.interactor = interactor
interactor.output = modulePresenter
modulePresenter.view = viewController
viewController.output = modulePresenter
navigationController.setViewControllers([homeViewController], animated: animated)
}

```

При правильном разбиении функционала приложения на модули диаграмма классов может выглядеть следующим образом:

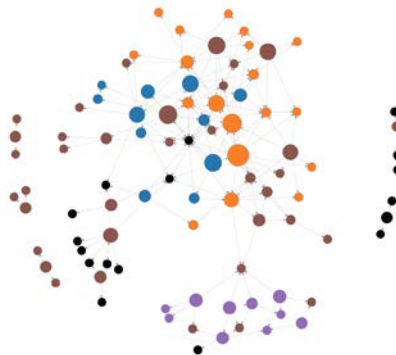


Рис. 4. Диаграмма классов приложения, разработанного с помощью VIPER

Как видно из рис. 4, VIPER-приложение содержит набор классов (которые являются ядром приложения) и набор модулей, каждый из которых является обособленной группой классов. Модуль соединяется с ядром с помощью классов – ModuleBuilder. Таким образом, логика приложения распределяется по модулям, следовательно, уменьшается связанность функционала, упрощается добавление или удаление модулей.

#### Выводы

В работе рассмотрены наиболее распространенные архитектурные шаблоны для мобильной платформы iOS: MVC и VIPER. Указанные паттерны реализуют разделение ответственностей между классами, что обеспечивает высокую переиспользуемость и гибкость кода. Однако, при масштабировании приложения абстракций MVC недостаточно для того, чтобы разделить функционал между классами и полностью придерживаться принципов SOLID. Использование шаблона VIPER позволяет решить данную задачу. С другой стороны, VIPER предполагает большое количество классов и шаблонного кода, поэтому использование его в небольших проектах, либо в проектах, где нет переиспользования кода, является избыточным.

#### Перспективы исследований

Большинство мобильных приложений представляют собой Create – Read – Update – Delete (CRUD) клиенты, разработанные для решения повседневных задач: заказ товаров и услуг, обмен графическими и текстовыми данными, новостная агрегация и т.д. В большинстве случаев, решаемые в процессе разработки таких приложений задачи являются однотипными. В связи с этим актуальными являются исследования в направлении проектирования и реализации шаблонного решения. Выбор правильной масштабируемой архитектуры обеспечивает качество программного продукта, а решение этой задачи позволяет значительно сократить затраты на разработку приложений с таким функционалом и увеличить их стабильность за счет тестирования шаблона во многих продуктах.

#### Список использованной литературы

1. Гамма Э. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования / Э. Гамма, Р. Хелм, Р. Джонсон, Дж. Влассидес: пер. с англ. – С.-Петербург: Питер, 2016. – 368 с.
2. Мартин Р. Быстрая разработка программ. Принципы, примеры, практика / Р. Мартин, Дж. Ньюкирк, Р. Косс: пер. с англ. – М.: Вильямс, 2004 – 752 с.
3. Neuburg M. iOS 9 Programming Fundamentals with Swift: Swift, Xcode, and Cocoa Basics / M. Neuburg-S.: O'Reilly Media, 2015. – 604 p.
4. Фримен Э. Паттерны проектирования / Э. Фримен, К. Сиерра, Б. Бейтс: пер. с англ. – С.-Петербург: Питер, 2016. – 656 с.
5. Zarra M. Core Data: Data Storage and Management for iOS, OS X, and iCloud [Text] / M. Zarra – N.-Y.: Pragmatic Bookshelf, 2013. – 43 с.
6. Бек К. Шаблоны реализации корпоративных приложений: пер. с англ. / К. Бек. – М.: Вильямс, 2000. – 224 с.

УДК 004.93

О.В. СПІРИНЦЕВА, П.С. СУХОРУКОВ  
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара**ЗАСТОСУВАННЯ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ В ОБРОБЦІ  
ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ**

*Досліджено можливість застосування фрактальної обробки до цифрових зображень з метою їх сегментації, а саме, для виділення контурів об'єктів цифрового багатоспектрального зображення. Спосіб двовимірної сегментації, що пропонується авторами, можна розглядати як альтернативний спосіб класифікації зображення за допомогою пакету прикладних програм MatLab.*

*Ключові слова: мультифрактальний аналіз, сегментація, цифрове зображення.*

О.В. СПИРИНЦЕВА, П.С. СУХОРУКОВ  
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара**ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ОБРАБОТКЕ  
ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

*Исследована возможность применения фрактальной обработки к цифровым изображениям с целью их сегментации, а именно, для выделения контуров объектов цифрового многоспектрального изображения. Предлагаемый авторами способ двухмерной сегментации можно рассматривать как альтернативный способ классификации изображения с помощью пакета прикладных программ MatLab.*

*Ключевые слова: мультифрактальный анализ, сегментация, цифровое изображение.*

O.V. SPIRINTSEVA, P.S. SUKHORUKOV  
Oles Honchar Dnipropetrovsk National University**FRACTAL ANALYSIS APPLICATION TO DIGITAL IMAGES PROCESSING**

*The possibility of fractal analysis application to digital images with the view of their segmentation is studied. This task proposes the digital multispectral image object contour extraction. The method of two-dimensional segmentation suggested by authors could be considered as the alternative image classification method by means of MatLab application package.*

*Keywords: multispectral analysis, segmentation, digital image.*

**Постановка проблеми**

Дані, отримані від обробки цифрових зображень, мають надзвичайно важливе значення в розвитку сучасних технологій, науки та техніки, а також велике народногосподарське значення. Методи обробки цифрових зображень безперервно розвиваються та вдосконалюються в частині покращення візуального сприйняття зображення, його попередньої обробки, знешумлення, сегментації та класифікації зображень з метою виділення об'єктів інтересу.

Із стрімким розвитком комп'ютерних технологій особливу популярність дістали фрактали та фрактальний аналіз на їх основі. Оскільки фрактал, як геометричний об'єкт, має нетривіальну структуру на всіх масштабах, є самоподібним та має розмірність відмінну від топологічної, то сфера досліджень фракталів та їх застосування в науці та техніці виявляється цікавою, зокрема в області обробки цифрових зображень. Таким чином, доцільно досліджувати методи сегментації цифрових зображень, розроблені за допомогою методів фрактального аналізу, зокрема із застосуванням поточної експоненти Гельдера.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Теорія фракталів як потужний математичний інструмент, запропонована Мандельбротом [1], знайшла широке застосування в багатьох сферах природничих наук. Підхід мультифрактальної сегментації зображень не є параметричним та аналізує зображення за допомогою деяких особливостей його мультифрактального спектру [2]. Безумовно, цілком можливо використовувати Weakly Self Affine functions [3] з метою моделювання та сегментації зображень, також як і використовувати мультифрактальні інструменти сегментації одновимірних сигналів. Актуальним є дослідження методу моделювання, що адаптований до виконання двовимірної сегментації.

**Формулювання мети дослідження**

Фрактальний аналіз цифрових зображень дозволяє здійснювати таку процедуру обробки як сегментація зображення з метою розділення його на складові частини або об'єкти за необхідним рівнем деталізації. Метою роботи є розробка нового способу сегментації та дослідження його властивостей, а саме

виділення контурів об'єктів цифрового багатоспектрального зображення. Цей спосіб можна розглядати як альтернативний спосіб класифікації зображення за допомогою пакету прикладних програм MatLab [4].

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Ефективність комп'ютерної обробки цифрових зображень залежить від адекватності моделі, що описує зображення, необхідної для розробки алгоритмів обробки. Модель зображення представляє собою систему функцій, які описують істотні характеристики зображення: функцію яскравості, що відбиває зміну яскравості в площині зображення, просторові спектри й спектральні інтенсивності зображень, функції автокореляції [5].

Фрактал є математичною множиною, що володіє властивістю самоподібності: об'єкт в точності або наближено збігається з частиною себе самого, тобто ціле має ту ж форму, що і одна або більше частин. Фрактал – це сукупність точок в евклідовому просторі, які мають дробову метричну розмірність (в сенсі Мінковського або Хаусдорфа), або метричну розмірність, відмінну від топологічної, тому їх слід відрізнити від інших геометричних фігур, обмежених кінцевим числом ланок [6, 7].

Принцип сегментації зображення з метою аналізу і класифікації об'єктів інтересу на зображенні полягає у розділенні зображення на складові частини або елементарні об'єкти. Рівень деталізації поділюваних областей залежить від розв'язуваної задачі. Наприклад, коли об'єкт інтересу перестає зберігати цілісність, розбивається на більш дрібні складові частини процес сегментації варто припинити. Алгоритми сегментації зображень найчастіше базуються на розриві і подібності значень яскравості на зображенні. Підхід розривів яскравості базується на основі різких змін значень яскравості, підхід подібності – на поділі зображення на області, подібні згідно з рядом заздалегідь визначених критеріїв. Таким чином, вибір алгоритму сегментації зображення безпосередньо залежить від проблеми, яку необхідно вирішити. Виявлення меж є частиною сукупності методів сегментації зображень, оскільки ефективність вирішення багатьох завдань обробки зображень і комп'ютерного зору часто залежить від якості виділених контурів об'єктів інтересу [8].

Принцип сегментації зображення на основі мультифрактального аналізу полягає в наступному. Згідно з [9], інтуїтивно зрозуміло, що пікселі зображення можуть бути класифіковані за показником чи експонентою Гельдера (відомий як експонента Ліпшиця). Це характеристика регулярності розподілу рівнів яскравості по полю зображення. Поточкова (локальна) експонента Гельдера відображає локальну регулярність, яка пропорційно залежить від поточної величини експоненти. Наприклад, точки, які належать контурам об'єкту, часто відповідають областям зосереджених неоднорідностей карти рівнів сірого. Такі точки взагалі мають низьку гелдерову закономірність. При цьому точне значення показника Гельдера залежить від характеристик зображення. Насправді, точки текстурних областей також взагалі мають низьку закономірність, тому є необхідність відрізнити їх від точок контурів.

Досліджуваний алгоритм сегментації на основі мультифрактального спектру має наступні етапи:

- поточкове обчислення зображення, пікселями якого є розрахункові значення експонент Гельдера у відповідних точках вихідного зображення у відтінках сірого; це отримане зображення описує локальні закономірності вихідного зображення. Експонента Гельдера в певній точці оцінюється з бі-логіфічного графіку залежності  $\ln(Mi(m, n))$  від  $\ln(i)$ , де  $Mi(m, n)$  – сума значень пікселів в околиці даного пікселю з просторовими координатами  $(m, n)$  обраного розміру  $i$ . Граничне значення поточної експоненти Гельдера оцінюється як кут нахилу прямої лінійної регресії на цьому бі-логіфічному графіку [10, 11].

- обчислення мультифрактального спектру Хаусдорфа на основі зображення експонент Гельдера;

- обчислення шуканого зображення на основі сукупності зображення експонент Гельдера та відповідного йому мультифрактального спектру шляхом вибору певного типу точок, встановлюючи потрібний поріг, відповідний певним значенням спектру. Шукане зображення відображає глобальні закономірності вихідного зображення та являє собою результат процесу сегментації зображення.

Слід зазначити, що під час обробки розглядалися декілька способів пошуку експонент Гельдера, відомі як Minimum (Min), Maximum (Max), Sum, Iso, Adoptive Iso Holder exponent capacities [10, 11]. Найбільш цікаві результати сегментації у відповідності до цих способів наведені далі у статті.

З метою дослідження алгоритму сегментації у якості тестового використано зображення, яке наведене на рис. 1.



Рис. 1. Вихідне цифрове зображення

Вихідне цифрове зображення є багатоспектральним зображенням та може бути представлено як сукупність трьох каналів, які відповідають червоному, зеленому та синьому кольорам електромагнітного спектру видимого проміння (рис. 2).

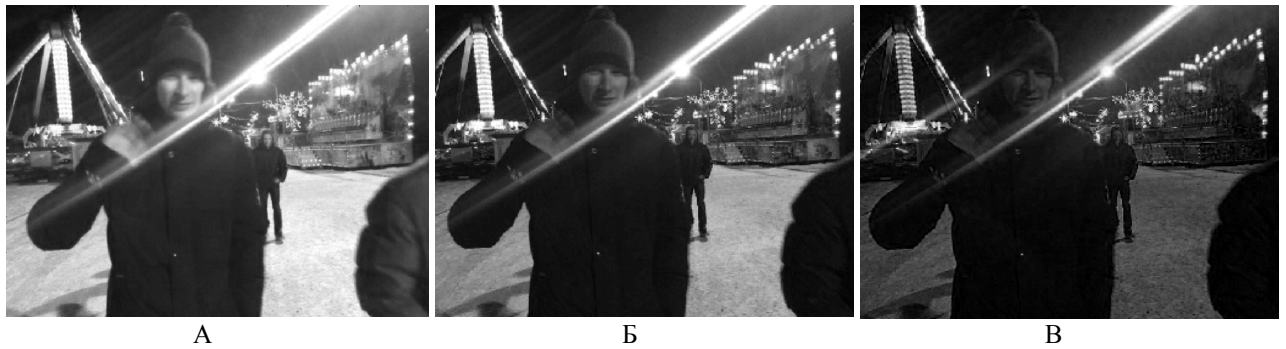


Рис. 2. Вихідне зображення, представлено по каналах

Поточкові значення експонент Гельдера, розраховані за переліченими вище способами, наведені у вигляді зображень у табл. 1 у відповідності до номеру каналу. Відповідні чисельні значення, а саме середні значення експоненти Гельдера по зображенню у відповідності до номеру каналу наведені у табл. 3.

Таблиця 1

Зображення поточкових експонент Гельдера

1* 2*	1	2	3
Max			
Min			
Iso			

\*1 – номер каналу, 2 – спосіб розрахунку експоненти Гельдера

З табл. 1 видно, що для зображення першого каналу при застосуванні способу "Max" отримано найбільш якісне виділення контурів у порівнянні зі способами "Min" та "Iso". Порівняно з першим каналом, на другому каналі при застосуванні способу "Max" видно (табл. 1), що зображення контурів стало ще більш



візуально виразним. На зображеннях експонент Гельдера для третього каналу багатоспектрального зображення при застосуванні наведених способів обчислення найкращим чином виділені контури дрібних об'єктів та більша кількість деталей.

Додатково з метою уточнення результатів обробки для зображень експонент Гельдера були обчислені ряд стандартних характеристик, таких як коефіцієнт кореляції між відповідними вихідними зображеннями та зображеннями експонент Гельдера, середньоквадратичне відхилення та середнє значення просторових розподілів рівнів яскравості отриманих зображень, а також інформаційна ентропія для зображень експонент Гельдера. Але з причин обмеженого обсягу статті ці дані наведені неповністю (табл. 3).

У табл. 2 наведені зображення, які представляють собою результати сегментації у відповідності до трьох каналів багатоспектрального зображення при застосуванні способів обчислення експоненти Гельдера "Min" та "Max" за різних порогових значень.

Таблиця 2

**Результати сегментації**

1 2	1	2	3
0.75;1.25			
1.00;1.40			
1.50;2.00			

\*1 – номер каналу, 2 – порогове значення сегментації

З табл. 2 видно, що при сегментації зображення на першому каналі контур зображення поліпшується, дрібні деталі при цьому зникають. На зображеннях, що відповідають другому каналу, контур об'єктів інтересу найбільш виразний в порівнянні з зображеннями, які відповідають першому та третьому каналам. Порівняно з зображеннями першого та другого каналів, на зображенні результату сегментації зображення третього каналу чітко проявилися дрібні деталі.

Аналогічно з метою оцінки та доповнення результатів сегментації були обчислені стандартні характеристики цифрових зображень: коефіцієнт кореляції між відповідними вихідними зображеннями та зображеннями результатів сегментації, середньоквадратичне відхилення та середнє значення просторових розподілів рівнів яскравості отриманих зображень сегментації, а також інформаційна ентропія для зображень сегментації (табл. 4-7).

Таблиця 3

**Середнє значення експоненти Гельдера**

$2^* \backslash 1^*$	1	2	3
<b>Max</b>	25.8889	33.5734	59.7446
<b>Min</b>	26.2467	35.1115	82.7212
<b>Iso</b>	240.3539	240.5928	240.9034
<b>adop. iso</b>	249.1197	249.1101	249.0711

\* 1 - номер каналу; 2 - спосіб обчислення експоненти Гельдера

Таблиця 4

**Коефіцієнт кореляції**

$2^* \backslash 1^*$	1	2	3
<b>0.75; 1.25</b>	0.9078	0.9178	0.9232
<b>1.00; 1.40</b>	0.9325	0.9385	0.9223
<b>1.50; 2.00</b>	0.8643	0.8747	0.8834

\* 1 - номер каналу; 2 - поріг сегментації

**Середньоквадратичне відхилення**

$2^* \backslash 1^*$	1	2	3
<b>0.75; 1.25</b>	0.24	0.32	0.3011
<b>1.00; 1.40</b>	0.29	0.37	0.33
<b>1.50; 2.00</b>	0.36	0.43	0.42

\* 1 - номер каналу; 2 - поріг сегментації

Таблиця 5

Таблиця 6

**Середнє значення**

$2^* \backslash 1^*$	1	2	3
<b>0.75; 1.25</b>	0.06	0.12	0.10
<b>1.00; 1.40</b>	0.09	0.17	0.12
<b>1.50; 2.00</b>	0.84	0.74	0.75

\* 1 - номер каналу; 2 - поріг сегментації

**Інформаційна ентропія**

$2^* \backslash 1^*$	1	2	3
<b>0.75; 1.25</b>	0.33	0.53	0.47
<b>1.00; 1.40</b>	0.46	0.66	0.55
<b>1.50; 2.00</b>	0.63	0.81	0.80

\* 1 - номер каналу; 2 - поріг сегментації

Таблиця 7

### Висновки

Здійснена мультифрактальна сегментація багатоспектрального цифрового зображення шляхом обчислення поточної експоненти Гельдера та мультифрактального спектра цього зображення. Проміжні та остаточні результати оцінені за допомогою стандартних характеристик цифрових зображень, які запроваджені в середовищі MatLab. Проведена візуальна оцінка результатів підтверджується чисельними розрахунковими даними.

