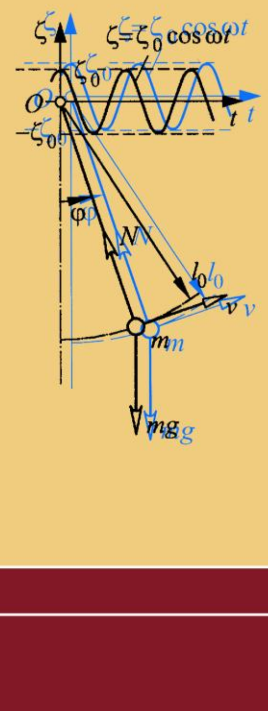
ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ПРУЖНО-ЖОРСТКИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ



Українські технології

ISBN 966-345-005-3
9 789663 450056

Динамічний аналіз лінійних моделей пружно-жорстких механічних систем

П. М. Гащук
І. Л. Зорій

П. М. Гащук, І. Л. Зорій

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ПРУЖНО-ЖОРСТКИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ
пружно-жорстких
механічних систем

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ „ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Науково-виробнича фірма „Українські технології”

П. М. ГАЩУК, І. Л. ЗОРІЙ

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ПРУЖНО-ЖОРСТКИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Львів
2005

УДК 621.81.001.2
ББК 22.16
Г 24

Викладаються засади узагальненої методології аналізу динамічних властивостей лінійних моделей параметрично збурюваних механічних систем з одним ступенем вільності та одновимірних пружно-жорстких систем з довільними допустимими законами розподілу жорсткостей, мас, сил тертя і навантажень, а також деяких двовимірних систем. Методологія спирається на моделі й методи механіки деформівного твердого тіла, теорії коливань, теорії стійкості та поняття фундаментальної функції, відповідної звичайному диференціальному рівнянню, зокрема такому, що може мати особливості типу імпульсних функцій в коефіцієнтах та правих частинах.

Для наукових працівників, аспірантів, інженерів.

Науковий редактор

член-кореспондент Національної академії наук України,
доктор фізико-математичних наук, професор *Г. С. Кіт*

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор *Р. М. Кушнір*
(Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України)

доктор фізико-математичних наук, професор *Б. Г. Марченко*
(Інститут електродинаміки НАН України)

доктор фізико-математичних наук, професор *В. А. Осадчук*
(Національний університет „Львівська політехніка”)

ISBN 966-345-005-3

ВІД НАУКОВОГО РЕДАКТОРА

Математичні методи теорії коливань і стійкості руху є вельми загальними. Розроблені й апробовані в механіці, вони згодом стали в нагоді в багатьох інших галузях науки. В методологічному аспекті важливим є те, що дослідження динамічних процесів навіть в нелінійних системах доволі часто є звідним до розв'язування лінійних задач для звичайних диференціальних рівнянь (метод малих коливань чи динамічний метод). До того ж, основні закономірності динамічної поведінки доволі складних реальних систем та практично корисні висновки й рекомендації щодо забезпечення бажаних їх властивостей часто вдається з'ясувати шляхом вивчення відповідних найпростіших моделей: механічних систем з одним ступенем вільності, одновимірних систем з розподіленими параметрами, суттєво ідеалізованих формальних моделей тощо. У даний час невпинно зростає кількість публікацій власне такого спрямування, незважаючи на грандіозні досягнення обчислювальної техніки.

В останні десятиріччя в механіці щораз ширше застосовують, з одного боку, апарат узагальнених функцій, з іншого — нові аналітичні методи розв'язування різних рівнянь (функціональних, диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних тощо). У зв'язку з цим слід відзначити напрямок розвитку методу малих коливань з застосуванням властивостей функції впливу та фундаментальних розв'язків, що дозволив отримувати якісно нові результати для континуально-дискретних пружних систем з довільним допустимим розподілом параметрів та істотно розширити межі застосовності відомих методів (динамічних жорсткостей і податностей, дискретизації, двобічних оцінок власних частот і критичних навантажень при статичній і автоколивній нестійкості тощо).

В даній книзі в рамках відзначеного напрямку одержано вагомі наукові результати. Зокрема, вивчаючи параметричні коливання лінійних моделей, збуджуваних неперервними, східчасто-неперервними та імпульсними функціями, було виведено нові співвідношення для побудови діаграм (не)стійкості, що дозволило істотно узагальнити відомі дослідження. Розроблено також метод "імпульсної апроксимації" довільних періодичних збуджувальних функцій, причому моменти прикладання апроксимуючих імпульсів уперше визначаються як координати центрів мас відповідних площ (це забезпечило високу ефективність методу); до побудови головної області (не)стійкості застосовано двобічні оцінки.

Для лінійних моделей пружних та пружно-жорстких механічних систем з розподіленими і скупченими характеристиками (жорсткостей, мас, пружних і жорстких опор тощо), що є функціями однієї координати, побудовано матриці впливу податностей і жорсткостей; проведено динамічний аналіз поздовжніх коливань відповідних стержнів і поперечних коливань круглих та кільцевих мембран. При цьому проілюстровано доцільність застосування одержаних універсальних частотних рівнянь і відомих двобічних оцінок до пружно-жорстких моделей з довільною скінченною кількістю ступенів вільності, зокрема до систем з близькими і кратними частотами. Побудовано розв'язки деяких задач для стержнів з довільними інтегровними функціями розподілу жорсткості й маси з визначенням коефіцієнтів динамічності (умов резонансу чи антирезонансу); у випадках сталих функцій розподілу отримані розв'язки збігаються з відомими. Розроблено також методологію застосування відомих і деяких нових частотних функцій до вивчення динаміки пружно-жорстких систем.

Книга містить цікаві наукові та науково-методичні матеріали. Оригінальність і високий рівень досліджень є запорукою того, що вона буде корисною спеціалістам з динаміки пружних і пружно-жорстких механічних систем, а також буде сприяти інтенсифікації подальших досліджень у цій галузі.

Член-кореспондент НАН України
Г. С. Кіт

ПЕРЕДМОВА

Дослідження динамічних процесів в багатьох системах часто неминуче пов'язане з необхідністю розв'язувати лінійні задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, так званий метод малих коливань полягає в дослідженні власне лініаризованих описових (модельних) рівнянь. Його підґрунтя — фундаментальні результати Пуанкаре і Ляпунова, що стосувалися аналізу стійкості за першим наближенням. Притім, найважливіші, визначальні, сутнісні закономірності динамічної поведінки реальних механічних систем вдається з'ясувати шляхом вивчення тільки найпростіших моделей, та ще й в лінійному їх тлумаченні. Серед пізнавально корисних найпростіших моделей доречно вирізнити такі дві основні групи:

а) механічні системи з одним ступенем вільності, параметри яких змінюються з часом;

б) одно- та двовимірні континуально-дискретні механічні системи, характеристики яких залежать тільки від координат.

В монографії поставлено за мету викласти засади узагальненої методології аналізу динамічних властивостей лінійних моделей параметрично збурюваних механічних систем з одним ступенем вільності та одновимірних пружно-жорстких систем з довільними допустимими законами розподілу жорсткостей, мас, сил тертя і навантажень, а також деяких двовимірних систем. Методологія спирається на моделі й методи механіки деформівного твердого тіла, теорії коливань, теорії стійкості та поняття фундаментальної функції, відповідної звичайному диференціальному рівнянню, зокрема такому, що може мати, особливості типу імпульсних функцій у коефіцієнтах та правих частинах.

Фундаментальна функція та $n-1$ її послідовні частинні похідні за параметром, виявляється, разом завжди складають фундаментальну систему розв'язків відповідного лінійного рівняння n-го порядку. Спираючись на цю властивість фундаментальної функції, розроблено нові способи побудови загальних інтегралів рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Побудова не пов’язана з умовами спряження, а одержувані загальні розв’язки залежать явно від коефіцієнтів рівнянь і характеристик особливостей. Фундаментальні функції визначаються як ряди Тейлора, ряди за частотним параметром, а для рівнянь зі сталими коефіцієнтами та звідних до них, а також для систем таких рівнянь — і в замкненій формі. Доцільність застосування і переваги методу фундаментальної функції унаочнюються прикладами.

Особливого відношення, звісно, завжди заслуговують точні методи. Точними методами визначення, скажімо, власних частот механічних систем можна вважати такі, що дозволяють одержувати в явному вигляді характеристичне рівняння відповідної задачі про власні значення (метод відокремлення змінних, метод факторизації, метод початкових параметрів тощо) та визначати його корені з заданою (контрольованою) точністю [3, 8, 20, 23, 25, 26, 37, 38, 44, 49, 53]. Але такі точні методи вдається застосувати до вивчення коливань пружних систем переважно зі сталим чи східчасто-сталим розподілом параметрів. Виявляється, проте, що використання поняття фундаментальної функції або, що те ж саме, поняття фундаментального розв’язку звичайного диференціального рівняння (фундаментальний розв’язок — це добуток фундаментальної функції та одиничної функції Гевісайда) розкриває можливість дійти такого методу динамічного аналізу, що дозволяє: а) одержувати універсальні частотні рівняння й досліджувати динаміку континуально-дискретних деформівних систем з довільним допустимим розподілом параметрів [20, 30]; б) узагальнити методи динамічних жорсткостей і податностей та розгорнути якісно новий аналітичний підхід до дослідження моделей зі змінним розподілом характеристик (жорсткостей, мас, тертя, навантажень) — метод часткової дискретизації [20, 31] (частковість полягає в тому, що дискретизації не піддаються коефіцієнти біля найстарших похідних в описових диференціальних рівняннях, наприклад, поздовжня жорсткість стержня).

З використанням поняття фундаментальної функції отримано якісно нові характеристичні співвідношення для побудови діаграм (не)стійкості двох класів моделей: а) що описуються рівняннями типу Мат’є — Гілла; б) що збуджуються періодичними імпульсами. Ці співвідношення визначаються частинними похідними першого порядку тільки від однієї (власне відповідної фундаментальної) функції та параметрами системи; коефіцієнти співвідношень для систем, збуджуваних на періоді довільною скінченною кількістю імпульсів, записуються в явному вигляді та залежать від тригонометричних (інколи гіперболічних) функцій, аргументи яких пропорційні до відношення частот збуджувальної та власної; відносно коефіцієнта збудження співвідношення є алгебричними і мають степінь, що дорівнює кількості імпульсів. Тож загалом вдалося істотно розширити можливості побудови точних і наближених розв'язків та вивчення впливу різних параметрів на динамічну поведінку систем. Характеристичні рівняння застосовано до систем типу Мат'є — Гілла; підтверджено ефективність методології та встановлено можливі напрямки її подальшого розвитку (зокрема, стосовно задач про параметричні коливання в системах, що можуть втрачати стійкість через стан „байдужої рівноваги", тобто за Ойлером) [6, 31, 42, 45, 59].

З метою спростити алгоритми побудови діаграм (не)стійкості систем, збуджуваних довільними періодичними функціями, розроблено метод „імпульсної" апроксимації, що є, по суті, узагальненням методу часткової дискретизації і ґрунтується на характеристичних рівняннях, відповідних довільній скінченній кількості імпульсів на періоді. Розглянуто приклади, що ілюструють ефективність методу. Досліджено клас задач з двома імпульсами на періоді, сформульовано деякі якісні висновки про вплив параметрів на (не)стійкість, зокрема про симетричність резонансних областей при малих коефіцієнтах збудження. На прикладі рівняння Мат'є показано, що метод забезпечує достатню точність побудови головної області параметричного резонансу навіть при лише трьох апроксимувальних імпульсах.

Розроблено засади узагальненої методології аналізу динаміки найпростіших моделей дискретних, континуальних і континуально-дискретних пружних і пружно-жорстких систем, що ґрунтується передусім на універсальних частотних рівняннях, матрицях впливу податностей і жорсткостей, методі часткової дискретизації та послідовностях відомих двобічних оцінок. Зазначені методи застосовано також до задач про коливання круглих (кільцевих та суцільних) мембран, характеристики яких є функціями радіальної координати. Побудовано матриці впливу податностей та жорсткостей для моделей дискретних, континуальних і континуально-дискретних закріплених і незакріплених стержнів при поздовжніх коливаннях. Проаналізовано різні частотні рівняння з особливостями, зокрема моделей, в яких коефіцієнти впливу податностей прямують до нуля чи безмежності.

Проілюстровано застосовність двобічних оцінок і таблиць Бернштейна — Керопяна до вивчення впливу параметрів на власні частоти пружних і пружно-жорстких моделей з довільною скінченною кількістю ступенів вільності; встановлено достатні умови відсутності явища резонансу при вимушених коливаннях з гармонічними збурювальними силами, а також можливість застосування зазначених оцінок у випадку близькості та рівності двох найнижчих частот. Побудовано розв'язки деяких задач про вимушені поздовжні коливання стержнів з довільними інтегровними функціями розподілу жорсткості й маси та визначено коефіцієнти динамічності й умови резонансу чи антирезонансу. Отримані розв'язки збігаються з відомими результатами у разі сталих функцій розподілу.

Викладено методику дослідження задач про малі коливання круглих і кільцевих мембран з функціями розподілу мас і кільцевих опор, що залежать від радіальної координати. Побудовано відповідні матриці податностей та універсальні частотні рівняння, застосовано метод часткової дискретизації до вказаних задач та проілюстровано доцільність використання двобічних оцінок Бернштейна — Керопяна. Побіжно отримано низку формул для визначення частот вільних коливань безмасових мембран з одним „ребром”. Встановлено істотну різницю між частотами відповідних консольних стержнів і кільцевих мембран з одним вільним берегом. З’ясовано застосовність розробленої методології до складніших задач, в яких враховуються сили тертя й додаткові в’язі. Побудовано залежні від параметра хвилеутворення двобічні оцінки для основної частоти коливань суцільної мембрани зі сталим розподілом параметрів.

Розвинуті на основі поняття фундаментальної функції методи динамічного аналізу значно розширюють класи механічних систем, для яких параметричні коливання та вплив характеристик розподілу жорсткостей, мас, сил тертя й навантажень на динамічну поведінку можна вивчати точними аналітичними засобами, зокрема, за допомогою точних формул і двобічних оцінок.

1 ПОНЯТТЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ

1.1 Означення фундаментальної функції

Нехай задано лінійне неоднорідне **рівняння зі звичайними похідними**

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = q(x), \tag{1.1}$$

в якому коефіцієнти $p_0(x) \neq 0,\ \ p_1(x),\ \ \ldots, p_n(x)$ та вільний член $q(x) \not\equiv 0$ є неперервними функціями в наперед окресленому замкненому інтервалі $I = [a, b]$ ($a \le x \le b$). Це рівняння, як відомо (див., наприклад, [23, 51]), має єдиний означуваний в тому самому (!) $I = [a, b]$ розв'язок $y = y(x)$, який при деякому конкретному $x = x_0 \in [a, b]$ задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0\,,\ \ y'(x_0) = y_0'\,,\ \ldots,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{1.2}$$

За умови $q(x) \equiv 0$ неоднорідне рівняння (1.1) перетворюється у відповідне (супровідне) однорідне рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \tag{1.3}$$

Якщо функції $p_0(x) \neq 0$, $p_1(x)$, $\ldots, p_n(x)$ мають в $I = [a, b]$ неперервні похідні порядку $r \ge 0$, то розв'язок $y = y(x)$ має в $I = [a, b]$ неперервні похідні до порядку $n + r$ включно. Надаючи величині x_0 різних значень $\gamma \in [a, b]$, серед умов (1.2) можна вирізнити такі, що

$$y(\gamma) = y'(\gamma) = \ldots = y^{(n-2)}(\gamma) = 0\,,\ \ y^{(n-1)}(\gamma) = 1, \tag{1.4}$$

і підпорядкувати їм розв'язки рівняння (1.3).

Довільній системі функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ поставмо у відповідність **визначник Вронського**

$$W \equiv W\left[y_1(x),\, y_2(x), \ldots, y_n(x)\right] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (1.5)$$

та визначник

$$W_j(x,\gamma) = \begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \ldots & y_n(\gamma) \\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) & \ldots & y_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(j-2)}(\gamma) & y_2^{(j-2)}(\gamma) & \ldots & y_n^{(j-2)}(\gamma) \\ y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1^{(j)}(\gamma) & y_2^{(j)}(\gamma) & \ldots & y_n^{(j)}(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\gamma) & y_2^{(n-1)}(\gamma) & \ldots & y_n^{(n-1)}(\gamma) \end{vmatrix}, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (1.6)$$

який випливає з визначника

$$W(\gamma) = W\left[y_1(\gamma),\, y_2(\gamma), \ldots, y_n(\gamma)\right],$$

при заміні в ньому j-го рядка на рядок $\{y_1(x),\, y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$; величина γ править за параметр. Побудуймо функцію

$$y = z_j(x,\gamma) = \frac{W_j(x,\gamma)}{W(\gamma)}, \qquad (1.7)$$

для якої

$$L[y] = L[z_j(x,\gamma)] = L\left[\frac{W_j(x,\gamma)}{W(\gamma)}\right] =$$

$$= \frac{p_0(x)}{W(\gamma)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}W_j(x,\gamma) + \frac{p_1(x)}{W(\gamma)}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}W_j(x,\gamma) + \ldots + \frac{p_n(x)}{W(\gamma)}W_j(x,\gamma) =$$

$$=\frac{1}{W(\gamma)}\begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \dots & y_n(\gamma) \\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) & \dots & y_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(j-1)}(\gamma) & y_2^{(j-1)}(\gamma) & \dots & y_n^{(j-1)}(\gamma) \\ L[y_1(x)] & L[y_2(x)] & \dots & L[y_n(x)] \\ y_1^{(j+1)}(\gamma) & y_2^{(j+1)}(\gamma) & \dots & y_n^{(j+1)}(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\gamma) & y_2^{(n-1)}(\gamma) & \dots & y_n^{(n-1)}(\gamma) \end{vmatrix}. \qquad (1.8)$$

Якщо останній вираз є тотожним нулем в деякому $I=[a,b]$, то функцію $y=z_j(x,\gamma)$ можна вважати розв'язком однорідного рівняння (1.3) в тому самому $I=[a,b]$. Зокрема, якщо кожна з $y_i(x)$ — розв'язок цього рівняння, то розкритий у виразі (1.8) визначник дорівнює нулю за довільних x, γ. Якщо, до того ж, $W(\gamma)\neq 0$ (тобто всі розв'язки $y_i(x)$ — лінійно незалежні в околі деякої довільної точки $x=\gamma$), то функцію $y=z_j(x,\gamma)=W_j(x,\gamma)/W(\gamma)$ беззастережно слід визнати за **розв'язок однорідного рівняння** (1.3). Цей розв'язок задовольняє умови

$$z_j(x,\gamma)\big|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}} = z_j'(x,\gamma)\big|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}} = \ldots = z_j^{(j-2)}(x,\gamma)\big|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}} = 0,\ \ z_j^{(j-1)}(x,\gamma)\big|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}} = 1,$$

$$z_j^{(j)}(x,\gamma)\big|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}} = z_j^{(j+1)}(x,\gamma)\big|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}} = \ldots = z_j^{(n-1)}(x,\gamma)\big|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}} = 0\,, \qquad (1.9)$$

де

$$z_j^{(i)}(x,\gamma)=\frac{\partial^i z_j(x,\gamma)}{\partial x^i}.$$

При цьому і всі частинні похідні за параметром γ від функції (1.7) $y=z_j(x,\gamma)=W_j(x,\gamma)/W(\gamma)$ також є розв'язками однорідного рівняння.

Таким чином, функції

$$z_j(x,\gamma)\,,\ \frac{\partial z_j(x,\gamma)}{\partial\gamma},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} z_j(x,\gamma)}{\partial\gamma^{n-1}},\ldots \qquad (1.10)$$

є розв'язками однорідного рівняння $L[y]=0$ (незалежно, взагалі кажучи, від ступеня диференційовності коефіцієнтів цього рівняння). Серед них можна віднайти n лінійно незалежних, які для рівняння (1.3) з належно гладкими коефіцієнтами $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots, p_n(x)$ складали б фундаментальну систему розв'язків. Вимога належної гладкості коефіцієнтів покликана забезпечити чинність теореми про "існування та єдиність розв'язку" та зумовлена необхідністю при побудові розв'язків чи аналізі-синтезі диференціальних рівнянь оперувати лише неперервними залежностями (функціями і похідними від них).

Таким чином, якщо б була відома одна з n функцій (1.7), відповідних однорідному рівнянню $L[y]=0$, то можна було б відтворити всю фундаментальну систему розв'язків цього рівняння (див. (1.10)), вдаючись лише до операції диференціювання вказаної функції за параметром γ. Така непересічна властивість **функцій** (1.7) дає підстави принаймні одну з них назвати **фундаментальною**, а задачу розв'язування рівняння (1.3) тлумачити як задачу знаходження відповідної фундаментальної функції.

Зазначмо, функції (1.7) — взаємно пов'язані [11]. Легко, зокрема, з'ясувати такі співвідношення:

$$\dot{z}_1(x,\gamma)=\frac{\partial z_1(x,\gamma)}{\partial\gamma}=\frac{p_n(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma)\ ,$$

$$\dot{z}_2(x,\gamma)=\frac{\partial z_2(x,\gamma)}{\partial\gamma}=-z_1(x,\gamma)+\frac{p_{n-1}(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma),\ldots,$$

$$\dot{z}_j(x,\gamma)=\frac{\partial z_j(x,\gamma)}{\partial\gamma}=-z_{j-1}(x,\gamma)+\frac{p_{n-j+1}(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma),\ldots,$$

$$\dot{z}_{n-1}(x,\gamma)=\frac{\partial z_{n-1}(x,\gamma)}{\partial\gamma}=-z_{n-2}(x,\gamma)+\frac{p_2(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma),$$

$$\dot{z}_n(x,\gamma)=\frac{\partial z_n(x,\gamma)}{\partial\gamma}=-z_{n-1}(x,\gamma)+\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma)\,. \qquad (1.11)$$

Беручи до уваги (1.5) — (1.7), (1.9), можна показати також, що

$$W\equiv W\left[z_1(x,\gamma),\, z_2(x,\gamma),\ldots,\, z_n(x,\gamma)\right]_{|x=\gamma}=1\neq 0\,.$$

А це є свідченням сукупної лінійної незалежності функцій (1.7). Таким чином, функції $z_j(x,\gamma)$ самі також складають **фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння** (1.3), до того ж — нормалізовану (див. умови (1.9)).

Задача “віднайти розв’язок рівняння (1.3) за умов (1.4)” є похідною від основної задачі (задачі Коші) “віднайти розв’язок рівняння (1.1) за умов (1.2)”. Тому можна стверджувати, що існує напевне, і до того ж єдиний, належно гладкий розв’язок рівняння (1.3), який задовольняє умови (1.4). Називатимемо власне цей розв’язок **фундаментальною функцією** і позначатимемо його як $K(x,\gamma)$.

Нехай функції

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x)$$

є лінійно-незалежними розв’язками рівняння (1.3) $L[y]=0$. Загальний інтеграл цього рівняння в такому разі має вигляд

$$y=c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)+\ldots+c_n\psi_n(x), \tag{1.12}$$

де c_1, c_2, …, c_n — довільні сталі.

Підставляючи (1.12) в (1.4), одержимо неоднорідну систему n лінійних алгебричних рівнянь на довільні сталі c_i $(i=\overline{1,\, n})$:

$$c_1\psi_1(\gamma)+c_2\psi_2(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n(\gamma)=0,$$

$$c_1\psi_1'(\gamma)+c_2\psi_2'(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n'(\gamma)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1\psi_1^{(n-2)}(\gamma)+c_2\psi_2^{(n-2)}(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n^{(n-2)}(\gamma)=0,$$

$$c_1\psi_1^{(n-1)}(\gamma)+c_2\psi_2^{(n-1)}(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n^{(n-1)}(\gamma)=1. \tag{1.13}$$

Її визначник

$$W(\gamma)=\begin{vmatrix} \psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \cdots & \psi_n(\gamma) \\ \psi_1'(\gamma) & \psi_2'(\gamma) & \cdots & \psi_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(\gamma) & \psi_2^{(n-1)}(\gamma) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(\gamma) \end{vmatrix}$$

є відмінним від нуля (оскільки він є заданим в точці $x=\gamma\in[a,b]$ визначником Вронського (вронскіяном) системи лінійно незалежних розв’язків $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ рівняння $L[y]=0$). Тому сталі c_i — однозначно визначувані функції від параметра γ: $c_i=c_i(\gamma)$, $i=\overline{1,n}$. Отже й розв’язок

$$K(x,\gamma)=c_1(\gamma)\,\psi_1(x)+c_2(\gamma)\,\psi_2(x)+\ldots+c_n(\gamma)\,\psi_n(x)$$

рівняння $L[y]=0$, що задовольняє умови (1.4), також — однозначно визначуваний. Знаходячи на підставі (1.13) величини $c_i = c_i(\gamma)$, цей розв'язок — **фундаментальну функцію** — можна подати у вигляді [19]

$$K(x,\gamma) = \frac{1}{W(\gamma)} \begin{vmatrix} \psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \dots & \psi_n(\gamma) \\ \psi_1'(\gamma) & \psi_2'(\gamma) & \dots & \psi_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-2)}(\gamma) & \psi_2^{(n-2)}(\gamma) & \dots & \psi_n^{(n-2)}(\gamma) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \dots & \psi_n(x) \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

Отже фундаментальна функція $K(x,\gamma)$ — єдина, вона може бути визначена через фундаментальну систему розв'язків у формі (1.14). Якщо коефіцієнти $p_0(x) \neq 0$, $p_1(x)$, …, $p_n(x)$ рівняння (1.1) мають в $I = [a, b]$ неперервні похідні порядку $r \geq 0$, то фундаментальна функція має в $I = [a, b]$ неперервні похідні за змінною x до порядку $n + r$ включно. З порівняння виразів (1.14) і (1.8) випливає, що $K(x,\gamma)$ збігається з функцією $y = z_n(x, \gamma)$.

1.2 Головна властивість фундаментальної функції

Фундаментальна функція є розв'язком рівняння $L[y] = 0$ за означенням. Разом з тим вираз (1.14) засвідчує, що й частинні за параметром γ похідні (будь-якого порядку) від фундаментальної функції задовольняють те саме рівняння $L[y] = 0$. Хочеться сподіватися, що з-посеред них можна дібрати $n-1$ таких похідних від $K(x,\gamma)$ за γ, які б разом з $K(x,\gamma)$ складали фундаментальну систему розв'язків рівняння (1.3).

Зокрема, систему функцій

$$K(x,\gamma), \ \frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial \gamma}, \ \dots, \ \frac{\partial^{n-1} K(x,\gamma)}{\partial \gamma^{n-1}}. \tag{1.15}$$

можна було б визнати за фундаментальну систему розв'язків рівняння (1.3), коли б її визначник Вронського (складений за аргументом x) виявився відмінним від нуля в $I = [a, b]$, засвідчуючи тим самим лінійну незалежність цієї системи функцій. Але якщо є підстави сподіватись на сукупну лінійну незалежність функцій (1.15), то достатньо пересвідчитись, що визначник Вронського відмінний від нуля в будь-якій одній точці з інтервалу $I = [a, b]$.

На підставі формули (1.14) та умов (1.4) можна з’ясувати, що

$$\left.\frac{\partial^{i+j}K(x,\gamma)}{\partial\gamma^i\partial x^j}\right|_{x=\gamma}=\begin{cases}0 & \text{при } i+j\le n-2,\\ (-1)^i & \text{при } i+j=n-1,\\ (-1)^{i+1}\dfrac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)} & \text{при } i+j=n,\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial^{i+j}K(x,\gamma)}{\partial\gamma^i\partial x^j}\right|_{\gamma=x}=\begin{cases}0 & \text{при } i+j\le n-2,\\ (-1)^i & \text{при } i+j=n-1,\\ (-1)^{i+1}\dfrac{p_1(x)}{p_0(x)} & \text{при } i+j=n,\end{cases}\qquad i,\ j\ge 0\,. \tag{1.16}$$

Тож, беручи до уваги (1.16), легко пересвідчитись, що визначник Вронського

$$W\left[K,\dot K,\dots,\overset{(n-1)}{K}\right]=W(x,\gamma)=\begin{vmatrix}K & \dot K & \cdots & \overset{(n-1)}{K}\\ K' & \dot K' & \cdots & \overset{(n-1)}{K'}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K^{(n-1)} & \dot K^{(n-1)} & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}\end{vmatrix},$$

при $x=\gamma$ зводиться до трикутного, відмінного від нуля:

$$W\big|_{x=\gamma}=\begin{vmatrix} & & & & (-1)^{n-1}\\ & 0 & & \iddots & \overset{(n-1)}{K'}\Big|_{x=\gamma}\\ & & & & \vdots\\ & & (-1)^2 & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-3)}\Big|_{x=\gamma}\\ & (-1)^1 & \ddot K^{(n-2)}\Big|_{x=\gamma} & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-2)}\Big|_{x=\gamma}\\ (-1)^0 & \dot K^{(n-1)}\Big|_{x=\gamma} & \ddot K^{(n-1)}\Big|_{x=\gamma} & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}\Big|_{x=\gamma}\end{vmatrix}=1\ne 0\,.$$

Отже система функцій (1.15) справді завжди є фундаментальною системою розв’язків рівняння (1.3). А тому **загальний розв’язок однорідного рівняння** (1.3) є підстави подати у вигляді

$$y_\circ=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\,\frac{\partial^i K(x,\gamma)}{\partial\gamma^i}\,. \tag{1.17}$$

Виявляється, що синтезована на основі означеної тут фундаментальної функції $K(x,\gamma)$ — окремого розв'язку однорідного рівняння $L[y]=0$ (1.3),— нова функція

$$y_*(x,\gamma)=\int_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\,, \tag{1.18}$$

править за **окремий розв'язок** відповідного (супровідного) **неоднорідного рівняння** $L[y]=q(x)$ (див. (1.1)). Переконаймося в цьому.

Спочатку знайдімо:

$$y_*^{(r)}=\int_\gamma^x \frac{\partial^r K(x,s)}{\partial x^r}\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds+\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left(K(x,\gamma)\Big|_{\gamma=x}\frac{q(x)}{p_0(x)}\right)+$$
$$+\frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}}\left(\frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial x}\bigg|_{\gamma=x}\frac{q(x)}{p_0(x)}\right)+\ldots+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{r-2}K(x,\gamma)}{\partial x^{r-2}}\bigg|_{\gamma=x}\frac{q(x)}{p_0(x)}\right)+$$
$$+\frac{\partial^{r-1}K(x,\gamma)}{\partial x^{r-1}}\bigg|_{\gamma=x}\frac{q(x)}{p_0(x)}\,,\ r=\overline{1,n}\,. \tag{1.19}$$

Далі, застосовуючи правило диференціювання визначника до виразу (1.14), з'ясуємо, що

$$\frac{\partial^\nu K(x,\gamma)}{\partial x^\nu}\bigg|_{\gamma=x}=0,\quad \nu=\overline{0,n-2}\,;\ \frac{\partial^{n-1}K(x,\gamma)}{\partial x^{n-1}}\bigg|_{\gamma=x}=1\,,$$

і вирази (1.19) зведемо до вигляду:

$$y_*^{(r)}=\int_\gamma^x \frac{\partial^r K(x,s)}{\partial x^r}\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\ \ (r=\overline{1,n-1}),$$
$$y_*^{(n)}=\int_\gamma^x \frac{\partial^n K(x,s)}{\partial x^n}\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds+\frac{q(x)}{p_0(x)}\,. \tag{1.20}$$

Нарешті, підставляючи (1.18) та (1.20) в (1.1) та вносячи коефіцієнти p_0, p_1, …, p_n під знак інтеграла, дійдемо рівності

$$\int_\gamma^x L_n[K(x,s)]\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds+q(x)=q(x),$$

яка є тотожністю $q(x)\equiv q(x)$, оскільки $L_n[K(x,s)]\equiv 0$.

Отже функція $y_* = y_*(x,\gamma)$, означувана формулою (1.18), справді є розв'язком (окремим) неоднорідного диференціального рівняння (1.1), причому таким, що задовольняє нульові початкові умови

$$y_*(\gamma,\gamma) = y_*'(\gamma,\gamma) = \ldots = y_*^{(n-1)}(\gamma,\gamma) = 0,$$

див. (1.20).

Зважаючи на (1.14), фундаментальну функцію і відповідний окремий розв'язок неоднорідного рівняння можна подати у вигляді:

$$K(x,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma) y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{(ni)}(\gamma)}{W(\gamma)} y_i(x),$$

$$y_*(x,\gamma) = \int_{\gamma}^{x} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{W_{(ni)}(s)}{W(s)} y_i(x) \right) q(s)\,ds,$$

де $W_{(ni)}(\cdot)$ — алгебричне доповнення i-го елемента n-го рядка вронскіяна $W(\,\cdot\,)$.

Викладене означає, що **загальний розв'язок неоднорідного рівняння** (1.1) може бути записаний у вигляді

$$y = y_\circ(x,\gamma) + y_*(x,\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i K(x,\gamma)}{\partial \gamma^i} + \int_{\gamma}^{x} K(x,s) \frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds. \qquad (1.21)$$

Тут, звісно, $K(x,\gamma)$ — фундаментальна функція, що є окремим розв'язком відповідного однорідного рівняння (1.3) за умов (див. (1.4))

$$K(x,\gamma)_{|x=\gamma} = \dot{K}(x,\gamma)_{|x=\gamma} = \ldots = \overset{(n-2)}{K}(x,\gamma)_{|x=\gamma} = 0, \quad \overset{(n-1)}{K}(x,\gamma)_{|x=\gamma} = 1;$$

c_i — довільні сталі; $y_\circ(x,\gamma)$ — окремий розв'язок рівняння (1.3), який визначається за формулою (1.17), а $y_*(x,\gamma)$ — окремий, відповідний нульовим умовам $y_*(\gamma,\gamma) = y_*'(\gamma,\gamma) = \ldots = y_*^{(n-1)}(\gamma,\gamma) = 0$, розв'язок рівняння (1.1), який визначається за формулою (1.18).

Таким чином, загальний розв'язок рівняння вигляду (8.14) можна будувати за досить зручною формулою (1.21), якщо відома відповідна цьому рівнянню фундаментальна функція $K(x,\gamma)$. Ця функція, в свою чергу, є розв'язком відповідного (супровідного) рівняння вигляду (1.3) за умов (1.4). Загалом, **розв'язок лінійної диференціальної задачі** n-го порядку **з початковими умовами** можна записати **у неявному вигляді**

$$\left|\begin{array}{c|ccc|c}
K(x_0,\gamma) & \dot K(x_0,\gamma) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}(x_0,\gamma) & \displaystyle\int_{\gamma}^{x_0} K(x_0,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds - y_0 \\
K'(x_0,\gamma) & \dot K'(x_0,\gamma) & \cdots & \overset{(n-1)}{K'}(x_0,\gamma) & \displaystyle\int_{\gamma}^{x_0} K'(x_0,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds - y_0' \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
K^{(n-1)}(x_0,\gamma) & \dot K^{(n-1)}(x_0,\gamma) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0,\gamma) & \displaystyle\int_{\gamma}^{x_0} K^{(n-1)}(x_0,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds - y_0^{(n-1)} \\
K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}(x,\gamma) & \displaystyle\int_{\gamma}^{x} K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds - y
\end{array}\right| = 0$$

або, якщо покласти $\gamma = x_0$,

$$\left|\begin{array}{c|c|ccc|c}
0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} & -y_0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1}p_1(x_0) & -y_0' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & (-1)^1 & (-1)^2 p_1(x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0,x_0) & -y_0^{(n-2)} \\
(-1)^0 & (-1)^1 p_1(x_0) & \ddot K^{(n-1)}(x_0,x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0,x_0) & -y_0^{(n-1)} \\
K(x,x_0) & \dot K(x,x_0) & \ddot K(x,x_0) & \ldots & \overset{(n-1)}{K}(x,x_0) & \displaystyle\int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds - y
\end{array}\right| = 0\,.$$

Останній вираз легко подати у так званій нормальній формі

$$y = Y_1(x,x_0)y_0 + Y_2(x,x_0)y_0' + \ldots + Y_n(x,x_0)y_0^{(n-1)} + \int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\,,$$

$$Y_i(x,x_0) = (-1)^{n+i}\det M_i(x,x_0)\ \ (\,i = \overline{1,n}\,), \tag{1.22}$$

де $\det M_i(x,x_0)$ — визначник матриці $M_i(x,x_0)$, яка виникає з матриці

$$M = \left\|\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1}p_1(x_0) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & (-1)^1 & (-1)^2 p_1(x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0,x_0) \\
(-1)^0 & (-1)^1 p_1(x_0) & \ddot K^{(n-1)}(x_0,x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0,x_0) \\
K(x,x_0) & \dot K(x,x_0) & \ddot K(x,x_0) & \ldots & \overset{(n-1)}{K}(x,x_0)
\end{array}\right\|_{(n+1)\times n} \tag{1.23}$$

усуванням з неї i-го рядка.

Вирази $Y_i(x, x_0)$ (див. (1.22)) можна подати також у вигляді

$$Y_i = \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x_0{}^j}\left(\frac{p_{n-i-j}(x_0)}{p_0(x_0)} K(x, x_0)\right),\ i = \overline{1, n-1}\,;\ Y_n = K(x, x_0)\,. \quad (1.24)$$

Функції $Y_i = Y_i(x, \gamma)$ разом з фундаментальною функцією $Y_n = K(x, \gamma)$ складають фундаментальну систему розв'язків однорідного диференціального рівняння $L_n[y] = 0$. Множину $\{Y_j(x,\ x_0)\}$ ($j = \overline{1,\ n}$) цих функцій називають **нормальною фундаментальною системою розв'язків** рівняння $L[y] = 0$: вони задовольняють (нормалізовані) умови

$$Y_1(x_0) = 1,\ Y_1'(x_0) = 0,\ Y_1'(x_0) = 0, \ldots, Y_1^{(n-2)}(x_0) = 0,\ Y_1^{(n-1)}(x_0) = 0\,;$$

$$Y_2(x_0) = 0, Y_2'(x_0) = 1,\ Y_2'(x_0) = 0, \ldots, Y_2^{(n-2)}(x_0) = 0,\ Y_2^{(n-1)}(x_0) = 0\,;$$

……………………………………………………………………

$$Y_n(x_0) = 0,\ Y_n'(x_0) = 0,\ Y_n''(x_0) = 0, \ldots, Y_n^{(n-2)}(x_0) = 0,\ Y_n^{(n-1)}(x_0) = 1\,, \quad (1.25)$$

які в стислому записі мають вигляд

$$Y_i^{(j)}(x_0, x_0) = \begin{cases} 0 \text{ для } i \neq j, \\ 1 \text{ для } i = j \end{cases} \qquad (i,\ j = \overline{0, n-1}). \quad (1.26)$$

До виразів (1.24)) можна дійти, відповідно прочитуючи рівності (1.11):

$$z_n(x, \gamma) = K(x, \gamma)\,,\ z_{n-1}(x, \gamma) = \frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x, \gamma) - \frac{\partial z_n(x, \gamma)}{\partial \gamma}\,,$$

$$z_{n-2}(x, \gamma) = \frac{p_2(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x, \gamma) - \frac{\partial z_{n-1}(x, \gamma)}{\partial \gamma}\,,\ \ldots,$$

$$z_j(x, \gamma) = \frac{p_{n-j}(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x, \gamma) - \frac{\partial z_{j+1}(x, \gamma)}{\partial \gamma}\,,\ \ldots,$$

$$z_1(x, \gamma) = \frac{p_{n-1}(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x, \gamma) - \frac{\partial z_2(x, \gamma)}{\partial \gamma}\,, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial z_1(x, \gamma)}{\partial \gamma} - \frac{p_n(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x, \gamma) = 0\,. \quad (1.28)$$

Тож перейменовуючи змінні за правилом $z_i = Y_i$ ($i = \overline{1, n-1}$), $z_n = Y_n = K$, власне і матимемо (1.24) (з дотриманням, звісно, (1.25) чи (1.26)).

З системи рівностей (1.27) випливає, що

$$z_1(x,\gamma)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\gamma^j}\left(\frac{p_{n-j-1}(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)\right). \qquad (1.29)$$

Підставляючи (1.29) в (1.28), отримаємо диференціальне рівняння

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\gamma^j}\left(\frac{p_{n-j}(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)\right)=0\,. \qquad (1.30)$$

Отже фундаментальною функцією $K=K(x,\gamma)$ є така, що задовольняє рівняння (1.30).

Тоді, як функція

$$\frac{\partial^i K(x,\gamma)}{\partial\gamma^i}\ \ (i=0,1,\dots)$$

є розв'язком однорідного рівняння $L[y]=0$ (1.3) з належно гладкими коефіцієнтами, функція

$$\int_x^\gamma \overset{i}{\dots}\int_x^\gamma K(x,\gamma)\,d\gamma\overset{i}{\dots}d\gamma\ \ (i=1,2,\dots)$$

є розв'язком неоднорідного рівняння

$$L[y]=-p_0(x)\frac{(\gamma-x)^{i-1}}{(i-1)!}$$

з неперервними коефіцієнтами (та вільним членом). Справді: оскільки

$$\int_x^\gamma \overset{i}{\dots}\int_x^\gamma K(x,\gamma)\,d\gamma\overset{i}{\dots}d\gamma=\frac{1}{(i-1)!}\int_x^\gamma(\gamma-s)^{i-1}K(x,s)\,ds\,, \qquad (1.31)$$

то, порівнюючи (1.31) і (1.18), доходимо висновку, що (1.31) є розв'язком супровідного неоднорідного рівняння $L[y]=q$ (1.1), в якому

$$q=-p_0(x)\frac{(\gamma-x)^{i-1}}{(i-1)!}\,.$$

Загалом, у разі належної диференційовності і інтегровності фундаментальної функції $K(x,\gamma)$ справджуються рівності

$$\dots,\ \overset{(r)}{\Lambda}=\frac{\partial^r\Lambda}{\partial\gamma^r}=0\,,\ \dots,\ \dot{\Lambda}=\overset{(1)}{\Lambda}=\frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma}=0\,,\ \Lambda=\overset{(0)}{\Lambda}=0\,,$$

$$\overset{(-1)}{\Lambda} = \int_x^{\gamma} \Lambda(x,\gamma)\,d\gamma = -p_0(x)\,,$$

$$\overset{(-2)}{\Lambda} = \int_x^{\gamma}\int_x^{\gamma} \Lambda(x,\gamma)\,d\gamma d\gamma = -p_0(x)(x-\gamma)\,,$$

$$\ldots,\ \overset{(-m)}{\Lambda} = \int_x^{\gamma}\overset{m}{\cdots}\int_x^{\gamma} \Lambda(x,\gamma)\,d\gamma\overset{m}{\ldots}d\gamma = -p_0(x)\frac{(x-\gamma)^{m-1}}{(m-1)!},\ldots,$$

в яких

$$\Lambda = \Lambda(x,\gamma) = L[K] = p_0(x)K^{(n)}(x,\gamma) + p_1(x)K^{(n-1)}(x,\gamma) + \ldots + p_n(x)K(x,\gamma)\,.$$

Зауважмо, для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами $p_0(x) \neq 0$, $p_1(x)$, …, $p_n(x)$ знаходження функцій $\psi_i(x)$ переважно є непростим завданням. Тому безпосередньо залучати формулу (1.14) до практичної побудови функцій $K(x,\gamma)$ доводиться лише в окремих випадках. Більш ефективними, натомість, виявляються розглянуті в [19, 29] загальні способи визначення фундаментальних функцій у вигляді степеневих рядів.

Можливість записувати загальні розв'язки лінійних рівнянь з використанням однієї лише фундаментальної функції створює методологічні засади для розвитку якісно нових застосувань теорії таких рівнянь [19]. Властивість функції відображати конкретне — окремий розв'язок рівняння (1.3) за умов (1.4) — і одночасно окреслювати значно загальніше — загальний розв'язок рівняння (1.1) — є сенс назвати головною її властивістю.

Поняття фундаментальної функції перекликається з відомим поняттям **фундаментального розв'язку звичайного лінійного диференціального рівняння**

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x) y^{(n-i)} = 0\,, \tag{1.32}$$

в якому $p_0(x) \neq 0$, $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ — неперервні функції при $a < x < b$.

Під фундаментальним розв'язком розуміють означену в квадраті $a \le x,\gamma \le b$ функцію $\Phi(x,\gamma)$, яка наділена властивостями [32]:

1° $\Phi(x,\gamma)$ і в трикутнику $a \le x \le \gamma \le b$, і в трикутнику $a \le \gamma \le x \le b$ має частинні похідні за x до n-го порядку включно, і ці похідні неперервні в кожному з зазначених трикутників як за x, так і за γ;

2° $\Phi(x,\gamma)$ як функція від x в кожному з трикутників $a \le x \le \gamma \le b$ і $a \le \gamma \le x \le b$ задовольняє рівняння (1.32);

3° $\Phi(x,\gamma)$ всюди в квадраті $a \le x,\gamma \le b$ неперервна і має частинні похідні за x до (n–2)-го порядку, неперервні в цьому квадраті як за x, так і за γ;

4° при $a < \gamma < b$ справджується рівність

$$\frac{\partial^{n-1}\Phi(\gamma+0,\gamma)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1}\Phi(\gamma-0,\gamma)}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{p_0(\gamma)}.$$

Легко перевірити, що таким розв'язком є функція

$$\Phi(x,\gamma) = \frac{\operatorname{sgn}(x-\gamma)}{2p_0(\gamma)W(\gamma)} \begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \cdots & y_n(\gamma) \\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) & \cdots & y_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(\gamma) & y_2^{(n-2)}(\gamma) & \cdots & y_n^{(n-2)}(\gamma) \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(x-\gamma)}{2p_0(\gamma)} K(x,\gamma) = \frac{|x-\gamma|}{2p_0(\gamma)(x-\gamma)} K(x,\gamma) = \frac{(x-\gamma)}{2p_0(\gamma)|x-\gamma|} K(x,\gamma) =$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}|x-\gamma|}{2p_0(\gamma)} K(x,\gamma) = \frac{K(x,\gamma)\theta(x-\gamma)}{p_0(\gamma)}, \tag{1.33}$$

де $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, складають деяку фундаментальну систему розв'язків рівняння (1.32), вронскіяном якої є $W(x)$, $\theta(\cdot)$ — одинична функція Гевісайда. Функція (1.33) задовольняє умови

$$\Phi(\gamma,\gamma) = \left.\frac{\partial\Phi(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=\gamma} = \left.\frac{\partial^2\Phi(x,\gamma)}{\partial x^2}\right|_{x=\gamma} = \ldots = \left.\frac{\partial^{(n-2)}\Phi(x,\gamma)}{\partial x^{(n-2)}}\right|_{x=\gamma} = 0$$

і окреслює загальний розв'язок рівняння (1.32) у вигляді

$$y_\circ = \Phi(x,\gamma) + c_1(\gamma)y_1(x) + c_2(\gamma)y_2(x) + \ldots + c_n(\gamma)y_n(x),$$

де $c_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, — неперервні функції, а окремий розв'язок неоднорідного рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)y^{(n-i)} = q(x)$$

— у вигляді

$$y_* = \int_a^b \Phi(x,\gamma)\,q(\gamma)\,d\gamma.$$

1.3 Приклади фундаментальних функцій

Фундаментальна функція є математичним об'єктом, який доцільно ставити у відповідність не рівнянню як такому, а суто оператору, що визначає це рівняння. Виходячи з цього, в табл. 1 до прикладу наведено низку лінійних операторів та відповідних їм фундаментальних функцій, серед яких здебільшого є такі, що найчастіше залучаються до аналізу властивостей лінійних рівнянь з похідними, або пересічно застосовуються як модельні відображення реальних систем, або ж такі, що стануть в нагоді при подальшому викладанні матеріалу.

Звернімо увагу на випадок, коли коефіцієнти $p_0 \neq 0,\ \ p_1,\ \ \ldots, p_n$ в рівнянні (1.1) та відповідному йому рівнянні (1.3) є сталими. Виявляється, що в такому разі

$$K(x,\gamma) \equiv K(x-\gamma) \tag{1.34}$$

Підтвердити це можна, вдаючись до заміни незалежної змінної за формулою $x-\gamma \equiv t$ в рівнянні (1.3) і застосовування алгоритму

$$d^j y/dx^j = (d^j y/dt^j)\cdot(d^j t/dx^j) = d^j y/dt^j,\ j=\overline{1,n}.$$

Тож, заміна змінної x на t зводить рівняння (1.3) до абсолютно подібного рівняння

$$L[y] \equiv p_0 \frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0\,. \tag{1.35}$$

Умови (1.4) при цьому набувають вигляду ($t = x-\gamma = 0$ при $x=\gamma$):

$$y(t)\big|_{t=0} = y'(t)\big|_{t=0} = \ldots = y^{(n-2)}(t)\big|_{t=0} = 0, \quad y^{(n-1)}(t)\big|_{t=0} = 1\,. \tag{1.36}$$

Оскільки співвідношення (1.35) і (1.36) не відбивають в собі жодної інформації про параметр γ, то окремий розв'язок рівняння (1.35) за умов (1.36) не може бути залежним від γ. Тож дійсно $K(t,\gamma) = \varphi(t) \equiv K(x-\gamma)$.

Звідси й випливає, що у разі сталих $p_0 \neq 0,\ \ p_1,\ \ \ldots, p_n$ відповідна рівнянню (1.3) фундаментальна функція є визначуваною суто через різницю аргумента x і параметра γ. Це, зокрема, унаочнюють приклади, наведені в табл. 2.

Отже, **загальний розв'язок** (1.21) **рівняння** (1.1) **у разі сталих коефіцієнтів** $p_0 \neq 0,\ \ p_1,\ \ \ldots, p_n$ можна подати у вигляді рівності

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i c_i K^{(i)}(x-\gamma) + \int_{\gamma}^{x} K(x-s)q(s)\,ds\,. \tag{1.37}$$

1 **Лінійні оператори та відповідні їм фундаментальні функції**

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
1	y'	1
2	$xy'-y$	$\dfrac{x}{\gamma}$
3	$xy'+y$	$\dfrac{\gamma}{x}$
4	$y'+p(x)y$	$e^{-\int_\gamma^x p(s)\,ds}$
5	$(2x+1)y''+2(2x-1)y'-8y$	$\dfrac{(4x^2+1)e^{2x}+(4\gamma^2+1)e^{2\gamma}}{2(4\gamma^2+4\gamma+1)e^{2x}}$
6	$x^4y''+2x^3y'+y$	$\dfrac{1}{\gamma^2}\sin\dfrac{x-\gamma}{x\gamma}$
7	$2x^2y''+y$	$2\sqrt{x\gamma}\,\sin\ln\sqrt{\dfrac{x}{\gamma}}$
8	$p(x)y''-p'(x)y'+p^3(x)y$, $p(x)\neq 0$	$\dfrac{1}{p(x)}\sin\int_\gamma^x p(s)ds$
9	$x^3\tan\dfrac{1}{x}y''+xy'-y$	$x\gamma\dfrac{\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{\gamma}}{\sin\frac{1}{\gamma}}$
10	$(f(x)y')'$	$\int_\gamma^x \dfrac{ds}{f(s)}$
11	$y'''+f(x)y''+y'+f(x)y$	$\sin x\int_\gamma^x \cos s\, e^{-\int_\gamma^s f(t)dt}ds-\cos x\int_\gamma^x \sin s\, e^{-\int_\gamma^x f(t)dt}ds$
12	$(f(x)y')''$	$\int_\gamma^x\int_t^x \dfrac{1}{f(s)}dsdt\equiv\int_\gamma^x \dfrac{s-\gamma}{f(s)}ds$

1 **Лінійні оператори та відповідні їм фундаментальні функції (**продовження**)**

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
13	$16x^2y''+32xy'-(4x+5)y$	$\gamma^2\Big[\left(\gamma^{-3/4}-\gamma^{-5/4}\right)\left(x^{-3/4}+x^{-5/4}\right)e^{\sqrt{x}-\sqrt{\gamma}}-$ $-\left(\gamma^{-3/4}+\gamma^{-5/4}\right)\left(x^{-3/4}-x^{-5/4}\right)e^{-(\sqrt{x}-\sqrt{\gamma})}\Big]$
14	$\left(f(x)y'\right)'''$	$\int\limits_\gamma^x\int\limits_t^x\frac{(s-t)}{f(s)}\,ds\,dt\equiv\frac{1}{2}\int\limits_\gamma^x\frac{(s-\gamma)^2}{f(s)}\,ds$
15	$\left(f(x)y''\right)'$	$\int\limits_\gamma^x\frac{x-s}{f(s)}\,ds$
16	$(f(x)y'')''$	$\int\limits_\gamma^x\frac{(x-s)(s-\gamma)}{f(s)}\,ds$, $\int\limits_\gamma^x\int\limits_t^x\frac{(x-s)}{f(s)}\,ds\,dt$
17	$(f(x)y^{(n)})^{(n)}$	$\frac{1}{((n-1)!)^2}\int\limits_\gamma^x\frac{1}{f(s)}(x-s)^{n-1}(s-\gamma)^{n-1}\,ds$
18	$y'-\frac{k}{x}y$	$\left\|\frac{x}{\gamma}\right\|^k$
19	$y'+axy$, $a=\mathrm{const}$	$e^{-\frac{a}{2}\left(x^2-\gamma^2\right)}$
20	$y'+a\cos x\cdot y$, $a=\mathrm{const}$	$e^{-a(\sin x-\sin\gamma)}$
21	$y'\sin x-y\cos x$	$\left\|\frac{\sin x}{\sin\gamma}\right\|$
22	$y''+\frac{1}{x}y'$	$\gamma\ln\frac{x}{\gamma}$
23	$y''+\frac{2}{x}y'+k^2y$, $k=\mathrm{const}$	$\frac{\gamma}{kx}\sin k(x-\gamma)$

1 **Лінійні оператори та відповідні їм фундаментальні функції (**закінчення**)**

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
24	$y'' + \dfrac{p^2}{(1+kx)^4}y;$ $p, k = \mathrm{const}$	$\dfrac{1}{\psi(x,\gamma)}\sin\psi(x,\gamma)(x-\gamma)$, $\psi(x,\gamma) \equiv \dfrac{p}{(1+k\gamma)(1+kx)}$
25	$y'' + \dfrac{p}{f(x)}y, \quad p = \mathrm{const}$	$\sum_{r=0}^{\infty}(-p)^r u_r(x,\gamma) \equiv U(x,\gamma)$; $u_0(x,\gamma) = x-\gamma$, $u_r(x,\gamma) = \int_{\gamma}^{x}\dfrac{x-s}{f(s)}u_{r-1}(s,\gamma)\,ds$, $r = 1, 2, \ldots$
26	$(f(x)y'')'' + py''$, $p = \mathrm{const}$	$\dfrac{1}{p}[x-\gamma-U(x,\gamma)] \equiv \int_{\gamma}^{x}\dfrac{(x-s)}{f(s)}U(s,\gamma)\,ds$; $U(x,\gamma) \equiv \sum_{r=0}^{\infty}(-p)^r u_r(x,\gamma)$, $u_0(x,\gamma) = x-\gamma$, $u_r(x,\gamma) = \int_{\gamma}^{x}\dfrac{x-s}{f(s)}u_{r-1}(s,\gamma)\,ds$, $r = 1, 2, \ldots$
27	$y'''' + \dfrac{2}{x}y''' - \dfrac{1}{x^2}y'' + \dfrac{1}{x^3}y'$	$\dfrac{1}{4}\gamma\left[(\gamma^2 + x^2)\ln\dfrac{x}{2} + \gamma^2 - x^2\right]$
28	$\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) & y_1 \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix}$; $L[y_i] \equiv p_0(x)y_i^{(n)}(x) +$ $p_1(x)y_i^{(n-1)}(x) + \ldots$ $\ldots + p_n(x)y_i(x) \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$	$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{W_{ni}(\gamma)}{W(\gamma)}y_i(x)$; $W(\gamma) \equiv W[y_1(\gamma), \ldots, y_n(\gamma)]$, $W_{ni}(\gamma)$ – алгебричне доповнення i-го елемента n-го рядка визначника Вронського

2 Фундаментальні функції, відповідні деяким операторам зі сталими коефіцієнтами

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
1	$y''-4y'+5y$	$e^{2(x-\gamma)}\sin(x-\gamma)$
2	$a\,y'$, $a=\text{const}$	$\dfrac{1}{a}$
3	$y'+ay$, $a=\text{const}$	$e^{-a(x-\gamma)}$
4	y''	$x-\gamma$
5	$y''+\omega^2 y$, $\omega=\text{const}$	$\dfrac{1}{\omega}\sin\omega(x-\gamma)$
6	$y''-\omega^2 y$, $\omega=\text{const}$	$\dfrac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-\gamma)$
7	$y''+2\omega^2 y'+\omega^4 y$	$(x-\gamma)\,e^{-\omega^2(x-\gamma)}$
8	$y''+2\varepsilon y'+\omega^2 y$, $\varepsilon,\omega=\text{const}$, $0\le\varepsilon\le\omega^2$	$\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}e^{-\varepsilon(x-\gamma)}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\varepsilon}\,(x-\gamma)\right)$
9	$y''+a\,y'+b\,y$	$\dfrac{e^{s_1(x-\gamma)}-e^{s_2(x-\gamma)}}{s_1-s_2}$, s_1, s_2 — довільні (комплексні) числа, $s_1+s_2=a$, $s_1 s_2=b$
10	$y'''+y''$	$e^{-(x-\gamma)}+(x-\gamma)-1$
11	y''''	$\dfrac{(x-\gamma)^3}{3!}$
12	$y''''+r^2 y''$, $r=\text{const}$	$\dfrac{r(x-\gamma)-\sin r(x-\gamma)}{r^3}$

2 Фундаментальні функції, відповідні деяким операторам зі сталими коефіцієнтами (закінчення)

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
13	$y'''' - \mu^2 y''$, $\mu = \mathrm{const}$	$\dfrac{\mathrm{sh}\mu(x-\gamma) - \mu(x-\gamma)}{\mu^3}$
14	$y'''' - \vartheta^4 y$, $\vartheta = \mathrm{const}$	$\dfrac{1}{2\vartheta^3}(\mathrm{sh}\vartheta(x-\gamma) - \sin\vartheta(x-\gamma))$
15	$y'''' - \beta y'' - \delta y$, $\beta, \delta = \mathrm{const}$	$\dfrac{1}{\mu^2 + r^2}\left(\dfrac{\mathrm{sh}\mu(x-\gamma)}{\mu} - \dfrac{\sin r(x-\gamma)}{r}\right)$, $\mu^2 = \sqrt{\dfrac{1}{4}\beta^2 + \delta} + \dfrac{1}{2}\beta$, $r^2 = \sqrt{\dfrac{1}{4}\beta^2 + \delta} - \dfrac{1}{2}\beta$
16	$y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \ldots - a_n y$, $a_1, \ldots, a_n = \mathrm{const}$	$\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{p_n'(s_i)} e^{s_i(x-\gamma)}$; $p_n(s_i) = 0$, $p_n(s) = s^n - a_1 s^{n-1} - \ldots - a_n$

Те, що K (див. (1.34)), та K, K', …, $K^{(n-1)}$ складають систему лінійно незалежних розв'язків рівняння зі сталими коефіцієнтами, а отже формують розв'язок (1.37), є відомим [32].

Оператори зі сталими коефіцієнтами певним чином співвідносяться один з одним за рівнем їх загальності. Очевидно, що приклад 1 з табл. 2 є окремим випадком прикладу 8. Тут конкретне успадковує властивості загального за рахунок того, що довільні параметри ω, ε набувають конкретних значень (стають числами). При цьому ні оператор, ні фундаментальна функція структурних змін не зазнають. Натомість, при $\varepsilon \to 0$ приклад 8 зводиться до прикладу 5 з відповідними структурними змінами оператора і фундаментальної функції. З аналогічними змінами приклад 5 (як і, зрештою, приклад 6) зводиться до прикладу 4 при $\omega \to 0$. Якщо в прикладі 9 покласти $s_1 - s_2 \to 0$, то з'ясуємо:

$$K = \lim_{s_2, s_1 \to s} \frac{e^{s_1(x-\gamma)} - e^{s_2(x-\gamma)}}{s_1 - s_2} = (x-\gamma)\, e^{s(x-\gamma)} .$$

Є підстави структурні зміни вважати незворотними через те, що однозначне відновлення первісних (загальних) оператора і фундаментальної функції в рамках конкретного є неможливим.

Зосередьмо увагу на прикладі 15 з табл. 2 [19].

Нехай спочатку $\beta \to 0$. Позначаючи $\mu^2 = r^2 = \vartheta^2$, фундаментальну функцію (див. табл. 2) можна подати у вигляді

$$K(t) = \frac{\operatorname{sh}\vartheta t - \sin\vartheta t}{2\vartheta^3}$$

($t = x - \gamma$). Похідні

$$K'(t) = \frac{\operatorname{ch}\vartheta t - \cos\vartheta t}{2\vartheta^2},\ K''(t) = \frac{\operatorname{sh}\vartheta t + \sin\vartheta t}{2\vartheta},\ K'''(t) = \frac{\operatorname{ch}\vartheta t + \cos\vartheta t}{2},$$

які пов'язані з відомими функціями Крилова [8], відповідають рівнянню

$$y'''' - \vartheta^4 y = 0 \ (\vartheta^4 = \delta).$$

Тож приклад 15 при $\beta \to 0$ зводиться до прикладу 14. Якщо, до того ж, і $\delta = \vartheta^4 \to 0$, то застосовуючи правило Лопіталя, матимемо:

$$K(t)\Big|_{\beta=\vartheta=0} = \frac{\left.\left(\dfrac{\partial^3}{\partial\vartheta^3}\left(\operatorname{sh}\vartheta t - \sin\vartheta t\right)\right)\right|_{\vartheta=0}}{2\left.\left(\dfrac{\partial^3}{\partial\vartheta^3}\vartheta^3\right)\right|_{\vartheta=0}} = \frac{t^3}{3!}$$

(приклад 11, табл. 2).

Припустімо, що в прикладі 15 тепер $\delta \to 0$. Розрізнятимемо при цьому два випадки: $\beta \ge 0$ і $\beta \le 0$. В першому з них $\mu^2 = \beta \ge 0$, $r^2 = 0$,

$$K(t) = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\operatorname{sh}\mu t}{\mu} - t\right),$$

(див. приклад 13), а в другому $\mu^2 = 0$, $r^2 = -\beta \ge 0$,

$$K(t) = \frac{rt - \sin rt}{r^3}$$

(див. приклад 12). Якщо, до того ж, і $r \to 0$, то

$$K(t)\Big|_{\delta=r=0} = \lim_{t\to 0}\frac{rt - \left(\dfrac{rt}{1!} - \dfrac{r^3t^3}{3!} + \dfrac{r^5t^5}{5!} - \dfrac{r^7t^7}{7!} + \ldots\right)}{r^3} = \frac{t^3}{3!},$$

чого й слід було сподіватись для рівняння $y'''' = 0$ (приклад 11, табл. 2).

Зазначмо, що вивчення відношень загальності стосовно рівнянь з похідними може виявитись корисним при формуванні методологічних засад для дослідження властивостей конкретних систем через властивості інших систем, які за тими чи іншими ознаками є загальнішими. Часто шлях власне від загального до окремого, конкретного є чи не найпродуктивнішим.

1.4 Експонентна фундаментальна функція

Розглядатимемо рівняння зі звичайними похідними

$$L[y] \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0\,,\ -\infty < x < \infty\,, \quad (1.38)$$

в якому коефіцієнти $p_0 \neq 0$, p_1, …, p_n є сталими дійсними числами, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y^{(r)} = \dfrac{d^r y}{dx^r}$, сумісно з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_0'\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\,. \quad (1.39)$$

В теорії диференціальних задач (1.38) — (1.39) особливу вагу мають експонентна функція та алгебричний многочлен.

Експонентною називають **функцію** $y = e^{kx}$, де $k = \text{const}$, похідними від якої також є експонентні функції

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \cdots, y^{(j)} = k^j e^{kx}, \ldots \quad (1.40)$$

Підставляючи $y = e^{kx}$ у (1.38) та зважаючи на (1.40), знайдемо:

$$L[e^{kx}] \equiv e^{kx}\,(p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1} k + p_n) = 0\,. \quad (1.41)$$

Зрозуміло, що при $k \to \infty$ рівність (1.41) порушується. Натомість,

$$\lim_{k\to-\infty} L[e^{kx}] = \lim_{k\to-\infty} e^{kx} P[k] = \lim_{k\to-\infty} \frac{k^n}{e^{-kx}}\left(p_0 + \frac{p_1}{k} + \cdots + \frac{p_{n-1}}{k^{n-1}} + \frac{p_n}{k^n}\right) =$$

$$= (-1)^n p_0 \lim_{k\to\infty} \frac{k^n}{e^{kx}} = (-1)^n p_0 \lim_{\substack{k\to\infty,\\ r=n}} \frac{\dfrac{d^r}{dk^r} k^n}{\dfrac{d^r}{dk^r} e^{kx}} = (-1)^n p_0 \lim_{\substack{k\to\infty,\\ r=n}} \frac{\dfrac{n!}{(n-1)!} k^{n-r}}{e^{kx}\left(\ln e^x\right)^r} =$$

$$= (-1)^n p_0 \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{e^{kx}\left(\ln e^x\right)^n} = 0\,. \quad (1.42)$$

Число k називається **коренем алгебричного многочлена**

$$P_n[k] \equiv p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n , \qquad (1.43)$$

якщо воно є розв'язком **алгебричного рівняння**

$$P_n[k] = 0 . \qquad (1.44)$$

Алгебричний многочлен $P_n[k]$ можна, звісно, подати у вигляді

$$P_n[k] \equiv p_0(k-k_1)(k-k_2)\ldots(k-k_n) = p_0 \prod_{i=1}^{n} (k-k_i) , \qquad (1.45)$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — корені цього многочлена. Виконуючи у правій частині тотожності (1.45) операції множення (розкривання дужок) і порівнюючи отриманий результат з правою ж частиною тотожності (1.43), можна дійти **формул (співвідношень) Вієта**

$$p_1 = -p_0 \sum_{i=1}^{n} k_i = -p_0(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) ,$$

$$p_2 = (-1)^2 p_0 \sum_{\substack{i=1,\, j \\ i<j}}^{n} k_i k_j = p_0(k_1 k_2 + k_1 k_3 + \cdots + k_{n-1} k_n) ,$$

$$p_3 = (-1)^3 p_0 \sum_{\substack{i=1,\, j,\, l \\ i<j<l}}^{n} k_i k_j k_l = -p_0(k_1 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_4 + \cdots + k_{n-2} k_{n-1} k_n) ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_{n-1} = (-1)^{n-1} p_0 \sum_{\substack{i=1,\, j,\, \ldots,\, l \\ i<j<\ldots<l}}^{n} k_i k_j \ldots k_l =$$

$$= (-1)^{n-1} p_0(k_1 k_2 \ldots k_{n-1} + k_1 k_2 \ldots k_{n-2} k_n + \ldots + k_2 k_3 \ldots k_n) ,$$

$$p_n = (-1)^n p_0 k_1 k_2 \ldots k_n . \qquad (1.46)$$

У правих частинах щойно наведених виразів фігурують суми всіх тих $C_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$ ($r = \overline{1, n}$) добутків, кожен з яких містить r множників k_j з індексами, що не збігаються.

З (1.41) та (1.42) випливає, що $y = e^{kx}$ є розв'язком рівняння (1.38) в тому разі, якщо $k \to -\infty$, або ж якщо число k є коренем алгебричного многочлена (1.43), тобто розв'язком рівняння (1.44). Через таку властивість **многочлен** (1.43) і **рівняння** (1.44) називають **характеристичними**.

Покладімо $y_i = e^{k_i x}$ ($i = \overline{1, n}$); тут k_i — довільні поки що числа (не пов'язані, зокрема, співвідношеннями Вієта (1.46)). В такому разі вирази (1.5) і (1.6)) можна записати як

$$W(x) = e^{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$W_j(x, x_0) = \begin{array}{@{}c@{}c@{}} \begin{vmatrix} e^{k_1 x_0} & e^{k_2 x_0} & \ldots & e^{k_n x_0} \\ k_1 e^{k_1 x_0} & k_2 e^{k_2 x_0} & \ldots & k_n e^{k_n x_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{j-2} e^{k_1 x_0} & k_2^{j-2} e^{k_2 x_0} & \ldots & k_n^{j-2} e^{k_n x_0} \\ e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \ldots & e^{k_n x} \\ k_1^j e^{k_1 x_0} & k_2^j e^{k_2 x_0} & \ldots & k_n^j e^{k_n x_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x_0} & k_2^{n-1} e^{k_2 x_0} & \ldots & k_n^{n-1} e^{k_n x_0} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j-1 \\ j \\ j+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \end{array} =$$

$$= e^{(k_1 x_0 + k_2 x_0 + \ldots + k_n x_0)} \begin{array}{@{}c@{}c@{}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{j-2} & k_2^{j-2} & \ldots & k_n^{j-2} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \ldots & e^{k_n(x-x_0)} \\ k_1^j & k_2^j & \ldots & k_n^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j-1 \\ j \\ j+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \end{array}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\left.\frac{W_j(x, x_0)}{W(x_0)}\right|_{y_i = e^{k_i x}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \ldots & k_n^{n-2} \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{j-2} & k_2^{j-2} & \ldots & k_n^{j-2} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \ldots & e^{k_n(x-x_0)} \\ k_1^j & k_2^j & \ldots & k_n^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Характеристичний визначник

$$\overset{n}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

який пов'язують з іменем **Ван-дер-Монда**, можна подати у формі виразу-добутку

$$\begin{aligned} \overset{n}{\Delta} = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_4 - k_1)\dots(k_{n-1} - k_1)(k_n - k_1) \times \\ \times (k_3 - k_2)(k_4 - k_2)\dots(k_{n-1} - k_2)(k_n - k_2) \times \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \times (k_{n-1} - k_{n-2})(k_n - k_{n-2}) \times \\ \times (k_n - k_{n-1}) \end{aligned}$$

(що містить $m(m-1)/2$ множників), або стисліше

$$\overset{m}{\Delta} = \prod_{1 \le j < i \le m} \left(k_i - k_j\right) = \prod_{i=2}^{m} \prod_{j=1}^{i-1} \left(k_i - k_j\right).$$

Отже функції (1.7) в даному разі мають вигляд

$$z_1(x) = \frac{\overset{n}{\Delta}_1 (x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}}, \; z_2(x) = \frac{\overset{n}{\Delta}_2 (x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}}, \; \dots, \; z_n(x) = \frac{\overset{n}{\Delta}_n (x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}}, \quad (1.47)$$

де

$$\overset{n}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_1 (x - x_0) = \begin{vmatrix} e^{k_1 (x - x_0)} & e^{k_2 (x - x_0)} & \cdots & e^{k_n (x - x_0)} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\ldots,\ \overset{n}{\Delta}_j(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{j-1} & k_2^{j-1} & \cdots & k_n^{j-1} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \ldots & e^{k_n(x-x_0)} \\ k_1^{j+1} & k_2^{j+1} & \ldots & k_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$\overset{n}{\Delta}_n(x-x_0)=\overset{n}{\Delta}_e(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \ldots & e^{k_n(x-x_0)} \end{vmatrix}, \qquad (1.48)$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ — комплексні числа, які, зокрема, можуть бути коренями алгебричного рівняння

$$P_n[k] \equiv p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1}k + p_n = 0\,, \qquad (1.49)$$

$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ — дійсні сталі — коефіцієнти допоміжного алгебричного рівняння (1.49), x_0 — наперед заданий параметр.

У разі диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами вимагалось, щоби функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$, на основі яких будувалась відповідна фундаментальна функція $K(x,\gamma)$, обов'язково були лінійно незалежними. У разі ж диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами ситуація принципово інша. Якщо $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — корені алгебричного рівняння (1.49) (а отже задовольняють співвідношення Вієта (1.46)), то цілком можливо, що серед них існують кратні, а в такому разі величини (1.48) стають нулями.

Проте, кратність коренів характеристичного многочлена не обов'язково вважати чимось особливим за суттю. Якщо які-небудь числа k_j, k_l є однаковими, то при визначенні величини (1.47) треба лише вдатися до обчислення (розкриття) невизначеностей типу $0/0$.

Зокрема,

$$\left.\frac{W_n(x, x_0)}{W(x_0)}\right|_{y_i = e^{k_i x};\, k_j = k_l} =$$

$$= \lim_{k_j \to k_l} \frac{\dfrac{\partial}{\partial k_j} W_n(x, x_0)}{\dfrac{\partial}{\partial k_j} W(x_0)} = \begin{vmatrix} \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & k_{j-1} & 1 & k_{j+1} & \cdots & k_l & \cdots \\ \cdots & k_{j-1}^2 & 2k_l & k_{j+1}^2 & \cdots & k_l^2 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & k_{j-1}^{n-2} & (n-2)k_l^{n-3} & k_{j+1}^{n-2} & \cdots & k_l^{n-2} & \cdots \\ \cdots & k_{j-1}^{n-1} & (n-1)k_l^{n-2} & k_{j+1}^{n-1} & \cdots & k_l^{n-1} & \cdots \end{vmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & k_{j-1} & 1 & k_{j+1} & \cdots & k_l & \cdots \\ \cdots & k_{j-1}^2 & 2k_l & k_{j+1}^2 & \cdots & k_l^2 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & k_{j-1}^{n-2} & (n-2)k_l^{n-3} & k_{j+1}^{n-2} & \cdots & k_l^{n-2} & \cdots \\ \cdots & e^{k_{j-1}(x-x_0)} & (x-x_0)e^{k_l(x-x_0)} & e^{k_{j+1}(x-x_0)} & \cdots & e^{k_l(x-x_0)} & \cdots \end{vmatrix}.$$

Візьмімо визначник

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)m} \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{m} A_j y_j(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial D_i}{\partial y_j} y_j(x),$$

в якому a_{rj} $(r = \overline{\overline{1, i-1}, \overline{i+1, m}})$, а отже й алгебричні доповнення $A_j = \dfrac{\partial D_i}{\partial y_j}$ елементів-функцій $y_j(x)$ ($j = \overline{1, m}$) є сталими (незалежними від x). Враховуючи однорідність і адитивність оператора $L_n[\cdot]$ легко з'ясувати, що

$$L_n[D_i]=\sum_{j=1}^{m}A_j L_n[y_j(x)]=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial D_i}{\partial y_j}L_n[y_j(x)]=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)m} \\ L_n[y_1(x)] & L_n[y_2(x)] & \cdots & L_n[y_m(x)] \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Остання рівність відображає правило прикладання диференціального оператора до визначника.

Застосовуючи це правило до функції $\overset{n}{\Delta}_j(x-x_0)$ (див. (1.47), (1.48)), матимемо:

$$L\left[\overset{n}{\Delta}_j(x-x_0)\right]=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{j-1} & k_2^{j-1} & \cdots & k_n^{j-1} \\ L\left[e^{k_1(x-x_0)}\right] & L\left[e^{k_2(x-x_0)}\right] & \cdots & L\left[e^{k_n(x-x_0)}\right] \\ k_1^{j+1} & k_2^{j+1} & \ldots & k_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{j-1} & k_2^{j-1} & \cdots & k_n^{j-1} \\ P[k_1]e^{k_1(x-x_0)} & P[k_2]e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & P[k_n]e^{k_n(x-x_0)} \\ k_1^{j+1} & k_2^{j+1} & \ldots & k_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Останній вираз, звісно, дорівнює тотожно нулю, якщо всі числа $k_1, k_2, \dots, k_n$ є коренями алгебричного рівняння (1.49). Тож, якщо $k_1, k_2, \dots, k_n$ задовольняють (1.49), то кожна з n функцій (1.47) є розв'язком диференціального рівняння (1.38) зі сталими коефіцієнтами $p_0 \neq 0$, p_1, $\dots$, p_n.