Подальші дослідження сегментаційної обробки за допомогою фрактального аналізу доцільно виконувати в частині попереднього знешумлення вихідного багатоспектрального зображення, у тому числі фрактальними методами знешумлення. Також варто розглянути тему об'єднання та продовження контурів об'єктів інтересу, які зазнали розриву під час виконання грубої сегментації.

### Список використаної літератури

1. Mandelbrot B.B. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications / B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness // SIAM Rev. 10 (4). – 1968. – PP. 422–437.
2. Levy-Vehel J. Thinking in Patterns / J. Levy-Vehel, P. Legrand // Signal and Image Processing with FracLab. – 2004. – PP. 321–322.
3. Levy-Vehel J. Weakly Self Affne Functions and Applications in Signal Processing / J. Levy-Vehel // CUADERNOS del Instituto de Matematica "Beppo Levi". – 2001. – PP. 35–49.
4. Gonzales R.C. Digital Image Processing Using MATLAB / R.C. Gonzales, R.E. Woods, S. Eddins. – Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. – 2004. – 492 p.
5. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера. – 2005. – 1072 с.
6. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов / А.Д. Морозов. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2002. – 162 с.
7. Божокин С. В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: "РГД", 2001. – 128 с.
8. Фисенко В. Т. Компьютерная обработка и распознавание изображений / В.Т. Фисенко, Т.Ю. Фисенко. – СПб: СПбГУ ИТМО. – 2008. – 192 с.
9. Trujillo L. The Estimation of Holderian Regularity using Genetic Programming / L. Trujillo, P. Legrand, J. Levy-Vehel // GECCO. – 2010. – PP. 861–686.
10. Lévy-Véhel J. Multifractal segmentation of images / J. Lévy-Véhel, P. Mignot // Fractals. – 2004. – Vol. 2. – №. 3. – PP. 379–382.
11. Stojic T. Adaptation of multifractal analysis to segmentation of microcalcifications in digital mammograms / T. Stojic, I. Reljin, B. Reljin // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2006. – Vol. 367. – №. 15. – PP. 494–508.

УДК 514.12

Е.В. СТЕГАНЦЕВ

Запорожский национальный университет

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ОБЛАСТЯМИ ПАРАМЕТРИЗОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ ПРООБРАЗАМИ НА ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ

*Рассматривается способ изучения зависимости между областями на поверхности и их прообразами в двумерном пространстве. Задача решается с использованием триангуляции Делоне.*

*Ключевые слова: параметризованная поверхность, образ, прообраз, плоскость параметров, триангуляция Делоне, описанная окружность, описанный эллипс, кривизна.*

Є.В. СТЕГАНЦЕВ

Запорізький національний університет

## ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ОБЛАСТЯМИ ПАРАМЕТРИЗОВАНОЇ ПОВЕРХНІ ТА ЇХ ПРООБРАЗАМИ НА ПЛОЩИНІ ПАРАМЕТРІВ

*Розглядається спосіб дослідження залежності між областями на поверхні та їх прообразами в двовимірному просторі. Задача розв'язується з використанням триангуляції Делоне.*

*Ключові слова: параметризована поверхня, образ, прообраз, площина параметрів, триангуляція Делоне, описане коло, описаний еліпс, кривина.*

E.V. STEGANTSEV

Zaporozhye national university

## THE STUDY OF THE CORRESPONDENCE BETWEEN THE DOMAINS ON THE PARAMETRIZED SURFACE AND THEIR INVERSE IMAGES ON THE PARAMETER PLANE

*The technique of the study of the correspondence between the domains on the surface and their inverse images on the parameter plane has been considered. The problem has been solved with the help of the Delaunay triangulation.*

*Keywords: parametrized surface, image, inverse image, parameter plane, Delaunay triangulation, circumscribed circle, circumscribed ellipse, curvature.*

### Постановка проблемы

Известно, что в дифференциальной геометрии поверхность определяется как отображение некоторой двумерной области в трехмерное пространство [2]. Как правило, эта двумерная область (прообраз поверхности) снабжается декартовой координатной сетью, которая никак не характеризует саму поверхность. Возникает вопрос замены разбиения плоскости параметров координатной сетью другим разбиением, которое позволило бы сделать выводы о свойствах поверхности. Статья посвящена одному из способов исследования зависимости между заранее выбранными областями на поверхности и их прообразами на плоскости параметров. Этот способ основан на использовании триангуляции, предложенной известным советским математиком Делоне [1]. Такое разбиение поверхности на треугольники широко применяется в компьютерной графике, однако при проверке условия Делоне в трехмерном случае возникают определенные затруднения. Их удастся избежать, если перейти от триангуляции поверхности трехмерного пространства к соответствующей триангуляции ее двумерного прообраза.

### Анализ последних исследований и публикаций

В работах [3, 5] описана триангуляция Делоне и приведены три способа проверки условия Делоне. При переходе из трехмерного пространства в двумерное, приходится использовать некоторые аппроксимации, допустимость которых обоснована, например, в работе [4]. В этой же статье описан алгоритм корректировки заданной на поверхности триангуляции до триангуляции, удовлетворяющей условиям Делоне, и приведены примеры триангуляций некоторых поверхностей.

### Формулирование цели исследования

Описать математические основы предложенного в статье [4] способа триангуляции поверхности, при котором учитываются дифференциально-геометрические свойства поверхности. Привести пример.

### Изложение основного материала исследования

Будем считать, что в трехмерном пространстве задана поверхность и известны криволинейные координаты точек, осуществляющих некоторую триангуляцию этой поверхности. Отметим, что для каждого треугольника триангуляции однозначно определена описанная вокруг него окружность. Нашей задачей является проверка условий Делоне этой триангуляции. Для упрощения проверки перейдем в плоскость

параметров. Для этого найдем прообразы окружностей, описанных вокруг всех треугольников триангуляции, ими будут эллипсы, для построения которых нужно пять параметров [4].

Пусть в плоскости параметров задана  $(u, v)$  - сеть. Будем пользоваться следующими параметрическими уравнениями эллипса

$$u = u_C + A \cos t \cdot \cos \alpha - B \sin t \cdot \sin \alpha, \quad v = v_C + A \cos t \cdot \sin \alpha - B \sin t \cdot \cos \alpha,$$

где  $u_C, v_C$  - координаты центра  $C$ ,  $A$  и  $B$  - длины большой и малой полуосей соответственно. Большая ось эллипса наклонена под углом  $\alpha$  к горизонтальному направлению  $u$ , а  $t$  - параметр. Таким образом, если будут найдены  $u_C, v_C, A, B$  и  $\alpha$ , мы сможем построить эллипс.

Исключив  $t$  из приведенных параметрических уравнений, получим неявное уравнение эллипса

$$k^2 \left( (u - u_C)^2 \sin^2 \alpha - (u - u_C)(v - v_C) \sin 2\alpha + (v - v_C)^2 \cos^2 \alpha + (v - v_C)^2 \cos^2 \alpha \right) + (u - u_C)^2 \cos^2 \alpha + (v - v_C)^2 \sin^2 \alpha + (u - u_C)(v - v_C) \sin 2\alpha - D = 0,$$

где  $k = A/B$ , а  $D = A^2 B^2$ .

Подставляя в это уравнение криволинейные координаты трех точек заданной на поверхности триангуляции, получим три условия на искомые параметры. Для вычисления величины  $k$  можно поступить следующим образом. Обозначим через  $k_i, i=1,2,3$  величину, равную отношению длины стороны треугольника к высоте соответствующего ей сегмента окружности. Максимальная и минимальная из этих величин приближенно характеризуют те свойства поверхности, которые в дифференциальной геометрии называют главными кривизнами, а их отношение определяет  $k$ . Соответствующая максимальному значению  $k_i$  сторона треугольника определит направление главной кривизны, которое даст значение параметра  $\alpha$ . Таким образом, из указанных трех уравнений можем найти  $u_C, v_C, D$ , а затем из уравнений  $k = A/B$  и  $D = A^2 B^2$  найти полуоси  $A$  и  $B$ .

Пусть полусфера задана в векторно-параметрическом виде следующим образом

$$\vec{r}(u, v) = (\cos u \cdot \cos v, \cos u \cdot \sin v, \sin u),$$

где  $u$  - угол поворота в плоскости  $XOY$ ,  $v$  - угол между лучом  $OM$  и плоскостью  $XOY$ ,  $u \in (0, 2\pi)$ ,  $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . В качестве узлов триангуляции возьмем следующие точки:  $M_1(1, 0)$ ,  $M_2\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ ,  $M_3\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $M_4\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $M_5\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Они определяют три треугольника  $M_1M_2M_3$ ,  $M_1M_3M_4$ ,  $M_1M_4M_5$  как показано на рисунке 1.

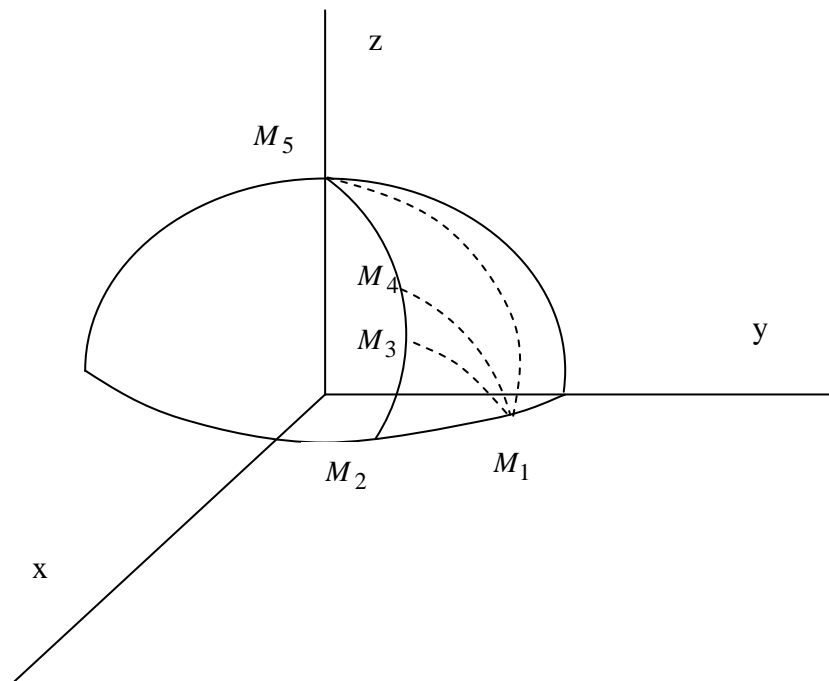


Рисунок 1. Фрагмент триангуляции полусферы

Опишем вокруг каждого треугольника окружность и найдем их прообразы на плоскости параметров. Согласно [4], каждый прообраз может быть аппроксимирован функцией эллипса.

Рассмотрим, например, треугольник  $M_1M_2M_3$ . Предварительно вычислив  $k = 0.3535533905$  и  $\alpha = 1$ , подставим эти значения и координаты точек  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  в неявное уравнение эллипса. Получим систему уравнений для нахождения параметров эллипса. Решив эту систему, получим следующие результаты: координаты центра эллипса  $u_C = -1.454756733$ ,  $v_C = 1.651287634$ ;  $D = 0.9240715578$ .

Поскольку  $k = \frac{A}{B}$  и  $D = A^2B^2$ , подставляя найденные выше значения  $k$  и  $D$ , получим значения длин большей и меньшей полуосей искомого эллипса:  $A = 1.12362586$  и  $B = 2.809064654$ .

#### Выводы

В статье описаны математические основы способа триангуляции поверхности с учетом дифференциально-геометрических свойств поверхности. Приведен пример вычисления требуемых параметров.

#### Список использованной литературы

1. Местецкий Л.М. Триангуляция Делоне: рекурсия без пространственного разбиения точек / Л.М. Местецкий, Е.В Царик., Тверской национальный университет, Тверь, Россия, 2004 год, 4 ст.
2. Позняк Э.Г. Дифференциальная геометрия: первое знакомство [Текст]/ Э.Г. Позняк, Е.В. Шишкин, М.: изд-во МГУ, 1990, 384с.
3. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение [Текст]/ А.В. Скворцов - Томск: Изд-во Том.ун-та, 2002, -128с.
4. Hao Chen, Delaunay Triangulation for Curved Surfaces, [Текст]/Hao Chen, Jonathan Bishop, MARC Analysis Research Corporation.
5. Скворцов А.В. Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне [Текст] / А.В. Скворцов, Ю.Л. Костюк Геоинформатика. Теория и практика. Вып. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. С. 22–47.

УДК 519.6

С.В. ЧОПОРОВ, С.И. ГОМЕНЮК, А.А. ЛИСНЯК, М.А.В. АЛЬ-ОМАРИ  
Х.Х.М. АЛАТАМНЕХ

Запорожский национальный университет

**ТРИАНГУЛЯЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ГИБРИДНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ И НЕЯВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ**

*В численном анализе часто возникает необходимость построения дискретных моделей поверхностей геометрических объектов. Как правило, такие модели строятся в двумерном параметрическом пространстве. При этом поверхности объектов могут обладать сложной конфигурацией границ (например, технологические вырезы). В таком случае для представления границ могут быть использованы неявные функции. Таким образом, в статье предложен подход к построению дискретных моделей поверхностей при их гибридном параметрическом и неявном представлении, который учитывает кривизну поверхности и ее границы.*

*Ключевые слова:* триангуляция, поверхность, неявная функция, параметрическая функция, дискретная модель

С.В. ЧОПОРОВ, С.І. ГОМЕНЮК, А.О. ЛІСНЯК, М.А.В. АЛЬ-ОМАРИ  
Х.Х.М. АЛАТАМНЕХ

Запорізький національний університет

**ТРИАНГУЛЯЦИЯ ПОВЕРХОНЬ ПРИ ГИБРИДНОМУ ПАРАМЕТРИЧНОМУ ТА НЕЯВНОМУ ПОДАННІ**

*У чисельному аналізі часто виникає необхідність побудови дискретних моделей поверхонь геометричних об'єктів. Як правило, такі моделі будуються у двовимірному параметричному просторі. При цьому поверхні об'єктів можуть мати складну конфігурацію границь (наприклад, технологічні отвори). У такому випадку для подання границь можна використовувати неявні функції. Таким чином, у статті запропоновано підхід до побудови дискретних моделей поверхонь при їх гібридному параметричному та неявному поданні, який враховує кривину поверхні та її границь.*

*Ключові слова:* триангуляція, поверхня, неявна функція, параметрична функція, дискретна модель.

S.V. CHOPOROV, S.I. GOMENYUK, A.A. LISNYAK, M.A.V. AL-OMARI,  
H.K.M. AL-ATHAMNEH  
Zaporizhzhya National University**SURFACE TRIANGULATION USING HYBRID PARAMETRIC AND IMPLICIT REPRESENTATION**

*Surface triangular meshing is an actual problem in the areas of computer graphics and numerical analysis. Typically, a surface is specified by a parametric equation. Meshes are being generated in a 2D parameter space and mapped to a surface. Some surfaces have very geometrically and topologically complex borders (e.g. holes, perforations, etc.). In this case, implicit functions can be used to define borders of a surface. Thus, this paper describes a new approach to triangular meshing for hybrid parametrically and implicitly represented surfaces. A curvature is used to control meshing process.*

*Keywords:* triangulation, surface, implicit function, parametric function, discrete model.

**Постановка проблеми**

Триангуляция поверхностей является актуальной задачей, возникающей в компьютерной графике, численном анализе (например, для исследования устойчивости оболочек), геоинформационных системах и т. п. Как правило, под триангуляцией некоторой непрерывной области понимается её разбиение на конечное множество непересекающихся подобластей треугольной формы. Проблема построения триангуляции состоит в отыскании такого множества треугольников, стороны которых будут аппроксимировать границы области, а сами треугольники удовлетворяют некоторым наперед заданным геометрическим требованиям (например, ограничения на минимальный угол или площадь треугольника).

Модели многих объектов могут быть представлены оболочками, поверхности которых заданы параметрическими функциями (например, цилиндрические, конические, поверхности Безье и т. п.). В таком случае триангуляция может быть относительно просто построена в двумерном параметрическом пространстве и затем отображена на поверхность объекта. Однако, некоторые объекты (например, оболочки элементов ракет-носителей) могут обладать весьма сложными границами (например, технологическими вырезами). Для представления моделей таких объектов часто используют систему ограничивающих

оболочек, но ее получение достаточно трудный процесс. Упростить их моделирование может использование неявных функций, которые могут быть «сконструированы» на базе теории R-функций академика Рвачева В. Л., превратив, таким образом, представление оболочки в гибридное. При этом проблема построения дискретных моделей усложняется тем, что в двумерном параметрическом пространстве необходимо учесть ограничения, заданные неявными функциями в трехмерном пространстве. Таким образом, данная статья посвящена исследованию проблемы построения дискретных моделей на базе треугольных элементов для сложных геометрических объектов, представленных гибридно: при помощи параметрического и неявного представлений.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Сегодня достаточно хорошо развиты методы построения триангуляции, удовлетворяющей критерию Делоне, для исходного множества точек на плоскости, детальный анализ которых можно найти в работах [1-2]. Также разработаны способы и методы построения триангуляции Делоне плоских областей, представленных многоугольниками или планарными графами с ограничениями, среди которых можно выделить итерационные [3-5], фронтальные [6-7] и основанные на фоновой сетке [8-10]. Наиболее распространенные подходы к построению триангуляции поверхности основаны на идее построения сетки в двумерном параметрическом пространстве с последующим отображением на поверхность. Тем не менее, качественной триангуляции, построенной в двумерном параметрическом пространстве, не обязательно будет соответствовать качественная сетка, состоящая из треугольников, расположенных на поверхности.

В работах [11-12] рассмотрены особенности использования отображений для построения триангуляций полностью составных параметрических поверхностей, состоящих из линейных и квадратичных форм, B-сплайновых поверхностей. Для улучшения качества сетки предложены техники перестановки узлов (swar) и сглаживания Лапласа.

Также разработаны методы, основанные на использовании подвижного фронта [13-15]. Как и в двумерном случае, исходными данными является дискретная модель границ (ребра) поверхности, внутренняя часть которой заполняется слой за слоем. В работах [14-15] предложены метрики для управления процессом построения фронта и схема использования фоновой сетки на базе метода Quadtree для улучшения качества дискретной модели. Схожая с подвижным фронтом идея заполнения поверхности «бегущими» (marching) треугольниками с предварительным преобразованием представления поверхности из параметрического в неявное рассмотрена в [16]. Методы, основанные на подвижном фронте позволяют строить сетки высокого качества, однако, их основным недостатком является необходимость предварительной дискретизации границ и высокая сложность процедуры предотвращения пересечения фронтов.

Ряд работ основан на идее адаптации метода Рапперта [4] для построения триангуляции Делоне поверхности. Ключевой здесь является разработка способов проверки выполнения условия попадания в описанную окружность для трехмерного треугольника и отображения ее центра в параметрическое пространство. Одна из первых таких работ [17] основана на непосредственной проверке выполнения попадания в описанную окружность в 3D. Такая проверка с вычислительной точки зрения является весьма экстенсивной, поэтому часто используют различные схемы аппроксимации. Например, в [18] предложена схема использования главных кривизн для аппроксимации описанной окружности поверхностного треугольника двумерным эллипсом в параметрическом пространстве; в [19] предложен подход, основанный на использовании сфер.

Альтернативным параметрическому представлению поверхностей, как правило, является неявное. Методы построения триангуляции поверхностей, определенных неявными функциями, можно условно разделить на три группы: ячеечные [20], бегущих треугольников [21] и методы на основе тесселяции [22].

Таким образом, анализ публикаций показал, что разработка методов построения дискретных моделей поверхностей является актуальной проблемой, при этом исследования в основном сосредоточены на построении триангуляций поверхностей, представленных параметрически или неявно. Однако, все еще менее исследованы особенности триангуляции поверхностей при гибридном параметрическом и неявном представлении.

#### Формулирование цели исследования

Пусть поверхность некоторого объекта представлена параметрически в векторной форме

$$R = \left\{ \begin{matrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{matrix} \right\} = R(u, v), \quad (1)$$

где  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  и  $z(u, v)$  – функции, непрерывные в прямоугольнике  $P = \{(u, v) / a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$  (рис. 1).

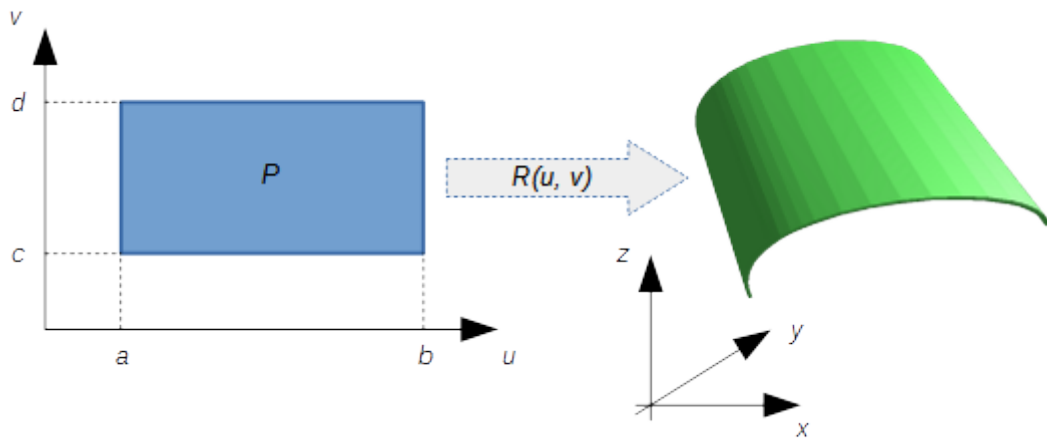


Рис. 1. Параметрическое представление поверхности

Предположим, что также определена функция  $F(x, y, z)$ , которая больше нуля во внутренних точках поверхности, равна нулю на границе и, соответственно, меньше нуля во внешних точках. Такая функция может быть построена «конструктивно», используя аппарат теории R-функций академика В. Л. Рвачева. Например, функция

$$\text{circle}_z(x, y, r) = r^2 - x^2 - y^2 \tag{2}$$

соответствует области, ограниченной окружностью радиуса  $r$  с центром в начале координат, при двумерной постановке или части пространства, ограниченной бесконечным цилиндром с образующей, совпадающей с осью  $Oz$ , в трехмерной постановке. Более сложные неявные функции могут быть определены при помощи систем R-функций [23-25], из которых одна из наиболее распространенных имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \neg x \equiv -x; \\ x \wedge y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}; \\ x \vee y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда, например, функция

$$f_1(x, y, z, r_x, r_y) = -\left[ (r_x^2 - y^2 - z^2) \vee (r_y - x^2 - z^2) \right]$$

будет положительной в точках пространства, находящихся вне объединения двух бесконечных цилиндров: первого с радиусом  $r_x$  и образующей, совпадающей с осью  $Ox$ , второго с радиусом  $r_y$  и образующей, совпадающей с  $Oy$ . Подобные функции могут быть использованы для моделирования различных отверстий или сложных границ параметрических поверхностей. В результате используемое представление становится гибридным.

Таким образом, целью исследования является разработка метода построения триангуляции поверхностей, представленных гибридно параметрически и неявно.

**Изложение основного материала исследования**

Пусть даны  $R(u, v)$  – параметрическое представление поверхности в векторной форме вида (1) с областью определения  $P = \{(u, v) / a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$  и функция  $F(x, y, z)$ , которая больше во внутренних точках поверхности моделируемого объекта. Структурно метод построения триангуляции такой поверхности можно представить тремя последовательными этапами: I – построение дискретной модели границ поверхности, II – построение начальной триангуляции, III – оптимизация триангуляции.

Определим операцию расстояния между двумя точками как

$$d(p, q) = \|R(p) - R(q)\|, \tag{4}$$

где  $p$  и  $q$  – координаты точек в параметрическом пространстве ( $p, q \in P$ ).

Также определим функцию

$$W(u, v) = F(R(u, v)) \wedge \left[ \frac{(b-a)^2}{4} - \left(u - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right] \wedge \left[ \frac{(d-c)^2}{4} - \left(v - \frac{d+c}{2}\right)^2 \right], \tag{5}$$

которая больше или равна нулю только во внутренних точках для функции  $F(x, y, z)$  прямоугольника  $P$ . Для дальнейшего построения сетки будем использовать эту функцию.

I. Построение дискретной модели границ поверхности

Дискретной моделью границы будем считать пару множеств  $V_b = \{(u, v), u \in [a; b], v \in [c; d]\}$  и



$E_b = \{(w_1, w_2), w_1 \in V_b, w_2 \in V_b\}$  – соответственно, вершины и ребра (упорядоченные пары – связи между вершинами). Целью данного этапа является построение этих двух множеств. Для этого разобьем прямоугольник на фоновые ячейки (в общем случае неравномерно). В результате анализа возможных вариантов взаимного расположения фоновых ячеек и границ каждую ячейку можно отнести к одной из четырех групп (рис. 2, черным обозначены узлы, в которых функция  $W(u, v)$  больше нуля): А – отсутствует пересечение с границами, В – граница отделяет один узел, С – граница отделяет два соседние узла, D – граница отделяет два противоположные узла. Всего таких конфигураций с учетом поворота будет 16. Конфигурации группы D приводят к неоднозначности (пример представлен на рис. 2), устранить которые можно, например, дополнительным сгущением фоновой сетки в их окрестности. Таким образом, получим следующую последовательность действий

1. Для прямоугольника  $P$  построить фоновую сетку.
2. Для каждой ячейки фоновой сетки:
  - 2.1. Определить конфигурацию взаимного расположения с границей.
  - 2.2. Если ячейка принадлежит к группе А, то перейти к следующей ячейке.
  - 2.3. Если ячейка принадлежит группе D, то разбить ее на четыре части и перейти к шагу 2.
  - 2.4. Если ячейка принадлежит группам В или С:
    - 2.4.1. Найти ребро  $e = (w_1, w_2)$ , аппроксимирующее участок границы.
    - 2.4.2. Добавить вершины  $w_1$  и  $w_2$  в множество  $V_b$ , добавить ребро  $e$  в множество  $E_b$ .
3. Для каждого ребра  $e = (w_1, w_2) \in E_b$ :
  - 3.1. Если  $d(e) = d(w_1, w_2) < \delta(u, v)$ :
    - 3.1.1. Удалить ребро  $e$  из множества  $E_b$ .
    - 3.1.2. Установить  $w_1 = w_2$  и удалить вершину  $w_2$  из множества  $V_b$ .

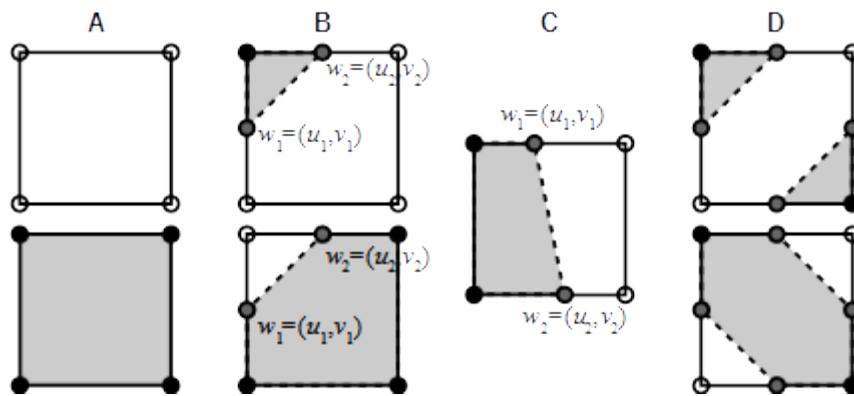


Рис. 2. Взаимное расположение ячеек фоновой сетки и границы области в параметрическом пространстве

Последний шаг данного этапа, по сути, является сглаживающим. Он позволяет удалить слишком маленькие ребра, полученные в результате сканирования фоновыми ячейками. Функция-параметр  $\delta(u, v)$  в общем случае произвольная зависящая от координат. На практике в качестве простейшей такой функции может быть использован один из линейных размеров фоновой ячейки (например, можно определить функцию для удаления ребер, трехмерная длина которых меньше 40% аналогичной длины диагонали фоновой ячейки).

### II. Построение начальной триангуляции

В качестве начальной триангуляции можно принять триангуляцию Делоне, построенную в параметрическом пространстве. Для ее построения можно воспользоваться любым двумерным методом (например, методом суперобласти) с приблизительной проверкой критерия описанной окружности. Естественно, что двумерная триангуляция Делоне, построенная в параметрическом пространстве, не обязательно будет сохранять соответствие критерию Делоне, после отображения сетки на поверхность.

### III. Оптимизация триангуляции

Ключевой особенностью данного этапа является способы проверки условия Делоне и нахождения точки в параметрическом пространстве, соответствующей центру описанной вокруг трехмерного треугольника окружности (рис. 3).

#### 1. Процедура проверки условия Делоне

Пусть для треугольника, определенного вершинами  $A_3 = R(A)$ ,  $B_3 = R(B)$  и  $C_3 = R(C)$ , необходимо проверить условие попадания в описанную окружность точки  $P_3 = R(P)$ . Для решения этой задачи будем использовать цилиндр, построенный на базе описанной окружности, с длиной образующей  $L = 2l$  (рис. 3).

Построим местную систему координат  $x' y' z'$ , ось начало которой (точка  $O'$ ) совпадает с точкой  $A_3$ , ось  $O' x'$  со стороной  $A_3 B_3$  и ось  $O' z'$  является нормалью к плоскости треугольника. Связь между местной системой координат и глобальной системой координат будет определяться соотношением

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \Lambda \begin{Bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где  $\Lambda$  – матрица поворота (направляющих косинусов) системы координат.

В местной системе координат аппликата точек  $A_3'$ ,  $B_3'$  и  $C_3'$ , очевидно, будет равна нулю. Будем считать, что точка  $P_3$  попадает в описанную окружность, если  $P_3' = \begin{Bmatrix} x'_P \\ y'_P \\ z'_P \end{Bmatrix}$  (ее координаты в местной системе координат) попадают в окружность, описанную для треугольника  $A_3' B_3' C_3'$ , и при этом выполняется условие  $-l \leq z'_P \leq l$ , где  $l$  – отклонение поверхности от плоскости треугольника (максимальное расстояние от треугольника до поверхности в направлении его нормали).

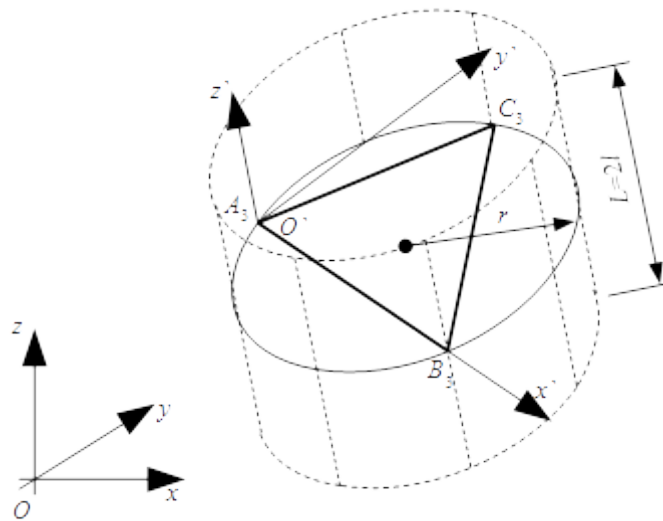


Рис. 3. Схема проверки критерия Делоне на поверхности

2. Процедура поиска центра описанной окружности

Пусть  $E'_3$  – координаты центра описанной окружности в местной системе координат, тогда координаты соответствующей точки в параметрическом пространстве могут быть найдены в результате решения оптимизационной задачи:

$$E = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \min_{p=\{u,v\}^T} d(p, E_3), \quad (7)$$

где  $E_3 = A_3 + \Lambda E'_3$  – координаты центра описанной окружности в глобальной системе координат.

Таким образом, метод оптимизации триангуляции будет близок к методу Рапперта [4] с адаптированными для работы с поверхностным треугольником процедурами: для каждого треугольника, который не удовлетворяет требованиям, будем находить точку для вставки в соответствии с процедурой (7) и добавлять ее в триангуляцию по описанной схеме проверки условия Делоне. Будем считать, что треугольник не удовлетворяет требованиям, если один из его углов меньше заданного значения или, если кривизна поверхности слишком высока. Для приблизительной проверки последнего условия можно заменить кривизну отношением трехмерной длины ребра треугольника к длине трехмерной дуги, которую это ребро аппроксимирует.

Например, поверхность Безье может быть представлена известной формулой

$$p(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) P_{i,j}, \quad (8)$$

где  $P_{i,j}$  – контрольные точки;  $B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}$  – многочлены Бернштейна. Круглое отверстие

в этой поверхности, может быть определено неявной функцией  $f_2(x, y, z) = r_x^2 - y^2 - z^2$  (рис. 4).

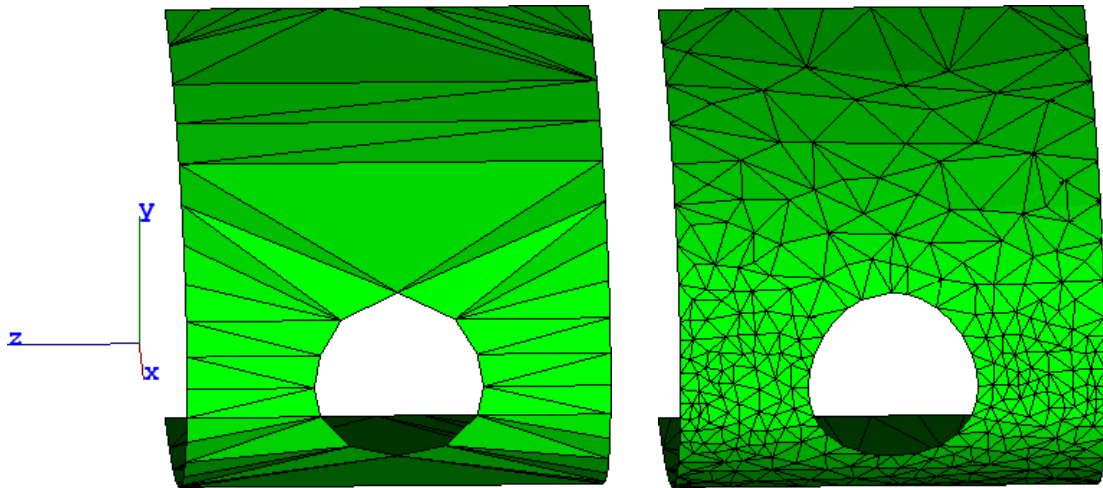


Рис. 4. Поверхность Бэзе: контрольные точки: (0, -1, -1), (0, -1, -0.5), (0, -1, 0.5), (0, -1, 1), (4, -1, -1), (4, -1, -0.5), (4, -1, 0.5), (4, -1, 1), (4, 1, -1), (4, 1, -0.5), (4, 1, 0.5), (4, 1, 1), (0, 1, -1), (0, 1, -0.5), (0, 1, 0.5), (0, 1, 1);  $r_1 = 0.4$

Межступенной отсек ракеты-носителя (рис. 5) является конической поверхностью и может быть представлен параметрически в виде

$$\begin{cases} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{cases} = \begin{cases} r(u)\cos(v) \\ u \\ r(u)\sin(v) \end{cases}, \tag{9}$$

где  $r(u) = r_1 + (r_2 - r_1)\frac{u}{l}$ ;  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы оснований;  $l$  – длина образующей;  $u \in [0; l]$ ;  $v \in [0; 2\pi]$ .

Отверстия межступенного отсека могут быть представлены объединением (дизьюнкцией) прямоугольников со скругленными углами и цилиндров с ограничением (за счет использования конъюнкции) по оси  $Oz$ .