Зважаючи на співвідношення

$$z_j(x, x_0)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ x_0=x}} = z_j'(x, x_0)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ x_0=x}} = \ldots = z_j^{(j-2)}(x, x_0)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ x_0=x}} = 0\,,$$

$$z_j^{(j-1)}(x, x_0)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ x_0=x}} = 1\,,$$

$$z_j^{(j)}(x, x_0)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ x_0=x}} = z_j^{(j+1)}(x, x_0)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ x_0=x}} = \ldots = z_j^{(n-1)}(x, x_0)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ x_0=x}} = 0\,, \qquad (1.50)$$

можна пересвідчитися в лінійній незалежності системи функцій (1.47). А це дає підстави, враховуючи умови (1.39), записати розв'язок рівняння (1.38) у вигляді

$$y(x) = y_{\circ}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_i\,(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}}\,.$$

(умови ж бо (1.50) є нормальними).

Звернімося тепер до неоднорідного диференціального рівняння

$$L[y] \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = q(x)\,, \quad a < x < b\,, \qquad (1.51)$$

в якому $q(x)$ є неперервною функцією $\forall x \in I = [a, b]$. Згорнімо

$$K(x - \gamma) = \frac{\overset{n}{\Delta}_n\,(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}}$$

і $q(x)$ $(x, \gamma \in I = [a, b])$ в одну функцію

$$y_* = y_*(x, x_0) = \frac{1}{p_0} \int_{x_0}^{x} K(x - s)\, q(s)\, ds\,. \qquad (1.52)$$

Легко бачити, що функція $y_* = y_*(x, x_0)$ задовольняє умови

$$y_*(x_0, x_0) = y_*'(x_0, x_0) = \dots = y_*^{(n-1)}(x_0, x_0) = 0\,.$$

Переконаймося, що функція (1.52) задовольняє рівняння (1.51).

Для цього, спочатку знайдімо:

$$p_0 y_*^{(r)} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^r K(x-s)}{\partial x^r} q(s)\,ds + \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} \left(K(x-x_0)\big|_{x_0=x} q(x)\right) +$$

$$+ \frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}} \left(\frac{\partial K(x-x_0)}{\partial x}\bigg|_{x_0=x} q(x) \right) + \ldots + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^{r-2} K(x-x_0)}{\partial x^{r-2}}\bigg|_{x_0=x} q(x) \right) + ,$$

$$+ \frac{\partial^{r-1} K(x-x_0)}{\partial x^{r-1}}\bigg|_{x_0=x} q(x)\,,\ r = \overline{1, n}\,. \tag{1.53}$$

Далі, зважаючи на рівності

$$\frac{\partial^{\nu} K(x-x_0)}{\partial x^{\nu}}\bigg|_{x_0=x} = 0, \quad \nu = \overline{0, n-2}\,; \ \frac{\partial^{n-1} K(x-x_0)}{\partial x^{n-1}}\bigg|_{x_0=x} = 1,$$

вирази (1.53) зведімо до вигляду

$$y_*^{(r)} = \frac{1}{p_0} \int_{\gamma}^{x} \frac{\partial^r K(x-s)}{\partial x^r} q(s)\,ds, \quad r = \overline{1, n-1}\,,$$

$$y_*^{(n)} = \frac{1}{p_0} \int_{\gamma}^{x} \frac{\partial^n K(x-s)}{\partial x^n} q(s)\,ds + \frac{q(x)}{p_0}\,. \tag{1.54}$$

Нарешті, підставляючи (1.52) і (1.54) в (1.51) та вносячи коефіцієнти p_0, p_1, …, p_n під знак інтеграла, дійдемо рівності

$$\int_{\gamma}^{x} L_n\left[K(x-s)\right] \frac{q(s)}{p_0} ds + q(x) = q(x)\,,$$

яка є тотожністю $q(x) \equiv q(x)$, оскільки $L_n\left[K(x-s)\right] \equiv 0$.

Отже функція $y_* = y_*(x, \gamma)$, означувана формулою (1.52), справді є **розв'язком неоднорідного диференціального рівняння** (1.51). Її можна записати також у вигляді

$$y_* = \frac{1}{\underset{n}{\Delta}} \int_{x_0}^{x} \overset{n}{\Delta}_e (x-s)\, q(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\overset{n}{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ \int\limits_{x_0}^{x} e^{k_1(x-s)} q(s)\,ds & \int\limits_{x_0}^{x} e^{k_2(x-s)} q(s)\,ds & \cdots & \int\limits_{x_0}^{x} e^{k_n(x-s)} q(s)\,ds \end{vmatrix}.$$

Таким чином, розв’язок **неоднорідної диференціальної задачі**

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1} y'(x) + p_n y(x) = q(x),$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (1.55)$$

(в якій p_0, p_1, …, p_{n-1}, p_n — задані дійсні числа, а $q(x)$ — відома неперервна функція) є підстави відобразити формулою

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_i (x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p_0} \frac{\overset{n}{\Delta}_n (x - s)}{\overset{n}{\Delta}}\, ds$$

чи

$$y(x) = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \overset{n}{\Delta}_i (x - x_0) + \frac{1}{p_0} \int\limits_{x_0}^{x} q(s) \overset{n}{\Delta}_n (x - s)\, ds \right). \qquad (1.56)$$

Функції

$$z_n = K(x-\gamma) = \frac{\overset{n}{\Delta}_e (x-\gamma)}{\overset{n}{\Delta}} = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \ldots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-\gamma)} & e^{k_2(x-\gamma)} & \ldots & e^{k_n(x-\gamma)} \end{vmatrix}, \qquad (1.57)$$

де $\overset{n}{\Delta}_e = \overset{n}{\Delta}_e (x-\gamma) = \overset{n}{\Delta}_n (x-\gamma)$ (див. (1.48)) можна надати статусу фундаментальної, зважаючи на зазначені її властивості.

Функція $K = K(x-\gamma)$ (див. (1.57)) при $i+j = r+l$ задовольняє умови

$$(-1)^i \frac{\partial^{i+j} K}{\partial\gamma^i\, \partial x^j} = (-1)^r \frac{\partial^{r+l} K}{\partial\gamma^r\, \partial x^l},$$

звідки, зокрема, випливає, що

$$(-1)^i \frac{\partial^{i+j} K}{\partial\gamma^i\, \partial x^j} = (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j} K}{\partial\gamma^{i+j}} = \frac{\partial^{i+j} K}{\partial x^{i+j}}.$$

В такому разі визначник Вронського системи функцій K, $\dot{K}$, $\ddot{K}$, $\ldots$, $\overset{(n)}{K}$

$$W_K = \begin{vmatrix} K & \dot{K} & \ddot{K} & \cdots & \overset{(r)}{K} & \cdots & \overset{(n-1)}{K} \\ K' & \dot{K}' & \ddot{K}' & \cdots & \overset{(r)}{K}' & \cdots & \overset{(n-1)}{K}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(r)} & \dot{K}^{(r)} & \ddot{K}^{(r)} & \cdots & \overset{(r)}{K}^{(r)} & \cdots & \overset{(n-1)}{K}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(n-1)} & \dot{K}^{(n-1)} & \ddot{K}^{(n-1)} & \cdots & \overset{(r)}{K}^{(n-1)} & \cdots & \overset{(n-1)}{K}^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (1.58)$$

є підстави подавати у вигляді

$$W_K = (-1)^{(n-1)n/2} \begin{vmatrix} K & K' & K'' & \cdots & K^{(n-2)} & K^{(n-1)} \\ K' & K'' & K''' & \cdots & K^{(n-1)} & K^{(n)} \\ K'' & K''' & K^{IV} & \cdots & K^{(n)} & K^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-2)} & K^{(n-1)} & K^{(n)} & \cdots & K^{(2n-4)} & K^{(2n-3)} \\ K^{(n-1)} & K^{(n)} & K^{(n+1)} & \cdots & K^{(2n-3)} & K^{(2n-2)} \end{vmatrix}. \qquad (1.59)$$

Легко пересвідчитися, що

$$\left.\frac{\partial^{i+j} K}{\partial\gamma^i\, \partial x^j}\right|_{x=\gamma} = (-1)^i \left.\frac{\partial^{i+j} K}{\partial x^{i+j}}\right|_{x=\gamma} = \begin{cases} 0, \text{ коли } 0 \le i+j \le n-2, \\ (-1)^i, \text{ коли } i+j = n-1; \end{cases}$$

$$K^{(\nu)}(x-\gamma)\Big|_{x=\gamma} = K^{(\nu)}(x-\gamma)\Big|_{\gamma=x} = \begin{cases} 0, \text{ коли } \nu = \overline{1, n-2}, \\ 1, \text{ коли } \nu = n-1, \\ -p_1 p_0^{-1}, \text{ коли } \nu = n. \end{cases} \qquad (1.60)$$

Через (1.60) визначник Вронського (1.58) при $x=\gamma$ стає трикутним

$$W_K\big|_{x=\gamma}=\begin{vmatrix} & & & & (-1)^{n-1}\overset{(n-1)}{K'}(\gamma,\gamma)\\ & 0 & & \iddots & \vdots\\ & & (-1)^2 & \cdots & \overset{(n-1)}{K^{(n-3)}}(\gamma,\gamma)\\ & (-1)^1 & \ddot{K}^{(n-2)}(\gamma,\gamma) & \cdots & \overset{(n-1)}{K^{(n-2)}}(\gamma,\gamma)\\ (-1)^0 & \dot{K}^{(n-1)}(\gamma,\gamma) & \ddot{K}^{(n-1)}(\gamma,\gamma) & \cdots & \overset{(n-1)}{K^{(n-1)}}(\gamma,\gamma)\end{vmatrix}$$

і набуває конкретного числового значення $W_K\big|_{x=\gamma}=1\neq 0$. Подібне стається й з визначником (1.59).

Таким чином, як K, $\dot{K}$, $\ddot{K}$, …, $\overset{(r-1)}{K}$, …, $\overset{(n-1)}{K}$, так і K, K', K'', …, $K^{(r-1)}$, …, $K^{(n-1)}$ складають дві системи лінійно незалежних функцій, а тому загальний розв'язок диференціального рівняння (1.38) можна записати у вигляді

$$y=c_1K+c_2\dot{K}+c_3\ddot{K}+\cdots+c_r\overset{(r-1)}{K}+\cdots+c_n\overset{(n-1)}{K}=\sum_{i=1}^{n}c_i\overset{(i-1)}{K},$$

або ж у вигляді

$$y=C_1K+C_2K'+C_3K''+\cdots+C_rK^{(r-1)}+\cdots+C_nK^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}C_iK^{(i-1)}.$$

($c_1,c_2,c_3,\cdots,c_r,\cdots,c_n$ та $C_1,C_2,C_3,\cdots,C_r,\cdots,C_n$ — відповідні системи вільних сталих). Зрештою, **загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння** (1.38) можна подати і у вигляді

$$y=y(x,\gamma)=$$

$$=\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \ldots & k_n^{n-2}\\ e^{k_1(x-\gamma)}\sum\limits_{i=1}^{n}C_ik_1^{i-1} & e^{k_2(x-\gamma)}\sum\limits_{i=1}^{n}C_ik_2^{i-1} & \ldots & e^{k_n(x-\gamma)}\sum\limits_{i=1}^{n}C_ik_n^{i-1}\end{vmatrix}.$$

Використовуючи формули (1.24), можна побудувати ще одну (окрім (1.47)) **нормальну фундаментальну систему розв'язків лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами**:

$$Y_i = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{p_{n-i-j}}{p_0} \frac{\partial^{\,j} K(x-x_0)}{\partial x^{\,j}}\,,\ i=\overline{1,n}\ \ (Y_n = K(x-x_0));$$

тут покладено $\gamma = x_0$. На підставі неї виникає можливість записати **розв'язок диференціальної задачі** (1.55) у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} Y_i + y_*(x,x_0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} y_0^{(i-1)} \frac{p_{n-i-j}}{p_0} \frac{\partial^{\,j} K(x-x_0)}{\partial x^{\,j}} + y_*(x,x_0)$$

або

$$y = y_0 K^{(n-1)}(x-x_0) + \frac{1}{p_0}(p_1 y_0 + p_0 y_0')K^{(n-2)}(x-x_0) +$$
$$+\frac{1}{p_0}(p_2 y_0 + p_1 y_0' + p_0 y_0'')K^{(n-3)}(x-x_0) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{p_0}\left(p_{n-1} y_0 + p_{n-2} y_0' + \ldots + p_0 y_0^{(n-1)}\right)K(x-x_0) +$$
$$+\frac{1}{p_0}\int_{x_0}^{x} K(x-s)\ q(s)\,ds\,. \tag{1.61}$$

Форми (1.56), (1.61) запису розв'язку диференціальної задачі (1.55) є структурно вельми досконалими. Проте, форма (1.61) має ту перевагу, що містить в собі одну-єдину штучно сконструйовану структурну одиницю — фундаментальну функцію $K(x-s)$ (див. (1.57), яка однозначно визначається через корені характеристичного многочлена (1.43), відповідного власне задачі (1.55). Це дає підстави вважати диференціальну задачу з початковими умовами повністю і точно розв'язаною. Проте не слід забувати, що характеристичне рівняння (порядку, більшого за чотири) в загальному випадку не розв'язується в радикалах. Отже пошук коренів — задача не зовсім проста.

Відомий такий приклад американського математика Вілкінсона. Якщо у рівнянні $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \ldots + 20! = 0$ замінити коефіцієнт -210 на близьке число $-(210+2^{-23})$ (що відрізняється приблизно на 10^{-7}), то жоден з коренів нового рівняння не виявиться близьким до коренів 11, 13, 15 первісного рівняння (це ознака кількісної невідповідності наближення); до того ж, серед коренів нового рівняння з'являться комплексні (ознака якісної невідповідності).

1.5 Сенс нетривіального розв'язку однорідного рівняння

Хай

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = p(x)\,\delta(x-\alpha) \qquad (1.62)$$

— лінійне рівняння, в якому $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$, $p(x) \in C^1$ в наперед окресленому інтервалі $I = (a, b)$ ($a < x < b$), і до того ж $p_0(x) \neq 0$ в $I = (a, b)$.

Побудуймо відповідну рівнянню (1.62) функцію (1.21)

$$y = c_1 K(x,\gamma) + c_2 \dot{K}(x,\gamma) + \ldots + c_n \overset{(n-1)}{K}(x,\gamma) + K(x,\alpha)\frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}\int_\gamma^x \delta(s-\alpha)\,ds \qquad (1.63)$$

($\delta(\cdot)$ — дельта-функція), яку можна подати також у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \overset{(i-1)}{K}(x,\gamma) + K(x,\alpha)\frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}\big(\theta(x-\alpha) - \theta(\gamma-\alpha)\big). \qquad (1.64)$$

Тут враховано, що

$$\int_\gamma^x \delta(s-\alpha)\,ds = \int_{-\infty}^{x} \delta(s-\alpha)\,ds - \int_{-\infty}^{\gamma} \delta(s-\alpha)\,ds = \theta(x-\alpha) - \theta(\gamma-\alpha),$$

де

$$\theta(x+\infty) = \theta(x-\alpha)\big|_{\alpha=-\infty} = \frac{1}{2}, \quad \theta(\gamma-\alpha) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \alpha > \gamma, \\ \frac{1}{2}, & \alpha = \gamma, \\ 1, & \alpha < \gamma \end{array}\right\} = \mathrm{const}.$$

Легко з'ясувати, що

$$L[y] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i L\left[\overset{(i-1)}{K}(x,\gamma)\right] + \frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)} L\left[K(x,\alpha)\theta(x-\alpha)\right] + \frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(\gamma-\alpha) L\left[K(x,\alpha)\right] =$$
$$= \frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)} L\left[K(x,\alpha)\theta(x-\alpha)\right] \quad (c_i = \mathrm{const},\ i = \overline{1,n}), \qquad (1.65)$$

оскільки

$$L\left[\overset{(i-1)}{K}(x,\gamma)\right] = L\left[K(x,\alpha)\right] = 0 \ \ (i = \overline{1,n}).$$

Враховуючи, що

$$\theta'(z)=\delta(z);\ a(x)\delta(x-\alpha)=a(\alpha)\delta(x-\alpha),\ a(x)\in C^0;$$

$$a(\alpha)\delta(x-\alpha)=0,\ \text{якщо}\ a(\alpha)=0;$$

$$K'(x,\alpha)\big|_{x=\alpha}=K''(x,\alpha)\big|_{x=\alpha}=\ldots=K^{(n-1)}(x,\alpha)\Big|_{x=\alpha}=0,\quad K^{(n)}(x,\alpha)\Big|_{x=\alpha}=1,$$

знайдімо похідні від функції $\Phi(x,\alpha)=K(x,\alpha)\theta(x-\alpha)$:

$$\Phi'(x,\alpha)=\frac{\partial K(x,\alpha)}{\partial x}\theta(x-\alpha),\ \Phi''(x,\alpha)=\frac{\partial^2 K(x,\alpha)}{\partial x^2}\theta(x-\alpha),\ldots,$$

$$\Phi^{(n-1)}(x,\alpha)=\frac{\partial^{n-1}K(x,\alpha)}{\partial x^{n-1}}\theta(x-\alpha),$$

$$\Phi^{(n)}(x,\alpha)=\frac{\partial^{n}K(x,\alpha)}{\partial x^{n}}\theta(x-\alpha)+\delta(x-\alpha).$$

Звідси

$$L[\Phi(x,\alpha)]=L[K(x,\alpha)\theta(x-\alpha)]=\theta(x-\alpha)L[K(x,\alpha)]+p_0(\alpha)\delta(x-\alpha).\quad(1.66)$$

А отже, з (1.65) і (1.66) випливає, що

$$L[y]=p(x)\delta(x-\alpha),$$

а це означає, що функція (1.63) є розв'язком рівняння (1.62).

Тож можна наголосити на такому. Природним розв'язком однорідного рівняння $L[y]=0$ є тривіальний $y(x)\equiv 0$. Натомість кожен нетривіальний розв'язок, повинен бути зумовлений яким-небудь збуренням, яке у рівнянні $L[y]=0$ ніде не простежується. Але легко збагнути, що нетривіальний розв'язок

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_i\overset{(i-1)}{K}(x,\gamma)$$

однорідного рівняння $L[y]=0$ є окремим випадком розв'язку (1.64) за умови $\alpha=-\infty$. Таким чином, цей розв'язок можна вважати реакцією лінійного об'єкта на імпульсне збурення $p(x)\delta(x+\infty)$, зосереджене в точці $x=-\infty$.

1.6 Відтворення однорідного рівняння за його розв'язками

Щоб побудувати диференціальне рівняння, яке задовольняє деяка функція, задана рівнянням

$$F(x,y;c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$$

(x і y — змінні; $c_1,c_2,\ldots,c_n$ — вільні сталі), треба це рівняння n разів продиференціювати за x чи y, а потім n отриманих рівнянь та первісне рівняння $F(x,y;c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$ згорнути в одне, усуваючи вільні сталі c_1, c_2, …, c_n.

Нехай функції $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ є неперервно диференційовними n разів у деякому проміжку $I=(a,b)$ $(a<x<b)$. Якщо до того ж $W(x)=W[y_1, y_2,\ldots,y_n]\neq 0$ $\forall x\in I$, то існує єдине однорідне лінійне рівняння n-го порядку

$$L[y]\equiv y^{(n)}+\frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)}+\cdots+\frac{p_{n-1}}{p_0(x)}(x)\,y'+\frac{p_n(x)}{p_0(x)}y=0 \qquad (1.67)$$

з неперервними в $I=(a,b)$ коефіцієнтами $p_1(x)/p_0(x)$, $p_2(x)/p_0(x)$, …, $p_n(x)/p_0(x)$, для якого задані функції $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ складають фундаментальну систему розв'язків.

Доведемо це твердження таким чином.

Нехай $p_1(x)/p_0(x)$, $p_2(x)/p_0(x),\ldots,$ $p_n(x)/p_0(x)$ — коефіцієнти шуканого рівняння. Функції $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ повинні задовольняти це рівняння, а отже справедливою є система n рівнянь

$$L[y]\equiv y_\nu^{(n)}+\frac{p_1(x)}{p_0(x)}y_\nu^{(n-1)}+\cdots+\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}y_\nu'+\frac{p_n(x)}{p_0(x)}y_\nu=0 \quad (\nu=\overline{1,n}).$$

Головний визначник цієї системи не дорівнює нулю:

$$D\equiv\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \cdots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_2' & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \cdots & y_n' & y_n \end{vmatrix}=(-1)^{n(n-1)/2}W[y_1, y_2,\ldots, y_n]\neq 0\ \forall x\in I$$

(інакше систему функції $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ не можна було б визнати фундаментальною системою розв'язків однорідного рівняння). А тому коефіцієнти $p_1(x)/p_0(x)$, $p_2(x)/p_0(x), \ldots,$ $p_n(x)/p_0(x)$ визначаються однозначно:

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = -\frac{1}{W_n(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -\frac{W_n'(x)}{W_n(x)}, \ \ldots,$$

$$\frac{p_j(x)}{p_0(x)} = \frac{(-1)^j}{W_n(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-j-1)} & y_2^{(n-j-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-j-1)} & y_n^{(n-j-1)} \\ y_1^{(n-j+1)} & y_2^{(n-j+1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-j+1)} & y_n^{(n-j+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

$$\frac{p_n(x)}{p_0(x)} = \frac{(-1)^n}{W_n(x)} \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_{n-1}'' & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{1.68}$$

Підставляючи (1.68) в (1.67), отримаємо шукане рівняння

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n, y] \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n)}(x) & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.69}$$

На підставі першої рівності (1.68) легко з'ясувати відому **формулу Остроградського — Ліувілля**

$$W(x) \equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}. \tag{1.70}$$

З формули Остроградського — Ліувілля (1.70), зокрема, випливає таке твердження: для того, щоби розв'язки $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ однорідного лінійного рівняння n-го порядку (1.67) були лінійно незалежними в $I=(a,b)$, необхідно і достатньо, щоби вронскіян $W(x) \equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не обертався на нуль хоча б одній точці $x = x_0 \in I$.

У термінах фундаментальної функції рівнянню (1.67) (чи (1.69)) відповідає рівняння

$$\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-1)}{K}(x,\gamma) & y \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-1)}{K'}(x,\gamma) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n)}(x,\gamma) & \dot{K}^{(n)}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-1)}{K^{(n)}}(x,\gamma) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.71}$$

Позначаючи

$$P_0[K(x,\gamma)] = \begin{vmatrix} K & \dot{K} & \ldots & \overset{(n-2)}{K} & \overset{(n-1)}{K} \\ K' & \dot{K}' & \ldots & \overset{(n-2)}{K'} & \overset{(n-1)}{K'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-1)} & \dot{K}^{(n-1)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n-1)}} & \overset{(n-1)}{K^{(n-1)}} \end{vmatrix},$$

$$P_j[K(x,\gamma)] = \begin{vmatrix} K & \dot{K} & \ldots & \overset{(n-2)}{K} & \overset{(n-1)}{K} \\ K' & \dot{K}' & \ldots & \overset{(n-2)}{K'} & \overset{(n-1)}{K'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-j-1)} & \dot{K}^{(n-j-1)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n-j-1)}} & \overset{(n-1)}{K^{(n-j-1)}} \\ K^{(n-j+1)} & \dot{K}^{(n-j+1)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n-j+1)}} & \overset{(n-1)}{K^{(n-j+1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-1)} & \dot{K}^{(n-1)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n-1)}} & \overset{(n-1)}{K^{(n-1)}} \\ K^{(n)} & \dot{K}^{(n)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n)}} & \overset{(n-1)}{K^{(n)}} \end{vmatrix} \quad (j = \overline{1, n-1}),$$

$$P_n[K(x,\gamma)] = \begin{vmatrix} K' & \dot{K}' & \ldots & \overset{(n-2)}{K'} & \overset{(n-1)}{K'} \\ K'' & \dot{K}'' & \ldots & \overset{(n-2)}{K''} & \overset{(n-1)}{K''} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n)} & \dot{K}^{(n)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n)}} & \overset{(n-1)}{K^{(n)}} \end{vmatrix}, \tag{1.72}$$

коефіцієнти рівняння (1.67), відповідного певній фундаментальній функції $K = K(x,\gamma)$, можна визначити на підставі (1.71) за формулою

$$\frac{p_j}{p_0} = (-1)^j \frac{P_j[K(x,\gamma)]}{P_0[K(x,\gamma)]}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.73}$$

З (1.73), (1.72) випливає, зокрема, що

$$\frac{p_1}{p_0} = -\frac{P_1[K(x,\gamma)]}{P_0[K(x,\gamma)]} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} P_0[K(x,\gamma)]}{P_0[K(x,\gamma)]}.$$

Звідси

$$P_0[K(x,\gamma)] = e^{-\int_\gamma^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds},$$

а отже в загальному випадку

$$(-1)^j \frac{p_0(x)}{p_j(x)} P_j[K(x,\gamma)] = e^{-\int_\gamma^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds}, \quad j = \overline{0,n}. \tag{1.74}$$

З рівності (1.74) випливає, зокрема, що при r разів неперервно за змінною x диференційовних функціях $p_0(x)$ і $p_j(x)$ вирази $(-1)^j\, p_0/p_j\, P_j[K]$ мають неперервні за цією ж змінною похідні до порядку $r+1$ включно.

1.7 Векторне (матричне) рівняння

Доволі часто доводиться оперувати так званою **нормальною системою лінійних диференціальних рівнянь з дійсними коефіцієнтами**

$$x_i' = \frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j + q_i(t), \; i = \overline{1,n}, \tag{1.75}$$

яку стисло записують у матричному вигляді

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = P(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t), \tag{1.76}$$

де $\mathbf{x} = \| x_i \|_{i=1}^{n}$ — невідомий вектор, $P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$ — дійсна матриця (коефіцієнтів), $\mathbf{Q}(t) = \| q_i(t) \|_{i=1}^{n}$ — дійсний вектор (вільний); $\mathbf{x}$, $P(t)$ та $\mathbf{Q}(t)$ визначувані в наперед окресленому проміжку $a \le t \le b$ $(t \in [a,b])$.

Векторне (матричне) рівняння (1.76) (чи рівняння (1.75)) називають **неоднорідною системою** (рівнянь). Натомість векторне рівняння

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = P(t)\,\mathbf{x} \tag{1.77}$$

— це **однорідна система** (відповідна неоднорідній системі (1.76)).

Щодо матричних рівнянь, як відомо, вірними є такі твердження.

1° Лінійна комбінація розв'язків однорідної системи (1.77) також є розв'язком цієї системи.

2° Різниця довільних двох розв'язків неоднорідної системи (1.76) є розв'язком однорідної системи (1.77).

3° Якщо $\mathbf{x}_1(t)$ та $\mathbf{x}_2(t)$ — розв'язки систем рівнянь

$$\mathbf{x}_1' = P(t)\mathbf{x}_1 + \mathbf{Q}_1(t) \text{ та } \mathbf{x}_2' = P(t)\mathbf{x}_2 + \mathbf{Q}_2(t)$$

відповідно, то сума

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$$

— розв'язок системи

$$\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}_1(t) + \mathbf{Q}_2(t).$$

4° Припустімо, що 1) $\mathbf{x}(t)$ ($t \in [a,b]$) є розв'язком системи рівнянь (1.76), 2) матриця $P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$ та вектор $\mathbf{Q}(t) = \| q_i(t) \|_{i=1}^{n}$ неперервні в проміжку $[a,b]$, 3) $\| P(t) \| \le P$ ($\| P(t) \|$ позначає норму матриці P: $\| P(t) \| = \sup\limits_{|x|\le 1} | P\mathbf{x} |$), 4) $|\mathbf{Q}(t)| \le Q$. В такому разі для $|\mathbf{x}(t)|$ справджується оцінка

$$|\mathbf{x}(t)| \le (|\mathbf{x}(t_0)| + Q(b-a))\, e^{P|t-t_0|}.$$

5° Якщо матриця $P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$ системи (1.76) неперервна в $[a,b]$, то розв'язок системи (1.76) однозначно визначається умовою

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ t_0 \in [a,b].$$

6° (наслідок 4° і 5°) Якщо матриця $P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$ неперервна в $[a,b]$, то $\| P(t) \| \le P$ і для розв'язку $\mathbf{x}(t)$ ($t \in [a,b]$) однорідної системи (1.77) справджується двобічна оцінка

$$|\mathbf{x}(t_0)|\, e^{-P|t-t_0|} \le |\mathbf{x}(t)| \le |\mathbf{x}(t_0)|\, e^{P|t-t_0|}$$

(зростання і спадання функції $|\mathbf{x}(t)|$ обмежені експонентою).

7° (наслідок 4° і 5°) Очевидно, що тотожний нуль $\mathbf{x}(t)\equiv 0$ задовольняє однорідну систему (1.77). Розв'язок $\mathbf{x}(t)$ однорідної системи (1.77) з неперервною матрицею $P(t)=\| p_{ij}(t)\|_{i,j=1}^{n}$ є тотожним нулем, якщо він набуває нульового значення в якій-небудь точці з $[a,b]$.

Нехай $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_n(t)$ — n розв'язків однорідної системи (1.77): $\mathbf{x}_i=\| x_{ij}\|_{i=1}^{n}$, $i=\overline{1,n}$. Визначник

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

називається **визначником Вронського системи розв'язків** $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_n(t)$.

Система *n* розв'язків $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_n(t)$ однорідної системи (1.77), лінійно незалежних в $[a,b]$, називається **фундаментальною**. **Необхідною й достатньою умовою лінійної незалежності (фундаментальності) розв'язків** $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_n(t)$ є відмінність від нуля відповідного визначника Вронського хоча б в одній довільній точці t_0 з $[a,b]$ (якщо таке стається, то цей визначник відмінний від нуля всюди в $[a,b]$).

Вірною є **формула Остроградського — Ліувілля — Якобі**

$$W(t)=W(t_0)\,e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{Sp}(\tau)\,d\tau},$$

де $\mathrm{Sp}(t)=\sum_{i=1}^{n} p_{ii}(t)$ — так званий **слід матриці** $P(t)=\| p_{ij}(t)\|_{i,j=1}^{n}$. Звідси випливає, що якщо $W(t_0)=0$ в якій-небудь точці t_0, то $W(t)\equiv 0$ в $[a,b]$.

Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (1.76) називають множину всіх розв'язків цієї системи.

Далі знову можна продовжити виклад найважливіших тверджень.

8° Якщо $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_n(t)$ — фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь (1.77), то формула

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\circ(t)=c_1\mathbf{x}_1(t)+c_2\mathbf{x}_2(t)+\ldots+c_n\mathbf{x}_n(t)$$

(c_1, c_2, ..., c_n — довільні сталі) виражає загальний розв'язок цієї однорідної системи. Зауважмо, що для кожної однорідної системи рівнянь фундаментальна система розв'язків завжди існує.

9° (наслідок 8°) Якщо $\mathbf{x}_*(t)$ — окремий розв'язок неоднорідної системи рівнянь (1.76), а $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$ — фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи (1.77), то формула

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\circ(t) + \mathbf{x}_*(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \ldots + c_n\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{x}_*(t),$$

де c_1, c_2, ..., c_n — довільні сталі, виражає загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь (1.76).

10° Нехай матриця $P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$ та вектор $\mathbf{Q}(t) = \| q_i(t) \|_{i=1}^{n}$ неперервні в проміжку $[a,b]$ і $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$ — відома фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь (1.77). Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь (1.76) виражається в квадратурах.

11° Фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь (1.77) однозначно визначає нормальну форму лінійної однорідної системи рівнянь, тобто відповідну їй матрицю $P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$. Іншими словами, за інтегральною (фундаментальною) матрицею

$$X(t) = \begin{Vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{Vmatrix}, \tag{1.78}$$

що у стислій формі відбиває в собі фундаментальну систему розв'язків $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$ однорідної системи і визначником якої є визначник Вронського $|X(t)| = W(t) \neq 0$, завжди можна відновити цю однорідну систему.

12° Нехай матриця $P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$ та вектор $\mathbf{Q}(t) = \| q_i(t) \|_{i=1}^{n}$ мають в проміжку $[a,b]$ k перші похідні. В такому разі кожен розв'язок $\mathbf{x}(t)$ системи рівнянь (1.76) має $k+1$ перші похідні. Тож, якщо матриця $P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$ та вектор $\mathbf{Q}(t) = \| q_i(t) \|_{i=1}^{n}$ в $[a,b]$ є нескінченну кількість разів диференційовними, то кожен розв'язок $\mathbf{x}(t)$ системи рівнянь (1.76) також є нескінченно диференційованим.

Твердження 10° та 11° відіграють особливу роль в алгоритмах синтезу розв’язків та систем (мають конструктивне значення). Вони випливають з таких міркувань.

Якщо $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$ — фундаментальна система розв’язків однорідної системи рівнянь (1.77), то $\mathbf{x}_i'(t)=P(t)\mathbf{x}_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, або ж в матричній формі

$$X'(t)=P(t)X(t), \tag{1.79}$$

де $X(t)=\| x_{ij}(t)\|_{i,j=1}^{n}$ — згадувана раніше інтегральна (фундаментальна) матриця (див. (1.78)), визначником якої є визначник $|X(t)|=W(t)\neq 0$ Вронського.

Шукатимемо розв’язок системи (1.76) у вигляді

$$\mathbf{x}(t)=c_1(t)\mathbf{x}_1(t)+c_2(t)\mathbf{x}_2(t)+\ldots+c_n(t)\mathbf{x}_n(t)=X(t)\mathbf{c}(t), \tag{1.80}$$

де $\mathbf{c}(t)=\| c_i\|_{i=1}^{n}$.

Підставляючи (1.80) в (1.76), матимемо:

$$X'(t)\mathbf{c}(t)+X(t)\mathbf{c}'(t)=P(t)X(t)\mathbf{c}(t)+\mathbf{Q}(t). \tag{1.81}$$

На підставі ж (1.79) співвідношення (1.81) зводиться до співвідношення

$$X(t)\mathbf{c}'(t)=\mathbf{Q}(t). \tag{1.82}$$

Оскільки $|X(t)|=W(t)\neq 0$ і матриця $X(t)$ є неперервною в $[a,b]$, то існує неперервна в $[a,b]$ матриця $X^{-1}(t)$, обернена до $X(t)$. Множення виразу (1.82) зліва на $X^{-1}(t)$ дає рівність

$$\mathbf{c}'(t)=X^{-1}(t)\mathbf{Q}(t),$$

звідки

$$\mathbf{c}(t)=\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau+\mathbf{c}_0, \tag{1.83}$$

де $\mathbf{c}_0=\| c_{i0}\|_{i=1}^{n}$ — довільний сталий вектор. Підставмо (1.83) в (1.80):

$$\mathbf{x}(t)=X(t)\mathbf{c}_0+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau. \tag{1.84}$$

Формула (1.84) визначає **загальний розв’язок неоднорідної системи рівнянь** (1.76). В цьому можна переконатися доволі просто.

Оскільки сталий вектор $\mathbf{c}_0 = \| c_{i0} \|_{i=1}^{n}$ є довільним, то, беручи $\mathbf{c}_0 = 0$, матимемо окремий розв'язок

$$\mathbf{x}_*(t) = X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) \mathbf{Q}(\tau)\, d\tau$$

системи рівнянь (1.76). З іншого боку,

$$X(t)\mathbf{c}_0 = c_{10}\mathbf{x}_1(t) + c_{20}\mathbf{x}_2(t) + \ldots + c_{n0}\mathbf{x}_n(t),$$

а отже вираз (1.84) можна подати у вигляді

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_*(t) + c_{10}\mathbf{x}_1(t) + c_{20}\mathbf{x}_2(t) + \ldots + c_{n0}\mathbf{x}_n(t).$$

Відповідно до 9° (наслідку 8°) остання формула, а отже й формула (1.84), визначає загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь (1.76).

Скористаймося формулою (1.84) для побудови розв'язку задачі Коші. Тож, хай ідеться про розв'язок системи (1.76) такий, що задовольняє умови $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Беручи в (1.84) $t = t_0$, матимемо $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = X(t_0)\mathbf{c}_0$ та $\mathbf{c}_0 = X^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$. Таким чином,

$$\mathbf{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\, d\tau. \tag{1.85}$$

Вираз (1.85) відображає власне **розв'язок задачі Коші, відповідний системі рівнянь** (1.76).

Нехай відома інтегральна матриця (1.78), відповідна системі рівнянь (1.76). В такому разі, помножуючи (1.79) праворуч на $X^{-1}(t)$, знайдемо

$$P(t) = X'(t)\, X^{-1}(t). \tag{1.86}$$

Вираз (1.86) однозначно відтворює матрицю $P(t)$ за відомою матрицею $X(t)$. Вибираючи який-небудь окремий розв'язок $\mathbf{x}(t)$ системи (1.76), можна знайти вектор $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{x}' - P(t)\mathbf{x}$. Таким чином, можна однозначно відтворити неоднорідну систему штибу (1.76) за відомим її загальним розв'язком.

Припустімо, що в проміжку $[a,b]$ матриця $P(t)$ та вектор $\mathbf{Q}(t)$ $(n-1)$ разів диференційовні. Тоді кожний розв'язок лінійної системи також n разів диференційовний на відрізку $[a,b]$. Покажемо, що кожна компонента $x_i(t)$ будь-якого розв'язку $\mathbf{x}(t)$ системи (1.76) буде розв'язком деякого лінійного рівняння порядку не вищого за n.

Виведемо диференціальне рівняння порядку не вищого за n, наприклад, для змінної $x_1(t)$. Перш за все запишемо систему (1.76) в розгорненому вигляді

$$x_1' = \frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)\,x_1 + p_{12}(t)\,x_2 + \cdots + p_{1n}(t)\,x_n + q_1(t)\,,$$

$$x_2' = \frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)\,x_1 + p_{22}(t)\,x_2 + \cdots + p_{2n}(t)\,x_n + q_2(t)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n' = \frac{dx_n}{dt} = p_{n1}(t)\,x_1 + p_{n2}(t)\,x_2 + \cdots + p_{nn}(t)\,x_n + q_n(t)\,. \qquad (1.87)$$

Диференціюючи перше рівняння системи (1.87), отримаємо рівняння другого порядку

$$x_1'' = \frac{d^2x_1}{dt^2} = p_{11}(t)\,x_1' + p_{12}(t)\,x_2' + \cdots + p_{1n}(t)\,x_n' +$$

$$+p_{11}'(t)\,x_1 + p_{12}'(t)\,x_2 + \cdots + p_{1n}'(t)\,x_n + q_1'(t)\,.$$

Усуваючи з нього всі x_i' за допомогою рівнянь (1.87), отримаємо рівність

$$x_1'' = b_{21}(t)\,x_1 + b_{22}(t)\,x_2 + \cdots + b_{2n}(t)\,x_n + h_2(t)\,, \qquad (1.88)$$

в якій функції $b_{2i}(t)$ ($i = \overline{1,n}$) лінійно визначаються через $p_{ij}(t)$ ($i = \overline{1,n}$) та їх перші похідні, а функція $h_2(t)$ — через q_1', $q_i(t)$ та $p_{ij}(t)$. Тому функції $b_{2i}(t)$ і $h_2(t)$ будуть ($n-2$) рази диференційовними.

Диференціюючи тепер вже рівняння (1.88) та знову усуваючи x_i' за допомогою рівнянь системи (1.87), отримаємо:

$$x_1''' = b_{31}(t)\,x_1 + b_{32}(t)\,x_2 + \cdots + b_{3n}(t)\,x_n + h_3(t)\,,$$

де функції $b_{3i}(t)$ ($i = \overline{1,n}$) лінійно визначаються через $p_{ij}(t)$ ($i = \overline{1,n}$) і їх перші та другі похідні, а функція $h_3(t)$ — через q_1'', $q_i(t)$, $p_{ij}(t)$ та їх перші похідні. Через це функції $b_{3i}(t)$ і $h_3(t)$ будуть $(n-3)$ рази диференційовними.

Продовжуючи описані операції далі, після ($n-1$)-кратного диференціювання першого рівняння системи (1.87) з усуванням кожного разу величин x_i' за допомогою рівнянь цієї ж системи дійдемо співвідношень

$$x_1' = b_{11}(t)\, x_1 + b_{12}(t)\, x_2 + \ldots + b_{1n}(t)\, x_n + h_1(t)\,,$$

$$x_1'' = b_{21}(t)\, x_1 + b_{22}(t)\, x_2 + \ldots + b_{2n}(t)\, x_n + h_2(t)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1^{(n)} = b_{n1}(t)\, x_1 + b_{n2}(t)\, x_2 + \ldots + b_{nn}(t)\, x_n + h_n(t)$$

$$(\, b_{11} = p_{11}\,,\ b_{12} = p_{12}\,,\ \ldots,\ b_{1n} = p_{1n}\,,\ h_1 = q_1\,). \tag{1.89}$$

Методом Гауса, наприклад, послідовно усуваючи з рівнянь (1.89) невідомі x_2 , x_3 , …, x_n , отримаємо рівняння вигляду

$$b_0(t)\, x_1^{(n)} + b_1(t)\, x_1^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)\ x_1 + b(t) = 0\,, \tag{1.90}$$

де коефіцієнти $b_0(t)$, $b_1(t)$, …, $b_n(t)$, $b(t)$ визначаються через $b_{ij}(t)$ та $h_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$).

Таким чином, компонента $x_1(t)$ розв'язку $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ системи рівнянь (1.76) задовольняє деяке лінійне диференціальне рівняння (1.90) порядку $m \le n$ (про нерівність $m < n$ може йтися тільки в тому разі, коли $b_0(t) \equiv 0$).

Зрозуміло (за аналогією), що й кожна інша складова $x_i(t)$ розв'язку $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ системи рівнянь (1.76) задовольняє деяке своє лінійне диференціальне рівняння штибу (1.90) порядку $m_i \le n$. Розв'язок цього рівняння можна, як відомо, записати у вигляді

$$x_i = \tilde{x}_i(t) = x_{i0}(t) + c_{i1}\, x_{i1}(t) + c_{i2}\, x_{i2}(t) + \ldots + c_{im_i}\, x_{im_i}(t)\,, \tag{1.91}$$

де $x_{i1}(t)$, $x_{i2}(t)$, …, $x_{im_i}(t)$ — фундаментальна система розв'язків відповідного рівнянню штибу (1.90) однорідного рівняння, $x_{i0}(t)$ — окремий розв'язок неоднорідного рівняння штибу (1.90), c_{i1}, c_{i2}, …, c_{im_i} — довільні сталі.

Проте, це зовсім не означає, що вектор $\{\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)\}$, складовими якого є функції (1.91), може правити за розв'язок $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ системи (1.76). Справді, кожне з рівнянь системи (1.87) засвідчує, що функції $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$, …, $\tilde{x}_n(t)$ пов'язані між собою диференціальними співвідношеннями, а тому не можуть правити за довільні розв'язки своїх рівнянь штибу (1.90). Щоб з множини вектор-функцій $\{\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)\}$, визначуваних рівняннями (1.91), вирізнити розв'язки системи (1.76), необхідно перш за все підставити їх в систему рівнянь (1.87). Вимагаючи, щоб отримані співвідношення були тотожностями за t ($t \in [a,b]$), матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно сталих c_{i1}, c_{i2}, …, c_{im_i} ($i = \overline{1,n}$). Підставляючи загальний розв'язок цієї системи алгебричних рівнянь в (1.91), нарешті отримаємо загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1.76). Оскільки загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь залежить від n довільних сталих, то система лінійних алгебричних рівнянь відносно c_{i1}, c_{i2}, …, c_{im_i} ($i = \overline{1,n}$) є сумісною і її розв'язок залежний від n довільних сталих.

З другого боку, будь-яка лише одна функція з множини (1.91) дозволяє повністю відтворити розв'язок системи (1.87). Нехай, наприклад, ідеться про функцію $x_1 = \tilde{x}_1(t)$, що є загальним розв'язком рівняння (1.90). Її, звісно, можна виразити через відповідну рівнянню (1.90) фундаментальну функцію $K_1(t,\gamma)$ (див. (1.21)):

$$x_1 = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i K_1(t,\gamma)}{\partial \gamma^i} - \int_\gamma^t K_1(t,s) \frac{b(s)}{b_0(s)} ds .$$

Тож, виникає можливість з усіх рівнянь (1.89) усунути величину x_1. В такому разі $n-1$ перших новоутворених співвідношень складатимуть систему лінійних алгебричних рівнянь відносно змінних x_i ($i = \overline{2,n}$). Тож, використовуючи n–1 рівнянь (1.89), можна віднайти всі функції x_i ($i = \overline{2,n}$), які разом з x_1 складатимуть розв'язок системи (1.87). Очевидно, що ці функції визначатимуться через фундаментальну функцію $K_1(t,\gamma)$, похідні від неї за незалежною змінною t і параметром γ та n сталих c_i ($i = \overline{1,n}$).

Нехай, до прикладу, йдеться про систему двох диференціальних рівнянь

$$tx_1' + 2(x_1 - x_2) = t , \quad tx_2' + x_1 + 5x_2 = t^2 . \tag{1.92}$$

Її за описаним раніше алгоритмом можна звести до рівняння

$$t^2 x_1'' + 8tx_1' + 12x_1 = 2t(t+3) ,$$

якому відповідає фундаментальна функція

$$K = \frac{\gamma^4 (t-\gamma)}{t^4} .$$

В такому разі

$$x_1 = c_1 K(t,\gamma) + c_2 \frac{\partial K(t,\gamma)}{\partial\gamma} + \int_\gamma^t K(t,s)\frac{2s(s+3)}{s^2}\,ds =$$

$$= \frac{1}{t^4}\left(c_1\gamma^4(t-\gamma) + c_2\gamma^3(4t-5\gamma) + 2\int_\gamma^t s^3(t-s)(s+3)\,ds \right) =$$

$$= 2C_1 t^{-3} + C_2 t^{-4} + \frac{3t}{10} + \frac{t^2}{15}\,, \tag{1.93}$$

де c_1, c_2 — первісні вільні сталі; γ — вільний параметр; C_1, C_2 — похідні вільні сталі, визначувані через c_1, c_2 та γ.

Підставляючи (1.93) в перше рівняння (1.92), знайдемо

$$x_2 = -C_1 t^{-3} - C_2 t^{-4} - \frac{t}{20} + \frac{2t^2}{15}\,.$$

Візьмімося тепер до системи трьох рівнянь (однорідної зі сталими коефіцієнтами)

$$x_1' = x_2 + x_3\,, \quad x_2' = x_3 + x_1\,, \quad x_3' = x_1 + x_2\,, \tag{1.94}$$

Диференціюючи перше рівняння і зважаючи на два інші, можна побудувати нове рівняння

$$x_1'' = 2x_1 + x_2 + x_3\,. \tag{1.95}$$

Як виявляється, поєднання рівняння (1.95) та першого з рівнянь (1.94) дозволяє відразу (без додаткового диференціювання) побудувати нове рівняння з однією змінною:

$$x_1'' - x_1' - 2x_1 = 0\,. \tag{1.96}$$

Тож,

$$x_1 = c_1 K(t,\gamma) + c_2 \frac{\partial K(t,\gamma)}{\partial\gamma}\,. \tag{1.97}$$

Вираз $x_3 = x_1' - x_2$, що випливає з першого рівняння системи (1.94), підставмо в друге рівняння (1.94):

$$x_2' + x_2 = x_1' + x_1\,. \tag{1.98}$$

Тож

$$x_2 = c_3 K_2(t,\gamma) + \int_\chi^t K_2(t,s)(x_1'(s) + x_1(s))\,ds\,. \tag{1.99}$$

Таким чином, система (1.94) зведена до двох рівнянь — (1.96) та (1.98).

Диференціальному рівнянню (1.96) відповідають характеристичне рівняння $r^2 - r - 2 = 0$ (коренями якого є числа $r_1 = -1$, $r_2 = 2$), та фундаментальна функція

$$K_1(t,\gamma) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{r_1(t-\gamma)} & e^{r_2(t-\gamma)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{e^{r_2(t-\gamma)} - e^{r_1(t-\gamma)}}{r_2 - r_1} = \frac{e^{2(t-\gamma)} - e^{-(t-\gamma)}}{3}. \quad (1.100)$$

Звідси відповідно до (1.97)

$$x_1 = c_1 \frac{e^{2(t-\gamma)} - e^{-(t-\gamma)}}{3} - c_2 \frac{2e^{2(t-\gamma)} + e^{-(t-\gamma)}}{3} = C_1 e^{2(t-\gamma)} + C_2 e^{-(t-\gamma)}.$$

Подібно до (1.100) побудуймо фундаментальну функцію, відповідну рівнянню (1.98) з характеристичним рівнянням $r_3 + 1 = 0$:

$$K_2(t,\chi) = \frac{|\, e^{r_3(t-\chi)} \,|}{|\, 1 \,|} = e^{-(t-\chi)}$$

(тут умовно введено одноелементні визначники). Звідси відповідно до (1.99)

$$x_2 = c_3 e^{-(t-\chi)} + \int_{\chi}^{t} e^{-(t-s)} (x_1'(s) + x_1(s))\, ds =$$

$$= c_3 e^{-(t-\chi)} + 3C_1 \int_{\chi}^{t} e^{-(t-s)} e^{2(s-\gamma)}\, ds.$$

Покладаючи $\chi = \gamma$, матимемо

$$x_2 = C_1 e^{2(t-\gamma)} + C_3\, e^{-(t-\gamma)}.$$

Функцію x_3 можна визначити з другого рівняння (1.94):

$$x_3 = C_1 e^{2(t-\gamma)} - (C_2 + C_3)\, e^{-(t-\gamma)}.$$

Можна також переконатися, що визначені функції x_1, x_2, x_3 перетворюють третє рівняння (1.94) у тотожність.

2 ЛІНІЙНІ І ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ

2.1 Фундаментальна функція і крайова задача

Диференціальні рівняння описують загалом певний клас явищ, незліченну їх множину. Розв'язок кожної конкретної задачі зводиться до інтегрування цих рівнянь та подальшого погодження отриманих результатів з так званими умовами однозначності.

Умови однозначності містять в собі всі дані, необхідні для вирізнення даного конкретного (окремого одиничного) явища з доволі широкого класу. Вони містять геометричні та фізичні властивості системи й довкілля, а також часові (початкові), крайові (точкові) умови.

З метою визначення часових (початкових) умов задають всі величини, які характеризують стан системи у деяку мить часу, що умовно береться за початкову. Крайові ж умови визначають закони взаємодії системи та довкілля на деяких контрольних поверхнях.

Зрозуміло, що досі розглядалася лінійна диференціальна задача з початковими умовами (задача Коші). Але виявляється, що й кожна крайова задача з лінійним диференціальним рівнянням в загальному випадку може бути зведена до двох чи декількох задач з початковими умовами (задач Коші). Інакше кажучи, крайова задача є суперпозицією задач з початковими умовами.

Зведімо до задачі з початковими умовами, наприклад, крайову задачу другого порядку

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = Q(x)\,; \tag{2.1}$$

$$y(a) = y_a\,,\;\; y(b) = y_b\,. \tag{2.2}$$

Для цього покладімо

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x)\,, \tag{2.3}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ — довільні поки що функції, $\mu \neq 0$ — невідома стала, яка підлягає визначенню.

Підставмо (2.3) в (2.1):

$$\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy_1}{dx} + p_2(x)y_1 - Q(x)\right) + \mu\left(\frac{d^2y_2}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy_2}{dx} + p_2(x)y_2\right) = 0 \tag{2.4}$$

Вимагатимемо, щоб $y_1(x)$ задовольняла неоднорідне рівняння (2.1), а $y_2(x)$ — відповідне однорідне рівняння. Отже (2.4) справджуватиметься в силу того, що

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy_1}{dx} + p_2(x)y_1 = Q(x)\,,$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy_2}{dx} + p_2(x)y_2 = 0\,.$$

До того ж, нехай задовольняються умови

$$y_1(a) = y_a\,,\ \ y_2(a) = 0\,.$$

Диференціюванням (2.3) знайдемо при $x = a$

$$\frac{dy(a)}{dx} = \frac{dy_1(a)}{dx} + \mu\frac{dy_2(a)}{dx}\,. \tag{2.5}$$

Беручи

$$\frac{dy_1(a)}{dx} = 0\,,\ \ \frac{dy_2(a)}{dx} = 1\,,$$

на підставі (2.5) матимемо

$$\frac{dy(a)}{dx} = \mu$$

(стала μ збігається з додатковою початковою умовою, яка мала б фігурувати поряд з умовою $y(a) = y_a$ у відповідній задачі Коші). На підставі другої з крайових умов (2.2), знайдемо

$$y(b) = y_1(b) + \mu y_2(b) = y_b\,.$$

Звідси

$$\frac{dy(a)}{dx} = \mu = \frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} . \tag{2.6}$$

Таким чином крайову задачу (2.1) — (2.2) можна розв’язати, здійснюючи таку низку кроків:

1) знаходження розв’язку неоднорідного рівняння

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy_1}{dx} + p_2(x) y_1 = Q(x) ,$$

з початковими умовами

$$y_1(a) = y_a , \ \frac{dy_1(a)}{dx} = 0$$

і визначення величини $y_1(b)$;

2) знаходження розв’язку однорідної задачі

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy_2}{dx} + p_2(x) y_2 = 0 .$$

з початковими умовами

$$y_2(a) = 0 , \ \frac{dy_2(a)}{dx} = 1$$

і визначення величини $y_2(b)$;

3) обчислення сталої μ за формулою (2.6)

$$\mu = \frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} ;$$

4) знаходження розв’язку первісної крайової задачі за формулою (2.3)

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x) = y_1(x) + \frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) .$$

Запишімо тепер розв’язок крайової задачі термінах фундаментальної функції. Вирази (1.22) — (1.23) в даному разі матимуть вигляд

$$y = Y_1(x, x_0) y_0 + Y_2(x, x_0) y_0' + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, q(s)\, ds ,$$

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -p_1(x_0) \\ K(x, x_0) & \partial K(x, x_0)/\partial x_0 \end{Vmatrix} ,$$

$$Y_1(x,x_0) = -\begin{vmatrix} 1 & -p_1(x_0) \\ K(x,x_0) & \dfrac{\partial K(x,x_0)}{\partial x_0} \end{vmatrix} = p_1(x_0)K(x,x_0) + \frac{\partial K(x,x_0)}{\partial x_0},$$

$$Y_2(x,x_0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ K(x,x_0) & \dfrac{\partial K(x,x_0)}{\partial x_0} \end{vmatrix} = K(x,x_0).$$

Отже

$$y = \left(p_1(x_0)K(x,x_0) + \frac{\partial K(x,x_0)}{\partial x_0} \right) y_0 + K(x,x_0) y_0' + \int_{x_0}^{x} K(x,s)\, q(s)\, ds .$$

Для першої допоміжної задачі Коші

$$x_0 = a,\ y_1(a) = y_a,\ \frac{dy_1(a)}{dx} = 0,\ q(x) = Q(x),$$

$$y_1 = \left(p_1(a)K(x,a) + \frac{\partial K(x,a)}{\partial a} \right) y_a + \int_a^x K(x,s)\, Q(s)\, ds,$$

$$y_1(b) = \left(p_1(a)K(b,a) + \frac{\partial K(b,a)}{\partial a} \right) y_a + \int_a^b K(b,s)\, Q(s)\, ds,$$

а для другої —

$$x_0 = a,\ y_2(a) = 0,\ \frac{dy_2(a)}{dx} = 1,\ q(x) \equiv 0,$$

$$y_2 = K(x,a),\ y_2(b) = K(b,a).$$

В такому разі

$$\mu = \frac{y_b - \left(p_1(a)K(b,a) + \dfrac{\partial K(b,a)}{\partial a} \right) y_a - \displaystyle\int_a^b K(b,s)\, Q(s)\, ds}{K(b,a)},$$

а отже розв’язок первісної крайової задачі в термінах фундаментальної функції має вигляд

$$y = \left(p_1(a)K(x,a) + \frac{\partial K(x,a)}{\partial a} \right) y_a + \int_a^x K(x,s)\, Q(s)\, ds +$$

$$+ \frac{y_b - \left(p_1(a)K(b,a) + \dfrac{\partial K(b,a)}{\partial a} \right) y_a - \displaystyle\int_a^b K(b,s)\, Q(s)\, ds}{K(b,a)} K(x,a). \tag{2.7}$$

Того самого результату можна дійти, записуючи розв'язок рівняння (2.1) у вигляді

$$y = Y_1(x,a)y(a) + Y_2(x,a)y'(a) + \int_a^x K(x,s)\,Q(s)\,ds\,,$$

тобто вважаючи його означеним на краю $x = a$. На краю $x = b$ в такому разі матимемо:

$$y(b) = Y_1(b,a)y(a) + Y_2(b,a)y'(a) + \int_a^b K(b,s)\,Q(s)\,ds\,.$$

Визначаючи з останнього рівняння $y'(a)$ та підставляючи його в передостаннє, власне і отримаємо (2.7).

Крайову задачу (2.1) — (2.2) можна розв'язати ще й так.

Нехай $K(x,\gamma)$ — відповідна цій задачі фундаментальна функція. Беручи по черзі $\gamma = a$ та $\gamma = b$, матимемо два розв'язки однорідного рівняння $L[y] = 0$: $y_1 = K(x,a)$, $y_2 = K(x,b)$. Якщо визначник

$$W[y_1, y_2]\big|_{x=b} = \begin{vmatrix} K(x,a) & K(x,b) \\ K'(x,a) & K'(x,b) \end{vmatrix}_{x=b} = K(b,a)$$

не дорівнює нулю (тобто $K(b,a) \neq 0$), то наведені розв'язки є лінійно незалежними. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння (2.1) можна подати у вигляді:

$$y = c_1 K(x,a) + c_2 K(x,b) + \int_a^x K(x,s)Q(s)ds\,.$$

Підставляючи його у крайові умови (2.2) і визначаючи сталі c_1, c_2, одержимо розв'язок власне задачі (2.1) — (2.2)

$$y = \left(y_b - \int_a^b K(b,s)\,Q(s)ds \right) \frac{K(x,a)}{K(b,a)} + y_a \frac{K(x,b)}{K(a,b)} + \int_a^x K(x,s)Q(s)\,ds\,.$$

Крайову задачу третього порядку

$$\frac{d^3y}{dx^3} + p_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_2(x)\frac{dy}{dx} + p_3(x)y = q(x)\,; \tag{2.8}$$

$$y(a) = y_a\,,\ \frac{dy(a)}{dx} = y'_a\,,\ y(b) = y_b\,, \tag{2.9}$$

покладаючи

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x),$$

можна звести до двох задач третього порядку з початковими умовами

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} + p_1(x)\frac{d^2 y_1}{dx^2} + p_2(x)\frac{dy_1}{dx} + p_3(x) y_1 = q(x),$$

$$y_1(a) = y_{1a}, \ \frac{dy_1(a)}{dx} = y'_{1a}, \ \frac{d^2 y_1(a)}{dx^2} = 0$$

та

$$\frac{d^3 y_2}{dx^3} + p_1(x)\frac{d^2 y_2}{dx^2} + p_2(x)\frac{dy_2}{dx} + p_3(x) y_2 = 0,$$

$$y_2(a) = y_{2a}, \ \frac{dy_2(a)}{dx} = y'_{2a}, \ \frac{d^2 y_2(a)}{dx^2} = 1.$$

При цьому повинні дотримуватися умови

$$y(a) = y_1(a) + \mu y_2(a) = y_{1a} + \mu y_{2a} = y_a,$$

$$y'(a) = y'_1(a) + \mu y'_2(a) = y'_{1a} + \mu y'_{2a} = y'_a,$$

$$y(b) = y_1(b) + \mu y_2(b) = y_b.$$

Не порушуючи їх, можна, наприклад, покласти

$$y_{1a} = y_a, \ y_{2a} = 0, \ y'_{1a} = y'_a, \ y'_{2a} = 0.$$

В триточковій задачі третього порядку

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + p_1(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + p_2(x)\frac{dy}{dx} + p_3(x) y = q(x); \tag{2.10}$$

$$\frac{dy(a)}{dx} = y'_a, \ y(b) = y_b, \ \frac{dy(c)}{dx} = y'_c \tag{2.11}$$

в кожній з точок $x = a$, $x = b$, $x = c$ задана тільки одна умова. Яку б з цих точок не взяти за початкову, для того, щоб сформулювати задачу з початковими умовами, доведеться додатково задати ще дві умови. Тому для зведення крайової задачі до суперпозиції задач з початковими умовами слід ввести власне два невідомих параметри μ і ν, покладаючи

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x) + \nu y_3(x). \tag{2.12}$$

Отже в даному разі крайовій задачі відповідатиме система вже трьох задач з початковими умовами, оскільки в (2.12) фігурують три функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$).

Застосуймо тепер до задач (2.8) — (2.9) та (2.10) — (2.11) поняття фундаментальної функції.

Розв'язок рівняння третього порядку $L_3[y] = q(x)$ можна подати у вигляді (з початковими параметрами)

$$y = Y_1(x, x_0)y_0 + Y_2(x, x_0)y_0' + Y_3(x, x_0)y_0''' + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, q(s)\, ds$$

де (відповідно до (1.24))

$$Y_1 = \frac{p_2(x_0)}{p_0(x_0)} K(x, x_0) - \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{p_1(x_0)}{p_0(x_0)} K(x, x_0) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} K(x, x_0),$$

$$Y_2 = \frac{p_1(x_0)}{p_0(x_0)} K(x, x_0) - \frac{\partial}{\partial x_0} K(x, x_0), \quad Y_3 = K(x, x_0).$$

Беручи $x_0 = a$, матимемо:

$$y = Y_1(x, a)y_a + Y_2(x, a)y_a' + Y_3(x, a)y_a'' + \int_a^x K(x, s)\, q(s)\, ds .$$

Звідси

$$y(b) = y_b = Y_1(b, a)y_a + Y_2(b, a)y_a' + Y_3(b, a)y_a'' + \int_a^b K(b, s)\, q(s)\, ds ,$$

$$y_a'' = \frac{y_b - Y_1(b, a)y_a - Y_2(b, a)y_a' - \int_a^b K(b, s)\, q(s)\, ds}{Y_3(b, a)} .$$

Отже розв'язок крайової задачі, в якому фігурують умови $y(a) = y_a$, $\dfrac{dy(a)}{dx} = y_a'$, $y(b) = y_b$, описується рівнянням

$$y = Y_1(x, a)y_a + Y_2(x, a)y_a' +$$

$$+ Y_3(x, a) \frac{y_b - Y_1(b, a)y_a - Y_2(b, a)y_a' - \int_a^b K(b, s)\, q(s)\, ds}{Y_3(b, a)} + \int_a^x K(x, s)\, q(s)\, ds . \tag{2.13}$$

Описаний алгоритм синтезу розв'язку крайової задачі з використанням поняття фундаментальної функції легко поширити на задачі з крайовими умовами, що записуються як лінійно незалежні лінійні форми

$$F_k[y] \equiv \alpha_k^{(0)} y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) +$$

$$+ \beta_k^{(0)} y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0 \ \ (k = \overline{1, n})$$

від крайових параметрів $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), \quad y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$ ($\alpha_k^{(0)}, \alpha_k^{(1)}, \ldots, \alpha_k^{(n-1)}, \ \beta_k^{(0)}, \beta_k^{(1)}, \ldots, \beta_k^{(n-1)}$ — сталі).

В триточковій задачі (2.10) — (2.11) необхідно задовольнити умови

$$\frac{dy(a)}{dx} = y'_a, \ y(b) = y_b, \ \frac{dy(c)}{dx} = y'_c .$$

Отже, якщо розв'язок задачі записати через параметри точки a у формі

$$y = Y_1(x,a) y_a + Y_2(x,a) y'_a + Y_3(x,a) y''_a + \int_a^x K(x,s)\, q(s)\, ds , \qquad (2.14)$$

то доведеться долучити до нього ще співвідношення

$$y(b) = y_b = Y_1(b,a) y_a + Y_2(b,a) y'_a + Y_3(b,a) y''_a + \int_a^b K(b,s)\, q(s)\, ds ,$$

$$y'(c) = y'_c = \frac{\partial Y_1(c,a)}{\partial c} y_a + \frac{\partial Y_2(c,a)}{\partial c} y'_a + \frac{\partial Y_3(c,a)}{\partial c} y''_a + \int_a^c \frac{K(c,s)}{\partial c} q(s)\, ds ,$$

відповідні крайовим умовам

$$y(b) = y_b , \ \frac{dy(c)}{dx} = y'_c$$

в точках b і c. Останні дві рівності дають можливість визначити величини

$$y_a = \frac{\begin{vmatrix} y_b - Y_2(b,a) y'_a - \int_a^b K(b,s)\, q(s)\, ds & Y_3(b,a) \\ y'_c - \dfrac{\partial Y_2(c,a)}{\partial c} y'_a - \int_a^c \dfrac{K(c,s)}{\partial c} q(s)\, ds & \dfrac{\partial Y_3(c,a)}{\partial c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1(b,a) & Y_3(b,a) \\ \dfrac{\partial Y_1(c,a)}{\partial c} & \dfrac{\partial Y_3(c,a)}{\partial c} \end{vmatrix}} ,$$

$$y_a'' = \frac{\begin{vmatrix} Y_1(b,a) & y_b - Y_2(b,a)y_a' - \int\limits_a^b K(b,s)\,q(s)\,ds \\ \dfrac{\partial Y_1(c,a)}{\partial c} & y_c' - \dfrac{\partial Y_2(c,a)}{\partial c}\,y_a' - \int\limits_a^c \dfrac{K(c,s)}{\partial c}\,q(s)\,ds \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1(b,a) & Y_3(b,a) \\ \dfrac{\partial Y_1(c,a)}{\partial c} & \dfrac{\partial Y_3(c,a)}{\partial c} \end{vmatrix}}$$

та записати (2.14) у потрібному вигляді

$$y = Y_1(x,a)\frac{\begin{vmatrix} y_b - Y_2(b,a)y_a' - \int\limits_a^b K(b,s)\,q(s)\,ds & Y_3(b,a) \\ y_c' - \dfrac{\partial Y_2(c,a)}{\partial c}\,y_a' - \int\limits_a^c \dfrac{K(c,s)}{\partial c}\,q(s)\,ds & \dfrac{\partial Y_3(c,a)}{\partial c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1(b,a) & Y_3(b,a) \\ \dfrac{\partial Y_1(c,a)}{\partial c} & \dfrac{\partial Y_3(c,a)}{\partial c} \end{vmatrix}} +$$

$$+Y_2(x,a)y_a' + Y_3(x,a)\frac{\begin{vmatrix} Y_1(b,a) & y_b - Y_2(b,a)y_a' - \int\limits_a^b K(b,s)\,q(s)\,ds \\ \dfrac{\partial Y_1(c,a)}{\partial c} & y_c' - \dfrac{\partial Y_2(c,a)}{\partial c}\,y_a' - \int\limits_a^c \dfrac{K(c,s)}{\partial c}\,q(s)\,ds \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1(b,a) & Y_3(b,a) \\ \dfrac{\partial Y_1(c,a)}{\partial c} & \dfrac{\partial Y_3(c,a)}{\partial c} \end{vmatrix}} +$$

$$+\int\limits_a^x K(x,s)\,q(s)\,ds\,. \qquad (2.15)$$

Зауважмо, в першій крайовій задачі (двоточковій другого порядку) існування її розв'язку залежить від того, дорівнює чи не дорівнює нулю величина $K(b,a)$ (див. (2.7)), в другій задачі (двоточковій третього порядку) визначальним також є значення $Y_3(b,a) = K(b,a)$ (див. (2.13)), а в третій (триточковій третього порядку) — вже значення визначника (див. (2.15)

$$\begin{vmatrix} Y_1(b,a) & Y_3(b,a) \\ \dfrac{\partial Y_1(c,a)}{\partial c} & \dfrac{\partial Y_3(c,a)}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Алгоритм побудови розв’язку довільної m-точкової **крайової задачі** n-го порядку ($m \le n$, $p_0(x) \equiv 1$) можна окреслити так. Візьмімо довільну точку $x = x_0$ з-посеред тих m точок, в яких власне і задано крайові параметри. Нехай в ній відомі $m_0 \ge 1$ крайових параметрів

$$y^{(j)}(x_0) = y_0^{(j)}$$

(всі j різні; $0 \le j \le n-1$). Решта $n - m_0$ крайових параметрів

$$y^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$$

задано, звісно, в інших точках x_i, $i = \overline{1, m-1}$. Для обраної точки $x = x_0$ за допомогою фундаментальної функції можна означити розв’язок (як для задачі з початковими умовами)

$$y = Y_1(x, x_0) y_0 + Y_2(x, x_0) y_0' + \ldots + Y_n(x, x_0) y_0^{(n-1)} + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, q(s)\, ds\,. \tag{2.16}$$

Тут $n - m_0$ початкових параметрів, зрозуміло, є невідомими величинами. Але, на основі крайових умов $y^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$ ($i \ne 0$) та функції (2.16) можна скласти систему $n - m_0$ рівнянь

$$y^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} =$$
$$= \frac{\partial^j}{\partial x_i} \left(Y_1(x_i, x_0) y_0 + Y_2(x_i, x_0) y_0' + \ldots + Y_n(x_i, x_0) y_0^{(n-1)} + \int_{x_0}^{x_i} K(x_i, s)\, q(s)\, ds \right). \tag{2.17}$$

Розв’язуючи цю систему відносно невідомих крайових параметрів, та підставляючи отримані результати в (2.16), власне і дійдемо шуканого розв’язку m-точкової крайової задачі.

Взагалі кажучи, описаний алгоритм залишиться в силі навіть тоді, коли крайові умови однозначно задано системою довільних сумісних нелінійних алгебричних рівнянь, метод розв’язування яких невідомий. В такому разі за розв’язок крайової задачі можна вважати навіть систему співвідношень, яку складатимуть рівняння (2.16), n нелінійних алгебричних рівнянь, що відбивають в собі крайові умови, та $n - m_0$ додаткових рівнянь (2.17). Зрештою, лінійну систему співвідношень (2.17) завжди можна розв’язати відносно тих крайових параметрів, значення яких в крайовій задачі не регламентовано, та й усунути ці параметри з рівняння (2.16).

2.2 Система диференціальних рівнянь першого порядку

Повернімося ще раз до викладеного в 1.7. Поєднання співвідношень

$$\frac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \cdots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x)\,,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{2n}(x)y_n + q_2(x)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x)\,, \tag{2.18}$$

де p_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ та q_i $(i = \overline{1, n})$ є заданими функціями від x, а $y_1, y_2, \cdots, y_n$ — шукані функції від змінної x, називають **нормальною системою звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку**. Якщо всі $q_i \equiv 0$ $(i = \overline{1, n})$, то систему називають **однорідною**, якщо ж хоча б одна з функцій q_i не дорівнює тотожно нулю, то систему залишається називати **неоднорідною**.

Нехай $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$ та $q_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ є неперервними функціями в наперед окресленому інтервалі $I = (a, b)$ $(a < x < b)$. Тоді за теоремою Пікара (про "існування та єдиність") існує єдиний, визначуваний і неперервний в тому самому $I = (a, b)$, розв'язок $\{ y_1(x),\ y_2(x), \cdots, y_n(x) \}$ системи (2.18), який при деякому конкретному $x = x_0 \in (a, b)$ задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}\,. \tag{2.19}$$

Звертаючись до поняття матриці, лінійну систему (див. (2.18))

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)y_j + q_i(x),\ i = \overline{1, n}\,, \tag{2.20}$$

можна подати у **векторній формі**

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + Q(x)\,, \tag{2.21}$$

де Y — ***n*-вимірний вектор** з координатами $y_1, y_2, \cdots, y_n$, який є сенс записувати у вигляді матриці-стовпця

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}; \qquad (2.22)$$

Q — n-вимірний вектор з координатами $q_1, q_2, \cdots, q_n$, який є сенс записувати у вигляді матриці-стовпця

$$Q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Vmatrix}; \qquad (2.23)$$

P — $n \times n$-матриця вигляду

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (2.24)$$

Рівність матриць означає рівність всіх попарно відповідних їх елементів, а отже відповідна рівнянню (2.21) рівність

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} p_{1j} y_j + q_1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_{2j} y_j + q_2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_{nj} y_j + q_n \end{Vmatrix}$$

еквівалентна системі рівнянь (2.20).

Називатимемо вираз

$$L[Y] = \frac{dY}{dx} - P(x)Y$$

лінійним диференціальним виразом першого порядку (векторним), а матричний оператор $L : \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^n) \to \mathrm{C}(\mathbf{R}^n)$ — **лінійним векторним**

диференціальним оператором першого порядку. Цей оператор має вигляд

$$L = E\frac{d}{dx} - P(x)\,,\ E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

(E — одинична матриця).

За допомогою щойно означеного лінійного диференціального оператора систему (2.20) можна подати у вигляді

$$L[Y] = Q(x)\,. \tag{2.25}$$

Якщо всі $q_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ тотожно дорівнюють нулю (матриця (2.23) є нульовою), то система (2.25) перетворюється в однорідну

$$L[Y] = 0\,. \tag{2.26}$$

Оператор $L[\cdot]$ має **властивості однорідності і адитивності**, відповідно:

1° $L[CY] = cL[Y]$, де c — довільна стала;

2° $L[Y_1 + Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2]$.

Отже за довільних сталих c_i $(i = \overline{1,m})$

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} c_i Y_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} c_i\, L[Y_i]\,.$$

На підставі основних властивостей лінійного диференціального оператора можна довести аналогічні твердження, які окреслюють найважливіші загальні властивості розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь (2.25), (2.26):

1° Якщо Y — розв'язок лінійної однорідної системи $L[Y] = 0$, то cY (c — довільна стала) також є розв'язком цієї системи.

2° Сума $Y_1 + Y_2$ двох розв'язків Y_1 і Y_2 лінійної однорідної системи $L[Y] = 0$ також є розв'язком цієї системи.

Звідси випливає, що лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{m} c_i Y_i$ з довільними сталими скалярами c_i (дійсними або комплексними, $i = \overline{1,m}$) розв'язків Y_i $(i = \overline{1,m})$ лінійної однорідної системи $L[Y] = 0$ також є розв'язком цієї системи.

3° Якщо лінійна однорідна система $L[Y]=0$ з матрицею (2.24), елементами якої є дійсні функції $p_{ij}(x)$ $(i, j=\overline{1,n})$, має **комплексний розв'язок** $Y=U+iH$, то дійсна і уявна його частини

$$\mathrm{Re}\,Y = U = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix} \text{ і } \mathrm{Im}\,Y = H = \begin{Vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{Vmatrix}$$

кожна окремо також є розв'язками цієї системи.

Нехай задано n векторів типу (2.22)

$$Y_i = \begin{Vmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{Vmatrix}, \ i=\overline{1,n}. \tag{2.27}$$

Укладімо з них матрицю

$$V(x) = \begin{Vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{Vmatrix}, \tag{2.28}$$

а за допомогою неї — рівняння

$$V' = P(x)V, \tag{2.29}$$

в якому V править за незалежну змінну, і порівняймо його з рівнянням

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y \tag{2.30}$$

(однорідним типу $L[Y]=0$).

Якщо права і ліва частини рівняння (2.30) — матриці-стовпці, то права і ліва частини рівняння (2.29) — матриці виміру $n\times n$. Стосовно цих рівнянь вірним є таке твердження.

Нехай n векторів Y_1, Y_2, …, Y_n є розв'язками рівняння (2.30). Тоді побудована ($n\times n$)-матриця $V(x)$ (див. (2.28)) є розв'язком рівняння (2.29). І зворотно, якщо матриця $V(x)$ — розв'язок рівняння (2.29), то кожен її стовпець Y_1, Y_2, …, Y_n є розв'язком (2.30).

Легко довести твердження: якщо $V(x)$ — розв'язок рівняння (2.29), то VB є розв'язком рівняння (2.30), коли B — довільний сталий стовпець, і розв'язком рівняння (2.29), коли B — довільна стала ($n\times n$)-матриця.

Необхідну й достатню умову лінійної незалежності n розв'язків рівняння (2.26) порядку n окреслює така теорема: якщо n розв'язків (2.27) однорідного векторного лінійного рівняння (2.26) з неперервними у проміжку $I=(a,b)$ ($a<x<b$) коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ ($i,j=\overline{1,n}$) є лінійно незалежними, то їх визначник Вронського (**визначник Вронського системи векторів** $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$)

$$W(x)=W[Y_1,Y_2,\dots,Y_n]=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

не обертається на нуль в жодній точці з $I=(a,b)$.