$$f_{mso}(x, y, z) = \neg\{srect(x_1, y - h_1, a_1, a_1, r_1) \vee srect(x_2, y - h_1, a_1, a_1, r_1) \vee srect(x_3, y - h_2, a_1, a_2, r_2) \vee [srect(x_4, y - h_4, a_3, a_4, r_3) \wedge z_4] \vee [srect(x_5, y - h_4, a_5, a_6, r_4) \wedge z_5] \vee [srect(x_6, y - h_5, a_7, a_8, r_5) \wedge z_6] \vee [circle_z(x_7, y - h_3, r_6), z_7]\},$$

где

$$\begin{aligned} srect(x, y, w, h, r) &= rect(x, y, w - 2r, h) \vee rect(x, y, w, h - 2r) \vee \\ &\vee circle_z\left(x - \frac{w}{2} + r, y - \frac{h}{2} + r, r\right) \vee circle_z\left(x + \frac{w}{2} - r, y - \frac{h}{2} + r, r\right) \vee \\ &\vee circle_z\left(x + \frac{w}{2} - r, y + \frac{h}{2} - r, r\right) \vee circle_z\left(x - \frac{w}{2} + r, y + \frac{h}{2} - r, r\right); \\ rect(x, y, w, h) &= \left(\frac{w^2}{4} - x^2\right) \wedge \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \\ x_i(x) &= x\cos(\alpha_i) + z\sin(\alpha_i); \\ z_i(x) &= -x\sin(\alpha_i) + z\cos(\alpha_i), \end{aligned}$$

параметры  $a_i$ ,  $r_i$  и  $h_i$  – соответственно, линейные размеры, радиусы скруглений и отступы отверстий от нижнего основания;  $\alpha_i$  – углы поворота отверстия в чертеже развертки отсека.

### Выводы

Таким образом, основным научным результатом работы является новый метод для построения дискретных моделей сложных оболочек. В отличие от существующих работ для проверки условий Делоне и поиска точек вставки нового узла использован цилиндр, построенный в местной системе координат. Такой подход более экстенсивный, чем, например, предложенный в [18] способ аппроксимации, но позволяет более точно находить точки для вставки на поверхностях с быстро изменяющейся кривизной и при этом не требует решения системы нелинейных уравнений для нахождения аппроксимации.

Одновременное использование параметрического представления с неявными функциями является весьма гибким и универсальным инструментом, который позволяет определять сложные конфигурации отверстий и границ оболочек.

Данная работа выполнена при поддержке и в творческом сотрудничестве с государственным предприятием «КБ «Южное» им. М. К. Янгеля».

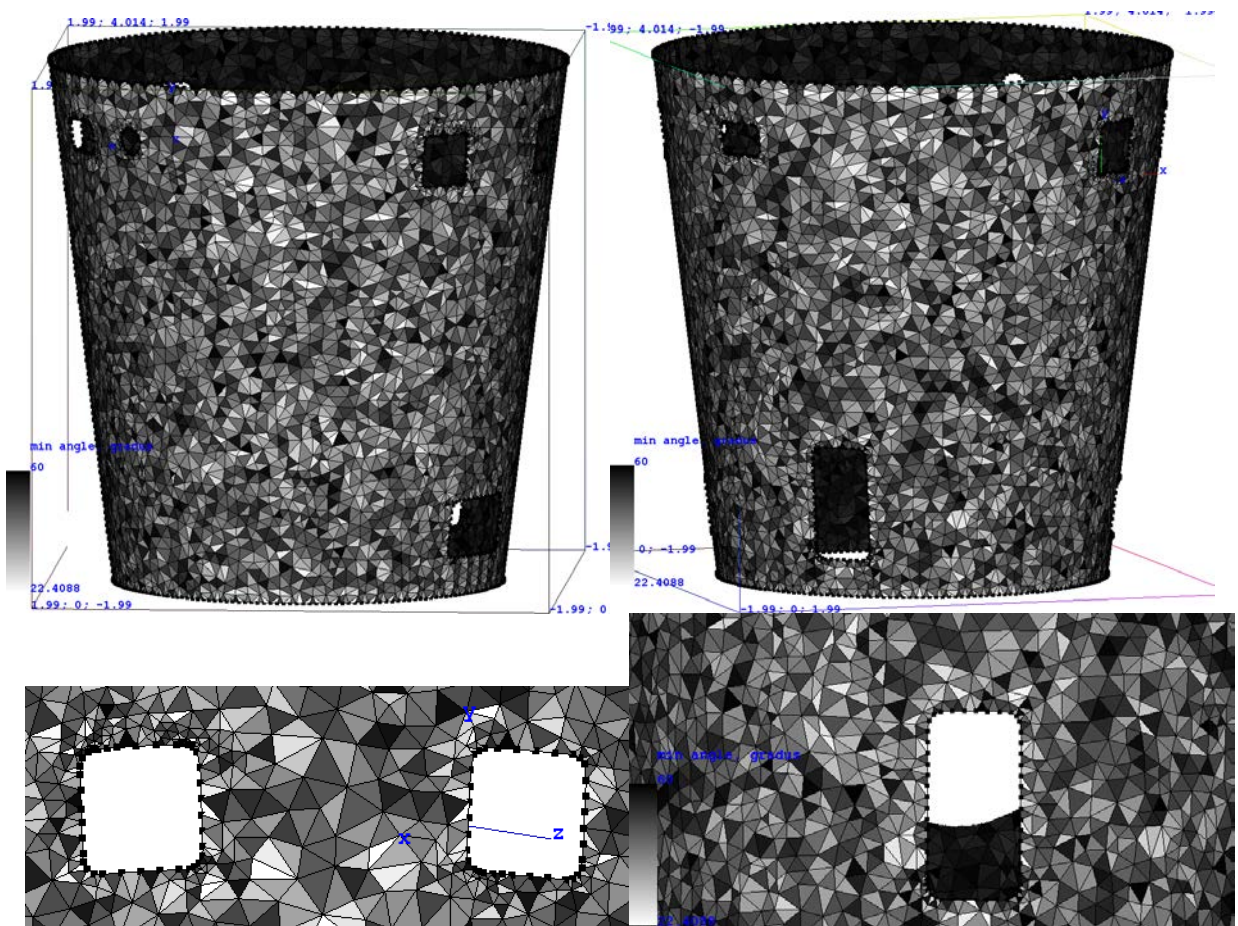


Рис. 5. Поверхність МСО: розподілення значень мінімальних кутів в трикутниках

#### Список использованной литературы

1. Скворцов А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – № 3. – С. 14-39.
2. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и её применение / А. В. Скворцов. – Томск: Издательство Томского университета, 2002. – 128 с.
3. Bern M. Triangulating polygons without large angles / M. Bern, D. Dobkin, and D. Eppstein // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 1995. – Volume 5. – P. 171-192.
4. Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation / J. Ruppert // Journal of Algorithms. – 1995. – Volume 18, Issue 3. – P. 548-585.
5. Tournois J. Interleaving Delaunay Refinement and Optimization for 2D Triangle Mesh Generation / J. Tournois, P. Alliez, O. Devillers // The 16<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : International Conference, Washington, 14-17 October 2007 : proceedings. – Washington: Springer, 2008. – P. 83-101.
6. Mavriplis D. An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness / D. J. Mavriplis // Journal of Computational Physics. – 1995. – Volume 117, Issue 1. – P. 90-101.
7. Silva C. T. Greedy Cuts: An Advancing Front Terrain Triangulation Algorithm / C. T. Silva, J. S. B. Mitchell // The 6<sup>th</sup> ACM International Symposium on Advances in Geographic Information Systems : International Conference, Washington, 2-7 November 1998 : proceedings. – Washington: ACM, 1998. – P. 137-144.
8. Naumann U. Combinatorial Scientific Computing / [edited by] U. Naumann, O. Schenk. – Boca Raton, Florida: CRC Press, 2012. – 600 p.
9. Cheng S.-W. Delaunay Mesh Generation / S.-W. Cheng, T. K. Dey, J. R. Shewchuk. – Boca Raton, Florida: CRC Press, 2012. – 387 p.
10. Samet H. The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures / H. Samet // ACM Computing Surveys. – 1984. – Volume 16, Issue 2. – P. 187-260.
11. Zheng Y. Three-dimensional unstructured mesh generation: Part 1. Fundamental aspects of triangulation and point creation / Y. Zheng, R. W. Lewis, D. T. Gethin // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1996. – vol. 134. – P. 249-268.
12. Zheng Y. Three-dimensional unstructured mesh generation: Part 2. Surface Meshes / Y. Zheng, R. W. Lewis, D. T. Gethin // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1996. – vol. 134. – P. 269-284.

13. Lau T. S. Finite Element Mesh Generation over Analytical Curved Surfaces / T. S. Lau, S. H. Lo // *Computers & Structures*. – 1996. – vol. 59, No. 2. – P. 301-309.
14. Miranda A. C. O. Mesh Generation on High-curvature Surfaces Based on a Background Quadtree Structure / A. C. O. Miranda, L. F. Martha // *11<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : International Conference, Ithaca, New York, USA, 15-18 September 2002 : proceedings*. – Ithaca: Springer-Verlag, 2002. – P. 333-342.
15. Miranda A. C. O. Finite Element Mesh Generation for Subsurface Simulation Models / A. C. O. Miranda, W. W. M. Lira, R. C. Marques, A. M. B. Pereira, J. B. Cavalcante-Neto, L. F. Martha // *Engineering with Computers*. – 2015. – vol. 31, iss. 2. – P. 305-324. – DOI 10.1007/s00366-014-0352-3
16. Hartmann E. A Marching Method for the Triangulation of Surfaces / E. Hartmann // *The Visual Computer*. – 1998. – vol. 14. – P. 95-108.
17. Chew L. P. Guaranteed-Quality Mesh Generation for Curved Surfaces / L. P. Chew // *The 9<sup>th</sup> Annual Symposium on Computational Geometry : International Conference, New York, NY, USA, 18-21 May 1993 : proceedings*. – New York: ACM, 1993. – P. 274-280.
18. Chen H. Delaunay Triangulation for Curved Surfaces / H. Chen, J. Bishop // *6<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : International Conference, Park City, UT, USA, 13-15 October 1997 : proceedings*. – Sandia: Sandia National Laboratories, 1997. – P. 115-127.
19. Ruiz O. E. Gabriel-constrained Parametric Surface Triangulation / O. E. Ruiz, C. Cadavid, J. G. Lalinde, R. Serrano, G. Peris-Fajarnés // *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*. – 2008. – vol. 2, No 8. – P. 568-575.
20. Lorensen W. E. Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm / W. E. Lorensen, H. E. Cline // *Computer Graphics*. – 1987. – vol. 21, iss. 4. – P. 163-169.
21. Akkouche S. Adaptive Implicit Surface Polygonization using Marching Triangles / S. Akkouche, E. Galin // *Computer Graphics Forum*. – 2001. – vol. 20, iss. 2. – P. 67-80.
22. Crespin B. Efficient and Accurate Tessellation of Implicit Sweep Objects / B. Crespin, P. Guitton, C. Schlick // *Constructive Solid Geometry*. – 1998. – P. 49-63.
23. Рвачев В.Л. Введение в теорию R-функций / В.Л. Рвачев, Т.И. Шейко // *Проблемы машиностроения*. – 2001. – Т. 4, № 1–2. – С. 46-58.
24. Максименко-Шейко К.В. R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве / К. Максименко-Шейко, А.М. Мацевитый, А.В. Толок, Т.И. Шейко // *Информационные технологии*. – 2007. – № 10. – С. 23-32.
25. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2D / К.В. Максименко-Шейко, Т.И. Шейко // *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки*. – 2010. – No 1. – С. 98-104.

**ЕЛЕКТРОНІКА І ЕЛЕКТРОТЕХНІКА**

УДК 621.384.6

А.Н. ДОВБНЯ, А.С. МАЗМАНИШВИЛИ, Н.Г. РЕШЕТНЯК  
Национальный Научный Центр «Харьковский физико-технический институт»**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПАДАЮЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ СОЛЕНОИДА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫМИ И ПОПЕРЕЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА**

*Представлены результаты численных экспериментов по генерации электронного пучка магнетронной пушкой с вторичноэмиссионным катодом. Изучено формирование его распределения при транспортировке в спадающем магнитном поле соленоида. Транспортировка пучка осуществлялась в системе, состоящей из медных колец, находящихся на расстоянии 85 мм от среза магнетронной пушки. Приводятся результаты численного моделирования по движению трубчатого электронного потока в магнитном поле соленоида. Изучена зависимость итогового вертикального распределения на внутренней стенке цилиндрической мишени от начальных состояний при генерации. Полученные результаты моделирования согласуются с данными эксперимента.*

*Ключевые слова: магнетронная пушка, вторичноэмиссионный катод, электронный пучок, математическое моделирование, гистограмма, распределение магнитного поля.*

A.N. DOVBNYA, A.S. MAZMANISHVILI, N.G. RESHETNYAK  
National Science Center "Kharkov Institute of Physics & Technology"**USE DROP-DOWN SOLENOID MAGNETIC FIELD FOR CONTROL OF PARAMETERS LONGITUDINAL AND TRANSVERSE BEAM**

*The results of numerical experiments on electron beam generation magnetron guns with secondary-emission cathode electron are presented. The formation of its distribution during transport in a decreasing magnetic field of the solenoid is studied. Transportation of the beam carried in the system, consisting of copper rings, at a distance of 85 mm from the edge of the magnetron gun. The results of numerical simulation of the movement of the electron beam tube are presented. The dependence of the final vertical distribution on the inner wall of the cylindrical target from the initial state in the generation is studied. These simulation results are consistent with experimental data.*

*Keywords: magnetron gun, secondary-emission cathode, electron beam, mathematical modeling, a histogram of the distribution of the magnetic field.*

А.М. ДОВБНЯ, О.С. МАЗМАНИШВИЛИ, М.Г. РЕШЕТНЯК  
Національний Науковий Центр «Харківський фізико-технічний інститут»**ВИКОРИСТАННЯ СПАДАЮЧОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ СОЛЕНОЇДА ДЛЯ УПРАВЛІННЯ ПОВЗДОВЖНЬОМИ І ПОПЕРЕЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА**

*Представлено результати чисельних експериментів по генерації електронного пучка магнетронною гарматою з вторинноемісійним катодом. Вивчено формування його розподілу при транспортуванні в спадаючому магнітному полі соленоїда. Транспортування пучка здійснювалось в системі, що складається з мідних кілець, які знаходяться на відстані 85 мм від зрізу магнетронної гармати. Наводяться результати чисельного моделювання по руху трубчастого електронного потоку. Вивчено залежність підсумкового вертикального розподілу на внутрішній стінці циліндричної мішені від початкових станів при генерації. Отримані результати моделювання узгоджуються з даними експерименту.*

*Ключові слова: магнетронна гармата, вторинноемісійний катод, електронний пучок, математичне моделювання, гістограма, розподіл магнітного поля.*

**Постановка проблемы**

Интерес к физике процессов со скрещенными электрическим и магнитным полями обусловлен их широким применением в вакуумной электронике больших мощностей, ускорительной технике и т.д. Представляет большой интерес использование в этих областях в качестве источников электронов магнетронных пушек с холодными вторичноэмиссионными катодами [1, 2]. Принцип работы таких пушек основан на вторичноэмиссионном размножении электронов, образовании электронного облака и

формировании электронного пучка в скрещенных электрическом и магнитном полях [3]. В данной работе представлены экспериментальные и теоретические результаты исследований по формированию радиального электронного пучка магнетронной пушкой с вторичноэмиссионным катодом при его транспортировке в спадающем магнитном поле соленоида. На основании построенной математической модели движения электронного потока в этом поле изучена возможность облучения внутренней цилиндрической поверхности.

#### Экспериментальная установка и методика исследований

В НИЦ ХФТИ был создан ускоритель электронов на основе магнетронной пушки с холодным металлическим вторичноэмиссионным катодом. В работе проведены исследования по формированию радиального электронного пучка и измерению его параметров при транспортировке частиц в спадающем магнитном поле соленоида. Блок-схема установки приведена на рис. 1.

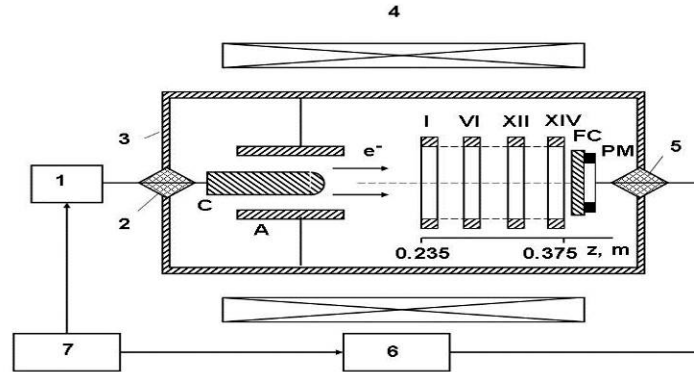


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки. 1 – импульсный генератор, 2, 5 – проходные изоляторы, 3 – вакуумная камера, 4 – соленоид, 6 – измерительная система, 7 – блок синхронизации, С – катод, А – анод, FC – цилиндр Фарадея, PM – постоянные магниты, I–XIV – металлические кольца (ламели) измерительной системы

Для питания магнетронной пушки использовался импульсный генератор (1), который обеспечивал получение импульса напряжения  $\sim 150$  кВ. Источник электронов (С – катод, А – анод) размещается в вакуумном объеме. Для получения электронного пучка использовались магнетронная пушка с диаметром анода 78 мм и диаметром катода 36 мм. Основное магнитное поле  $H_0$  для генерации и транспортировки электронного пучка создается соленоидом, состоящим из 4-х секций.