Визначник Вронського має такі властивості. По-перше, якщо $W(x)$ обертається на нуль хоча б в одній точці з проміжку $I=(a,b)$, в якому неперервні $p_{ij}(x)$ ($i,j=\overline{1,n}$), то $W(x)$ дорівнює нулю всюди в $I=(a,b)$. По-друге, якщо визначник $W(x)$ не дорівнює нулю хоча б в одній точці з проміжку $I=(a,b)$, то він не обертається на нуль в жодній точці з $I=(a,b)$. Тобто вірною є така альтернатива: визначник Вронського або тотожно дорівнює нулю, і це означає, що розв'язки $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ лінійно залежні, або не обертається на нуль в жодній точці з I, що засвідчує лінійну незалежність розв'язків $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$.

Таким чином, для лінійної незалежності n розв'язків рівняння (2.26) в проміжку $I=(a,b)$, в якому функції $p_{ij}(x)$ ($i,j=\overline{1,n}$) є неперервними, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського цих розв'язків не обертався на нуль хоча б в одній точці з $I=(a,b)$.

Зазначені щойно властивості визначника Вронського розв'язків однорідної системи (2.26) природно випливають з **формули Остроградського — Ліувілля — Якобі**

$$W(x)=W(x_0)\,e^{\int_{x_0}^{x}(p_{11}(s)+p_{22}(s)+\ldots+p_{nn}(s))\,ds}=W(x_0)\,e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{Sp}P(s)\,ds},$$

де p_{11}, p_{22}, …, p_{nn} — елементи головної діагоналі матриці P (див. (2.24)); сума $\mathrm{Sp}P=p_{11}+p_{22}+\ldots+p_{nn}$ називається **слідом матриці** P.

Тож, якщо $W(x_0) \neq 0$ в точці x_0 з проміжку I, в якому функції $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$ є неперервними, то $W(x) \neq 0$ всюди в I.

Систему n лінійно незалежних розв'язків $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ однорідного рівняння (2.30) називатимемо **фундаментальною системою розв'язків**, а відповідну їм матрицю $V(x)$ (див. (2.28)) — **фундаментальною матрицею**. На підставі викладеного раніше можна дати ще й таке означення фундаментальної матриці: розв'язок $V(x)$ (матричний) рівняння (2.29), якому в наперед заданому проміжку I властива нерівність $W(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, називається фундаментальною матрицею.

Вірним є твердження: лінійна однорідна система диференціальних рівнянь завжди має фундаментальну матрицю.

Справді, пам'ятаючи про те, що визначник Вронського або тотожно дорівнює нулю в I, або ж не обертається на нуль в жодній точці з I, можна взяти довільну матрицю $\mathrm{B} = \mathrm{const}$ з відмінним від нуля визначником і окреслити за допомогою рівності $V(x_0) = \mathrm{B}$ $(x_0 \in I)$ довільні початкові умови для розв'язку рівняння (2.29).

Наголосімо ще на справедливості такого твердження: якщо $V(x)$ — фундаментальна матриця, то будь-який розв'язок $Y(x)$ рівняння (2.30) відтворюється за формулою

$$Y(x) = V(x)C$$

(C — деяка стала матриця-стовпець). Або іншими словами, лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$ n лінійно незалежних розв'язків $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ однорідного рівняння (2.30) з неперервними в I коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$ є загальним розв'язком цього рівняння в I.

Вірність твердження можна виснувати таким чином. Нехай (подібно до (2.19))

$$Y(x_0) = Y_0 = \left\| \begin{matrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{matrix} \right\|. \tag{2.31}$$

Задамо C таким, щоб задовольнялось рівняння $V(x_0)C = Y_0$, яке обов'язково має розв'язок завдяки тому, що $W(x_0) \neq 0$. Далі побудуймо функцію $\tilde{Y}(x)=V(x)C$. Оскільки $\tilde{Y}(x_0)=V(x_0)C=Y_0$, то відповідно до теореми про "існування і єдиність" $Y(x)\equiv\tilde{Y}(x)=V(x)C$, що і декларує наведене твердження.

Побудуймо розв'язок однорідного рівняння (2.30), який би задовольняв умову (2.31). З рівності $Y(x_0)=V(x_0)C=Y_0$ знайдемо $C=V^{-1}(x_0)Y_0$. Звідси

$$Y(x)=V(x)V^{-1}(x_0)Y_0 .$$

Матрицю $\mathcal{K}(x,x_0)=V(x)V^{-1}(x_0)$, що є функцією двох змінних x і x_0, називають **імпульсною матрицею** або **матрицянтом**.

Згідно з викладеним вище, якщо $V(x)$ — розв'язок рівняння (2.29), то добуток $V(x)$ на сталу ($n\times n$)-матрицю також є розв'язком цього рівняння. Отже $\mathcal{K}(x,x_0)$ як функція від x задовольняє (2.29). Очевидно, що

$$\mathcal{K}(x_0,x_0)=E .$$

Звідси випливає таке твердження: розв'язок задачі (2.30), (2.31) відображає формула

$$Y(x)=\mathcal{K}(x,x_0)Y_0 ,$$

у якій $\mathcal{K}(x,x_0)$ задовольняє за змінною x матричне рівняння (2.29) і умову $\mathcal{K}(x_0,x_0)=E$.

Нехай $\tilde{Y}$ є розв'язком неоднорідного векторного рівняння $L[Y]=Q$, а Y° — розв'язком відповідного однорідного рівняння $L[Y]=0$. Керуючись властивостями лінійного оператора, дійдемо висновку, що

$$L[Y^\circ+\tilde{Y}]=L[Y^\circ]+L[\tilde{Y}]\equiv Q .$$

Таким чином, сума $Y^\circ+\tilde{Y}$ розв'язку Y° однорідного рівняння $L[Y]=0$ і розв'язку $\tilde{Y}$ похідного неоднорідного рівняння $L[Y]=Q$ знову є розв'язком неоднорідного рівняння $L[Y]=Q$.

Можна довести вірність такого твердження: **загальний розв'язок** Y **неоднорідного лінійного рівняння** $L[Y]=Q$ з неперервними в I коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ ($i,j=\overline{1,n}$) складають окремий розв'язок $\tilde{Y}$ цього неоднорідного рівняння і загальний розв'язок $\sum_{i=1}^{n}c_iY_i$ відповідного однорідного рівняння $L[Y]=0$ (тобто $Y=\tilde{Y}+\sum\limits_{i=1}^{n} c_i Y_i$). Це твердження можна висловити й інакше: якщо $V(x)$ — фундаментальна матриця, а $\tilde{Y}$ — окремий розв'язок неоднорідного рівняння $L[Y]=Q$, то будь-який розв'язок цього неоднорідного рівняння $L[Y]=Q$ відображуваний у вигляді

$$Y(x)=\tilde{Y}+V(x)C\,,$$

де C — деяка стала матриця-стовпець.

Знайдімо окремий розв'язок $\tilde{Y}(x)$ рівняння (2.21), який би задовольняв нульову початкову умову

$$\tilde{Y}(x_0)=0\,.$$

Будуватимемо його у вигляді

$$\tilde{Y}(x)=V(x)C(x)\,,$$

де $C(x)$ — невідома матриця-стовпець. Підставляючи $\tilde{Y}(x)=V(x)C(x)$ у рівняння

$$\frac{dY}{dx}=P(x)Y+Q(x)\,,$$

отримаємо:

$$V'(x)\,C+V(x)\,C'=P(x)V(x)\,C+Q(x)\,.$$

Оскільки матриця $V(x)$ задовольняє рівняння (2.29), то останній вираз зводиться до рівності

$$V(x)\,C'=Q(x)\,,$$

звідки

$$C'=V^{-1}(x)\,Q(x)\,.$$

А оскільки за домовленістю

$$\tilde{Y}(x_0)=V(x_0)C(x_0)=0\,,$$

то $C(x_0)=0$ і отже

$$C(x)=\int\limits_{x_0}^{x} V^{-1}(s)\,Q(s)\,dx\,.$$

Таким чином,

$$\widetilde{Y}(x) = V(x)C(x) = \int_{x_0}^{x} V(x)V^{-1}(s)Q(s)\,dx = \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}(x,s)Q(s)\,dx\,.$$

Підсумуємо викладене таким твердженням: окремий розв'язок рівняння (2.21), який задовольняє нульову початкову умову $\widetilde{Y}(x_0) = 0$, має вигляд

$$\widetilde{Y}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}(x,s)Q(s)\,dx\,,$$

де $\mathscr{K}(x,s)$ — імпульсна матриця (матрицянт) — розв'язок матричного рівняння (2.29), який задовольняє умову $\mathscr{K}(s,s) = E$.

Загальний розв'язок неоднорідної задачі (2.21), (2.31) в такому разі є підстави записати у вигляді

$$Y(x) = Y^{\circ} + \widetilde{Y}(x) = \mathscr{K}(x,x_0)Y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}(x,s)Q(s)\,dx\,, \tag{2.32}$$

де Y° — загальний розв'язок однорідної задачі (2.30), (2.31).

Розгляньмо рівняння

$$L[Y] = \sum_{i=1}^{m} Q_i\,, \quad Q_i = \begin{Vmatrix} Q_{1i}(x) \\ Q_{2i}(x) \\ \vdots \\ Q_{ni}(x) \end{Vmatrix}. \tag{2.33}$$

Нехай функція $Y_i(x)$ є розв'язком рівняння $L[Y] = Q_i$ ($i = \overline{1,m}$). З лінійності оператора L випливає, що

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} Y_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} L[Y_i] = \sum_{i=1}^{m} Q_i$$

Отже справджується так званий **принцип суперпозиції**: розв'язком рівняння (2.33) $L[Y] = \sum_{i=1}^{m} Q_i$ є вектор $Y(x) = \sum_{i=1}^{m} Y_i(x)$, у якому $Y_i(x)$ є розв'язками рівнянь $L[Y] = Q_i$ ($i = \overline{1,m}$).

Якщо в неоднорідному рівнянні

$$L[Y]=Q(x)$$

вектор $Q(x)$ є лінійною комбінацією векторів $Q_i(x)$ ($i=\overline{1,\nu}$), тобто

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i Q_i(x),$$

де α_i ($i=\overline{1,\nu}$) — сталі, і вектори $Y_i(x)$ ($i=\overline{1,\nu}$) є розв'язками відповідних рівнянь

$$\frac{dY_i}{dx}=P(x)Y_i+Q_i(x),$$

то лінійна з тими самими числами α_i ($i=\overline{1,\nu}$) комбінація векторів $Y_i(x)$ ($i=\overline{1,\nu}$), тобто вектор

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i Y_i(x),$$

є розв'язком рівняння $L[Y]=Q(x)$.

Принцип суперпозиції поширюється і на випадок, коли $m\to\infty$, якщо ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}Y_i(x)$ збіжний і підлягає почленному диференціюванню. Простежується його чинність і у випадку рівняння з комплексною правою частиною: якщо векторне рівняння

$$L[Y]=U+iH,\quad U=\begin{Vmatrix}u_1(x)\\u_2(x)\\\vdots\\u_n(x)\end{Vmatrix},\quad H=\begin{Vmatrix}h_1(x)\\h_2(x)\\\vdots\\h_n(x)\end{Vmatrix},$$

у якому $p_{ij}(x)$, $u_i(x)$, $h_i(x)$ ($i,j=\overline{1,n}$) — дійсні функції, має розв'язок

$$Y=\tilde{U}+i\tilde{H},\quad \tilde{U}=\begin{Vmatrix}\tilde{u}_1(x)\\\tilde{u}_2(x)\\\vdots\\\tilde{u}_n(x)\end{Vmatrix},\quad \tilde{H}=\begin{Vmatrix}\tilde{h}_1(x)\\\tilde{h}_2(x)\\\vdots\\\tilde{h}_n(x)\end{Vmatrix},$$

то дійсна $\widetilde{U}$ і уявна $\widetilde{V}$ частини цього розв'язку самі є розв'язками відповідно рівнянь $L[Y]=U$ і $L[Y]=H$. Справді,

$$L[\widetilde{U}+i\widetilde{H}]=L[\widetilde{U}]+iL[\widetilde{H}]=U+iH,$$

звідки $L[\widetilde{U}]=U$ і $L[\widetilde{H}]=\widetilde{H}$.

Теорію лінійних систем першого порядку без принципових труднощів можна перенести на системи лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку

$$L_m[Y]=Y^{(m)}-P_1(x)Y^{(m-1)}-P_2(x)Y^{(m-2)}-\ldots-P_{m-1}(x)Y'-P_m(x)Y=Q(x), \tag{2.34}$$

де $x\in I=(a,b)$, Y — n-компонентний вектор; $P_i(x)$ — задані в I квадратні матриці n-го порядку; $Q(x)$ — задана n-компонентна функція.

Справді. Заміною $Y=Y_1$, $Y'=Y_2$, $\cdots$, $Y^{(m-1)}=Y_m$ (Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_m — нові змінні n-компонентні вектори) векторне рівняння (2.34) m-го порядку можна звести до системи векторних рівнянь першого порядку

$$Y_1'=Y_2,\ Y_2'=Y_3,\ \ldots,\ Y_{m-1}'=Y_m,$$
$$Y_m'=P_1(x)Y_{m-1}+P_1(x)Y_{m-2}+\ldots+P_m(x)Y_1+Q(x).$$

Далі вже є підстави застосувати до неї всі викладені тут твердження і знову повернутися до старих змінних Y, Y', $\cdots$, $Y^{(m-1)}$.

Легко бачити, що зміст теорії системи n лінійних рівнянь першого порядку загалом (див. ще 1.7) збігається зі змістом теорії одного лінійного рівняння n-го порядку. Тому, зокрема, структура загального розв'язку (2.32) системи n лінійних рівнянь першого порядку в загальному нагадує структуру розв'язку одного лінійного рівняння n-го порядку.

2.3 Матрицянт і фундаментальна функція

Звернімося до рівняння

$$\frac{dY}{dx}=P(x)Y,\ x\in I=(a,b), \tag{2.35}$$

де $P(x)=\left\| p_{ij}(x)\right\|_{n\times n}$ — матриця, елементами якої є комплексні функції $p_{ij}(x)$ ($i,j=\overline{1,n}$) дійсної змінної x, неперервні в деякому довільно заданому (скінченному чи нескінченному) проміжку $I=(a,b)$; подальший виклад залишиться вірним, зрештою, і тоді, коли замість неперервності від $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$ вимагати лише обмеженості і інтегровності за Ріманом в будь-якому скінченному проміжку $\tilde{I} \subset I = (a,b)$. Спробуймо побудувати **нормальний розв'язок** цього **рівняння**, тобто розв'язок, який обертається в одиничну матрицю E при деякому $x = x_0 \in I$.

Побудову здійснюватимемо методом послідовних наближень. Низку послідовних наближень Y_j, $j = 0, 1, 2, \dots$, визначатимемо за рекурентними формулами

$$\frac{dY_j}{dx} = P(x)Y_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

беручи за Y_0 одиничну матрицю E. Отже, покладаючи $Y_j(x_0) = E$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), матимемо

$$Y_j = E + \int_{x_0}^{x} P(s)Y_{j-1}\,ds \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Таким чином,

$$Y_0 = E, \; Y_1 = E + \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds, \quad Y_2 = E + \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s) \int_{x_0}^{s} P(s_1)\,ds_1\,ds,$$

$$Y_3 = E + \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s) \int_{x_0}^{s} P(s_1)\,ds_1\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s) \int_{x_0}^{s} P(s_1) \int_{x_0}^{s_1} P(s_2)\,ds_2\,ds_1\,ds, \; \dots,$$

тобто Y_j, $j = 0, 1, 2, \dots$, є сумою перших $j+1$ членів матричного ряду

$$E + \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s) \int_{x_0}^{s} P(s_1)\,ds_1\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s) \int_{x_0}^{s} P(s_1) \int_{x_0}^{s_1} P(s_2)\,ds_2\,ds_1\,ds + \dots \tag{2.36}$$

Для того, щоб можна було зорієнтуватися щодо збіжності ряду (2.36), доцільно побудувати деякий мажорантний ряд.

Тож побудуймо функції

$$g(x) = \max(|\,p_{11}(x)\,|, \,|\,p_{12}(x)\,|, \,\dots, |\,p_{1n}(x)\,|, \dots, |\,p_{nn}(x)\,|), \; h(x) = \left| \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds \right|.$$

Значення функції $g(x)$ при кожному значенні x дорівнює найбільшому з n^2 модулів значень функцій $p_{ij}(x)$, $i,j=\overline{1,n}$, при тому самому значенні x. З того, що різниця $g(x)-g(x_1)$ при x, достатньо близькому до x_1, завжди збігається з однією з n^2 різниць $\left|p_{ij}(x)\right|-\left|p_{ij}(x_1)\right|$, $i,j=\overline{1,n}$, випливає неперервність функції $g(x)$ $\forall x\in I$. Зрозуміло, що функція $h(x)$ також неперервна в I.

Матричному ряду (2.36) відповідають n^2 скалярних рядів, кожен з яких мажорується рядом

$$1+h(x)+\frac{nh^2(x)}{2!}+\frac{n^2h^3(x)}{3!}+\ldots, \tag{2.37}$$

бо

$$\left|\left\{\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds\right\}_{ij}\right|=\left|\int_{x_0}^{x}p_{ij}(s)\,ds\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds\right|=h(x),$$

$$\left|\left\{\int_{x_0}^{x}P(s)\int_{x_0}^{s}P(s_1)\,ds_1\,ds\right\}_{ij}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}p_{ik}(s)\int_{x_0}^{s}p_{kj}(s_1)\,ds_1\,ds\right|\le$$

$$\le n\left|\int_{x_0}^{x}g(s)\int_{x_0}^{s}g(s_1)\,ds_1\,ds\right|=\frac{nh^2(x)}{2},\ \ldots$$

Ряд (2.37) є збіжним в проміжку I, до того ж він збігається рівномірно у будь-якій замкнутій частині I. А це означає, що і матричний ряд (2.36) збіжний в I, до того ж — абсолютно і рівномірно у будь-якій замкнутій частині I.

Почленне диференціювання ряду (2.36) веде до нового ряду, який відрізняється від первісного множником P. Отже ряд-похідна, як і (2.36), є рівномірно збіжним у будь-якій замкнутій частині I. Почленним ж диференціюванням переконуємося, що сума ряду (2.36) є розв'язком рівняння (2.35). Цей розв'язок обертається на E при $x=x_0$.

Таким чином, для випадку неперервної матриці $P(x)$ вдалося довести як існування нормованого розв'язку рівняння (2.35) (про що вже йшлося), так і можливість його відображення абсолютно і рівномірно збіжним у будь-якій замкнутій частині I рядом (за Пеано)

$$\mathcal{K}(x,x_0) = E + \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} P(s) \int_{x_0}^{s} P(s_1)\,ds_1\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s) \int_{x_0}^{s} P(s_1) \int_{x_0}^{s_1} P(s_2)\,ds_2\,ds_1\,ds + \ldots \tag{2.38}$$

Цей розв'язок також називатимемо **матрицянтом чи фундаментальною матрицею**.

Звернімося до питання побудови розв'язку неоднорідного рівняння

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + Q(x)\,,\;\; x \in I = (a,b)\,. \tag{2.39}$$

Шукатимемо його у вигляді

$$Y = \mathcal{K}(x,x_0;P(x))\,Z(x)\,, \tag{2.40}$$

де $Z(x)$ — залежний від x невідомий стовпець. Підставмо (2.40) в (2.39):

$$P\mathcal{K}(x,x_0;P)Z + \mathcal{K}(x,x_0;P)\frac{dZ}{dx} = P\mathcal{K}(x,x_0;P)Z + Q\,.$$

Звідси

$$\frac{dZ}{dx} = \mathcal{K}^{-1}(x,x_0;P(x))Q(x)\,,$$

або після інтегрування

$$Z = \int_{x_0}^{x} \mathcal{K}^{-1}(\gamma,x_0;P)\;Q(\gamma)\,d\gamma + C\,,$$

де C — довільний сталий вектор. Підставляючи останній вираз в (2.40), отримаємо:

$$Y = \mathcal{K}(x,x_0;P) \int_{x_0}^{x} \mathcal{K}^{-1}(\gamma,x_0;P)\;Q(\gamma)\,d\gamma + \mathcal{K}(x,x_0;P)C\,. \tag{2.41}$$

Надаючи змінній x значення x_0, знайдемо: $Y(x_0) = C$. А отже формула (2.41) набирає вигляду

$$Y = \mathcal{K}(x,x_0;P)Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathcal{K}(x,x_0;P)\mathcal{K}^{-1}(\gamma,x_0;P)\;Q(\gamma)\,d\gamma =$$

$$= \mathcal{K}(x,x_0;P)Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \tilde{\mathcal{K}}(x,\gamma;P)Q(\gamma)\,d\gamma\,,$$

де $\tilde{\mathcal{K}}(x,\gamma;P) = \mathcal{K}(x,x_0;P)\mathcal{K}^{-1}(\gamma,x_0;P)$.

Скалярному однорідному рівнянню n -го порядку

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = 0 \tag{2.42}$$

можна поставити у відповідність еквівалентну нормальну систему. За умови

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{Vmatrix} \tag{2.43}$$

еквівалентна рівнянню (2.42) система набуває вигляду (у формі рівності матриць-стовпців)

$$\begin{Vmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ -p_n(x)\,y_1 - p_{n-1}(x)\,y_2 - \ldots - p_1(x)\,y_n \end{Vmatrix} \tag{2.44}$$

або (у векторній формі)

$$Y' = P(x)Y, \tag{2.45}$$

де

$$P(x) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & -p_{n-2}(x) & \ldots & -p_1(x) \end{Vmatrix}. \tag{2.46}$$

Подібно ж, неоднорідне рівняння

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = q(x) \tag{2.47}$$

такою самою системою підстановок

$$y = y_1,\ \frac{dy}{dx} = y_2, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_n$$

зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2\,,\ \frac{dy_2}{dx} = y_3\,,\ \ldots,\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n\,,$$

$$\frac{dy_n}{dx} = -p_n(x)y_1 - p_{n-1}(x)y_2 - \ldots - p_1(x)y_n + q(x)\,. \tag{2.48}$$

Матричний запис цієї системи має вигляд

$$\frac{d}{dx}\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & -p_{n-2}(x) & \ldots & -p_2(x) & -p_1(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{Vmatrix}. \tag{2.49}$$

Розв'язок $Y(x)$ однорідного рівняння (2.44) (чи (2.45)) з неперервними в деякому проміжку I коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$, який би задовольняв умову $Y(x_0) = Y_0$, можна записати у вигляді

$$Y(x) = V(x)V^{-1}(x_0)Y_0 = \mathcal{K}(x, x_0)Y_0\,, \tag{2.50}$$

де $V(x)$ — фундаментальна матриця;

$$\mathcal{K}(x, x_0) = V(x)V^{-1}(x_0)$$

— імпульсна матриця, матрицянт. За тієї ж умови розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + Q(x)\,, \tag{2.51}$$

є матриця

$$Y(x) = \mathcal{K}(x, x_0)Y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathcal{K}(x, s)\,Q(s)\,dx\,. \tag{2.52}$$

Нехай $K(x, x_0)$ — відповідна рівнянню (2.42) фундаментальна функція. Вона визначає фундаментальну систему (1.15) розв'язків рівняння (2.42) (в даному разі $\gamma = x_0$). Це за позначень (2.43) означає, що відповідну рівнянню (2.45) фундаментальну матрицю можна подати у вигляді

$$V=V(x,x_0)=\begin{Vmatrix} K(x,x_0) & \dot{K}(x,x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}(x,x_0) \\ K'(x,x_0) & \dot{K}'(x,x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K'}(x,x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(n-1)}(x,x_0) & \dot{K}^{(n-1)}(x,x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x,x_0) \end{Vmatrix}. \qquad (2.53)$$

Нехай задано деяку матрицю

$$\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (2.54)$$

визначник якої не дорівнює нулю: $\det\|a_{ij}\|\neq 0$ $(i,j=\overline{1,n})$. З алгебричних доповнень A_{ij} елементів a_{ij} визначника $\det\|a_{ij}\|$ побудуймо нову **матрицю**

$$\|A_{ji}\|=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (2.55)$$

яка зветься **приєднаною (союзною)** до матриці $\|a_{ij}\|$. Підкреслімо, що в j-му рядку приєднаної матриці $\|A_{ji}\|$ розташовано алгебричні доповнення елементів j-го стовпця матриці $\|a_{ij}\|$.

Відомо, що у випадку, коли $\det\|a_{ij}\|\neq 0$, існує єдина **матриця** $\|a_{ij}\|^{-1}$, **обернена** до матриці $\|a_{ij}\|$, і вона визначається через приєднану матрицю $\|A_{ji}\|$ та визначник матриці $\|a_{ij}\|$ за формулою

$$\|a_{ij}\|^{-1}=\frac{\|A_{ji}\|}{\det\|a_{ij}\|}. \qquad (2.56)$$

Виділімо у деякому визначнику

$$\Delta=\det\|a_{ij}\|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nr} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

довільний ряд, наприклад r-й стовпець, і для всіх його елементів α_{ir} ($i=\overline{1,n}$) визначмо їх алгебричні доповнення A_{ir} ($i=\overline{1,n}$). Виявляється, що в рівності

$$\lambda_1 A_{1r} + \lambda_2 A_{2r} + \ldots + \lambda_n A_{nr} = D,$$

де λ_1, λ_2, …, λ_n — довільні числа, права частина є визначником

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \lambda_1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \lambda_2 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \lambda_n & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Інакше кажучи, сума парних добутків алгебричних доповнень елементів якого-небудь обраного ряду визначника Δ на довільні числа λ_i ($i=\overline{1,n}$) дорівнює визначнику D, який випливає з визначника Δ при заміні в ньому елементів згаданого ряду відповідно попарно на числа λ_i ($i=\overline{1,n}$) (**теорема про заміщення**). Легко можна з’ясувати, що якщо за числа λ_i ($i=\overline{1,n}$) правлять елементи якого-небудь паралельного ряду визначника Δ, то обов’язково $D=0$ (**теорема про анулювання**), а якщо елементи самого ж обраного ряду, то $D=\Delta$.

Розумітимемо тепер під (2.54) матрицю з елементами

$$a_{ij} = \overset{(j-1)}{K}{}^{(i-1)}(x_0, x_0).$$

Її визначник

$$\det V(x_0,x_0) = \begin{vmatrix} & & & & (-1)^{n-1} \\ & 0 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \overset{(n-1)}{K'}(x_0,x_0) \\ & & & & \vdots \\ & & (-1)^2 & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-3)}(x_0,x_0) \\ & (-1)^1 & \ddot{K}^{(n-2)}(x_0,x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-2)}(x_0,x_0) \\ (-1)^0 & \dot{K}^{(n-1)}(x_0,x_0) & \ddot{K}^{(n-1)}(x_0,x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0,x_0) \end{vmatrix} \qquad (2.57)$$

дорівнює одиниці (як визначник Вронського фундаментальної системи розв'язків диференціального рівняння (2.42), обчислений при $x = \gamma = x_0$. Тому обернена до (2.54) матриця (2.56) збігається з відповідною приєднаною до (2.54) матрицею (2.55).

Укладімо добуток фундаментальної матриці (2.53) на матрицю (2.55), приєднану до матриці (2.54) з елементами $a_{ij} = \overset{(j-1)}{K}{}^{(i-1)}(x_0, x_0)$. Елемент, що повинен стояти в i-му рядку і j-му стовпці матриці-добутку, дорівнює

$$D_{ij} = K^{(i-1)}(x, x_0) A_{j1}(x_0, x_0) +$$

$$+ \dot{K}^{(i-1)}(x, x_0) A_{j2}(x_0, x_0) + \ldots + \overset{(n-1)}{K}{}^{(i-1)}(x, x_0) A_{jn}(x_0, x_0)\,.$$

Відповідно до теореми "про заміщення" останній вираз можна записати у вигляді

$$D_{ij} = \begin{array}{|cccc|c} K(x_0, x_0) & \dot{K}(x_0, x_0) & \ldots & \overset{(n-1)}{K}(x_0, x_0) & 1 \\ K'(x_0, x_0) & \dot{K}'(x_0, x_0) & \ldots & \overset{(n-1)}{K'}(x_0, x_0) & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(i-1)}(x, x_0) & \dot{K}^{(i-1)}(x, x_0) & \ldots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(i-1)}(x, x_0) & j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-1)}(x_0, x_0) & \dot{K}^{(n-1)}(x_0, x_0) & \ldots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0, x_0) & n \end{array}\,. \qquad (2.58)$$

Тобто, щоби визначити елемент D_{ij} матрицянта, треба у визначнику (2.57) j-ий рядок замінити на i-ий рядок

$$\left\{ K^{(i-1)}(x, x_0),\ \dot{K}^{(i-1)}(x, x_0),\ \ldots,\ \overset{(n-1)}{K}{}^{(i-1)}(x, x_0) \right\}$$

матриці $V(x, x_0)$ (див. (2.53)).

Таким чином, **матрицянтом**, відповідним диференціальному рівнянню (2.42), є матриця $\mathcal{K}(x, x_0) = [D_{ij}]$ з елементами (2.58). Очевидно, що $D_{ij}(x_0, x_0) = \delta_{ij}$, а тому $\mathcal{K}(x_0, x_0) = E$; величина

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$$

зветься **символом Кронекера**; очевидно, що $E = \left\| \delta_{ij} \right\|$.

Зауважмо також, що $D_{ij} = D_{1j}^{(i-1)} = D_j^{(i-1)}$, де

$$D_j = \left|\begin{matrix} K(x_0,x_0) & \dot{K}(x_0,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K}(x_0,x_0) \\ K'(x_0,x_0) & \dot{K}'(x_0,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K'}(x_0,x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x,x_0) & \dot{K}(x,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K}(x,x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(n-1)}(x_0,x_0) & \dot{K}^{(n-1)}(x_0,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0,x_0) \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \end{matrix} \quad (j = \overline{1,n}). \quad (2.59)$$

Отож,

$$\mathcal{K}(x,x_0) = \left\| \begin{matrix} D_1 & D_2 & \dots & D_n \\ D_1' & D_2' & \dots & D_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1^{(n-1)} & D_2^{(n-1)} & \dots & D_n^{(n-1)} \end{matrix} \right\|. \qquad (2.60)$$

Вирази (2.60) та (2.59) формально розкривають **зв'язок між фундаментальною функцією і матрицянтом (фундаментальною матрицею)**.

У разі неперервної матриці $P(x)$ (див. 2.24) розв'язок рівняння (2.45) можна відобразити абсолютно і рівномірно збіжним у будь-якій замкнутій частині заданого проміжку I рядом (2.38); цей ряд також називають матрицянтом. Нехай матриця

$$P(x) = \left\| p_{ij}(x) \right\|_{n\times n}$$

має вигляд (2.46); тоді добуток останнього рядка цієї матриці на останній стовпець матриці $\int\limits_{x_0}^{x} P(s)\,ds$ дорівнює

$$\varepsilon(x,x_0) = -p_n(x)\cdot 0 - p_{n-1}(x)\cdot 0 - \ldots - p_3(x)\cdot 0 -$$

$$-\,p_2(x)\int\limits_{x_0}^{x} ds - p_1(x)\int\limits_{x_0}^{x} (-p_1(s))\,ds = -p_2(x)(x-x_0) + p_1(x)\int\limits_{x_0}^{x} p_1(s)\,ds\,.$$

Легко бачити (див. (2.60)), що

$$D_n = K(x,x_0)\,.$$

Отже, знайти фундаментальну функцію $K(x,x_0)$ означає побудувати елемент a_{1n} матриці (2.38), який розташований в першому рядку і n-му стовпці.

Нехай, наприклад, $P(x)$ є 4×4 -матрицею

$$P(x)=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -p_4(x) & -p_3(x) & -p_2(x) & -p_1(x) \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_4(x) & -p_3(x) & -p_2(x) & -p_1(x) \end{Vmatrix}.$$

Відповідно до (2.38) і (2.60) можна з’ясувати, що в такому разі величину $D_n = K(x,x_0)$ відображає частина ряду

$$K(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\sigma\,dxdx-\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p_1\,dx\,dx\,dx\,dx+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\,dx\,dx\,dx+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\left(-p_3\int_{x_0}^{x}\sigma\,dx+p_2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p_1\,dxdx-p_1\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dxdxdxdx+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\left(-p_4\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\sigma\,dxdx+p_3\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p_1\,dxdxdx-p_2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,dxdx-\right.$$

$$\left.-p_1\int_{x_0}^{x}\left(-p_3\int_{x_0}^{x}\sigma\,dx+p_2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p_1\,dxdx-p_1\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dx\right)dxdxdxdx+\ldots$$

або

$$K(x,x_0)=\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\left[-p_1(x)-p_2(x)\frac{(x-x_0)}{1!}-p_3(x)\frac{(x-x_0)^2}{2!}-\right.$$

$$+p_4(x)\frac{(x-x_0)^3}{3!}+p_1(x)\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds+p_2(x)\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p_1(x)\,dxdx+$$

$$+p_3(x)\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p_1(x)\,dxdxdx-p_1(x)\int_{x_0}^{x}\left(-p_2(x)(x-x_0)+p_1(x)\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right)dx-$$

$$
-p_2(x)\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\left(-p_2(x)(x-x_0)+p_1(x)\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right)dxdx-
$$

$$
-p_1(x)\int_{x_0}^{x}\left(-p_3(x)\frac{(x-x_0)^2}{2}+p_2(x)\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p_1(x)\,dxdx-\right.
$$

$$
\left.\left.-p_1(x)\int_{x_0}^{x}\left(-p_2(x)(x-x_0)+p_1(x)\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right)dx\right)dx\right]dx\,dx\,dx\,dx+\ldots,
$$

де $\sigma=x-x_0$. Зауважмо, що коефіцієнти $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$ в останньому виразі "заховалися" за чотирикратний інтеграл. А це означає, що фундаментальна функція $K(x,x_0)$ значно гладкіша за ці коефіцієнти.

Таким чином, еквівалентність задач (2.47), (2.48), (2.49) дозволяє шукати відповідну рівнянню (2.47) фундаментальну функцію $K(x,x_0)$ як структурний елемент матрицянта такого, що визначає розв'язки (2.50) і (2.52) систем (2.45) і (2.51). При цьому у формулі-ряді, за якою визначається фундаментальна функція, коефіцієнти диференціального рівняння n-го порядку обов'язково підпадають під n-кратне інтегрування.

Нехай ідеться про диференціальне рівняння другого порядку

$$
y''-p(x)y=0\,.
$$

Йому відповідає матриця

$$
P=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{Vmatrix}.
$$

На підставі неї укладімо матриці

$$
\int_{x_0}^{x}P\,dx=\begin{Vmatrix}0 & \sigma\\ \int_{x_0}^{x}p\,dx & 0\end{Vmatrix},\quad \int_{x_0}^{x}P\int_{x_0}^{x}P\,dx\,dx=\begin{Vmatrix}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p\,dx\,dx & 0\\ 0 & \int_{x_0}^{x}p\sigma\,dx\end{Vmatrix},
$$

$$
\int_{x_0}^{x}P\int_{x_0}^{x}P\int_{x_0}^{x}P\,dx\,dx\,dx=\begin{Vmatrix}0 & \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p\sigma\,dx\,dx\\ \int_{x_0}^{x}p\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p\,dx\,dx\,dx & 0\end{Vmatrix},
$$

$$\int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P\, dx\, dx\, dx\, dx = \left\| \begin{matrix} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\, dx\, dx\, dx\, dx & 0 \\ 0 & \int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\sigma\, dx\, dx\, dx \end{matrix} \right\|,$$

$$\int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 0 & \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\sigma\, dx\, dx\, dx\, dx \\ \int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx & 0 \end{matrix} \right\|, \ \ldots,$$

де

$$\sigma = \int_{x_0}^{x} dx = x - x_0 .$$

Беручи до уваги ті елементи побудованих матриць, що належать їх першим рядкам та другим стовпцям, знайдемо фундаментальну функцію (елементи-нулі не виписуються):

$$K(x, x_0) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} dx + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1} p(x_2) \int_{x_0}^{x_2} ds\, dx_2\, dx_1 + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1} p(x_2) \int_{x_0}^{x_2}\int_{x_0}^{x_3} p(x_4) \int_{x_0}^{x_4} ds\, dx_4\, dx_3\, dx_2\, dx_1 +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1} p(x_2) \int_{x_0}^{x_2}\int_{x_0}^{x_3} p(x_4) \int_{x_0}^{x_4}\int_{x_0}^{x_5} p(x_6) \int_{x_0}^{x_6} ds\, dx_6\, dx_5\, dx_4\, dx_3\, dx_2\, dx_1 +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1} p(x_2) \int_{x_0}^{x_2}\int_{x_0}^{x_3} p(x_4) \int_{x_0}^{x_4}\int_{x_0}^{x_5} p(x_6) \int_{x_0}^{x_6}\int_{x_0}^{x_7} p(x_8) \int_{x_0}^{x_8} ds dx_8 dx_7 dx_6 dx_5 dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 + \ldots \tag{2.61}$$

Відомо, що заміною

$$y = \varphi(x) u ,$$

де

$$\varphi = c e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)\, dx}, \ c = \text{const} \neq 0 ,$$

кожне диференціальне рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

зводиться до диференціального рівняння

$$u'' - p(x)u = 0\,.$$

При цьому

$$p = -p_2(x) + \frac{1}{4}p_1^2(x) + \frac{1}{2}p_1'(x)\,.$$

Отже, якщо вдається побудувати фундаментальну функцію (2.61), відповідну похідному диференціальному рівнянню $u'' - p(x)u = 0$, то разом з тим стає можливим віднайти фундаментальну функцію, відповідну первісному рівнянню $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$.

Нехай тепер $p = \text{const}$. Тоді вираз (2.61) набирає вигляду

$$K(x,x_0) = (x - x_0) + p\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(x - x_0)\,dx\,dx + p^2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(x - x_0)\,dx\,dx\,dx\,dx +$$

$$+ p^3\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(x - x_0)\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx +$$

$$+ p^4\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(x - x_0)\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \ldots =$$

$$= (x - x_0) + \frac{p(x - x_0)^3}{3!} + \frac{p^2(x - x_0)^5}{5!} + \frac{p^3(x - x_0)^7}{7!} + \frac{p^4(x - x_0)^9}{9!} + \ldots$$

Вірними є формули

$$\operatorname{sh} s = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \frac{s^7}{7!} + \ldots \;\; (s^2 < \infty),$$

$$\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \frac{s^7}{7!} + - \ldots \;\; (s^2 < \infty).$$

Отже, якщо $p = -\omega^2$, то (див. табл. 2, приклад 5)

$$K(x,x_0) = \frac{1}{\omega}\sin\omega(x - x_0)\,,$$

а якщо $p = \omega^2$, то (див. табл. 2, приклад 6)

$$K(x,x_0) = \frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x - x_0)\,.$$

2.4 Фундаментальна функція в суперпозиційних лінійних і похідних від них нелінійних задачах

Суперпозиційне диференціальне рівняння

$$L_n\Big[\,\ldots\Big[L_i\Big[\ldots\Big[L_2\Big[L_1[\,y\,]\Big]\Big]\Big]\Big]\Big]=0 \qquad (2.62)$$

є різновидом лінійних диференціальних рівнянь порядку $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$, де $L_i[\cdot]$ — лінійний диференціальний оператор порядку m_i. Зокрема, рівняння

$$L_2\Big[L_1[y]\Big]=0\,,$$

в якому

$$L_1=a(x)\frac{d}{dx}(\cdot)+b(x)(\cdot)\,,\; L_2=\alpha(x)\frac{d}{dx}(\cdot)+\beta(x)(\cdot)\,,$$

належить до рівнянь другого порядку:

$$L_2\Big[L_1[y]\Big]\equiv\alpha a y''+\big(\alpha(a'+b)+\beta a\big)y'+(\alpha b'+\beta b)y\equiv p_0 y''+p_1 y'+p_2 y=0\,,$$

де

$$p_0=p_0(x)=\alpha(x)\,a(x)\,,\quad p_1=p_1(x)=\alpha(x)\,(a'(x)+b(x))+\beta(x)\,a(x)\,,$$

$$p_2=p_2(x)=\alpha(x)\,b'(x)+\beta(x)\,b(x)\,.$$

Нехай рівняння

$$L_n\Big[\,\ldots\Big[L_i\Big[\ldots\Big[L_2\Big[L_1[\,y\,]\Big]\Big]\Big]\Big]\Big]=q(x) \qquad (2.63)$$

укладене за допомогою n операторів першого порядку

$$L_i[y_i]\equiv y_i'+\beta_i(x)\,y_i \quad (i=\overline{1,n})\,.$$

Очевидно, що розв’язком рівняння

$$L_n[y_n]\equiv y_n'+\beta_n(x)\,y_n=q_n(x)=q(x)$$

є функція

$$y_n=c_n K_n(x,\gamma_n)+\int_{\gamma_n}^{x}K_n(x,t_n)\,q(t_n)\,dt_n=q_{n-1}(x,\gamma_n)\,,$$

де

$$K_n(x,\gamma_n) = \exp - \int\limits_{\gamma_n}^{x} \beta_n(s)\, ds$$

— відповідна фундаментальна функція, що править за вільний член q_{n-1} рівняння

$$L_{n-1}[y_{n-1}] \equiv y'_{n-1} + \beta_{n-1}(x)\, y_{n-1} = q_{n-1}(x,\gamma_n)\,.$$

Тому можна писати:

$$y_{n-1} = c_{n-1}K_{n-1}(x,\gamma_{n-1}) +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_{n-1}}^{x} K_{n-1}(x,t_{n-1}) \left(c_n K_n(t_{n-1},\gamma_n) + \int\limits_{\gamma_n}^{t_{n-1}} K_n(t_{n-1},t_n)\, q(t_n)\, dt_n \right) dt_{n-1} =$$

$$= q_{n-2}(x,\gamma_n,\gamma_{n-1})\,.$$

В свою чергу $y_{n-1} = q_{n-2}(x,\gamma_n,\gamma_{n-1})$ править за вільний член рівняння

$$L_{n-2}[y_{n-2}] \equiv y'_{n-2} + \beta_{n-2}(x)\, y_{n-2} = q_{n-2}(x,\gamma_n,\gamma_{n-1})\,.$$

Ці міркування можна продовжувати поти, поки не випливе функція

$$y_1 = y = c_1 K_1(x,\gamma_1) + c_2 \int\limits_{\gamma_1}^{x} K_1(x,t_1) K_2(t_1,\gamma_2)\, dt_1 +$$

$$+ c_3 \int\limits_{\gamma_1}^{x}\int\limits_{\gamma_2}^{t_1} K_1(x,t_1)\, K_2(t_1,t_2)\, K_3(t_2,\gamma_3)\, dt_2\, dt_1 + \ldots +$$

$$+ c_n \int\limits_{\gamma_1}^{x}\int\limits_{\gamma_2}^{t_1} \ldots \int\limits_{\gamma_{n-1}}^{t_{n-2}} K_1(x,t_1)\, K_2(t_1,t_2)\, K_3(t_2,t_3) \ldots K_n(t_{n-1},\gamma_n)\, dt_{n-1} \cdots dt_2\, dt_1 +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_1}^{x}\int\limits_{\gamma_2}^{t_1} \ldots \int\limits_{\gamma_{n-1}}^{t_{n-2}}\int\limits_{\gamma_n}^{t_{n-1}} K_1(x,t_1)\, K_2(t_1,t_2) \ldots K_n(t_{n-1},t_n)\, q(t_n)\, dt_n\, dt_{n-1} \ldots dt_1\,,$$

що і є шуканим розв'язком рівняння (2.63).

За таким самим алгоритмом можна побудувати розв'язки рівнянь (2.62) і (2.63) для довільного випадку, оперуючи лише фундаментальними функціями, відповідними операторам, що складають ці рівняння.

Прикладом **нелінійного рівняння, в якому простежуються ознаки лінійності**, є таке:

$$\prod_{i=1}^{n}(L_i[y]-q_i(x))=0\,. \tag{2.64}$$

Очевидно, що його розв’язок можна подати у вигляді

$$\prod_{i=1}^{n}\left(y-\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}\overset{(j-1)}{K_i}(x,\gamma_i)-\int_{\gamma_i}^{x}K_i(x,t)\frac{q_i(t)}{p_{0i}(t)}dt\right)=0\,. \tag{2.65}$$

Рівність (2.65) можна тлумачити як розклад на множники деякого алгебричного (характеристичного) рівняння

$$y^n+f_1(x,\gamma_1,\ldots,\gamma_n)y^{n-1}+\ldots+f_{n-1}(x,\gamma_1,\ldots,\gamma_n)y+f_n(x,\gamma_1,\ldots,\gamma_n)=0\,.$$

Теорію рівнянь типу (2.62), (2.63) інколи вигідно застосовувати для апроксимації деяких моделей лінійних динамічних систем. Рівняння (2.64), натомість, можуть слугувати апроксимаційними відображеннями моделей як лінійних, так і нелінійних динамічних систем. Звісно, тут не йдеться про приховану лінійність. Наприклад, на поверхневий погляд система неявних диференціальних рівнянь

$$\sin\frac{y_1'}{y_2}=0\,,\ \cos\frac{y_2''}{y_1}=0$$

є нелінійною. Але після розв’язування рівнянь відносно старших похідних стає очевидною її лінійність; система перетворюється на зліченну множину лінійних рівнянь

$$y_1'+n\pi y_2=0\,,\ y_2''+\left(\pm\frac{\pi}{2}+k\pi\right)y_1=0\ \ (n,k=\overline{-\infty,\infty}\,).$$

2.5 Лініаризація

Звернімося до крайової задачі

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+g(y)=q(x)\,,$$

$$x\in(0,1)\,,\ y(0)=y(1)=0\,, \tag{2.66}$$

де $q=q(x)\in C^0[0,1]$, а функція $g=g(s)$ означена для $s\in R$ і задовольняє **умову Ліпшиця**: існує стала $c\geq 0$ така, що

$$|\,g(s)-g(t)\,|\leq c\,|\,s-t\,|\ \forall s,t\in R\,. \tag{2.67}$$

Умова Ліпшиця гарантує неперервність функції φ. Проте з обмеженості різницевого відношення

$$\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|} \le c \ \ (x, y \in \Omega,\ x \ne y)$$

аніяк не випливає існування похідної від функції φ. Множину функцій, що задовольняють умови (одночасно неперервності і Ліпшиця)

$$\varphi \in \mathrm{C}^0(\Omega),\ |\varphi(x)-\varphi(y)| \le c\,|x-y|\ \forall x, y \in \mathrm{R}$$

позначають через $\varphi \in \mathrm{C}^{0,1}(\Omega)$. Власне від цих функцій майже для всіх x існують похідні $d\varphi/dx$, причому $|d\varphi/dx| \le c$ для цих x.

Візьмімо деяку довільну функцію $u = u(x) \in \mathrm{C}^0([0,1])$ і знайдімо розв'язок $y = y(x) \in \mathrm{C}^2([0,1])$ лінійної крайової задачі

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + g(u(x)) = q(x),\ x \in (0,1),\ y(0) = y(1) = 0. \qquad (2.68)$$

Тут диференціальне рівняння має простий вигляд

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = q(x) - g(u(x)) = Q(x),\ x \in (0,1),$$

і крайова задача з умовами $y(0) = y(1) = 0$ легко розв'язується для довільної функції $Q(x) \in \mathrm{C}^0([0,1])$.

Справді, в задачі (2.68) фігурує диференціальний оператор другого порядку

$$L_2[y] = p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y$$

такий, якому відповідає фундаментальна функція $K(x, x_0) = x - x_0$ (див. табл. 2; тут $p_0(x) \equiv -1$, $p_1(x) = p_2(x) \equiv 0$). Тож, відповідно до (1.22)

$$y = Y_1(x, x_0)y_0 + Y_2(x, x_0)y_0' + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\frac{Q(s)}{p_0(s)}\,ds =$$

$$= y_0 + (x - x_0)y_0' - \int_{x_0}^{x} (x - s)Q(s)\,ds,$$

де (див. (1.24))

$$Y_1 = \frac{p_1(x_0)}{p_0(x_0)}K(x, x_0) - \frac{\partial K(x, x_0)}{\partial x_0} = -\frac{\partial(x - x_0)}{\partial x_0} = 1,\ Y_2 = K(x, x_0) = x - x_0.$$

Беручи до уваги початкову точку $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ (повинна ж задовольнятися умова $y(0)=0$), розв’язок можна записати у вигляді

$$y = xy_0' - \int_0^x (x-s)\,Q(s)\,ds\,.$$

Але цей розв’язок повинен задовольняти ще й умову $y(1)=0$:

$$y(1) = y_0' - \int_0^1 (1-s)\,Q(s)\,ds = 0\,.$$

Звідси

$$y_0' = \int_0^1 (1-s)\,Q(s)\,ds\,.$$

Таким чином, розв’язком крайової задачі (2.68) є функція

$$y = x\int_0^1 (1-s)\,Q(s)\,ds - \int_0^x (x-s)\,Q(s)\,ds = \int_0^1 G(x,s)\,Q(s)\,ds\,,$$

тобто

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s)\,(q(s) - g(u(s)))\,ds\,,$$

де

$$G(x,s) = \begin{cases} (1-x)s, & 0 \le s \le x, \\ (1-s)x, & x < s \le 1. \end{cases}$$

Формула, що окреслює розв’язок щойно розглянутої крайової задачі, визначає оператор $\mathscr{B}$ в просторі $\mathrm{C}^0([0,1])$:

$$(\mathscr{B}u)(x) = \int_0^1 G(x,s)\,(q(s) - g(u(s)))\,ds\,,\ u \in \mathrm{C}^0([0,1])\,. \tag{2.69}$$

Зрозуміло, $\mathscr{B}u \in \mathrm{C}^0([0,1])$ при $u \in \mathrm{C}^0([0,1])$; крім цього, оскільки $\mathscr{B}u$ — розв’язок задачі (2.68), то $\mathscr{B}u \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ для кожної функції $u \in \mathrm{C}^0([0,1])$. Звідси випливає, що віднайти розв’язок крайової задачі (2.66) — те саме, що віднайти нерухому точку оператора $\mathscr{B}$ в просторі $\mathrm{C}^0([0,1])$, тобто функцію $y \in \mathrm{C}^0([0,1])$ таку, що $\mathscr{B}y = y$, чи конкретніше

$$\int_0^1 G(x,s)\,(q(s) - g(y(s)))\,ds = y(x)\,,\ x \in [0,1]\,.$$

При цьому обов’язково $u \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, оскільки $\mathscr{B}y \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$.

Виникає необхідність окреслити в загальних рисах зміст так званого **принципу нерухомої точки**, під яким пересічно розуміють теорему, що розкриває достатні умови, за яких оператор має нерухому точку. Найдавнішим і найпростішим з таких принципів є **принцип стисних відображень Банаха**: нехай $\mathscr{B}$ — оператор, заданий в банаховому просторі X зі значеннями в X; припустимо, що $\mathscr{B}$ — так званий стисний оператор, тобто існує стала c, $0 \le c \le 1$, така що для елементів $y, u \in X$ справджується співвідношення

$$\| \mathscr{B}y - \mathscr{B}u \|_X \le c \| y - u \|_X ;$$

в такому разі існує нерухома точка оператора $\mathscr{B}$. Принцип стисних відображень Банаха привабливий тим, що метод його доведення розкриває водночас алгоритм знаходження нерухомої точки, а також дає можливість оцінити похибку апроксимувальної послідовності. В його рамках нерухома точка визначається як границя послідовності $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($n \in \mathrm{N}$) елементів з X, званої послідовністю наближених розв'язків. Ця послідовність будується ітераційно: спочатку вибирається (загалом довільно) елемент $y_0 \in X$ — так зване нульове наближення; будується елемент $y_1 = \mathscr{B}y_0$ (перше наближення), потім елемент $y_2 = \mathscr{B}y_1$ (друге наближення) і так далі. Послідовність

$$\{y_n = \mathscr{B}y_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \ n \in \mathrm{N} ,$$

збігається в просторі X до нерухомої точки $\widehat{y}$ оператора $\mathscr{B}$ і

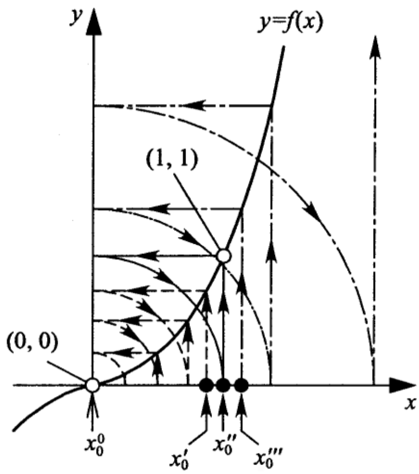
$$\| y_n - \widehat{y} \|_X \le \frac{c^{n-1}}{1-c} \| y_1 - y_0 \|_X , \ n \in \mathrm{N} . \qquad (2.70)$$

Звернімося для прикладу до алгебричного тлумачення нерухомої точки.

Нехай f — відображення довільної множини A в себе. Точка $x \in A$ є нерухомою точкою відображення f, якщо $f(x) = x$. Тож, якщо f — звичайна числова функція, то знайти нерухому точку означає власне розв'язати рівняння $f(x) = x$. Навпаки, розв'язок кожного рівняння $g(x) = 0$ — це нерухома точка відображення f, якщо $f(x) = g(x) + x$.

Таким чином, розв'язування кожного рівняння вигляду $g(x) = 0$ зводиться до пошуку нерухомої точки деякого відображення. Тому дуже важливо знати чи існує нерухома точка та, звісно, вміти її знаходити. Таке знання-вміння можна отримати, застосовуючи принцип стисних відображень.

Наближений пошук нерухомої точки можна здійснити ітераційно — через побудову послідовності x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, … На рис. 1 наведено приклад наближеного ітераційного знаходження нерухомої точки відображення $f(x) \equiv x^{p/q}$ (p, q — непарні, $p/q > 1$) у чотирьох випадках — коли $x_0 = x_0^0 = 0$; $x_0' < 1$; $x_0'' = 1$; $x_0''' > 1$. Якщо взяти $x_0 = x_0^0 = 0$ чи $x_0 = x_0'' = 1$, то жодного руху (жодної ітерації) не вийде; в цьому сенсі можна вважати, що точки нерухомі. У разі ж $x_0 = x_0' < 1$ відбудеться ітераційний рух у початок координат, а у разі $x_0 = x_0''' > 1$ — рух у нескінченність. Виглядає так, що точка $(x, y) = (0, 0)$ є притягальною (**атрактором**, від англ. attractor — „те, що притягує"), а точка $(x, y) = (1, 1)$ — відштовхувальною (**репелером**, від англ. repeler — „те, що відштовхує").



1 **Приклад знаходження нерухомої точки.**

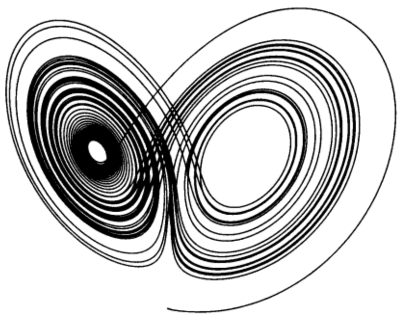
Деякі динамічні системи можуть мати кілька стаціонарних станів. І якщо стаціонарний стан, в якому система перебуває в дану мить, під впливом зовнішніх чинників стає нестійким, то система майже миттєво знайде новий стаціонарний стан. За певних обставин зміна станів може набути ознак періодичного процесу і тоді виникнуть незгасні коливання. Такого типу незгасні коливання в загальному називають автоколиваннями.

Шлях, траєкторію у напрямі до стану стаціонарної рівноваги також називають **атрактором**. За певних обставин кожна така траєкторія стає нестійкою і тоді через різноманітні флуктуації система непередбачуваним чином перескакуватиме з траєкторії на траєкторію, прямуючи до невідомо якого стану стаціонарної рівноваги чи одразу до всіх. В такому разі говорять про **„дивний атрактор”**. Відкриті системи, які описуються трьома і більше нелінійними диференціальними рівняннями, можуть мати властивість функціювати якраз в режимі „дивного атрактора”. Посилення нестійкості веде до повної хаотичності поведінки системи; система цілковито „забуває” свій первісний стан — всупереч лапласівському детермінізму.

Приклад прояву цілковитої нестійкості — **дивний атрактор Лоренця**. Він відповідає автономній динамічній системі третього порядку

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)\,,\ \frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz\,,\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z\,,$$

(σ, ρ, β — сталі) траєкторія якої цілком хаотична і повністю заповнює деякий простір, рис. 2; два навіть дуже близькі початкові стани породжують надзвичайно різні рухи, ніби вони спровоковані випадковими незалежними одна від одної причинами. Зазначмо, нелінійність тут зумовлена лише примітивними членами xz та xy в другому та третьому рівняннях.



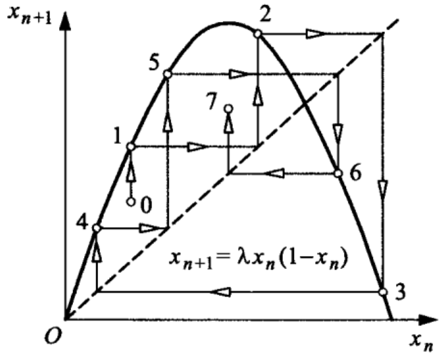
2 **Зображення траєкторії руху системи Лоренця.**

Варто наголосити, що якщо фазовий простір є двовимірним, то траєкторії автономних систем не можуть бути хаотичними (оскільки не можуть перетинатися лінії „потоків”).

Елементарною так званою **динамічною моделлю зміни популяції** є рівняння

$$x_{n+1} = f(x_n) \equiv \lambda x_n(1 - x_n)$$

(різницеве першого порядку), в якому лінійний член λx_n покликаний відобразити природну тенденцію народжуваності, а нелінійний член $-\lambda x_n^2$ — пригнічувальний вплив обмеженості енергетичних чи харчових ресурсів.



3 **Графічне розв'язування різницевого рівняння.**

При $\lambda > 1$ існують дві точки рівноваги (точки перетину параболи і прямої, рис. 3); вони, звісно, задовольняють рівність $x = \lambda x(1-x)$. При $1 < \lambda < 3$ з двох точок рівноваги $x = 0$, $x = (\lambda - 1)/\lambda$ перша (початок координат) стійка, а друга нестійка. Якщо в точці рівноваги $|f'| > 1$, то рівновага є нестійкою. Наприклад, при $\lambda = 3$ обидві точки рівноваги стають нестійкими; зате стійкою залишається двоперіодна „орбіта" ітерацій процесу розв'язування різницевого рівняння (періодом в даному разі вважається ціле число p, при якому x_{n+p} збігається з x_n). При подальшому збільшенні λ орбіта стає нестійкою і виникає цикл з періодом 4, який згодом біфуркаційно змінюється на цикл з періодом 8... Процес подвоєння періоду триватиме доти, поки λ не досягне значення $\lambda_\infty = 3{,}56994...$ Власне, рис. 3 ілюструє вже хаотичну орбіту 01234567... ітерацій. Однією з найцікавіших властивостей наведеного різницевого рівняння є те, що послідовність $\{\lambda_m\}$ значень параметра λ, при яких відбувається подвоєння періоду траєкторії, задовольняє співвідношення

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_{m+1} - \lambda_m}{\lambda_m - \lambda_{m-1}} = \frac{1}{\delta}$$

($\delta = 4{,}6692...$ — **число Фейгенбаума**). Ще однією моделлю, що виявляє ознаки хаотичної поведінки, є **система Енона**

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + y_n, \; y_{n+1} = \beta x_n .$$

При $\beta = 0$ вона зводиться до попередньої одновимірної моделі.

Повертаючись до крайової задачі, наголосімо на вірності важливого тут твердження: якщо функція g задовольняє умову (2.67) при $c < 1$, то оператор $\mathscr{B}$, означуваний виразом (2.69), є стисним в банаховому просторі $C^0([0,1])$. Доведення можна побудувати на оцінці норми різниці

$$\mathcal{B}v - \mathcal{B}w$$

в просторі $C^0([0,1])$. Для $v, w \in C^0([0,1])$

$$(\mathcal{B}v)(x) - (\mathcal{B}w)(x) = \int_0^1 G(x,s)\,(g(w(s)) - g(v(s)))\,ds\,.$$

Оскільки $|G(x,s)| \le 1$ і g задовольняє умову (2.67), то для довільного $x \in [0,1]$

$$|\mathcal{B}v - \mathcal{B}w| \le c\int_0^1 |w(s) - v(s)|\,ds \le c\,\| w - v \|_{C^0([0,1])}$$

$$(\| u \|_{C^0([0,1])} = \max |u(x)|).$$

Звідси і на підставі викладеного вище про нерухому точку випливає вірність твердження: нехай функція $g(s)$ задовольняє умову (2.67) при $c < 1$; тоді крайова задача (2.66) має єдиний розв'язок за довільної правої частини $q(x) \in C^0([0,1])$.

Візьмімо довільну функцію $y_0(x)$ і, вдаючись до оператора (2.69), знайдімо функцію $y_1 = \mathcal{B}y_0$. Це означатиме, що знайдено розв'язок лінійної крайової задачі

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2y_1}{dx^2} = q(x) - g(y_0(x))\,,\ x \in (0,1)\,,\ y_1(0) = y_1(1) = 0\,.$$

Далі подібно знайдемо розв'язки y_2, …, y_{n+1}, … відповідно лінійних крайових задач

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2y_2}{dx^2} = q(x) - g(y_1(x))\,,\ x \in (0,1)\,,\ y_2(0) = y_2(1) = 0\,,\ \ldots,$$

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2y_{n+1}}{dx^2} = q(x) - g(y_n(x))\,,\ x \in (0,1)\,,\ y_{n+1}(0) = y_{n+1}(1) = 0\,,\ \ldots$$

Розв'язок нелінійної крайової задачі, існування якого гарантує наведене раніше твердження, випливає як границя послідовності

$$\{y_n = \mathcal{B}y_{n-1}\}_{n=1}^{\infty},\ n \in \mathrm{N}\,.$$

Оцінку ступеня невідповідності кожного з наближень точному розв'язкові можна здійснювати за формулою (2.70).

Цілком подібно можна розв'язувати нелінійну крайову задачу

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + g(x; y, y') = q(x)\ ,\ \ x \in (0,1)\,,\ \ q \in \mathrm{C}^0[0,1]\,,\ \ y(0) = y(1) = 0\,,$$

де неперервна функція $g(x,t,\tau)$ задовольняє умову Ліпшиця: існує число c, $0 \le c < 1$, таке, що

$$|\,g(x,t,\tau) - g(x,s,\sigma)\,| \le c(|\,t-s\,| + |\,\tau-\sigma\,|)\ \ \forall x \in [0,1]\ \text{ і }\ \forall t,\tau,s,\sigma \in \mathrm{R}\,.$$

Оператор

$$(\mathscr{B}u)(x) = \int_0^1 G(x,s)\,(q(s) - g(s; u(s)), u'(s))\,ds\,,$$

в даному разі розглядається в банаховому просторі $\mathrm{C}^1([0,1])$.

Розгляньмо тепер ще такий виклад **лініаризації**.

Нехай йдеться про нелінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2.71}$$

з крайовими умовами

$$y(0) = 0\,,\ \ y(a) = A\,. \tag{2.72}$$

Запишемо (2.71) у вигляді

$$\varphi(x, y, y', y'') = y'' - f(x, y, y') = 0\,. \tag{2.73}$$

Введемо (n)-у та ($n+1$)-у ітерації y_n та y_{n+1} змінної y такі, які б задовольняли умови (2.73) і (2.72):

$$\varphi_n = \varphi(x, y_n, y'_n, y''_n) = y''_n - f_n = y''_n - f(x, y_n, y'_n) = 0\,, \tag{2.74}$$

$$y_n(0) = 0\,,\ \ y_n(a) = A\,;$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi(x, y_{n+1}, y'_{n+1}, y''_{n+1}) = y''_{n+1} - f_{n+1} = y''_{n+1} - f(x, y_{n+1}, y'_{n+1}) = 0\,,$$

$$y_{n+1}(0) = 0\,,\ \ y_{n+1}(a) = A\,.$$

Одночасно можна записати:

$$\varphi(x, y, y', y'') = \varphi_n + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n}(y - y_n) + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y'_n}(y' - y'_n) + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y''_n}(y'' - y''_n) + \ldots$$

Отже для $n+1$-ої ітерації на підставі останнього виразу стає доречним записати формулу лінійного наближення

$$-\frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y_{n+1}-y_n)-\frac{\partial f_n}{\partial y'_n}(y'_{n+1}-y'_n)+(y''_{n+1}-y''_n)=0\,.$$

Підставляючи в неї y''_n з (2.74), матимемо задачу:

$$y''_{n+1}-\frac{\partial f(x,y_n,y'_n)}{\partial y'_n}y'_{n+1}-\frac{\partial f(x,y_n,y'_n)}{\partial y_n}y_{n+1}=$$

$$=f(x,y_n,y'_n)-\frac{\partial f(x,y_n,y'_n)}{\partial y_n}y_n-\frac{\partial f(x,y_n,y'_n)}{\partial y'_n}y'_n\,,$$

$$y_{n+1}(0)=0\,,\ y_{n+1}(a)=A\,.$$

Вона є лінійною диференціальною крайовою задачею відносно змінної y_{n+1}.

Замість крайових умов (2.72) можна розглядати і суто нелінійні крайові умови

$$\Gamma_1(y(0),y'(0))=0\,,\ \Gamma_2(y(a),y'(a))=0\,,$$

передбачаючи можливість їх лініаризації. Наприклад, лініаризована умова на кінці $x=0$ має вигляд

$$\Gamma_1(y_n(0),y'_n(0))++\frac{\partial\Gamma_1(y_n(0),y'_n(0))}{\partial y_n}(y_{n+1}(0)-y_n(0))+$$

$$+\frac{\partial\Gamma_1(y_n(0),y'_n(0))}{\partial y'_n}(y'_{n+1}(0)-y'_n(0))=0\,.$$

Можна довести існування і єдиність розв'язку та квадратичну збіжність послідовності наближень.

Звернімося для прикладу до **рівняння Ріккаті**

$$\frac{dy}{dx}=Q(x)+p_1(x)y+p_2(x)y^2\,.$$

В даному разі

$$f=f(x,y)=Q(x)+p_1(x)y+p_2(x)y^2\,,$$

$$y'_{n+1}-\frac{\partial f(x,y_n)}{\partial y_n}y_{n+1}=f(x,y_n)-\frac{\partial f(x,y_n)}{\partial y_n}y_n\,,$$

а отже

$$y'_{n+1}-(p_1(x)+2p_2(x)y_n(x))y_{n+1}=Q(x)-p_2(x)y_n^2(x)\,. \qquad (2.75)$$

Розв'язок лінійного рівняння першого порядку

$$L[y] \equiv p_0(x)y' + p_1(x)y = q(x),$$

що при деякому конкретному $x = x_0 \in (a, b)$ задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0,$$

можна подати у вигляді

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\int\limits_{t}^{x} \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds} \frac{q(t)}{p_0(t)} dt + y_0 \, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds}.$$

Таким чином, рівнянню (2.75) відповідає функція-розв'язок

$$y_{n+1} = \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{t}^{x} (p_1(s)+2p_2(s)y_n(s))ds} (Q(t) - p_2(t)y_n^2(t))\,dt +$$

$$+ y_0 \, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} (p_1(s)+2p_2(s)y_n(s))ds} \qquad (y_{n-1}(x_0) = y_n(x_0) = y_0).$$

Звернімося ще до поняття **квазілініаризації** (за Р. Беллманом).

Нехай $f(u)$ — строго опукла функція, тобто функція якій для кожного u властива нерівність $f''(u) > 0$. Тоді її можна подати у так званому квазілінійному вигляді

$$f(u) = \max_{v}(f(v) + (u - v) f'(v)),$$

де єдиний максимум досягається при $v = u$ (під знаком максимуму перебуває рівняння дотичної прямої лінії). Подібно, у випадку строго увігнутої ($f''(u) < 0$) функції

$$f(u) = \min_{v}(f(v) + (u - v) f'(v)).$$

Загальніше, якщо $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — строго опукла функція для всіх x, то

$$f(x) = \max_{y}(f(y) + (x - y)\varphi(y)),$$

де $\varphi(y) = \left(\frac{\partial f(y)}{\partial y_1}, \frac{\partial f(y)}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f(y)}{\partial y_n} \right)$ — градієнт $f(y)$; єдиний максимум набувається при $y = x$. Терміни „квазілініаризація" та „квазілінійність" зумовлені тим, що якби не операції $\max\limits_{(\cdot)}(\cdot)$ чи $\min\limits_{(\cdot)}(\cdot)$, то наведені рівняння були б суто лінійними.

Розгляньмо диференціальне рівняння Ріккаті

$$\frac{du}{dt} = u^2 + q(t)\,,\ u(0) = c\,.$$

Оскільки $u^2 = \max_v(2uv - v^2)$, то диференціальне рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{du}{dt} = \max_v(2uv - v^2 + q(t))\,,\ u(0) = c\,.$$

Таким чином, для будь-якої функції $v(t)$ вірною є диференціальна нерівність

$$\frac{du}{dt} \ge 2uv - v^2 + q(t)\,,\ u(0) = c\,.$$

Можна стверджувати, що $u \ge U$ якщо U є розв’язком диференціального рівняння

$$\frac{dU}{dt} = 2Uv - v^2 + q(t)\,,\ U(0) = c\,.$$

А оскільки

$$U = ce^{2\int_0^t vds} + \int_0^t (q(\tau) - v^2)e^{2\int_\tau^t vds}d\tau\,,$$

то розв’язок рівняння Ріккаті можна записати у вигляді

$$u = \max_v\left(ce^{2\int_0^t vds} + \int_0^t (q(\tau) - v^2)e^{2\int_\tau^t vds}d\tau\right),$$

де максимум досягається на функціях $v = u$.

2.6 Про загальний зміст задач та їх розв’язків

Диференціальне рівняння є елементом моделі певної задачі. Тому на процес його розв’язування так чи інакше накладається зміст цієї задачі.

Зокрема, лінійне однорідне диференціальне рівняння (1.3)

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0\,.$$

має як тривіальний розв’язок $y(x) \equiv 0$, та і безліч нетривіальних (якщо, звісно, не окреслені додаткові умови — початкові чи крайові).

Як зазначалося в 1.5, лише тривіальний розв'язок $y(x)\equiv 0$ є природним розв'язком однорідного рівняння $L[y]=0$. Натомість кожен нетривіальний розв'язок, повинен бути зумовлений яким-небудь збуренням, яке в рівнянні $L[y]=0$ не простежується. Виявилося, що нетривіальний розв'язок — це власне реакція лінійної системи на імпульсне збурення $p(x)\delta(x+\infty)$, зосереджене в точці $x\equiv -\infty$. Інакше кажучи, пошук нетривіального розв'язку однорідного рівняння $L[y]=0$ за змістом є процесом розв'язування неоднорідного рівняння $L[y]=p(x)\delta_{\alpha\to-\infty}(x-\alpha)$. Отже поняттям вільного та вимушеного рухів системи притаманна деяка змістовна двоїстість.

Тим не менш, вільні рухи завжди вирізняють в окремий клас, і розуміють під ними поведінку системи з миті, коли вплив збурювального (збуджувального) чинника зник. Звісно, самі по собі вільні рухи в природі й техніці практично не зустрічаються. Проте, вони досить вичерпно характеризують динамічну особливість системи, що напевне позначається на вимушених рухах. Через це вивчення вільних рухів — одна з найважливіших складових динамічного аналізу-синтезу систем.

Тож рівняння (1.3) є сенс вважати аналітичним описом вільної поведінки деякої динамічної системи. Але в такому разі коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_n(x)$ — це суто внутрішні параметри системи, залежність яких від x може бути зумовлена вичерпуванням якихось внутрішніх ресурсів в системі. Але їх змінність (під x часто розуміють час) може бути зумовлена й прихованою чи вмотивовано наведеною взаємодією системи з довкіллям. В такому разі про вільний рух вже йтися не може. Рухи системи, зумовлені зміною параметрів p_0, p_1, …, p_n, називають параметрично збуджуваними (збурюваними) або просто параметричними рухами.

Якщо однорідне рівняння (1.3) визнано таким, що описує вільний рух, то відповідне йому неоднорідне рівняння $L[y]=q(x)$ (1.1) доведеться визнати таким, що описує вимушений рух, збуджуваний (збурюваний) якимось зовнішнім чинником $q(x)$. Але, з іншого боку, величина q може належати суто до параметрів системи, а в такому разі до рівняння $L[y]=q(x)$ слід відноситися як до такого, що описує або вільний, або параметричний рух.

У всіх розглянутих випадках величина $y(x)$ править за реакцію системи на зовнішні чи/та внутрішні збуджувальні чинники (окремі впливи сукупно складаються, інтегруються у величину $y(x)$). Отже прямою в даному разі є задача знаходження $y(x)$ за відомими $p_1(x)$, …, $p_n(x)$,

$q(x)$, а оберненою — задача знаходження величин (1.68) чи (1.73) (а також $q(x)$), відповідних якомусь бажаному перебігу процесу $y = y(x)$. Але $y(x)$ сама може визначати вплив довкілля на систему. Тоді є сенс говорити, що $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_n(x)$ є реакціями на дію $y(x)$; пряма й обернена задачі тут міняються місцями.

Нехай диференціальне рівняння *n*-го порядку

$$F(y^{(i)}, w_s^{(j_s)}, x) = u\,, \quad i = \overline{0, n}\,, \quad s = \overline{1, S}\,, \quad j_s = \overline{0, J_s}\,, \tag{2.76}$$

описує незмінну частину деякого об’єкта керування (y — регульована величина, w_s — збурювальні чинники, x — час, u — керування). Окремим випадком такого рівняння було б лінійне рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} p_{n-i}(x)\, y^{(i)} = u\,, \tag{2.77}$$

в якому u (замість $q(x)$) править за керування. Можна вимагати, щоб регульована величина y була пов’язана з деяким задавальним впливом $\psi = \psi(x)$ відповідно до диференціального рівняння [5]

$$\Phi(y^{(i)}, \psi^{(r)}, w_s^{(j_s)}, C_i, x) = 0\,, \quad i = \overline{0, n}\,, \quad r = \overline{1, R}\,, \tag{2.78}$$

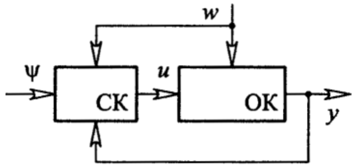
де C_i — налаштовувальні параметри. Останнє рівняння можна вибирати, керуючись різними міркуваннями. Воно визначає мету синтезу системи керування об’єктом (2.76) (чи (2.77)). Зокрема, його можна взяти таким, щоб надати системі бажаних динамічних й статичних властивостей, або щоб закон керування не містив в собі інформацію про збурення. Дуже часто доречно формувати вираз (2.78) власне у вигляді лінійного диференціального рівняння.

Отже в даному разі йдеться про задачу структурного синтезу системи керування [5]: для об’єкту (1.75) необхідно знайти керування

$$u = u(y^{(i)}, \psi^{(r)}, w_s^{(j_s)}, C_i)\,,$$

яке б перетворило цей об’єкт у замкнену систему з утіленням бажаного взаємозв’язку (2.78), рис. 4 (ОК — об’єкт керування, СК — система керування об’єктом).

В кожну мить стан об’єкта *n*-го порядку однозначно визначають керована змінна y та $n-1$ її похідних $y^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$ (див. (2.76)) — так звані фазові координати. Найчутливішою до зовнішніх впливів, а отже „найкерованішою”, натомість, є вища похідна $y^{(n)}$.



4 **Схема системи керування.**

Отже цілком доречно через співвідношення (2.78) задавати власне найвищу похідну $y_d^{(n)}(x)$

$$y_d^{(n)} = \Phi_1(y^{(i)}, \psi^{(r)}, w_s^{(j_s)}, C_{i_1}, x) = 0\,,\ i = \overline{0,n}\,,\ i_1 = i = \overline{0,n-1}\,,\ \ r = \overline{1,R}\,.$$

Тоді об'єкт (2.76) стане керованим відповідно до закону

$$u_d = F(y_d^{(n)},\ y^{(i)}, w_s^{(j_s)}, x)\,,\ i = \overline{0,n-1}\,,\ s = \overline{1,S}\,,\ j_s = \overline{0,J_s}\,.$$

Це означає, що його рух (функціювання) описуватиме рівняння [5]

$$F(y^{(n)},\ y^{(i)}, w_s^{(j_s)}, x) = F(y_d^{(n)},\ y^{(i)}, w_s^{(j_s)}, x)\,.$$

Звернімося до прикладу [5].

Нехай об'єкт керування описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} w(t) \equiv a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} w(t) = u\,, \tag{2.79}$$

де $x \equiv t$ — час, a_0 і a_1 — сталі. Вимагаючи, щоб реакція системи на задавальну дію $\psi(t)$ була такою самою, як в лінійній системі

$$a_2 \ddot{y} + a_3 \dot{y} + (a_4 + C) y = C\psi$$

(a_2, a_3, a_4 — сталі), знайдемо

$$\ddot{y}_d = \frac{1}{a_2}(C\psi - (a_4 + C) y - a_3 \dot{y})\,.$$

А відтак,

$$u_d = \frac{a_0}{a_2}(C(\psi - y) - a_4 y - a_3 \dot{y}) + a_1 \dot{y} w\,.$$

Звісно, синтезована система має інші властивості, ніж (за будь-якої програми керування $u = u(t)$) система, описувана рівнянням (2.79).

Нехай задано диференціальне рівняння

$$\dot{y} = ay$$

(a — стала). Виникає запитання, чи можна замінити параметр a на b так, щоб програма руху $y = y(t)$ залишилася незмінною? Очевидно, що якщо зазначена зміна взагалі можлива, то тільки в тому разі, коли рівняння матиме вільний член:

$$\dot{y} = by + F(t)\,.$$

Виявляється, що відповідь тут — ствердна [22], бо існує функція (додатковий вхід)

$$F(t) = (b-a)e^{bt}\,,$$

яка забезпечує однаковість розв'язків цих двох диференціальних рівнянь. Ще приклад: виявляється, що описуваний рівнянням

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \ \ (\,y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1\,)$$

вільний рух осцилятора з частотним параметром $\omega = \mathrm{const}$ цілком збігається з вимушеним рухом

$$\ddot{y} + \tilde{\omega}^2 y = F(t) \ \ (\,y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1\,)$$

осцилятора з частотним параметром $\omega = \mathrm{const} \neq \tilde{\omega}$, якщо

$$F(t) = \frac{\tilde{\omega}^2 - \omega^2}{\omega} \sin \omega t\,.$$

Отже має сенс така задача [22]: як необхідно задати векторний вхід $F(t)$, щоб система, що підпорядкована векторному диференціальному рівнянню

$$\dot{y} = f_2(t, y, \tilde{p}) + F(t)$$

і має структуру (внутрішню будову), визначувану вектор-параметром $\tilde{p}(t)$, була динамічно еквівалентною іншій системі, що має будову $p(t)$ і властивості, окреслені векторним диференціальним рівнянням

$$\dot{y} = f_2(t, y, p)\,?$$

Очевидно, що у разі динамічної еквівалентності систем

$$f_1(t, y, p) - f_2(t, y, \tilde{p}) = F(t)\,.$$

Якщо задача має розв'язок (а так буває тільки в окремих випадках), то зміну будови системи можна пов'язати зі зміною зовнішнього впливу на неї. Такий вхід $F(t)$ системи, який є еквівалентним в динамічному сенсі внутрішній її будові, названо [22] **узагальненим входом**.

2.7 Приклад: лінійна задача Коші другого порядку

Нехай ідеться про диференціальне рівняння другого порядку

$$L[q] \equiv a(t)\frac{d^2q}{dt^2} + b(t)\frac{dq}{dt} + c(t)\,q \equiv a(t)\,\ddot{q} + b(t)\,\dot{q} + c(t)\,q = f(t)\,, \quad (2.80)$$

де q — координата, що визначає стан системи; t — час (незалежна змінна); коефіцієнти $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ та вільний член $f(t)$ — неперервні функції від t ($t \in [0,T]$), притім $a(t) > 0$, а $b(t)$ є диференційовною.

Покладаючись на викладене раніше, оперуватимемо фундаментальною функцією $K(t,\tau)$ — залежним від параметра $\tau \in [0,T]$ розв'язком однорідного рівняння (відповідного неоднорідному рівнянню (2.80))

$$L[q] \equiv a(t)\,\ddot{q} + b(t)\,\dot{q} + c(t)\,q = 0 \quad (2.81)$$

таким, що задовольняє (початкові) умови

$$K(\tau,\tau) = 0\,,\ \left.\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \dot{K}(\tau,\tau) = 1\,. \quad (2.82)$$

За допомогою фундаментальної функції $K(t,\tau)$ можна синтезувати нові функції

$$q_\circ(t) = C_1 K(t,\tau) + C_2\,\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial \tau}$$

та

$$q_*(t,\tau) = \int_\tau^t K(t,s)\,\frac{f(s)}{a(s)}\,ds\,,$$

перша з яких є загальним (C_1, C_2 — довільні сталі) розв'язком однорідного рівняння (2.81), а друга — окремим розв'язком неоднорідного рівняння (2.80) таким, що задовольняє нульові початкові умови

$$q_*(\tau,\tau) = \dot{q}_*(\tau,\tau) = 0\,,\ \dot{q}_*(t,\tau) = \frac{\partial q_*(t,\tau)}{\partial \tau}\,.$$

Сума

$$q(t) = q_*(t) + q_\circ(t) = C_1 K(t,\tau) + C_2\,\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial \tau} + \int_\tau^t K(t,s)\,\frac{f(s)}{a(s)}\,ds \quad (2.83)$$

є загальним розв'язком неоднорідного рівняння (2.80). На загальності цього розв'язку, проте, можна наполягати лише в тому разі, якщо $K(t,\tau)$ та $\dfrac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau}$ складають фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.81). Переконаймося, що власне так воно і є.

Нехай $q_1(t)$ і $q_2(t)$ — деяка фундаментальна система розв'язків рівняння (2.81). Тоді його загальним розв'язком буде функція

$$q(t) = K(t,\tau) = B_1 q_1(t) + B_2 q_2(t), \tag{2.84}$$

де B_1, B_2 — сталі, які задаватимемо так, щоби розв'язок (2.84) задовольняв початкові умови (2.82):

$$B_1 = -\frac{q_2(\tau)}{W(q_1,q_2)\big|_{t=\tau}}, \quad B_2 = \frac{q_1(\tau)}{W(q_1,q_2)\big|_{t=\tau}},$$

де

$$W(q_1,q_2) = \begin{vmatrix} q_1(t) & q_2(t) \\ \dot{q}_1(t) & \dot{q}_2(t) \end{vmatrix}$$

— визначник Вронського. Очевидно, що в такому разі

$$K(t,\tau) = \frac{1}{W(q_1,q_2)\big|_{t=\tau}} \begin{vmatrix} q_1(\tau) & q_2(\tau) \\ q_1(t) & q_2(t) \end{vmatrix}. \tag{2.85}$$

Легко переконатися, що й похідна $\dfrac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau} = A_1(\tau)q_1(t) + A_2(\tau)q_2(t)$ від $K(t,\tau)$ (див. (2.85)) за параметром τ також задовольняє однорідне рівняння (2.81).

Переконаймося тепер, що функції $K(t,\tau)$, $\dfrac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau}$ складають власне фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.81), тобто таку систему, для якої визначник Вронського відмінний від нуля в $[0,T]$. Для цього треба пересвідчитися, що він не дорівнює нулю хоча б в одній точці з $[0,T]$. Тож, оскільки

$$W(K,\dot{K})\big|_{t=\tau} = \left.\begin{vmatrix} K(t,\tau) & \dfrac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau} \\ \dfrac{\partial K(t,\tau)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 K(t,\tau)}{\partial t\,\partial\tau} \end{vmatrix}\right|_{t=\tau} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b(\tau) \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то $K(t,\tau)$, $\dfrac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau}$ справді завжди складають фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.81).

Нехай початкові умови окреслені рівностями

$$q(\tau)=q_0\,,\ \dot q(\tau)=\dot q_0\,. \tag{2.86}$$

Ці умови можна задовольнити відповідним добором значень сталих C_1, C_2 в (2.83):

$$q(t)=(\dot q_0+q_0 b(\tau))K(t,\tau)-q_0\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau}+\int_\tau^t K(t,s)\frac{f(s)}{a(s)}ds\,. \tag{2.87}$$

Розв'язок (2.87) можна подати також і в іншій формі.

Заміною

$$q(t)=z(t)e^{-\frac{1}{2}\int_\tau^t\frac{b(s)}{a(s)}ds} \tag{2.88}$$

рівняння (2.81) можна звести до рівняння

$$\ddot z+F(t)z=0\,, \tag{2.89}$$

де

$$F(t)=\frac{c(t)}{a(t)}-\frac{1}{4}\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{a(t)\dot b(t)-\dot a(t)b(t)}{a^2(t)}\,,$$

— інваріант рівняння (2.81). Та сама заміна (2.88) зводить рівняння (2.80) до рівняння

$$\ddot z+F(t)z=\frac{f(t)}{a(t)}e^{\frac{1}{2}\int_\tau^t\frac{b(s)}{a(s)}ds}\,.$$

На підставі (2.88) та (2.86)

$$z(\tau)=q_0\,,\ \dot z(\tau)=\frac{1}{2}\frac{b(\tau)}{a(\tau)}q_0+\dot q_0\,.$$

Нехай $\widetilde K(t,\tau)$ — фундаментальна функція, відповідна рівнянню (2.89). Діючи з нею так само, як раніше функцією $K(t,\tau)$ стосовно рівняння (2.80), та повертаючись до старої змінної q матимемо:

$$q(t)=\left[\left(\frac{1}{2}\frac{b(\tau)}{a(\tau)}q_0+\dot q_0\right)\widetilde K(t,\tau)-q_0\frac{\partial\widetilde K(t,\tau)}{\partial\tau}\right]e^{\frac{1}{2}\int_\tau^t\frac{b(s)}{a(s)}ds}+$$

$$+\int_\tau^t\widetilde K(t,s)e^{\frac{1}{2}\int_\tau^s\frac{b(\zeta)}{a(\zeta)}d\zeta}\frac{f(s)}{a(s)}ds\,. \tag{2.90}$$

Оскільки замість (2.87) рівноцінно можна оперувати (2.90), то в силу теореми про існування і єдиність розв'язку задачі Коші ці формули слід визнати за цілком тотожні. Зрештою, очевидно, що

$$K(t,\tau)=\tilde{K}(t,\tau)\,e^{\frac{1}{2}\int_{\tau}^{t}\frac{b(s)}{a(s)}ds}.$$

Процедура означування фундаментальної функції, відповідної диференціальному рівнянню зі сталими коефіцієнтами, аж ніяк не вимагає опиратися на поняття системи окремих лінійно незалежних розв'язків. Тут визначальну роль відіграє поняття характеристичного рівняння. Сама ж структура фундаментальної функції постулюється як експонентна.

Скажімо, диференціальному рівнянню другого порядку

$$\alpha\ddot{q}+\beta\dot{q}+\kappa q=Q(t) \tag{2.91}$$

($\alpha>0$, β, κ — сталі) відповідає характеристичне рівняння

$$\alpha k^2+\beta k+\kappa=0 \tag{2.92}$$

та експонентна структура

$$K(t-\tau)\equiv\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{k_1(t-\tau)} & e^{k_2(t-\tau)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ k_1 & k_2\end{vmatrix}}=\frac{e^{k_2(t-\tau)}-e^{k_1(t-\tau)}}{k_2-k_1}. \tag{2.93}$$

Якщо k_1, k_2 — корені характеристичного рівняння (2.92), то вираз (2.93) є фундаментальною функцією. Ситуація не зміниться навіть тоді, коли k_1, k_2 є однаковими ($k_1=k_2=k_0$), тобто коли характеристичне рівняння має вигляд

$$\alpha(k-k_0)^2=0\ \ (\beta=-2\alpha k_0,\ \kappa=\alpha k_0^2).$$

В такому разі

$$K(t-\tau)\equiv\lim_{k_2\to k_1\to k_0}\frac{\dfrac{\partial}{\partial k_2}\left(e^{k_2(t-\tau)}-e^{k_1(t-\tau)}\right)}{\dfrac{\partial}{\partial k_2}(k_2-k_1)}=(t-\tau)\,e^{k_0(t-\tau)}.$$

Якщо, далі, $k_1=k_2=k_0=0$ ($\beta=\kappa=0$), то і в такому разі відповідна функція $K(t-\tau)\equiv t-\tau$ також матиме сенс фундаментальної, але, звісно, для рівняння $\alpha\ddot{q}=Q(t)$.

Диференціальне рівняння (2.91) моделює рух матеріальної точки за дії збуджувальної сили $P = \kappa q$, сили опору $R = \beta \dot{q}$ та збурювальної сили $Q(t)$. За позначень

$$2n = \frac{\beta}{\alpha}, \ \omega^2 = \frac{\gamma}{\alpha}, \ f(t) = \frac{1}{\alpha} Q(t)$$

воно набуває вигляду

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = f(t) . \tag{2.94}$$

За характеристичне тут править рівняння

$$k^2 + 2nk + \omega^2 = 0,$$

коренями якого є числа

$$k_{1,2} = -n \pm i\sqrt{\omega^2 - n^2} = -n \pm i\omega^* \ \left(\omega^* = \sqrt{\omega^2 - n^2}, i = \sqrt{-1} \right).$$

Переконуючись, що функції

$$q_1(t) = e^{k_1 t} = e^{-nt}(\cos\omega^* t + i\sin\omega^* t), \ q_2(t) = e^{k_2 t} = e^{-nt}(\cos\omega^* t - i\sin\omega^* t)$$

є окремими розв'язками рівняння $\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = 0$, на підставі (2.85) матимемо відповідну рівнянню (2.94) фундаментальну функцію

$$K(t,\tau) = K(t-\tau) = \frac{1}{\omega^*} e^{-n(t-\tau)} \sin\omega^*(t-\tau) . \tag{2.95}$$

Отже розв'язок (2.87) задачі ((2.94), (2.86)) на підставі (2.95) можна подати у вигляді

$$q(t) = e^{-n(t-\tau)} \left(\frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\omega^*} \sin\omega^*(t-\tau) + q_0 \cos\omega^*(t-\tau) \right) + q_*(t), \tag{2.96}$$

де

$$q_*(t) = \frac{1}{\omega^*} \int_\tau^t e^{-n(t-s)} \sin\omega^*(t-s) f(s)\, ds . \tag{2.97}$$

Проведімо класифікацію можливих різновидів руху системи (точки), що описуються рівнянням (2.94).

Рух системи буде *неколивним* (аперіодичним) у випадку, коли $\gamma \le 0$. Це безпосередньо випливає з розв'язку ((2.96), (2.97)). Справді. При $\gamma \le 0$ справджується нерівність $\omega^2 \le 0$. Тому,

$$\omega^* = i\sqrt{|\omega^2| + n^2} = i\omega^{**} \ (\omega^{**} \ge 0). \tag{2.98}$$

Беручи до уваги формули $\sin ix = i\,\mathrm{sh}x$, $\cos ix = \mathrm{ch}x$ і (2.98), матимемо (див. (2.96), (2.97)):

$$q(t) = e^{-n(t-\tau)}\left[\frac{\dot{q}_0 + nq}{\omega^{**}}\mathrm{sh}\omega^{**}(t-\tau) + q_0\,\mathrm{ch}\omega^{**}(t-\tau)\right] + q^{**}(t), \qquad (2.99)$$

де

$$q^{**}(t) = \frac{1}{\omega^{**}}\int_{\tau}^{t} e^{-n(t-s)}\mathrm{sh}\omega^{**}(t-s)f(s)ds.$$

В окремому випадку, коли $R = P = 0$, система рухається тільки під дією збурювальної сили $Q(t)$. При цьому $n = 0$, $\gamma = 0$ і, як наслідок, $\omega^{**} = 0$. Переходячи до границі $\omega^{**} \to 0$ у формулі (2.99), отримаємо

$$q(t) = \dot{q}_0(t-\tau) + q_0 + \int_{\tau}^{t}(t-s)f(s)ds. \qquad (2.100)$$

З (2.96), (2.97) випливає також, що рух буде неколивним і за дії на систему відновлювальної сили P ($\gamma > 0$), якщо $n^2 \ge \omega^2$.

При $n^2 \ge \omega^2$ матимемо

$$\omega^* = i\sqrt{n^2 - \omega^2} = i\omega^{**}.$$

Тож, аперіодичний рух системи описуватиметься вже відомою формулою (2.99).

Оскільки $n^2 = \omega^2 \Rightarrow \omega^* = 0$, то граничним переходом $\omega^* \to 0$ з (2.96), (2.97) отримаємо закон аперіодичного руху

$$q(t) = e^{-n(t-\tau)}[(\dot{q}_0 + nq_0)(t-\tau) + q_0] + \int_{\tau}^{t} e^{-n(t-s)}(t-s)f(s)ds.$$

Звідси при $n \to 0$ доходимо, як і слід було сподіватися, формули (2.100).

Необхідною умовою *коливного руху* системи, описуваної рівнянням (2.94), є вияв відновлювальної дії сили P, тобто дотримання умови $\gamma > 0$. Залежно від діючих сил розрізняють вільні, згасёї і вимушені коливання.

Отже *цілком вільні коливання* відбуваються лише за дії відновлювальної сили. В цьому випадку $n = 0$, $f(t) \equiv 0$ і $\omega^* = \omega$. Тож закон цілком вільних коливань випливає з (2.96), (2.97) при $n \to 0$ і $f(t) \equiv 0$:

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin\omega(t-\tau) + q_0 \cdot \cos\omega(t-\tau).$$

Згасаючі вільні коливання відбуваються лише за дії відновлювальної сили та сили опору при $n^2 < \omega^2$. На підставі (2.96), (2.97) матимемо такий закон згасаючих вільних коливань:

$$q(t) = e^{-n(t-\tau)}\left[\frac{\dot q_0 + nq}{\omega^*}\sin\omega^*(t-\tau) + q_0\cdot\cos\omega^*(t-\tau)\right].$$

Вимушені коливання відбуваються за дії відновлювальної сили, сили опору та збурювальної сили, яка зазвичай подається як функція

$$Q(t) = H\sin(pt+\delta),$$

тут H — амплітуда, p — частота і δ — початкова фаза збурювальної сили. Підставляючи значення функції $f(t) = \dfrac{H}{\alpha}\sin(pt+\delta)$ в (2.96), (2.97), отримаємо такий закон вимушених коливань:

$$q(t) = e^{-n(t-\tau)}\left[\frac{\dot q_0 + nq}{\omega^*}\sin\omega^*(t-\tau) + q_0\cdot\cos\omega^*(t-\tau)\right] +$$

$$+\frac{H}{2\alpha\omega^*(n^2+(\omega^2+p)^2)}\left[n\cos(pt+\delta) + (\omega^2+p)\sin(pt+\delta)\right] -$$

$$-\frac{H}{2\alpha\omega^*(n^2+(\omega^2-p)^2)}\left[n\cos(pt+\delta) + (p-\omega^2)\sin(pt+\delta)\right] +$$

$$+\frac{H}{2\alpha\omega^*}e^{-n(t-\tau)}\left(\frac{n\cos(\omega^*(t-\tau)+pt+\delta) + (p-\omega^*)\sin(\omega^*(t-\tau)+pt+\delta)}{n^2+(p-\omega^*)^2} -\right.$$

$$\left.-\frac{n\cos(\omega^*(t-\tau)-pt-\delta) + (p+\omega^*)\sin(\omega^*(\tau-t)+p\tau+\delta)}{n^2+(p+\omega^*)^2}\right). \qquad (2.101)$$

Закон вимушених коливань без урахування сил опору випливає з (2.101) за умови $n = 0$:

$$q(t) = \frac{\dot q_0}{\omega}\sin\omega(t-\tau) + q_0\cdot\cos\omega(t-\tau) + \frac{H}{\alpha(\omega^2-p^2)}\sin(pt+\delta) +$$

$$+\frac{H}{2\alpha\omega}\left[\frac{1}{p-\omega}\sin(\omega(t-\tau)+p\tau+\delta) - \frac{1}{p+\omega}\sin(\omega(t-\tau)+p\tau+\delta)\right]. \qquad (2.102)$$

За частоти збурювальної сили, близької до частоти власних коливань, настає особливе явище, яке називається *биттям*. Покладаючи у формулі (2.102) $\dot{q}_0 = q_0 = 0$, розгляньмо коливний рух, що виникає під впливом лише збурювальної сили

$$q(t) = \frac{H}{\alpha(\omega^2 - p^2)} \sin(pt + \delta) +$$

$$+ \frac{H}{2\alpha\omega}\left[\frac{1}{p-\omega}\sin(\omega(t-\tau) + p\tau + \delta) - \frac{1}{p+\omega}\sin(\omega(t-\tau) + p\tau + \delta)\right].$$

Останню формулу можна подати також у вигляді

$$q(t) = \frac{H}{\alpha(\omega^2 - p^2)}\left[\sin(pt+\delta) - \frac{p}{\omega}\sin\omega(t-\tau)\cos(p\tau+\delta) - \right.$$

$$\left. - \cos\omega(t-\tau)\sin(p\tau+\delta)\right].$$

Вважаючи, що $p/\omega \approx 1$, матимемо

$$q(t) = \frac{H}{2(\omega^2 - p^2)}\left[\sin(pt+\delta) - \sin(\omega(t-\tau) + p\tau + \delta)\right].$$

Звідси, покладаючи $(p-\omega)/2 = \varepsilon$, $(p+\omega)/2 \approx p$, отримаємо:

$$q(t) = A(t)\cos(pt + \varepsilon\tau + \delta), \quad A(t) = \frac{H}{2\alpha p\varepsilon}\sin\varepsilon(\tau - t). \qquad (2.103)$$

Формула (2.103) визначає рух, який власне і називається **биттям**. Він виникає при $p \approx \omega$ і є результатом накладання коливань, викликаних дією збурювальної сили і власне вимушених коливань.

Доречно підкреслити, що биття (2.103) можна розглядати як коливання з частотою p, з періодом $T = \dfrac{2\pi}{p}$, амплітуда яких є також періодичною функцією з періодом $T_A = 2\pi/\varepsilon = 4\pi/(p-\omega)$.

Ще один важливий різновид руху — резонансний. Явище *резонансу* виникає при збіганні частот вимушених і власних коливань ($p = \omega$). Закон вимушених резонансних коливань випливає з формули (2.103) при $\varepsilon \to 0$:

$$q(t) = -\frac{H(t-\tau)}{2\alpha}\cos(pt + \delta).$$

Частота і період вимушених коливань при резонансі дорівнюють частоті ω і періоду $T = 2\pi/p = 2\pi/\omega$ вільних коливань. Амплітуда вимушених коливань при резонансі зростає пропорційно з плином часу.

3 МОДЕЛІ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

3.1 Диференціальні рівняння руху систем у прямій та в оберненій формах

Вивчаючи поведінку систем зі скінченною кількістю ступенів вільності, використовують диференціальні рівняння руху в прямій формі (у зусиллях) та в оберненій формі (у переміщеннях) [2—4, 6—8, 20, 24, 36, 45, 49, 55—57]. Ці рівняння випливають унаслідок безпосереднього застосування основного закону динаміки, укладання опису руху системи в узагальнених координатах (у формі рівнянь Лагранжа другого роду), використання методів будівельної механіки тощо. Для систем з голономними двобічними ідеальними в'язями зазначені рівняння зручно виводити, застосовуючи принцип можливих переміщень, принцип Д'Аламбера і так званий узагальнений закон Гука [2, 4, 20].

Нехай рух системи спостерігається в узагальнених координатах $q_i(t)$, $i = \overline{1,k}$. Відлік координат ведеться від стану рівноваги системи (в ньому $q_i = 0$). Вважається, що за малих відхилень від стану рівноваги відповідні **узагальнені сили** Q_i, $i = \overline{1,k}$, є **лінійними** однорідними функціями від узагальнених координат [20]:

$$Q_i = -\sum_{j=1}^{k} c_{ij} q_j \quad (i = \overline{1,k}), \tag{3.1}$$

де

$$c_{ij} = \left. \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right|_{q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0} \tag{3.2}$$

(c_{ij} — сталі).

Вважаючи, що системі надано малі переміщення від початкового стану рівноваги $q_1 = q_2 = ... = q_k = 0$, позначмо через $F_i(t)$ ($i = \overline{1,k}$) узагальнені сили, які потрібно прикласти до неї, щоб вона залишалась у рівновазі при цих малих відхиленнях. Відповідно до принципу можливих переміщень

$$F_i + Q_i = 0 \quad (i = \overline{1,k}).$$

Звідси з урахуванням (3.1), (3.2) випливають формули, які називають **узагальненим законом Гука**:

$$F = Cq; \qquad C = \| c_{ij} \|. \tag{3.3}$$

Тут C — **матриця жорсткості** системи,

$$F = (F_1, F_2, ..., F_k), \qquad q = (q_1, q_2, ..., q_k) \tag{3.4}$$

— відповідні матриці-стовпці. Елементи c_{ij} матриці C називають **коефіцієнтами жорсткості** системи.

Альтернативними до (3.3) є такі співвідношення:

$$q = \beta F, \qquad \beta = \| \beta_{ij} \|; \qquad \beta = C^{-1}. \tag{3.5}$$

Тут β — відповідна **матриця податності**; її елементи β_{ij} називають **коефіцієнтами податності** системи (при цьому вважається, що матриця C не є особливою, тобто $\det C \neq 0$).

Для консервативних систем матриці β і C є, як відомо [6, 7, 56], симетричними, а для систем з неконсервативними параметричними навантаженнями, що залежать тільки від положення системи, — несиметричними [7, 8, 20].

Із (3.3) — (3.5) неважко одержати рівняння руху системи в околі рівноважного стану, якому відповідають умови:

$$Q_i(0, 0, \ldots, 0) = 0 \;\; (i = \overline{1,k}).$$

Зокрема, якщо вважати, що сили $F_i(t)$ прикладені динамічно, а також враховувати узагальнені сили інерції та сили тертя, пропорційні до узагальнених швидкостей, то приходимо до **диференціальних рівнянь руху в прямій і в оберненій формах** [7, 20, 56]:

$$A\frac{d^2q}{dt^2} + B\frac{dq}{dt} + Cq = F(t), \tag{3.6}$$

$$q = \beta \left[F(t) - A\frac{d^2 q}{dt^2} - B\frac{dq}{dt} \right]. \qquad (3.7)$$

Тут $A = \| a_{ij} \|$ — відповідна кінетичній енергії Т системи інерційна матриця, $B = \| b_{ij} \|$ — матриця тертя.

Зауважмо, що ці ж матричні рівняння (3.6) і (3.7) називають також **диференціальними рівняннями руху системи** відповідно **в зусиллях** та **в переміщеннях**. Вони визначають малі коливання системи в околі стану рівноваги $q_i = 0$ ($i = \overline{1,k}$), якщо цей стан стійкий.

Звернімося до прикладів.

Нехай ідеться про консервативну механічну систему з одним ступенем вільності. Її рух описується рівнянням Лагранжа (другого роду)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \qquad (3.8)$$

де t — час, q — узагальнена координата, $\dot{q} = dq/dt$ — узагальнена швидкість,

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i$$

— кінетична енергія, m_i — маса i-ї матеріальної точки, $\mathbf{v}_i$ (v_i) — швидкість (модуль швидкості) цієї точки,

$$\Pi = \Pi(q) \qquad (3.9)$$

— потенціальна енергія.

Якщо розташування матеріальної точки визначає радіус-вектор $\mathbf{r}_i$, то її швидкість визначається як

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q}\dot{q},$$

а отже

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q}\right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q}\right)^2.$$

Величину

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q}\right)^2 = A(q),$$

що є функцією узагальненої координати q, розгорнімо в ряд Маклорена в околі $q = 0$:

$$A(q) = A(0) + A'(0)\,q + \frac{A''(0)}{2}q^2 + \dots; \qquad (3.10)$$

тут штрихи позначають похідні від функції $A(q)$ за узагальненою координатою q.

Подібно можна розгорнути в ряд Маклорена в околі $q = 0$ і функцію (3.9):

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \Pi'(0)\,q + \frac{\Pi''(0)}{2}q^2 + \dots \qquad (3.11)$$

У разі малих коливань вираз (3.10) можна обмежити першим членом $A(0) = a$. В такому разі кінетична енергія визначатиметься подібно до кінетичної енергії однієї матеріальної точки:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 . \qquad (3.12)$$

Множник a називають **інерційним коефіцієнтом** (інколи узагальненою чи **зведеною масою**).

Потенціальна енергія завжди визначається з точністю до сталого доданка, а тому зручно покласти $\Pi(0) = 0$. Відомо також, що існує зв'язок

$$\Pi'(q) = -Q ,$$

де Q — узагальнена сила. Оскільки в стані рівноваги узагальнена сила дорівнює нулю, а відлік координати q ведеться власне від стану рівноваги, то, звісно, слід брати $\Pi'(0) = 0$. Отже, вважаючи значення q малими, вираз (3.11) можна обмежити третім членом, записуючи

$$\Pi = \frac{1}{2}cq^2 , \qquad (3.13)$$

де величина

$$c = \Pi''(0)$$

є параметром, який називають (узагальненим) **коефіцієнтом жорсткості** чи **коефіцієнтом квазіпружності.**

Знак коефіцієнта жорсткості залежить від того, стійким чи нестійким є стан рівноваги, від якого ведеться відлік узагальненої координати. Відповідно до теореми Лагранжа — Діріхле потенціальна енергія консервативної системи в стані стійкої рівноваги є мінімальною. Отже $c = \Pi''(0) > 0$.

Тож, підставляючи в рівняння Лагранжа (3.8) вирази (3.12) та (3.13), дійдемо диференціального рівняння

$$a\ddot{q} + cq = 0,$$

яке описує малі вільні коливання системи.

У разі дії в'язкого тертя керуються рівнянням Лагранжа у формі

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q_*, \tag{3.14}$$

в якому Q_* позначає **узагальнену силу в'язкого тертя**.

Під в'язким розуміють таке тертя, яке на кожну матеріальну точку системи спричиняє дію сили

$$\mathbf{R}_i = -b_i \mathbf{v}_i,$$

де b_i — коефіцієнт тертя. Оскільки узагальнена сила означується як

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q},$$

то, беручи до уваги співвідношення

$$\frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}},$$

матимемо

$$Q_* = -\sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q} = -\sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}}.$$

А оскільки

$$\mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) Q_* = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}},$$

то

$$Q_* = -\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{v_i^2}{2}.$$

Функцію

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{v_i^2}{2},$$

що структурно подібна до виразу кінетичної енергії, називають **дисипативною функцією Релея**.

Подібно до того, як формувався вираз (3.12) для кінетичної енергії, легко побудувати вираз

$$\Phi = \frac{1}{2} b\dot{q}^2 , \tag{3.15}$$

в якому b — **узагальнений (зведений) коефіцієнт в'язкості**. Отже вираз для визначення узагальненої сили в'язкого тертя можна подати у вигляді

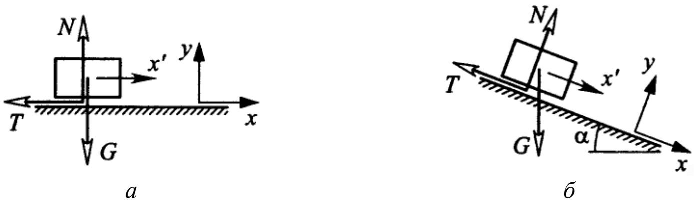
$$Q_* = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b\dot{q} .$$

Тож, підставляючи (3.15) разом з (3.12), (3.13) в (3.14), матимемо диференціальне рівняння

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 ,$$

яке описує малі вільні коливання системи за наявності в'язкого тертя.

Поняття „малих рухів" є визначальним для прийнятності описаного тут підходу до моделювання явища тертя в механічних системах. Щоб підкреслити це, можна навести такий відомий приклад.



5 **Схема ковзання тіла площиною.**

Вдамося до розгляду найпростішого руху твердого тіла на площині — ковзного поступом, рис. 5. На горизонтальній площині (рис. 5, *а*) рух тіла описується рівняннями

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mx'' = -T , \; m\frac{d^2y}{dt^2} = my'' = N - G \equiv 0 , \tag{3.16}$$

а на похилій (рис. 5, *б*) — рівняннями

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mx'' = G\sin\alpha - T , \; m\frac{d^2y}{dt^2} = my'' = N - G\cos\alpha \equiv 0 , \tag{3.17}$$

де m — маса тіла, t — час, T — сила тертя, N — нормальна реакція площини, $G = mg$ — сила ваги, g — пришвидшення вільного падіння, α — кут нахилу площини. Проте, опис залишатиметься недоозначеним поти, поки не буде з'ясовано, як позначається на русі тіла сила тертя ковзання (або ж, навпаки, якою є програма руху тіла $x' = x'(t) = dx(t)/dt$ чи $x = x(t)$, що дало б можливість відтворити силу тертя).

Задаючи силу тертя трьома різними способами, можна на підставі першого з рівнянь (3.16) з'ясувати таке (табл. 3):

— перші два способи задавання сил тертя (як $T = -T_0 \operatorname{sgn} x'$ і як $T = -ax'$, див. перший та другий стовпці табл. 3) принципово не перечать спостережуваним фактам; та обставина, що в другому випадку тривалість сповільнення є нескінченною, звісно, насторожує, але пояснюється тим, що в кінці сповільнення стає важко відрізняти стан руху від стану нерухомості;

— сила тертя, задана як $T = -bx'^2 \operatorname{sgn} x'$ (див. третій стовпець табл. 3), зумовлює рух, цілком неприйнятний навіть в якісному сенсі (одночасно час і шлях сповільнення ніяк не можуть бути безмежно великими, як не може існувати вічний механічний рух без надсилання енергії).

Нехай тепер тіло рухається похилою площиною, див. рівняння (3.17) та рис. 5, *б*. Коли $T = -ax'$, рівняння руху має вигляд

$$mx'' = G \sin\alpha - ax'.$$

Його, застосовуючи заміну

$$y = x' - \frac{G}{a}\sin\alpha,$$

можна подати як

$$y' = -\frac{a}{m}y.$$

Розв'язком останнього рівняння є функція

$$y(t) = y(0)e^{-\frac{a}{m}t}$$

— монотонно спадна з додатними значеннями, якщо

$$y(0) = x_0' - \frac{G}{a}\sin\alpha > 0,$$

чи монотонно зростаюча з від'ємними значеннями, якщо

$$y(0) = x_0' - \frac{G}{a}\sin\alpha < 0;$$

вона прямує до нуля при $t \to \infty$. Отже, відповідна функція

$$x'(t) = y(t) + \frac{G}{a}\sin\alpha$$

монотонно прямує до ненульового! значення $x'(\infty) = \dfrac{G}{a}\sin\alpha$; притім у разі $x_0' < \dfrac{G}{a}\sin\alpha$ про сповільнення як таке взагалі не може йтися. Таким чином, при $T = -ax'$ тіло на похилій площині взагалі (за будь-яких α) не зупиняється, а це перечить досвідові.

3 **Формули, що описують ковзання твердого тіла**

Формула для визначення сили тертя ковзання		
кулонового $T = \begin{cases} -T_0, \text{ коли } x' > 0, \\ T_0, \text{ коли } x' < 0, \end{cases}$ $T_0 > 0$	лінійного в'язкого $T = -ax'$, $a > 0$	нелінійного в'язкого $T = \begin{cases} -bx'^2, \text{ коли } x' > 0, \\ bx'^2, \text{ коли } x' < 0, \end{cases}$ $b > 0$
Програма руху тіла ($t_0 = 0$ — мить початку руху)		
$x'(t) = x_0' - \dfrac{T_0}{m}t$, $x(t) = x_0 - \dfrac{T_0}{2m}t^2 + x_0't$; $x_0' = x'(t_0 = 0)$, $x_0 = x(t_0 = 0)$	$x'(t) = x_0' e^{-\frac{a}{m}t}$, $x(t) = x_0 + \dfrac{m}{a}x_0'\left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right)$; $x_0' = x'(t_0 = 0)$, $x_0 = x(t_0 = 0)$	$x'(t) = \dfrac{mx_0'}{m + bx_0't}$, $x(t) = x_0 + \dfrac{m}{b}\ln\left(\dfrac{bx_0'}{m}t + 1\right)$; $x_0' = x'(t_0 = 0)$, $x_0 = x(t_0 = 0)$
Час руху тіла до зупинки $t_1 - t_0$		
$t_1 = \dfrac{m}{T_0}x_0'$, оскільки $x'(t_1) = x_0' - \dfrac{T_0}{m}t_1 = 0$	$t_1 \to \infty$, оскільки тільки в такому разі справджується умова $x'(t_1) = x_0' e^{-\frac{a}{m}t_1} = 0$	$t_1 \to \infty$, оскільки тільки в такому разі справджується умова $x'(t_1) = \dfrac{mx_0'}{m + bx_0't_1} = 0$
Шлях руху тіла до зупинки $x_1 - x_0$		
$x_1 - x_0 = x(t_1) - x(t_0) =$ $= -\dfrac{T_0}{2m}t_1^2 + x_0't_1 = \dfrac{m}{2T_0}x_0'^2$	$x_1 - x_0 = x(t_1) - x(t_0) =$ $= x(\infty) - x(t_0) =$ $= \dfrac{m}{a}x_0' \lim\limits_{t_1\to\infty}\left(1 - e^{-\frac{a}{m}t_1}\right) = \dfrac{m}{a}x_0'$	$x_1 - x_0 = x(t_1) - x(t_0) =$ $= x(\infty) - x(t_0) =$ $= \dfrac{m}{b}\lim\limits_{t_1\to\infty}\ln\left(\dfrac{bx_0'}{m}t_1 + 1\right) = \infty$

Достеменно відомо, що тіло, ковзаючи на похилій площині з належно малим кутом нахилу α, обов'язково зупиняється. Легко переконатися, що власне так закінчується рух тіла у разі $T = -T_0 \operatorname{sgn} x'$, коли кут нахилу площини задовольняє умову

$$0 < \sin\alpha < \frac{T_0}{G}.$$

Тож, тільки одна з трьох розглянутих простих формул, а власне формула $T = -T_0 \operatorname{sgn} x'$, може несуперечливо в якісному відношенні описувати тертя ковзання. Звісно, в дійсності сила тертя пропорційна до нормальної реакції N, доволі складно залежить від швидкості ковзання та багатьох інших чинників.

Цілком подібно складаються диференціальні рівняння руху лінійних систем з декількома ступенями вільності. У разі дії консервативних сил рух системи описується системою рівнянь Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, s}, \tag{3.18}$$

де q_j і $\dot{q}_j$ — узагальнені координати і узагальнені швидкості, T — кінетична енергія, визначувана за формулою

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \tag{3.19}$$

Π — потенціальна енергія, визначувана за формулою

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} c_{jk} q_j q_k, \tag{3.20}$$

s — кількість ступенів вільності. Величини $a_{jk} = a_{kj}$ — це **інерційні коефіцієнти**, а величини $c_{jk} = c_{kj}$ — це узагальнені **коефіцієнти жорсткості** ($j, k = \overline{1, s}$).

Коли стан рівноваги системи, якому за домовленістю відповідають нульові значення узагальнених координат, є стійким, то цьому станові відповідає локальний мінімум потенціальної енергії. Необхідною і достатньою умовою цього є система нерівностей (**критерій Сильвестра**)

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0 . \qquad (3.21)$$

Критерій (3.21) Сильвестра стосовно системи з кількома ступенями вільності має той самий сенс, що й нерівність $c > 0$ стосовно системи з одним ступенем вільності.

Тож, підставляючи (3.19) і (3.20) в (3.18), матимемо систему диференціальних рівнянь

$$a_{j1}\ddot{q}_1 + a_{j2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{js}\ddot{q}_s + c_{j1}q_1 + c_{j2}q_2 + \ldots + c_{js}q_s = 0\,, \; j = \overline{1, s}\,,$$

що описує вільні коливання механічної системи з s ступенями вільності.

3.2 Приклад побудови матриць жорсткості і податності

Пружні та пружно-жорсткі континуально-дискретні стержні належать до доволі загальних моделей механізмів і машин [2—4, 7, 20, 24, 36, 45]. Правила, за якими формуються ці моделі та способи визначення відповідних матриць інерції, жорсткості, податності, тертя тощо розглядаються, зокрема, в працях [2—4, 6—8, 20, 24, 36, 45, 49, 55—57]. Однак питання побудови й застосувань матриць β та C для пружно-жорстких моделей з довільними законами розподілу податностей (жорсткостей) залишаються актуальними.

Щоб знайти елементи матриці β, наприклад, для крутних коливань, розглядається допоміжна задача [20]:

$$(fy')' = -M_j\delta(x - x_j); \qquad y(a) = 0, \qquad f(b)y'(b) = 0 \qquad (3.22)$$

де $f = GI_k(x)$ — крутна жорсткість стержня (G — модуль зсуву, $I_k(x)$ — відповідний момент інерції), M_j — крутний зовнішній момент, прикладений у поперечному перерізі x_j; $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака; $x = a$ та $x = b$ — координати лівого та правого кінців стержня, причому $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$.

На основі відповідної рівнянню (3.22) фундаментальної функції

$$K(x, \alpha) = \int_{\alpha}^{x} \frac{ds}{f(s)}\,, \qquad (3.23)$$

запишімо загальний розв’язок цього рівняння у вигляді

$$y = c_0 K(x,\alpha) + c_1 \left.\frac{\partial K(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{x=a} - \Phi(x,x_j)\ , \qquad (3.24)$$

де c_0, c_1 — довільні сталі; $\Phi(x,x_j) \equiv K(x,x_j)\,\theta(x-x_j)$ — фундаментальний розв'язок ($\theta(\cdot)$ — одинична функція Гевісайда). Надалі застосовуватимуться позначення

$$\Phi_{xj} \equiv K_{xj}\,\theta_{xj} = \Phi(x,x_j),\ \ K_{xj} = K(x,x_j),\ \ \theta_{xj} = \theta(x-x_j). \qquad (3.25)$$

Розв'язок допоміжної задачі випливає після підставлення виразу (3.24) в граничні умови (3.22) та визначення довільних сталих c_0 і c_1. Цей розв'язок виражає співвідношення

$$y = M_j (K_{xa} - \Phi_{xj}). \qquad (3.26)$$

Беручи до уваги формули

$$q_i = \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + \ldots + \beta_{ik}F_k \quad (i = \overline{1,k})$$

(вони випливають із матричної формули (3.5)), бачимо, що β_{ij} є узагальненим переміщенням в точці x_i, зумовленим дією одиничної узагальненої сили, прикладеної в точці x_j. Тому з розв'язку (3.26) допоміжної задачі, беручи до уваги, що $M_j = 1$, причому $i \le j$ і отже $\Phi_{ij} = 0$, одержуємо:

$$\beta_{ij} = K_{ia} = \int_a^{x_i} \frac{ds}{f(s)} \quad (x_j \ge x_i). \qquad (3.27)$$

Цілком подібно з (3.26) з урахуванням формули (3.23) знаходимо

$$\beta_{ji} = K_{ja} - K_{ji} = K_{ia} = \beta_{ij} \quad (x_j \ge x_i). \qquad (3.28)$$

Отже, матриця β — симетрична. Зауважмо, що цей факт для консервативних пружних систем у загальному випадку випливає з відомої теореми Дж. Максвела про взаємність переміщень [56]. Завдяки цьому коефіцієнти податності системи можна визначати єдиною формулою (3.27) (очевидно, що вона простіша за формулу (3.28)).

Таким чином, рівняння руху даної моделі в переміщеннях можна вважати побудованими. Щоб одержати рівняння її руху в зусиллях, потрібно мати відповідну матрицю жорсткості C. Виявляється [20], що її найпростіше визначити, як обернену до β матрицю $C = \beta^{-1}$ (вважається, що $\det\beta \ne 0$). Способи розв'язування цієї алгебричної задачі — відомі (див., наприклад, [39]).

3.3 Метод часткової дискретизації і його застосовність до неперервних та неперервно-дискретних систем

Рівняння руху (3.6) та (3.7) (у прямій та оберненій формах), виведені для систем із скінченною кількістю ступенів вільності, можна використовувати для вивчення як континуальних, так і континуально-дискретних систем [20, 30].

Кожну одновимірну, наприклад, континуальну систему (скажімо, стержень з розподіленою масою), можна формально замінити на відповідну дискретну систему (безмасовий стержень, в окремих точках якого зосереджено маси) або на низку подібних дискретних систем, певним чином пов'язаних між собою. Підбираючи належним чином кількість таких дискретних систем, можна доволі якісно (адекватно) моделювати динамічну поведінку первісної континуальної системи, зокрема визначати з нестачею та з надлишком її власні частоти. Мабуть вперше такий підхід застосовано Дж. Ден-Гартогом до задачі про коливання однорідної струни [22]. У разі континуально-дискретної системи, існує можливість або знехтувати масою розподіленою (що є малою у порівнянні зі скупченими масами) або замінити її відповідно на зосереджені маси; нова модель, звісно, матиме скінченну кількість ступенів вільності.

Частковою можна назвати таку **дискретизацію**, у рамках якої операції дискретизації не підлягає коефіцієнт біля найвищої похідної в диференціальному рівнянні, що описує малі коливання даної системи [20, 30]. Цим коефіцієнтом найчастіше є функція розподілу жорсткості; вона може бути, зокрема, довільною інтегровною додатною функцією від вісної координати. Після часткової дискретизації у відповідних загальних розв'язках ця функція також фігуруватиме як довільна. Завдяки цьому характеристичні рівняння відповідних задач виявляються універсальними [20, 30], що істотно збільшує можливості удосконалення відомих методів вивчення малих коливань пружних і пружно-жорстких систем.

Наприклад, універсальне частотне рівняння задачі про крутні коливання безмасової консолі зі скупченими в перерізах x_i дисками є таким:

$$1+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i K_{ia}+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j>1}^{k}\alpha_i\alpha_j K_{ia}K_{ji}+\ldots+\alpha_1\alpha_2..\alpha_k K_{1a}K_{21}..K_{k,k-1}=0. \quad (3.29)$$

де

$$\alpha_i = J_i\lambda^2;$$

$\lambda^2=-\omega^2$ (J_i — момент інерції i-го диску, ω — частотний параметр). Але виявляється, що рівняння такого вигляду можна використовувати для вивчення динамічної поведінки багатьох складніших моделей.

3.4 Приклади застосування коефіцієнтів податності до систем з тертям і пружними в'язями

Нехай параметри в рівнянні (3.29) визначаються за формулою

$$\alpha_i = J_i\lambda^2 + b_i\lambda + c_i \quad (i = \overline{1,k}), \tag{3.30}$$

у якій b_i та c_i — коефіцієнти тертя та пружного зв'язку, відповідні i-му диску. Застосовуючи рівняння (3.7) руху системи в переміщеннях та відповідні коефіцієнти податності (3.5) разом з виразами (3.30), матимемо рівняння малих коливань даної моделі в такому вигляді:

$$\sum_{j=1}^{k}\beta_{ij}\nu_j + q_i = 0 \quad (i = \overline{1,k}). \tag{3.31}$$

Тут

$$\nu_j = J_j\frac{d^2q_i}{dt^2} + b_j\frac{dq_i}{dt} + c_jq_j \quad (i = \overline{1,k}).$$

Зауважмо, що у разі вимушених коливань після дискретизації збурювальних сил $F_i(t)$ виникає система неоднорідних рівнянь, ліві частини яких збігаються з (3.31).

Якщо, наприклад, в універсальному рівнянні (3.29) $k = 2$ та $b_i = 0$ ($i = 1, 2$), то

$$J_1J_2K_{1a}K_{21}\omega^4 - \left[(J_1c_2 + J_2c_1)K_{1a}K_{21} + J_1K_{1a} + J_2K_{2a}\right]\omega^2 +$$

$$+1 + c_1K_{1a} + c_2K_{2a} + c_1c_2K_{1a}K_{21} = 0 \quad (\omega^2 = -\lambda^2)$$

Це рівняння є одним із універсальних частотних рівнянь, бо всі параметри моделі можуть набувати тут довільних допустимих значень, причому жорсткість системи $f(x)$ є довільною додатною інтегровною функцією. Однією з найважливіших переваг даного (і подібних рівнянь) є те, що воно виведене без застосування умов спряження.

Варто відзначити, що наведені в 3.1 — 3.4 дані про диференціальні рівняння руху в прямій і оберненій формах, про відповідні матриці жорсткості й податності, способи їх побудови та приклади застосувань доцільно використати як основу для розвитку загальної методології динамічного розрахунку найпростіших моделей пружних і пружно-жорстких систем з довільним допустимим розподілом параметрів.

3.5 Застосування поняття фундаментальної функції до розв'язування диференціальних рівнянь з імпульсними особливостями в коефіцієнтах

Розгляньмо звичайне диференціальне рівняння

$$L[z] \equiv p_0 z^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + \ldots + p_n z = \vartheta(t) \tag{3.32}$$

коефіцієнти $p_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) і права частина $\vartheta(t)$ якого — неперервні функції для всіх $t \in [a, b]$; $p_0(t) > 0$.

Відповідною цьому рівнянню фундаментальною функцією $K(t, \tau)$ називають (див. 1) залежний від параметра τ ($\tau \in [a, b]$) розв'язок відповідного однорідного рівняння $L[z] = 0$, який при $t = \tau$ задовольняє умови

$$K(\tau, \tau) = 0\,,\ K'(\tau, \tau) = 0\,,\ \ldots,\ K^{(n-2)}(\tau, \tau) = 0\,,\ K^{(n-1)}(\tau, \tau) = 1\,. \tag{3.33}$$

Функція $K(t, \tau)$, як зазначалося, існує та є єдиною. Якщо $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, …, $\psi_n(t)$ — деяка фундаментальна система розв'язків рівняння (3.32), то

$$K(t, \tau) = \frac{1}{W(\tau)} \begin{vmatrix} \psi_1(\tau) & \psi_2(\tau) & \ldots & \psi_n(\tau) \\ \psi_1'(\tau) & \psi_2'(\tau) & \ldots & \psi_n'(\tau) \\ \psi_1^{(n-1)}(\tau) & \psi_2^{(n-1)}(\tau) & \ldots & \psi^{(n-1)}{}_n(\tau) \\ \psi_1(t) & \psi_2(t) & \ldots & \psi_n(t) \end{vmatrix} \tag{3.34}$$

($W(\tau)$ — визначник Вронського), тобто

$$K(t, \tau) = \Delta_1(\tau)\psi_1(t) + \Delta_2(\tau)\psi_2(t) + \ldots + \Delta_n(\tau)\psi_n(t)\,,$$

де $\Delta_j(\tau),\ j = \overline{1, n}$, —алгебричні доповнення відповідних елементів останнього рядка визначника (3.34).

Звернімо увагу на функції

$$K, \frac{\partial K}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 K}{\partial \tau^2}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} K}{\partial \tau^{n-1}}\,. \tag{3.35}$$

Вони завжди є лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння $L[z] = 0$, тобто складають його фундаментальну систему розв'язків (див. 1, 2 та [20, 27]). Тож загальний розв'язок рівняння (3.32) з залученням функцій (3.35) можна подати у вигляді

$$z = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\partial^j K}{\partial \tau^j} + \int_\tau^t K(t, s) \frac{\vartheta(s)}{p_0(s)} ds\,. \tag{3.36}$$

Тут останній доданок — окремий розв'язок неоднорідного рівняння, який анулюється при $\tau = t$ разом зі своїми похідними за аргументом t до ($n-1$)-ої включно; A_j — довільні сталі.

Отже, щоб побудувати загальний розв'язок будь-якого рівняння (3.32), достатньо мати тільки відповідну фундаментальну функцію $K(t,\tau)$.

Якщо коефіцієнти диференціального рівняння — сталі ($p_i = \text{const}$, $i = \overline{1,n}$), то

$$K(t,\tau) \equiv K(t-\tau),$$

тобто фундаментальна функція залежить тільки від різниці значень аргумента t і параметра τ (див. 1 та [11, 34, 39]).

В табл. 4 наведено низку фундаментальних функцій, відповідних деяким рівнянням, що часто застосовуються для розв'язування корисних задач. Зокрема, вдаючись до другої за ліком функції $K(t-\tau)$ з даної таблиці, на підставі формули (3.36) відразу можна записати загальні розв'язки рівнянь вимушених коливань з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя та тертя внутрішнього, частотно залежного чи частотно незалежного [7].

Зазначмо, що знаходження множини функцій $\{\psi_i(t)\}$, $i = \overline{1,n}$ і побудова на основі неї фундаментальної функції (3.34) є, зазвичай, важкою задачею. Тому формула (3.34) реально стає в нагоді тільки в окремих доволі простих випадках. В складних же задачах доцільно вдаватися до безпосередньої (оминаючи попереднє знаходження функцій $\psi_i(t)$) побудови фундаментальних функцій як рядів Тейлора або рядів за степенями деякого параметра [20]. Збіжність рядів є апріорною (як наслідок відповідних теорем з загальної теорії диференціальних рівнянь), а їх коефіцієнти визначаються шляхом послідовного диференціювання або інтегрування коефіцієнтів первісних диференціальних рівнянь.

Розгляньмо тепер рівняння

$$L[z] = \delta(t-\tau). \tag{3.37}$$

Тут $L[z]$ — диференціальний вираз, відповідний рівнянню (3.32), $\delta(t)$ — дельта-функція Дірака. Фундаментальний розв'язок (функція впливу, вагова функція), відповідна рівнянню (3.37), визначається за формулою

$$\Phi(t,\tau) \equiv K(t,\tau)\,\theta(t-\tau), \tag{3.38}$$

у якій $K(t,\tau)$ — фундаментальна функція, відповідна рівнянню $L[z] = 0$; $\theta(t)$ — одинична функція Гевісайда.

4 **Формули для фундаментальних функцій, відповідних деяким рівнянням, що часто застосовуються для розв'язування відповідних задач**

№	$L[y]$	$K(t,\tau)$	Додаткова умова
1	$y'' + \omega^2 y$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-\tau)$	$\omega^2 \geq 0$
2	$y'' + 2\varepsilon y' + \omega^2 y$	$\frac{e^{-\varepsilon(t-\tau)}}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}\sin\sqrt{\omega^2-\varepsilon}(t-\tau)$	$\varepsilon \leq \omega^2$
3	$y^{(n)} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)}$	$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_n'(s_i)}e^{s_i(t-\tau)}$, $p_n(s) = s^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i s^{n-i}$	$p_n(s_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$
4	$(f(t)y')'$	$\int\limits_{\tau}^{t}\frac{ds}{f(s)}$	$f(t) > 0$
5	$(f(t)y'')''$	$\int\limits_{\tau}^{t}\frac{1}{f(s)}(t-s)(s-\tau)\,ds$	$f(t) > 0$
6	$\left(\frac{y'}{z'}\right)' + \omega^2 z' y$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega\left[z(t)-z(\tau)\right]$	$z'(t) \neq 0$
7	$y^{\mathrm{IV}} + \frac{2}{t}y''' - \frac{1}{t^2}y'' + \frac{1}{t^3}y'$	$\frac{1}{4}\tau\left[(t^2+\tau^2)\ln\frac{t}{\tau} + \tau^2 - t^2\right]$	

Якщо замість (3.37) маємо рівняння, праві частини яких є послідовними похідними від дельта-функції $\delta(\cdot)$, тобто

$$L[z] = \delta^{(j)}(t-\tau) \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

то окремими розв'язками цих рівнянь є частинні похідні від фундаментальної функції (3.38) за параметром τ [20, 30]:

$$\tilde{z}_j = (-1)^j \frac{\partial^j \Phi}{\partial \tau^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

За допомогою фундаментальних розв’язків можна розв’язувати відповідні диференціальні рівняння з особливостями в коефіцієнтах типу імпульсних функцій. Зокрема, нехай маємо рівняння

$$L[z] = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i z(t_i)\delta(t - t_i), \tag{3.39}$$

де $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_\nu < b$; α_i — деякі параметри. Тоді кожній функції $\psi(t)$, для якої $L[\psi] \equiv 0$, відповідає розв’язок рівняння (3.39), що будується за формулою [20]:

$$Q_\nu(t) = \psi(t) + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \psi_i \Phi_{ti} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \sum_{j>i}^{\nu} \alpha_i \alpha_j \psi_i K_{ji} \Phi_{tj} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\nu-2} \sum_{j>i}^{\nu-1} \sum_{k>j}^{\nu} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \psi_i K_{ji} K_{kj} \Phi_{tk} + \ldots + \alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_\nu \psi_1 K_{21} K_{32} .. K_{\nu,\nu-1} \Phi_{t\nu}\,. \tag{3.40}$$

Тут позначено

$$\psi_i = \psi(t_i),\ \Phi_{ti} = \Phi(t, t_i),\ K_{ji} = K(t_j, t_i)\,.$$

Якщо в (3.40) $\psi(t) \equiv K(t, \tau)$, то з урахуванням співвідношень (3.35) одержуємо таку формулу для загального розв’язку рівняння (3.39):

$$z = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\partial^j Q_\nu}{\partial \tau^j} \tag{3.41}$$

(A_j — довільні сталі).

Зазначмо, що фундаментальна функція як така не зустрічається в літературі, присвяченій параметричним коливанням [6—8, 24, 45, 48, 55—57, 62]. Проте неважко передбачити, що застосування власне функцій $K(t, \tau)$, $\Phi(t, \tau)$ розкриває широкі можливості для розвитку відомих методів дослідження динамічної поведінки механічних систем, збурюваних параметрично (зокрема у скінченному проміжку часу).

Загальні розв’язки можна будувати також і для складніших випадків, коли рівняння є таким [20]:

$$L[z] - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{ij} (z^{(j-1)} \delta(t - t_j))^{(j-1)} = 0\,. \tag{3.42}$$

Тут α_{ij} — деякі параметри; r_n — ціла частина числа $\dfrac{n}{2}$.

Для побудови загального розв’язку необхідно попередньо послідовно визначити функції Q_q за формулою [20]

$$Q_q(t,t_q,t_{q-1},\ldots,t_1,\tau)=Q_{q-1}(t,t_{q-1},\ldots,t_1,\tau)+$$
$$+\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_{qj}Q_{q-1}^{(j-1)}(t,t_{q-1},\ldots,t_1,\tau)\left.\frac{\partial^{j-1}\Phi(t,\tau)}{\partial\tau^{j-1}}\right|_{\tau=t_q}\quad(q=\overline{1,\nu}),\qquad(3.43)$$

тут слід вважати, що $Q_0(t,\tau)\equiv K(t,\tau)$.

В такому разі загальний розв’язок рівняння (3.42) одержимо з (3.41), замінюючи там функцію $Q_\nu(t,\tau)$ на функцію $Q_q(t,\tau)$, що визначається за формулою (3.43).

Для доведення співвідношень (3.40) і (3.43) достатньо взяти до уваги залежності (3.33) — (3.35) та відомі співвідношення з теорії імпульсних функцій [26, 41], зокрема такі:

$$\theta'(t)=\delta(t),\ \ p(t)\delta(t-\tau)=p(\tau)\delta(t-\tau);$$

в останньому виразі $p(t)$ — довільна неперервна функція (якщо $p(\tau)=0$, то $p(t)\delta(t-\tau)\equiv 0$).

3.6 Основні способи побудови фундаментальної функції

Маючи на меті застосування універсальних частотних рівнянь при дослідженні деяких коливних систем, розгляньмо питання про побудову функції $K(x,\alpha)$, відповідної диференціальному рівнянню

$$\left(f(x)y'\right)'+\omega^2 g(x)y=0,\qquad a\le x\le b,\qquad(3.44)$$

де

$$g(x)=m(x)+\sum_{i=1}^{k}M_i\delta(x-x_i),\qquad a<x<x_2<\ldots<x_k<b;\qquad(3.45)$$

функції $f(x)$ і $m(x)$ вважатимемо інтегровними, причому

$$f(x)>0,\ m(x)\ge 0\ \forall x\in[a,b]\qquad(3.46)$$

(це рівняння можна вважати основним при вивченні малих поздовжніх і крутних коливань пружних і пружно-жорстких стержнів та поперечних коливань струн).

Будуватимемо функцію $K(x,\alpha)$ для випадку, коли зосереджених мас немає: $M_i = 0$ $(i = \overline{1,k})$. Перший спосіб ґрунтується на відомому методі послідовних наближень [20, 34], причому фундаментальна функція зображується нескінченним рядом за степенями частотного параметра ω^2 (характеристичного показника λ):

$$K(x,\alpha) = K_0(x,\alpha) + \lambda^2 K_1(x,\alpha) + \lambda^4 K_2(x,\alpha) + \ldots \tag{3.47}$$

Тут

$$K_0(x,\alpha) = \int_\alpha^x \frac{ds}{f(s)}; \quad \lambda^2 = -\omega^2;$$

$$K_i(x,\alpha) = \int_\alpha^x K_0(x,s)\, m(s)\, K_{i-1}(s,\alpha)\, ds, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{3.48}$$

Переконаймося спочатку, що ряд (3.47) задовольняє формально вказане рівняння. Диференціюючи співвідношення (3.48), одержуємо:

$$K_0' = \frac{1}{f(x)}, \quad K_i'(x,\alpha) = \frac{1}{f(x)} \int_\alpha^x m(s) K_{i-1}(s,\alpha)\, ds. \tag{3.49}$$

З рівняння (3.44) та формул (3.47) — (3.49) послідовно знаходимо:

$$fK' = 1 + \lambda^2 \int_\alpha^x m(s)\, K_0(s,\alpha)\; ds + \lambda^4 \int_\alpha^x m(s)\, K_1(s,\alpha)\, ds + \ldots;$$

$$(fK')' = \lambda^2 m(x)\left[K_0(x,\alpha) + \lambda^2 K_1(x,\alpha) + \ldots\right] \equiv \lambda^2 m(x) K; \tag{3.50}$$

$$K_0(\alpha,\alpha) = 0; \quad K'(\alpha,\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)}.$$

Тому $K(x,\alpha)$, зображена рядом (3.47), є фундаментальною функцією, відповідною вказаному рівнянню, за умови, що ряди (3.47) і (3.50) збігаються абсолютно. Останнє неважко довести, бо мажорантою для ряду (3.47) є ряд [20]

$$A|x-\alpha| + \lambda^2 A^2 B \frac{|x-\alpha|^3}{3!} + \lambda^4 A^3 B^2 \frac{|x-\alpha|^5}{5!} + \ldots,$$

де A та B — найбільші значення функцій $\dfrac{1}{f(x)}$ та $m(x)$ у заданому проміжку $[a,b]$.

Отже

$$|K(x,\alpha)| \le A\frac{\mathrm{sh}\lambda\sqrt{AB}\,|x-\alpha|}{\lambda\sqrt{AB}}.$$

Тому для будь-яких значень x, α і λ розглянуті ряди є абсолютно і рівномірно збіжними.

Аналогічно можна розглядати випадки, коли функцію (3.47) доводиться диференціювати за аргументом x і параметром α, а також, коли в (3.47) замість λ^2 матимемо λ. Із застосуванням побудованого ряду (3.47) у наступному розділі розглядатиметься питання про виведення формул для фундаментальної функції $Q(x,\alpha)$, відповідної рівнянню (3.44) з умовами (3.45) — (3.46) у випадках, коли $M_i \ne 0$.

Другий спосіб — це побудова фундаментальної функції $K(x,\alpha)$ як ряду за степенями різниці $(x-\alpha)$ [20, 28]. Проілюструймо цей спосіб, розглядаючи рівняння

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{3.51}$$

де $q(x)$ — голоморфна функція (відомо, що рівняння (3.44), коли $M_i = 0$, $i=\overline{1,k}$, можна звести до вигляду (3.51) [20, 34]). Диференціюючи очевидну тотожність

$$K''(x,\alpha)+q(x)K(x,\alpha)\equiv 0,$$

одержуємо співвідношення

$$K''' + q'K + qK' \equiv 0,$$

$$K^{IV} + q''K + 2q'K' + qK'' \equiv 0,$$

Враховуючи, що

$$K(\alpha,\alpha)=0, \qquad K'(\alpha,\alpha)=1,$$

неважко одержати формулу

$$K^{(2+j)}(\alpha,\alpha)\equiv b_{2+j}(\alpha) = -\sum_{i=0}^{j} C_j^i q^{(j-i)}(\alpha)b_i(\alpha), \ \ j=0,1,2,\ldots;$$

$$b_0 \equiv 0, \ \ b_1(\alpha)=1$$

(C_j^i — біноміні коефіцієнти).

Звідси випливає, що відповідну рівнянню (3.51) фундаментальну функцію можна будувати у вигляді ряду Тейлора:

$$K(x,\alpha) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} b_r(\alpha)(x-\alpha)^r . \tag{3.52}$$

Для прикладу визначмо коефіцієнти $b_2, \ldots, b_7$:

$$-q ; \quad -2q' ; \quad q^2 - 3q'' ;$$

$$6q'q - 4q''' ; \quad -q^3 + 10q'^2 + 13qq'' - 5q^{IV} ;$$

$$-12q'q^2 + 48q'q'' + 24q''' - 6q^V .$$

Як бачимо, даний спосіб доцільно застосовувати, зокрема, коли $q(x)$ — многочлен невисокого степеня.

Зазначимо, що функція $K(x,\alpha)$, як розв'язок відповідної задачі Коші, існує та є єдиною [34, 39]. Тому степеневий ряд (3.52) — це інше зображення відповідного ряду (3.47), збіжність якого доведено раніше.

Третій спосіб ґрунтується на відповідній формулі вигляду (3.34). Її можна використати, якщо маємо деяку фундаментальну систему розв'язків $\{\psi_1(x),\ \psi_2(x)\}$ рівняння (3.44) (коли в (3.45) $M_i = 0$). Тому цей спосіб застосовують до диференціальних рівнянь, для яких функції $\psi_1(x)$ і $\psi_2(x)$ зображуються елементарними або спеціальними функціями чи записуються у квадратурах (див. табл. 4).

Звернімося тепер до рівняння

$$y'' + \mu F(x) y = 0 \tag{3.53}$$

з деяким параметром $\mu > 0$. Розв'язок задачі Коші, який визначує фундаментальну функцію $K(x,\gamma)$, відповідну рівнянню (3.53), рівноцінний [28] розв'язуванню інтегрального рівняння Вольтерри

$$K(x,\gamma) = K_0(x,\gamma) - \mu \int_{\gamma}^{x} K_0(x,s) K(s,\gamma) F(s)\, ds . \tag{3.54}$$

Тут $K_0(x,\gamma) = x - \gamma$.

Подамо фундаментальну функцію у формі ряду

$$K(x,\gamma) = x - \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} (-\mu)^j K_j(x,\gamma) , \tag{3.55}$$

де

$$K_j(x,\gamma)=\int_{\gamma}^{x}(x-s)K_{j-1}(s,\gamma)F(s)\,ds \ \ (j=1,2,\ldots).$$

Отже

$$K_1(x,\gamma)=\int_{\gamma}^{x}(x-s)(s-\gamma)F(s)\,ds\,,$$

$$K_2(x,\gamma)=\int_{\gamma}^{x}(x-s)F(s)\left(\int_{\gamma}^{s}(x-t)(t-\gamma)F(t)\,dt\right)ds\,,\ \ldots$$

Збіжність ряду (3.55) гарантується за умови інтегровності (сумовності) функції $F(x)$ в заданому проміжку $x\in[0,a]$ і довільних значень параметра $\mu>0$.

Для основного ряду (3.55) можна побудувати мажорантний ряд і запровадити оцінку ($x\ge\gamma$)

$$|K(x,\gamma)|\le x-\gamma+\sum_{j=1}^{\infty}\mu^j\,\frac{M^j}{(j+2)!}(x-\gamma)^{j+2}$$

чи

$$|K(x,\gamma)|\le\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mu M}\,(x-\gamma)}{\sqrt{\mu M}}\,,$$

де

$$M=\max_{0\le x\le a}|F(x)|.$$

Отже, якщо виникає необхідність оперувати наближеною фундаментальною функцією $\widetilde{K}(x,\gamma)$, яку відображають перші m членів ряду (3.55), то завжди можна дати оцінку якості наближення, керуючись формулою

$$|K(x,\gamma)-\widetilde{K}(x,\gamma)|\le\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mu M}\,(x-\gamma)}{\sqrt{\mu M}}-\sum_{j=1}^{m-1}\mu^j\,\frac{M^j(x-\gamma)^{j+2}}{(j+2)!}\,.$$

Подібно можна оцінити якість наближення функції $\dfrac{\partial\widetilde{K}(x,\gamma)}{\partial\gamma}$, яка також має фігурувати в розв'язку рівняння (3.53):

$$\left|\frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial\gamma}-\frac{\partial\widetilde{K}(x,\gamma)}{\partial\gamma}\right|\le\operatorname{ch}\sqrt{\mu M}\,(x-\gamma)-\sum_{j=1}^{m-1}\mu^j\,\frac{M^j(x-\gamma)^{j+1}}{(j+1)!}\,.$$

Інколи параметр μ та фундаментальну функцію $K(x,\gamma)$ доречно запроваджувати дещо інакше. Скажімо, число μ часто вводять як малий параметр. Наприклад, μ є малим параметром у типовому рівнянні

$$y'' + (k^2 + \mu F(x))y = 0,$$

де k — основний, визначальний параметр. В такому разі має сенс у виразі (3.54) та в інших відповідних виразах під $K_0(x,\gamma)$ розуміти величину

$$K_0(x,\gamma) = \frac{\sin k(x-\gamma)}{k}.$$

Важливим, звісно, є те, що за аналогією з інтегральним рядом, можна будувати фундаментальні функції, відповідні диференціальним рівнянням вищих порядків [27, 28, 31].

3.7 Приклади універсальних частотних рівнянь та їх застосувань

Розгляньмо задачу про поздовжні коливання прямолінійного стержня з зосередженими масами M_i ($i = 1, 2$), у порівнянні з якими розподіленою масою можна знехтувати [20]. Вважаючи кінці стержня закріпленими жорстко, можна прийти до такого частотного рівняння:

$$K_{ba} + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i K_{ia} K_{bi} + \alpha_1 \alpha_2 K_{1a} K_{21} K_{b2} = 0. \qquad (3.56)$$

Тут a та b — координати лівого та правого кінців стержня відповідно. Тут (див. (3.25))

$$\alpha_i = -M_i \omega^2, \; i = 1, 2,$$

а фундаментальна функція визначена інтегралом (3.23). Якщо ж розподілена маса стержня не є зникаюче малою, то відповідне частотне рівняння матиме такий самий вигляд

$$K_{ba} - \omega^2 (M_1 K_{1a} K_{b1} + M_2 K_{2a} K_{b2}) + \omega^4 M_1 M_2 K_{1a} K_{21} K_{b2} = 0, \qquad (3.57)$$

але на відміну від рівняння (3.56), що є біквадратним відносно параметра ω^2, воно є трансцендентним відносно ω^2, бо відповідна фундаментальна функція визначена в ньому степеневим рядом (3.47). Очевидно, що рівняння (3.57) збігається з рівнянням (3.56) у разі $m(x) \equiv 0$.

З наведених універсальних частотних рівнянь можна одержувати якісні висновки про вплив параметрів системи на її власні частоти. Нехай, наприклад, жорсткість стержня є сталою і може бути або дуже великою, або дуже малою на ділянках $a < x < x_1$, $x_1 < x < x_2$ та $x_2 < x < b$. Вирізнімо випадки

$$\text{а) } K_{1a} \to 0; \quad \text{б) } K_{21} \to 0; \quad \text{в) } K_{b2} \to 0 \tag{3.58}$$

та випадки

$$\text{а) } K_{1a} \to \infty; \quad \text{б) } K_{21} \to \infty; \quad \text{в) } K_{b2} \to \infty. \tag{3.59}$$

В такому разі набувають чинності такі частотні рівняння:

— для (3.58)

$$\text{а) } K_{b1} - \omega^2 M_2 K_{21} K_{b2} = 0; \tag{3.60}$$

$$\text{б) } K_{1a} + K_{b2} - \omega^2 (M_1 + M_2) K_{1a} K_{b2} = 0; \tag{3.61}$$

$$\text{в) } K_{2a} - \omega^2 M_1 K_{1a} K_{21} = 0; \tag{3.62}$$

— для (3.59)

$$\text{а) } 1 - \omega^2 (M_1 K_{b1} + M_2 K_{b2}) + \omega^4 M_1 M_2 K_{21} K_{b2} = 0; \tag{3.63}$$

$$\text{б) } (1 - \omega^2 M_1 K_{1a})(1 - \omega^2 K_{b2}) = 0; \tag{3.64}$$

$$\text{в) } 1 - \omega^2 (M_1 K_{1a} + M_2 K_{2a}) + \omega^4 M_1 M_2 K_{21} K_{1a} = 0. \tag{3.65}$$

При виведенні рівнянь (3.60) — (3.62) використано, зокрема, формули

$$K_{ba} = K_{1a} + K_{21} + K_{b2}, \; K_{b1} = K_{21} + K_{b2}, \; K_{2a} = K_{1a} + K_{21},$$

а при виведенні рівнянь (3.63) — (3.65) — формули

$$K_{ba} = \int_a^b \frac{ds}{f(s)}, \quad K_{ia} = \int_a^{x_i} \frac{ds}{f(s)}, \quad K_{bi} = \int_{x_i}^b \frac{ds}{f(s)}, \quad K_{ji} = \int_{x_i}^{x_j} \frac{ds}{f(s)}.$$

Для випадків (3.58), яким відповідають граничні частотні рівняння (3.60) — (3.62), випливає висновок, що первісна система втрачає один ступінь вільності (необмежене зменшення податності „закріплює” одну з мас (3.58 а, в), або „фіксує” відносне розташування обидвох мас (3.58 б)). У випадках (3.59) відповідні граничні частотні рівняння (3.63) — (3.65), дають змогу з’ясувати, що тут змінюються умови закріплення первісної моделі. Отже, необмежене збільшення податності окремих ділянок призводить до перетворення стержня з закріпленими кінцями у консоль з лівим чи правим вільним кінцем (випадки (3.59 а, в)), або до двох незв'язаних між собою консолей (випадок (3.59 б).

Порівняння наведених вище частотних рівнянь дозволяє встановлювати якісні та кількісні висновки про вплив різноманітних параметрів на власні частоти розглянутих систем. Крім цього, кожне з граничних рівнянь надає додаткові можливості для аналізу відповідних первісних коливних систем. Очевидно, цілком подібно можна використовувати універсальні частотні рівняння, розробляючи згадану раніше загальну методологію дослідження моделей пружних і пружно-жорстких систем (зокрема й деяких двовимірних).

Нехай, наприклад, розподілена маса $m(x)$ розглянутого стержня є належно малою, а жорсткість першої ланки ($a < x < x_1$) — великою. Тоді один з коренів рівняння (3.57) буде близьким до кореня рівняння (3.60), а всі інші (яких безліч) будуть великими, причому тим більшими, чим меншою є маса $m(x)$.