Регулируя ток в катушках можно было изменять амплитуду и продольное распределение магнитного поля вдоль оси магнетронной пушки и канала транспортировки пучка, что позволяло получать различные режимы формирования электронного пучка. Для локального изменения скорости спада результирующего магнитного поля использовалось рассеянное поле, которое создавалось с помощью постоянных магнитов из  $\text{SmCo}_5$ , размещенных на оси системы за 14-м кольцом. Путем изменения ориентации поля соленоида формировались дополнительные магнитные поля  $H_+$  и  $H_-$ . Проведенное измерение магнитного поля рассеяния кольцевых магнитов от длины  $z$  показало, что оно резко неоднородно – уменьшается в 2,5 раза на расстоянии 12 мм ( $H \sim 300$  Э) от поверхности магнитной сборки и в дальнейшем плавно затухает. Измерительная система для исследования распределения тока в радиальном направлении состоит из 14-ти медных колец с внутренним диаметром 66 мм и шириной 8 мм, которые изолированы друг относительно друга и земли. Расстояние между кольцами  $\sim 1,5$  мм. За 14-м кольцом на расстоянии  $\sim 1,5$  мм расположен цилиндр Фарадея FC, который служит для измерения тока в осевом направлении. Измерительная система находится в магнитном поле, создаваемом соленоидом. Обработка результатов измерения параметров импульса напряжения, токов в радиальном и осевом направлениях проводилась с помощью регистрирующей системы (6). Для выполнения моделирующих расчетов построено программное средство, позволяющее рассчитать траектории движения электронов в заданном магнитном поле. Устойчивость численного алгоритма решения связана с шагом  $\Delta s$  решения, где  $s=ct$  ( $t$  – текущее время), и ларморовским параметром задачи  $\mu$ . Таким образом, при выполнении условия  $\mu \Delta s \ll 1$  имеет место сходимость численного решения системы к его аналитическому аналогу. Условие  $\mu \Delta s \ll 1$  будет выполняться, если  $\Delta s \ll 0.0001$  м. С вычислительной точки зрения задача может быть сформулирована как задача Коши. Результатом будет являться траектория электрона (или пучок таких траекторий) отвечающий множеству начальных условий. Потребовав выполнения заданного условия (достижение радиальной компонентой  $r$  некоторого значения  $r_U$ ) можно, зафиксировав значения других компонент траектории электрона, сформировать результирующий пучок и изучить его свойства.

Численно проведено изучение динамики движения электронов для количества частиц, равного 1000, в магнитном поле соленоида. В работе в качестве результата расчета использовалась итоговая гистограмма  $G(z)$  распределения частиц по вертикали  $z=z_u$ , найденная по выполнению заданного условия – достижение радиальной компонентой  $r$  траектории частиц заданного значения  $r_u=0.033$  м). В свою очередь, сформированную гистограмму  $G(z)$  необходимо сравнить с распределением токов на ламелях.

**Сравнение экспериментальных данных и результатов численного моделирования**

Проведены исследования по формированию электронного пучка в радиальном направлении при транспортировке его в спадающем магнитном поле соленоида.

На рис. 2 приведены основные характеристики магнитной системы: распределение продольного магнитного поля (основного  $H_0$  и двух результирующих полей  $H_+$  и  $H_-$ ) вдоль канала транспортировки пучка, при которых проводились эксперименты.

На рис. 3 приведены логарифмические производные создаваемых магнитных полей, которые характеризуют скорость спада магнитного поля в периферийной области движения частиц.

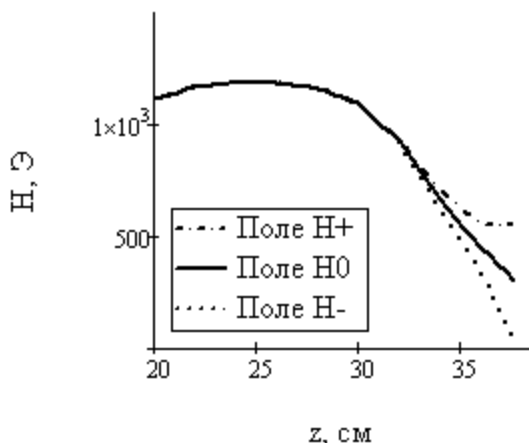


Рис. 2. Конфигурация магнитных полей;  
 $H_0$  – основное поле,  $H_+$  и  $H_-$  – дополнительные поля

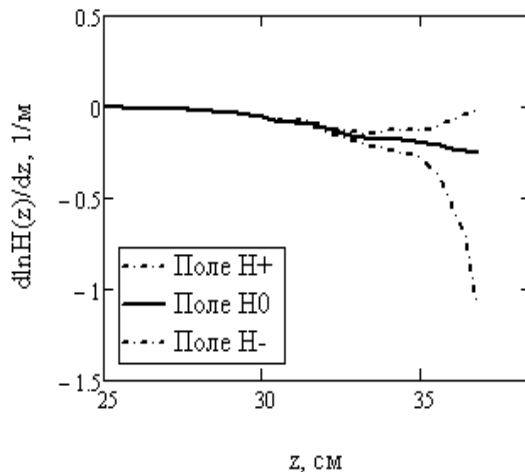


Рис. 3. Логарифмические производные  $d\ln H(z)/dz$  магнитных полей в периферийной области

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования движения электронов в магнитных полях. Зависимости получены для трех случаев магнитного поля: основного  $H_0$  (средний ряд), а также дополнительных полей  $H_+$  (верхний ряд) и  $H_-$  (нижний ряд), создаваемых изменением ориентации основного поля. Были проведены экспериментальные исследования по формированию электронного пучка в радиальном направлении в спадающем магнитном поле соленоида  $H_0$ .

На рис. 5 приведены гистограммы распределения токов в радиальном направлении. Из рисунков видно, что при таком распределении магнитного поля максимальный ток приходился на 14-ое кольцо и составлял ~40% тока пучка. Ток в радиальном направлении регистрировался с 14-го по 9-ое кольцо. Магнитное поле в области расположения 14-го металлического кольца было спадающее с градиентом спада поля ~0,011 Т/см. В проведенных исследованиях было использовано рассеянное магнитное поле кольцевых магнитов (рис. 1), что позволило увеличить градиент спада магнитного поля. Экспериментально обнаружено, что при распределении магнитного поля (рис. 4, нижняя кривая) ток в радиальном направлении на 14-е кольцо составлял ~70% полного тока пучка при энергии электронов ~42 кэВ. Магнитное поле в области расположения 14-го кольца имело градиент спада ~0,03 Т/см при напряженности магнитного поля на середине кольца ~0,04 Т. Ток в радиальном направлении на 13-е кольцо составил ~15%, а на 12-е равнялся ~4%, а ток, идущий в осевом направлении, составлял ~11% тока пучка. Тем самым показано, что величина тока в радиальном направлении и его распределение вдоль длины колец зависит от амплитуды и распределения магнитного поля вдоль оси системы и градиента спада поля.

Были проведены эксперименты, в которых магнитное поле имеет выброс  $H_+$  (рис. 4, верхний ряд) – направление полей кольцевых магнитов и соленоида совпадает. На рис. 5 приведена гистограмма распределения токов в радиальном и осевом направлениях. Из рисунка видно, что ток в радиальном направлении на 14-ое кольцо составлял ~10%, а ток, идущий в осевом направлении, составлял ~90% тока пучка. Магнитное поле в области расположения 14-го кольца было ~0,06 Т с градиентом нарастания поля ~0,02 Т/см. На рис. 6 приведены результаты численного моделирования движения электронного пучка в магнитных полях. Зависимости получены для основного магнитного поля  $H_0$ , на которое наложено дополнительное поле, создаваемое магнитом. Величина суммарного поля изменялась от  $H_-$  (при  $k=-1$ ) до  $H_+$  (при  $k=1$ ). Цилиндр Фарадея был размещен на расстоянии  $z_{FC}=0,38$  м.

Из рис. 6 видно, что частицы при  $k=-1$  все попадают на внутреннюю стенку, а начиная со значения коэффициента управления (вариации)  $k \approx -0.5$  часть их попадает на цилиндр Фарадея. При  $k \approx -0.1$  и более практически все частицы оказываются на цилиндре Фарадея.



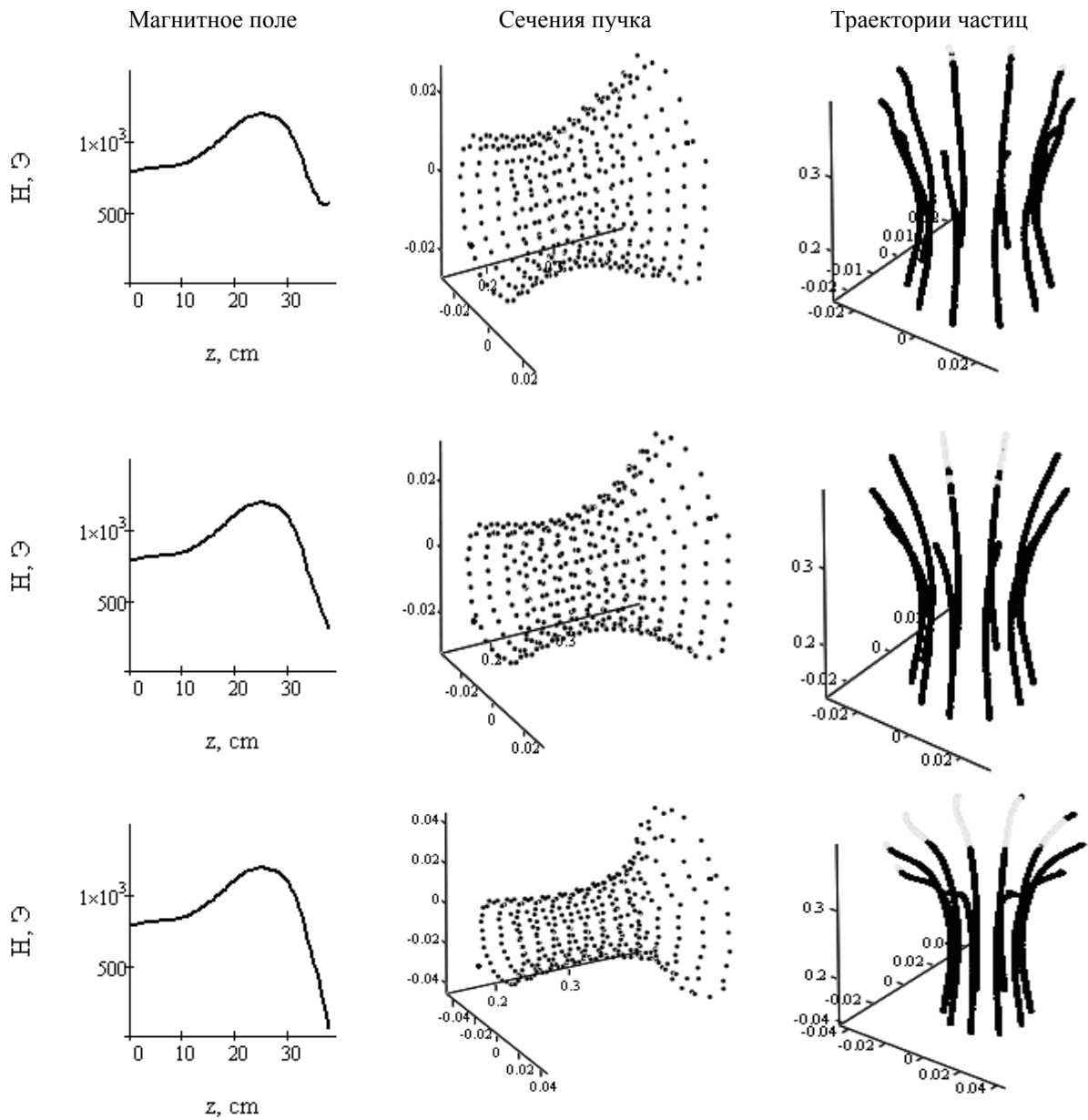


Рис. 4. Результаты моделирования движения частиц; сверху – поле  $H_+$ , посредине – основное поле  $H_0$ , снизу – поле  $H_-$ .

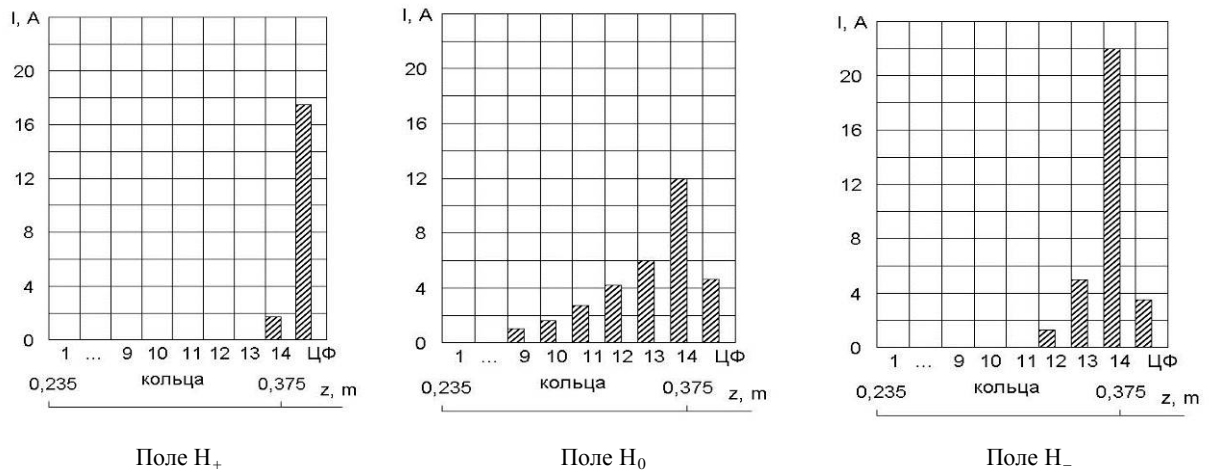


Рис. 5. Гистограммы токов, регистрируемых на ламелях внутренней стенки

Таким образом, увеличение амплитуды полного магнитного поля приводит к росту доли частиц, движущихся в осевом направлении. Путем вариации амплитуды и распределения магнитного поля можно регулировать ток в радиальном направлении вдоль длины трубы, и, следовательно, место электронного облучения.

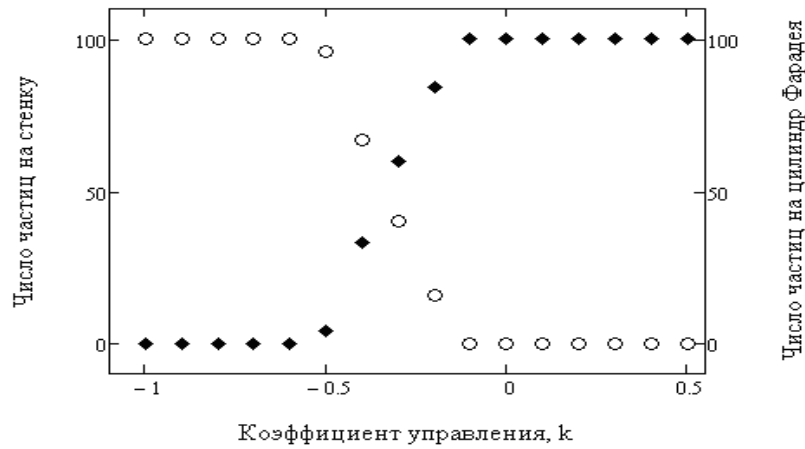


Рис. 6. Зависимости доли результирующих частиц (в %) от коэффициента управления  $k$  магнитного поля от  $H_-$  до  $H_+$ ; кружочки – попадание на стенку, квадратики – на цилиндр Фарадея

На рис. 7 приведены типичные траектории движения электронов. Видно, что радиус частиц пересекает внутренний радиус  $r_u=33$  мм, достигая стенки трубы. В дальнейшем необходимо провести исследование различных режимов работы магнетронной пушки при энергии электронов  $80\div 100$  кэВ и выбрать оптимальные характеристики электронного облучения.

На рис. 8 показана расчетная зависимость места попадания центра пучка части от коэффициента управления  $k$ . В интервале значений  $-1.0 < k < -0.7$  пучок частиц попадает на поверхность внутренней стенки. Из рисунка следует возможность устойчивого управления места облучения электронным пучком.

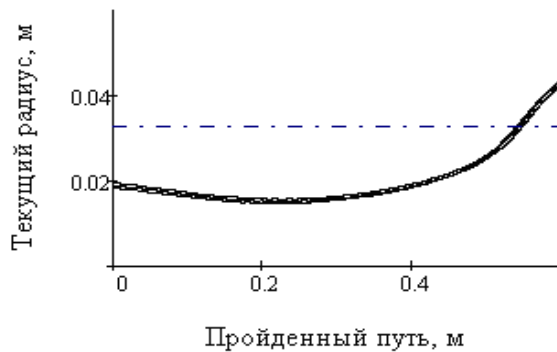


Рис. 7. Типичные зависимости текущего радиуса  $r$  (для трех частиц) от пройденного пути  $s$  (штрих-пунктиром указан внутренний радиус  $r_u=33$  мм)

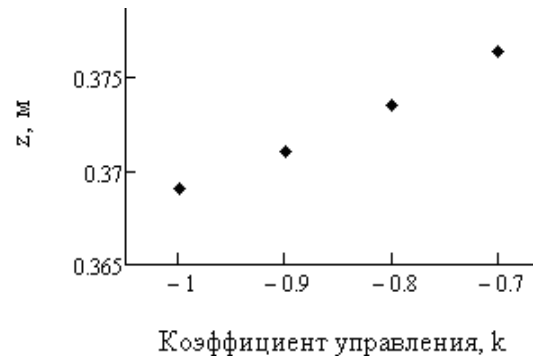


Рис. 8. Зависимость средней вертикальной координаты  $z$  на стенке от коэффициента вариации  $k$  магнитного поля

На рис. 9 показаны полученные гистограммы  $G(z)$  распределения результирующего пучка для различных значений коэффициента управления  $k$  магнитного поля. Гистограммы построены для массива вертикальных значений  $z_u$ , отвечающих достижению радиального уровня  $r_u=33$  мм. Из приведенных гистограмм  $G(z)$  вертикальных значений  $z_u$  видно, что поток электронов попадает на вертикальный участок, протяженность которого  $\Delta z_u$  порядка сантиметра.