Якщо ж вимагається, щоб дві нижчі частоти цього стержня були близькими, а всі інші значно відрізнялися від них, то як випливає з порівняння рівнянь (3.57) і (3.61), розподілена маса $m(x)$ і жорсткість середньої ланки ($x_1 < x < x_2$) повинні бути достатньо малими та повинні виконуватись умови

$$M_1 K_{1a} = M_2 K_{b2}, \; K_{b1} = K_{2a}.$$

3.8 Застосування матричної фундаментальної функції

Розглядатимемо модель консервативної механічної системи зі стаціонарними в'язями та двома ступенями вільності, що здійснює малі коливання в околі стійкої рівноваги. Положення системи нехай визначають узагальнені координати $q_1(t)$, $q_2(t)$, які стан рівноваги окреслюють як нульову точку

$$(q_1, q_2) = (0, 0).$$

Кінетична енергія системи (як зазначалося в 3.1) — це додатно-означена квадратична форма від узагальнених швидкостей, а отже її можна записати у вигляді

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2) \; (a_{12} = a_{21}). \qquad (3.66)$$

Потенціальна енергія також може бути визначена як додатно-означена (відповідно до теореми Лагранжа — Діріхле) квадратична форма — але від узагальнених координат:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2)\ \ (c_{12} = c_{21}). \tag{3.67}$$

Натомість, квадратична форма (функція Релея)

$$R = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2 + (b_{12} + b_{21})\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2^2) \tag{3.68}$$

характеризує лінійне в'язке тертя. У разі її додатної означеності повна енергія системи постійно зменшується, через що її власне і називають **функцією розвіювання** чи **дисипативною функцією**. Надалі вважатимемо, що функція Релея є невід'ємною квадратичною формою. Зазначмо, часто справджується умова $b_{12} = b_{21}$ симетричності форми (3.68).

Системі узагальнених координат та виразам (3.66) — (3.68) можна поставити у відповідність матриці

$$q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix},\ A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{Vmatrix},\ B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} \tag{3.69}$$

і рівняння вільних коливань системи

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0\,. \tag{3.70}$$

Вважатимемо, що $\det A > 0$.

Якщо на систему діятимуть узагальнені збудження (збурення) $f_1(t)$, $f_2(t)$, яким можна поставити у відповідність матрицю

$$f = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Vmatrix},$$

то механічна система здійснюватиме вимушені малі коливання відповідно до рівняння

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f\ ; \tag{3.71}$$

функції $f_1(t)$, $f_2(t)$ вважаються неперервними для всіх $t \in [0, T]$ (T — довільне число).

Процес розв'язування рівнянь (3.70), (3.71) стає однозначним, якщо вказано початкові умови (для якоїсь миті τ)

$$q(t)\big|_{t=\tau} = q_0\,,\ \dot{q}(t)\big|_{t=\tau} = \dot{q}_0\,. \tag{3.72}$$

Притім його можна провадити цілком так само як у скалярному випадку.

Розгляньмо рівняння (3.70) стосовно матриці функції $Y(t)$:

$$A\ddot{Y} + B\dot{Y} + CY = 0\,. \tag{3.73}$$

Оскільки за домовленістю $\det A(t) > 0$, то існує матриця A^{-1}, обернена до матриці A (див. (3.69); $A^{-1}A = E$; E — одинична матриця. Діючи цією матрицею на рівняння (3.73), його можна звести до вигляду

$$\ddot{Y} + \tilde{B}\dot{Y} + \tilde{C}Y = 0\ \ (\tilde{B} = A^{-1}B,\ \tilde{C} = A^{-1}C\ ). \tag{3.74}$$

Довільні **матриці** $Y_1(t)$ і $Y_2(t)$ називаються **лінійно незалежними**, якщо рівність

$$Y_1C_1 + Y_2C_2 = 0$$

(C_1, C_2 — сталі матриці) справджується тотожно тільки, коли $C_1 = C_2 = 0$, в іншому разі вони є лінійно залежними. **Необхідною й достатньою умовою** того, щоб **розв'язки-матриці** $Y_1(t)$ і $Y_2(t)$ рівняння (3.73) були **лінійно незалежними,** є вимога, щоб визначник блочної матриці

$$\left\|\begin{matrix} Y_1 & Y_2 \\ \dot{Y}_1 & \dot{Y}_2 \end{matrix}\right\|$$

не дорівнював нулю.

Якщо $Y_1(t)$ і $Y_2(t)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння (3.73), то загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді

$$Y = Y_1C_1 + Y_2C_2\,, \tag{3.75}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі матриці. Далі, якщо $Y(t)$ — розв'язок рівняння (3.73), а c — деякий сталий вектор, то $Y(t)c$ — загальний розв'язок рівняння

$$\ddot{q} + \tilde{B}\dot{q} + \tilde{C}q = 0\,. \tag{3.76}$$

Таким чином, зважаючи на (3.75), загальний розв'язок рівняння (3.76) можна подати у вигляді

$$q(t) = Y_1(t)c_1 + Y_2(t)c_2\,. \tag{3.77}$$

За аналогією з випадком скалярного диференціального рівняння вдамося до поняття **фундаментальної матриці-функції** $K(t,\tau)$, що за означенням зобов'язана бути розв'язком матричного диференціального рівняння (3.70) та задовольняти початкові умови

$$K(t,\tau)\big|_{t=\tau}=0\,,\ \left.\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=E\,. \qquad (3.78)$$

Така функція існує і є єдиною (відповідно до загальної теорії диференціальних рівнянь).

Можна пересвідчитися, що матриці-функції

$$K(t,\tau)\,,\ \frac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau}$$

разом складають лінійно незалежну систему розв'язків рівняння (3.74). Тож, загальний розв'язок (3.77) можна записати у вигляді

$$q(t)=q_\circ(t)=K(t,\tau)c_1+\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau}c_2\,. \qquad (3.79)$$

Натомість, загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$\ddot{q}+\tilde{B}\dot{q}+\tilde{C}q=\tilde{f}\ \ (\tilde{B}=A^{-1}B,\ \tilde{C}=A^{-1}C\,,\ \tilde{f}=A^{-1}f\ ). \qquad (3.80)$$

можна подати як суму

$$q(t)=q_\circ(t)+q_*(t)=K(t,\tau)c_1+\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau}c_2+\int_\tau^t K(t,s)\,A^{-1}(s)\,f(s)\,ds\,, \quad (3.81)$$

що містить загальний розв'язок (3.79) супровідного однорідного рівняння (3.70) та окремий розв'язок

$$q_*(t)=\int_\tau^t K(t,s)\,A^{-1}(s)\,f(s)\,ds$$

власне цього неоднорідного рівняння; цей окремий розв'язок задовольняє нульові початкові умови

$$q_*(\tau)=0\,,\ \dot{q}_*(\tau)=0\,. \qquad (3.82)$$

Щоб пов'язати розв'язок (3.81) з початковими умовами (3.72), необхідно знайти величини (матриці)

$$\left.\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial\tau}\right|_{t=\tau},\ \left.\frac{\partial^2 K(t,\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\right|_{t=\tau}.$$

Покладімо, що фундаментальна матриця-функція має структуру

$$K(t,\tau) = \begin{Vmatrix} K_{11}(t,\tau) & K_{12}(t,\tau) \\ K_{21}(t,\tau) & K_{22}(t,\tau) \end{Vmatrix}.$$

Розгортаючи кожен елемент $K_{ij}(t,\tau)$ $(i, j = 1, 2)$ наведеної матриці в ряд Тейлора в околі $t = \tau$, матимемо співвідношення

$$K(t,\tau) = K(\tau,\tau) + \frac{t-\tau}{1!}\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t}\bigg|_{t=\tau} + \frac{(t-\tau)^2}{1!}\frac{\partial^2 K(t,\tau)}{\partial t^2}\bigg|_{t=\tau} + \ldots$$

чи, раче,

$$K(t,\tau) = \frac{t-\tau}{1!}E + \frac{(t-\tau)^2}{1!}\frac{\partial^2 K(t,\tau)}{\partial t^2}\bigg|_{t=\tau} + \ldots$$

відповідно до (3.78). Понад те, на підставі (3.74) при $t = \tau$ знаходимо, що

$$\frac{\partial^2 K(t,\tau)}{\partial t^2}\bigg|_{t=\tau} = -\tilde{B}(\tau).$$

Тож

$$K(t,\tau) = \frac{t-\tau}{1!}E - \frac{(t-\tau)^2}{1!}\tilde{B}(\tau) + \ldots,$$

звідки

$$\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial \tau}\bigg|_{t=\tau} = -E, \quad \frac{\partial^2 K(t,\tau)}{\partial t\,\partial \tau}\bigg|_{t=\tau} = \tilde{B}(\tau). \qquad (3.83)$$

В такому разі, розв’язок (3.81) рівняння (3.80), зважаючи на (3.72), (3.82), (3.78), (3.83), можна подати у вигляді

$$q(t) = K(t,\tau)(\dot{q}_0 + A^{-1}(\tau)B(\tau)q_0) -$$

$$-\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial \tau}q_0 + \int_\tau^t K(t,s)A^{-1}(s)\,f(s)\,ds.$$

Натомість, розв’язок цілком схожого скалярного диференціального рівняння другого порядку

$$L[q] = a(t)\ddot{q} + b(t)\dot{q} + c(t)q = f(t), \; a(t) > 0$$

за початкових умов

$$q(t)\big|_{t=\tau} = q_0 \,,\ \dot{q}(t)\big|_{t=\tau} = \dot{q}_0$$

мав би вигляд

$$q(t) = K(t,\tau)\left(\dot{q}_0 + \frac{b(\tau)}{a(\tau)} q_0 \right) - \frac{\partial K(t,\tau)}{\partial \tau} q_0 + \int_{\tau}^{t} K(t,s) \frac{f(s)}{a(s)} ds \,.$$

Як бачимо, простежується повна змістовна й формальна аналогія між поняттями фундаментальної функції, відповідної системі з одним ступенем вільності, та фундаментальної матриці-функції, відповідної системі з двома ступенями вільності. Ця аналогія поширюється й на системи з n ступенями вільності та на системи диференціальних рівнянь високих порядків.

4 ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДОМ ГОЛОВНИХ КООРДИНАТ

4.1 Основні диференціальні рівняння руху систем зі скінченною кількістю ступенів вільності

Кожна реальна механічна система практично завжди має безмежну кількість ступенів вільності. Однак задля спрощення процесу пізнання цією обставиною дуже часто (вимушено чи вмотивовано) нехтують і моделюють її відповідною системою зі скінченною кількістю ступенів вільності. Щоб укласти диференціальні рівняння руху модельної системи зі скінченною кількістю ступенів вільності, найчастіше вдаються до методу рівнянь Лагранжа другого роду або до принципу Д'Аламбера й загального рівняння динаміки. Побудовані таким чином рівняння руху — це майже завжди система нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, в яких фігурують (узагальнені) координати, швидкості й пришвидшення. Подальші спрощення (знову ж таки, вимушено чи вмотивовано) вже пов'язані з лініаризацією.

Обмежимось тут лінійними механічними системами (моделями) з голономними стаціонарними в'язями, а до нелінійних механічних систем, досліджуючи їх малі коливання, застосовуватимемо лініаризацію. При цьому матимемо диференціальні рівняння руху в зусиллях або в переміщеннях [7, 20]:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = F(t)\,, \tag{4.1}$$

$$q = \beta[F(t) - A\ddot{q} - B\dot{q}]\,. \tag{4.2}$$

Тут

$$A = \| a_{ij} \|\,,\ B = \| b_{ij} \|$$

— відповідно інерційна та дисипативна матриці;

$$C = \left\| c_{ij} \right\|,\ \beta = \left\| \beta_{ij} \right\| \quad (\beta = C^{-1})$$

— матриці жорсткості та податності (їх елементи називають **коефіцієнтами жорсткості** механічної системи та **коефіцієнтами** її **податності**);

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)^{\mathrm{T}},$$

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_k)^{\mathrm{T}}$$

— матриці-стовпці узагальнених координат $q_i(t)$ й узагальнених сил $F_i(t)$ (T позначає транспонування).

Способи побудови матриць A, C і B розглядаються в багатьох працях (див. [4, 6 — 8, 20, 24, 36, 45, 49, 55 —57] та інші). Є сенс наголосити, що розрізняють три різновиди дисипативної матриці B:

$$B_1 = \left\| b_{ij} \right\|,\ B_2 = \left\| \hat{b}_{ij} \right\|,\ B_3 = \left\| \tilde{b}_{ij} \right\| \tag{4.3}$$

Перша з них відповідає зовнішньому або в'язкому (частотно-залежному) тертю, причому коефіцієнти b_{ij} визначають відому квадратичну форму — функцію Релея; друга — внутрішньому або гістерезисному (частотно-незалежному) тертю, третя — сухому тертю. Способи побудови матриць B_2 та B_3 (відповідних квадратичних форм), їх властивості й застосування висвітлені, зокрема, в [7].

Рівняння (4.1) і (4.2) застосовують до систем зі сталим або східчасто-сталим розподілом параметрів без абсолютно жорстких чи абсолютно податних елементів. Завдяки застосуванню поняття фундаментальної функції можна, як з'ясовується в даній роботі, істотно розширити межі застосовності вказаних рівнянь і розробити основи нової методики дослідження достатньо загальних моделей пружно-жорстких систем.

Із (4.1) та (4.2) випливає, що рівняння вільних коливань консервативної механічної системи з k ступенями вільності в околі стійкого стану рівноваги $q \equiv 0$ можна в загальному випадку записати так:

$$A\ddot{q} + Cq = 0; \tag{4.4}$$

$$\beta A\ddot{q} + q = 0. \tag{4.5}$$

Вигляд цих рівнянь, як і матриць A, C, β та відповідних квадратичних форм для кінетичної і потенціальної енергії системи $T(q, \dot{q})$ і $\Pi(q)$, залежить від вибору узагальнених координат.

Якщо інерційна матриця $A = \left\| m_{ij} \right\|$ — діагональна (квадратична форма T в прийнятій системі координат має канонічний вигляд, тобто відсутні в ній добутки узагальнених швидкостей з різними індексами), то рівняння (4.4) можна записати в так званій прямій формі, зокрема, в індексному вигляді

$$m_i \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{k} c_{ij} q_j = 0, \ i = \overline{1,k}. \tag{4.6}$$

Якщо матриця жорсткості $C = \left\| c_{ij} \right\|$ — діагональна (квадратична форма Π має канонічний вигляд), то рівняння коливань (4.4) матиме обернену форму:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \ddot{q}_j + c_i q_i = 0, \ i = \overline{1,k}. \tag{4.7}$$

Якщо ж обидві матриці A і C — діагональні, то відповідні узагальнені координати y_i називають головними (нормальними). Очевидно, матричне рівняння (4.4) в головних координатах рівносильне системі незв'язних рівнянь

$$m_i \ddot{y}_i + c_i y_i = 0, \ i = \overline{1,k}. \tag{4.8}$$

їх розв'язки називають головними коливаннями системи.

Зауважмо, що ті самі варіанти (4.6) — (4.8) рівнянь малих коливань неважко одержати, виходячи з (4.5).

Розв'язувати наведені рівняння можна, наприклад, методом Ойлера. Підставляючи в (4.4)

$$q = q_0 e^{\lambda t}$$

де λ — характеристичний показник, q_0 — деяка стала матриця-стовпець, приходимо до характеристичного рівняння

$$\det \left\| A\lambda^2 + C \right\| = 0. \tag{4.9}$$

Оскільки матриці A і C — симетричні та додатно визначені, то всі корені λ_s цього рівняння є суто уявними і попарно комплексно-спряженими [7]. Знайшовши λ_s, можна побудувати загальний розв'язок диференціального рівняння (4.4).

Зазначмо, що корені характеристичних рівнянь для даної коливної системи не залежать від вибору узагальнених координат.

4.2 Побудова загальних розв’язків методом головних коливань

Окремий розв’язок матричного диференціального рівняння (4.4) можна шукати в такому вигляді [7, 23]:

$$q = uH\cos(\omega t - \varphi). \tag{4.10}$$

Тут u — матриця-стовпець, тобто вектор амплітудних коефіцієнтів (власний вектор, форма коливань); H — деяка стала (амплітуда відповідного головного коливання); ω — параметр колової частоти ($\omega^2 = -\lambda^2$); φ — параметр початкової фази. Підставляючи (4.10) в (4.4), одержуємо матричне алгебричне рівняння

$$\left\| C - \omega^2 A \right\| u = 0. \tag{4.11}$$

Ненульові розв’язки цього рівняння для вектора u існують тоді й тільки тоді, коли

$$\det\left\| C - \omega^2 A \right\| = 0. \tag{4.12}$$

Це — так зване **вікове** або **частотне рівняння**. Порівнюючи його з (4.9), бачимо, що

$$\lambda = \pm\sqrt{-1}\,\omega.$$

Корені ω_i^2 ($i = \overline{1,k}$) таких рівнянь не залежать від вибору координат і визначаються лише фізичними властивостями коливної системи [2, 7, 23]. Тому величини

$$\omega_i = \sqrt{\omega_i^2}, \; \omega_i^2 = \frac{c_i}{m_i} \; (i = \overline{1,k})$$

називають **власними частотами системи**, а їх впорядкована сукупність

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_i < \ldots < \omega_k$$

утворює **спектр власних частот** (тут і надалі ω_i^2 вважаються простими коренями рівняння (4.12)).

Після обчислення власних частот можна визначати, повертаючись до рівняння (4.11), амплітудні коефіцієнти (компоненти власного вектора u). Підставивши значення ω_i в (4.11), одержимо для знаходження k невідомих компонент відповідного вектора u_i систему k лінійно-незалежних рівнянь. Тому одну з компонент можна вибрати довільно, покладаючи, зокрема, $u_{1i} = 1$. Тоді, розв'язавши вказану систему, матимемо:

$$u_i = (1, u_{2i}, u_{3i}, \ldots, u_{ki}) .$$

Ця формула визначає *i*-ий власний вектор (*i*-ту власну форму коливань), що відповідає власній частоті ω_i ($i = \overline{1,k}$).

Маючи сукупність власних векторів системи, можна записати відповідну матрицю амплітудних коефіцієнтів

$$U = \left\| u_{ij} \right\| , \tag{4.13}$$

причому, як випливає з (4.10) і (4.13), загальний розв'язок матричного рівняння (4.4) має таку структуру

$$q = Uy . \tag{4.14}$$

Тут $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ — матриця-стовпець головних коливань системи (розв'язків рівнянь (4.8)):

$$y_i = H_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) ,\ i = \overline{1,k} \tag{4.15}$$

(сталі інтегрування H_i та φ_i визначаються з початкових умов).

Зазначмо, що співвідношення (4.14) — (4.15) застосовні до всіх видів рівнянь вільних коливань, зокрема до (4.5) — (4.8) (якщо узагальнені координати $q_i \equiv y_i$, то матриця амплітудних коефіцієнтів U є одиничною матрицею). З цих співвідношень випливає важливий висновок: загальний розв'язок рівняння вільних коливань є суперпозицією головних коливань, тобто

$$q_j = \sum_{i=1}^{k} u_{ij} y_i ,\ j = \overline{1,k} . \tag{4.16}$$

Наведений висновок та спосіб побудови формули (4.16) ілюструє суть та одне з основних застосувань так званого **методу головних коливань**.

4.3 Головні координати

Існування головних координат y_1, y_2, …, y_k тієї чи іншої коливної системи випливає з відомої теореми лінійної алгебри: пару квадратичних форм (T і Π), з яких хоча б одна є додатно визначеною, можна перетворити до канонічного вигляду єдиною лінійною заміною (4.14).

Після проведення цієї заміни в квадратичних формах

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \text{ та } \Pi = \frac{1}{2}\sum c_{ij}q_iq_j$$

вони визначатимуться такими співвідношеннями:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\dot{y}^{\mathrm{T}}\tilde{A}\dot{y}\,,\ \Pi = \frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}\tilde{C}y\,, \tag{4.17}$$

де y^{T} — матриця-рядок (тобто транспонована до y матриця);

$$\tilde{A} = \| m_i \|,\ \tilde{C} = \| c_i \| \tag{4.18}$$

— діагональні матриці. При цьому, очевидно, вихідне матричне рівняння (4.4), рівноцінне системі рівнянь (4.8).

Отже, **головні координати** даної **коливної системи** з k ступенями вільності — це такі узагальнені координати $y_1, y_2, \ldots, y_k$, в яких кінетична енергія Т і потенціальна енергія П мають канонічний вигляд (4.17), а рівняння (4.4) має діагональну форму з матрицями (4.18).

Тому знову одержуємо незв’язні рівняння (4.8), описи головних коливань (4.15) та співвідношення (4.16). При цьому можна переконатися в єдиності лінійної заміни (4.14). Також можна довести, що тією ж заміною загальне рівняння вільних коливань (4.4) зводиться до (4.8), і з використанням головних коливань (4.15) одержати загальний розв’язок (4.16) задачі про вільні коливання в довільній системі координат [7, 23].

Головні координати мають велике теоретичне й практичне значення. Їх застосування дозволяє вивчати вплив тертя й малих нелінійностей на коливання та стійкість, на вимушені коливання й резонансні явища тощо, а також удосконалювати й розвивати відомі методи дослідження динамічної поведінки механічних систем [7, 23].

4.4 Задача про власні значення та основні властивості власних частот і форм коливань

Матричне рівняння (4.11) можна записати у вигляді

$$\left\| A^{-1}C - \omega^2 E \right\| u = 0\,. \tag{4.19}$$

Отже, знаходження власних частот системи і відповідних форм тотожне за змістом відомій алгебричній проблемі власні значення і власні вектори матриці $A^{-1}C$.

Нехай ця матриця є симетричною (або ж її можна симетризувати) та додатно визначеною. В такому разі [7, 23]:

— всі власні числа ω_i^2 ($i = \overline{1,k}$) — дійсні й додатні;

— кожній власній частоті ($\omega_i = +\sqrt{\omega_i^2}$) відповідає свій власний вектор (власна форма коливань) u_i;

— власні форми коливань, які відповідають різним власним частотам, попарно ортогональні з вагою матриць A та C:

$$u_i^{\mathrm{T}} A u_j = 0 \; (i \neq j),$$
$$u_i^{\mathrm{T}} C u_j = 0 \, (i \neq j) \tag{4.20}$$

(u_i^{T} — транспонована до u_i матриця);

— власні форми коливань є лінійно незалежними й утворюють базис в k-вимірному векторному просторі.

Узагальнюють формули (4.20) співвідношення

$$U^{\mathrm{T}} A U = \tilde{A}, \quad U^{\mathrm{T}} C U = \tilde{C} \tag{4.21}$$

(U^{T} — матриця, транспонована до (4.13), $\tilde{A}$ і $\tilde{C}$ — діагональні матриці (4.18)).

Якщо $i \neq j$, то з (4.21) можна отримати умови ортогональності (4.20); якщо ж $i = j$, то

$$u_i^{\mathrm{T}} A u^i = m_i, \; u_i^{\mathrm{T}} C u^i = c_i . \tag{4.22}$$

Вирази (4.22) називають **формулами зведення** й використовують, зокрема, для нормування власних векторів.

Крім цього, як випливає з (4.13) — (4.14), форми коливань не залежать від початкових умов, але залежать від системи координат; i-та форма коливань має i пучностей (максимальних відхилень) та i вузлів (нерухомих точок; точки на жорстких нерухомих опорах не належать до вузлів).

Якісний вплив параметрів жорсткості та інерції системи, а також в'язей, розкривають такі теореми Релея [7]:

— збільшення жорсткості збільшує (або принаймні не змінює) власні частоти;

— збільшення інертності зменшує (або принаймні не змінює) власні частоти;

— власні частоти $\tilde{\omega}_i$ системи з додатковою в'яззю розмежовують власні частоти ω_i первісної системи, так що

$$\omega \leq \tilde{\omega}_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_{n-1} \leq \tilde{\omega}_{n-1} \leq \omega_n .$$

Приклади застосування формул (4.20) — (4.22) та їх різновидів розглядаються в багатьох працях (див. [2, 4, 6 — 8, 20, 24, 36, 45, 49, 55 —57] та інші).

Відзначмо, що проблема (4.19) про власні значення матриці $A^{-1}C$ є однією з основних в теорії коливань. Тому згаданим щойно та спорідненим питанням (випадки наявності кратних частот, існування власних значень тощо) присвячена велика увага (див., наприклад, [8, 23]).

4.5 Тертя в задачах про вільні та вимушені коливання

За наявності чинників (сил) тертя замість (4.9) матимемо характеристичне рівняння

$$\det\left\| A\lambda^2 + B\lambda + C \right\| = 0 . \qquad (4.23)$$

Можна відзначити три обставини, які зумовлюють тут доцільність застосування методу головних коливань [7]. По-перше, характеристики тертя експериментально визначають тільки при головних коливаннях; по-друге, розв'язування рівняння (4.23) сильно ускладнюється зі збільшенням кількості ступенів вільності (навіть для систем з двома ступенями вільності його розв'язувати нелегко); по-третє, якщо домогтися повного відокремлення змінних, як і при застосуванні методу головних коливань до систем без тертя, то не виникає труднощів для побудови загальних розв'язків відповідних рівнянь вільних і вимушених коливань.

Нехай, наприклад, перша з дисипативних матриць (4.3) (для частотно-залежного тертя) визначена формулами

$$B_1 = B_1 C , \quad B_1 = \tilde{B}_1 A \qquad (4.24)$$

(вони відповідають внутрішньому та зовнішньому в'язкому тертю), тобто коефіцієнти пропорційності B_1 та $\tilde{B}_1$ вважаються однаковими для всіх головних координат. Тоді, підставляючи (4.14) з урахуванням формул (4.24) у рівняння руху (4.1) та застосовуючи метод головних коливань, одержуємо відповідні системи рівнянь в головних координатах:

$$\tilde{A}\ddot{y} + B_1\tilde{C}\dot{y} + \tilde{C}y = U^{\mathrm{T}}F , \quad \tilde{A}\ddot{y} + \tilde{B}_1\tilde{A}\dot{y} + \tilde{C}y = U^{\mathrm{T}}F . \qquad (4.25)$$

Тут $\tilde{A}$ і $\tilde{C}$ — діагональні матриці (4.18). Отже, із (4.25) маємо окремі рівняння для визначення функцій $y_i(t)$:

$$\ddot{y}_i + B_1\omega_i^2\dot{y}_i + \omega_i^2 c_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{k} u_{ji}F_j$$

$$\ddot{y}_i + \tilde{B}_1 \omega_i^{-2} \dot{y}_i + \omega_i^2 c_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{k} u_{ji} F_j \,, \tag{4.26}$$

де величини m_i та c_i обчислюються за формулами зведення (4.22). Звідси видно, що частоти вільних згасаючих коливань визначаються так:

$$\tilde{\omega}_i^2 = \omega_i^2 - h_i^2 ; \; \omega_i^2 = \frac{c_i}{m_i} . \tag{4.27}$$

Причому коефіцієнти в’язкого демпфування за i-тою головною координатою відповідно до співвідношень (4.24) є такими [7]:

$$h_i = \frac{1}{2} B_1 \omega_i^2 ,$$

$$h_i = \frac{1}{2} \tilde{B}_1 ; \; i = \overline{1, k} . \tag{4.28}$$

Логарифмічні декременти головних коливань в обидвох випадках по-різному залежать від частоти:

$$\Lambda_i \approx \pi B_1 \omega_i ,$$

$$\Lambda_i = \frac{\pi \tilde{B}_1}{\omega_i} ; \quad i = \overline{1, k} \tag{4.29}$$

Якщо внутрішнє тертя не залежить від частоти, то його визначають за гіпотезою Бока — Шліппе — Колара, покладаючи в рівнянні (4.1)

$$B\dot{q} = \alpha_1 C I \dot{q} , \tag{4.30}$$

де I — матриця так званих коректувальних множників, $\alpha_1 = \text{const}$. Тоді [7]:

$$h_i = \frac{1}{2} \alpha_1 \omega_i ,$$

$$\Lambda_i = \pi \alpha_1 ; \quad i = \overline{1, k} . \tag{4.31}$$

Беручи до уваги формули (4.27) — (4.31), неважко будувати загальні розв’язки рівнянь (4.26) в головних координатах, а з урахуванням (4.14) — в довільних узагальнених координатах.

Зображення й аналіз вказаних розв’язків для різних можливих випадків вільних та вимушених коливань можна знайти, зокрема, в монографіях [2, 4, 6, 7, 20, 24].

4.6 Задача про поздовжні коливання прямолінійного стержня з довільним розподілом параметрів

Пружний стержень з прямою віссю, жорсткість і маса якого є довільними допустимими функціями вісної координати x, є підстави вважати однією з найпростіших але змістовно достатньо загальною моделлю коливних систем [7, 8, 20, 24, 36, 45, 49, 55 —57].

Малі поздовжні коливання такого стержня найчастіше описуються рівнянням

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(EF(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=G(x,t)\,. \tag{4.32}$$

Тут $u=u(x,t)$ — поздовжнє переміщення; $EF(x)$, $\mu(x)$ та $G(x,t)$ — жорсткість стержня, функція розподілу мас та зовнішнє вісне навантаження. Це рівняння доповнюється відповідними крайовими й початковими умовами.

Якщо стержень має пружно закріплені кінці, то крайові умови є такими [8, 20]:

$$\left.\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}-\kappa_1 u\right)\right|_{x=a}=0\,,\quad \left.\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}+\kappa_2 u\right)\right|_{x=b}=0\,, \tag{4.33}$$

де a та b — координати лівого та правого кінців стержня; κ_1 і κ_2 — невід’ємні параметри.

Початкові умови характеризують відхилення від недеформованого стану точок восі стержня та їх швидкості в мить часу $t=0$:

$$u(x,0)=u_0(x)\,;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=v_0(x)\,. \tag{4.34}$$

Задачу (4.32) — (4.34) називають **змішаною задачею**. Зазначмо, що рівняння (4.32) — наближене (технічна теорія поздовжніх коливань [8]). Тут, по-перше, приймається гіпотеза пласких перерізів (вважається, що точки стержня, розміщені в перерізах, перпендикулярних до восі Ox, мають однакові переміщення); по-друге, нехтується впливом поперечних деформацій (відкидаються складові з множником ν^2, де ν — коефіцієнт Пуассона, $0\le\nu<0{,}5$).

Будемо розглядати передусім вільні коливання (коли $G(x,t)\equiv 0$). Підставляючи в (4.32) — (4.33) добуток

$$u(x,t)=y(x)\exp\lambda t\,;\quad \lambda=\sqrt{-1}\;\omega\,,$$

одержуємо після відокремлення змінних звичайне однорідне диференціальне рівняння

$$L[y] \equiv (f(x)y')' + \omega^2 \mu(x) y = 0 \tag{4.35}$$

з однорідними крайовими умовами

$$(f(x)y' - \kappa_1 y)\big|_{x=a} = 0,$$

$$(f(x)y' + \kappa_2 y)\big|_{x=b} = 0. \tag{4.36}$$

Тут і далі $f(x)$ — жорсткість стержня; κ_1, κ_2 — сталі; $\mu(x)$ — узагальнена функція, визначувана як

$$\mu(x) = m(x) + \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_i), \tag{4.37}$$

де $m(x)$ — функція, що характеризує розподілену масу; M_i — маса, зосереджена в точці x_i восі стержня;

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b;$$

$f(x)$ і $m(x)$ вважаються інтегровними функціями і такими, що задовольняють нерівності

$$f(x) > 0, \; m(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Задача (4.35) — (4.36) — це задача на власні значення, яку можна вважати однією з основних як в теорії коливань пружних стержнів, так і в рамках загальної проблеми моделювання коливних пружно-жорстких систем. Маючи її розв'язок, тобто власні частоти ω_i $(i = 1, 2, \ldots)$ та відповідні власні форми $y_i(x)$, можна відомими методами розв'язувати також і змішану задачу (4.32) — (4.34).

4.7 Універсальне частотне рівняння неперервно-дискретної моделі

Розгляньмо задачу (4.35) — (4.36) з урахуванням формули (4.37). Тоді, беручи до уваги співвідношення з 3.5, записуємо загальний розв'язок рівняння (4.35) у вигляді

$$y = A_1 Q(x, a) + A_2 \dot{Q}(x, a), \tag{4.38}$$

де A_1, A_2 — довільні сталі;

$$Q = \psi + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \psi_i \Phi_{xi} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i}^{k} \gamma_i \gamma_j \psi_i K_{ji} \Phi_{x_j} + \ldots +$$

$$+\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k \psi_1 K_{21} K_{32} \ldots K_{k,k-1} \Phi_{xk} ,$$

$$\psi \equiv K(x,\alpha),\ \Phi = K(x,\alpha)\,\theta(x-\alpha),\ \psi_i = K(x_i,\alpha),\ \Phi_{xi} = \Phi(x, x_1)$$

$$K_{ji} = K(x_j, x_i),\ \gamma_i = -\mu_i \omega^2 . \tag{4.39}$$

Підставляючи загальний розв’язок (4.38) для значення $\alpha = a$ в крайові умови (4.36), приходимо до системи однорідних алгебричних рівнянь для визначення довільних сталих A_1 і A_2 :

$$A_1 + A_2 \frac{\kappa_1}{f(a)} = 0 , \quad A_1 D(b,a) + A_2 \frac{\partial D(b,a)}{\partial a} = 0 , \tag{4.40}$$

де

$$D(b,a) = f(b) \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x=b,\alpha=a} + \kappa_2\, Q(b,a) .$$

Система рівнянь (4.40) має ненульові розв’язки тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулеві; прирівнюючи цей визначник до нуля, отримуємо [7]:

$$\left.\left(\kappa_1 \kappa_2 Q + \kappa_1 f(b) \frac{\partial Q}{\partial x} - \kappa_2 f(a) \frac{\partial Q}{\partial \alpha} - f(a) f(b) \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial \alpha} \right)\right|_{x=b,\alpha=a} . \tag{4.41}$$

Дане рівняння є характеристичним (частотним) рівнянням, відповідним задачі на власні значення (4.35) — (4.36). З нього для окремих нетривіальних випадків одержуємо рівності

$$Q(b,a) = 0 , \quad Q'(b,a) = 0 , \quad \dot{Q}(b,a) = 0 ,$$

$$\left.\frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial \alpha}\right|_{x=b,\alpha=a} = 0 . \tag{4.42}$$

Ці рівності відповідають таким умовам закріплення кінців: стержень з затиснутими кінцями; консоль з лівим та консоль з правим закріпленням; стержень з вільними кінцями.

Отже, щоб побудувати характеристичні рівняння задачі (4.35) — (4.36) в загальному або в окремих випадках, досить мати фундаментальну функцію $K(x,\alpha)$ для рівняння (4.35), одержаного для стержня без зосереджених мас ($M_i = 0$; $i = \overline{1, k}$). Така побудова здійснюється для будь-яких допустимих функцій розподілу жорсткостей і мас, для довільної скінченної кількості зосереджених мас M_i та довільних (допустимих) значень параметрів [7]. Вона спирається на формулу (4.39), при тім не виникає потреба оперувати умовами спряження, що є необхідними у разі застосовування інших способів [13, 14]. Тому наведені рівняння називатимемо **універсальними частотними рівняннями**.

4.8 Про двобічні послідовності оцінок власних частот

Нехай фундаментальна функція, відповідна рівнянню (4.35), будується як ряд за степенями ω^2. Тоді, беручи до уваги формули (4.39) та універсальні рівняння (4.41) — (4.42), одержуємо частотне рівняння відповідної задачі в такому вигляді:

$$a_0 - a_1\omega^2 + a_2\omega^4 - a_3\omega^6 + \ldots = 0\,. \qquad (4.43)$$

Для системи континуальної чи континуально-дискретної ліва частина цього рівняння є степеневим рядом за параметром ω^2; для системи з k ступенями вільності — многочленом степеня $2k$ (його корені визначаються точно, коли $k \le 4$) тому тут для визначення нижчих частот доцільно застосовувати відомі двобічні оцінки, або методи обчислювальної математики [39]. Зокрема, для першої та другої частот за наявності коефіцієнтів a_i в рівнянні (4.43) використовуються такі послідовності двобічних оцінок [3, 49]:

$$(\tilde{\varphi}_j(b_s)\alpha_s^{-1})^{\frac{1}{2s}} < \omega_j < (\varphi_j(b_s)\alpha_s^{-1})^{\frac{1}{2s}}\,, \quad j = 1, 2\,,$$

де

$$b_s = \alpha_{2s}\,\alpha_s^{-2}\,,\; s = 1, 2, \ldots;$$

$$\tilde{\varphi}_1(b_s) = b_s^{-0,5}\,,\; \varphi_1(b_s) = 2\left[1 + (2b_s - 1)^{0,5}\right]^{-1};$$

$$\tilde{\varphi}_2(b_s) = 2\left[1 - (2b_s - 1)^{0,5}\right]^{-1},\; \varphi_2(b_s) = 2\left[1 - \left(\frac{3}{4}b_s - \frac{1}{3}\right)^{0,5}\right]^{-1},$$

а величини α_s пов’язані з коефіцієнтами a_s формулами Ньютона

$$\alpha_s = a_1\alpha_{s-1} - a_2\alpha_{s-2} + \ldots + (-1)^s a_{s-1}\alpha_1 + (-1)^{s+1} s a_s .$$

При цьому має справджуватися нерівність

$$a_1^2 \geq 4a_0 a_2 ,$$

що забезпечує відсутність кратних коренів ($\omega_1 \neq \omega_2$). Тоді, пересічно досить вузьку „вилку” для основної частоти окреслюватимуть найпростіші оцінки

$$\frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 - 2a_0 a_2}} < \omega_1^2 < \frac{2a_0}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}} .$$

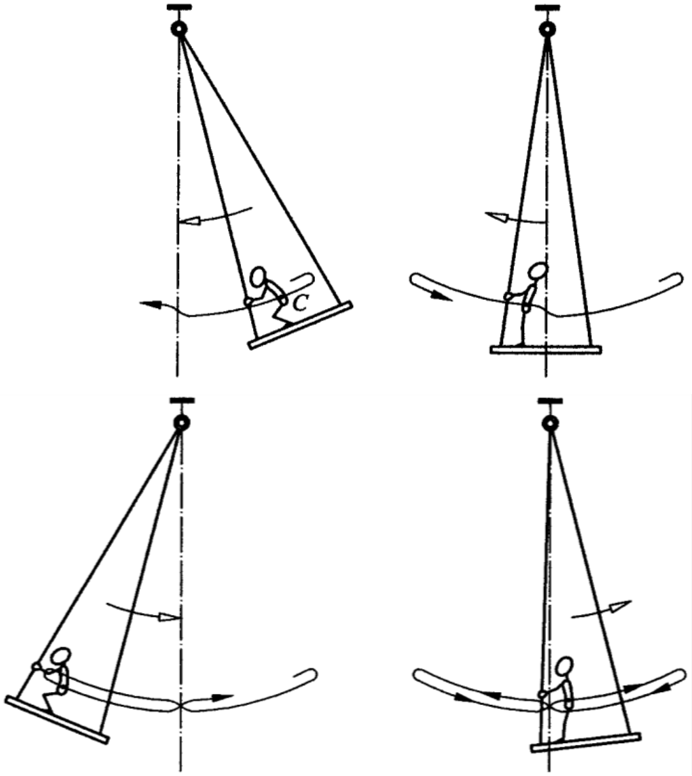
Наведені формули є зручними й для дослідження впливу різних параметрів системи на нижчі частоти вільних коливань. Зазначмо, що для знаходження наближених значень трьох наступних частот також доцільно використовувати формули й таблиці Бернштейна — Керопяна [3].

5 ФУНДАМЕНТАЛЬНА ФУНКЦІЯ В ЗАДАЧАХ ПРО ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ

5.1 Зміст задач про параметричні коливання

Енергія в систему може надходити не тільки ззовні, а й зсередини. Наприклад, людина на орелях, вихалці (рис. 6) може розгойдатися від довільної малої амплітуди до певної великої, присідаючи в крайніх (верхніх) положеннях орелей, і різко випростовуючись в середніх (нижніх) її положеннях. Центр мас людини (точка C), а отже й центр мас системи загалом, періодично опускається й піднімається так, що траєкторії його руху в різні боки не збігаються. Те, що траєкторія руху центра мас має форму петлі є свідченням того, що коливання зумовлені виконанням певної циклічної механічної роботи (та відповідної біологічної роботи в організмі людини).

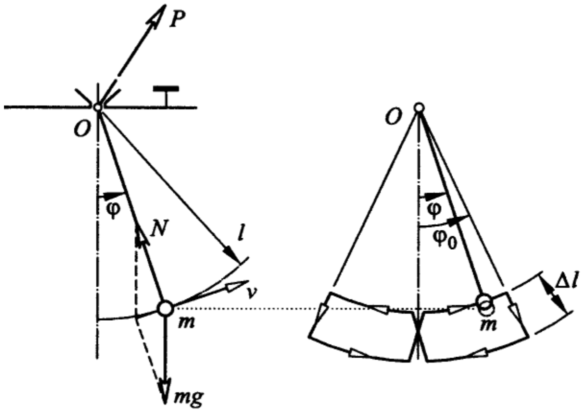
Присідаючи-випростовуючись на нерухомих орелях, людині виконати роботу над системою, звісно, не вдасться (робота проти сил тяжіння, виконана при випростовуванні, повернеться роботою над людиною при її присіданні). А от періодичним змінюванням положення центра мас в горизонтальному напрямі можна якось орелі розгойдати. Далі, на рухомих орелях людина зі зміною висоти свого центра мас, розвиває зусилля, пропорційне радіальному (доцентровому) пришвидшенню і здатна виконати відповідну роботу. Радіальне пришвидшення залежить від швидкості обертового (коливного) руху і набуває найбільших значень, коли орелі проминають середнє (нижнє) положення. Власне в цьому середньому положенні людина повинна різко випростатись. В крайніх (верхніх) положеннях орелі, натомість, мають нульові значення швидкості й пришвидшення, тож людина може присісти без виконання роботи. За коливний цикл робота проти сил тяжіння все-дно дорівнюватиме нулю.



6 **Схема, що ілюструє принцип розгойдування на орелях (вихалці) та підтримування процесу гойдання за рахунок внутрішніх чинників.**

Розтлумачити (не змінюючи суті) явище розгойдування орелей можна й по-іншому. Система „орелі — людина" здійснює періодичні зворотно змінні обертові рухи (гойдання). Отже випростовуючись (присідаючи), людина зменшує (збільшує) момент інерції системи. Оскільки момент імпульсу при цьому не змінюється, то зростає (зменшується) кутова швидкість руху орелей. Тож, в середньому положенні орелей енергія системи з випростовуванням людини збільшується на величину роботи, яку доведеться виконати людині. Натомість, в крайніх положеннях, швидкість, а отже й момент імпульсу, дорівнює нулю; тому зміна (миттєва!) моменту інерції не позначається на запасі енергії в системі.

Розгойдування орелей — це типовий приклад **параметричних коливань** без прикладання активних зовнішніх чинників. Далі розглядатимемо ще один подібний приклад — математичний маятник зі змінною довжиною довжини підвісу, рис. 7.



а *б*

7 Схема математичного маятника зі змінною довжиною підвісу.

В такому маятнику один кінець нитки підвісу протягнутий через отвір в нерухомій стелі і утримується деякою силою P, рис. 7, *а* (N — сила натягу нитки). Завдяки цьому довжину підвісу l можна змінювати так, щоб маса m здійснювала рух, зображений на рис. 7, *б* (цілком подібно до руху центра мас людини на орелях, див. рис. 6; Δl — максимальна зміна довжини підвісу; φ_0 — максимальний кут, на який відхиляється маятник від свого вертикального положення).

Рівняння руху математичного маятника випливає з закону збереження моменту імпульсу

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O \,, \tag{5.1}$$

де t — час; $K_O = pl$ — момент імпульсу відносно нерухомої точки O підвісу (рис. 7, *б*); $p = mv = ml\dfrac{d\varphi}{dt}$ — імпульс; v — швидкість руху маси; φ — кут відхилення маятника; $M_O = -mgl\sin\varphi$ — момент зовнішніх сил відносно точки O (в даному разі момент створює лише сила тяжіння mg; сила ж N (чи сила P) спрямована через точку O, а отже моменту не створює); g — пришвидшення вільного падіння. Тож, в розгорнутому вигляді співвідношення (5.1) записується як звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d(ml^2\, d\varphi/dt)}{dt} + mgl\sin\varphi = 0 \,. \tag{5.2}$$

У разі малих коливань, коли $\sin\varphi \approx \varphi$, замість (5.2) матимемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку ($l = l(t) > 0$)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{1}{l}\frac{dl}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad (5.3)$$

або за позначень $x = l\varphi$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g - d^2l/dt^2}{l}x = 0\,. \qquad (5.4)$$

Якщо конкретно взяти $l = l_0(1 + \varepsilon\cos\omega t)$ (l, ε — сталі, $\varepsilon \vee 1$), то відповідне рівнянню (5.3) рівняння (5.4) набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g + l_0\varepsilon\omega^2\cos\omega t}{l_0(1 + \varepsilon\cos\omega t)}x = 0\,.$$

А оскільки $\varepsilon \vee 1$, то можна писати

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{g}{l_0} + \varepsilon\omega^2\cos\omega t\right)x = 0\,. \qquad (5.5)$$

З іншого боку, якщо взяти до уваги співвідношення

$$\frac{1}{1 + \varepsilon\cos\omega t} \approx 1 - \varepsilon\cos\omega t\,,$$

то буде сенс писати

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\left(\frac{g}{l_0} - \frac{\varepsilon\omega^2}{2}\right) + \left(\omega^2 - \frac{g}{l_0}\right)\varepsilon\cos\omega t - \frac{1}{2}\varepsilon\omega^2\cos 2\omega t\right)x = 0\,. \qquad (5.6)$$

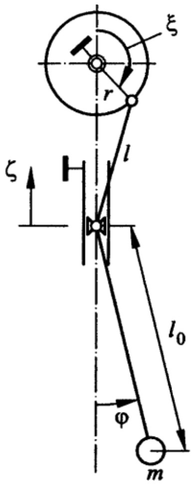
Вирази (5.5) та (5.6) можна умовно вважати рівноцінними наближеннями.

Параметричними є коливання звичайного маятника, у якого, проте, точка підвісу здійснює коливання вздовж вертикальної вісі відповідно до закону $\zeta = \zeta(t)$. Малі коливання такого маятника описуються рівнянням

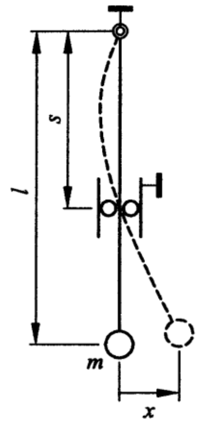
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{l_0}\left(g - \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = 0 \quad (\, l_0 = \mathrm{const}\,).$$

Наприклад, в математичному маятнику, схема якого наведена на рис. 8, точка підвісу є кінцем хитня і змінює своє положення за законом

$$\zeta(t) = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t}\right) + r\cos\omega t\,,$$



8 **Схема математичного маятника з коливною точкою підвісу.**



9 **Схема математичного маятника з пружним стержнем.**

де r — радіус коліна в хитневому механізмі, l — довжина хитня, ω і $\omega t = \xi$ — швидкість обертання і кут повороту коліна.

На рис. 9 наведено схему математичного маятника з невагомим пружним стержнем довжиною l з зосередженою на його кінці масою. Верхня опора — нерухомий шарнір. Існує ще одна опора — нижня з кульковим напрямним пристроєм. Нижня опора може здійснювати вертикальні коливання за певним законом $s = s(t)$ (s — відстань між опорами). Стані рівноваги відповідає прямолінійна форма стержня. При відхиленні маси m убік на деяку величину x (перпендикулярно до вертикалі) стержень викривляється, проявляючи свої пружні властивості. Коефіцієнт згинальної жорсткості стержня визначається за формулою

$$c = \frac{3EJ}{l(l-s)^2},$$

а параметричні коливання маятника описуються звичайним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + cx = 0$$

чи

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3EJ}{ml(l-s(t))^2}x.$$

5.2 Моделі параметричних коливань

Свого часу дійсність спорадично висунула низку запитань, для відповіді на які довелося створювати спеціальний розділ теорії динамічних систем — аналіз параметрично збуджуваних систем. Серед цих запитань можна, зокрема, вирізнити такі. Чому маятник за малих вертикальних коливань його точки підвісу може втратити стійкість природного (нижнього) положення рівноваги і, навпаки, бути стійким у невластивому для нього вертикальному верхньому положенні рівноваги? Як пояснити явище розгойдування орелей, що настає за відсутності зовнішньої дії? Чому годинник з підвісним маятниковим механізмом, розміщений на вібруючій основі завжди поспішає? Чому мала періодична стискувальна сила може спричинити інтенсивне збільшення амплітуди періодичних коливань прямолінійного стержня (пластини, оболонки, арки)? Якими є причини явищ нестійкості в маятниках змінної довжини та маси, в пружних валах неідеального колового поперечного перерізу при певних кутових швидкостях обертання, в системах спарників локомотивів?...

Згадані явища притаманні коливним системам, один або декілька параметрів яких можуть змінюватися періодично в часі (незалежно від стану системи). Тому відповідні коливання, що виникають без дії зовнішніх чинників, називають **параметричними коливаннями** (на відміну від **вимушених коливань**, спричинених зовнішніми чинниками). При цьому основні закономірності динамічної поведінки реальних параметрично збуджуваних систем можна виявити, розглядаючи найпростіші моделі, які відповідають системам з одним ступенем вільності та описуються лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку [6, 64]. Вивчення вказаних закономірностей шляхом розвитку відомих методів має важливе теоретичне й прикладне значення. Це пов'язано передусім з практичними застосуваннями параметричних впливів як одних з найефективніших засобів керування механічними об'єктами [10]. Досконала теорія параметричних систем багато важить в біомеханіці.

Загальні методи дослідження параметричних коливань ґрунтуються, як відомо [6, 7, 8, 24, 34, 35, 45, 49, 54—58, 64], на теорії Г. Флоке про структуру розв'язків диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Проте критерії стійкості вдається встановлювати, переважно, тільки апроксимаційними засобами з тим чи іншим рівнем точності. До того ж, застосовність наближених методів часто обмежена вимогою малості параметричних збуджень [6, 8, 55, 62]. Тому навіть для вказаних найпростіших моделей в літературі не зустрічаються характеристичні співвідношення стійкості в явному вигляді, зокрема, для випадків довільних дволанкових збуджувальних функцій і довільної скінченної кількості імпульсних збуджень.

Зазначмо, що системам з імпульсним параметричним збудженням на періоді присвячені праці [55, 62]; там наведено відповідний огляд літератури і розроблено методи апроксимації неперервних збуджень з застосуванням імпульсів або східчасто-сталих функцій.

Звернімося до так званого **рівняння Мат'є**

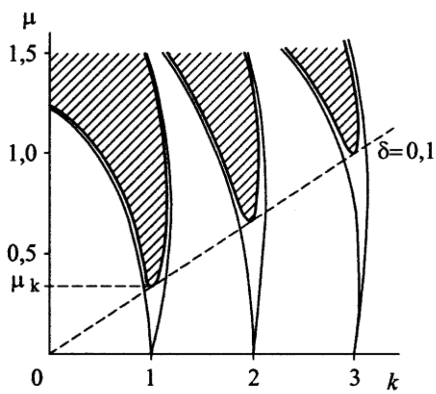
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2(1+\mu\cos\omega t)\,x=0\,, \tag{5.7}$$

де ω_0 — параметр вільних коливань системи; μ і Ω — коефіцієнт і частота модуляції. Загальний розв'язок цього рівняння можна подати як суму двох незалежних розв'язків x_1, x_2:

$$x=x_1+x_2=C_1e^{\nu^*t}\psi_1(t)+C_2e^{-\nu^*t}\psi_2(t)\,, \tag{5.8}$$

де C_1, C_2 — вільні сталі; $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — періодичні функції з періодом коливань системи; ν^* — або комплексний, або суто уявний показник, залежний від параметрів μ та $k=2\dfrac{\omega_0}{\omega}$.

Коли $|\nu^*|>0$, один з доданків розв'язку (5.8) необмежено зростає зі збільшенням t, що свідчить про нестійкість розв'язку загалом. На рис. 10 наведено діаграму нестійкості в координатах μ та k. Області нестійкості обмежуються парами кривих, що сходяться в точках $(k,\mu)=(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$. Межі областей стійкості, в яких ν^* залишається суто уявним, визначаються з умови $\nu^*=0$.



10 **Діаграма нестійкості розв'язків рівняння Мат'є.**

Рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2(1+\mu\cos\omega t)\,x = 0 \tag{5.9}$$

відповідає системі, в якій діє чинник згасання коливань (δ — коефіцієнт дисипації, згасання). Але воно зводиться до основного рівняння Мат'є (5.7), якщо під x розуміти величину $xe^{-\delta t}$; тоді під ω_0^2 доведеться розуміти новий параметр вільних коливань $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, а під k — параметр $k_1 = k\dfrac{\omega_1}{\omega}$. В такому разі нестійкість розв'язків (5.8) рівняння (5.9) спостерігається при $|\,\nu^*| > \delta$. На рис. 10 заштриховано області параметричного збудження для системи з коефіцієнтом згасання $\delta = 0{,}1$.

З аналізу розв'язків рівняння Мат'є зокрема випливає, що параметричні коливання найлегше збуджуються на частоті, що дорівнює половині частоти модуляції. Справді, з наведеної на рис. 10 діаграми видно, що випадкові порогові відхиленнях від стану рівноваги при малих μ ($\delta = 0$) ведуть до зростаючих коливань, коли

$$k = 2\frac{\omega_0}{\omega} = 1;\ 2;\ 3;\ldots$$

Це так званий **параметричний резонанс**. Він, зрозуміло, виникає тільки за ненульових початкових умов і за всіх тих значень параметрів μ, k, що відображаються точками областей нестійкості. Область, що відповідає значенню $k = 2\dfrac{\omega_0}{\omega} = 1$, вважають **головною областю нестійкості**, а всі інші області — **побічними**. **Коливання** з частотою $\omega_0 = \omega/2$ ($k = 1$) називають **субгармонійними**, з частотою $\omega_0 = \omega$ ($k = 2$) — **гармонійними**, з частотою $\omega_0 = 3\omega/2;\ 2\omega;\ 5\omega/2;\ldots$ ($k = 3;\ 4;\ 5;\ldots$) — **супергармонійними**. Зі зростанням глибини збудження (зі збільшенням μ) області нестійкості розширюються. Тож, параметричний резонанс виникає не лише за точної кратності частот, а й в доволі широкому околі відношень частот. Цим він принципово відрізняється від звичайного резонансу (де коливання за відсутності сил опору зростають при точному збіганні частот: $\omega = \omega_0$). Разом з тим, для кожної області нестійкості (наприклад, для головної, див. рис. 10) існує характерне для параметричного резонансу критичне значення μ_k коефіцієнта модуляції μ, яке збільшується зі зростанням рівня згасання та ступеня відхилення дійсного руху системи від відповідного даній області резонансного руху. Лінійне тертя в даному разі не обмежує амплітуду коливань, а лише звужує область нестійкості і підвищує поріг збуджуваності (визначуваний величиною μ). Цей поріг тим вищий, чим більша розлагодженість частот, чим більше тертя і чим вищий номер області нестійкості. Тож, досить важко збудити резонанси, відповідні побічним областям нестійкості (необхідне збудження може виявитися надмірно великим).

Рівняння Мат'є випливає з наближеного опису коливань математичного маятника, рис. 11, у якого точка підвісу вертикально коливається за гармонійним законом $\zeta = \zeta(t) = \zeta_0 \cos\omega t$ (ζ_0, ω — сталі). Справді, точне рівняння руху математичного маятника

$$ml_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi + m\frac{d^2\zeta}{dt^2}\sin\varphi \text{ чи } l_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \left(-g + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\sin\varphi$$

у разі малих коливань, коли $\sin\varphi \approx \varphi$, набуває вигляду

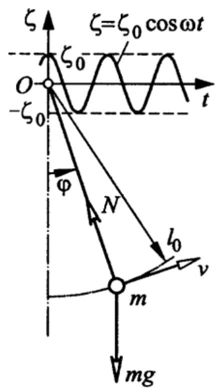
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l_0}\left(1 - \frac{\zeta_0\omega^2}{g}\cos\omega t\right)\varphi = 0\,.$$

За позначень

$$\omega t = 2\tau\,,\ \varphi = x\,,\ a = \frac{4g}{l_0\omega^2}\,,\ q = -\frac{4\zeta_0}{l_0}$$

(сталі a, q є дійсними числами) воно перетворюється у співвідношення

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a + q\cos 2\tau)x = 0\,. \tag{5.10}$$



11 **Маятник Мат'є.**

Окремий розв'язок рівняння Мат'є можна шукати (за Г. Флоке) у формі

$$x_1(\tau) = \psi(\tau) e^{\mu\tau},$$

де μ — характеристичний показник степеня, залежний від параметрів a, q; $\psi(\tau)$ — періодична функція з періодом π чи 2π. Легко переконатись, що рівняння (5.10) не змінюється, якщо замість τ підставити $-\tau$. Це означає, що й функція

$$x_2(\tau) = \psi(-\tau) e^{-\mu\tau}$$

є (лінійно незалежним від функції $x_1(\tau) = \psi(\tau) e^{\mu\tau}$) окремим розв'язком рівняння (5.10). Тому загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді

$$x(\tau) = C_1 x_1(\tau) + C_2 x_2(\tau) = C_1 \psi(\tau) e^{\mu\tau} + C_2 \psi(-\tau) e^{-\mu\tau}. \tag{5.11}$$

Найпростіший аналіз параметричних коливань зводиться власне до того, щоб розрізнити розв'язки (5.11) рівняння (5.10): а) нестійкі (необмежені), коли $x(\tau) \to \pm\infty$ при $\tau \to +\infty$; б) стійкі (обмежені), коли $x(\tau)$ прямує до нуля чи залишається обмеженим при $\tau \to +\infty$; в) нейтральні, коли $x(\tau)$ має період π чи 2π.

Інтуїтивне вміння збудити параметричний резонанс простежується практично у кожної дитини при намаганні розгойдати орелі (перебуваючи на них, а не ззовні, див. рис. 6). Щоб збудити резонанс необхідно за цикл коливання такого маятника змінної довжини (інерції) двічі присісти й двічі піднятися.

Найпоширеніший прояв параметричних коливань — це ходьба людини. Якщо систему координат, у якій спостерігається крокування людини, рухати зі швидкістю горизонтального пересування центра мас тіла людини, то рух ніг в ній справді сприйматиметься як коливання двох фізичних маятників. Вважають, що частоту вільних коливань випрямленої ноги людини з гармонійною статурою можна обчислити за емпіричною формулою

$$\nu_0 \cong \sqrt{\frac{110}{H}} \ [\text{Гц}],$$

де H — зріст людини, см. Люди невимушено переставляють ноги з частотою ν_r, близькою до резонансної, яка, в свою чергу, ненабагато менша за частоту вільних коливань ν_0 (на $0{,}6\ldots0{,}8\,\%$). Так само легко (з малими витратами енергії) розгойдувати орелі власне на резонансній частоті.

Відхилення руху від резонансного в енергетичному відношенні є вельми витратним. Тож, оскільки частота резонансних коливань майже не залежить від їх амплітуди, то люди пришвидшують ходу переважно збільшенням ширини кроку, а не темпу переставляння ніг. Резонансна частота, а отже й швидкість руху, проте, збільшується при згинанні ніг в колінах, коли ноги по черзі відриваються від долівки. А це вже є ознакою корисного прояву параметричних ефектів.

В параметричних коливаннях беруть участь, звісно, ще два „маятники" — руки; кожна рука рухається в такт протилежної ноги. Руки в русі створюють обертовий момент, покликаний урівноважити момент, що виникає при русі ніг в двох різних (майже паралельних) площинах і намагається повернути тіло людини навколо вертикальної вісі. Разом з тим, при швидкій ході руки згинаються в ліктях, як і ноги в колінах (при цьому зменшуються моменти інерції рук і ніг в сприятливі проміжки часу та збільшується резонансна частота). Резонансні частоти руху рук і ніг здебільшого збігаються. Не можна зневажити й те, що крокування ніг спричиняє піднімання-опускання центра мас людини (подібно до маятника з рухомою точкою підвішування, див. рис. 11). Зате махання руками викликає протилежний ефект — опускання-піднімання центра мас.

Резонансну частоту можна збільшити й технічними засобами — використовуючи пружні елементи, здатні нагромаджувати і віддавати у відповідні проміжки часу енергію. Найпростіше — це зв'язати (!) ноги пружною в'яззю, що чинить опір і нагромаджує енергію, коли ноги віддаляються одна від одної на певну величину. Пружні в'язі доречно накласти й на руки.

Дослідження параметричних коливань проводиться пересічно [6, 7, 24] на основі диференціального рівняння

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2\left(1+2\mu F(t)\right)q=0\,, \tag{5.12}$$

де $q=q(t)$ — узагальнена координата, $F=F(t)$ — періодична функція з періодом $T=2\pi/\omega$ (її називають збуджувальною функцією); ω_0 — власна частота незбудженої системи; ω й μ — частота й коефіцієнт збудження відповідно. Рівняння (5.12) відоме в літературі як **рівняння Гілла**; якщо ж $F(t)=\cos\omega t$ — його називають рівнянням Мат'є.

За допомогою формул

$$2x=\omega t,\;\; a=4\omega_0^2\omega^{-2},\;\; h=a\mu$$

рівнянням Мат'є зводиться до вигляду [13]

$$\frac{d^2q}{dx^2}+(a-2h\cos 2x)q=0\,.$$

Методологія дослідження вказаних і споріднених рівнянь ґрунтується на загальній теорії Флоке про структуру й властивості фундаментальних систем розв'язків диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами [6, 34]. Зокрема, поведінку розв'язків рівняння (5.12) характеризує діаграма, яка вирізняє на площині параметрів $\left(\mu, \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ області нестійкості, тобто резонансні області (стійкі розв'язки $q(t)$ рівняння (5.12) — обмежені і прямують до нуля при $t \to \infty$; нестійкі — необмежено зростають при $t \to \infty$; розв'язки з періодами $\frac{\pi}{\omega}$ або $2\frac{\pi}{\omega}$ можна вважати окремим випадком стійких; вони визначають границі між областями (не)стійкості)). Найбільше практичне значення має область головного параметричного резонансу; її відносна ширина має порядок коефіцієнта збудження μ.

Вдаючись до лінійно незалежних розв'язків $f_1(t)$ і $f_2(t)$ рівняння (5.12) таких, що задовольняють умови

$$f_1(0)=1\,,\ \ f_1'(0)=0\,,\ \ f_2(0)=0\,,\ \ f_2'(0)=1\,, \tag{5.13}$$

границі вказаних областей можна описати співвідношенням

$$|\, f_1(T)+f_2'(T)|=2\,. \tag{5.14}$$

Саме воно є вихідним у дослідженнях (не)стійкості конкретних параметрично збуджуваних коливних систем.

5.3 Застосування фундаментальної функції для виведення загального характеристичного співвідношення

Нехай $K(t,\tau)$ — фундаментальна функція, відповідна рівнянню (5.12) (t — аргумент, τ — параметр), тобто такий розв'язок цього рівняння, що задовольняє умови

$$K(\tau,\tau)=0\,,\quad K'(\tau,\tau)=1\quad \left(K'=\frac{\partial K}{\partial t}\right).$$

Тоді, як вже відомо, для будь-якого значення параметра τ за лінійно незалежні розв'язки цього рівняння можна взяти функції

$$K(t,\tau)\ \text{і}\ \dot K(t,\tau)\quad \left(\dot K=\frac{\partial K}{\partial \tau}\right),$$

визначник Вронського яких, звісно, не дорівнює нулю:

$$W\left(K,\dot{K}\right)\Big|_{t=\tau}=\begin{vmatrix} K & \dot{K} \\ K' & \dot{K}' \end{vmatrix}_{t=\tau}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

(тут і далі похідні за аргументом t позначені штрихом, а за параметром τ — крапкою). Звідси випливає [18], що в співвідношеннях (5.13) — (5.14) можна вважати

$$f_1(t)\equiv-\dot{K}(t,0)\,,\quad f_2(t)\equiv K(t,0)\,,$$

а границі областей (не)стійкості визначати за рівнянням

$$\left|-\dot{K}(T,0)+K'(T,0)\right|=2\,. \tag{5.15}$$

Остання залежність, на відміну від (5.14), містить лише одну функцію $K(t,\tau)$, яка в багатьох випадках легко будується (особливо для малих μ) [20]. Завдяки цьому істотно розширюється клас задач, для яких можна визначити аналітичними засобами резонансні області.

5.4 Характеристичне рівняння систем з дволанковими збуджувальними функціями

Нехай функція $F(t)$, що фігурує в рівнянні Гілла (5.12), визначена співвідношеннями:

$$F=\begin{cases} F_1(t) & \text{для} \quad 0\le t\le t_1, \\ F_2(t) & \text{для} \quad t_1\le t\le T \end{cases} \tag{5.16}$$

($F_i(t)$ ($i=1,2$) — довільні інтегровні функції).

Позначмо фундаментальні функції, що відповідають першому ($0\le t\le t_1$) і другому ($t_1\le t\le T$) проміжкам зміни аргумента t, як

$$K_1(t,\tau) \text{ і } K_2(t,\tau)\,. \tag{5.17}$$

Щоб побудувати характеристичне співвідношення (5.15) розглядуваної „дволанкової” системи, потрібно мати єдину функцію $K(t,\tau)$ для (5.16), а отже доречно продовжити функцію $K_1(t,\tau)$ та її похідну $K_1'(t,\tau)$ неперервно на суміжний проміжок, вимагаючи дотримання умов [18]

$$K(t_1,\tau)=K_1(t_1,\tau),\ K(t,t_1)=K_2(t,t_1)\,,$$

$$K'(t_1,\tau)=K_1'(t_1,\tau)\,,\ K'(t,t_1)=K_2'(t,t_1)\,. \tag{5.18}$$

Застосувавши для цього узагальнений метод початкових параметрів [20], отримаємо формулу

$$K(t,\tau) = -\dot{K}_2(t,t_1)K_1(t_1,\tau) + K_2(t,t_1)K_1'(t_1,\tau)\,, \tag{5.19}$$

в якій $0 < t_1 < T$. Диференціюючи (5.19), маємо:

$$K'(t,\tau) = -\dot{K}_2'(t,t_1)K_1(t_1,\tau) + K_2'(t,t_1)K_1'(t_1,\tau)\,,$$

$$\dot{K}(t,\tau) = -\dot{K}_2(t,t_1)\dot{K}_1(t_1,\tau) + K_2(t,t_1)\dot{K}_1'(t_1,\tau)\,. \tag{5.20}$$

Кладучи в (5.17)—(5.20) $\tau = 0$ і $t = T$, одержуємо (5.15) у такому вигляді:

$$|\, \dot{K}_2(T,t_1)\dot{K}_1(t_1,0) - K_2(T,t_1)\dot{K}_1'(t_1,0) -$$

$$- \dot{K}_2'(T,t_1)K_1(t_1,0) + K_2'(T,t_1)K_1'(t_1,0)\,| = 2 \tag{5.21}$$

Отже, побудова рівняння, що визначає області стійкості (нестійкості) в задачах про параметричні коливання системи з дволанковою збуджувальною функцією (5.16), зведена до знаходження відповідних фундаментальних функцій впливу (5.17) — (5.19). Завдяки цьому істотно розширено клас задач з точними рівняннями вигляду (5.21).

5.5 Модель зі східчасто-сталими збуджувальними функціями

Нехай у співвідношеннях (5.16) $F_i(t) = c_i$ ($i = 1, 2$), c_i — сталі. В такому разі функції (5.17) визначатимуть формули [18]

$$K_i(t,\tau) = \frac{1}{S_i}\sin S_i(t-\tau)\,,$$

$$S_i = \omega_0\,(1 + 2\mu\, c_i)^{1/2} \ \ (i = 1, 2\,). \tag{5.22}$$

Підставляючи ці функції та їх похідні в (5.21), після ділення на два матимемо:

$$|\, A - \varphi(S_1, S_2)B \,| = 1\,, \tag{5.23}$$

де

$$A = \cos S_1 t_1 \cos S_2(T - t_1)\,,\ \ B = \sin S_1 t_1 \sin S_2(T - t_1)\,; \tag{5.24}$$

$$\varphi(S_1, S_2) = \frac{S_1^2 + S_2^2}{2S_1S_2}, \tag{5.25}$$

або в іншій формі

$$\varphi(\mu, c_1, c_2) = \frac{1 + \mu(c_1 + c_2)}{\sqrt{1 + 2\mu(c_1 + c_2) + 4\mu^2 c_1 c_2}}. \tag{5.26}$$

Тут сталі c_i, від яких залежать S_i в (5.22) — (5.24), є довільними дійсними числами, а величина t_1 може мати будь-яке значення з інтервалу (0, T). Тому рівняння (5.23) дозволяє будувати на відповідній площині параметрів області (не)стійкості для кожної системи з одним ступенем вільності, збуджуваної східчасто-сталими дволанковими функціями (5.16). З цього ж рівняння можна одержувати деякі якісні висновки.

а) Нехай, наприклад $t_1 \to 0$. Тоді, беручи до уваги (5.24), отримуємо замість (5.23) рівняння

$$|\cos S_2 T| = 1 \quad (S_2 = \omega_0 (1 + 2\mu c_2)^{1/2}).$$

Цілком подібно для $t_1 \to T$ одержуємо:

$$|\cos S_1 T| = 1 \quad (S_1 = \omega_0 (1 + 2\mu c_1)^{1/2}).$$

Отже, коли t_1 достатньо мале, (не)стійкість системи визначається передусім збуджувальною функцією другої ланки ($F_2(t) = c_2$); коли ж t_1 дещо менше за T — збуджувальною функцією першої ланки ($F_1(t) = c_1$). З цих же рівнянь випливає, що відповідні області (не)стійкості можна визначати за формулами

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{n}{2\sqrt{1 + 2\mu c_2}}, \quad \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{n}{2\sqrt{1 + 2\mu c_1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для достатньо малих μ ($\mu^2 \ll 1$) доходимо формули

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{n}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(вона узгоджується з відомими (див., наприклад, [8, 64])).

б) Вважатимемо невід'ємними підкореневі вирази $1 + 2\mu c_i$ ($i = 1, 2$). Тоді за умов $c_1 > 0$, $c_2 = -c_1$ (або $c_2 > 0$, $c_1 = -c_2$) із (5.22) — (5.25) отримуємо рівність

$$\frac{S_1^2 + S_2^2}{S_1 S_2} = \frac{2}{\sqrt{1 - 4\mu^2 c_i^2}}.$$

Звідси з урахуванням (5.22) — (5.24) висновуємо, що при цьому області (не)стійкості відповідних систем у площині (μ , ω_0 / ω) є симетричними відносно восі ординат.

в) Нехай $t_1 = \frac{1}{2} T$. Характеристичне співвідношення (5.23) в цьому випадку стає таким:

$$\left| \cos S_1 \frac{T}{2} \cos S_2 \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} \right) \sin S_1 \frac{T}{2} \sin S_2 \frac{T}{2} \right| = 1.$$

Тож для достатньо малих μ ($\mu^2 \ll 1$; $S_1 = S_2 = \omega_0$) маємо рівняння

$$\left| \cos^2 \frac{\omega_0 T}{2} - \sin^2 \frac{\omega_0 T}{2} \right| = 1,$$

тобто

$$|\cos \omega_0 T| = 1.$$

Отже, як і повинно бути,

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{n}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Зазначмо, що досить докладно [6, 8, 64] досліджено систему, для якої в (5.22) — (5.26)

$$t_1 = \frac{T}{2}, \; c_1 = 1, \; c_2 = -1. \tag{5.27}$$

Підставляючи ці значення в (5.23) — (5.26), одержуємо:

$$\left| \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - \frac{1}{2} \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\gamma_1 \gamma_2} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \right| = 1, \tag{5.28}$$

де

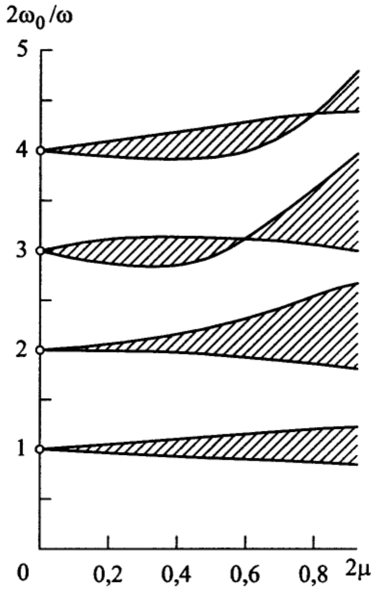
$$\gamma_i = \frac{1}{2} S_i T, \; S_i = \omega_0 \sqrt{1 \pm 2\mu} \quad (i = 1, 2). \tag{5.29}$$

У цьому випадку (5.12) називається **рівнянням Майснера** [6, 8].

На рис. 12 зображена діаграма (не)стійкості, побудована за співвідношеннями (5.27) — (5.29) [64] (області нестійкості заштриховано). Абсцисою є величина 2μ, а ординатою — величина $2\omega_0/\omega$, причому $0 \le 2\mu \le 0{,}9$. Зауважмо, що замість (5.28) можна записати

$$\left| \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 - \frac{1}{\sqrt{1-4\mu^2}} \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \right| = 1$$

(це випливає з формул (5.26) — (5.29), а також узгоджується з відповідними співвідношеннями, що фігурують в задекларованих раніше висновках а) — в)).



12 **Діаграма (не)стійкості для рівняння Майснера.**

Звідси для достатньо малих μ ($\mu^2 \ll 1$), беручи до уваги наближену рівність $\gamma_1 = \gamma_2$, знову неважко одержати рівності

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{n}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(останнім рівностям на рис. 12 відповідають точки, в яких починаються області нестійкості).

Якщо ж $\mu \to 0{,}5$, то $S_1 \to \omega_0\sqrt{2}$, $S_2 \to 0$, а рівняння (5.28) набуває вигляду

$$|\cos 2\kappa - \kappa \sin 2\kappa| = 1,\ \ \kappa = \frac{\omega_0 T\sqrt{2}}{4}. \qquad (5.30)$$

Замінюючи тут “1” на $\pm(\cos^2\kappa + \sin^2\kappa)$, приходимо до таких двох рівнянь:

$$\sin\kappa(\sin\kappa + \kappa\cos\kappa) = 0,\ \ \cos\kappa(\cos\kappa - \kappa\sin\kappa) = 0.$$

Їхніми найменшими додатними розв’язками є числа

$$\kappa_1 = \pi,\ \ \kappa_2 \approx 2{,}02 \ \text{ та } \ \kappa_1 = \frac{1}{2}\pi,\ \ \kappa_2 \approx 0{,}86. \qquad (5.31)$$

Із (5.30) та (5.31) одержуємо відповідно для $\dfrac{\omega_0}{\omega}$ такі значення:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41,\quad \frac{2{,}02\sqrt{2}}{\pi} \approx 0{,}91,\quad \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71,\quad \frac{0{,}86\sqrt{2}}{\pi} \approx 0{,}39.$$

Вони добре узгоджуються з діаграмою на рис. 12, доповнюючи її до значення $2\mu = 1$ (головній області параметричного резонансу відповідають два останні з цих чисел, а наступній області — два перші).

5.6 Про методи побудови діаграм (не)стійкості

Розгляньмо тепер питання про застосування до характеристичного рівняння (5.23) відомих обчислювальних методів [18]. Позначаючи

$$t_1 = \varepsilon T,\ \ 0 < \varepsilon < 1,$$

надаймо формулам (5.24) вигляду

$$A = \frac{1}{2}(\cos\beta_1 + \cos\beta_2),\quad B = -\frac{1}{2}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2), \qquad (5.32)$$

де

$$\beta_i = T\omega_0 f_i(\varepsilon, \mu, c_1, c_2)\ \ (i = 1, 2), \qquad (5.33)$$

$$f_i(\varepsilon, \mu, c_1, c_2) = \varepsilon\left[(1 + 2\mu c_1)^{1/2} \mp (1 + 2\mu c_2)^{1/2}\right] \pm (1 + 2\mu c_2)^{1/2}. \qquad (5.34)$$

При цьому замість (5.23) матимемо:

$$|\cos\beta_1 + \cos\beta_2 + \varphi(\mu, c_1, c_2)(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)| = 2\,; \tag{5.35}$$

функцію $\varphi(\mu, c_1, c_2)$ описує формула (5.26).

Якщо справджуються умови (5.27), то з (5.35) з урахуванням співвідношень (5.32) — (5.34) і (5.25) випливає рівняння (5.28); якщо ж у цьому випадку $\mu \to 0{,}5$, то $f_1 \to \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f_2 \to \frac{\sqrt{2}}{2}$; після розкриття невизначеності

$$\frac{\cos\beta_1 - \cos\beta_2}{\sqrt{1-4\mu^2}}$$

із (5.35), як і повинно бути, одержуємо рівняння (5.30).

Важливо підкреслити таке: з формул (5.33) — (5.35) випливає, що після надання параметрам ε, c_1, c_2 та μ конкретних допустимих значень у рівнянні (5.35) невідомою (шуканою) величиною є $T\omega_0$, тобто відношення ω_0/ω. Власне це дозволяє будувати діаграми (не)стійкості будь-яких систем зі східчасто-сталими дволанковими збуджувальними функціями, застосовуючи відомі методи, зокрема, так звані двобічні оцінки Бернштейна [3, 49].

Розгляньмо спочатку системи, для яких можна вважати, що за (5.26) править функція $\varphi(\mu, c_1, c_2) = 1$. В даному разі характеристичне рівняння (5.35) стає таким:

$$|\cos\beta_1| = 1. \tag{5.36}$$

Неважко переконатися, що підкореневий вираз D у формулі (5.26) дорівнює нулю, якщо

$$\mu = \mu_1 = -(2c_1)^{-1} \text{ або } \mu = \mu_2 = -(2c_2)^{-1} \ (c_1 \neq c_2); \tag{5.37}$$

похідну від функції φ можна подати у формі

$$\varphi' = \frac{1}{2} D^{-\frac{3}{2}} (c_1 - c_2)^2 \ (c_1 \neq c_2). \tag{5.38}$$

Таким чином, маємо умови (5.37) і (5.38), які забезпечують монотонне зростання функції $\varphi(\mu, c_1, c_2)$ ($D \neq 0$, $c_1 \neq c_2$), починаючи від значення $\varphi(0, c_1, c_2) = 1$, та дозволяють дослідити питання про застосовність рівняння (5.36) ($\varphi \approx 1$) до конкретних моделей (очевидно, що тут маємо дві множини точних розв'язків рівнянь $\cos\beta_1 = \pm 1$).

Нехай, наприклад,

$$\mu^2 \ll 1,\;\; 0 < \varepsilon < 1,\;\; c_1 = 1,\;\; c_2 = 0.$$

Тоді

$$\varphi \approx \frac{1+\mu}{1+\mu} = 1;\;\; f_1 \approx \varepsilon\mu + 1.$$

З рівняння (5.36) знаходимо:

$$(T\omega_0 f_1)_k = \pi k \;\; (k = 1, 2, \ldots), \quad \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{k}{2(1+\varepsilon\mu)}.$$

У загальному випадку доцільно записати косинуси в рівнянні (5.35) як степеневі ряди за параметрами (5.33), тобто перейти після обчислення величин (5.25) і (5.34) до відповідних двох характеристичних рядів. Завдяки цьому можна визначати за допомогою двобічних оцінок їхні перший і другий корені (з заданою точністю), а отже, будувати головну, першу області нестійкості.

5.7 Застосування двобічних оцінок Бернштейна

Розгляньмо систему, для якої $\mu = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}25$, $c_1 = -1$, $c_2 = 0$. В даному разі $\varphi = 1{,}34$, $f_1 = 0{,}8618$, $f_2 = -0{,}6382$, і рівняння (5.35) є таким [18]:

$$|\,2{,}34\cos\beta_1 - 0{,}34\cos\beta_2\,| = 2,$$

$$\beta_1 = \omega_0 T \cdot 0{,}8618,\;\; \beta_2 = \omega_0 T \cdot (-0{,}6382). \tag{5.39}$$

Замість (5.39) записуємо:

$$|\,1{,}17\cos\beta_1 - 0{,}17\cos\beta_2\,| = 1,$$

або

$$1{,}17\left(1 - \frac{\beta_1^2}{2\,!} + \frac{\beta_1^4}{4!} - \cdots\right) - 0{,}17\left(1 - \frac{\beta_2^2}{2\,!} + \frac{\beta_2^4}{4\,!} - \cdots\right) = \pm 1. \tag{5.40}$$

Звідси неважко одержати два характеристичні рівняння в такому вигляді:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j (\omega_0 T)^{2j} = 0.$$

Прирівнюючи ліву частину (5.40) до -1, отримуємо характеристичний ряд, найменший корінь якого відповідає нижній межі головної області параметрично резонансу. Перші коефіцієнти цього ряду, обчислені з урахуванням формул (5.39) для β_1 та β_2, є такими:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0{,}1999, \quad a_3 = 0{,}0003249, \quad a_4 = 0{,}0000044. \tag{5.41}$$

Найпростіші двобічні оцінки вказаного кореня та точніші оцінки визначаються відповідно нерівностями [3, 49]:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 2a_2}} < (\omega_0 T)^2 < \frac{2}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}, \tag{5.42}$$

$$b_4^{-\frac{1}{4}} < (\omega_0 T)^2 < \sqrt{2}\left[b_2\left(1 + \sqrt{2b_4 b_2^{-2} - 1}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.43}$$

де

$$b_2 = a_1^2 - 2a_2, \quad b_4 = a_1^4 + 2a_2^2 + 4(a_1 a_3 - a_1^2 a_2 - a_4). \tag{5.44}$$

Із (5.41) і (5.42) обчислюємо:

$$0{,}4614 < \frac{\omega_0}{\omega}$$

(оцінка з лишком тут не існує, бо $a_1^2 - 4a_2 < 0$). Із (5.41) та (5.43) — (5.44) отримуємо:

$$0{,}4974 < \frac{\omega_0}{\omega} < 0{,}5128.$$

Як бачимо, оцінки (5.43) виявилися досить точними (верхня більша від нижньої приблизно на 3,1 %).

5.8 Характеристичні рівняння систем, збуджуваних періодичними імпульсами

Розгляньмо подібне до (5.12) диференціальне рівняння [12]

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 + 2\mu \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \delta(t - t_j)\right) q = 0, \tag{5.45}$$

в якому $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_\nu < T$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функція (Дірака), α_j ($j = \overline{1, \nu}$) — параметри, що характеризують систему імпульсів, а збуджувальна функція $F(t)$, відображена в (5.45) сумою, є періодичною з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [9] (інші позначення в рівнянні (5.45) такі самі, як і в (5.12)). При цьому

$$\alpha_j = k_j T c_j \quad (j = \overline{1, \nu}), \quad [\,\alpha_j\,] = c \tag{5.46}$$

($k_j T$ та c_j — відповідно „ширина й висота” імпульсу, k_j — число).

Виведімо характеристичні співвідношення для рівнянь вигляду (5.45). Нехай $\nu = 1$. Тоді замість фундаментальної функції $K(t,\tau)$ рівняння Гілла (5.12), використаної раніше при виведенні характеристичного співвідношення (5.15), можна застосувати відповідну рівнянню (5.45) функцію $Q(t,\tau)$ ($\nu = 1$) [12]:

$$Q(t,\tau) = K(t,\tau) - A_1 K(t_1,\tau)\, K(t,t_1)\; \theta(t - t_1)\,, \tag{5.47}$$

де

$$K(t,\tau) = \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 (t-\tau)\,, \quad A_1 = 2\mu\omega_0^2\alpha_1\,; \tag{5.48}$$

$\theta(t)$ — одинична функція (Гевісайда); $t_1 \in (0, T)$. Неважко переконатися, що функція $Q(t,\tau)$ та похідна від неї за параметром $\dot{Q}(t,\tau)$ задовольняють умови вигляду (5.13). Отже, замість (5.15) маємо формулу

$$\left| -\dot{Q}(T,0) + Q'(T,0) \right| = 2\,. \tag{5.49}$$

Із (5.47) та (5.48) отримуємо:

$$\dot{Q}(t,\tau) = \dot{K}(t,\tau) - A_1 \dot{K}(t_1,\tau) K(t,t_1)\theta(t-t_1)\,,$$

$$Q'(t,\tau) = K'(t,\tau) - A_1\, K(t_1,\tau) K'(t,t_1)\theta(t - t_1)\,; \tag{5.50}$$

$$\dot{K} = -\cos\omega_0 (t-\tau)\,, \; K' = \cos\omega_0 (t-\tau)\,.$$

Підставляючи (5.50) у (5.49) і беручи до уваги (5.48), після нескладних перетворень приходимо до характеристичного співвідношення для рівняння (5.45) у випадку $\nu = 1$:

$$\left| 2\cos\omega_0 T - \frac{A_1}{\omega_0}\sin\omega_0 T \right| = 2\,. \tag{5.51}$$

Розгляньмо тепер рівняння (5.45) для $\nu \geq 2$. Функцію $Q(t, \tau)$ для довільної кількості імпульсів ν в рівнянні (5.45) можна записати так [12]:

$$Q = \psi - \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \psi_i \phi_{ti} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \sum_{j>i}^{\nu} \alpha_i \alpha_j \psi_i K_{ji} \phi_{tj} -$$

$$- \sum_{i=1}^{\nu-2} \sum_{j>i}^{\nu-1} \sum_{k>j}^{\nu} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \psi_i K_{ji} K_{kj} \phi_{tk} + - \ldots +$$

$$+ (-1)^{\nu} \alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_{\nu} \psi_1 K_{21} K_{32} .. K_{\nu,\nu-1} \phi_{t\nu} . \tag{5.52}$$

Тут позначено

$$\psi \equiv K(t, \tau) , \quad \psi_i = K(t_i, \tau) ,$$

$$K_{ji} = K(t_j, t_i) , \quad \phi_{ti} = K(t, t_i) \theta(t - t_i) . \tag{5.53}$$

Діючи цілком подібно, як і при виведенні рівняння (5.51), доходимо характеристичних співвідношень, відповідних формулам (5.52) — (5.53). Зокрема, для $\nu = 2$ отримаємо рівність

$$\Bigg| 2\cos\omega_0 T - (A_1 + A_2) \frac{1}{\omega_0} \sin\omega_0 T +$$

$$+ A_1 A_2 \frac{1}{\omega_0^2} \sin[\omega_0 (t_2 - t_1)] \sin[\omega_0 (T - t_2 + t_1)] \Bigg| = 2 ; \tag{5.54}$$

для $\nu = 3$ — рівність

$$\Bigg| 2\cos\omega_0 T - \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{1}{\omega_0} \sin\omega_0 T +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \sum_{j>i}^{3} A_i A_j \frac{1}{\omega_0^2} \sin\left[\omega_0 \left(t_j - t_i\right)\right] \sin\left[\omega_0 \left(T - t_j + t_i\right)\right] -$$

$$- A_1 A_2 A_3 \frac{1}{\omega_0^3} \sin[\omega_0 (t_2 - t_1)] \sin[\omega_0 (t_3 - t_2)] \sin[\omega_0 (T - t_3 + t_1)] \Bigg| = 2 ,$$

$$A_j = \alpha_j \cdot 2\mu\omega_0^2 \quad (j = 1, 2, 3); \tag{5.55}$$

і так далі.

Зауважмо, що при цьому з кожного наступного співвідношення легко повернутися до попереднього; наприклад, кладучи в (5.55) $A_3 = 0$, отримуємо (5.54), а з (5.54) при $A_2 = 0$ маємо (5.51). Як бачимо, найпростіше з них ($v = 1$) залежить від параметрів ω_0, ω і A_1 та не залежить від миті часу t_1; наступне ($v = 2$) — залежить від величин $t_2 - t_1$, $T - t_2 + t_1$ та параметрів ω_0, ω, A_1, A_2 і так далі (відсутність залежності безпосередньо від моментів прикладення імпульсів стає зрозумілою, якщо взяти до уваги їх періодичність).

Відзначмо, що застосування функції $Q(t,\tau)$ та фундаментальної функції $K(t,\tau)$ дозволило відносно легко побудувати послідовність основних характеристичних співвідношень (5.54) — (5.55) для систем, збуджуваних періодичними імпульсними функціями (з довільною скінченною кількістю імпульсів v на періоді). Ці співвідношення рівносильні, очевидно, відповідним алгебричним рівнянням степеня v відносно коефіцієнта збудження μ. Завдяки цьому істотно збільшуються можливості дослідження точних і наближених розв'язків для систем, що описуються рівняннями вигляду (5.45), а також (5.12) і подібними до них.

5.9 Задача про коливання маятника, параметрично збуджуваного зубчастою функцією

Розгляньмо задачу про маятник, точка підвісу якого рухається періодично вздовж вертикалі (відносно деякого середнього положення) [12]. Такий маятник побіжно згадувався в 5.2. Рівняння його руху для малих переміщень має вигляд [7]:

$$\frac{d^2q}{dt^2} \pm \omega_0^2\left(1 - 2\mu\frac{d^2 f}{dt^2}\right)q = 0, \tag{5.56}$$

де $q = q(t)$ — кут відхилення маятника від вертикалі; $f = f(t)$ — закон переносного руху;

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad 2\mu = (l\omega_0^2)^{-1}; \tag{5.57}$$

g — пришвидшення вільного падіння в полі земного тяжіння (так звана гравітаційна стала); l — довжина маятника; знак "$+$" відповідає коливанням в околі нижнього рівноважного стану, а знак "–" — в околі верхнього.

Нехай переміщення точки підвісу є таким, що його можна задовільно точно описати “зубчастою” періодичною функцією, заданою на періоді $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ виразами

$$f(t)=\begin{cases} at, \quad \text{якщо } 0\le t\le \dfrac{T}{2}, \\ -at+aT, \text{якщо } \dfrac{T}{2}\le t\le T \end{cases} \tag{5.58}$$

(відлік переміщення f ведеться вниз по вертикалі від середнього положення точки підвісу маятника). В такому разі

$$\frac{d^2 f}{dt^2}=-2a\delta\left(t-\frac{T}{2}\right), \tag{5.59}$$

причому з урахуванням формул (5.57) — (5.59) рівняння (5.56) набуває вигляду

$$\frac{d^2 q}{dt^2}\pm\omega_0^2 q+\alpha\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)q=0, \tag{5.60}$$

де

$$\alpha=\frac{2a}{l}.$$

Отже, в формулах (5.47) — (5.50) потрібно вважати $A_1=\alpha$, причому для випадку знаку “+” біля ω_0^2 у (5.60) співвідношення (5.51) можна записати так:

$$\left|\cos 2\gamma-\frac{\alpha}{2\omega_0}\sin 2\gamma\right|=1, \quad 2\gamma=\omega_0 T. \tag{5.61}$$

Звідси отримуємо два рівняння

$$-1+\cos 2\gamma-\frac{\alpha}{2\omega_0}\sin 2\gamma=0 \ \text{ та } \ 1+\cos 2\gamma-\frac{\alpha}{2\omega_0}\sin 2\gamma=0. \tag{5.62}$$

Межі областей нестійкості на площині (α,γ) визначаються відповідно розв’язками цих рівнянь

$$\alpha=-2\omega_0\mathrm{tg}\gamma \ \text{ та } \ \alpha=2\omega_0\mathrm{ctg}\gamma. \tag{5.63}$$

Якщо в рівнянні (5.60) біля величини ω_0^2 стоїть знак "–", то в формулах (5.48) — (5.51) потрібно перейти від тригонометричних функцій до гіперболічних. Тоді замість (5.61) і (5.62) матимемо:

$$\left|\mathrm{ch}2\gamma - \frac{\alpha}{2\omega_0}\mathrm{sh}2\gamma\right| = 1; \tag{5.64}$$

$$-1 + \mathrm{ch}2\gamma - \frac{\alpha}{2\omega_0}\mathrm{sh}2\gamma = 0, \quad 1 + \mathrm{ch}2\gamma - \frac{\alpha}{2\omega_0}\mathrm{sh}2\gamma = 0. \tag{5.65}$$

Звідси, застосовуючи формули

$$\mathrm{ch}^2\gamma - \mathrm{sh}^2\gamma = 1, \quad \mathrm{ch}2\gamma = \mathrm{ch}^2\gamma + \mathrm{sh}^2\gamma, \quad \mathrm{sh}2\gamma = 2\mathrm{sh}\gamma\,\mathrm{ch}\gamma,$$

знаходимо відповідні розв'язки

$$\alpha = 2\omega_0\mathrm{th}\gamma, \quad \alpha = 2\omega_0\mathrm{cth}\gamma, \quad \alpha = \frac{2\omega}{\pi} \quad (\omega_0 = 0) \tag{5.66}$$

(останній з них неважко отримати також і з (5.63)).

5.10 Випадок „пилкоподібного" збудження

Нехай знову йдеться про маятник, точка підвісу якого рухається періодично вздовж вертикалі. Але тепер у рівнянні (5.56) переміщення точки підвісу маятника відображається „пилкоподібною" періодичною функцією, заданою на періоді $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ виразами

$$f(t) = \begin{cases} at, & \text{якщо } 0 \le t \le \frac{1}{4}T, \\ -at + \frac{1}{2}aT, & \text{якщо } \frac{1}{4}T \le t \le \frac{3}{4}T, \\ at - aT, & \text{якщо } \frac{3}{4}T \le t \le T. \end{cases}$$

Тоді замість (5.59) матимемо:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -2a\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + 2a\delta\left(t - \frac{3}{4}T\right).$$

Отже, рівняння (5.60) заміниться таким:

$$\frac{d^2q}{dt^2} \pm \omega_0^2 q + \alpha\left[\delta\left(t - \frac{T}{4}\right) - \delta\left(t - \frac{3}{4}T\right)\right]q = 0 .$$

Тому в співвідношенні (5.54) $A_1 = \alpha$, $A_2 = -\alpha$, причому, як і в попередньому прикладі, отримуємо два рівняння та їх відповідні розв'язки:

$$\left|\cos 2\gamma - \frac{\alpha^2}{2\omega_0^2}\sin^2\gamma\right| = 1 \quad \left(2\gamma = \omega_0 T\right); \tag{5.67}$$

$$\left|\mathrm{ch} 2\gamma - \frac{\alpha^2}{2\omega_0^2}\mathrm{sh}^2\gamma\right| = 1 ; \tag{5.68}$$

$$\alpha = \pm 2\omega_0 \mathrm{ctg}\gamma , \quad \sin^2\gamma = 0 ; \tag{5.69}$$

$$\alpha = \pm 2\omega_0 \mathrm{cth}\gamma , \quad \mathrm{sh}^2\gamma = 0 , \quad \alpha^2 = \frac{4\omega^2}{\pi^2} \quad (\omega_0^2 = 0). \tag{5.70}$$

Якщо вважати, що $T = 2\pi$ ($\omega = 1$), то співвідношення (5.61) — (5.66) та (5.67) — (5.70) з точністю до позначень збігаються з відомими, отриманими іншим способом (з застосуванням загальної теорії систем рівнянь Гілла) в праці [62]; діаграми (не)стійкості для задач пп. 5.9 і 5.10 побудовані в [55] (також з урахуванням тертя, пропорційного до швидкості). Співвідношення (5.67) — (5.70) цілком узгоджуються з умовами стійкості, з'ясованими в монографії [51] за допомогою результатів теорії диференціальних рівнянь при імпульсних збуреннях. Крім того, неважко переконатися, що співвідношення (5.67) — (5.68) узгоджуються з відповідними нерівностями [51], які є необхідними і достатніми умовами стійкості рівноважних станів даного маятника.

5.11 Дослідження класу задач з двома імпульсами на періоді

Розгляньмо питання про розв'язки характеристичного співвідношення для рівняння (5.45) з двома імпульсами на періоді ($v = 2$) . Беручи до уваги залежності (5.46) і (5.48), записуємо:

$$A_1 + A_2 = 2\mu\omega_0^2(\alpha_1 + \alpha_2) , \quad A_1 A_2 = 4\mu^2\omega_0^4\alpha_1\alpha_2 ,$$

причому з (5.54) отримуємо два рівняння:

$$G+1=0, \quad G-1=0, \tag{5.71}$$

де

$$G=\cos\Gamma-\mu(B_1+B_2)\Gamma\sin\Gamma+2\mu^2 B_1 B_2 \Gamma^2 \Phi(x); \tag{5.72}$$

$$\Gamma=2\gamma=\omega_0 T, \quad B_i=k_i c_i \quad (i=1,2), \quad t_2-t_1=\chi T, \quad 0<\chi<1,$$

$$\Phi(x)=\sin x\sin(\Gamma-x), \; x=\chi\Gamma \quad (\, x\in(0,\Gamma)\,). \tag{5.73}$$

Рівняння (5.71) з урахуванням (5.72) доцільно звести до вигляду

$$\cos^2\gamma-\mu(B_1+B_2)\Gamma\sin\gamma\cos\gamma+\mu^2 B_1 B_2\Gamma^2\Phi(x)=0; \tag{5.74}$$

$$-\sin^2\gamma-\mu(B_1+B_2)\Gamma\sin\gamma\cos\gamma+\mu^2 B_1 B_2\Gamma^2\Phi(x)=0. \tag{5.75}$$

Покажімо, що дискримінант D першого з них завжди задовольняє умову $D\ge 0$. Маємо:

$$D=\Gamma^2\cos^2\gamma\left[(B_1+B_2)^2\sin^2\gamma-4B_1B_2\Phi(x)\right]. \tag{5.76}$$

Функція (5.73) $\Phi(x)$, як неважко переконатися, набуває максимуму при

$$\chi=\frac{1}{2} \quad \left(x=\frac{1}{2}\Gamma\right)$$

і є невід'ємною, оскільки

$$\Phi_{\max}=\sin^2\gamma, \; \Phi(0)=\Phi(\Gamma)=0, \; 0<\chi<1.$$

Тому для задач, в яких параметри B_1 та B_2 мають різні знаки (або один з них дорівнює нулю), дискримінант (5.76) — невід'ємний. Якщо ж знаки цих параметрів однакові, то умова $D\ge 0$ виконується через те, що

$$D\big|_{\Phi=\Phi_{\max}}=\Gamma^2(B_1-B_2)^2\sin^2\gamma\cos^2\gamma\;. \tag{5.77}$$

Тож рівняння (5.74) завжди має два дійсні розв'язки $\mu_1(\gamma)$ та $\mu_2(\gamma)$. Зокрема, для випадку (5.77)

$$\mu_1=(B_2\Gamma\mathrm{tg}\gamma)^{-1}, \quad \mu_2=(B_1\Gamma\mathrm{tg}\gamma)^{-1},$$

причому $\mu_1=\mu_2$, як і повинно бути, коли $B_1=B_2$.

Якщо ж $B_1 = -B_2 = B$ (або навпаки, $B_2 = -B_1 = B$), то

$$\mu_{1,2} = \pm(B\Gamma \operatorname{tg}\gamma)^{-1} \quad (\Gamma = 2\gamma). \tag{5.78}$$

На відміну від розглянутого, дискримінант рівняння (5.75)

$$D = \Gamma^2 \sin^2\gamma \left[(B_1 + B_2)^2 \cos^2\gamma + 4B_1 B_2 \Phi(x)\right] \tag{5.79}$$

може бути й від’ємним. Якщо параметри $B_i > 0$ ($i = 1, 2$) (або один з них — нуль), то вираз (5.79) є невід’ємним ($D \geq 0$). Якщо ж B_1 та B_2 мають різні знаки, зокрема $B_1 = -B_2 = B$, то для $\Phi = \Phi_{\max}$ дискримінант (5.79) задовольнятиме умову

$$D\big|_{\Phi=\Phi_{\max}} = -\Gamma^2 \sin^4\gamma \cdot B^2 \leq 0.$$

При цьому рівність нулеві досягається тут тільки у тому разі, коли $\gamma = \pm\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), і отже, відповідні області нестійкості перестають існувати („вироджуються в прямі”).

Зауважмо, що рівняння (5.75) у разі $B_1 = -B_2 = B$ (або $B_2 = -B_1 = B$) стає таким:

$$-\sin^2\gamma - \mu^2 B^2 \Gamma^2 \Phi(x) = 0.$$

Звідси видно, що не існує дійсних розв’язків μ^2 цього рівняння (крім $\mu^2 = 0$ для $\gamma = \pm\pi n$).

5.12 Приклади застосування „імпульсної апроксимації”

а) Розгляньмо співвідношення (5.28) — (5.29), що відповідають рівнянню Майснера. З формул (5.30) і (5.31) отримуємо для $\mu = 0{,}5$ такі границі головної (першої) області нестійкості:

$$0{,}387 < \frac{\omega_0}{\omega} < 0{,}707 \tag{5.80}$$

Визначмо тепер границі головної області нестійкості для відповідної спорідненої задачі з двома імпульсами на періоді $(\nu = 2)$. При цьому, очевидно, що $t_1 = T/4$, $t_2 = 3T/4$, $B = 1/2$, $\Gamma = 2\gamma$. Застосовуючи формулу (5.78), маємо

$$\mu = \pm(\gamma \operatorname{tg}\gamma)^{-1}. \tag{5.81}$$

Зауважмо, що рівняння (5.74) з урахуванням співвідношень

$$B_1 = -B_2 = 0{,}5\,, \quad \Phi = \Phi_{max} = \sin^2\gamma \ \ (\kappa = 0{,}5\,), \quad \Gamma = 2\gamma$$

набуває вигляду

$$\cos^2\gamma - \mu^2\gamma^2\sin^2\gamma = 0 \qquad (\gamma = 0{,}5\,\omega_0 T).$$

Звідси, як і повинно бути, знову випливає формула (5.81). З неї визначаємо числові дані, наведені в табл. 5 та 6.

5 **Числові дані, визначені за формулою (5.81) для знаку „+”**

γ	1,5	1,2	1,1	1,077	0,5	0,3	0,2	0,1
μ	0,05	0,32	0,46	0,5	3,66	10,78	24,67	99,67

6 **Числові дані, визначені за формулою (5.81) для знаку „–”**

γ	1,6	2,2	2,4	2,46	2,9	3,0	3,1	3,13
μ	0,02	0,33	0,45	0,5	1,4	2,34	7,75	27,56

Беручи до уваги, що $\dfrac{\omega_0}{\omega} = \dfrac{\gamma}{\pi}$, зокрема для $\mu = 0{,}5$, отримуємо:

$$0{,}343 < \frac{\omega_0}{\omega} < 0{,}783\,. \tag{5.82}$$

Порівнюючи наближені числа (5.82) з точними (5.80), висновуємо: нижня межа менша від точної приблизно на 11%, а верхня — більша за точну приблизно на 10% (для $0 \le \mu < 0{,}5$ відхилення від відповідних точних чисел виявляються меншими, прямуючи до нуля при зменшенні μ).

Як бачимо, головна область параметричного резонансу спорідненої імпульсної задачі ($\nu = 2$) містить у собі при $\mu = 0{,}5$ відповідну область задачі Майснера [6, 64].

Застосуймо тепер до визначення головної області рівняння вигляду (5.55) з чотирма імпульсами на періоді ($\nu = 4$). Відповідне характеристичне співвідношення можна записати так:

$$\left|\ \cos 2\gamma - \mu^2\gamma^2\sin^2\gamma + \frac{1}{2}\mu^3\gamma^3\sin\gamma\sin\frac{1}{2}\gamma\left(\sin\frac{3}{2}\gamma - \sin\gamma\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\mu^4\gamma^4\sin^3\frac{1}{2}\gamma\sin\gamma\Bigg| = 1\,;$$

це випливає з того, що

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_3 = -\alpha_4 = \frac{1}{4}T\ ,\quad t_i = \frac{i+2}{8}\quad (\,i = \overline{1{,}4}\,),$$

$$A_1 = A_2 = -A_3 = -A_4 = \frac{1}{2}\mu T\omega_0^2\,.$$

Звідси отримуємо наближене рівняння (тим точніше, чим менше μ):

$$2\cos^2\gamma - \mu^2\gamma^2\sin^2\gamma = 0\,.$$

Отже,

$$\mu = \pm\sqrt{2}\,(\gamma\, tg\gamma)^{-1}\,.$$

Для $\mu = 0{,}5$, як і раніше (див. (5.82)), обчислюємо:

$$0{,}374 < \frac{\omega_0}{\omega} < 0{,}713\,. \tag{5.83}$$

Нижня межа головної області параметричного резонансу є меншою за точну, приблизно на 3%, а верхня більшою від точної приблизно на 1% (очевидно, і тут для щораз менших μ відхилення від відповідних точних значень γ будуть лише зменшуватися).

б) Розгляньмо рівняння (5.12), в якому

$$F(\,t\,) = \sin\omega t\ ,$$

і відповідне споріднене рівняння (5.45) з двома імпульсами на періоді.

Визначивши величини

$$A_1 = -A_2 = 2\mu\omega_0^2\int_0^{T/2}\sin\omega t\,dt = 4\mu\frac{\omega_0^2}{\omega}\ ,\ t_1 = \frac{1}{4}T\ ,\ t_2 = \frac{3}{4}T\ ,$$

отримаємо із (5.54) характеристичне співвідношення

$$\left|\cos 2\gamma - \frac{8\mu^2\gamma^2}{\pi^2}\sin^2\gamma\right| = 1\quad (\,\omega_0 T = 2\gamma\,).$$

Звідси (або з формули (5.78), кладучи $B\Gamma = \dfrac{2\gamma}{\pi}$), знаходимо

$$\mu = \pm \frac{\pi}{2}(\gamma\,\mathrm{tg}\gamma)^{-1};$$

головній області нестійкості при $\mu = 0{,}5$ відповідають числа $\gamma = 1{,}205$ та $\gamma = 2{,}18$. Тому оцінки вигляду (5.80), (5.82) і (5.83) є тут такими:

$$0{,}384 < \frac{\omega_0}{\omega} < 0{,}694\,. \qquad (5.84)$$

Зауважмо, що оцінки (5.82) і (5.84) відповідають задачам, які відрізняються одна від одної тільки величиною імпульсів. Записуючи імпульс A_1 як добуток $2\mu\omega_0^2\omega^{-1}c$ ($c > 0$ — коефіцієнт пропорційності), для другої з цих задач маємо $c = 2$, а для першої — $c = \pi$. Отже, збільшення імпульсу приблизно на 57 % зумовило тут збільшення ширини головної області нестійкості при $\mu = 0{,}5$ приблизно на 42 %; при цьому нижня межа (найнебезпечніша) зменшилася приблизно на 11%. Подібні кількісні висновки неважко одержати для інших значень параметра μ та для другої й подальших областей нестійкості.

в) Застосуймо рівняння (5.45) з трьома імпульсами на періоді ($\nu = 3$) до рівняння Мат'є, що збігається з рівнянням (5.12) при $F(t) = \cos\omega t$. Моменти t_1, t_2 і t_3 прикладання імпульсів доцільно, як буде показано, визначати як координати центрів мас відповідних площ (в працях [55, 62] моменти прикладання імпульсів збігаються з центрами інтервалів, на які розбито період $T = 2\pi$).

Отже,

$$t_1 = \frac{1}{s}\int_0^{\frac{T}{4}} x\cos\omega x\,dx\,, \quad s = \int_0^{\frac{T}{4}} \cos\omega x\,dx\,. \qquad (5.85)$$

Після обчислення інтегралів визначаємо:

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{\omega}0{,}5707963 \approx \frac{1}{11}T \qquad (5.86)$$

(зауважмо, що $\dfrac{2\pi}{11} = 0{,}5711987$).

Беручи до уваги графік функції $\cos\omega t$ ($0 \le t \le T$) та формули (5.85) і (5.86), маємо очевидні рівності

$$t_2 = \frac{1}{2}T\,, \quad t_3 = \frac{10}{11}T\,; \qquad (5.87)$$

$$A_1 = A_3 = 2\mu \frac{\omega_0^2}{\omega}, \quad A_1 = A_3 = 2\mu \frac{\omega_0^2}{\omega}. \tag{5.88}$$

Підставляючи в характеристичне співвідношення (5.55) параметри (5.86) — (5.88), отримаємо множину кубічних рівнянь відносно параметра збудження μ для визначення областей нестійкості

$$\left| \cos\Gamma + \mu^2 \frac{\Gamma^2}{\pi^2}\left(-2\sin\frac{9}{22}\Gamma\sin\frac{13}{22}\Gamma + \frac{1}{2}\sin\frac{9}{11}\Gamma\sin\frac{2}{11}\Gamma \right) + \right.$$
$$\left. + \mu^3 \frac{\Gamma^3}{\pi^3}\sin^2\frac{9}{22}\Gamma\sin\frac{2}{11}\Gamma \right| = 1, \tag{5.89}$$

де $\Gamma = \omega_0 T$.

Звідси висновуємо, що кожній із вказаних областей відповідає рівняння вигляду

$$p(\mu) \equiv a_0\mu^3 + a_1\mu^2 + a_3 = 0, \tag{5.90}$$

в якому a_0 та a_1 — коефіцієнти в (5.89) біля μ^3 і μ^2; коефіцієнт a_3 визначає вираз

$$a_3 = \cos\Gamma + (-1)^{n+1}, \; n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.91}$$

де n — порядковий номер області нестійкості; при цьому для $\mu = 0$ із (5.89) отримуємо $\Gamma = n\pi$.

Щоб аналізувати рівняння (5.90), доцільно спочатку провести обчислення й оцінки його коефіцієнтів для $\mu = 0$, табл. 7.

7 **Коефіцієнти рівняння (5.90) та їх знаки, що відповідають трьом першим областям нестійкості, для значень $\Gamma = \pi + \varepsilon$, $\Gamma = 2\pi + \varepsilon$ і $\Gamma = 3\pi + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$)**

Коефіцієнти у разі $\varepsilon = 0$ та їхні знаки у разі $\|\varepsilon\| \ll 1$	a_0		a_1		a_3	
	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon \neq 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon \neq 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon \neq 0$
Перша (головна) область нестійкості	0,50	+	–1,70	–	0	+
Друга область нестійкості	2,13	+	0,68	+	0	–
Третя область нестійкості	11,46	+	–3,02	-	0	+

Наведені в табл. 7 знаки коефіцієнтів a_0, a_1 і a_3 для $|\varepsilon| \ll 1$ отримано на підставі формули (5.91), завдяки неперервності функції $p(\mu)$. При цьому, як бачимо,

$$a_0 > 0; \quad \mu^2 \approx -\frac{a_3}{a_1} > 0 \tag{5.92}$$

Неважко з'ясувати також, що для $n=1$ і $n=3$

$$p(0) = a_3 = p_{\max}, \quad p\left(-\frac{2a_1}{3a_0}\right) = p_{\min}, \tag{5.93}$$

а для $n=2$

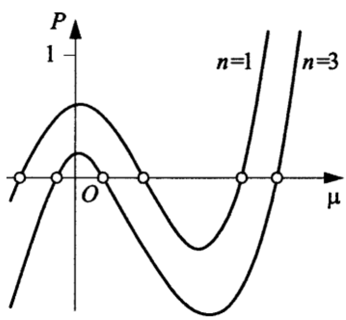
$$p(0) = a_3 = p_{\min}, \quad p\left(-\frac{2a_1}{3a_0}\right) = p_{\max}. \tag{5.94}$$

З нерівностей (5.92) та формул (5.93) — (5.94) випливають якісні графіки функції $p(\mu)$, зображені на рис. 13 та 14.

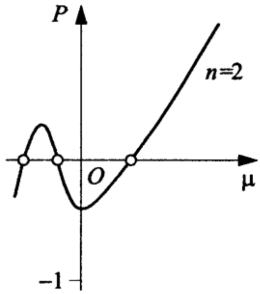
Результати обчислень наведено в табл. 8. Значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_3 для наведених у табл. 8 чисел Γ отримані за співвідношеннями (5.89) і (5.91) для $n=1,2,3$; μ_1, μ_2 і μ_3 — розв'язки відповідних рівнянь (5.90); $\eta = \dfrac{\pi}{\Gamma}$; прочерки (—) відповідають комплексно-спряженим кореням рівняння (5.90); числа

$$\mu_{1,2} = \pm\left(-\frac{a_3}{a_1}\right)^{1/2} \tag{5.95}$$

— розв'язки наближеного рівняння, отриманого із (5.90) при $|\mu^3| \ll 1$.



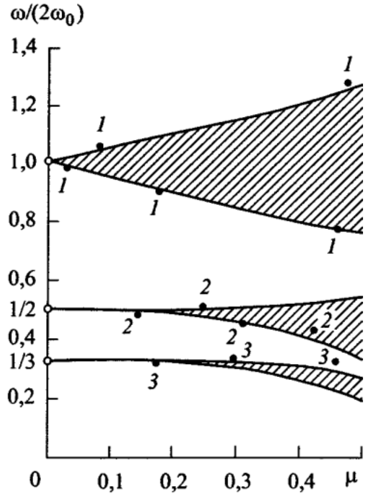
13 **Якісні графіки функції $p(\mu)$ для першої (головної) і третьої областей нестійкості.**



14 **Якісний графік функції $p(\mu)$ для другої області нестійкості ($|\varepsilon| << 1$).**

8 **Коефіцієнти та корені μ_1, μ_2 й μ_3 характеристичних многочленів $p(\mu)$ для перших трьох областей нестійкості**

Γ	a_0	a_1	a_3	μ_1	μ_2	μ_3	η	$\mu_{1,2}$
4	1,3665	–2,3412	0,3464	–0,35	0,45	1,62	0,785	± 0,38
3,5	0,8061	–2,0594	0,0635	–0,17	0,18	1,06	0,898	± 0,18
3,2	0,5419	–1,7603	0,0017	–0,03	0,03	3,25	0,982	± 0,03
π	0,4977	–1,700	0	0	0	3,42	1	0
3	0,4212	–1,5247	0,0100	–0,08	0,08	3,62	1,047	± 0,08
2,5	0,1612	–0,9526	0,1989	–0,44	0,48	5,87	1,257	± 0,46
2	0,0489	–0,4755	0,5839	–1,05	1,18	9,59	1,571	± 1,11
7	0,7962	1,0327	–0,2461	–	–	0,424	0,449	± 0,49
6,75	1,2862	1,0692	–0,107	–0,704	–0,439	0,311	0,465	± 0,32
6,5	1,7644	0,929	–0,0234	–0,47	–0,203	0,14	0,483	± 0,16
2π	2,1266	0,6832	0	–0,32	0	0	0,5	0
6,19	2,2608	0,5488	–0,0043	–0,19	–0,13	0,24	0,508	± 0,09
6	2,4861	0,2322	–0,0398	—	—	0,225	0,524	± 0,41
5,5	2,7337	0,929	–0,0234	—	—	0,58	0,571	± 0,16
10,5	29,4404	2,2959	0,5245	–0,29	—	—	0,299	—
9,7	15,6329	–2,6853	0,0376	–0,095	—	—	0,324	± 0,19
9,6	14,0579	–2,9736	0,0153	–0,063	0,10	0,18	0,327	± 0,07
3π	11,4609	–3,0186	0	0	0	0,2634	0,(3)	0
9,4	11,1139	–3,3419	0,00031	–0,0095	0,0097	0,3004	0,334	± 0,01
9	6,2055	–3,3271	0,0889	–0,145	0,209	0,472	0,345	± 0,16
8,5	2,1484	–2,3158	0,3980	–0,359	0,702	0,735	0,370	± 0,41



15 **Перші три області параметричного резонансу для рівняння Мат'є та їх порівняння з результатами застосування трьох апроксимувальних імпульсів.**

Області нестійкості для невід'ємних μ зображені на рис. 15 (*1, 2, 3* — точки, що випливають з імпульсної апроксимації і відповідають також трьом різним областям нестійкості). Як бачимо, для значень $\mu \in [0; 0{,}5]$ також і в цьому прикладі оцінки головної області параметричного резонансу відрізняються незначно, тож можна застосовувати наближену формулу (5.95).

Істотними виявляються відмінності для других та третіх областей. Для рівняння Мат'є, як відомо [54], діаграма (не)стійкості є симетричною. З наведених в табл. 8 результатів обчислень випливає, що симетрія вказаних областей у спорідненій задачі зберігається тільки для достатньо малих значень коефіцієнта збудження μ. При цьому для $|\mu| > 0{,}01$ асиметрія щораз більше посилюється. Зокрема, друга область нестійкості для від'ємних значень μ і $\Gamma = 6{,}19$ ще існує, а для $\Gamma = 6{,}18$ — ні (оскільки два від'ємні корені зі зменшенням Γ стали кратними, а згодом — комплексними); подібно й третя зникає для додатних значень μ, починаючи з $\Gamma \approx 9{,}62$ (тут кратними, а згодом комплексними стають додатні корені).

Зауваження: а) метод дискретизації з використанням рівнянь вигляду (5.45) можна застосовувати цілком подібно до задач, в яких збуджувальна функція $F(t)$ має неперервну або східчасто-неперервну та імпульсні складові; б) якщо $F(t)$ в рівнянні (5.45) не є періодичною, то поведінка його розв'язків визначається співвідношенням вигляду (5.62) — (5.64) (з урахуванням початкових умов).

6 УЗАГАЛЬНЕНИЙ ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ПРУЖНИХ ТА ПРУЖНО-ЖОРСТКИХ ОДНОВИМІРНИХ СИСТЕМ

6.1 Про методологію дослідження малих коливань одновимірних моделей з довільним розподілом параметрів

Належно загальна методологія динамічного аналізу пружних і пружно-жорстких систем з довільними допустимими законами розподілу параметрів (жорсткостей, мас, тертя, зовнішніх навантажень тощо) так чи інакше повинна поєднувати собі:

а) методи побудови механічних моделей коливних систем з застосуванням відомих способів зведення мас, жорсткостей і податностей [4, 6—8, 19, 20, 24, 36, 43, 49, 56, 57];

б) методи дослідження малих коливань дискретних, континуальних і континуально-дискретних пружних систем [2—4, 6—8, 13, 14, 17, 20, 23, 24, 36, 45, 49, 55—57, 60, 61];

в) метод фундаментальних функцій знаходження загальних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь з особливостями в коефіцієнтах і в правих частинах (типу імпульсних функцій) [11, 20, 21, 27—29, 30, 34, 40, 47, 63].

Покладаючись на викладене в попередніх розділах та аналізуючи можливості перелічених методів, неважко дійти такої схеми розробки засад узагальненої методології динамічного аналізу. Механічну коливну систему з довільним допустимим розподілом параметрів можна моделювати послідовністю систем зі скінченною кількістю ступенів вільності. Власні частоти або характеристичні показники таких моделей визначаються з універсальних частотних рівнянь. Коефіцієнти частотних рівнянь та відповідні матриці жорсткостей і податностей доцільно будувати методом фундаментальної функції. Заслуговує на особливу увагу метод головних коливань, притім доречними стають двобічні оцінки частот (див. 4.8). Ті ж самі оцінки застосовні і до континуальних та континуально-дискретних моделей механічних систем. При цьому в основу методики аналізу динаміки пружних і пружно-жорстких систем є сенс покласти фундаментальні функції відповідних лінійних диференціальних рівнянь, фундаментальні розв'язки, а також універсальні характеристичні рівняння.

В узагальнену методологію динамічного аналізу вельми бажано закласти можливості:

— окреслювати умови й межі її застосовності;

— формалізовано враховувати абсолютно жорсткі чи/та абсолютно податні ланки;

— формулювати якісні та кількісні висновки про вплив розподілу мас, жорсткостей та інших параметрів на частотні спектри;

— розпізнавати умови відсутності явищ резонансу та биття;

— залучати її до дослідження регулярних систем;

— використовувати матриці жорсткості та матриці податності стосовно ускладнених моделей (з пружними в'язями та за наявності сил тертя, пружної основи, приєднаних мас тощо);

— поширити поняття фундаментальної функції для дослідження дво- і тривимірних моделей континуальних та континуально-дискретних пружних та пружно-жорстких систем.

6.2 Побудова матриць податності закріплених моделей методом фундаментальної функції

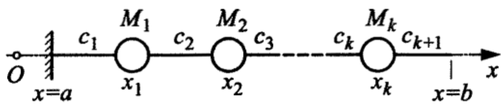
Як уже зазначалося, достатньо загальними моделями механізмів і машин можна вважати пружні та пружно-жорсткі прямолінійні стержні з багатьма зосередженими масами [2—4, 6—8, 20, 24, 36, 45, 46, 48, 49, 55—57]. Правила, за якими будуються такі моделі, та способи визначення відповідних зведених жорсткостей і зведених мас чи моментів інерції розглядаються в багатьох працях (див., зокрема, [4—8, 20, 24, 36, 49, 56, 57]). Разом з тим, питання побудови матриць $C = \| c_{ij} \|$ та $\beta = \| \beta_{ij} \|$ (див. 3.1, 3.2) для моделей з довільними розподілами жорсткостей (податностей) аж ніяк не належать до вичерпно опрацьованих. Нові методологічні можливості в цьому аспекті моделювання розкриває поняття фундаментальної функції.

Застосуймо фундаментальну функцію передусім до знаходження коефіцієнтів впливу податностей β_{ij} консольного прямолінійного стержня з довільним розподілом параметрів при поздовжніх коливаннях (рис. 16). Допоміжною, як і в [20] у випадку крутних коливань, є задача

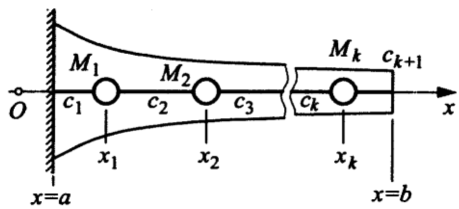
$$(fy')' = -F_j\delta(x-x_j)\,,\; y(a)=0\,,\; f(b)y'(b)=0\,. \tag{6.1}$$

Тут $f = EF(x)$ — поздовжня жорсткість стержня; E — модуль Юнга; $F(x)$ — площа поперечного перерізу стержня; $y = y(x)$ — поздовжнє переміщення; F_j — сила, прикладена в перерізі x_j; $x=a$ та $x=b$ — координати лівого й правого кінців стержня; x_i — координати точок, в яких зосереджені маси M_i, причому

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b\,.$$



а



б

16 **Модель консольного стержня з дискретним (*а*) та довільним (*б*) розподілом параметрів (мас і жорсткостей).**

Застосовуючи фундаментальну функцію

$$K(x,\alpha) = \int_{\alpha}^{x} \frac{ds}{f(x)} \tag{6.2}$$

та формули з 3.5 , в яких $\alpha = a$, отримуємо розв'язок допоміжної задачі (6.1) у вигляді

$$y_j = F_j\left[K(x,a) - \Phi(x,x_j)\right], \tag{6.3}$$

де

$$\Phi(x,x_j)\equiv K(x,x_j)\theta(x-x_j)\,. \qquad (6.4)$$

Із співвідношень

$$q_i=\beta_{i1}F_1+\beta_{i2}F_2+\ldots+\beta_{ik}F_k \quad (i=\overline{1,k}\,) \qquad (6.5)$$

видно, що β_{ij} — переміщення поперечного перерізу x_i за дії одиничної узагальненої сили, прикладеної до перерізу x_j. Враховуючи це, на підставі (6.3) — (6.4) отримуємо:

$$\beta_{ij}=K(x_i,a)=\int_a^{x_i}\frac{ds}{f(s)} \quad (i\le j\,). \qquad (6.6)$$

Якщо силу прикладено в точці x_i, то замість (6.3) слід писати

$$y_i=F_i\left[K(x,a)-\Phi(x,x_i)\right].$$

Звідси, беручи до уваги (6.5), подібно до попереднього знаходимо

$$\beta_{ij}=K(x_j,a)-\Phi(x_j,x_i)=$$

$$=K(x_j,a)-K(x_j,x_i)=\int_a^{x_j}\frac{ds}{f(s)}-\int_{x_i}^{x_j}\frac{ds}{f(s)}=\int_a^{x_i}\frac{ds}{f(s)}\,. \qquad (6.7)$$

Отже, $\beta_{ji}=\beta_{ij}$. Зауважмо, що симетричність матриці β — цілком відомий факт; зокрема вона випливає з теореми Максвела про взаємність переміщень [56].

Як бачимо, коефіцієнти β_{ij} впливу податності даної моделі визначаються формулою (6.6). Тому, побудувавши за відомими правилами матриці A та B [4—7], можна записати диференціальні рівняння руху системи в переміщеннях.

Цілком подібно визначаються коефіцієнти β_{ij} і β_{ji} для моделі з закріпленими кінцями (рис. 17). В цьому випадку допоміжною є задача, яка одержується з (6.1) шляхом заміни граничної умови $f(b)y'(b)=0$ на умову $y(b)=0$. Підставляючи загальний розв’язок рівняння (6.1)

$$y=C_0K_{xa}+C_1\dot K_{xa}-F_j\Phi_{xj}$$

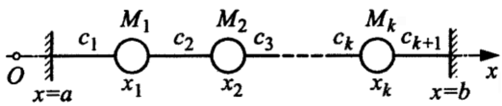
(функції K та Φ визначені тими ж самими формулами (6.2) і (6.4)) в умови $y(a)=y(b)=0$, отримуємо відповідно:

$$C_1 = 0\,, \quad C_0 = F_j K_{bj} K_{ba}^{-1}.$$

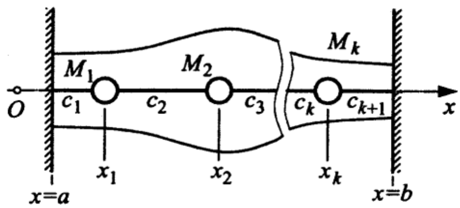
Тут і далі застосовано позначення

$$K_{xa} \equiv K(x,a)\,, \quad \dot{K}_{xa} \equiv \frac{\partial K(x,a)}{\partial a}\,,$$

$$\Phi_{xj} \equiv \Phi(x,x_j)\,, \quad K_{ba} \equiv K(b,a)\,.$$



а



б

17 **Модель стержня з закріпленими кінцями (*а* — первісно дискретна, *б* — схема зведення до неї).**

Розв’язком допоміжної задачі в даному разі є функція

$$y_j = F_j \left[K_{bj} K_{ba}^{-1} K_{xa} - \Phi_{xj} \right]. \tag{6.8}$$

Якщо ж сила F_i прикладена в перерізі x_i, то замість (6.8) матимемо

$$y_i = F_i \left[K_{bi} K_{ba}^{-1} K_{xa} - \Phi_{xi} \right].$$

Звідси, діючи так само, як і при виведенні формул (6.6) і (6.7), отримуємо коефіцієнти впливу податностей для стержня з закріпленими кінцями:

$$\beta_{ij} = K_{bj} K_{ba}^{-1} K_{ia}\,; \qquad i \le j\,; \tag{6.9}$$

$$\beta_{ji} = K_{bi} K_{ba}^{-1} K_{ja} - K_{ji} \qquad \left(x_j \ge x_i\right). \tag{6.10}$$

І тут також неважко переконатися (застосовуючи формулу (6.2)) в тому, що $\beta_{ji} = \beta_{ij}$. Справді, прирівнюючи праві частини співвідношень (6.10) і (6.9), матимемо низку співвідношень

$$K_{bi} K_{ja} - K_{ji} K_{ba} = K_{bj} K_{ia}\,,\ \left(K_{ji} + K_{bj}\right)\left(K_{ia} + K_{ji}\right) - K_{ji} K_{ba} - K_{bj} K_{ia} = 0\,,$$

$$K_{ji}\left(K_{ia} + K_{ji} + K_{bj} - K_{ba}\right) = 0\,,\ K_{ji}\left(K_{ja} - K_{ja}\right) = 0\,. \qquad (6.11)$$

В формулах (6.8) і (6.11) позначено:

$$K_{bj} \equiv K(b, x_j)\,,\ K_{ia} \equiv K(x_i, a)\,,\ K_{ji} \equiv K(x_j, x_i)\,.$$

Отже, коефіцієнти β_{ij} впливу податностей даних моделей (рис. 16 і рис.17) з будь-якою жорсткістю $f(x) > 0$, що є інтегровною функцією, визначаються за формулами (6.6), (6.7) і (6.9), (6.10). Корисним є такий практичний висновок: будуючи матриці податності β розглянутих консервативних систем, доцільно визначати тільки елементи β_{ij} для $i \le j$, застосовуючи формули (6.6) і (6.9) — вони простіші за (6.7) і (6.10).

6.3 Побудова матриць жорсткості закріплених моделей

Щоб одержати рівняння руху моделі в зусиллях, потрібно мати матрицю жорсткості C. Її визначатимемо як обернену до відповідної матриці податності β.

Нехай $k = 2$ (рис. 16). Тоді за формулою (6.6)

$$\beta = \begin{Vmatrix} K_{1a} & K_{1a} \\ K_{1a} & K_{2a} \end{Vmatrix},\ \det\beta \equiv \Delta_2 = K_{1a} K_{21}, \qquad (6.12)$$

де враховано, що

$$K_{21} = K_{2a} - K_{1a}\,. \qquad (6.13)$$

Позначмо через β^{T} одержану з (6.12) транспоновану матрицю, а через $\left(\beta^{\mathrm{T}}\right)'$ — відповідну матрицю з алгебричних доповнень (із β^{T}):

$$\left(\beta^{\mathrm{T}}\right)' = \begin{Vmatrix} K_{2a} & -K_{1a} \\ -K_{1a} & K_{1a} \end{Vmatrix}. \qquad (6.14)$$

Зауважмо, що $\beta^{\mathrm{T}} = \beta$. В такому разі за відомим правилом [39]

$$\beta^{-1} = \frac{1}{\det\beta}\left(\beta^{\mathrm{T}}\right)'. \qquad (6.15)$$

Застосувавши формули (6.12) — (6.15), одержимо:

$$C = (K_{1a}\,K_{21})^{-1}\begin{Vmatrix} K_{2a} & -K_{1a} \\ -K_{1a} & K_{1a} \end{Vmatrix}. \tag{6.16}$$

Перемножуючи матриці (6.12) і (6.16), неважко перевірити, що $\beta C = E$ (E — одинична матриця).

Розгляньмо випадок $k = 3$ (див. рис. 16). Замість (6.12), застосувавши формулу (6.6), матимемо

$$\beta = \begin{Vmatrix} K_{1a} & K_{1a} & K_{1a} \\ K_{1a} & K_{2a} & K_{2a} \\ K_{1a} & K_{2a} & K_{3a} \end{Vmatrix},\ \det\beta \equiv \Delta_3 = K_{1a}\,K_{21}\,K_{32}, \tag{6.17}$$

тобто

$$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot K_{32},\ K_{32} = K_{3a} - K_{2a}. \tag{6.18}$$

За формулою (6.16) отримаємо відповідну матрицю жорсткості

$$C = \frac{1}{\Delta_3}\begin{Vmatrix} K_{2a}K_{32} & -K_{1a}K_{32} & 0 \\ -K_{1a}K_{32} & K_{1a}K_{31} & -K_{1a}K_{21} \\ 0 & -K_{1a}K_{21} & K_{1a}K_{21} \end{Vmatrix}, \tag{6.19}$$

де

$$K_{31} = K_{3a} - K_{1a} = K_{21} + K_{32} \tag{6.20}$$

(можна переконатися, що добуток матриць (6.17) і (6.19) дорівнює одиничній матриці).

Беручи до уваги співвідношення (6.12), (6.13), (6.17) і (6.18), запишімо матриці жорсткості (6.16) та (6.19) у вигляді

$$C = \begin{Vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{Vmatrix} \quad (k = 2), \tag{6.21}$$

$$C = \begin{Vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{Vmatrix} \quad (k = 3). \tag{6.22}$$

Тут враховано, що

$$(K_{1a}\,K_{21})^{-1}K_{2a} = \frac{K_{1a} + K_{21}}{K_{1a}\,K_{21}} = c_2 + c_1,$$

$$\Delta_3^{-1} \cdot K_{2a} K_{32} = K_{2a} (K_{1a} K_{21})^{-1} = c_2 + c_1 ,$$

$$\Delta_3^{-1} \cdot K_{1a} K_{31} = \frac{K_{21} + K_{32}}{K_{21} K_{32}} = c_3 + c_2 ,$$

$$\Delta_3^{-1} \cdot K_{1a} K_{21} = K_{32}^{-1} = c_3 . \tag{6.23}$$

Цілком подібно переконуємося, що для $k = 4$ справджується формула

$$C = \begin{Vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{Vmatrix}, \tag{6.24}$$

а для $k = 5$, $k = 6$, $\ldots$ — аналогічні формули, де

$$c_1 = K_{1a}^{-1},\ c_{i+1} = K_{i+1,i}^{-1}\ \ (i = \overline{1, k-1}). \tag{6.25}$$

Порівнюючи матриці (6.21), (6.22) і (6.24) та беручи до уваги рис. 16, бачимо, як можна послідовно записувати відповідні матриці жорсткості для $k = 5$, $k = 6$ тощо. Для перевірки правильності такої побудови, доцільно використовувати співвідношення $\beta C = E$.

Отже, можна вважати розв’язаною задачу про запис рівнянь руху в зусиллях для моделі-консолі, що несе зосереджені маси M_i, порівняно з якими розподілені маси ланок вважаються зникаюче малими.

Подібно побудуймо матрицю C для моделі-стержня з закріпленими кінцями (рис. 17). За формулою (6.9) для $k = 2$ маємо:

$$\beta = K_{ba}^{-1} \begin{Vmatrix} K_{1a} K_{b1} & K_{1a} K_{b2} \\ K_{1a} K_{b2} & K_{2a} K_{b2} \end{Vmatrix}. \tag{6.26}$$

Застосувавши формулу (6.25) і співвідношення

$$K_{b1} = K_{21} + K_{b2} = c_2^{-1} + c_3^{-1},\ K_{2a} = K_{1a} + K_{21} = c_1^{-1} + c_2^{-1},$$

$$K_{ba} = K_{1a} + K_{21} + K_{b2} = c_1^{-1} + c_2^{-1} + c_3^{-1}, \tag{6.27}$$

із (6.26) отримаємо:

$$\beta = K_{ba}^{-1} \begin{Vmatrix} (c_1 c_2)^{-1} + (c_1 c_3)^{-1} & (c_1 c_3)^{-1} \\ (c_1 c_3)^{-1} & (c_1 c_3)^{-1} + (c_2 c_3)^{-1} \end{Vmatrix}. \tag{6.28}$$

Звідси, беручи до уваги (6.27), обчислюємо

$$\det \beta = (K_{1a}\ K_{21}\ K_{b2})K_{ba}^{-1} = (c_2c_3 + c_1c_3 + c_1c_2)^{-1}, \tag{6.29}$$

а за формулою (6.15) знаходимо

$$C = \begin{Vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{Vmatrix}. \tag{6.30}$$

Неважко перевірити, що добуток матриць (6.28) і (6.30), як і повинно бути, дорівнює одиничній матриці; при цьому, враховуючи (6.29), маємо формулу

$$\det \beta \cdot \det C = 1 .$$

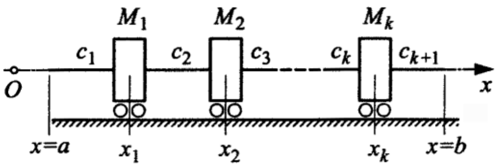
Порівняймо тепер матрицю жорсткості (6.30) для стержня з закріпленими кінцями з матрицями жорсткості (6.21), (6.22) і (6.24) для консолей. Це дозволить встановити правило, за яким записуються відповідні матриці C (подібні до (6.30)) для $k = 3$, $k = 4$, $\ldots$ — для довільних скінченних k: нехай для консолі з k зосередженими масами маємо матрицю жорсткості вигляду (6.24), елемент якої на перетині останнього рядка та останнього стовпця позначено як c_k; тоді, записуючи замість цього елемента суму $c_k + c_{k+1}$, отримуємо матрицю жорсткості для такого самого стержня, правий кінець якого також закріплений. При цьому

$$c_1 = K_{1a}^{-1},\ c_{i+1} = K_{i+1,i}^{-1}\ \ (i = \overline{1, k-1}), c_{k+1} = K_{b,\,k+1}^{-1} \tag{6.31}$$

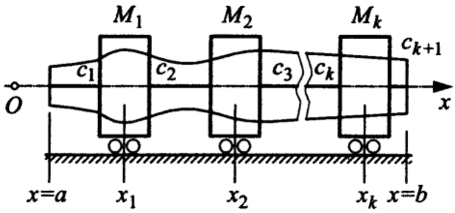
(b — координата правого кінця стержня; k — кількість ступенів вільності). Отже і тут задачу про запис рівнянь руху в зусиллях можна вважати розв'язаною.

6.4 Про матриці жорсткості та матриці податності в особливих випадках

Особливими коливними системами можна вважати так звані напівозначені або незакріплені системи (рис. 18). Їхнім потенціальним енергіям відповідають не додатно визначені квадратичні форми ($\Pi > 0$), а тільки невід'ємні ($\Pi \geq 0$). Матриці жорсткості таких систем є особливими ($\det C = 0$), стани рівноваги — байдужими (їм відповідають нульові частоти і неколивні рухи); у вирази потенціальної енергії не входять деякі з головних координат (їх називають циклічними) [7].



а



б

18 **Модель напівозначеної (незакріпленої) системи**
(а — первісно дискретна, б — схема зведення до неї).

Як відомо, щоб одержати матрицю жорсткості напівозначеної системи, досить прирівняти до нуля відповідні коефіцієнти впливу жорсткостей у матриці, побудованій для певної закріпленої системи. Наприклад, із матриці C (6.30) для моделі з закріпленими кінцями при $c_1 = c_3 = 0$ маємо матрицю жорсткості

$$C = \begin{Vmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{Vmatrix} \qquad (6.32)$$

для найпростішої напівозначеної системи. Якщо ж в (6.30) тільки $c_1 = 0$, то матимемо матрицю C для консолі з правим закріпленим кінцем:

$$C = \begin{Vmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{Vmatrix}.$$

Матрицю (6.32) отримуємо, очевидно, з (6.21), якщо $c_3 = 0$, або з (6.24), якщо $c_1 = 0$ (відповідні первісні моделі — двомасові консолі „втрачають закріплення”). Зауважмо, що визначник матриці (6.32) (як і багатьох до неї подібних) дорівнює нулеві, а тому відповідної їй матриці податності β не існує. З іншого боку, матриці β також можуть бути особливими (наприклад, коли в (6.29) $K_{1a} = 0$ чи $K_{21} = 0$ або $K_{b2} = 0$), а отже, не існують відповідні матриці жорсткості. Однак варто зауважити, що вказана напівозначена система, як і багато подібних до неї, має і жорсткість, і податність [7, 56]. Очевидно також, що матриці (6.21) і (6.30) не є особливими (вони були отримані, як обернені до відповідних матриць β). Тому, прагнучи вивчати динамічну поведінку моделей з достатньо жорсткими чи (та) вельми податними ланками, доцільно розглянути детальніше дане зауваження та пов'язані з ним питання.

6.5 Порівняння різних частотних рівнянь пружних і пружно-жорстких моделей

Одним з основних питань у рамках кожного дослідження коливних систем є знаходження власних частот і вивчення їх залежності від геометричних та жорсткісних параметрів, умов закріплення, сил тертя тощо. Частотні (характеристичні) рівняння заданої системи можна, як відомо, будувати по-різному, і вони можуть за виглядом значно відрізнятися одне від одного (але визначувані з них власні частоти, очевидно, повинні збігатись за значеннями).

Запишімо й порівняймо різні види частотних рівнянь, наприклад, для моделі з рис. 17, коли $k=2$ (рис. 19, *а*). Вихідними тут є рівняння малих коливань у прямій формі (у зусиллях)

$$\begin{Vmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_1'' \\ q_2'' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix} = 0 ,$$

та в оберненій формі (у переміщеннях)

$$\begin{Vmatrix} \beta_{11}M_1 & \beta_{12}M_2 \\ \beta_{12}M_1 & \beta_{22}M_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_1'' \\ q_2'' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix} = 0 ,$$

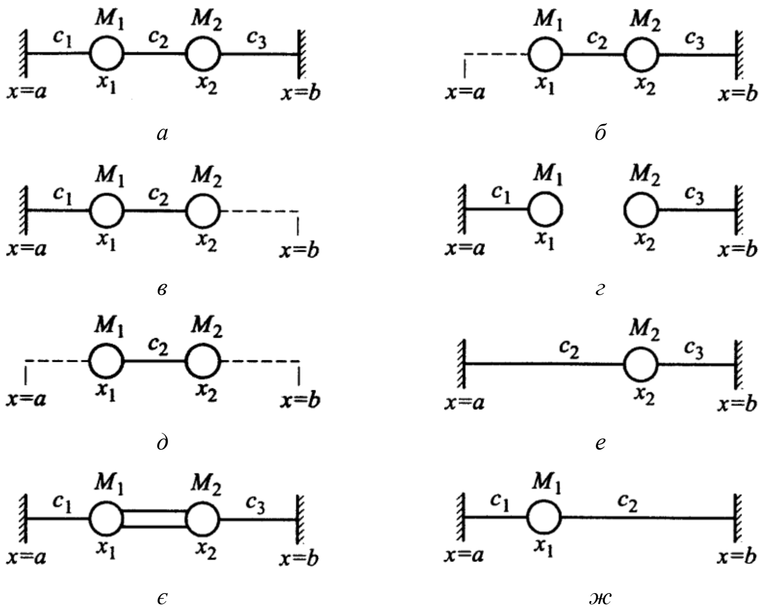
де коефіцієнти впливу жорсткостей c_i $(i=\overline{1,3})$ та впливу податностей β_{ij} $(i, j=1,2)$ визначені відповідно до (6.31) та (6.26). Звідси, покладаючи $q_k = C_k \exp \lambda t$ $(k=1,2)$, приходимо до частотних рівнянь

$$M_1 M_2 \lambda^4 + [M_1(c_2+c_3) + M_2(c_1+c_2)]\lambda^2 + c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 = 0 , \quad (6.33)$$

$$M_1 M_2 (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)\lambda^4 + (\beta_{11}M_1 + \beta_{22}M_2)\lambda^2 + 1 = 0 . \quad (6.34)$$

Для цієї ж моделі запишімо універсальне частотне рівняння $Q(b,a)=0$ (див. 3.7):

$$M_1 M_2 K_{1a} K_{21} K_{b2} \lambda^4 + (K_{1a}K_{b1}M_1 + K_{2a}K_{b2}M_2)\lambda^2 + K_{ba} = 0 . \quad (6.35)$$



19 **Окремі граничні випадки моделі з рис. 17 (*k*=2).**

Помножмо його на K_{ba}^{-1} $(0 < K_{ba} < \infty)$ і звернімося до формул (6.9) та (6.26), за якими

$$\beta_{ii} = K_{ia} K_{bi} K_{ba}^{-1}, \quad \det \beta = K_{1a} K_{21} K_{b2} K_{ba}^{-1}.$$

Звідси видно, що частотні рівняння (6.35) і (6.34) — рівноцінні (подібно з (6.34) випливає (6.35)). Рівняння ж (6.33) та (6.34) як альтернативні одне до одного є рівноцінними за умов

$$\det C \neq 0, \ \det \beta \neq 0.$$

Тому спектри частот, визначувані кожним з даних трьох рівнянь, є однаковими.

Зауважмо таке:

а) універсальне рівняння (6.35) (як і інші універсальні рівняння) зберігає свій вигляд, якщо в моделі враховується розподілена маса ланок (система стає континуально-дискретною, а рівняння (6.35) — трансцендентним таким, що має зліченну множину коренів — квадратів власних частот з точкою скупчення на безмежності);

б) рівноцінність рівнянь (6.33) і (6.34) можна довести й безпосередньо, застосовуючи співвідношення

$$\det C = c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 = \left(\frac{K_{1a} K_{21} K_{b2}}{K_{1a} + K_{21} + K_{b2}} \right)^{-1},$$

$$\det \beta = K_{1a} K_{21} K_{b2} K_{ba}^{-1} = (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)^{-1},$$

$$\beta_{11} = K_{ba}^{-1} \left((c_1 c_2)^{-1} + (c_2 c_3)^{-1} \right) = \left(\frac{\det C}{c_1 c_2 c_3} \right)^{-1} \frac{c_3 + c_2}{c_1 c_2 c_3},$$

$$\beta_{22} = K_{ba}^{-1} \left((c_1 c_3)^{-1} + (c_2 c_3)^{-1} \right) = \left(\frac{\det C}{c_1 c_2 c_3} \right)^{-1} \frac{c_2 + c_1}{c_1 c_2 c_3}. \qquad (6.36)$$

Розгляньмо тепер частотні рівняння, що відповідають граничним значенням коефіцієнтів впливу жорсткостей чи впливу податностей (зокрема з особливими матрицями, коли $\det C = 0$, $\det \beta = 0$).

Якщо в рівнянні (6.33) $c_1 \to 0$ або $c_3 \to 0$, то випливають частотні рівняння для консолей з правим або з лівим закріпленнями відповідно (рис. 19, *б* та *в*):

$$\lambda^2 \left[M_1 M_2 \lambda^2 + M_2 c_2 + M_1 (c_2 + c_3) \right] + c_2 c_3 = 0, \qquad (6.37)$$

$$\lambda^2 \left[M_1 M_2 \lambda^2 + M_2 (c_1 + c_2) + M_1 c_2 \right] + c_1 c_2 = 0. \qquad (6.38)$$

Ці ж рівняння неважко віднайти, використовуючи відповідні коефіцієнти впливу податностей β_{ij} (очевидно, тут матриця C не є особливою).

Якщо в (6.33) $c_2 \to 0$ (жорсткість — зникаюче мала; середня ланка моделі з рис. 17 стає абсолютно податною, рис. 19, *г*), то матимемо рівняння

$$M_1 M_2 \lambda^4 + (M_1 c_3 + M_2 c_1) \lambda^2 + c_1 c_3 = 0 \;\; (\det C \neq 0), \qquad (6.39)$$

яке рівноцінне рівнянню

$$(M_1 \lambda^2 + c_1)(M_2 \lambda^2 + c_3) = 0.$$

З нього, як і повинно бути, отримуємо квадрати частот двох одномасових незв'язаних моделей-консолей (одна з лівим закріпленням, а друга з правим).

У разі $c_1 = c_3 = 0$ (рис. 19, матриця C — особлива) частотне рівняння (6.33) стає таким:

$$\lambda^2 \left[M_1 M_2 \lambda^2 + (M_1 + M_2) c_2 \right] = 0. \qquad (6.40)$$

Воно відповідає напівозначеній (незакріпленій) системі; її частоти ($\omega^2 = -\lambda^2$) визначають рівності

$$\omega_1^2 = 0\,,\ \omega_2^2 = (M_1 M_2)^{-1}(M_1 + M_2)c_2$$

(очевидно, жорсткість цієї системи — c_2, податність — K_{21}). Ці ж рівняння (6.37) — (6.40), зрозуміло, можна отримати також із (6.34) (шлях дещо складніший; зокрема, щоб вивести (6.40), можна в (6.34) послідовно спрямувати до безмежності K_{1a} і K_{b2} або навпаки K_{b2} і K_{1a}).

Звертаючись до формули (6.36), бачимо, що матриця податності β стає особливою в таких випадках:

$$K_{1a} \to 0\,,\ K_{21} \to 0\,,\ K_{b2} \to 0\,.$$

(див. рис. 19 *е*, *є*, *ж*). При цьому система залишається закріпленою, бо з'являються абсолютно жорсткі ланки, але кількість її ступенів вільності зменшується (замість $k = 2$ маємо $k = 1$).

Цим випадкам відповідають частотні рівняння

$$K_{21} K_{b2} M_2 \lambda^2 + K_{21} + K_{b2} = 0\,,$$

$$K_{1a} K_{b2} (M_1 + M_2) \lambda^2 + K_{1a} + K_{b2} = 0\,,$$

$$K_{1a} K_{21} M_1 \lambda^2 + K_{1a} + K_{21} = 0\,.$$

Ці рівняння найпростіше виводяться з (6.35) (з залученням співвідношення (6.27)).

З наведеного порівняння частотних рівнянь (6.33) — (6.35) і розгляду моделей з пружними та абсолютно податними чи абсолютно жорсткими ланками висновуємо:

1) Визначаючи власні частоти й досліджуючи їх залежність від параметрів, варто надавати перевагу універсальним частотним рівнянням вигляду (6.35), оскільки при цьому нема потреби проводити додаткові обчислення (здійснювати розкриття визначників матриць C чи β та їх алгебричних доповнень).

2) З універсального рівняння заданої моделі найпростіше одержати в явному (розкритому) вигляді відповідні альтернативні одне до одного частотні рівняння (6.34) (з коефіцієнтами β_{ij} впливу податностей) та (6.33) (з коефіцієнтами c_i впливу жорсткостей), які доцільно застосовувати при аналізі динаміки моделей з достатньо жорсткими чи з достатньо податними ланками (а також і в особливих випадках).

6.6 Методологія аналізу власних частот закріпленої пружно-жорсткої моделі

Застосуймо викладені раніше висновки, наприклад, до моделі з рис. 16. При цьому вважатимемо, що вона може мати як вельми жорсткі, так і вельми податні ланки.

Якщо $k=3$, то універсальне частотне рівняння $Q'(b,a)=0$ є таким:

$$1+\sum_{i=1}^{3}\gamma_i K_{ia}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j>i}^{3}\gamma_i\gamma_j K_{ia}K_{ji}+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 K_{1a}K_{21}K_{32}=0\,. \qquad (6.41)$$

Беручи до уваги те, що $\gamma_i=M_i\lambda^2$ ($i=1,2,3$), відразу отримуємо рівняння вигляду (6.34)

$$\lambda^6 M_1M_2M_3\det\beta+\lambda^4\sum_{i=1}^{2}\sum_{j>i}^{3}M_iM_jK_{ia}K_{ji}+\lambda^2\sum_{i=1}^{3}M_iK_{ia}+1=0\,. \qquad (6.42)$$

З цього рівняння, застосовуючи формули (6.17) — (6.20) і (6.23), прийдемо до альтернативного рівняння вигляду (6.33)

$$\lambda^6 M_1M_2M_3+\lambda^4[M_1M_2c_3+M_1M_3(c_3+c_2)+M_2M_3(c_2+c_1)]+$$

$$+\lambda^2[M_1c_2c_3+M_2c_3(c_2+c_1)+M_3(c_3c_2+c_3c_1+c_1c_2)]+\det C=0\,. \qquad (6.43)$$

Розглядатимемо послідовно різні граничні випадки, коли окремі ланки є абсолютно жорсткими ($\det\beta=0$). При цьому керуватимемося наведеними на рис. 20 схемами *а*, *б*, *в*.