При рассмотрении потоков частиц с фазовым объемом исходных величин увеличенного размера, в частности, с большим вертикальным размером  $\Delta z_u$  и большего разброса по импульсам  $p_{z0}$ ,  $p_{r0}$  и  $p_{\theta 0}$  можно ожидать соответствующее увеличение вертикального участка  $\Delta z_u$ , на котором реализуется выполнение условия попадания на заданный радиус.

Полученные результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о возможности устойчивого формирования электронного пучка в радиальном направлении магнетронной пушкой с холодным вторичноэмиссионным катодом в спадающем магнитном поле соленоида.

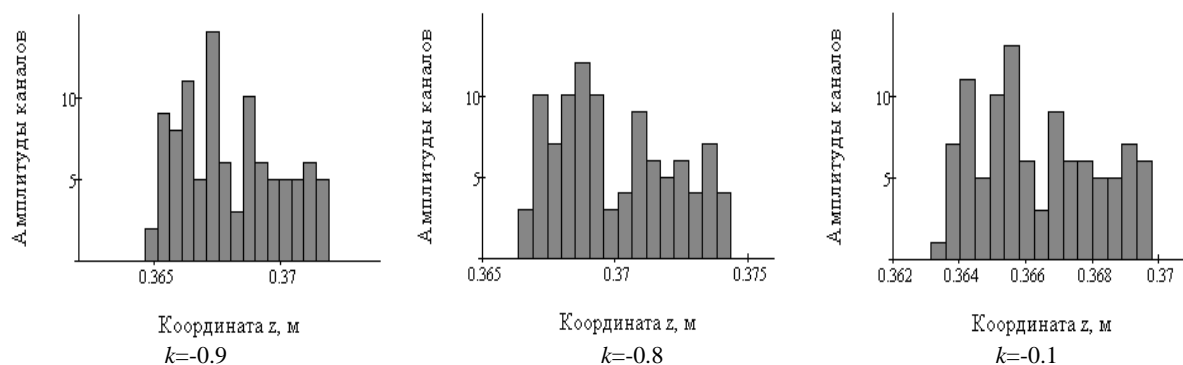


Рис. 9. Гистограммы  $G(z)$  вертикального распределения частиц при их попадании на внутреннюю стенку радиусом  $r_a=33$  мм для различных значений коэффициента управления  $k$  магнитного поля

### Выводы

В работе представлены экспериментальные данные и результаты моделирующих расчетов по формированию и управлению продольными и поперечными параметрами электронного пучка, эмитируемого магнетронной пушкой с вторичноэмиссионным катодом, и измерению его характеристик при транспортировке в результирующем магнитном поле. На основе математической модели движения электронного пучка рассмотрены характеристики результирующих электронных потоков. Для различных конфигураций магнитного поля приводятся результаты численного моделирования по движению трубчатого электронного тока. Показана возможность регулировки места попадания пучка на мишенную вертикальную стенку путем вариации амплитуды управляющего магнитного поля. Установлено, что величина тока и его распределение вдоль длины колец зависит от амплитуды магнитного поля и его градиента спада. Оптимизацией распределения магнитного поля (создаваемого соленоидом и кольцевыми магнитами) и его градиента спада было получено увеличение попадания электронов на одно кольцо (до  $\sim 70$  % тока пучка). В результате моделирования получено, что при выбранных начальных условиях для пучка частиц и распределений продольного магнитного поля вдоль оси транспортировки поток электронов попадает на вертикальный участок, длина которого порядка сантиметра.

### Список использованной литературы

1. Волколупов Ю.Я., Довбня А.Н., Закутин В.В., Красноголовец М.А., Митроченко В.В., Решетняк Н.Г., Ромасько В.П., Чурюмов Г.И. Генерация электронных пучков в магнетронном диоде с металлическим вторичноэмиссионным катодом // ЖТФ.-2001.-Т71.-В.7.-С.88-91.
2. Saveliev Y.M., Sibbet W., Parkes D.M. Self-excitation and characteristics of the crossed-fields emission electron source // Review of Scientific Instruments.-1999.-Vol.70,№12.-P.4502-4514.
3. Довбня А.Н., Закутин В.В., Решетняк Н.Г., Ромасько В.П., Чертищев И.А., Борискин В.Н., Довбня Н.А., Коваленко Т.А. Исследование формирования пучка в ускорителе электронов с вторичноэмиссионным источником // «Вісник Харківського університету», серія фізична «Ядра, частинки, поля».-2006.-№732.-Вып. 2(30).-С.96-100.

УДК 537.525:621.325

І.В. МЕЛЬНИК

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,  
факультет электроники, кафедра электронных приборов и устройств**ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ УВЕЛИЧЕНИЯ ТОКА ВЫСОКОВОЛЬТНОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В ТРИОДНЫХ ИСТОЧНИКАХ ЭЛЕКТРОНОВ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОНОВ И ИХ ПОДВИЖНОСТИ В АНОДНОЙ ПЛАЗМЕ**

*В статье приведены аналитические соотношения, позволяющие рассчитать время увеличения тока высоковольтного тлеющего разряда при подаче управляющих импульсов на кольцевую электрод с учетом изменения температуры и подвижности ионов в анодной плазме. Результаты моделирования показали, что при увеличении управляющего напряжения до 100 – 300 В и при давлении 0,2 – 0,7 Па время увеличения тока разряда составляет десятки – сотни микросекунд, что вполне приемлемо для большинства процессов современных электронно-лучевых технологий.*

*Ключевые слова: высоковольтный тлеющий разряд, анодная плазма, импульсный режим, температура электронов, подвижность электронов, время увеличения тока разряда.*

І.В. МЕЛЬНИК

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,  
факультет електроніки, кафедра електронних приладів та пристроїв**ОЦЕНКА ЧАСУ ЗБІЛЬШЕННЯ СТРУМУ ВИСОКОВОЛЬТНОГО ТЛЮЩОГО РОЗРЯДУ В ТРИОДНИХ ДЖЕРЕЛАХ ЕЛЕКТРОНІВ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ТЕМПЕРАТУРИ ЕЛЕКТРОНІВ ТА ЇХ РУХОМОСТІ В АНОДНІЙ ПЛАЗМІ**

*У статті наведені аналітичні співвідношення, які дозволяють розрахувати час збільшення струму високовольтного тліючого розряду у разі подавання керувальних імпульсів на кільцевий електрод з урахуванням зміни температури та рухомості іонів в анодній плазмі. Результати моделювання показали, що за умови збільшення керувальної напруги до 100 – 300 В, якщо тиск становить 0,2 – 0,7 Па, час збільшення струму розряду складає десятки – сотні мікросекунд, що є цілком прийнятним для більшості процесів сучасних електронно-променевої технологій.*

*Ключові слова: високовольтний тліючий розряд, анодна плазма, імпульсний режим, температура електронів, рухомість електронів, час збільшення струму розряду.*

I.V. MELNYK

National Technical University of Ukraine "Kyiv Politechnical Institute"  
Faculty of Electronic, Electronic Devices Department**ESTIMATION OF THE RISING TIME OF HIGH VOLTAGE GLOW DISCHARGE CURRENT IN TRIODE ELECTRON SOURCES WITH TAKING INTO ACCOUNT INFLUENCE OF TEMPERATURE OF ELECTRONS AND ITS MOBILITY IN ANODE PLASMA**

*The analytical relations, which allow calculating the time of rising of high voltage glow discharge current with applying the control impulses to ring-like electrode and with taking into account the temperature and mobility of electrons in anode plasma, are considered in the article. The results of simulation shown, that in the case of increasing of control voltage up to 100 – 300 V for pressure 0,2 – 0,7 Pa the time of discharge current rising is in the range tens – hundreds microsecond, that is generally acceptable to the most processes of modern electron-beam technologies.*

*Keywords: high voltage glow discharge, anode plasma, impulse regime, temperature of electrons, mobility of electrons, time of discharge current rising.*

**Введение**

Источники электронов высоковольтного тлеющего разряда (ВТР) находят широкое применение в различных отраслях промышленности, включая электронную промышленность, приборостроение, машиностроение и металлургию. Эти перспективные источники электронов эффективно используются для электронно-лучевой сварки, пайки и отжига малогабаритных изделий, для нанесения плёнок и покрытий сложного химического состава в низком и среднем вакууме в контролируемой газовой среде путём активированного электронно-лучевого термического испарения, а также для вакуумного переплава тугоплавких металлов с целью их очистки [1 - 4]. В последнее время в сферах применения электронно-лучевых технологий значительно возрос интерес к использованию интенсивных импульсных электронных пучков, поскольку импульсное тепловое воздействие позволяет значительно расширить круг выполняемых технологических операций и получать монолитные и плёночные материалы с уникальными свойствами [5]. Известно, что импульсный режим работы источников электронов ВТР можно обеспечить путём зажигания и гашения

низковольтного вспомогательного разряда в камере источника [6, 7], однако для практического использования генераторов мощных импульсных электронных пучков в промышленных технологиях важным является обеспечение малого времени увеличения и уменьшения мощности пучка [5]. Как было показано в предыдущих исследованиях [8], для импульсных источников электронов ВТР время изменения мощности формируемого пучка тесно связано с процессами взаимодействия заряженных частиц, протекающими в разрядной анодной плазме, однако все оценки времени зажигания разряда проводились только с использованием аппроксимационных соотношений на основе экспериментальных данных.

**Постановка задачи**

Обобщенная конструктивная схема импульсного триодного источника электронов ВТР с обозначенными геометрическими и электрическими параметрами модели источника приведена на рис. 1. Основными геометрическими параметрами моделируемой импульсной системы являются: длина разрядного промежутка  $l$ , продольная длина анодной плазмы  $d_{п1}$ , расстояние от границы плазмы до поверхности катода  $d_{кп1}$ , поперечный размер разрядного промежутка  $d_{поп}$  и поперечный размер катода  $r_k$ . Основными электрическими параметрами рассматриваемой модели разрядного промежутка являются ускоряющее напряжение  $U_{уск}$ , а также значение управляющего напряжения в импульсе  $U_{п1}$  и в паузе между импульсами  $U_{п0}$ . Важным внутренним параметром моделируемой системы является приведенное давление  $p_{a0}$ . Приведенные на рис. 1 значения  $d_{п1}$  и  $d_{кп1}$  соответствуют положению границы анодной плазмы в импульсе, а значения  $d_{п0}$  и  $d_{кп0}$  – её положению в паузе между импульсами управляющего напряжения.

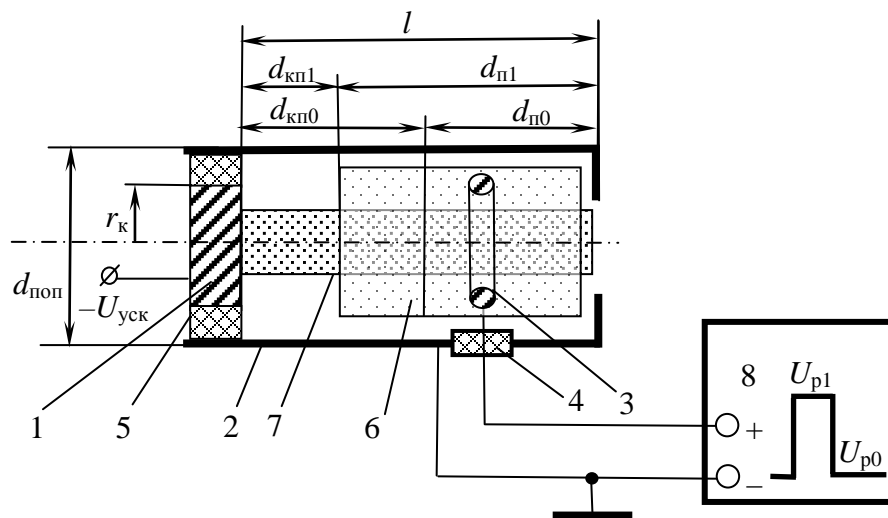


Рис. 1 Схема моделируемого триодного источника электронов ВТР с подключенной цепью управления током разряда [8].

1 – катод; 2 – анод ВТР; 3 – кольцевой электрод для зажигания вспомогательного разряда; 4 – низковольтный изолятор; 5 – высоковольтный изолятор; 6 – анодная плазма; 7 – электронный пучок; 8 – низковольтный источник импульсного напряжения.

В работе [8] было показано, что среднее время увеличения тока разряда при подаче управляющего импульса на кольцевой вспомогательный электрод 3 можно приближенно оценить из соотношений:

$$G = \exp\left(-\frac{U_i}{\frac{kT_e}{e} + U_{п1}}\right) \left[ \gamma \left[ \exp(\beta_i U_{уск}) - 1 \right] - 1 \right], \quad \bar{t}_3 = \frac{9kT_e(d_{п1} - d_{п0})}{8(\pi e)^3 \mu_{e0} \gamma G \ln\left(1,5 - \sqrt{\frac{kT_e(\epsilon \Delta U)^3}{\pi p_{a0}}}\right)}, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – коэффициент вторичной ионно-электронной эмиссии для выбранного материала катода,  $\beta_i$  – коэффициент ионизации газа,  $T_e$  – температура электронов в анодной плазме с учетом её нагрева электронным пучком и влияния вспомогательного разряда,  $\mu_{e0}$  – подвижность электронов плазмы.

При проведении расчетов с использованием соотношения (1) использовались оценки положения анодной плазмы относительно катода  $d_{кп}$ , полученные в работах [6, 7], однако значения  $T_e$  и  $\mu_{e0}$  определялись приближенно по току вспомогательного разряда  $I_p$  с использованием справочных данных из [9, 10].

Целью данной работы является получение уточнённых значений среднего времени зажигания разряда  $\bar{t}_3$  с учетом зависимости температуры электронов и их подвижности в анодной плазме от параметров горения ВТР и низковольтного вспомогательного разряда.

**Оценка положения границы анодной плазмы и тока высоковольтного тлеющего разряда**

Расчет положения границы анодной плазмы можно провести исходя из уравнения баланса ионов в ней с учетом ионизации газа быстрыми электронами пучка и медленными, отраженными от анода электронами. При этом необходимо учесть диффузию ионов из плазмы на анод ВТР, а также влияние вспомогательного разряда. Тогда, принимая во внимание условие самостоятельности горения ВТР [6 – 8], можно записать следующую систему уравнений для определения расстояния от границы плазмы до катода  $d_{кп}$  [6, 7]:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= A_i U_{уск}^{-a_i} (A_i U_{уск}^{-a_i} + 1) \sqrt{\frac{kT_e + eU_p}{2\pi m_e}}; \quad R_2 = f \eta_i \eta_U^{-a_i} k_e; \quad R_4 = \mu_{e0} (kT_e + eU_p) \left(\frac{\pi}{p_{a0}}\right)^2 \left(1 + \frac{\gamma d_{поп}}{\lambda_e}\right); \\
 R_3 &= 3(kT_e + eU_p) N_0 \alpha_i \sqrt{\frac{kT_e + eU_p}{2\pi m_e}} \exp\left(-\frac{U_i}{\frac{kT_e}{e} + U_p}\right); \quad R_5 = R_1 R_2 p_{a0} Q_{ep0}; \quad C_y = -\frac{R_1 + R_3 + R_1 R_2}{R_5}, \\
 D_y &= \frac{R_4}{R_5}, \quad p = -\frac{C_y^2}{3}, \quad q = \frac{2C_y^3}{27} + D_y, \quad D_{yp} = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2; \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D_{yp}}}; \\
 v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D_{yp}}}; \quad y = u + v; \quad d_{п} = y - \frac{C_y}{3}; \quad \lambda_e = \frac{9kT_e (eU_p + kT_e)^2}{4\pi e^4 p_{a0} \ln\left(1,5 - \sqrt{\frac{kT_e (eU_p + kT_e)^3}{\pi p_{a0}}}\right)}; \quad d_{кп} = l - d_{п},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $j_{ек}$  – плотность тока электронов на поверхности катода,  $\eta_i$  и  $\eta_U$  – коэффициенты отражения электронов от анода ВТР по току и по энергии соответственно,  $k_e$  – коэффициент удлинения траекторий электронов,  $f$  – коэффициент прозрачности анода ВТР,  $Q_{ep0}$  – сечение рассеяния электронов на ионах остаточного газа,  $\lambda_e$  – длина свободного пробега электронов,  $\gamma$  – коэффициент вторичной ионно-электронной эмиссии с поверхности анода ВТР,  $n_e$  – концентрация электронов в плазме,  $U_i$  – потенциал ионизации газа,  $N_0$  – постоянная Лосмидта,  $\alpha_i$  – полуэмпирическая постоянная, являющаяся константой для данного газа,  $A_i$ ,  $a_i$  – полуэмпирические коэффициенты, где  $C_y$ ,  $D_y$  – коэффициенты решаемого уравнения,  $D_{yp}$  – дискриминант уравнения, а  $p$ ,  $q$ ,  $u$ ,  $v$  и  $y$  – вспомогательные переменные [6, 7].

Зная поперечный размер анодной плазмы  $d_{п}$ , концентрацию ионов в ней и ток ВТР можно определить из соотношений [6, 7]:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{\pi^2 \mu_{i0}}{(d_{п} p_{a0})^2} \left(1 + \frac{\gamma d_{поп}}{\lambda}\right) - 3N_0 \alpha_i \sqrt{\frac{e(kT_e + eU_p)}{2\pi m_e}}, \quad S_2 = 1 + \eta_i \eta_U^{-a_i} (1 - f(1 - d_{п} p_{a0} Q_{ep0})), \\
 n_i &= \frac{A_i U_{уск}^{-a_i} (1 + A_i U_{уск}^{-a_i}) S_2}{S_1 (kT_e + eU_p) \exp\left(-\frac{U_i}{\frac{kT_e}{e} + U_p}\right)}, \quad I_p = r_k^2 n_i (1 + A_i U_{уск}^{-a_i}) \sqrt{\frac{\pi e d_{п} (kT_e + eU_p)}{2m_e}},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – вспомогательные переменные,  $n_i$  – концентрация ионов,  $I_p$  – ток ВТР.

Вычисленные из соотношений (2, 3) значения тока разряда и положения анодной плазмы для сильноточного и слаботочного режимов горения разряда могут быть непосредственно подставлены в выражение (1), а метод расчета температуры электронов в плазме и их подвижности будет рассмотрен в следующем разделе статьи.