Із (6.42) неважко прийти до відповідних частотних рівнянь:

а) $\lambda^4K_{21}K_{32}M_2M_3+\lambda^2[K_{21}M_2+(K_{21}+K_{32})M_3]+1=0$;

б) $\lambda^4K_{1a}K_{32}(M_1M_3+M_2M_3)+$

$+\lambda^2[K_{1a}M_1+K_{1a}M_2+(K_{1a}+K_{32})M_3]+1=0$;

в) $\lambda^4K_{1a}K_{21}M_1(M_2+M_3)+\lambda^2[K_{1a}M_1+K_{2a}(M_2+M_3)]+1=0\,.$ (6.44)

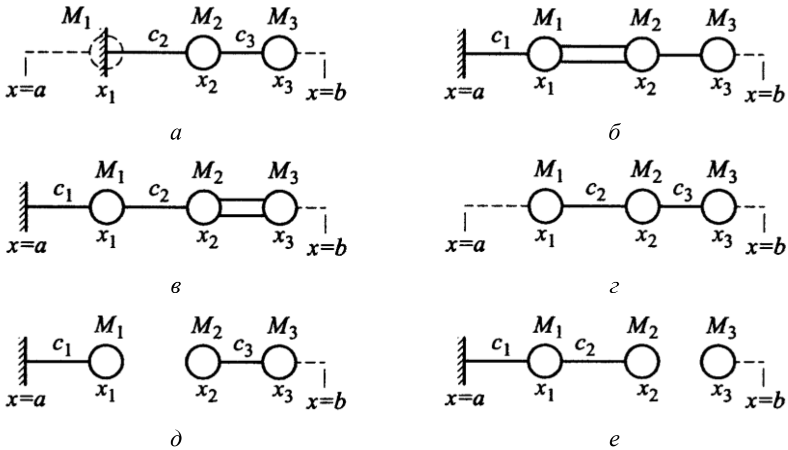
Як бачимо, в усіх цих випадках кількість ступенів вільності моделі зменшилася на одиницю (очевидно, для вказаних систем $k=2$). Якщо ж ще одна з ланок втрачає податність, то із (6.44) випливають частотні рівняння систем з одним ступенем вільності:

а) $\lambda^2 K_{32} M_3 + 1 = 0$ ($K_{21} = 0$), $\lambda^2 K_{21}(M_2 + M_3) + 1 = 0$ ($K_{32} = 0$);

б) $\lambda^2 K_{32} M_3 + 1 = 0$ ($K_{1a} = 0$), $\lambda^2 K_{1a}(M_1 + M_2 + M_3) + 1 = 0$ ($K_{32} = 0$);

в) $\lambda^2 K_{21}(M_2 M_3) + 1 = 0$ ($K_{1a} = 0$), $\lambda^2 K_{1a}(M_1 + M_2 + M_3) + 1 = 0$

($K_{21} = 0$). (6.45)



20 **Окремі граничні випадки моделі з рис. 16 (*k*=3).**

Розгляньмо тепер граничні випадки, коли окремі ланки наділені зникаюче малою жорсткістю. Враховуючи, що $\det C = c_1 c_2 c_3$, із (6.43) для випадків

г) $c_1 = 0$; д) $c_2 = 0$; е) $c_3 = 0$

(відповідно до наведених на рис. 20 схем *г*, *д*, *е*) записуємо рівняння

$$\text{г) } \lambda^6 M_1 M_2 M_3 + \lambda^4 [M_1 M_2 c_3 + M_1 M_3 (c_3 + c_2) + M_2 M_3 c_2] +$$
$$+ \lambda^2 (M_1 + M_2 + M_3) c_2 c_3 = 0 \ ,$$

$$\text{д) } \lambda^6 M_1 M_2 M_3 + \lambda^4 [M_1 M_2 c_3 + M_1 M_3 c_3 + M_2 M_3 c_1] +$$
$$+ \lambda^2 (M_2 c_3 c_1 + M_3 c_3 c_1) = 0 \ ,$$

$$\text{е) } \lambda^6 M_1 M_2 M_3 + \lambda^4 [M_1 M_3 c_2 + M_2 M_3 (c_2 + c_1)] +$$
$$+ \lambda^2 M_3 c_1 c_2 = 0 \, . \qquad (6.46)$$

Отже, якщо одну з ланок первісної системи ($k = 3$) вважати абсолютно податною, то в усіх випадках граничні рівняння (6.46) мають корінь $\lambda^2 = 0$, що відповідає незакріпленим системам з кількостями ступенів вільності $k = 2$ і $k = 1$ (рис. 20, *г, д, е*). При цьому й тут, як і в рівняннях (6.44) для моделей з однією абсолютно жорсткою ланкою, сумарна кількість ступенів вільності зменшилася на одиницю (бо консолям відповідають тут числа $k = 1$ і $k = 2$). Очевидно також, що коли в кожному з рівнянь (6.46) спрямувати до нуля жорсткість ще однієї з ланок, то знову матимемо $\lambda^2 = 0$ (а сумарне $k = 1$).

З наведених схем випливають доволі загальні якісні висновки про вплив достатньо жорстких чи достатньо податних ланок на частоти розглянутих моделей. Наприклад: якщо середня ланка має велику жорсткість, то одна з частот є великою, а дві інші — близькі до частот консолі, що визначаються з рівняння (6.44 б); якщо жорсткість середньої ланки є достатньо малою, то одна з частот також мала, а дві інші є близькими до частот відповідних систем з одним ступенем вільності (рівняння (6.46 б)).

Кількісні висновки про вплив параметрів жорсткості та мас можна одержати, безпосередньо розв'язуючи рівняння вигляду (6.44) — (6.46) (або оцінюючи їх корені).

Очевидно, що наведена методологія дослідження власних частот закріплених моделей застосовна також до подібних закріплених і незакріплених пружно-жорстких систем, коли $k > 3$. При цьому корисними є такі зауваження:

— кількість доданків у сумах універсальних рівнянь вигляду (6.41) збігається з числами так званого **трикутника Паскаля**

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}
$$

— розгортаючи суми $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j>i}^{k}\gamma_i\gamma_j,\dots$ (та наступні), доцільно записувати спочатку тільки відповідні добутки. Наприклад, для $k = 3$:

$$\gamma_1\gamma_2, \qquad \gamma_1\gamma_3, \qquad \gamma_2\gamma_3;$$

для $k=4$:

$$\gamma_1\gamma_2,\quad \gamma_1\gamma_3,\quad \gamma_1\gamma_4,\quad \gamma_2\gamma_3,\quad \gamma_2\gamma_4,\quad \gamma_3\gamma_4\ ,$$

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\quad \gamma_1\gamma_2\gamma_4,\quad \gamma_1\gamma_3\gamma_4,\quad \gamma_2\gamma_3\gamma_4\ ;$$

і так далі.

Маючи такі добутки, вже неважко записати власне універсальні частотні рівняння.

6.7 Диференціальні рівняння руху та характеристичні рівняння ускладнених моделей

Матричні диференціальні рівняння руху в прямій та оберненій формах (див. 3.1) можна застосовувати також до багатьох ускладнених моделей — з пружними в'язями, за наявності пропорційних до швидкостей сил в'язкого та гістерезисного тертя, з пружно приєднаними масами тощо. Тоді, зокрема, в рівняннях (6.41) замість $\gamma_i = M_i\lambda^2$ потрібно покласти

$$\gamma_i = M_i\lambda^2 + b_i\lambda + k_i \quad (\,i=\overline{1,k}\,), \tag{6.47}$$

де b_i та k_i — коефіцієнт тертя та параметр пружної в'язі, що відповідають точці x_i, при цьому власні частоти моделі будуть, як відомо, визначатися комплексними коренями (з від'ємними дійсними частинами) відповідного характеристичного рівняння.

До прикладу розгляньмо модель, зображену на рис. 21.

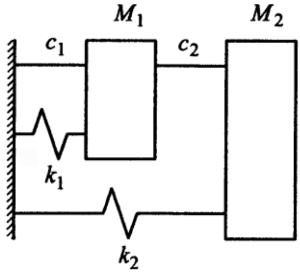
Застосовуючи формули (6.6), (6.25) і (6.21), запишімо для цієї моделі диференціальні рівняння руху в оберненій і прямій формах (вигляду (3.7) та (3.6)); задля спрощення запису вважатимемо, що $b_i = 0$. Тож

$$q = \beta\left(F - A\frac{d^2q}{dt^2} - \left(C+\tilde{C}\right)q\right), \tag{6.48}$$

$$A\frac{d^2q}{dt^2} + \left(C+\tilde{C}\right)q = F\ . \tag{6.49}$$

Тут

$$A = \begin{Vmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{Vmatrix};\quad C = \begin{Vmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{Vmatrix};\quad \tilde{C} = \begin{Vmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{Vmatrix}.$$



21 **Модель ускладненої системи — консольного стержня з додатковими в'язями.**

З рівняння (6.41) для $k=2$ і величин γ_i, визначених згідно з (6.47) ($b_i=0$, $F_i=0$), отримуємо характеристичне рівняння

$$M_1M_2K_{1a}K_{21}\lambda^4+[(M_1k_2+M_2k_1)K_{1a}K_{21}+M_1K_{1a}+M_2K_{2a}]\lambda^2+$$
$$+1+k_1K_{1a}+k_2K_{2a}+k_1k_2K_{1a}K_{21}=0. \qquad (6.50)$$

Якщо ж $b_i\neq 0$, то в рівнянні (6.50) потрібно дописати ліворуч вираз

$$K_{1a}K_{21}\left[\lambda^3(M_1b_2+M_2b_1)+\lambda^2b_1b_2+\lambda(b_1k_2+b_2k_1)\right]+$$
$$+\lambda(b_1K_{1a}+b_2K_{2a}).$$

Таке саме рівняння (6.50) отримаємо, розглянувши характеристичний визначник системи (6.48)

$$\begin{vmatrix}\beta_{11}M_1\lambda^2+\beta_{11}k_1+1 & \beta_{12}M_2\lambda^2+\beta_1k_2\\ \beta_{12}M_1\lambda^2+\beta_{12}k_1 & \beta_{22}M_2\lambda^2+\beta_{22}k_2+1\end{vmatrix} \qquad (6.51)$$

і взявши до уваги формули (6.6) та враховуючи, що

$$K_{2a}=K_{1a}+K_{21}.$$

З іншого боку, розгортаючи характеристичний визначник системи рівнянь (6.49)

$$\begin{vmatrix}M_1\lambda^2+c_1+c_2+k_1 & c_2\\ -c_2 & M_2\lambda^2+c_2+k_2\end{vmatrix},$$

маємо рівняння

$$M_1M_2\lambda^4+[M_1(c_2+k_2)+M_2(c_1+c_2+k_1)]\lambda^2+$$

$$+c_1(c_2+k_2)+c_2(k_1+k_2)+k_1k_2=0\,. \qquad (6.52)$$

Тоді, враховуючи співвідношення (6.25), після множення рівняння (6.52) на добуток $K_{1a}K_{21}$ одержуємо (6.50).

Викладене дозволяє стверджувати, що характеристичне рівняння моделі з кількістю ступенів вільності $k>2$ найлегше будувати, виходячи з універсальних характеристичних рівнянь вигляду (6.50). Те, що характеристичні рівняння, одержувані різними способами, є рівносильними, відомо „a priori”.

У рівнянні (6.50), а також у визначнику (6.51), допускаються різноманітні граничні переходи. Розгляньмо деякі з них:

— при $K_{1a}\to 0$, коли податністю лівої ланки є підстави знехтувати, а отже, $K_{2a}\to K_{21}$, із (6.50) маємо рівняння

$$-M_2K_{21}\omega^2+1+k_2K_{21}=0\,;$$

— при $K_{21}\to 0$, коли нехтується податністю правої ланки, причому $K_{2a}\to K_{1a}$, отримуємо

$$-(M_1+M_2)K_{1a}\omega^2+1+(k_1+k_2)K_{1a}=0\,;$$

— при $K_{1a}\to\infty$, коли податність лівої ланки стає необмеженою, маємо рівняння

$$M_1M_2K_{21}\omega^4-[(M_1k_2+M_2k_1)K_{21}+M_1+M_2]\,\omega^2+$$

$$+k_1+k_2+k_1k_2K_{21}=0\,. \qquad (6.53)$$

Якщо ж тут ще й $k_1=k_2=0$, то матимемо напівозначену (незакріплену) систему [7]. Зауважмо, що те саме рівняння (6.53) можна отримати й іншим шляхом, а саме, поклавши $c_1=0$ в рівнянні (6.52).

Аналогічно можна розглядати інші граничні випадки: $M_1\to 0$, $x_1\to a$, $x_1\to x_2$, $k_1\to\infty$, $k_2\to\infty$ тощо. Можливість формально враховувати різноманітні граничні переходи є вельми бажаною, коли йдеться про оцінку впливу характеристик системи на її власні частоти.

Якщо викає необхідність досліджувати частоти та форми власних коливань моделей з k ступенями вільності, то варто мати на увазі, що:

— у випадках наявності ланок, податності яких можна спрямовувати до нескінченності, доцільно застосовувати рівняння руху в зусиллях (6.49), прирівнюючи до нуля відповідні жорсткості у формулах вигляду (6.25) і (6.31);

— за наявності абсолютно жорстких ланок слід надавати перевагу рівнянням руху в переміщеннях (6.48), вважаючи нулями відповідні коефіцієнти впливу податності, або їх окремі складові у формулах вигляду (6.13), (6.27) та подібних до них.

6.8 Оцінювання впливу параметрів на основну частоту пружних і пружно-жорстких систем

За допомогою двобічних оцінок С. Бернштейна (див. 4.8) можна визначати пересічно „вилку” для трьох нижчих частот і наближене значення четвертої. Зокрема, якщо частотне рівняння (6.41) записане як

$$a_0 - a_1\omega^2 + a_2\omega^4 - a_3\omega^6 + \ldots = 0, \tag{6.54}$$

то доцільно обчислювати перш за все таку оцінку [3, 20]:

$$\frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 - 2a_0a_2}} < \omega_1^2 < \frac{2a_0}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}. \tag{6.55}$$

Для прикладу розгляньмо модель з рис. 16 у випадку $k = 5$. Беручи до уваги зауваження з попереднього параграфу, маємо п’ять величин γ_i ($i = \overline{1,5}$) та десять добутків

$$\gamma_1\gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_4,\ \gamma_1\gamma_5,\ \gamma_2\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_4,\ \gamma_2\gamma_5,\ \gamma_3\gamma_4,\ \gamma_3\gamma_5,\ \gamma_4\gamma_5,$$

причому з (6.41) і (6.54) отримуємо:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \sum_{i=1}^{5} M_i K_{ia},\ a_2 = M_1K_{1a}(M_2K_{21} + M_3K_{31} + M_4K_{41} + M_5K_{51}) +$$

$$+ M_2K_{2a}(M_3K_{32} + M_4K_{42} + M_5K_{52}) +$$

$$+ M_3K_{3a}(M_4K_{43} + M_5K_{53}) + M_4M_5K_{4a}K_{54}. \tag{6.56}$$

Обчислімо спочатку величини (6.56) для однорідної моделі, вважаючи маси і ланки однаковими, тобто

$$M_i = M = \frac{\rho F l}{n},\ c_i = c,\ x_i - x_{i-1} = \frac{l}{n}\ (i = \overline{1,n}) \tag{6.57}$$

($x_0 = a = 0$, $x_k = b$; nl — довжина консолі; $\rho F l$ — її маса). Із формул (6.6) та (6.25) і (6.57) отримуємо рівності

$$K_{ia} = iK_{10} \ (i = \overline{1,n}), K_{10} = \frac{l}{nEF}, K_{10}M = \left(\frac{l}{n}\right)^2 \frac{\rho}{E}, \qquad (6.58)$$

а з відомого частотного рівняння для однорідної моделі приходимо до формул [4, 20]

$$a_0 = C_n^n = 1, \ a_1 = C_{n+1}^{n-1}\Lambda^2. \ a_2 = C_{n+2}^{n-2}\Lambda^4,$$

де

$$C_j^i = \frac{j!}{(j-i)!}, \quad \Lambda^2 = \left(\frac{l}{n}\right)^2 \frac{\rho}{E}\omega^2.$$

За цими формулами знаходимо відповідні коефіцієнтам a_1 і a_2 числа, табл. 9. Результати обчислення двобічних оцінок основної частоти зведені в табл. 10. Відповідні частоти визначаються при цьому як

$$\omega_1^- = \Lambda_1^- \cdot \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \ \omega_1^+ = \Lambda_1^+ \cdot \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (6.59)$$

Для однорідної консолі з рівномірно розподіленими параметрами основна частота поздовжніх коливань визначається за формулою [8, 49, 57]

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \left(\frac{\pi}{2} \approx 1{,}571\right).$$

9 **Числа, що відповідають коефіцієнтам a_1 і a_2 однорідної моделі за різних n**

n	1	2	3	4	5	10	20
a_1	1	3	6	10	15	55	210
a_2	—	1	5	15	35	495	7315

10 **Двобічні оцінки основної частоти однорідної моделі за різних n**

n	5	10	20
Λ_1^-	1,417	1,489	1,526
Λ_1^+	1,437	1,513	1,553

Як бачимо, найнижча частота розглянутих моделей за умов (6.57) (маси M скупчені на правому кінці кожної ланки, остання з них — на вільному кінці консолі) знайдена тут практично точно, причому різниця $\Lambda_1^+ - \Lambda_1^- \approx 0{,}02$ є малою (незалежно від n). Числа з табл. 10 наближаються (із збільшенням n) досить повільно до точного значення 1,571, залишаючись меншими від нього. Щоб отримати подібні наближення з лишком, розгляньмо моделі (6.57), в яких маси M скупчені на лівому кінці кожної ланки (остання маса — на відстані $\frac{l}{n}$ від вільного кінця, перша — в закріпленні, а тому є нерухомою). Застосувавши ті ж оцінки, прийдемо до наведених в табл. 11 чисел.

11 **Двобічні оцінки основної частоти однорідних моделей для різних значень числа *n* скупчених мас *M* (з лишком)**

n	4 (5)	9 (10)	19 (20)
Λ_1^-	1,729	1,645	1,605
Λ_1^+	1,750	1,672	1,632

Середнє арифметичне чисел Λ_1^- вже з першого стовпчика табл. 10 і табл. 11 дорівнює 1,573 (отже, майже збігається з точним значенням). Зауважмо, що даний спосіб оцінювання основної частоти, який запропоновано Ден-Гартогом [24] в задачі про коливання струни, може виявитися корисним, зокрема, при дослідженнях систем з нерівномірно розподіленими параметрами.

Звернімося знову до величин (6.56), вважаючи модель неоднорідною (рис. 16; $k = 5$). Неважко зауважити, що

$$K_{2a} = K_{1a} + K_{21},\ K_{3a} = K_{2a} + K_{31},$$

і, взагалі,

$$K_{ra} = K_{r-1,a} + K_{r,r-1} \ \ (r = \overline{2,k}). \tag{6.60}$$

Розгляньмо два з найпростіших варіантів:

$$\text{а)}\ K_{1a} = K_{21} = K_{32} = K_{43} = 0,\ K_{54} \neq 0,$$

$$\text{б)}\ K_{1a} \neq 0,\ K_{21} = K_{32} = K_{43} = K_{54} = 0. \tag{6.61}$$

Враховуючи (6.60) і (6.61), із (6.56) отримуємо відповідно:

$$\text{а) } a_1 = M_5 K_{54}\,, \text{ б) } a_1 = K_{1a} \sum_{i=1}^{5} M_i\ , \tag{6.62}$$

причому $a_2 = 0$ для обох варіантів цієї пружно-жорсткої моделі. Звідси та з рівняння (6.54) видно, що власні частоти визначаються тут відповідно як

$$(M_5 K_{54})^{-\frac{1}{2}} \text{ та } \left(K_{1a} \sum_{i=1}^{5} M_i \right)^{-\frac{1}{2}},$$

і, отже, їх відношення може дорівнювати будь-якому додатному числу.

Вважатимемо, що

$$a_1^2 \geq 4 a_0 a_2\,. \tag{6.63}$$

Тоді перші корені частотного рівняння (6.54) не є кратними [3], причому застосовна двобічна оцінка (6.55); за формулами вигляду (6.56) її можна обчислювати для будь-яких з розглянутих моделей. Тому доходимо висновку: збурювальні гармонічні сили, квадрати частот яких не перевищують лівої частини нерівності (6.55), не можуть призвести до явища резонансу.

Слід зауважити, що дотримання умови (6.63) можна домогтися формально завжди, підбираючи відповідно ті чи інші параметри моделі, від яких залежать коефіцієнти a_0, a_1, a_2.

6.9 Оцінювання частот пружних і пружно-жорстких систем з використанням таблиць Бернштейна — Кеđопяна

Застосовуючи відомі результати і формули вигляду (6.56), можна за умови (6.63), а іноді також при її порушенні, визначати з нестачею та з лишком три перші власні частоти і наближене значення четвертої. Проілюструємо це, розглядаючи вільні поздовжні коливання однорідної консолі з рівномірно розподіленими параметрами. Добре відоме частотне рівняння цієї задачі [8, 49, 57]

$$\cos z = 0\,, \ z = l\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

дозволяє відразу визначити відповідні коефіцієнти a_i в рівнянні (6.54), оскільки

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \ldots$$

Отже,

$$a_0 = 1,\ a_i = \frac{1}{(2i)!}\ (i = 1, 2, \ldots).$$

За формулами [3]

$$B_n = a_1 B_{n-1} - a_2 B_{n-2} + \ldots + (-1)^n a_{n-1} B_1 + (-1)^{n+1} n a_n \qquad (6.64)$$

обчислюємо

$$B_1 = 0{,}5; \qquad B_2 = 0{,}16; \qquad B_4 = 0{,}0269841; \qquad \frac{B_4}{B_1^2} = 0{,}97143\,.$$

Останнє відношення дозволяє виписати відповідні коефіцієнти φ_j та β_j і наведені в табл. 12 числа [3, стор. 237].

12 **Числа, що відповідають величинам φ_j β_j і ψ**

j	1	2	3	4
φ_j	1,0143	70,411	213,46	$\psi = 111{,}08$
β_j	1,0153	106,194	707,91	

Двобічні оцінки трьох нижчих частот та наближене значення четвертої частоти визначаються за формулами вигляду (6.59), в яких

$$\Lambda_j^- = \sqrt[4]{\frac{\varphi_j}{B_2}}, \qquad \Lambda_j^+ = \sqrt[4]{\frac{\beta_j}{B_2}}, \qquad \Lambda_4 \approx \sqrt[4]{\frac{\psi}{B_2}} \qquad (j = \overline{1,3}).$$

Підставивши сюди обчислене вище B_2 та виписані коефіцієнти φ_j і β_j, матимемо дані, наведені в табл. 13.

Відповідні точні розв’язки рівняння (6.58) визначаються числами

$$1{,}5708\left(= \frac{\pi}{2}\right);\ 4{,}712\,(= 1{,}5\,\pi);\ 7{,}854\,(= 2{,}5\,\pi);\ 10{,}996\,(= 3{,}5\,\pi)\,.$$

Цілком подібно для частотного рівняння

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \frac{z^8}{9!} - \ldots \tag{6.65}$$

знаходимо відношення $B_4\, B_2^{-2} = 0{,}8574$ і записуємо відповідні коефіцієнти [3, стор. 236], табл. 14. Далі обчислюємо, як і в попередньому прикладі, наведені в табл. 15 величини.

Зауважмо, що рівняння (6.65) відповідає задачі про поздовжні коливання однорідного стержня з закріпленими кінцями; найпростішу оцінку (6.55) з лишком тут застосувати не можна (підкореневий вираз є від'ємним: $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$).

13 **Результати визначення нижчих частот однорідної консолі з застосуванням таблиць Бернштейна—Керопяна**

<table>
<tr><th>j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>Λ_j^-</td><td>1,5706</td><td>4,5336</td><td>5,9823</td><td rowspan="2">9,036</td></tr>
<tr><td>Λ_j^+</td><td>1,5710</td><td>5,0242</td><td>8,073</td></tr>
</table>

14 **Числа, що відповідають величинам φ_j β_j і ψ (рівняння (6.65))**

<table>
<tr><th>j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>φ_j</td><td>1,0788</td><td>12,949</td><td>41,77</td><td rowspan="2">$\psi = 208{,}31$</td></tr>
<tr><td>β_j</td><td>1,0829</td><td>20,010</td><td>132,03</td></tr>
</table>

15 **Результати визначення нижчих частот однорідного стержня з закріпленими кінцями**

<table>
<tr><th>j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>Λ_j^-</td><td>3,139</td><td>5,8428</td><td>7,8303</td><td rowspan="2">11,7</td></tr>
<tr><td>Λ_j^+</td><td>3,132</td><td>6,5144</td><td>10,4407</td></tr>
<tr><td>Точні числа</td><td>π</td><td>2π</td><td>3π</td><td>4π</td></tr>
</table>

Розгляньмо тепер приклад неоднорідної пружно-жорсткої моделі (рис. 16, $k=5$). Нехай

$$K_{21}=K_{32}=K_{43}=0. \tag{6.66}$$

Тоді, використавши співвідношення (6.56) і (6.60), отримаємо коефіцієнти частотного рівняння (6.54):

$$a_0=1,\ a_1=K_{1a}\sum_{i=1}^{5}M_i+M_5K_{54},$$

$$a_2=M_5K_{1a}K_{54}\sum_{i=1}^{4}M_i\ ,\ a_3=a_4=a_5=0$$

(звідси, як і повинно бути, знову приходимо до формул (6.62), якщо $K_{1a}=0$ або $K_{54}=0$).

Нехай

$$\sum_{i=1}^{4}M_i=M\ ,\ M_5=\kappa M\ ,$$

$$a_0=1,\ a_1=M\left[K_{1a}(1+\kappa)+K_{54}\kappa\right],\ a_2=\kappa M^2K_{1a}K_{54}. \tag{6.67}$$

Неважко переконатися, що

$$a_1^2-2a_0a_2=M^2\left[K_{1a}^2(1+\kappa)^2+\kappa^2K_{54}(2K_{1a}+K_{54})\right]>0,$$

$$a_1^2-4a_0a_2=M^2\left[(K_{1a}-K_{54}\kappa)^2+\kappa K_{1a}(2K_{1a}+\kappa K_{1a}+2\kappa K_{54})\right]>0. \tag{6.68}$$

Оскільки параметр $\kappa\geq 0$, а податності K_{1a} та K_{54} — додатні, то підкореневі вирази в оцінках (6.55) будуть додатними також і тоді, коли умови (6.66) не виконуються (податності K_{21}, K_{32} і K_{43} — малі). Тому проілюстровані оцінки і таблиці Бернштейна — Керопяна цілком застосовні до відповідних пружних і пружно-жорстких моделей.

Зауважмо, що перевірка виконання нерівностей (6.68) для конкретних систем пов'язана тільки з обчисленням сум вигляду (6.41)

$$\sum_{i=1}^{k}M_iK_{ia}\ \text{ та }\ \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j>i}^{k}M_iM_jK_{ia}K_{ji}$$

(а отже, її здійснити неважко).

Звісно, перша й друга власні частоти деяких пружно-жорстких систем можуть виявитися вельми близькими чи кратними. Таку ситуацію доречно розглянути окремо.

6.10 Випадки близькості та рівності двох найнижчих частот

Нехай у другій з нерівностей (6.68) виконується умова

$$K_{1a} = \kappa K_{54} \ (\kappa = M_5 M^{-1}).$$

Тоді для достатньо малих κ ($\kappa \ll 1$) з рівняння (6.54) і формул (6.67) та (6.68) отримаємо

$$\omega_{1,2}^2 = 2\frac{1 \pm \sqrt{\kappa}}{M_5 K_{54}}, \ \omega_{1,2}^2 = 2\frac{1 \pm \sqrt{\kappa}}{M K_{1a}}. \qquad (6.69)$$

Отже, частоти можуть бути дуже близькими в обох випадках (6.69).

Як інший приклад розгляньмо напівозначену систему — стержень з вільними кінцями та трьома скупченими масами. Відповідне частотне рівняння є таким:

$$\gamma_1\gamma_2 K_{21} + \gamma_1\gamma_3 K_{31} + \gamma_2\gamma_3 K_{32} + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 K_{21} K_{32} = 0 \ (\gamma_i = M_i \lambda^2),$$

Звідси у разі $M_2 \to \infty$ знаходимо

$$1 - \omega^2 (M_1 K_{21} + M_3 K_{32}) + \omega^4 K_{21} K_{32} M_1 M_3 = 0, \qquad (6.70)$$

тобто

$$(1 - \omega^2 M_1 K_{21})(1 - \omega^2 M_3 K_{32}) = 0 \qquad (6.71)$$

(неважко угледіти, що рівняння (6.70) чи (6.71) відповідають двом консолям — з лівим і правим закріпленням). Отже, за умови $M_1 K_{21} = M_3 K_{32}$ ця модель та подібні до неї (з більшою кількістю скупчених мас) матимуть кратні частоти.

Зауважмо, що подібна ситуація спостерігається в континуально-дискретних системах. Наприклад, для однорідного стержня з вільними кінцями, який посередині має скупчену масу M, частотне рівняння є таким [20]:

$$\frac{\sin z}{z} + \gamma \cos^2 \frac{z}{2} = 0, \ \gamma = \frac{M}{ml}, \ z = \omega l \sqrt{\frac{\rho}{E}} \qquad (6.72)$$

(тут пропущено нульовий корінь як тривіальний). Якщо $M = 0$ $(\gamma = 0)$, то маємо вже розглянуте рівняння (6.65), для якого умова (6.63) не виконується. Запишімо відповідне рівняння (6.54) для $\gamma \neq 0$. Беручи до уваги, що

$$\frac{\sin 2u}{2u} = 1 - \frac{(2u)^2}{3!} + \frac{(2u)^4}{5!} - \ldots \quad (2u = z),$$

$$\cos^2 u = 1 - \frac{2}{2!}u^2 + \frac{2^3}{4!}u^4 - \ldots \quad \left(u = \frac{z}{2}\right),$$

отримуємо:

$$1 + \gamma - \left(\frac{2}{3} + \gamma\right)u^2 + \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\gamma\right)u^4 - \ldots = 0 .$$

Отже,

$$a_1^2 - 2a_0 a_2 = F_1(\gamma),\ a_1^2 - 4a_0 a_2 = F_2(\gamma), \tag{6.73}$$

де

$$F_1(\gamma) = \frac{1}{3}\gamma^2 + \frac{2}{5}\gamma + \frac{8}{45},\ F_2(\gamma) = -\frac{1}{3}\gamma^2 - \frac{8}{15}\gamma - \frac{4}{45} .$$

Відповідно до (6.72) $\gamma \in [0, \infty)$, причому неважко переконатися, що для $\gamma \geq 0$

$$F_1(\gamma) > 0,\ F_2(\gamma) < 0 .$$

Тому оцінка (6.55) з нестачею тут завжди існує, а (6.55) з лишком — ні.

Враховуючи співвідношення (6.73), можна обчислити цю оцінку як

$$(u^2)^- = \frac{1+\gamma}{\sqrt{F_1(\gamma)}} \quad \left(u = \frac{1}{2}z\right). \tag{6.74}$$

Знайшовши похідну

$$\left(\frac{1+\gamma}{\sqrt{F_1(\gamma)}}\right)' = \frac{F_1^{\frac{1}{2}} - (1+\gamma)F_1^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{5}\right)}{F_1(\gamma)},$$

після множення чисельника і знаменника на $F_1^{1/2}$ переконуємося, що для $\gamma \geq 0$ ця похідна є від'ємним числом. Отже, функція (6.74) зі збільшенням параметра γ монотонно зменшується. Це ілюструє своїми даними табл. 16 (останнє число отримане з урахуванням границі функції (6.74) при $\gamma \to \infty$). Як бачимо, число 3,08 узгоджується з наведеними в табл. 15 двобічними оцінками і відрізняється від точного значення (π) на 2 %; а число 2,632 — приблизно на 16 %.

16 **Залежність першого кореня рівняння (6.72) від відношення мас γ (скупченої до розподіленої)**

γ	0	0,5	1	10	∞
z_1^-	3,08	2,972	2,861	2,680	2,632

Порушення в даному прикладі нерівності $\left(F_2(\gamma)<0\right)$ (6.63) пов’язане з кратністю першого кореня відповідного рівняння при $\gamma\to\infty$:

$$\cos^2 u = 1 - u^2 + \frac{1}{3}u^4 - \frac{2^5}{6!}u^6 + \ldots = 0\,. \tag{6.75}$$

Отже, в (6.75)

$$a_0 = 1,\; a_2 = \frac{1}{3},\; a_3 = \frac{2}{45},\; a_4 = \frac{1}{315}\,.$$

Щоб оцінити такий корінь потрібно, як відомо [3], за формулами (6.64) визначити відповідні величини

$$B_1 = 1,\; B_2 = \frac{1}{3},\; B_3 = \frac{2}{15},\; B_4 = \frac{17}{315}\,.$$

Послідовні наближення (з нестачею) до шуканого подвійного кореня утворюють числа

$$\frac{2}{B_1},\; \sqrt{\frac{2}{B_2}},\; \sqrt[3]{\frac{2}{B_3}},\; \sqrt[4]{\frac{2}{B_4}},\; \ldots \tag{6.76}$$

Їх значення та відповідні їм кратні корені є такими:

u^2	2	2,449	2,466	2,467
$z_{1,2}$	2,828	3,130	3,141	3,1415

Як бачимо, послідовність (6.76) швидко наближається до точного значення $z_{1,2} = \pi$.

Зауважмо, рівняння (6.72) можна записати також як

$$\cos u\left(\frac{\sin u}{u} + \gamma\cos u\right) = 0 \qquad \left(u = \frac{z}{2}\right). \tag{6.77}$$

Звідси можна отримати якісну та кількісну характеристики перших двох коренів цього рівняння. Близькість цих коренів засвідчують дані, наведені в табл. 17; вони отримані на підставі формул

$$\gamma = -\frac{\sin 2u}{2u\cos^2 u} \text{ або } \gamma = -\frac{\operatorname{tg} u}{u}.$$

17 **Залежність другого кореня рівняння (6.72) від відношення мас**

z_2	6,28	5,2	4,4	4	3,6	3,5	3,16
γ	0,0005	0,23	0,62	1,9	2,38	3,15	68,77

Після усунення з рівнянь (6.72) чи (6.77) розв'язку $z_1 = 2u_1 = \pi$ питання про кратність коренів, очевидно, не виникає (всі корені рівняння $\operatorname{tg} u = -\gamma u$ — прості). Зображення характеристичних рівнянь пружних і пружно-жорстких систем у вигляді тригонометричних функцій пересічно відсутнє. Тому нерівності

$$F_2(\gamma) < 0\ ,\ F_2(\gamma) > 0$$

в (6.73) або подібні, які можуть засвідчувати наявність кратного кореня, повинні перевірятися. При цьому доцільно застосовувати відоме правило [3, стор. 50]: якщо хоча б для одного значення n справджується нерівність

$$C_n < C_{n+1}\ (n = 1, 2, \ldots), \tag{6.78}$$

де

$$C_1 = \frac{B_2}{B_1^2},\ C_2 = \frac{1}{B_1}\left(2\frac{B_3}{B_2} - \frac{B_2}{B_1}\right),\ \ldots,$$

то перший корінь не є подвійним (при цьому випадки кратності більшої від двох не розглядаються).

Наприклад, для рівняння (6.65) за формулою (6.64) обчислюємо:

$$B_1 = 0{,}1(6),\ B_2 = 0{,}0(1)\ B_3 = 0{,}00939;$$

після цього згідно з (6.78) знаходимо, що

$$C_1 = 0{,}4\ ;\ C_2 = 9{,}74\,.$$

Отже, нерівність (6.78) виконується. Тому кратність кореня відсутня, двобічні оцінки — застосовні, хоча найпростіша (6.73) з надлишком і не існує.

6.11 Пружно-жорсткі механічні систем у термінах фундаментальної функції

Поздовжні коливання прямолінійного стержня описуються рівнянням

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\rho F\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\,\frac{\partial u}{\partial t}+ku=Q(x,t)\,, \tag{6.79}$$

де $f(x)=EF(x)$ — поздовжня жорсткість; $F(x)$ — площа поперечного перерізу стержня; $\rho(x)$ — густина матеріалу; $b(x)$ і $k(x)$ — коефіцієнти опору і жорсткості основи; $Q(x,t)$ — вісне поздовжнє навантаження. Це рівняння доповнюється відповідними початковими чи крайовими умовами.

Підставляючи в (6.79) $u(x,\,t)=y(x)\exp\lambda t$ (λ — характеристичний показник) і вважаючи, що

$$Q(x,t)=q(x)\exp\lambda t\,,$$

отримуємо звичайне диференціальне рівняння [16]

$$(f\,y')'-(\rho F\lambda^2+b\lambda+k)\,y=-q(x)\,. \tag{6.80}$$

Вважатимемо, що стержень має зосереджені параметри, які є набагато більшими за розосереджені в тому сенсі, що

$$\int_a^b \rho F dx \ll \sum_{i=1}^n M_i\,,\quad \int_a^b b\,dx \ll \sum_{i=1}^n b_i\,,\quad \int_a^b k\,dx \ll \sum_{i=1}^n k_i\,. \tag{6.81}$$

Тут M_i, b_i та k_i — величини, зосереджені в точках x_i восі стержня (маси, коефіцієнти тертя й жорсткості), причому

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b \tag{6.82}$$

($b-a=l$ — довжина стержня).

Зважаючи на співвідношення (6.81) і (6.82), розглядатимемо замість (6.80) рівняння

$$(f\,y')'-\sum_{i=1}^n \alpha_i\,y(x)\delta(x-x_i)=-q(x)\,, \tag{6.83}$$

де

$$\alpha_i=M_i\lambda^2+b_i\lambda+k_i \qquad (i=\overline{1,n}); \tag{6.84}$$

$\delta(\cdot)$ — дельта-функція (Дірака).

Нехай граничні умови мають вигляд

$$(f\,y' - e_1 y)\big|_{x=a} = 0\,,$$

$$(f\,y' + e_2 y)\big|_{x=b} = 0 \qquad (6.85)$$

(e_1, e_2 — параметри закріплення кінців стержня).

Якщо в рівняннях (6.80) або (6.83) $\lambda = 0$, то матимемо відповідні статичні задачі {(6.80), (6.85)} та (6.83) — (6.85). Якщо ж $\lambda \neq 0$, то матимемо відповідні задачі динаміки, в яких чи не найважливішу роль відіграє поняття загального частотного (характеристичного) рівняння.

Загальне частотне рівняння для однорідного (коли $q(x) \equiv 0$) диференціального рівняння (6.83) та граничних умов (6.85) будується за формулами

$$(e_1 e_2\, Q + e_1 f(b) Q' - e_2 f(a) \dot{Q} - f(a) f(b) \dot{Q}')\Big|_{\substack{x=b\\ \alpha=a}} = 0\,;$$

$$Q = \psi + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i \Phi_{xi} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \psi_i \sum_{j>i}^{n} \alpha_j K_{ji} \Phi_{xj} + \ldots +$$

$$+ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \psi_1 K_{21} K_{32} \ldots K_{n,n-1} \Phi_{xn}\,,$$

$$Q' = \frac{\partial Q}{\partial x}\,,\ \dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial \alpha}\,,\ \dot{Q}' = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial \alpha}\,; \qquad (6.86)$$

$$\psi \equiv K(x,\alpha),\ \Phi \equiv K(x,\alpha)\theta(x-\alpha)\,,$$

$$\psi_i = K(x_i,\ \alpha)\,,\ \Phi_{xi} = \Phi(x,\ x_i)\,,\ K_{ji} = K(x_j,\ x_i)\,, \qquad (6.87)$$

де $\Phi(x,\alpha)$ — фундаментальний розв'язок (який доречно називати фундаментальною функцією, як і функцію $K(x,\alpha)$), $\theta(\cdot)$ — одинична функція (Гевісайда).

Зауважмо, що й тут співвідношення

$$Q(b,\alpha) = 0\,,\ Q'(b,\alpha) = 0\,,\ \dot{Q}(b,\alpha) = 0\,,\ \dot{Q}'(b,\alpha) = 0 \qquad (6.88)$$

є характеристичними рівняннями для таких крайових умов відповідно: стержень з затиснутими кінцями; консоль з лівим жорстким закріпленням; консоль з правим жорстким закріпленням; стержень з вільними кінцями.

6.12 Приклади розв'язків деяких задач статики

Нехай йдеться [16] про розтяг-стиск пружної консолі за відсутності зосереджених жорсткостей ($k_i = 0$, $i = \overline{1, n}$). Тоді рівняння (6.80), в якому $\lambda = 0$, доповнюється граничними умовами

$$y(a) = 0\,,\ \ y'(b) = 0\,. \tag{6.89}$$

Вдаючись до функції впливу $K(x, \alpha)$, і покладаючи в ній $\alpha = a$, запишемо загальний розв'язок рівняння (6.80) при $\lambda = 0$ у вигляді

$$y = C_0 K(x, a) + C_1 \dot{K}(x, a) - \int_a^x K(x, s) q(s)\, ds\,. \tag{6.90}$$

За допомогою умов (6.89) знайдемо довільні сталі

$$C_1 = 0\,,\ \ C_0 = \frac{1}{K'(b, a)} \int_a^b K'(b, s) q(s)\, ds\,. \tag{6.91}$$

Отже розв'язок статичної задачі {(6.80), (6.89)} визначається співвідношеннями (6.90), (6.91). Зауважмо, що похідна $K'(b, a)$ від відповідної рівнянню (6.80) фундаментальної функції завжди є додатною величиною:

$$K'(b, a) > 0\,.$$

Щодо цього неважко пересвідчитися в загальному випадку $k(x) = k_0\, \kappa(x)$, коли $k_0 = \mathrm{const} > 0$ і $\kappa(x) > 0$, $f(x) > 0$ — довільні інтегровні функції ($a \le x \le b$), будуючи функцію $K(x, \alpha)$ як ряд за степенями параметра k_0. Зокрема, якщо

$$f(x) = f_0 = \mathrm{const}\,,\ \ \kappa(x) \equiv 1\,,$$

то

$$K(x, \alpha) = \chi^{-1} \mathrm{sh}\chi(x - \alpha) \ \text{ і } \ K'(x, \alpha) = \mathrm{ch}\chi(x - \alpha)\,,$$

де

$$\chi = \sqrt{k_0 f_0^{-1}}\ ;$$

якщо ж $k(x) \equiv 0$, то

$$K(x, \alpha) = \int_\alpha^x \frac{ds}{f(s)} \quad \left(K' = \frac{1}{f(x)}\right).$$

За відсутності пружної реакції довкілля $k(x) \equiv 0$ співвідношення (6.90) — (6.91) істотно спрощуються. В цьому випадку

$$y(x) = \int_a^b q(s)\,ds \int_a^x \frac{ds}{f(s)} - \int_a^x \int_t^x \frac{ds}{f(s)} q(t)\,dt\,,$$

$$N(x) \equiv f(x)y'(x) = \int_x^b q(s)\,ds\,.$$

Якщо, до того ж $f = f_0 = \mathrm{const}$, то перша з цих формул набуває такого вигляду:

$$y(x) = \frac{1}{f_0}\left\{ x\int_x^l q(s)\,ds + \int_0^x sq(s)\,ds \right\}, \tag{6.92}$$

де $l = b$ — довжина стержня ($a = 0$).

Нехай, для прикладу,

$$q(x) = q_0 + \sum_{i=1}^n P_i\,\delta(x - x_i)\,,\ 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < l$$

(q_0 — стала, P_i — силовий параметр, відповідний точці x_i). З формули (6.92) отримуємо:

$$u(l) = \frac{1}{f_0}\left(\frac{q_0 l^2}{2} + \sum_{i=1}^n x_i P_i \right).$$

Ті самі формули зручно застосовувати до пружно-жорстких систем.

Якщо, наприклад,

$$q(x) = P\,\delta(x - x_1)\,,\ f(x) = f_1 + (f_2 - f_1)\,\theta(x - x_1)\ \ (f_i = \mathrm{const}\,, i = 1, 2),$$

то

$$u(l) = P\left(\frac{x_1}{f_1} + \frac{l - x_1}{f_2} \right).$$

Звідси для випадків $f_1 \to \infty$ або $f_2 \to \infty$ маємо відповідно

$$u(l) = P\frac{l - x_1}{f_2}\ ,\quad u(l) = P\frac{x_1}{f_1}\ .$$

Цілком аналогічно можна розв'язувати задачі про розтяг-стиск пружних стержнів за інших граничних умов.

6.13 Деякі задачі про вимушені коливання

Розгляньмо задачу [16, 29] про поздовжні коливання консолі за дії вісної збурювальної сили $P\cos\omega t$, прикладеної до вільного кінця. Формально задача зводиться до побудови такого розв'язку однорідного рівняння

$$g(x)\,\ddot{u}-(f(x)\,u')'=0\,,$$

який би задовольняв неоднорідні крайові умови

$$u(x,t)\big|_{x=a}=0,\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=b}=P\cos\omega t\,.$$

Записуючи розв'язок як добуток

$$u(x,t)=y(x)\cos\omega t\,,$$

після відокремлення змінних отримаємо крайову задачу

$$(f(x)\,y')'+\omega^2 g(x)\,y=0\,,\ y(a)=0\,,\ y'(b)=P\,. \tag{6.93}$$

Як і раніше, шукатимемо загальний розв'язок у формі (6.90). Беручи до уваги аналітичні співвідношення, що окреслюють дану крайову задачу, знаходимо:

$$y(x,a)=\frac{P}{f(b)K'(b,a)}K(x,a)\,,$$

$$u(x,a,t)=y(x,a)\cos\omega t\,. \tag{6.94}$$

Зауважмо, що отриманий розв'язок задовольняє початкові умови

$$u(x,a,0)=y(x,a),\quad \left.\frac{\partial u(x,a,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0\,. \tag{6.95}$$

Співвідношення (6.94) визначають амплітуди вимушених коливань за умови $K'(b,a)\neq 0$, тобто тоді, коли частота збурювальної сили не збігається з будь-якою з власних частот коливання консолі. Можливі статичні переміщення перерізів консолі можна визначити аналогічно — на підставі (6.93), вважаючи, що $\omega=0$:

$$\tilde{y}(x,a)=\frac{P}{f(b)\,\tilde{K}'(b,a)}\tilde{K}(x,a)\,,$$

де $\tilde{K}(x,a)=\int\limits_a^x\frac{ds}{f(s)}\,.$

Одним з важливих параметрів, що характеризують динамічні процеси в коливних системах, є коефіцієнт динамічності — відношення величин $y(x,a)$, $\widetilde{y}(x,a)$, які відповідають вільному кінцю консолі ($x=b$):

$$\mu = \frac{y(b,a)}{\widetilde{y}(b,a)} = K(b,a)\left(f(b)\,K'(b,a)\int_a^b \frac{ds}{f(s)} \right)^{-1} . \tag{6.96}$$

Позначмо через ω_n корені рівняння $K'(b,a)=0$, а через P_n — корені рівняння $K(b,a)=0$ ($n=1,2,\dots$). З формули (6.96) висновуємо: якщо частота збурювальної сили наближається до будь-якої з власних частот ω_n, то коефіцієнт динамічності μ необмежено зростає (настає резонанс), а коли — до будь-якого з P_n, то $\mu \to 0$ (спостерігається антирезонанс).

Зазначимо, що цілком аналогічно можна досліджувати задачі про вимушені коливання багатьох інших неперервних систем, а також і багатьох неперервно-дискретних систем, серед яких – системи, збурювані розосередженим навантаженням $q(x)\cos\omega t$ чи $q(x)\sin\omega t$.

Нехай, наприклад, задачу зведено до розв’язування неоднорідного рівняння

$$g(x)\ddot{u} - \left(f(x)u'\right)' = q(x)\cos\omega t \tag{6.97}$$

за однорідних крайових умов

$$u(x,t)\big|_{x=a} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=b} = 0 . \tag{6.98}$$

Після відокремлення змінних, як і в попередньому випадку, отримаємо задачу, що відрізнятиметься від крайової задачі (6.93) тільки умовою $y(b)=0$ (що фігуруватиме замість умови $y'(b)=P$). Розв’язок задачі (6.97) — (6.98) можна подати в такому вигляді:

$$y(x,a) = -\frac{K(x,a)}{K(b,a)}\int_a^b K(b,s)q(s)\,ds + \int_a^x K(x,s)q(s)\,ds ,$$

$$u(x,a,t) = y(x,a)\cos\omega t \tag{6.99}$$

($K(x,a)$ — фундаментальна функція, відповідна рівнянню (6.93)).

Зазначмо, що початкові умови тут є такими самими, як і в задачі про консоль (мають вигляд (6.95)). В загальному випадку (довільні вісне навантаження та початкові умови) можна застосовувати до побудови розв’язків відповідних змішаних задач метод головних координат.

Підкреслімо також, що і тут отримані формули (6.94), (6.96), (6.99) застосовні до аналізу відповідних пружно-жорстких систем (див. другий приклад з 6.12).

6.14 Частотні рівняння регулярних систем

Розгляньмо перше та четверте з рівнянь (6.94). Беручи до уваги формули (6.86) і (6.87) та кладучи

$$\alpha_j = A\,,\ K(x_j,\,\alpha) = j\int_a^{x_1} \frac{ds}{f(s)} = jB\,,\ j = \overline{1,n}\,,\ x_j = \frac{jl}{n+1}\,, \tag{6.100}$$

поставмо послідовно цим рівнянням у відповідність так звані частотні функції [16]

$$D_1 = \Lambda + 2\,,\ D_2 = \Lambda^2 + 4\Lambda + 3\,,\ D_3 = \Lambda^3 + 6\Lambda^2 + 10\Lambda + 4\,,\ \ldots,$$

$$D_{n-1} = \Lambda^{n-1} + C^1_{2(n-1)}\Lambda^{n-2} + C^2_{2(n-1)-1}\Lambda^{n-3} + \ldots + C^1_n\,. \tag{6.101}$$

Тут

$$\Lambda = AB = (M\lambda^2 + b\lambda + k)\int_a^{x_1} \frac{ds}{f(s)}\,. \tag{6.102}$$

Діючи так само, як в [6], отримуємо формули для визначення нулів функцій (6.101):

$$\Lambda_i = 2(\cos\theta_i - 1)\,,\ \theta_i = \frac{i\pi}{n+1} \quad (\,i = \overline{1,n}\,). \tag{6.103}$$

Всі $\Lambda_i < 0$; кожному Λ_i відповідає, згідно з (6.102), рівняння для знаходження характеристичних показників λ

$$M\lambda^2 + b\lambda + k - \Lambda_i B^{-1} = 0 \quad (\,i = \overline{1,n}\,). \tag{6.104}$$

Якщо $b = k = 0$, то звідси для випадку однорідного стержня сталого поперечного перерізу після обчислення величин

$$B^{-1} = \frac{f}{x_1} = \frac{f(n+1)}{l} \ \text{ та } \ M = \frac{\rho F l}{n}\,,$$

отримуємо відомі формули для квадратів власних частот та відповідних власних форм:

$$\omega_i^2 = 2(1 - \cos\theta_i)\frac{f\,n(n+1)}{l^2\rho F}\,,\ u_{ji} = \sin j\frac{i\pi}{n+1}\ \ (\,i,j = \overline{1,n}\,).$$

Звідси, беручи до уваги співвідношення

$$1-\cos\theta_i = 1-1+\frac{\theta_i^2}{2}-\ldots \approx \frac{i^2\pi^2}{2(n+1)^2},$$

висновуємо, що (як і повинно бути)

$$\omega_i^2 \underset{n\to\infty}{\to} \frac{i^2\pi^2 E}{\rho l^2}.$$

Цілком подібно, беручи замість (6.100)

$$x_j = \frac{2j-1}{2n}, \quad K_{ja} = (2j-1)B$$

(решта позначень залишаються без змін), для тих самих рівнянь (6.88) отримаємо дещо інші частотні функції:

$$\Lambda+2, \quad 2\Lambda^2+6\Lambda+4, \quad 4\Lambda^3+16\Lambda^2+19\Lambda+6,$$

$$8\Lambda^4+40\Lambda^3+68\Lambda^2+44\Lambda+8\ \ldots$$

Формула для визначення нулів цих функцій набуває загалом подібного до (6.103) вигляду:

$$-\Lambda_i = 1-\cos\theta_i, \quad \theta_i = \frac{i\pi}{n} \quad (\, i=\overline{1,n}\,).$$

Аналогічними є і всі інші співвідношення.

Для другого та третього рівнянь (6.88) (консольні стержні) частотні функції є такими:

$$D_1 = \Lambda+1, \quad D_2 = \Lambda^2+3\Lambda+1, \quad D_3 = \Lambda^3+5\Lambda^2+6\Lambda+1,$$

$$D_k = \Lambda^k + C_{2k-1}^1\Lambda^{k-1} + C_{2k-2}^2\Lambda^{k-2} + \ldots + C_k^k. \tag{6.105}$$

Нехай, наприклад,

$$B = \int_a^{x_1}\frac{ds}{f(s)} = \int_a^{c}\frac{ds}{f(s)} + \int_c^{x_1}\frac{ds}{f(s)}, \tag{6.106}$$

що відповідає моделі деякої пружно-жорсткої системи. В залежності від вибору параметра c $\left(a<c<x_1\right)$, кожен з доданків виразу (6.106) може бути досить великим, або навпаки, — вельми малим. Тому величина B може змінюватися так, що

$$B = \chi\widetilde{B}, \quad 0<\chi<\infty. \tag{6.107}$$

Очевидно, щоб визначити частоти відповідної пружно-жорсткої моделі, досить в формулах вигляду (6.102) — (6.104) замінити величину B на відповідну величину $\tilde{B}$. (У випадках консолей можна діяти так само, але нулі функцій (6.105) доводиться визначати числовими методами або, коли $n \le 4$, за відомими точними формулами.)

Загальним є такий висновок: комплексні частоти пружно-жорстких моделей, про які тут йшлося, мають від'ємні дійсні частини при довільних значеннях параметра χ в (6.107) і можуть сильно відрізнятися від частот відповідних пружних систем.

6.15 Частотні рівняння складених систем

Розглядатимемо так звані складені стержневі системи, елементи яких — прямі стержні з довільними допустимими параметрами, в тому числі з ділянками досить малої або великої жорсткості [19]. Найпростішу таку систему утворюють два стержні, кінематично з'єднані через важіль, муфту, зубчату передачу тощо. Виведемо характеристичне рівняння цієї системи, вважаючи відомими окремі частотні рівняння вказаних стержнів (коли вони не з'єднані).

Нехай одне з точкових включень першого стержня, наприклад маса M_r, з'єднана зі скупченою масою M_s другого стержня так, що виконується співвідношення

$$u\, y(x_r) = \tilde{y}(x_s) \quad (x_r \equiv x_s). \tag{6.108}$$

де u — передатне відношення; x_r та x_s — координати інцидентних точок, в яких скупчені вказані маси; y та $\tilde{y}$ — відповідні амплітудні переміщення, а окремі частотні рівняння визначені як

$$\Delta_1(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, K) = 0,$$

$$\Delta_2\left(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots, \tilde{\gamma}_{\tilde{k}}, \tilde{K}\right) = 0. \tag{6.109}$$

де K, $\tilde{K}$ — відповідні фундаментальні функції для першого та другого стержнів;

$$\gamma_i = M_i\lambda^2 + b_i\lambda + k_i \;\; (i = \overline{1,k}); \;\; \tilde{\gamma}_j = M_j\lambda^2 + b_j\lambda + \tilde{k}_j, \; (j = \overline{1,\tilde{k}}).$$

Звідси знаходимо:

$$k_r = F_1(K, \ldots), \;\; \tilde{k}_s = F_2(\tilde{K}, \ldots). \tag{6.110}$$

Роботи відповідних пружних узагальнених зусиль (внутрішніх) у точці з'єднання стержнів задовольняють співвідношення

$$A_1 = \frac{1}{2} k_r y_r^2 \,,\; A_2 = \frac{1}{2} \tilde{k}_s \tilde{y}_s^2 \,,\; A_1 + A_2 = 0 \,,$$

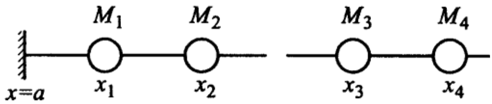
з яких з урахуванням формул (6.108) — (6.110) отримуємо характеристичне рівняння окресленої моделі:

$$F_1(K,\ldots) + u^2 F_2(\tilde{K},\ldots) = 0 \,. \tag{6.111}$$

Якщо система складена з більшої кількості подібних стержнів, то послідовно будуються аналогічні характеристичні рівняння. Так само можна поступати в ще складніших випадках (з урахуванням розподілених параметрів, за наявності пружно приєднаних мас, у разі поздовжніх та поперечних коливань тощо).

Зауважмо, що рівняння вигляду (6.111) можна виводити й інакше, наприклад, застосовуючи рівняння Лагранжа другого роду. Даний спосіб, уперше запропонований у праці [32], є раціональнішим.

Розгляньмо до прикладу стержні, схеми яких зображено на рис. 22.



22 **Приклад моделі складеної системи з двох стержнів (поздовжні коливання).**

Їм відповідають друге й четверте з рівнянь (4.42). Задля спрощення вважаємо, що

$$\alpha_1 = M_1\lambda^2 \,,\; \alpha_2 = M_2\lambda^2 + k_2 \,,\; \alpha_3 = M_3\lambda^2 + k_3 \,,\; \alpha_4 = M_4\lambda^2 \,.$$

Тоді

$$\Delta_1 \equiv 1 + \lambda^2\Big(M_1 K_{10} + (M_2\lambda^2 + k_2)\, K_{20}\Big) + \lambda^2 M_1 (M_2\lambda^2 + k_2) K_{10} K_{21} \,,$$

$$\Delta_2 \equiv M_3\lambda^2 + k_3 + M_4\lambda^2 + (M_3\lambda^2 + k_3)\, M_4\lambda^2 K_{43} ;$$

$$F_1 = -M_2\lambda^2 - \frac{1 + M_1\lambda^2 K_{10}}{K_{20} + M_1\lambda^2 K_{10} K_{21}} \,,\; F_2 = -M_3\lambda^2 - \frac{M_4\lambda^2}{1 + \lambda^2 M_4 K_{43}} \,,$$

$$k_2 + u^2 k_3 = 0 \,,\; u y_2 = y_3 \,.$$

Відповідне рівняння (6.111) подаємо у вигляді

$$a_0 + a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 + a_6\lambda^6 = 0\,, \tag{6.112}$$

де

$$a_0 = 1,\ a_2 = M_1K_{10} + M_2K_{20} + M_4K_{43} + u^2K_{20}(M_3 + M_4)\,,$$

$$a_4 = M_1M_4K_{10}K_{43} + M_1M_2K_{10}K_{21} + M_2M_4K_{20}K_{43} +$$

$$+ u^2(M_1M_3K_{10}K_{21} + M_3M_4K_{20}K_{43} + M_4M_1K_{10}K_{21})\,,$$

$$a_6 = M_1M_4K_{10}K_{21}K_{43}(M_2 + u^2M_3)\,. \tag{6.113}$$

(очевидно, що дана система має три ступені вільності).

Коефіцієнти відповідного характеристичного рівняння вигляду (6.112) для консолі з чотирма зосередженими масами визначаються за формулами:

$$a_0 = 1,\ a_2 = \sum_{i=1}^{4} M_iK_{i0}\ ,\ a_4 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j \succ i}^{4} M_iM_jK_{i0}K_{ji}\ ,$$

$$a_6 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j \succ i}^{3}\sum_{s \succ j}^{4} M_iM_jM_sK_{i0}K_{ji}K_{sj}$$

$$a_8 = M_1M_2M_3M_4K_{10}K_{21}K_{32}K_{43}\,. \tag{6.114}$$

Якщо $x_2 \to x_3$, то $K_{32} \to 0$, причому маси M_2 і M_3 додаються, а кількість ступенів вільності зменшується до трьох. Тоді, як і повинно бути, ці ж коефіцієнти (6.114) збігаються з коефіцієнтами (6.113) при $u = 1$.

7 МАЛІ КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ ТА КІЛЬЦЕВИХ МЕМБРАН З ФУНКЦІЯМИ РОЗПОДІЛУ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД РАДІАЛЬНОЇ КООРДИНАТИ

7.1 Первісні співвідношення

Основним у динаміці круглих мембран можна вважати диференціальне рівняння [7, 13, 14, 56]

$$\rho hr\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-T\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right]=rq(r,\varphi,t), \qquad (7.1)$$

де r, φ — полярні координати; t — час; $w=w(r,\varphi,t)$ — поперечний прогин мембрани; T — її натяг (стала величина); $q(r,\varphi,t)$ — поперечне навантаження; ρ і h — густина і товщина мембрани.

Рівняння (7.1) розглядається зазвичай за таких крайових умов:

— затиснутий берег (наприклад, $r=b$)

$$w(b,\varphi,t)=0 \quad (a\le r\le b) \qquad (7.2)$$

— вільний берег (наприклад, $r=a$)

$$\frac{\partial w}{\partial r}(a,\varphi,t)=0 \quad (a\le r\le b) \qquad (7.3)$$

(a і b — внутрішній і зовнішній радіуси). Для суцільної мембрани

($a = 0$) одну з умов вигляду (7.2) чи (7.3) замінюють на вимогу обмеженості розв'язків:

$$w(r, \varphi, t) < \infty, \text{ коли } r \to 0. \tag{7.4}$$

Початкові умови в загальному випадку такі:

$$w(r, \varphi, 0) = w_0(r, \varphi), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(r, \varphi, 0) = v_0(r, \varphi).$$

Розглядатимемо передусім вільні коливання ($q \equiv 0$). Кладучи в (7.1)—(7.4), як звичайно,

$$w = y(r)e^{i\omega t}\cos n\varphi \quad (i = \sqrt{-1}),$$

після відокремлення змінних одержуємо диференціальне рівняння на амплітуду прогину мембрани $y = y(r)$:

$$L[y] \equiv L_0[y] + \frac{\omega^2}{T} m(r) y = 0, \tag{7.5}$$

де

$$L_0[y] \equiv (r y')' - \frac{1}{r} n^2 y, \tag{7.6}$$

а також відповідні варіанти граничних умов

$$y(b) = 0, \quad y'(a) = 0, \quad y(0) < \infty. \tag{7.7}$$

Вважатимемо, що функція розподілу мас має таку структуру:

$$m(r) = \rho h g(r) + \sum_{i=1}^{s} r_i \rho_i \delta(r - r_i), \tag{7.8}$$

де $\delta(\cdot)$ — дельта-функція (Дірака), ρ_i — лінійна густина i-го "ребра" (потовщення вздовж кола $r = r_i$), маса якого

$$m_i = 2\pi \rho_i r_i, \quad a < r_1 < r_2 < \ldots < r_s < b; \tag{7.9}$$

$g = g(r)$ — задана неперервна функція, що характеризує розосереджену масу.

Щоб визначити власні частоти в задачах (7.5) — (7.7) і дослідити вплив параметрів (7.8) — (7.9) на коливні процеси, доцільно застосувати методи часткової дискретизації і характеристичних рядів та універсальні частотні рівняння [13, 14, 20]. Для кільцевих мембран вказані рівняння формально можна записати так само, як для стержнів (валів, струн чи линв):

$$Q(b,a)=0\,,\quad Q'(b,a)=0\,,\quad \dot{Q}(b,a)=0\,,\quad \dot{Q}'(b,a)=0\,. \qquad (7.10)$$

Тут функція $Q=Q(r,\alpha)$ ($r,\alpha\in[a,b]$) визначена формулою [15, 16, 20]:

$$Q(r,\alpha)=K(r,\alpha)+\sum_{i=1}^{s}\alpha_i K_{i\alpha}\Phi_{ri}+\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j>1}^{s}\alpha_i\alpha_j K_{i\alpha}K_{ji}\Phi_{rj}+$$

$$+\ldots+\alpha_1\alpha_2..\alpha_s K_{1\alpha}K_{21}..K_{s,s-1}\Phi_{rs}\,,$$

де

$$\Phi(r,\alpha)=K(r,\alpha)\theta(r-\alpha)\,,\ r,\alpha\in[a,b]\,,$$

Φ — **функція впливу**, що є розв’язком рівняння $L[y]=\delta(r-\alpha)$; $K(r,\alpha)$ — розв’язок задачі Коші

$$L[y]=0\,,\ y\big|_{r=\alpha}=K(\alpha,\alpha)=0\,;\ y'\Big|_{r=\alpha}=K'(\alpha,\alpha)=\frac{1}{\alpha}\,; \qquad (7.11)$$

$\theta(\,\cdot\,)$ — одинична функція (Гевісайда);

$$\alpha_i=\frac{\omega^2}{T}r_i\rho_i\ \ (i=\overline{1,s}\,),\ K_{i\alpha}=K(r_i,\alpha)\,; \qquad (7.12)$$

при цьому

$$Q'=\frac{\partial Q}{\partial r}\,,\quad \dot{Q}=\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\,,\quad \dot{Q}'=\frac{\partial^2 Q}{\partial r\partial\alpha}\,.$$

Перше з рівнянь (7.10) відповідає мембрані з закріпленими берегами, друге — мембрані з закріпленим внутрішнім берегом $(r=a)$ і вільним зовнішнім $(r=b)$, третє — навпаки, четверте — мембрані з вільними берегами (так зване ковзне чи плаваюче закріплення [7]).

7.2 Побудова фундаментальних функцій

Загальний розв’язок рівняння $L_0[y]=0$ (оператор L_0 визначений спів-відношенням (7.6)) для $n\neq 0$ має вигляд

$$y=C_1 r^n+C_2 r^{-n}$$

(C_1, C_2 — довільні сталі). Підставляючи його в умови (7.11), знаходимо відповідну фундаментальну функцію

$$K_0(r,\alpha)=\frac{1}{2n}(r^n\alpha^{-n}-r^{-n}\alpha^n) \quad (n\neq 0). \tag{7.13}$$

Звідси для вісесиметричних задач ($n=0$) після розкриття невизначеності одержуємо:

$$K_0(r,\alpha)=\ln\frac{r}{\alpha} \quad (\text{рівняння } (ry')'=0). \tag{7.14}$$

Коли $m(r)=\rho hg(r)$, функцію $K(r,\alpha)$ можна будувати як ряд за параметром $\frac{\omega^2}{T}$ [20]:

$$K(r,\alpha)=K_0(r,\alpha)-\frac{\omega^2}{T}K_1(r,\alpha)+\left(\frac{\omega^2}{T}\right)^2K_2(r,\alpha)-\left(\frac{\omega^2}{T}\right)^3K_3(r,\alpha)+\ldots,$$

де $K_0(r,\alpha)$ визначена згідно з (7.13) або (7.14),

$$K_i(r,\alpha)=\int_\alpha^r K_0(r,\alpha)\rho hg(s)K_{i-1}(s,\alpha)ds \quad (i=1,2,\ldots). \tag{7.15}$$

Якщо, наприклад, $g(r)=r^\varepsilon$, то з (7.13) і (7.15) отримуємо:

$$K_1(r,\alpha)=\frac{\rho h}{2n\chi}\left(\frac{r^{n+\chi}\alpha^{-n}-r^{-n}\alpha^{n+\chi}}{\chi+2n}+\frac{r^n\alpha^{-n+\chi}-r^{-n+\chi}\alpha^n}{\chi-2n}\right),$$

де $\chi=\varepsilon+1$. Звідси для випадку $n=0$ (вісна симетрія) після обчислення невизначеності типу $\frac{0}{0}$ знаходимо

$$K_1(r,\alpha)=\frac{\rho h}{\chi^3}\left[2\left(\alpha^\chi-r^\chi\right)+\chi\left(r^\chi+\alpha^\chi\right)\ln\frac{r}{\alpha}\right]$$

(цю ж формулу, як і повинно бути, можна одержати, застосувавши співвідношення (7.14) і (7.15) при $g(r)=r^\varepsilon$).

Цілком подібно у формі рядів за параметром можна будувати обмежені в нулі ($r=0$) розв'язки рівняння (7.5). Зокрема, якщо $n=0$ і $g=r^\varepsilon$, то вихідним є рівняння

$$(ry')'+\frac{\omega^2}{T}\rho hr^\varepsilon y=0; \tag{7.16}$$

його обмежений в нулі розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = 1 - \Lambda^2 y_1 + \Lambda^4 y_2 - \ldots,\ \Lambda^2 = \frac{\omega^2 \rho h}{T}, \tag{7.17}$$

де

$$y_i = \int_0^r K_0(r,s) s^{\varepsilon} y_{i-1}(s) ds \quad (i = 1, 2, \ldots),\ y_0 = 1,\ K_0 = \ln\frac{r}{\alpha}. \tag{7.18}$$

З формули (7.18), застосувавши метод індукції (за умови $\varepsilon + 1 > 0$), отримаємо

$$\tilde{y} = 1 - \Lambda^2 \frac{r^{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)^2} + \Lambda^4 \frac{r^{2(\varepsilon+1)}}{2^2(\varepsilon+1)^4} - \Lambda^6 \frac{r^{3(\varepsilon+1)}}{2^2 \cdot 3^2 (\varepsilon+1)^6} + \ldots \tag{7.19}$$

(цей ряд збігається для $r \geq 0$). Якщо $\varepsilon = 1$, тобто $g \equiv r$, то (7.19) є функцією Беселя $J_0(\Lambda r)$ [7, 39] (що відповідає задачам динаміки мембран із сталим розподілом параметрів). Подібно можна будувати також і необмежений в нулі розв'язок рівняння (7.16), беручи в співвідношеннях (7.17) — (7.18) $y_0 = \ln r$.

7.3 Коефіцієнти податності для кільцевих мембран

Розгляньмо кільцеву мембрану, коливання якої описує рівняння (7.5), а її береги задовольняють дві перші умови (7.7). Щоб визначити коефіцієнти податностей β_{ij}, розгляньмо допоміжну задачу (як і в [15, 20])

$$(ry')' - \frac{1}{r} n^2 y = -\frac{P_j}{T} \delta(r - r_j),\ y'(a) = 0,\ y(b) = 0, \tag{7.20}$$

де P_j — розподілене поперечне навантаження, прикладене по колу $r = r_j$.

Розв'язок даного рівняння доцільно записати так:

$$y = C_0 K(r,a) + C_1 \dot{K}(r,a) - \frac{P_j}{T} K(r, r_j) \theta(r - r_j) \tag{7.21}$$

(тут C_0, C_1 — довільні сталі, а функція $K(r,\alpha)$ збігається з (7.13)). Підставляючи (7.21) у граничні умови (7.20), знаходимо розв'язок допоміжної задачі:

$$y_j = P_j T^{-1} \left(\frac{K_{bj}}{\dot{K}_{ba}} \dot{K}_{ra} - \Phi_{rj} \right) \quad (\Phi_{rj} \equiv K_{rj} \theta_{rj}),$$

де використано позначення (7.12). Звідси отримуємо коефіцієнти впливу податностей

$$T\beta_{ij} = \frac{K_{bj}}{\dot{K}_{ba}}\dot{K}_{ia}\,,\quad T\beta_{ji} = \frac{K_{bi}}{\dot{K}_{ba}}\dot{K}_{ja} - K_{ji}\quad (i \le j) \tag{7.22}$$

(друга з цих формул відповідає допоміжній задачі, яка одержана з (7.20) після заміни індексу j на i).

Неважко переконатися, що $\beta_{ij} \equiv \beta_{ji}$ (як і повинно бути згідно з принципом взаємності переміщень), безпосередньо перевіряючи тотожність

$$K_{bj}\dot{K}_{ia} \equiv K_{bi}\dot{K}_{ja} - K_{ji}\dot{K}_{ba}\,. \tag{7.23}$$

Формули (7.22) отримані для мембрани, внутрішній берег якої — вільний, а зовнішній — закріплений (третє з рівнянь (7.10)). Подібно визначають коефіцієнти впливу податностей, що відповідають першому, другому та четвертому рівнянням (7.10):

$$\left.\begin{aligned} T\beta_{ij} &= \frac{K_{bj}}{K_{ba}}K_{ia}\,,\\ T\beta_{ij} &= \frac{K'_{bj}}{K'_{ba}}K_{ia}\,,\\ T\beta_{ij} &= \frac{K'_{bj}}{\dot{K}'_{ba}}\dot{K}_{ia} \end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

(тут $i \le j$ та $\beta_{ji} \equiv \beta_{ij}$).

7.4 Деякі формули для частот та їх аналіз

Нехай $i = j = 1$, $m_1 = 2\pi\rho_1 r_1$, а маса мембрани вважається нульовою. Підставивши в (7.22) функцію (7.13), визначмо β_{11} та запишімо відповідне рівняння малих коливань:

$$\beta_{11} = \frac{(\chi_2^n - \chi_2^{-n})(\chi_1^n + \chi_1^{-n})}{T_n(\chi^n + \chi^{-n})}\,,\quad \chi_1 = \frac{r_1}{a}\,,\quad \chi_2 = \frac{b}{r_1}\,,\quad \chi = \frac{b}{a}\,; \tag{7.25}$$

$$\beta_{11}\rho_1 r_1 \frac{d^2 q}{dt^2} + q = 0\,, \tag{7.26}$$

де $q = q(t)$ — узагальнена координата.

Для $n = 0$ (вісна симетрія) вираз (7.25) виглядатиме так:

$$\beta_{11} = \frac{1}{T} \ln \frac{b}{r_1}.$$

Поклавши в (7.26) $q = A\cos\omega t$, отримаємо формули для частот коливань:

$$\omega_n^2 = \frac{nT(\chi^n + \chi^{-n}) \cdot 2}{\rho_1 r_1 (\chi_1^n + \chi_1^{-n})(\chi_2^n - \chi_2^{-n})} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\omega_0^2 = \frac{T}{\rho_1 r_1 \ln \dfrac{b}{r_1}} \quad (n = 0). \tag{7.27}$$

Остання формула (для $n = 0$) збігається з відомою, одержаною методом початкових параметрів для $r_1 = a$ [33]; край $r = a$ — вільний, тому для $n = 0$ частота визначається тільки кільцем (частиною мембрани), ширина якого $b - r_1$.

Цілком так само, виходячи із співвідношень (7.24), приходимо до формул

$$\omega_n^2 = \frac{nT(\chi^n - \chi^{-n}) \cdot 2}{\rho_1 r_1 (\chi_1^n - \chi_1^{-n})(\chi_2^n - \chi_2^{-n})}, \quad \omega_0^2 = \frac{T \ln\chi}{\rho_1 r_1 \ln\chi_1 \ln\chi_2};$$

$$\omega_n^2 = \frac{nT(\chi^n + \chi^{-n}) \cdot 2}{\rho_1 r_1 (\chi_1^n - \chi_1^{-n})(\chi_2^n + \chi_2^{-n})}, \quad \omega_0^2 = \frac{T}{\rho_1 r_1 \ln\chi_1};$$

$$\omega_n^2 = \frac{nT(\chi^n - \chi^{-n}) \cdot 2}{\rho_1 r_1 (\chi_1^n + \chi_1^{-n})(\chi_2^n + \chi_2^{-n})}, \quad \omega_0^2 = 0. \tag{7.28}$$

Зауважмо, що

$$\rho_1 r_1 = \frac{m_\rho}{2\pi}$$

(слід мати на увазі таку особливість задачі: значення маси “ребра” залежить від r_1, тобто від його розташування на мембрані), зокрема $m_\rho \to 0$ у разі $r_1 \to 0$.

Як бачимо, мембрани (безмасові) з одним "ребром", зосередженим на колі $r = r_1$, є системами з нескінченною кількістю ступенів вільності (аналогічно, безмасові стержні з однією скупченою масою — системами з одним ступенем вільності).

Існує істотна різниця між консольно закріпленими стержнями та відповідними кільцевими мембранами з одним вільним берегом. Якщо для стержнів зі сталими параметрами друге й третє рівняння (7.10) рівноцінні і дають тотожні частотні спектри, то для мембран ці рівняння відповідають, очевидно, кільцям, частоти яких можуть сильно відрізнятися. Зокрема, якщо в останній з формулі (7.27) $r_1 \to a$, а в другій з формул (7.28) $r_1 \to b$, то відповідно матимемо:

$$\omega_0^2 = \frac{T}{\rho_1 a \ln \dfrac{b}{a}}, \quad \omega_0^2 = \frac{T}{\rho_1 b \ln \dfrac{b}{a}}.$$

Отже, для $a \to 0$ перша з цих частот необмежено зростає; друга — необмежено зменшується.

7.5 Побудова матриць податності суцільних мембран

Визначмо тепер коефіцієнти впливу податностей для суцільної мембрани. Допоміжною є задача

$$L_0[y] = -\frac{P_j}{T}\delta(r - r_j), \quad y(b) = 0 \qquad (7.29)$$

з умовою (7.7) обмеженості розв'язку $y(0) < \infty$; оператор $L_0[y]$ визначений згідно з виразом (7.6).

Нехай $y = \psi(r)$ — обмежений розв'язок рівняння $L_0[y] = 0$. Тоді розв'язком неоднорідного рівняння (7.29) є функція

$$y = C_0 \psi(r) - \frac{P_j}{T}\psi(r_j)\Phi_{rj}.$$

Звідси, застосовуючи умову (7.29), визначаємо сталу

$$C_0 = \frac{P_j}{T}\frac{\psi(r_j)}{\psi(b)} K_{bj},$$

а отже й обмежений розв'язок задачі (7.29)

$$y_j = \frac{P_j}{T}\left[\frac{\psi(r_j)}{\psi(b)} K_{bj}\psi(r) - \psi(r_j)\Phi_{rj}\right].$$

Тому коефіцієнти впливу податностей суцільних круглих мембран можна обчислювати за формулами

$$T\beta_{ij} = \frac{\psi_i \psi_j}{\psi_b} K_{bj} \text{ та } T\beta_{ji} = \psi_i\left[\frac{\psi_j}{\psi_b} K_{bi} - K_{ji}\right]. \qquad (7.30)$$

Тут також $\beta_{ji} = \beta_{ij}$; це впливає з тотожності

$$\psi_j K_{bj} \equiv \psi_j K_{bi} - \psi_b K_{ji}$$

(для доведення цього факту досить підставити сюди $\psi(r) = r^n$ і функцію (7.13), якщо $n \neq 0$, чи $\psi(r) \equiv 1$ і функцію (7.14), якщо $n = 0$).