**Оценка температуры электронов в анодной плазме и их подвижности**

Температура электронов в анодной плазме определяется из соотношения [9 – 11]:

$$T_e = \frac{eU_p}{2k} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{\pi e^2 m_i}{6m_e} \left(\frac{U_{уск} d_{кп}}{p_{a0} Q_{ea}}\right)^2} \right], \tag{4}$$

где  $m_i$  – масса ионов газа,  $k$  – постоянная Больцмана.

Частота столкновений электронов с атомами остаточного газа  $\nu_e$  для физических условий горения ВТР может быть оценена из соотношения [10, 11]:

$$v_e = \frac{U_{\text{уск}} d_{\text{кп}}}{\sqrt{\frac{3U_p m_e^2}{em_i} \left( \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{\pi e^2 m_i}{6m_e} \left( \frac{U_{\text{уск}} d_{\text{кп}}}{p_{a0} Q_{ea}} \right)^2} \right] - 1 \right)}} \quad (5)$$

При известной температуре электронов и частоте столкновения их с атомами остаточного газа, которые определяются из соотношений (4, 5), для функции распределения Максвелла можно записать следующее аналитическое выражение для подвижности электронов [9 – 11]:

$$\mu_e = \frac{e \int_0^\infty v_e^4 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2kT_e}\right) dv_e}{3v_e m_e \int_0^\infty v_e^2 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2kT_e}\right) dv_e} = \frac{eK_{\text{пп}}}{3v_e m_e} \quad (6)$$

где коэффициент  $K_{\text{пп}}$  описывает процесс термодинамического взаимодействия формируемого электронного пучка с анодной плазмой и, в соответствии с (6), определяется из соотношения:

$$K_{\text{пп}} = \frac{\int_0^\infty v_e^4 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2kT_e}\right) dv_e}{\int_0^\infty v_e^2 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2kT_e}\right) dv_e} \quad (7)$$

Численное решение уравнения (7) проводилось с использованием метода квадратур Симпсона, границы интегрирования по скорости определялись из соотношений

$$v_e^{\text{min}} = 0,1 \sqrt{\frac{2eU_{\text{упр.}}}{m_e}} \approx 10^5; \quad v_e^{\text{max}} = 0,2 \sqrt{\frac{2eU_{\text{уск.}}}{m_e}} \approx 10^7. \quad (8)$$

**Результаты моделирования и их анализ**

Результаты расчета времени увеличения тока разряда, проведенного с использованием соотношений (4 – 8), приведены на рис. 2. Для сравнения на рис. 2 приведены аналогичные результаты, полученные в работе [8] с использованием экспериментальных и литературных данных [9, 10]. Из приведенных данных видно, что расхождение между полученными результатами не превышает 10%, а точность расчета выше при использовании соотношений (4 – 8), поскольку в работе [8] расчеты проводились для усредненного значения температуры электронов и их подвижности в анодной плазме. Все расчеты проводились для следующих значений геометрических и внутренних параметров модели [8]:  $I = 7 \text{ см}$ ,  $d_{\text{поп}} = 7 \text{ см}$ ,  $r_k = 5 \text{ см}$ ,  $U_j = 18 \text{ В}$ ,  $a_j = 0,343$ ,  $\gamma = 4,6$ ,  $Q_{ep0} = 5,3 \cdot 10^{-19} \text{ м}^{-2}$ ,  $\alpha_j = 1,452$ ,  $\eta_j = 0,7$ ,  $\eta_U = 0,95$ ,  $f = 0,99$ ,  $A_j = 3,8 \cdot 10^{-6}$ ,  $\beta_j = 2,8 \cdot 10^{-4}$ . При подаче управляющих импульсов ток ВТР увеличивается от единиц мА до 1–1,5 А.

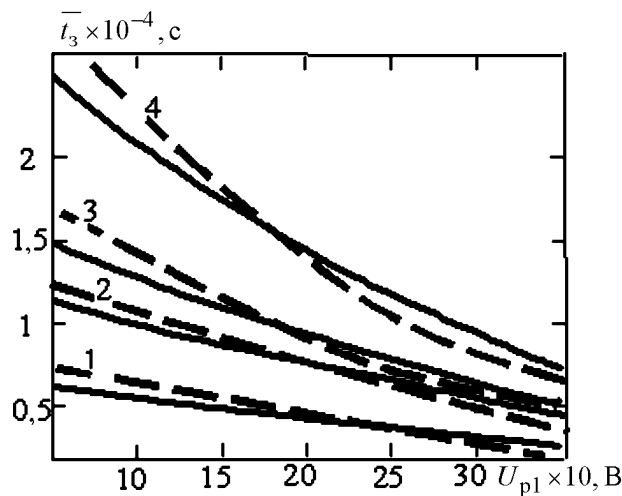


Рис. 2 Рассчитанные зависимости среднего времени увеличения тока ВТР от максимального напряжения управляющего импульса  $U_{p1}$  и от давления в разрядном промежутке. Сплошные линии – результаты, полученные без учета зависимостей (4–7) по литературным данным [8], пунктирные линии – результаты, полученные с учетом зависимостей (4–7).  
1 – 0,7 Па; 2 – 0,4 Па; 3 – 0,3 Па; 4 – 0,2 Па.  $U_{\text{уск}} = 15 \text{ кВ}$ ;  $U_{p0} = 5 \text{ В}$ .

Из данных моделирования, приведенных на рис. 2, видно, что минимальные значения среднего времени увеличения тока ВТР соответствуют высоким значениям напряжения в импульсе и давления в разрядном промежутке. Это обусловлено тем, что для физических условий горения ВТР ионизационные процессы в разряде преобладают над диффузионными.

#### Выводы

Из полученных результатов моделирования можно сделать вывод о том, что для физических условий горения ВТР при изменении управляющего напряжения в импульсе от минимального значения  $U_{p0} = 5$  В до максимального значения  $U_{p1} = 100 - 300$  В среднее время увеличения тока разряда составляет порядка десятков – сотен микросекунд. Результаты расчетов, приведенные на рис. 2, соответствуют измеренным экспериментальным данным с точностью до 25 – 30%. Такие малые времена регулирования являются вполне приемлемыми для большинства процессов современных электронно-лучевых технологий [8], что свидетельствует о перспективности дальнейших работ по разработке импульсных источников электронов ВТР и их внедрению в промышленное производство. Полученные результаты представляют большой практический интерес для разработчиков электронно-лучевого технологического оборудования.

#### Список использованной литературы

1. Ладохин С.В., Левицкий Н.И., Чернявский В.Б. и др. Электронно-лучевая плавка в литейном производстве. – Киев: «Сталь», 2007. – 605 с.
2. Grechanyuk M.I., Melnyk A.G., Grechanyuk I.M. et al. Modern electron beam technologies and equipment for melting and physical vapor deposition of different materials. // *Elektrotechnica and Electronica (E+E)*. – 2014. — Vol. 49, № 5-6. – P. 115–121.
3. Feinaeugle P., Mattausch G., Schmidt S., Roegner F.H. A new generation of plasma-based electron beam sources with high power density as a novel tool for high-rate PVD. // *Society of Vacuum Coaters. 54-th Annual Technical Conf. Proc., Chicago, 2011.* – P. 202–209.
4. Mattausch G., Scheffel B., Zywitzki O. et al. Technologies and tools for the plasma-activated EB high-rate deposition of Zirconia. // *Elektrotechnica and Electronica (E+E)*. – 2012. – Vol. 47, № 5-6. – P. 152–158.
5. Grechanyuk N., Kucherenko P., Grechanyuk I., Shpack P. Modern technologies and equipment for obtaining of new materials and coatings // *Elektrotechnica and Electronica (E+E)*. – 2006. – Vol. 41, № 5-6. – P. 122–128.
6. Мельник И.В., Тугай С.Б. Аналитический расчет положения границы анодной плазмы в высоковольтном разрядном промежутке при зажигании вспомогательного разряда. // *Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника.* – 2012.— Том 55, № 11. – С. 50—59.
7. Мельник И.В. Обобщенная методика моделирования триодных источников электронов высоковольтного тлеющего разряда // *Электронное моделирование.* – 2013. – Том 35, № 4. – С. 93-107.
8. Мельник И.В. Оценка времени увеличения тока высоковольтного тлеющего разряда в триодной электродной системе при подаче управляющих импульсов. // *Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника.* – 2013.— Том 56, № 12.— С. 51—61.
9. Грановский В.Л. Электрический ток в газах. Том 1. Общие вопросы электродинамики газов. – М.–Л.: Гос. изд. технико-теоретич. литературы, 1952. – 432 с.
10. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. – М.: Наука, 1987. – 592 с.
11. Велихов Е.П., Ковалев В.С., Рахимов А.Т. Физические явления в газоразрядной плазме. – М.: Наука, 1987. – 160 с.



УДК 533.9.07:537.533

І.В. МЕЛЬНИК, Б.А. ТУГАЙ, С.Б. ТУГАЙ

Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт»,  
факультет электроники, кафедра электронных приборов и устройств

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ТОКА ЭЛЕКТРОННЫХ ПУШЕК ВЫСОКОВОЛЬТНОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО НАТЕКАТЕЛЯ

*В статье приведены результаты моделирования зависимости тока электронных пушек высоковольтного тлеющего разряда от геометрических параметров электромагнитного натекателя, являющегося основным элементом газодинамической системы управления током и мощностью разряда. В результате моделирования получена функция аппроксимации для описания зависимости тока разряда от напряжения на обмотке натекателя, которая может быть использована в микроконтроллерных системах управления для анализа крутизны характеристики управления. Полученные результаты моделирования представляют большой интерес для разработчиков электронно-лучевого технологического оборудования.*

*Ключевые слова:* газодинамическая система управления, высоковольтный тлеющий разряд, электромагнитный натекатель.

І.В. МЕЛЬНИК, Б.А. ТУГАЙ, С.Б. ТУГАЙ

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»,  
факультет електроніки, кафедра електронних приладів та пристроїв

### МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ СТРУМУ ЕЛЕКТРОННИХ ГАРМАТ ВИСОКОВОЛЬТНОГО ТЛЮЧОГО РОЗРЯДУ ВІД ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО НАТІКАЧА

*У статті наведені результати моделювання залежності струму електронних гармат високовольтного тліючого розряду від геометричних параметрів електромагнітного натікача як елемента газодинамічної системи керування струмом та потужністю розряду. В результаті моделювання отримана функція апроксимації для описання залежності струму розряду від напруги на обмотці натікача, яка може бути використана в мікроконтролерних системах керування для аналізу крутості характеристики керування. Отримані результати моделювання можуть бути цікавими для розробників електронно-променевого технологічного обладнання.*

*Ключові слова:* газодинамічна система керування, високовольтний тліючий розряд, електромагнітний натікач.

I.V. MELNYK, B.A. TAHAI, S.B. TAHAI

National Technical University of Ukraine  
"Kyiv Politechnical Institute"  
Faculty of Electronic, Electronic Devices Department

### SIMULATION OF DEPENDENCES OF HIGH VOLTAGE GLOW DISCHARGE ELECTRON GUN'S CURRENT FROM THE GEOMETRICAL PARAMETERS OF ELECTROMAGNETIC VALVE

*The results of simulation of dependences of high voltage glow discharge electron gun's current from the geometrical parameters of electromagnetic valve, which is the primary element of gas-dynamic systems of discharge current and power control, are presented in the article. The approximation function for describing the dependence of discharge current from the voltage on the coil of valve, which can be used in microcontroller systems for analyzing the slope of control characteristic, have been obtained as the result of simulation. Obtained simulation results are very interesting for the developers of electron-beam equipment.*

*Keywords:* gas-dynamic control system, high voltage glow discharge, electromagnetic valve.

#### Введение

В последнее время во многих отраслях промышленности, в частности, в электронной промышленности, в приборостроении, в машиностроении и в металлургии, находят широкое применение электронные пушки на основе высоковольтного тлеющего разряда (ВТР). Такие пушки выгодно отличаются от традиционных пушек с подогреваемыми катодами относительно низкой стоимостью, высокой надёжностью и долговечностью холодных катодов, возможностью работы в низком вакууме в среде различных активных и инертных газов, возможностью эффективного газодинамического управления током разряда путём изменения давления в разрядной камере, а также относительной простотой как конструкции самих пушек, так и вакуумного и энергетического оборудования электронно-лучевых технологических установок [1, 2].

При внедрении электронных пушек ВТР в промышленное производство одним из ключевых проблемных вопросов является эффективное управление мощностью формируемого электронного пучка. Проведенные ранее теоретические и экспериментальные исследования работы газодинамических систем управления с реальными газоразрядными устройствами показали, что разработка эффективных систем газодинамического управления током разряда требует более тщательного изучения зависимости тока от внешних воздействий с учетом реальных конструктивных параметров натекателей, являющихся в этом случае управляющими элементами [3, 4]. Сегодня такие исследования становятся особенно актуальными с учетом современного интенсивного развития систем цифрового управления и микропроцессорных систем, в которых нелинейность характеристики управления может быть учтена непосредственно в программном коде [5]. В связи с этим целью данной работы является моделирование и исследование зависимостей характеристик управления током ВТР от геометрических параметров натекателя как элемента системы управления.

**Постановка задачи**

Из теории ВТР известно, что зависимость тока разряда от ускоряющего напряжения и от давления в разрядном промежутке определяется простой степенной функцией вида [2, 6]:

$$I_{\Pi} = a_{\Pi} p_{\Pi}^m U_{\text{уск}}^n, \tag{1}$$

где  $I_{\Pi}$  – ток разряда,  $p_{\Pi}$  – давление в камере источника электронов,  $U_{\text{уск}}$  – ускоряющее напряжение,  $a_{\Pi}$ ,  $m$ ,  $n$  – полуэмпирические постоянные, которые зависят от рода газа, материала катода и от геометрии электродной системы. Обычно коэффициенты  $m$  и  $n$  в соотношении (1) изменяются в диапазоне от 2 до 4 [2, 6]. Из соотношения (1) очевидно, что ток разряда в значительной степени зависит от давления, и именно эта зависимость используется в газодинамических системах управления током ВТР. Функциональная схема такой системы приведена на рис. 1 [3,4].

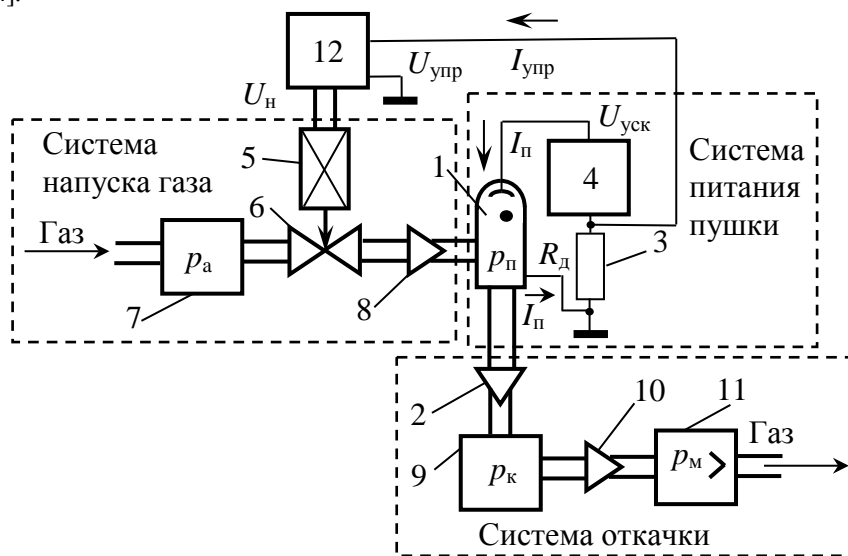


Рис. 1 Функциональная схема системы автоматического управления током ВТР. 1 – электронная пушка, 2 – лучепровод, 3 – датчик тока пушки, 4 – источник питания, 5 – электромагнитный натекатель, 6 – дозирующее устройство натекателя, 7 – газовая камера натекателя, 8 – канал для напуска газа в пушку, 9 – вакуумная камера, 10 – вакуумопровод, 11 – вакуумный насос, 12 – электронная или микроконтроллерная система управления током ВТР

Управляющим элементом в системе управления, приведенной на рис. 1, является электромагнитный натекатель 5 с дозирующим устройством 6, конструктивная схема которого приведена на рис. 2. Принцип работы натекателя состоит в том, что под действием тяговой силы электромагнита подвижная часть штока 1 перемещается относительно седла 2, и в результате этого перемещения изменяется вакуумная проводимость системы напуска газа в пушку, а следовательно, и давление в ней. Таким образом, в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1, сигнал с датчика тока, включенного в систему питания пушки, через систему управления, подключенную в цепь обратной связи, поступает на натекатель, а изменение вакуумной проводимости дозирующего узла натекателя при непрерывной откачке всей системы приводит к изменению давления в камере пушки  $p_{\Pi}$  и, соответственно, тока пушки.

Однако, несмотря на простоту газодинамического способа управления, очень сложно обеспечить стабильность работы таких систем на реальном технологическом оборудовании, особенно с учетом того, что основным требованием современных электронно-лучевых технологий является обеспечение высокой стабильности мощности формируемого электронного пучка, а механические элементы газодинамических систем обычно очень инерционны. Эта проблема особенно важна при реализации сложных термических процессов, связанных с активным выделением газов в технологической камере, например при вакуумном переплаве титана [1], когда изменение давления газа в процессе выполнения технологической операции может существенно влиять на ток формируемого электронного пучка.

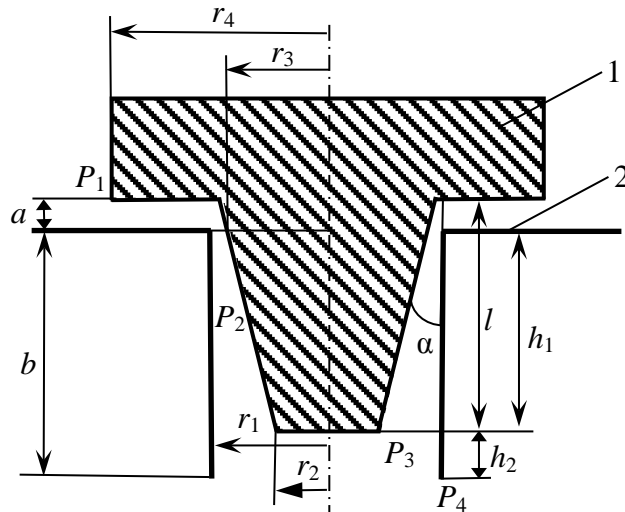


Рис. 2 Конструктивная схема дозирующего устройства натекателя и его основные геометрические размеры

Поэтому важной научно-технической проблемой при проектировании газодинамических систем управления является исследование зависимости управляющих характеристик от геометрических размеров дозирующего узла, что и является целью данной работы.

**Модель газодинамической системы управления в статическом режиме**

В общем виде модель газодинамической системы управления током ВТР, с учетом (1), записывается в виде следующей системы алгебро-дифференциальных уравнений [3, 4]:

$$\begin{cases} R_H I_H + L_H \frac{dI_H}{dt} = U_H, \\ m_H \frac{d^2 l}{dt^2} = C_e I_H - C_{II} l - C_K \frac{dl}{dt}, \\ V_{\Gamma} \frac{dp_{\Gamma}}{dt} = S_{\Gamma} \cdot (p_a - p_{II}) - S_{\Gamma L} (p_{II} - p_K), \\ V_K \frac{dp_K}{dt} = S_{\Gamma L} \cdot (p_{II} - p_K) - \frac{S_B S_p}{S_B + S_p} \cdot (p_K - p_M), \\ I_{II} = a_{II} \cdot p_{II}^m U_{\text{уск}}^n, \end{cases} \quad (2)$$

где  $R_H$  и  $L_H$  – активное сопротивление и индуктивность обмотки натекателя,  $I_H$  и  $U_H$  – ток и напряжение на его обмотке,  $m_H$  – масса подвижной части штока натекателя,  $C_e$  – крутизна тяговой характеристики электромагнита,  $C_{II}$  – коэффициент жесткости пружины,  $C_K$  – коэффициент трения штока о корпус натекателя,  $V_{II}$  – объём разрядной камеры пушки,  $p_{II}$  – давление в ней,  $p_a$  – атмосферное давление,  $S_{\Gamma}$  – проводимость входного вакуумного канала,  $S_{\Gamma L}$  – проводимость лучепровода, расположенного между пушкой и технологической камерой,  $S_B$  – проводимость вакуумопровода, расположенного между насосом и технологической камерой,  $S_p$  – расчетное быстродействие вакуумного насоса,  $p_M$  – допустимое минимальное давление в технологической камере, которое может обеспечить вакуумный насос.

Система уравнений (2) достаточно сложная, и в основном методы её решения, которые предлагались ранее, основаны на квазилинейном приближении [3, 4], а ведь именно нелинейность управляющей характеристики определяет основные особенности работы газодинамической системы управления и возможности стабилизации тока разряда. С другой стороны из рис. 2 очевидно, что газодинамические характеристики дозирующего узла натекателя определяются его конструктивными размерами и значениями давлений на входе элементов его конструкции  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ . Поэтому важно построить упрощенную математическую модель разомкнутой газодинамической системы управления без цепи обратной связи, чтобы получить и проанализировать зависимость  $I_{II}(U_H)$ .

**Моделирование работы электромагнитного натекателя в статическом режиме**

С учетом системы уравнений (2), работу электромагнитного натекателя в статическом режиме можно описать с помощью простой системы из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} R_{\text{н}} I_{\text{н}} = U_{\text{н}}; \\ C_{\text{е}} I_{\text{н}} - IC_{\text{п}} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Запишем также основные уравнения, характеризующие взаимосвязь между геометрическими параметрами конструкции дозирующего узла натекателя, которые обозначены на рис.2:

$$h_1 = l - a; \quad b = h_1 + h_2; \quad r_3 = r_1 - \alpha a; \quad \alpha = \arctg\left(\frac{r_1 - r_2}{l}\right); \quad r_{\text{ср}} = \frac{r_3 + r_2}{2}. \quad (4)$$

С учетом (3, 4), имеем:

$$a = b - \frac{U_{\text{н}} C_{\text{е}}}{R_{\text{н}} C_{\text{п}}}. \quad (5)$$

Одной из самых сложных задач моделирования вакуумных систем является задача определения проводимостей вакуумных элементов со сложной геометрией, аналогичных приведенной на рис. 2. В работе [7] для определения граничных давлений на элементах конструкции дозирующего узла натекателя были получены следующие соотношения:

$$G_1 = \frac{1,445 \cdot 10^4 K_d(a) a^3}{\ln(r_4) - \ln(\alpha a)}, \quad K_d(a) = \frac{a^2}{a^2 + 0,001}, \quad G_2 = \frac{2,72 \cdot 10^3}{h_1} \left( 4(r_1^4 - r_{\text{ср}}^4) - \frac{(r_1^2 - r_{\text{ср}}^2)}{\ln(r_1) - \ln(r_{\text{ср}})} \right), \quad (6)$$

$$G_3 = 1,088 \cdot 10^4 \frac{r_1^4}{h_2}, \quad P_2 = \sqrt{\frac{G_1 p_a^2 + \frac{G_2 \left( p_{\text{п}}^2 G_3 + \frac{p_a^2 G_1 G_2}{G_1 + G_2} \right)}{\left( G_3 + G_2 - \frac{G_2^2}{G_1 + G_2} \right)}}{G_1 + G_2}}, \quad P_3 = \sqrt{\frac{\left( p_{\text{п}}^2 G_3 + \frac{p_a^2 G_1 G_2}{G_1 + G_2} \right)}{\left( G_3 + G_2 - \frac{G_2^2}{G_1 + G_2} \right)}}, \quad (7)$$

$$P_1 = p_a; \quad U_1 = G_1(P_1 - P_2); \quad U_2 = G_2(P_2 - P_3); \quad U_3 = G_3(P_3 - P_{\text{п}}); \quad S_{\text{н}} = \frac{U_1 U_2 U_3}{U_1 U_2 + U_1 U_3 + U_2 U_3}, \quad (8)$$

где  $G_1, G_2, G_3$  – проводимости элементов конструкции дозирующего узла натекателя,  $S_{\text{н}}$  – полная проводимость дозирующего узла.

Главная проблема решения системы уравнений (6 – 8) состоит в том, что в выражениях (7) значения давлений  $P_2$  и  $P_3$  зависят от давления в камере пушки  $p_{\text{п}}$ , поэтому такая система уравнений может быть решена только итерационными численными методами. Учитывая то, что обычно значение давления  $p_{\text{п}}$  лежит в достаточно узком диапазоне 1 – 10 Па, система уравнений (6 – 8) была решена методом золотого сечения [8]. С другой стороны, при заданном значении тока ВТР давление в разрядной камере можно определить из соотношения (1).

**Результаты моделирования и их анализ**

Расчет зависимостей  $I_{\text{н}}(U_{\text{н}})$  с использованием соотношений (1, 4 – 8) проводился для следующих параметров системы питания пушки и электромагнитного натекателя:  $U_{\text{уск}} = 15$  кВ,  $R_{\text{н}} = 10$  Ом,  $C_{\text{е}} = 1$  кг/А,  $C_{\text{п}} = 10^3$  Н/м,  $r_4 = 2$  мм и  $l = 30$  мм, а геометрические параметры конструкции дозирующего узла  $r_1, r_2, b$  и  $\alpha$  варьировались в процессе моделирования. Полученные в результате моделирования зависимости  $I_{\text{н}}(U_{\text{н}})$  приведены на рис. 3. Из полученных расчетных данных очевидно, что при определенных значениях напря-

жения на натекателе  $U_{\text{н}}$  система переходит в режим насыщения и скорость увеличения тока пушки  $\frac{dI_{\text{п}}}{dU_{\text{н}}}$  становится значительно меньшей, чем на начальном участке управляющей характеристики. В большинстве случаев при  $U_{\text{н}} > 5$  В управление током становится неэффективным из-за малой крутизны управляющей характеристики  $I_{\text{н}}(U_{\text{н}})$ . Это объясняется принципом работы дозирующего устройства натекателя, конструктивная схема которого приведена на рис. 2. Действительно, при большом расстоянии  $a$  между плоскостями подвижного штока и зафиксированного седла, когда натекатель почти полностью открыт, даже значительное изменение этого расстояния  $\Delta a$  практически не влияет на вакуумную проводимость дозирующего узла.

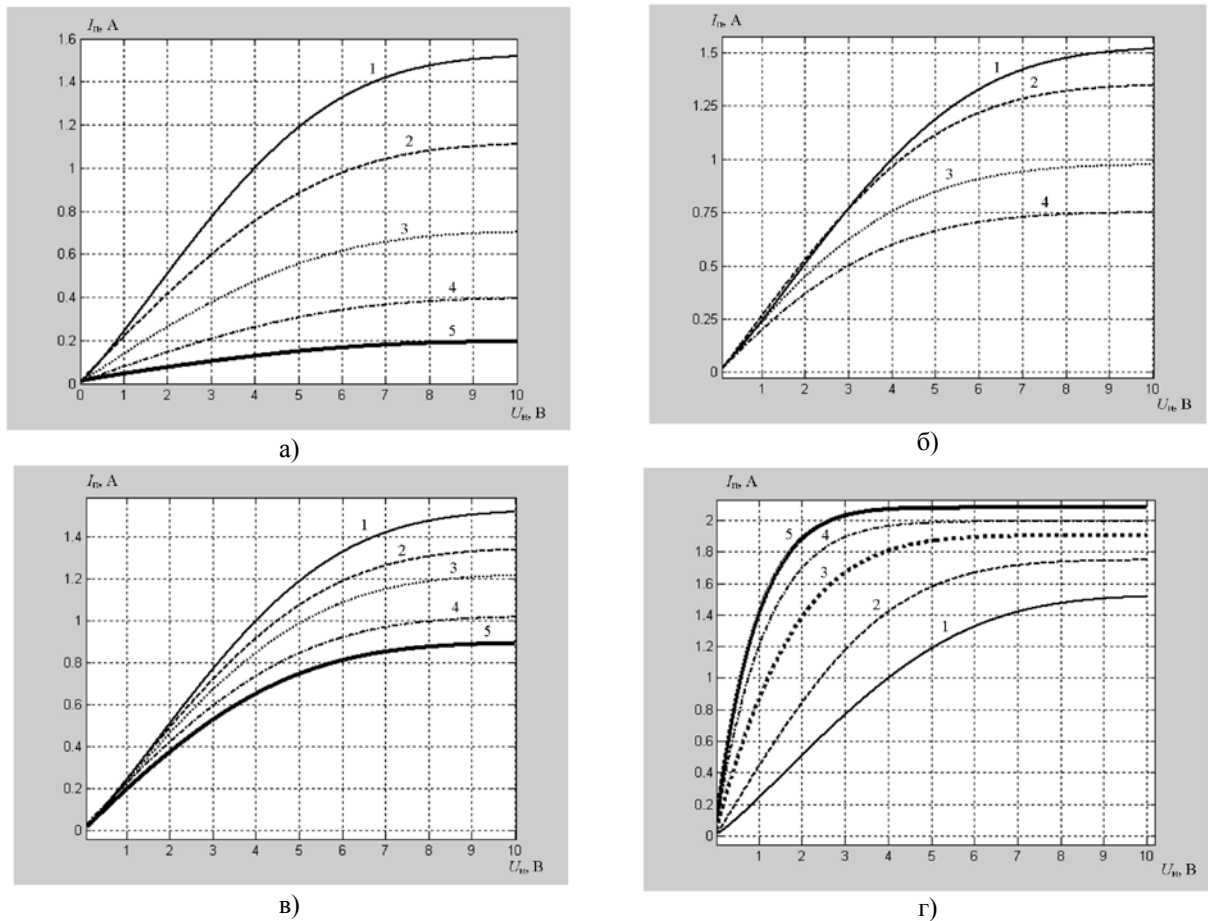


Рис. 3 Зависимости тока пушки от напряжения на натекателе. а – для разных значений  $r_1$ : 1 –  $r_1 = 1$  мм, 2 –  $r_1 = 0,9$  мм, 3 –  $r_1 = 0,8$  мм, 4 –  $r_1 = 0,7$  мм, 5 –  $r_1 = 0,6$  мм;  $r_2 = 0,2$  мм,  $b = 20$  мм,  $\alpha = 10^{-3}$  рад; б – для разных значений  $r_2$ : 1 –  $r_2 = 0,2$  мм, 2 –  $r_2 = 0,4$  мм, 3 –  $r_2 = 0,6$  мм, 4 –  $r_2 = 0,8$  мм;  $r_1 = 1$  мм,  $b = 20$  мм,  $\alpha = 10^{-3}$  рад; в – для разных значений  $\alpha$ : 1 –  $\alpha = 10^{-3}$  рад, 2 –  $\alpha = 7 \cdot 10^{-4}$  рад, 3 –  $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$  рад, 4 –  $\alpha = 3 \cdot 10^{-4}$  рад, 5 –  $\alpha = 10^{-4}$  рад;  $r_1 = 1$  мм,  $r_2 = 0,2$  мм,  $b = 20$  мм; г – для разных значений  $b$ : 1 –  $b = 20$  мм, 2 –  $b = 18$  мм, 3 –  $b = 15$  мм, 4 –  $b = 12$  мм, 5 –  $b = 10$  мм;  $r_1 = 1$  мм,  $r_2 = 0,2$  мм,  $\alpha = 10^{-3}$  рад.

Очевидным также является то, что ток пушки становится большим при уменьшении вакуумной проводимости дозирующего узла, что соответствует увеличению радиуса  $r_1$ , уменьшению радиуса  $r_2$ , увеличению угла  $\alpha$  и уменьшению длины канала  $b$ . Однако при увеличении максимального значения тока пушки возрастает и крутизна управляющей характеристики  $\frac{dI_{\text{п}}}{dU_{\text{н}}}$ , что в реальных системах управления приводит к

эффекту перерегулирования и колебательным процессам. Из приведенных зависимостей очевидно, что меньшей крутизной обладают характеристики управления, в которых максимальное значение тока достигается за счет увеличения радиуса  $r_1$  (рис. 3, а) и уменьшения радиуса  $r_2$  (рис. 3, б), эффективным также является увеличение угла  $\alpha$  в незначительных пределах (рис. 3, в), хотя наибольшее значение тока пушки достигается за счет уменьшения длины канала  $b$  (рис. 3, г).

Полученные результаты имеют большое практическое значение при проектировании газодинамических систем управления током ВТР, поскольку реальная форма управляющей характеристики может быть учтена при проектировании микроконтроллерных систем технологического назначения [5]. Однако поскольку решение системы уравнений (1, 4 – 8) требует больших вычислительных затрат, которые часто не совместимы с производительностью современных микроконтроллеров при работе в режиме реального времени [5], важной задачей является аппроксимация управляющих характеристик для конкретных выбранных геометрических параметров дозирующего устройства. Для решения этой задачи была использована функция ошибок и управляющая характеристика записывалась в виде:

$$I_{\text{п}}(U_{\text{н}}) = a_1 \Phi(a_2 U_{\text{н}}), \quad (9)$$

где  $a_1, a_2$  – коэффициенты аппроксимации. Решение задачи аппроксимации проводилось с использованием средств программирования системы MatLab по методике, описанной в работе [6]. Например, при параметрах дозирующего устройства  $r_1 = 1$  мм,  $r_2 = 0,2$  мм,  $b = 20$  мм,  $\alpha = 10^{-3}$  рад, достигнутая наименьшая погрешность аппроксимации полученной расчетной зависимости с использованием функции (9) составляла не более 3% при значениях  $a_1 = 1,5$  А,  $a_2 = -0,0306 \frac{1}{\text{В}}$ .

### Выводы

Полученные в работе результаты моделирования управляющих характеристик газодинамических систем управления током ВТР и функция для их аппроксимации представляют большой интерес для специалистов, занимающихся проектированием таких систем. Разработчики электромагнитных натекаателей могут с использованием полученных зависимостей подобрать оптимальные геометрические параметры дозирующего узла, а разработчики микроконтроллерных систем управления могут с использованием соотношения (9) учесть в процессе написания программного обеспечения характерные особенности нелинейной управляющей характеристики. В конечном итоге это позволит с большей точностью стабилизировать мощность формируемого электронного пучка при работе пушек ВТР в составе технологического оборудования, и, тем самым, значительно повысить качество изготавливаемых изделий и снизить процент брака на производстве.

### Список использованной литературы

1. Ладохин С.В., Левицкий Н.И., Чернявский В.Б. и др. Электронно-лучевая плавка в литейном производстве. – Киев: «Сталь», 2007. – 605 с.
2. Новиков А.А. Источники электронов высоковольтного тлеющего разряда. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 96 с.
3. Денбновецкий С.В., Костюченко К.О., Мельник В.І., Мельник І.В., Тугай Б.А. Моделирование процессу автоматического керування струмом газоразрядного электропроменевого нагрівача. – Електроніка та зв'язок, том 9, № 22, 2004. – С. 15 – 17.
4. Denbnovetsky S.V., Melnyk V.I., Melnyk I.V., Tugay B.A. Model of control of glow discharge electron gun current for microelectronics production applications. – Proceedings of SPIE. Sixth International Conference on “Material Science and Material Properties for Infrared Optoelectronics”. – Vol. 5065 (2003). – P. 64 – 76.
5. Евстифеев А.В. Микроконтроллеры AVR семейства Tiny и Mega фирмы ATMEL. – М.: Издательский дом «Додэка – XXI», 2008. – 558 с.
6. Мельник І.В. Аппроксимация вольт-амперных характеристик технологических источников электронов высоковольтного тлеющего разряда с использованием средств системы MatLab // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2 (35). – Херсон, 2009. – С. 299-305.
7. Мельник І.В., Тугай С.Б. Исследование пропускной способности дозирующего устройства натекаателя газа для газоразрядной электронной пушки. // Электроника и связь, № 5 (64), 2011. – С. 25 – 30.
8. Васильев В.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.