Очевидно, для вісесиметричного випадку формули (7.30) і (7.22) співпадають, тобто частоти для суцільної та відповідної кільцевої безмасових мембран є однаковими.

7.6 Про дослідження вільних і вимушених коливань у складніших випадках

Маючи коефіцієнти β_{ij}, визначені вище формулами (7.22) — (7.24), і застосовуючи метод часткової дискретизації, неважко записати рівняння руху відповідних неперервних і неперервно-дискретних систем (у переміщеннях або в зусиллях) [20]. Зокрема, якщо враховуються сили тертя, пропорційні до узагальнених швидкостей, та додаткові в'язі, то вказані рівняння можна подати у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} v_j + q_i = Q_i \qquad (i, j = \overline{1, k}), \qquad (7.31)$$

де

$$v_j = m_j \frac{d^2 q_j}{dt^2} + b_j \frac{dq_j}{dt} + c_j q_j \quad (j = \overline{1, k}),$$

$$m_j = 2\pi r_j \rho_j, \quad b_j = 2\pi r_j \tilde{b}_j, \quad c_j = 2\pi r_j \tilde{c}_j;$$

$\rho_j, \tilde{b}_j, \tilde{c}_j, Q_j$ — відповідно розподілені густина, коефіцієнти тертя й пружної в'язі та поперечне навантаження j-го "ребра". Рівняння (7.31) та аналогічні досліджуються відомими методами (див., наприклад, [7, 20, 56]).

Зробімо таке зауваження про застосування коефіцієнтів впливу до "пружно-жорстких" мембран. З формул (7.22) та (7.28) видно, що коефіцієнти впливу податностей β_{ij} необмежено зменшуються, коли натяг T відповідно збільшується (як і повинно бути). Завдяки цьому можна, зокрема, застосовувати розроблену методологію в задачах динаміки мембран, утворених з концентричних кілець зі сталими, але різними натягами T — в тому числі з дуже великими (останні доцільно називати "пружно-жорсткими" мембранами).

7.7 Двобічні оцінки перших частот суцільної мембрани зі сталим розподілом параметрів

Розгляньмо питання про застосування двобічних оцінок і таблиць Бернштейна — Керопяна [3] до визначення частот коливань круглих мембран.

З використанням фундаментальної функції (7.13) і обмеженого розв'язку r^n рівняння (7.6) $L_0[y]=0$, діючи так само, як в 3.6 (див. (3.47) — (3.49), отримуємо формули

$$a_j = a_{j-1}\frac{1}{2j(n+j)} \quad (j=1,2,\ldots),\ a_0=1,$$

за якими визначаємо послідовно коефіцієнти частотного рівняння (4.1.74):

$$1,\quad \frac{1}{2^2(n+1)},\quad \frac{1}{2^5(n+1)(n+2)},\quad \frac{1}{2^7\cdot 3(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\frac{1}{2^{11}\cdot 3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},\ \cdots \tag{7.32}$$

Звідси висновуємо, що найпростішу оцінку (4.1.75) знизу можна подати як

$$(\nu_{1n}^{-})^2 = 2^2(n+1)\sqrt{n+2} \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{7.33}$$

(через ν_{1n} позначено, як і в [7], корені частотного рівняння $I_n(\nu_{1n})=0$).

Зауважмо, що оцінка (4.1.75) з надлишком існує тут тільки для $n=0$, причому

$$\nu_{10}^{+} = \sqrt{8} \approx 2{,}83\,.$$

Оцінка ж (7.33) обчислюється для будь-якого n; отже, послідовно визначаємо:

$$2{,}378;\ 3{,}722;\ 4{,}889;\ 5{,}981;\ 6{,}999;\ \ldots \tag{7.34}$$

Відповідні точні значення частот є такими [1, 7]:

$$2{,}405;\ 3{,}832;\ 5{,}136;\ 6{,}380;\ 7{,}588;\ \ldots$$

Застосувавши коефіцієнти (7.32), можна побудувати уточнені оцінки [3]. В підсумку отримаємо формули

$$(\nu_{1n}^{-})^8 = 2^8(n+1)(n+2)^2\,(n+3)(n+4)(5n+11)^{-1}; \tag{7.35}$$

$$(\nu_{1n}^{+})^2 = 2^2(n+1)\sqrt{2(n+2)}\left(1+\sqrt{F(n)}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.36}$$

де

$$F(n) = (-n^2+3n+10)(n^2+7n+12),\ n=0,1,2,\ldots \tag{7.37}$$

Отже, оцінка (7.35) існує завжди; оскільки ж $F(n) \geq 0$ тільки для $n \leq 5$, то оцінку (7.36) при $n > 5$ можна замінити на таку:

$$(\nu_{1n}^{+})^2 = 2^2\,(n+1)\sqrt{2(n+2)}\,. \tag{7.38}$$

При цьому, зокрема, числам (7.34) відповідають такі:

$$2{,}828;\ \ 4{,}427;\ \ 5{,}826;\ \ 7{,}113;\ \ 8{,}324.$$

Як бачимо, оцінки (7.35) — (7.38) дозволяють дуже швидко наближено визначати основні частоти довільних форм коливань механічної системи. Доцільність і ефективність їх застосування для значень $n \leq 5$ ілюструють наведені в табл. 18 дані; в даному разі п’ять перших частот визначено практично точно.

18 **Двобічні оцінки перших шести частот круглої мембрани зі сталим розподілом параметрів**

n	0	1	2	3	4	5
ν_{1n}^{-}	2,4042	3,8277	5,1223	6,3509	7,5363	8,6898
ν_{1n}^{+}	2,4050	3,8354	5,1541	6,4404	7,7555	9,4763

Розгляньмо тепер випадок так званого „плаваючого” закріплення мембрани, для якого частотне рівняння має вигляд $I_n'(\nu_{mn})=0$ [7]. Використовуючи відоме зображення функцій Беселя $I_n(x)$ у вигляді степеневого ряду [39], знаходимо $I_n'(x)$. Діючи так само, як у випадку жорсткого закріплення, отримаємо замість (7.32) такі формули:

$$A_0=1, \quad A_1=\frac{n+2}{2^2\cdot 1!\,n(n+1)},$$

$$A_2=\frac{n+4}{2^4\cdot 2!n\,(n+1)(n+2)}, \quad A_3=\frac{n+6}{2^6\cdot 3!n\,(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$A_4=\frac{n+8}{2^8\cdot 4!n\,(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \ \ldots \tag{7.40}$$

Звідси, зокрема, маємо найпростішу оцінку з нестачею

$$(\nu_{1n}^-)^2=2^2\,n(n+1)\sqrt{\frac{n+2}{n^2+8n+8}}\,.$$

При цьому значенням $n=0;1;2;3;4$ відповідають числа ν_{1n}^-:

0; 1,833; 3,012; 4,094; 5,117; 6,096;

вони узгоджуються з відомими [1, 7]:

0; 1,841; 3,054; 4,201; 5,318; 6,416.

Відповідна найпростіша оцінка з лишком є такою:

$$(\nu_{1n}^+)^2=\frac{2^3\,n(n+1)}{n+2+\sqrt{\dfrac{-n^3-4n^2+4n+8}{n+2}}}\,.$$

Проте, вона застосовна тільки для $n=0;1$. Починаючи з $n=2$ підкореневий вираз стає від’ємним; очевидно, при цьому його можна замінити на нуль і одержати погіршені оцінки з лишком. Відповідні числа ν_{1n}^+ виявляються такими:

0; 1,880; 3,464, ...

Зауважмо, що й у цьому випадку можна побудувати уточнені оцінки вигляду (7.35) — (7.36), використавши наведені вище коефіцієнти (7.40).

7.8 Двобічні оцінки основної частоти круглої мембрани з розподілом маси, залежним від радіальної координати

Вісесиметричні коливання суцільної мембрани зі змінним розподілом маси описуються диференціальним рівнянням (7.16); його обмежений розв’язок при $r=0$ визначено вище формулою (7.19). З цієї формули випливає, що

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{b^{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)^2}, \quad a_2 = \frac{b^{2(\varepsilon+1)}}{4(\varepsilon+1)^4}.$$

Застосовуючи найпростішу двобічну оцінку (4.1.75), матимемо співвідношення-нерівність

$$(\varepsilon+1)^2\sqrt{2} < b^2\Lambda^2 < 2(\varepsilon+1)^2.$$

Звідси, беручи до уваги (7.17), отримуємо

$$\omega^- q < \omega < \omega^+ q,$$

де

$$q = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{T}{\rho h}}$$

та

$$\omega_- = 2^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+1), \quad \omega_+ = 2^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+1).$$

Числа ω_- та ω_+ для деяких значень ε наведені у табл. 19 (значення $\varepsilon=1$ відповідає мембрані зі сталим розподілом маси).

19 **Двобічні оцінки основної частоти вісесиметричних коливань мембран з законом розподілу маси**

ε	0	0,25	0,5	1	2	4	9
ω_-	1,19	1,49	1,78	2,38	3,57	5,95	11,89
ω_+	1,68	1,77	2,12	2,83	4,24	7,07	14,14

Оцінки для значення $\varepsilon = 1$ узгоджуються з відомим точним значенням $\omega_1 = 2{,}4$ [7].

Зауважмо, що подібні оцінки можна одержати також і у складніших випадках (кільцеві мембрани, інші закони розподілу мас $m(r)$, наявність пружної основи тощо).

8 ЕКВІВАЛЕНТНІ ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ

8.1 Розв'язок однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Нехай ідеться про **однорідну диференціальну задачу**

$$\frac{dy_i}{dx} = p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + \ldots + p_{in}y_n = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}y_j\,, \quad i = \overline{1,n}\,,$$

$$y_1(x_0) = y_{10}\,,\ y_2(x_0) = y_{20}\,,\ \ldots\,,\ y_n(x_0) = y_{n0}\,, \tag{8.1}$$

в якій p_{i1}, p_{i2}, …, p_{in} — задані дійсні числа (дійсні сталі). Ця задача (з n лінійними диференціальними рівняннями першого порядку) зводиться до задачі з одним лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку (див. 1.7). Тому до неї застосовні всі аналітичні засоби, що спираються на поняття фундаментальної функції. Зокрема легко переконатися, що розв'язки задачі (8.1) можна подати у вигляді

$$y_j(x) = \sum_{i=1}^{n} y_j^{(i-1)}(x_0)\,\frac{\overset{n}{\Delta}_i(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}}\,, \quad j = \overline{1,n}\,, \tag{8.2}$$

де

$$\overset{n}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

— визначник Ван-дер-Монда, укладений з коренів характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} p_{11}-k & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-k & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-k \end{vmatrix} = 0\,; \qquad (8.3)$$

$\overset{n}{\Delta}_i(x-x_0)$ — визначник, який виникає при заміні в $\overset{n}{\Delta}$ i-го рядка на рядок $\{e^{k_1(x-x_0)}, e^{k_2(x-x_0)}, \ldots, e^{k_n(x-x_0)}\}$:

$$\overset{n}{\Delta}_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array}.$$

Зазначмо, що формули (8.2) дають необхідні розв'язки за довільних коренів характеристичного рівняння (8.3), серед яких, зокрема, можуть бути нульові й кратні. Водночас підкреслімо, що вони безпосередньо враховують початкові умови задачі (величини $y_j^{(i-1)}(x_0)$ знаходять на підставі (8.1) із застосуванням операцій диференціювання). Звісно ж, між визначниками $\overset{n}{\Delta}_i$ $(i=\overline{1,n})$ існує певна взаємна залежність. Зокрема, легко з'ясувати, що

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\overset{n}{\Delta}_1 = (-1)^n\,\overset{n}{\Delta}_n\,.$$

Кожну систему диференційовних лінійно незалежних функцій можна тлумачити як фундаментальну систему розв'язків деякої системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Процес **відтворення системи n лінійних рівнянь за відомою фундаментальною системою її розв'язків**

$$y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}\,, \; i=\overline{1,n}\,,$$

зводиться до укладання і перетворення системи n рівностей

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dy_i}{dx} & \dfrac{dy_{i1}}{dx} & \dfrac{dy_{i2}}{dx} & \cdots & \dfrac{dy_{in}}{dx} \\ y_1 & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_2 & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad i = \overline{1,n} \,. \tag{8.4}$$

Між системою функцій $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$, $i = \overline{1,n}$, і виразом (8.4), зрозуміло, існує однозначна взаємна відповідність.

Вдамося до прикладу.

Зведімо систему

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 + y_3\,, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_2 - 2y_3\,, \quad \frac{dy_3}{dx} = y_1 + y_3\,, \tag{8.5}$$

до диференціального рівняння третього порядку за допомогою операцій диференціювання.

Покладімо, перш за все, $y_1 = y(x)$. Диференціюючи перше рівняння системи (8.5) і беручи до уваги два інших, матимемо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = \frac{dy}{dx} + y + y_2 - y_3\,.$$

Наступне диференціювання дає

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_3}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y + y_2 - 3y_3\,. \tag{8.6}$$

З нової системи двох рівнянь знайдемо:

$$y_2 = \frac{y''}{2} - y\,,\ y_3 = -\frac{y''}{2} + y'\,. \tag{8.7}$$

Підставляючи отриманий результат в (8.6) матимемо шукане диференціальне рівняння

$$y''' - 3y'' + 2y' + 2y = 0\,, \tag{8.8}$$

якому відповідає характеристичне алгебричне рівняння

$$k^3 - 3k^2 + 2k + 2 = 0 \tag{8.9}$$

з деякими коренями k_1, k_2, k_3.

Розв'язок рівняння (8.8) можна записати у вигляді

$$y(x) = y(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta_1(x-x_0)}}{\overset{n}{\Delta}} + y'(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta_2(x-x_0)}}{\overset{n}{\Delta}} + y''(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta_3(x-x_0)}}{\overset{n}{\Delta}}\,, \tag{8.10}$$

де

$$\overset{3}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix}, \quad \overset{3}{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & e^{k_3(x-x_0)} \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix},$$

$$\overset{3}{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & e^{k_3(x-x_0)} \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix},$$

$$\overset{3}{\Delta}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & e^{k_3(x-x_0)} \end{vmatrix}$$

Від отриманого щойно розв'язку $y(x)$ (див. (8.10)) рівняння (8.8) до розв'язку $\{ y_1(x), \; y_2(x), \; y_3(x) \}$ первісної системи (8.5) можна повернутися, вдаючись до рівностей $y_1 = y(x)$ і (8.7).

Зокрема, відповідно до другого співвідношення (8.7)

$$y_3(x) = -\frac{y''(x)}{2} + y'(x) =$$

$$= -\frac{y_3'(x_0) - y_3(x_0)}{2\overset{n}{\Delta}} \begin{vmatrix} k_1^2 e^{k_1(x-x_0)} & k_2^2 e^{k_2(x-x_0)} & k_3^2 e^{k_3(x-x_0)} \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{y_3''(x_0) - y_3'(x_0)}{2\overset{n}{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 e^{k_1(x-x_0)} & k_2^2 e^{k_2(x-x_0)} & k_3^2 e^{k_3(x-x_0)} \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{y_3''(x_0) - y_3'(x_0) - y_3(x_0)}{\overset{n}{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 e^{k_1(x-x_0)} & k_2^2 e^{k_2(x-x_0)} & k_3^2 e^{k_3(x-x_0)} \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{y_3'(x_0) - y_3(x_0)}{\overset{n}{\Delta}} \begin{vmatrix} k_1 e^{k_1(x-x_0)} & k_2 e^{k_2(x-x_0)} & k_3 e^{k_3(x-x_0)} \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{y_3''(x_0)-y_3'(x_0)}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1e^{k_1(x-x_0)} & k_2e^{k_2(x-x_0)} & k_3e^{k_3(x-x_0)} \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix}+$$

$$+2\frac{y_3''(x_0)-y_3'(x_0)-y_3(x_0)}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1e^{k_1(x-x_0)} & k_2e^{k_2(x-x_0)} & k_3e^{k_3(x-x_0)} \end{vmatrix}; \quad (8.11)$$

тут враховано початкові умови

$$\frac{y''(x_0)}{2}=y_3''(x_0)-y_3'(x_0)-y_3(x_0), \quad y'(x_0)=y_3''(x_0)-y_3'(x_0),$$

$$y(x_0)=y_3'(x_0)-y_3(x_0),$$

що випливають з (8.5), (8.7).

На підставі з'ясованого раніше характеристичного рівняння (8.9) (згідно з яким $k_i^3-3k_i^2+2k_i+2=0$, $i=1,2,3$) та відповідних йому формул Вієта ($k_1+k_2+k_3=3$, $k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3=2$, $k_1k_2k_3=-2$), вираз (8.11) можна звести до вигляду

$$y_3(x)=\frac{y_3(x_0)}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & e^{k_3(x-x_0)} \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix}+$$

$$+\frac{y_3'(x_0)}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & e^{k_3(x-x_0)} \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix}+$$

$$+\frac{y_3''(x_0)}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & e^{k_3(x-x_0)} \end{vmatrix}.$$

Подібно можна віднайти вираз для $y_2(x)$ і розв'язок системи (8.5) записати у вигляді

$$y_1(x)=y_1(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta}_1(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}}+y_1'(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta}_2(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}}+y_1''(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta}_3(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}},$$

$$y_2(x) = y_2(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta}_1(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}} + y_2'(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta}_2(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}} + y_2''(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta}_3(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}},$$

$$y_3(x) = y_3(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta}_1(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}} + y_3'(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta}_2(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}} + y_3''(x_0)\frac{\overset{3}{\Delta}_3(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}}$$

(у цілковитій відповідності з (8.2)).

8.2 Матричні квадратури

Розгляньмо тепер систему неоднорідних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j + q_i(x) = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{in}y_n + q_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \tag{8.12}$$

в якій $q_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) є неперервними функціями в заданому інтервалі $I = (x_0, x_1)$. Подамо цю систему в матричному записі

$$\frac{dY}{dx} = BY + Q(x), \tag{8.13}$$

де $B = [b_{ij}]$ — ($n \times n$)-матриця коефіцієнтів; $Q(x)$ — матриця-стовпець з елементами $q_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$). Початкові умови задаватимемо у вигляді системи n рівностей

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0} \tag{8.14}$$

або у вигляді однієї рівноцінної матричної рівності

$$Y(x_0) = Y_0. \tag{8.15}$$

Замість Y введемо нову невідому змінну Z відповідно до співвідношення

$$Y = e^{Bx} Z. \tag{8.16}$$

Беручи до уваги, що $\dfrac{d}{dx}e^{Bx} = Be^{Bx} = e^{Bx}B$, матричне рівняння (8.13) можна звести до вигляду

$$e^{Bx}\,\frac{dZ}{dx}=Q(x)\,.$$

Звідси

$$Z=C+\int_{x_0}^{x}e^{-Bs}Q(s)\,ds\,;$$

тут враховано, що **інтеграл від матричної функції**

$$A(s)=\left[a_{ij}(s)\right]\quad (\,i=\overline{1,m},\;\; j=\overline{1,n}\,)$$

за скалярним аргументом s визначається як

$$\int_{x_1}^{x_2}A(s)\,ds=\left[\int_{x_1}^{x_2}a_{ij}(s)\,ds\right].$$

Отже, відповідно до (8.16)

$$Y=e^{Bx}\left[C+\int_{x_0}^{x}e^{-Bs}Q(s)\,ds\right]=e^{Bx}C+\int_{x_0}^{x}e^{B(x-s)}Q(s)\,ds\,, \tag{8.17}$$

де C — матриця-стовпець з довільними сталими елементами c_i ($i=\overline{1,n}$).

Надаючи у виразі (8.17) незалежній змінній x значення x_0, на підставі (8.15) (див. також (8.14)) знайдемо

$$C=e^{-Bx_0}Y_0\,,$$

що дає підстави розв'язок рівняння (8.13) (чи системи рівнянь (8.12)) записати у вигляді

$$Y=e^{B(x-x_0)}Y_0+\int_{x_0}^{x}e^{B(x-s)}Q(s)\,ds\,.$$

До попереднього випадку зводиться і **однорідна** так звана **система Коші**

$$\frac{dY}{dx}=\frac{A}{x-\alpha}Y\,,$$

в якій сталій матриці A відповідає змінна матриця

$$B=\frac{A}{x-\alpha}\,.$$

Для цього достатньо скористатися заміною аргументу

$$t = \ln(x - \alpha) .$$

Загальний розв’язок цієї системи має вигляд

$$Y = e^{A \ln(x-\alpha)} C = (x-\alpha)^A C .$$

До матричних квадратур зводяться розв’язки багатьох інших систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, зокрема — **систем другого порядку**

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j = q_i(x) , \quad i = \overline{1, n} ,$$

або

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + BY = Q(x) . \tag{8.18}$$

Справді, можна пересвідчитися, що за умов

$$Y(x_0) = Y_0 , \quad \frac{dY(x_0)}{dx} = \dot{Y}_0$$

розв’язком матричного рівняння (8.18) є матрична функція

$$Y = \cos\left(\sqrt{B}(x-x_0)\right) Y_0 +$$

$$+ \left(\sqrt{B}\right)^{-1} \sin\left(\sqrt{B}(x-x_0)\right) \dot{Y}_0 + \left(\sqrt{B}\right)^{-1} \int_{x_0}^{x} \sin\left(\sqrt{B}(x-s)\right) Q(s)\, ds ,$$

де слід читати (в першу чергу, коли $|B| = 0$)

$$\cos\left(\sqrt{B}(x-x_0)\right) = E - \frac{1}{2!} B (x-x_0)^2 + \frac{1}{4!} B^2 (x-x_0)^4 - + \ldots ,$$

$$\left(\sqrt{B}\right)^{-1} \sin\left(\sqrt{B}(x-x_0)\right) = E(x-x_0) - \frac{1}{3!} B (x-x_0)^3 + \frac{1}{5!} B^2 (x-x_0)^5 - + \ldots ;$$

під $\sqrt{B}$ слід розуміти будь-яку матрицю, квадратом якої є матриця B ($\sqrt{B}$ існує завжди, якщо $|B| \neq 0$).

8.3 Еквівалентний вхід лінійної системи

Звернімося до [22]. Нехай ідеться про диференціальне рівняння (систему першого порядку)

$$\dot{x} = P(t)x\,,\ t \in T = [0, T]\,, \tag{8.19}$$

де P — неособлива ($\det P \neq 0$) матриця зі змінними неперервними та диференційовними в проміжку T елементами $p_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$. Поставмо йому у відповідність рівняння з входом

$$\dot{x} = Ax + Q(t)\,, \tag{8.20}$$

де $A = \| a_{ij} \|_1^n$ — матриця зі сталими елементами; $Q(t)$ — обмежений за модулем вектор вільних функцій, який і представляє собою власне вхід системи. Вимагатимемо, щоб рівняння (8.19) та (8.20) були динамічно еквівалентними між собою. А це означає, що повинна дотримуватись умова

$$Q(t) = (P(t) - A)x \tag{8.21}$$

(згадаймо, загально про поняття такого еквівалентного, узагальненого входу $Q(t)$ системи вже йшлося в 2.6).

Розв'язок рівняння (8.20) подамо у вигляді

$$x = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Q(\tau)\,d\tau\,, \tag{8.22}$$

де x_0 — стовпець початкових умов. За задумом розв'язок (8.22) повинен задовольняти як диференціальне рівняння (8.19), так і матричне рівняння (8.21). Тож, замінюючи стовпець x в рівнянні (8.21) його значенням (8.22), матимемо співвідношення

$$Q(t) = \big(P(t) - A\big)\left[e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Q(\tau)\,d\tau\right]$$

або

$$Q(t) - \big(P(t) - A\big)e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Q(\tau)\,d\tau = \big(P(t) - A\big)e^{At}x_0\,. \tag{8.23}$$

Вводячи матрицю

$$\big(P(t) - A\big)e^{At} = L(t)\,. \tag{8.24}$$

і помножуючи рівняння (8.23) зліва на матрицю $L^{-1}(t)$, дійдемо співвідношення

$$L^{-1}(t)Q(t)-\int_0^t e^{-A\tau}L(\tau)L^{-1}(\tau)Q(\tau)\,d\tau=x_0. \tag{8.25}$$

Тут враховано, що

$$L^{-1}(t)L(t)=E$$

(E — одинична матриця).

Якщо ще й покласти

$$L^{-1}(t)Q(t)=\Psi(t), \tag{8.26}$$

то рівняння (8.25) набуде вигляду

$$\Psi(t)-\int_0^t e^{-A\tau}L(\tau)\Psi(\tau)\,d\tau=x_0. \tag{8.27}$$

Нове рівняння (8.27) є інтегральним відносно невідомої вектор-функції $\Psi(t)$. Його ядро — матрична функція

$$K(t)=e^{At}L(t),$$

Таким чином, вірним є співвідношення

$$\Psi(t)-\int_0^t K(\tau)\Psi(\tau)\,d\tau=x_0. \tag{8.28}$$

Оскільки вибір матриці A у певному сенсі не регламентований, то вона може бути визначена так, щоб всі розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$\dot{x}=Ax$$

були обмеженими. До того ж, покладаючи

$$\int_0^\infty \|P(t)\|\,dt<\infty,$$

можна записати, що

$$\|\Psi(t)\|\le\|x_0\|+\int_0^t\|K(\tau)\|\|\Psi(\tau)\|\,d\tau\le k_1+k_1\int_0^t\|K(\tau)\|\,d\tau,$$

де k_1 — довільна додатна стала. В такому разі (див. [22])

$$\|\Psi(t)\|\le k_1\exp\left(\int_0^t\|K(\tau)\|\,d\tau\right).$$

І якщо б існував який-небудь інший (такий, що не збігається з $\Psi(t)$) розв'язок $\Psi^*(t)$ рівняння (8.28), то справджувалося б співвідношення

$$\left\|\Psi(t)-\Psi^*(t)\right\| \le k_1 + \int_0^t \|K(\tau)\| \left\|\Psi(\tau)-\Psi^*(\tau)\right\| d\tau \le k_1 \exp\left(\int_0^t \|K(\tau)\| d\tau\right).$$

Оскільки остання нерівність повинна справджуватись для кожного додатного числа k_1, то випливає, що

$$\left\|\Psi(t)-\Psi^*(t)\right\| = 0,$$

а отже,

$$\Psi(t) = \Psi^*(t).$$

Таким чином, за окреслених раніше умов розв'язок інтегрального рівняння (8.27) існує і є єдиним.

Вважатимемо тепер, що рівняння (8.27) розв'язане (і визначена функція $\Psi(t)$). В такому разі (див. (8.26)) відомо, що

$$Q(t) = L(t)\Psi(t).$$

Беручи ж до уваги (8.24), можна писати:

$$Q(t) = \left(P(t)-A\right)e^{At}\Psi(t). \tag{8.29}$$

Тож, рівняння (8.20) є підстави подати у вигляді

$$\dot{x} = Ax + (P(t)-A)e^{At}\Psi(t), \tag{8.30}$$

де заданий раніше функцією $Q(t)$ вхід, замінено на вираз (8.29). Загальний розв'язок диференціального рівняння (8.30) набуває вигляду

$$x = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\left(P(t)-A\right)e^{At}\Psi(\tau)d\tau. \tag{8.31}$$

Натомість, з інтегрального рівняння (8.27) випливає, що

$$\int_0^t e^{-A\tau}\left(P(t)-A\right)e^{At}\Psi(\tau)\,d\tau = \Psi(\tau) - x_0,$$

а тому вираз (8.31) зводиться до рівності

$$x = e^{At}\Psi\left(t\right). \tag{8.32}$$

Функція (8.32) повинна тотожно задовольняти диференціальне рівняння (8.19). Тож, для всіх $t \in T$

$$Ae^{At} + e^{At}\Psi(t) \equiv P(t)e^{At}\Psi(t).$$

Звідси випливає, що функція $\Psi(t)$ повинна задовольняти диференціальне рівняння

$$\dot{\Psi}(t) = e^{-At}(P(t) - A)e^{At}\Psi(t). \tag{8.33}$$

Диференціюючи за t інтегральне рівняння (8.27), знаходимо, що

$$\Psi(t) = e^{-At}L(t)\Psi(t),$$

а підставляючи в цей вираз значення $L(t)$ з рівняння (8.24), матимемо диференціального рівняння (8.33).

Таким чином, доходимо такого загального висновку: щоби диференціальне рівняння (8.19) зі змінною матрицею $P(t)$ зводилась до диференціального рівняння (8.20) зі сталою матрицею A та входом $Q(t)$, необхідно й достатньо існування та єдиності розв'язку (8.32), який тоді тотожно задовольняє рівняння (8.19), коли $\Psi(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння (8.27) за відповідних обмежень, накладених на матриці A і P.

8.4 Приклад аналітичної побудови еквівалентного входу

Матриці в певному сенсі є особливими математичними об'єктами через властивості, які вони виявляють при множенні. При множенні матриці A на число λ необхідно множити на λ кожен її елемент, тоді як при множенні визначника $\det A$ цієї матриці на число λ треба множити на λ лише який-небудь чи стовпець, чи рядок. Добуток довільних матриць A та B (на відміну від дійсних чи комплексних чисел, а отже й визначників $\det A$ та $\det B$ цих матриць) загалом залежить від порядку множення:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Лише в особливих випадках

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Тоді кажуть, що матриці комутують, є перестановними. Наприклад, кожна матриця комутує з числом. Скалярна матриця комутує з кожною квадратною матрицею того самого порядку. Справді, якщо

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{Vmatrix}, \tag{8.34}$$

то

$$A\Lambda = \Lambda A = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{8.35}$$

Таким чином, матриця Λ веде себе як скаляр λ.

Коли $\lambda = 1$, з (8.34), (8.35) випливає, що $\Lambda\big|_{\lambda=1} = E$ і $AE = EA = A$. Тож, (одинична) матриця E при множенні матриць відіграє ту саму роль, що й число 1 при множенні чисел.

До матриць застосовні звичайні правила диференціювання. Якщо матриця A і число α сталі, то

$$\frac{dA}{dx} = 0, \quad \frac{d(AZ)}{dx} = A\frac{dZ}{dx}, \quad \frac{d(\alpha Z)}{dx} = \alpha\frac{dZ}{dx},$$

$$\frac{d(Z_1 + Z_2)}{dx} = \frac{dZ_1}{dx} + \frac{dZ_2}{dx}, \quad \frac{d(Z_1 Z_2)}{dx} = \frac{dZ_1}{dx}Z_2 + Z_1\frac{dZ_2}{dx}.$$

Остання з наведених формул (в якій множники, звісно, переставляти не можна) застосовна до цілого додатного степеня матриці $Z(x)$ так:

$$\frac{dZ^2}{dx} = \frac{d(ZZ)}{dx} = \frac{dZ}{dx}Z + Z\frac{dZ}{dx},$$

$$\frac{dZ^3}{dx} = \frac{d(Z^2 Z)}{dx} = \frac{dZ^2}{dx}Z + Z^2\frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dx}Z^2 + Z\frac{dZ}{dx}Z + Z^2\frac{dZ}{dx}, \ \ldots,$$

$$\frac{dZ^m}{dx} = \sum_{i=0}^{m} Z^k \frac{dZ}{dx} Z^{m-k-1}.$$

Ці не дуже привабливі формули значно спрощуються, якщо $Z(x)$ комутує зі своєю похідною:

$$\frac{dZ}{dx}Z = Z\frac{dZ}{dx}. \tag{8.36}$$

В такому разі чинним стає звичайнісіньке правило диференціювання степеневої функції:

$$\frac{dZ^m}{dx} = mZ^{m-1}\frac{dZ}{dx} .$$

Похідну від оберненої матриці $Z^{-1}(x)$ можна віднайти, вдаючись до диференціювання тотожності

$$Z(x)\,Z^{-1}(x) = E .$$

Тож,

$$\frac{dZ}{dx}Z^{-1} + Z\frac{dZ^{-1}}{dx} = 0 ,$$

звідки

$$\frac{dZ^{-1}}{dx} = -Z^{-1}\frac{dZ}{dx}Z^{-1}$$

Очевидно, що $\dfrac{dZ^{-1}}{dx}$ існує у всіх точках, де існує $\dfrac{dZ}{dx}$ і де $\det Z \neq 0$. Якщо справджується умова комутативності (8.36), то

$$Z^{-1}\frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dx}Z^{-1} \text{ і } \frac{dZ^{-1}}{dx} = -Z^{-2}\frac{dZ}{dx} .$$

Важливою конструкцією є **степеневий матричний ряд**

$$E + Z + \frac{Z^2}{2!} + \ldots + \frac{Z^\nu}{\nu!} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{Z^\nu}{\nu!} = e^Z , \qquad (8.37)$$

суму якого за означенням визнано за **експонентну функцію від матриці** $Z(x)$.

Можна з’ясувати, що якщо матриця A комутує з матрицею B , то

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} .$$

У разі діагональної матриці

$$Z = \| a_1, a_2, \ldots, a_n \| = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{Vmatrix} ,$$

оскільки

$$\| a_1, a_2, \ldots, a_n \|^{\nu} = \| a_1^{\nu}, a_2^{\nu}, \ldots, a_n^{\nu} \| ,$$

матимемо:

$$e^{\| a_1, a_2, \ldots, a_n \|} = \| e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{a_n} \|$$

(експонентна функція від діагональної матриці — це діагональна матриця, елементами (діагональними) якої є відповідні експонентні функції (скалярні)). Подібно, якщо $Z(x)$ є квазідіагональною матрицею, тобто

$$Z = \| A_1, A_2, \ldots, A_s \| = \left\| \begin{matrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_s} \end{matrix} \right\| ,$$

то, оскільки

$$\| A_1, A_2, \ldots, A_s \|^{\nu} = \| A_1^{\nu}, A_2^{\nu}, \ldots, A_s^{\nu} \| ,$$

матимемо:

$$e^{\| A_1, A_2, \ldots, A_s \|} = \| e^{A_1}, e^{A_2}, \ldots, e^{A_s} \| .$$

Нехай $Z(x)$ — диференційовна за x матриця. Тоді існує похідна від матричної функції e^Z за x, визначувана як почленна похідна від ряду (8.37):

$$\frac{d}{dx} e^Z = \frac{d}{dx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Z^{\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{dZ^{\nu}}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{r=0}^{r-1} Z^r \frac{dZ}{dx} Z^{\nu-r-1} .$$

Але якщо $Z(x)$ комутує зі своєю похідною (див. (8.36)), то

$$\frac{d}{dx} e^Z = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Z^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \frac{dZ}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Z^{\nu}}{\nu!} \frac{dZ}{dx} = e^Z \frac{dZ}{dx} .$$

Повернімося до основного питання. Розв'язок рівняння (8.27), хоч він існує і є єдиним, в замкнутій формі можна побудувати тільки в окремих випадках. Такі окремі випадки загалом не відрізняються від тих відомих, що в свій час віднайшов М. Єругін. Розгляньмо лише деякі з них, покладаючись на [22].

Використаймо властивості комутативності та діагональності матриць.

Звернімося до матриці

$$e^{-At}(P(t)-A)e^{At} = G(t)$$

чи

$$G = e^{-At}P(t)e^{At} - e^{-At}Ae^{At}. \tag{8.38}$$

Оскільки матриці A і e^{At} перестановні, то з рівняння (8.38) випливає рівність

$$P = e^{At}G(t)e^{-At} + A.$$

Вважатимемо ще, що матриці A і P також є перестановними. Тож будуть комутувати між собою й матриці P та e^{At}. З рівняння (8.38) випливає, що

$$P = G + A. \tag{8.39}$$

Припустімо далі, що матриця G — діагональна:

$$G = \begin{Vmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{Vmatrix},$$

В такому разі

$$P = \begin{Vmatrix} g_{11}+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & g_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & g_{nn}+a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

На підставі рівності (8.39) диференціальне рівняння (8.19) набуває вигляду

$$\dot{x} = Gx + Ax.$$

Оскільки за домовленістю $AP = PA$, то з урахуванням рівності (8.39)

$$(G+A)A = A(G+A),$$

або

$$GA = AG. \tag{8.40}$$

Аналізуючи (8.40) в розгорнутому вигляді

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{Vmatrix},$$

доходимо висновку, що комутативність досягається за умови

$$g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{nn}.$$

Диференціальне рівняння (8.33) набуває вигляду

$$\dot{\Psi}(t) = G\Psi(t). \tag{8.41}$$

Оскільки G за домовленістю є діагональною матрицею, то

$$\dot{\Psi}_1(t) = g_{11}\Psi_1(t),\ \dot{\Psi}_2(t) = g_{22}\Psi_2(t), \ldots,\ \dot{\Psi}_n(t) = g_{nn}\Psi_n(t).$$

Звідси

$$\Psi(t) = \begin{Vmatrix} e^{\int g_{11}dt} x_{10} \\ e^{\int g_{11}dt} x_{20} \\ \vdots \\ e^{\int g_{11}dt} x_{n0} \end{Vmatrix}.$$

де $x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0}$ — сталі. Або стисло

$$\Psi(t) = e^{\int g_{11}dt} x_0.$$

В такому разі на підставі розв’язку (8.32)

$$x = e^{At} e^{\int g_{11}dt} x_0,$$

де

$$x_0 = \begin{Vmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{Vmatrix}.$$

Беручи до уваги диференціальне рівняння (8.30), можна стверджувати, що еквівалентне неоднорідне рівняння буде таким:

$$\dot{x} = Ax + Ge^{At} e^{\int g_{11} dt} x_0 .$$

При цьому, відповідно до рівняння (8.29), еквівалентний вхід відбиває в собі вираз

$$F(t) = G e^{At} e^{\int g_{11} dt} x_0 .$$

8.5 Про звідні системи

Нехай йдеться про систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t) x_j \quad (i = \overline{1,n}) \tag{8.42}$$

з неперервними обмеженими в проміжку $I_\infty = [t_0, \infty)$ коефіцієнтами $p_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1,n})$. У матричній формі ця система має вигляд

$$\frac{dX}{dt} = P(t) X . \tag{8.43}$$

Замість x_1, x_2, …, x_n (див. (8.42)) введімо нові невідомі функції y_1, y_2, …, y_n від змінної t, вдаючись до перетворення

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t) y_j \quad (i = \overline{1,n}) \tag{8.44}$$

або

$$X = H(t) Y \quad (H(t) = \| h_{ij}(t) \|_{n \times n}), \tag{8.45}$$

щодо якого висунуто вимоги:

1° матриця $H(t)$ має неперервну похідну $\dfrac{dH(t)}{dt}$ у проміжку $I_\infty = [t_0, \infty)$;

2° $H(t)$ і $\dfrac{dH(t)}{dt}$ обмежені в $I_\infty = [t_0, \infty)$;

3° існує стала μ така, що

$$0 < \mu < |\det H(t)|, \ t \geq t_0$$

(визначник $\det H(t)$ здолу обмежений додатною сталою μ).

Таке перетворення називають **перетворенням Ляпунова**. Зокрема, під ознаки 1° — 3° підпадає невироджене перетворення зі сталими коефіцієнтами ($H = \text{const}$, $\det H \neq 0$) і, отже, воно є перетворенням Ляпунова; таким є також перетворення $H(t) = e^{Dt}$, в якому $D = ||d_{ij}||_{n\times n}$ — матриця простої структури з суто уявними характеристичними числами.

Можна перевірити, що властивості 1° — 3° матриці $H(t)$ гарантують існування оберненої матриці $H^{-1}(t)$, і що ця обернена матриця також задовольняє властивості 1° — 3°. Отже перетворення, обернене до перетворення Ляпунова, також є перетворенням Ляпунова. Можна пересвідчитися і в тому, що два послідовні перетворення Ляпунова в підсумку дають перетворення Ляпунова.

Результатом перетворення (8.44) системи (8.42) буде нова система

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t)\, y_j \quad (i = \overline{1,n}). \tag{8.46}$$

Між розв'язками систем (8.46) і (8.42) існує взаємна однозначна відповідність, при цьому лінійна незалежність розв'язків однієї системи зберігається і після перетворення її в іншу. Отже перетворення Ляпунова зводить фундаментальну матрицю X системи (8.42) до деякої фундаментальної матриці Y системи (8.46) так, що задовольняється рівність (8.45). Якщо нульовий розв'язок системи (8.46), отриманої зі системи (8.42) через перетворення (8.44), є стійким, асимптотично стійким, нестійким за Ляпуновим, то таку саму властивість має і нульовий розв'язок первісної системи (8.42). Такого штибу перетворення є корисними для дослідження стійкості, коли похідна система (8.46) є простішою за первісну (8.42).

Таким чином, рівнянню (8.43) можна поставити у відповідність рівняння

$$\frac{dY}{dt} = G(t)Y, \tag{8.47}$$

в якому $G(t) = ||g_{ij}||_{n\times n}$ — матриця коефіцієнтів системи (8.46). Підставляючи (8.45) в (8.43) і порівнюючи отриманий результат з (8.47), доходимо висновку, що

$$G(t) = H^{-1}PH - H^{-1}\frac{dH}{dt}.$$

Система (8.42) називається **звідною**, якщо існує матриця Ляпунова Z (обмежена разом з матрицею $\frac{dZ}{dx}$ і визначником $\det(Z^{-1})$), така, що підстановка

$$Y = ZX ,$$

зводить рівняння (8.43) до рівняння

$$\frac{dY}{dt} = BY \tag{8.48}$$

зі сталою матрицею B коефіцієнтів. Інакше кажучи, система (8.42) є звідною, якщо існує лінійне перетворення

$$y_1 = z_{11}(t)\,x_1 + z_{12}(t)\,x_2 + \ldots + z_{1n}(t)\,x_n ,$$

$$y_2 = z_{21}(t)\,x_1 + z_{22}(t)\,x_2 + \ldots + z_{2n}(t)\,x_n ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = z_{n1}(t)\,x_1 + z_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + z_{nn}(t)\,x_n ,$$

де коефіцієнти перетворення $z_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ є функціями, обмеженими разом зі своїми похідними і визначником зворотного перетворення, таке, що нові невідомі y_1, y_2, …, y_n задовольняють систему рівнянь

$$\frac{dy_1}{dt} = b_{11}\,y_1 + b_{12}\,y_2 + \ldots + b_{1n}\,y_n ,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = b_{21}\,y_1 + b_{22}\,y_2 + \ldots + b_{2n}\,y_n ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = b_{n1}\,x_1 + b_{n2}\,x_2 + \ldots + b_{nn}\,x_n$$

зі сталими коефіцієнтами b_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$. Виявляється, якщо не вимагати обмеженості від матриці Z прямого і матриці Z^{-1} оберненого перетворень, то система (8.42) завжди зводиться до системи зі сталими коефіцієнтами.

Зауважмо, що переймаючись лише проблемою стійкості руху системи, А. Ляпунов оперував поняттям зведеності диференційних рівнянь не як засобом їх розв’язування, а лиш як способом опосередкованої оцінки властивостей цієї системи. Тому, зокрема, при з’ясовуванні існування ознак зведеності достатньо було припустити, що відома фундаментальна система розв'язків первісного рівняння. Через це, навіть у разі знаходження розв'язку системи в квадратурах, її зведеність не завжди простежується. Особливої ваги поняттю зведеності надав Н. Єругін.

Разом з **Єругіним** наведімо важливу **першу теорему** такого змісту.

Для того, щоб система (8.43) $\frac{dX}{dt} = P(t)X$ була звідною до системи (8.48) $\frac{dY}{dt} = BY$ зі сталою матрицею B, необхідно і достатньо, щоби матриця розв'язків системи (8.43) мала структуру

$$X = Z(t)\, e^{Bt}$$

(Z — матриця, обмежена разом з матрицею $\frac{dZ}{dt}$ і визначником $\det Z^{-1}$).

Друга теорема Єругіна окреслює ще один критерій зведеності.

Для зведення через перетворення $Y = XZ$ системи диференціальних рівнянь зі змінними неперервними і обмеженими коефіцієнтами $p_{ij}(t)$ ($i, j = \overline{1, n}$), що в матричній формі має вигляд

$$\frac{dX}{dt} = X\,P(t) \quad (P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{n\times n}),$$

до системи зі сталими коефіцієнтами b_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$), що у матричній формі має вигляд

$$\frac{dY}{dt} = YB \quad (B = \| b_{ij} \|_{n\times n}),$$

необхідно й достатньо, щоб існувала така стала матриця B, для якої справджується рівність

$$\int_0^t \mathrm{Sp}(P)\,dt = t\,\mathrm{Re}\big(\mathrm{Sp}(B)\big) + \varepsilon(t),$$

де $\mathrm{Sp}(P) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}$ і $\mathrm{Sp}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ — суми діагональних елементів матриць P і B (сліди цих матриць); Re — знак дійсної частини числа; $\varepsilon(t)$ — обмежена величина. Звідси випливає, що для зведених систем повинна існувати скінченна границя

$$a = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}(P)\,dt\,.$$

Визначення матриці B у загальному випадку пов'язане зі значними труднощами. Разом з тим, існують окремі випадки, коли зведення системи здійснюване порівняно легко: коли матриця P комутує зі своїм інтегралом, тобто має властивість

$$P\int Pdt = \int Pdt\, P\,;$$

коли система має другий порядок і можна знайти який-небудь обмежений розв'язок еквівалентного рівняння Ріккаті; коли матриця P періодична.

Цікавим є також поняття асимптотичної еквівалентності лінійних динамічних систем. З'ясовано, зокрема (Ю. Богданов), що система диференціальних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами асимптотично еквівалентна „кусково-сталій" системі, коефіцієнти якої набувають лише двох значень.

8.6 Зведення систем із залученням динамічного входу

Зведення динамічної системи в тій чи іншій мірі провокує зміну її структури. Звісно, ще суттєвіше можна вплинути на структуру системи, формуючи відповідний еквівалентний вхід. Особливості зведення систем диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами до систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, але таких, що містять вхід, тобто деяку додаткову залежну від аргумента функцію $F(t)$, простежмо, звертаючись до [22].

Нехай задано лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dX}{dt} = XP\,, \tag{8.49}$$

де

$$P(t) = \begin{Vmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{Vmatrix}$$

— матриця змінних коефіцієнтів системи, неперервних у заданому проміжку (t_0, t_1), а

$$X = \begin{Vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{Vmatrix}$$

— матриця фундаментальної системи розв'язків цього рівняння.

Система (8.49) за допомогою перетворення

$$X = YZ \tag{8.50}$$

де

$$Z = \begin{Vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{Vmatrix}$$

— неособлива матриця, елементи якої також є неперервними функціями від аргументу t, може бути зведена до рівняння

$$\frac{dY}{dt} = YB, \tag{8.51}$$

де

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

— стала матриця, а

$$Y = \begin{Vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{Vmatrix}$$

— матриця фундаментальної системи розв'язків рівняння (8.51), в тому і тільки тому разі, коли існує матриця

$$Z^{-1} = \int_0^t e^{-B\tau} F(\tau)\, d\tau + C_1, \tag{8.52}$$

де C_1 — стала матриця;

$$F(t) = \begin{Vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{Vmatrix}$$

— матриця вільних функцій рівняння

$$\frac{dX}{dt} = XB + F, \tag{8.53}$$

яка визначається з умови збігання розв'язків рівнянь (8.53) та (8.49) для однакових початкових умов; при цьому матриці B та Z^{-1}, або B та Z, повинні комутувати між собою.

Пересвідчитися у вірності наведеного твердження можна таким чином.

Задамо початкові умови у вигляді

$$X(t)\big|_{t=0} = X(0) = E$$

(E — одинична матриця) і вимагатимемо, щоб розв'язки диференціальних рівнянь (8.49), (8.53) та перші похідні від них збігались.

Тотожність лівих частин (8.49) та (8.53) веде до рівності

$$F = X(P - B)\,. \tag{8.54}$$

Притім, розв'язок однорідного рівняння (8.53) (за відсутності F), визначає формула

$$X = e^{Bt}C\,, \tag{8.55}$$

де C — стала матриця. Визначатимемо цю матрицю методом варіації довільних сталих. Тож,

$$\frac{dX}{dt} = e^{Bt}BC + e^{Bt}\frac{dC}{dt} = e^{Bt}CB + F$$

або

$$e^{Bt}\frac{dC}{dt} = F\,.$$

Звідси

$$C = \int_0^t e^{-B\tau}F(\tau)d\tau + C_1,$$

де C_1 — довільна стала матриця.

Підставляючи знайдене значення C у (8.55), матимемо:

$$X = e^{-Bt}\left[\int_0^t e^{-B\tau}F(\tau)d\tau + C_1\right]. \tag{8.56}$$

Оскільки розв'язок рівняння (8.51) при $Y(0) = E$ має вигляд

$$Y = e^{Bt}\,,$$

то

$$X = Y\left[\int_0^t e^{-B\tau}F(\tau)\,d\tau + C_1\right]. \tag{8.57}$$

Перемножуючи (8.50) праворуч на матрицю Z^{-1}, знаходимо, що

$$X = YZ^{-1}. \tag{8.58}$$

Порівнюючи цю формулу з розв'язком (8.57) та задовольняючи умову висловленого твердження, доходимо співвідношення

$$Z^{-1} = \int_0^t e^{B\tau} F(\tau)\, d\tau + C_1. \tag{8.59}$$

Таким чином, умова (8.52) є необхідною. Засвідчімо, що ця умова є також і достатньою за певного добору матриці B. Підставмо (8.59) в (8.58):

$$X = Y\left[\int_0^t e^{-B\tau} F(\tau)\, d\tau\right]. \tag{8.60}$$

Диференціюючи рівність (8.60) за t, отримаємо:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Y\left(\int_0^t e^{-B\tau} F(\tau)\, d\tau + C_1\right)\right] = \frac{dY}{dt}\left[\int_0^t e^{-B\tau} F(\tau)\; d\tau + C_1\right] + Ye^{-B\tau} F\ . \tag{8.61}$$

Зважаючи на те, що $\dfrac{dX}{dt} = XP = YZ^{-1}P$, і беручи до уваги (8.59), рівняння (8.61) подамо у вигляді

$$YZ^{-1}P = \frac{dY}{dt} Z^{-1} + Ye^{-Bt} F\ .$$

Таким чином,

$$\frac{dY}{dt} = Y\left(Z^{-1}P - e^{-Bt} F\right) Z\ . \tag{8.62}$$

Звернімо увагу на співвідношення

$$\left(Z^{-1}P - e^{-Bt} F\right) Z = Z^{-1}PZ - e^{-Bt} FZ\ .$$

Враховуючи умову (8.54), маємо:

$$Z^{-1}PZ - e^{-Bt} FZ = Z^{-1}PZ - e^{-Bt} X(P - B)Z = Z^{-1}PZ - e^{-Bt} XPZ + e^{-Bt} XBZ\ .$$

Підставляючи в цей вираз замість матриці X її значення (8.56)

$$X = e^{Bt} Z^{-1},$$

отримаємо

$$\left(Z^{-1}P - e^{Bt}F\right)Z = Z^{-1}PZ - Z^{-1}PZ + Z^{-1}BZ = Z^{-1}BZ\ .$$

В цьому випадку рівняння (8.62) набуває такого вигляду:

$$\frac{dY}{dt} = YZ^{-1}BZ\ .$$

Оскільки, відповідно до висунутого в аналізованому твердженні умови, матриці Z^{-1} та B або B та Z зобов’язані бути перестановними, то

$$\frac{dY}{dt} = YB\ .$$

Таким чином, умова (8.52) є одночасно і достатньою для того, щоб рівняння (8.49) через перетворення (8.50) зводилося до (8.51). А це означає, що рівняння (8.49) одночасно зводиться до рівняння (8.53).

Розгляньмо примітивний приклад з [22]. Нехай ідеться про систему диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2\,,\ \frac{dx_2}{dt} = (\mathrm{ctg}t)x_2\ .$$

Матриця коефіцієнтів цієї системи

$$P(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{ctg}t \end{Vmatrix}$$

неперервна і диференціюється на всій числовій вісі. Правда, елемент $\mathrm{ctg}t$ матриці має властивість необмежено зростати. Необхідно диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x\ ,\ \ x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix},$$

звести до рівняння

$$\frac{dx}{dt} = Bx + F(t)\,,\ B = \mathrm{const}\,.$$

У випадку системи другого порядку матрицю B зручно вибрати такою:

$$B = \alpha iE\ ,$$

де $i = \sqrt{-1}$, α — довільне дійсне число.

Фундаментальна матриця первісної системи має вигляд

$$X = \begin{Vmatrix} -c_1 \cos t + c_1' & -c_2 \cos t + c_2' \\ c_1 \sin t & c_2 \sin t \end{Vmatrix}.$$

Тож, при $\alpha \neq 1$ $(\alpha < 0)$

$$F(t) = \begin{Vmatrix} c_1 \sin t & c_2 \sin t \\ c_1 \cos t & c_2 \cos t \end{Vmatrix} + \alpha i \begin{Vmatrix} -c_1 \cos t + c_1' & -c_2 \cos t + c_2' \\ c_1 \sin t & c_2 \sin t \end{Vmatrix}.$$

Вдаючись до формул

$$\int e^{\alpha i t} \sin bt\, dt = \frac{e^{\alpha i t}}{a^2 - b^2}(b \cos bt - \alpha i \sin bt),$$

$$\int e^{\alpha i t} \cos bt\, dt = \frac{-e^{\alpha i t}}{a^2 - b^2}(b \sin bt + \alpha i \cos bt),$$

знайдемо:

$$Z^{-1} = \int F(t) e^{i\alpha t} dt = \begin{Vmatrix} c_1 \dfrac{e^{\alpha i t}}{a^2 - 1}(\cos t - \alpha i \sin t) & c_2 \dfrac{e^{\alpha i t}}{a^2 - 1}(\cos t - \alpha i \sin t) \\ c_1 \dfrac{e^{\alpha i t}}{a^2 - 1}(-\sin t - \alpha i \cos t) & c_2 \dfrac{e^{\alpha i t}}{a^2 - 1}(-\sin t - \alpha i \cos t) \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} \dfrac{c_1 e^{\alpha i t}}{a^2 - 1}(\sin t + \alpha i \cos t) - c_1' i e^{\alpha i t} & \dfrac{c_2 e^{\alpha i t}}{a^2 - 1}(\sin t + \alpha i \cos t) - c_2' i e^{\alpha i t} \\ \dfrac{c_1 e^{\alpha i t}}{a^2 - 1}(\cos t - \alpha i \sin t) & \dfrac{c_2 e^{\alpha i t}}{a^2 - 1}(\cos t - \alpha i \sin t) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -c_1 \cos t + c_1' & -c_2 \cos t + c_2' \\ c_1 \sin t & c_1 \sin t \end{Vmatrix} e^{\alpha i t}.$$

Формула (8.50) дає вираз

$$X = Z^{-1} Y = Z^{-1} e^{-\alpha i t},$$

що збігається з наведеною раніше фундаментальною матрицею. При цьому

$$Z^{-1} = X Y^{-1}.$$

Матриця перетворення повинна мати обернену матрицю:

$$Z = \frac{1}{c_1'c_2 - c_1c_2'}\begin{Vmatrix} c_2 & c_2\mathrm{ctg}t - \dfrac{c_2'}{\sin t} \\ -c_2 & c_1\mathrm{ctg}t - \dfrac{c_1'}{\sin t} \end{Vmatrix} e^{-\alpha it}.$$

Тож, $c_1'c_2 - c_1c_2' \neq 0$.

Таким чином, зведення первісної системи можливе за дотримання умов

$$\left| c_2\mathrm{ctg}t - \frac{c_2'}{\sin t} \right| \le b_1, \quad \left| c_1\mathrm{ctg}t + \frac{c_1'}{\sin t} \right| \le b_2,$$

де b_1 та b_2 — деякі дійсні додатні числа. Оскільки c_1, c_2, c_1', c_2' є довільними, то останні нерівності справджуються на всій числовій восі.

8.7 Зведення диференціального рівняння з вищими похідними

Спробуймо віднайти розв'язок **диференціальної задачі зі сталими дійсними коефіцієнтами**

$$p_0y^{(n)}(x) + p_1y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}y'(x) + p_ny(x) = q(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{8.63}$$

($q(x)$ — відома неперервна функція) у формі функції

$$y(x) = F_n(x) + R_n(x),$$

де $F_n(x)$ — деяка функція заданої структури, $R_n(x)$ — наперед невідома функція. Сподіваючись, що функція $F_n(x)$ може виявитись задовільно якісним **наближеним розв'язком диференціальної задачі** (8.63), $R_n(x)$ тлумачитимемо як **функцію невідповідності** між наближеним $F_n(x)$ і точним $y(x)$ розв'язками цієї задачі.

Накладемо на функцію $y(x)$ умови

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

і основну її складову $F_n(x)$ подамо у вигляді (див. також 1.4 та 8.1)

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{ri}(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}_r}, \tag{8.64}$$

де

$$\overset{n}{\Delta}_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad \overset{n}{\Delta}_{r1}(x-x_0) = \begin{vmatrix} e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\ldots, \; \overset{n}{\Delta}_{rj}(x-x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{j-1} & r_2^{j-1} & \cdots & r_n^{j-1} \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \\ r_1^{j+1} & r_2^{j+1} & \cdots & r_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}, \; \ldots,$$

$$\overset{n}{\Delta}_{rn}(x-x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2} \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \end{vmatrix};$$

r_1, r_2, …, r_n — довільні комплексні числа, які, зокрема, можуть бути коренями деякого алгебричного рівняння

$$P[r] = P[r,b] \equiv r^n + b_1 r^{n-1} + \cdots + b_{n-1} r + b_n = 0 \tag{8.65}$$

(b_1, b_2, …, b_n — дійсні числа).

Зауважмо, у разі $r_1 \to 0$, $r_2 \to 0$, …, $r_n \to 0$ функція (8.64) перетворюється в частину ряду Тейлора (у суму степенів різниці $x - x_0$).

Беручи $y(x)$ за розв'язок задачі (8.63), матимемо (див. (8.64))

$$R_n(x) = y(x) - \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{ri}(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}_{r}} . \tag{8.66}$$

Зафіксуймо тепер довільне значення x і на зразок правої частини (8.66), замінюючи число(!) x_0 на змінну(!) s, укладімо допоміжну функцію

$$\xi(s) = y(x) - \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{ri}(x - s)}{\overset{n}{\Delta}_{r}} , \tag{8.67}$$

вважаючи, що незалежна змінна s перебігає проміжок $[x_0, x]$. Очевидно, що на краях цього проміжку допоміжна функція (8.67) набуває значень

$$\xi(x_0) = R_n(x) , \quad \xi(x) = 0 .$$

До того ж, існує похідна

$$\xi'(s) = \frac{d\xi(s)}{ds} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{y_0^{(i-1)}}{\overset{n}{\Delta}_{r}} \frac{\partial \overset{n}{\Delta}_{ri}(x - s)}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_0^{(i-1)}}{\overset{n}{\Delta}_{r}} \frac{\partial \overset{n}{\Delta}_{ri}(x - s)}{\partial x} . \tag{8.68}$$

Тому можна писати:

$$\int_{x_0}^{x} d\xi = \xi(x) - \xi(x_0) = -R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \xi'(s)\, ds .$$

Звідси (див. (8.68))

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_0^{(i-1)}}{\overset{n}{\Delta}_{r}} \frac{\partial \overset{n}{\Delta}_{ri}(x - s)}{\partial s} ds = -\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_0^{(i-1)}}{\overset{n}{\Delta}_{r}} \frac{\partial \overset{n}{\Delta}_{ri}(x - s)}{\partial x} ds . \tag{8.69}$$

Нехай r_1, r_2, …, r_n — комплексні числа, що є коренями алгебричного рівняння (8.65). В такому разі побудову функції невідповідності $R_n(x)$ можна здійснити також із застосуванням функції

$$\xi(s) = y^{(n)}(s) + b_1 y^{(n-1)}(s) + \ldots + b_{n-1} y'(s) + b_n y(s) , \tag{8.70}$$

де b_1, b_2, …, b_n — коефіцієнти алгебричного рівняння (8.65). Знаходячи з диференціального рівняння задачі (8.63) величину $y^{(n)}$ і підставляючи її в (8.70), знайдемо:

$$\xi(s) = \frac{q(s)}{p_0} + \left(b_1 - \frac{p_1}{p_0}\right) y^{(n-1)}(s) + \ldots + \left(b_{n-1} - \frac{p_{n-1}}{p_0}\right) y'(s) + \left(b_n - \frac{p_n}{p_0}\right) y(s).$$

Останній вираз можна подати у вигляді

$$\xi(s) = \zeta(s) + \mu(s),$$

вирізняючи задану складову

$$\zeta(s) = \frac{q(s)}{p_0},$$

та складову

$$\mu(s) = \left(b_1 - \frac{p_1}{p_0}\right) y^{(n-1)}(s) + \ldots + \left(b_{n-1} - \frac{p_{n-1}}{p_0}\right) y'(s) + \left(b_n - \frac{p_n}{p_0}\right) y(s),$$

що не окреслена.

Неважко збагнути можливість цілком усунути невідому функцію $\mu(s)$ і, разом з тим, побудувати шуканий **точний розв'язок диференціальної задачі зі сталими коефіцієнтами**: необхідно лише вимагати, щоб r_1, r_2, …, r_n були коренями алгебричного рівняння (8.65), але такого, що задовольняє умови

$$b_1 = \frac{p_1}{p_0}, \ \ldots, \ b_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{p_0}, \ b_n = \frac{p_n}{p_0}.$$

В такому разі: $\mu(s)$ стає тотожним нулем ($\mu(s) \equiv 0$); функція невідповідності набуває вигляду (порівняймо з виразом (8.69))

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p_0} \frac{\overset{n}{\Delta}_{kn}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_k} \, ds,$$

а алгебричне рівняння (8.65) — сенсу відповідного диференціальній задачі **характеристичного рівняння**

$$p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0,$$

з коренями k_1, k_2, …, k_n, з якими збігаються неокреслені раніше числа r_1, r_2, …, r_n.

Тож, виникла можливість записати:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{ki}(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k} + R_n(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{ki}(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k} + \int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p_0} \frac{\overset{n}{\Delta}_{kn}(x - s)}{\overset{n}{\Delta}_k} \, ds \,. \tag{8.71}$$

Це і є відомий вже запис точного розв'язку диференціальної задачі (8.63): вираз

$$y_{\circ}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{ki}(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k}$$

визначає окремий розв'язок однорідного (за умови $q(x) \equiv 0$) диференціального рівняння задачі (8.63), а вираз

$$y_*(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p_0} \frac{\overset{n}{\Delta}_{kn}(x - s)}{\overset{n}{\Delta}_k} \, ds \tag{8.72}$$

— окремий розв'язок неоднорідного диференціального рівняння задачі (8.63). Оскільки початкові параметри $y_0^{(i-1)}$ $(i = \overline{1, n})$ є цілком довільними, то вираз (8.71) можна вважати водночас і загальним розв'язком задачі (8.63).

Згадаймо, величина

$$K(x - x_0) \equiv \frac{\overset{n}{\Delta}_{kn}(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k} \tag{8.73}$$

є фундаментальною функцією, зміст якої окреслено в розділах 1, 2. За її допомогою окремий розв'язок неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами можна записати як

$$y_* = y_*(x, x_0) = \frac{1}{p_0} \int_{x_0}^{x} K(x - s)\, q(s)\, ds \,. \tag{8.74}$$

Його можна подати також у вигляді

$$y_* = \frac{1}{p_0}\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_k}\int_{x_0}^{x}\overset{n}{\Delta}_{kn}(x-s)\,q(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{p_0}\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_k}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ \int_{x_0}^{x} e^{k_1(x-s)}q(s)\,ds & \int_{x_0}^{x} e^{k_2(x-s)}q(s)\,ds & \cdots & \int_{x_0}^{x} e^{k_n(x-s)}q(s)\,ds \end{vmatrix}. \quad (8.75)$$

Інколи окремий розв'язок неоднорідного рівняння (9.22) вдається знайти у формі $y_* = y_*(x)$, відмінній від (8.72) (чи (8.74), (8.75)). В такому разі можна писати

$$y = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_0^{(i-1)} - y_{0*}^{(i-1)}\right)\overset{n}{\Delta}_{ki}(x-x_0)\right) + y_*(x),$$

де $y_{*0}^{(i-1)} = y_*^{(i-1)}(x_0)$ $(i = \overline{1,n})$ — початкові значення окремого розв'язку та похідних від нього.

На підставі фундаментальної функції виникає можливість записати загальний розв'язок у вигляді (див. 1.4)

$$y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} y_0^{(i-1)}\,\frac{p_{n-i-j}}{p_0}\,\frac{\partial^j K(x-x_0)}{\partial x^j} + y_*(x, x_0) \quad (8.76)$$

або

$$y = y_0 K^{(n-1)}(x-x_0) + \frac{1}{p_0}\left(p_1 y_0 + p_0 y_0'\right)K^{(n-2)}(x-x_0) +$$

$$+ \frac{1}{p_0}\left(p_2 y_0 + p_1 y_0' + p_0 y_0''\right)K^{(n-3)}(x-x_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{p_0}\left(p_{n-1} y_0 + p_{n-2} y_0' + \ldots + p_0 y_0^{(n-1)}\right)K(x-x_0) +$$

$$+ \frac{1}{p_0}\int_{x_0}^{x} K(x-s)\,q(s)\,ds. \quad (8.77)$$

До речі, з порівняння (8.76) (чи (8.77)) та (8.71) на підставі твердження про існування та єдиність розв'язку випливає, що

$$\frac{\overset{n}{\Delta}_{k1}}{\overset{n}{\Delta}_{k}} = K^{(n-1)} + \frac{p_1}{p_0} K^{(n-2)} + \frac{p_2}{p_0} K^{(n-3)} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{p_0} K \, ,$$

$$\frac{\overset{n}{\Delta}_{k2}}{\overset{n}{\Delta}_{k}} = K^{(n-2)} + \frac{p_1}{p_0} K^{(n-3)} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{p_0} K \, , \; \ldots$$

$$\ldots, \; \frac{\overset{n}{\Delta}_{k(n-1)}}{\overset{n}{\Delta}_{k}} = K' + \frac{p_{n-1}}{p_0} K \, , \quad \frac{\overset{n}{\Delta}_{kn}}{\overset{n}{\Delta}_{k}} = K \, . \tag{8.78}$$

Остання з рівностей (8.78) збігається з (8.73).

В даному разі замість (8.64), (8.69) матимемо:

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} y_0^{(i-1)} b_{n-i-j} \frac{\partial^j K_r(x - x_0)}{\partial x^j} \, ,$$

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} y_0^{(i-1)} b_{n-i-j} \frac{\partial^{j+1} K_r(x - s)}{\partial x^j \partial s} ds =$$

$$= -\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} y_0^{(i-1)} b_{n-i-j} \frac{\partial^{j+1} K_r(x - s)}{\partial x^{j+1}} ds \, . \tag{8.79}$$

В (8.79) позначено

$$K_r(x - x_0) = \frac{\overset{n}{\Delta}_{rn}(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}_{r}} \, .$$

Функція $K_r(x - x_0)$ є фундаментальною, відповідною диференціальному рівнянню

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} y' + b_n y = 0 \, ,$$

для якого алгебричне рівняння (8.65) править за характеристичне.

Розгляньмо тепер **диференціальну задачу**

$$p_0(x)y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_{n-1}(x)y'(x)+p_n(x)y(x)=q(x),$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{8.80}$$

зі змінними дійсними коефіцієнтами $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ (за М. Куліковим). Знову звернімося до функцій

$$y(x)=F_n(x)+R_n(x),$$

$$F_n(x)=\sum_{i=1}^{n} y^{(i-1)}(x_0)\frac{\overset{n}{\Delta}_{ki}(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k},\quad R_n(x)=\int_{x_0}^{x}\xi(s)\frac{\overset{n}{\Delta}_{kn}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_k}\,ds,$$

$$\xi(s)=y^{(n)}(s)+b_1y^{(n-1)}(s)+\ldots+b_{n-1}y'(s)+b_ny(s),$$

де b_1, b_2, $\ldots$, b_n — дійсні числа, що є коефіцієнтами алгебричного рівняння

$$k^n+b_1k^{n-1}+\ldots+b_{n-1}k+b_n=0,$$

на коренях якого побудовано вирази $\overset{n}{\Delta}_k$, $\overset{n}{\Delta}_{ki}(x-x_0)$.

Нехай $y(x)$ — розв'язок задачі (8.80). Діючи так само, як і у випадку задачі (8.63) зі сталими коефіцієнтами, подамо $\xi(s)$ у вигляді

$$\xi(s)=\frac{q(s)}{p_0(s)}+$$
$$+\left(b_1-\frac{p_1(s)}{p_0(s)}\right)y^{(n-1)}(s)+\ldots+\left(b_{n-1}-\frac{p_{n-1}(s)}{p_0(s)}\right)y'(s)+\left(b_n-\frac{p_n(s)}{p_0(s)}\right)y(s).$$

В такому разі стає можливим подати розв'язок задачі (8.80) у вигляді

$$y(x)=Y(x)+\rho(x), \tag{8.81}$$

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)}\frac{\overset{n}{\Delta}_{ki}(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k}+\int_{x_0}^{x}\frac{q(s)}{p_0(s)}\frac{\overset{n}{\Delta}_{kn}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_k}\,ds,$$

$$\rho(x)=\int_{x_0}^{x}\mu(s)\frac{\overset{n}{\Delta}_{kn}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_k}\,ds,$$

$$\mu(s)=\left(b_1-\frac{p_1(s)}{p_0(s)}\right)y^{(n-1)}(s)+\ldots+\left(b_{n-1}-\frac{p_{n-1}(s)}{p_0(s)}\right)y'(s)+\left(b_n-\frac{p_n(s)}{p_0(s)}\right)y(s).$$

Функція $\mu(x)$, через яку доводиться будувати функцію (8.81), — це розв'язок інтегрального рівняння

$$\mu(x) = \mu_0(x) + \int_{x_0}^{x} W(x,s)\mu(s)\,ds\,,$$

де

$$\mu_0(s) =$$

$$= \left(b_1 - \frac{p_1(s)}{p_0(s)} \right) Y^{(n-1)}(s) + \ldots + \left(b_{n-1} - \frac{p_{n-1}(s)}{p_0(s)} \right) Y'(s) + \left(b_n - \frac{p_n(s)}{p_0(s)} \right) Y(s)\,,$$

$$W(x,s) = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r} \left[\left(b_1 - \frac{p_1(s)}{p_0(s)} \right) \frac{\partial^{n-1} \overset{n}{\Delta}_{rn}(x-s)}{\partial x^{n-1}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(b_2 - \frac{p_2(s)}{p_0(s)} \right) \frac{\partial \overset{n}{\Delta}_{rn}(x-s)}{\partial x} + \left(b_n - \frac{p_n(s)}{p_0(s)} \right) \overset{n}{\Delta}_{rn}(x-s) \right].$$

На деякі задачі є сенс подивитися під іншим кутом зору.

Нехай задано неоднорідне диференціальне рівняння

$$L[y,a] \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = p(x)\,,$$

$$a_0 \neq 0\,, \quad a < x < b\,. \tag{8.82}$$

Йому відповідають **характеристичне рівняння**

$$P_r[r] = P[r,a] \equiv a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0\,, \tag{8.83}$$

і розв'язок

$$y_r = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r} \left(\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \overset{n}{\Delta}_{ri}(x-x_0) + \frac{1}{a_0} \int_{x_0}^{x} p(s) \overset{n}{\Delta}_{rn}(x-s)\,ds \right), \tag{8.84}$$

що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{8.85}$$

Тут $p(x)$ — неперервна функція $\forall x \in I = (a,b)$,

$$\overset{n}{\Delta}_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad \overset{n}{\Delta}_{r1}\left(x-x_0\right) = \begin{vmatrix} e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\ldots, \; \overset{n}{\Delta}_{rj}\left(x-x_0\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{j-1} & r_2^{j-1} & \cdots & r_n^{j-1} \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \\ r_1^{j+1} & r_2^{j+1} & \ldots & r_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}, \; \ldots,$$

$$\overset{n}{\Delta}_{rn}\left(x-x_0\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2} \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \end{vmatrix}, \tag{8.86}$$

Паралельно розглядатимемо рівняння

$$L\left[y, p\right] \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = q(x)\,, \;\; p_0 \neq 0\,, \;\; a < x < b\,, \tag{8.87}$$

якому відповідають **характеристичне рівняння**

$$P_k[k] = P\left[k, p\right] \equiv p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1} k + p_n = 0 \tag{8.88}$$

і розв’язок

$$y_k = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}_k}\left(\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \overset{n}{\Delta}_{ki}\,(x-x_0) + \frac{1}{p_0}\int_{x_0}^{x} q(s)\,\overset{n}{\Delta}_{kn}\,(x-s)\;ds \right). \tag{8.89}$$

Цей розв’язок також повинен задовольняти окреслені раніше початкові умови (8.85). Тут подібно до (8.86)

$$\overset{n}{\Delta}_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad \overset{n}{\Delta}_{k1}(x-x_0) = \begin{vmatrix} e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\ldots, \overset{n}{\Delta}_{kj}(x-x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{j-1} & k_2^{j-1} & \cdots & k_n^{j-1} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)} \\ k_1^{j+1} & k_2^{j+1} & \ldots & k_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\overset{n}{\Delta}_{kn}(x-x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)} \end{vmatrix}. \tag{8.90}$$

Виявляється, що розв’язок рівняння (8.87) можна записати через розв’язок (8.84) рівняння (8.82) у такому вигляді:

$$y_k(x) = y_r(x) + \zeta_r(x), \tag{8.91}$$

де

$$\zeta_r(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{q(s)}{p_0} - \frac{p(s)}{a_0} + \mu(s) \right) \frac{\overset{n}{\Delta}_{rn}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_r} \, ds \,. \tag{8.92}$$

Тут функція $\mu(x)$ є розв’язком інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$\mu(x) = \mu_0(x) - \frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r} \int_{x_0}^{x} \Phi(x-s)\mu(s)ds\,, \tag{8.93}$$

в якому

$$\mu_0(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{a_{n-i}}{a_0}-\frac{p_{n-i}}{p_0}\right)y_{r\circ}^{(i)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{n-i+1}}{a_0}-\frac{p_{n-i+1}}{p_0}\right)y_{r\circ}^{(i-1)}(x)=$$

$$=\left(\frac{a_n}{a_0}-\frac{p_n}{p_0}\right)y_{r\circ}(x)+\left(\frac{a_{n-1}}{a_0}-\frac{p_{n-1}}{p_0}\right)y'_{r\circ}(x)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{a_1}{a_0}-\frac{p_1}{p_0}\right)y_{r\circ}^{(n-1)}(x)\,, \tag{8.94}$$

$$y_{r\circ}(x)=\sum_{i=1}^{n}y_0^{(i-1)}\frac{\overset{n}{\Delta}_{ri}(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}_r}\,, \tag{8.95}$$

$$\Phi(x-s)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2} \\ \phi_1 e^{r_1(x-s)} & \phi_2 e^{r_2(x-s)} & \cdots & \phi_n e^{r_n(x-s)} \end{vmatrix}, \tag{8.96}$$

$$\phi_\nu=\frac{P_k(r_\nu)}{p_0}=r_\nu^n+\frac{p_1}{p_0}r_\nu^{n-1}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{p_0}r_\nu+\frac{p_n}{p_0}\,,\ \nu=\overline{1,n} \tag{8.97}$$

Співвідношення (8.91) — (8.97) ідентифікують взаємозв’язок між розв’язками рівнянь (8.82) і (8.87). Зважаючи на структуру виразів (8.91), (8.92), можна говорити, що за умов (8.93) — (8.97) рівняння (8.87) еквівалентне рівнянню

$$L[y,a]\equiv a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=q(x)\frac{a_0}{p_0}+a_0\mu(x)\,,$$

$$a_0\neq 0\,,\ a<x<b\,.$$

З іншого боку, характеристичне рівняння (8.83), якщо воно укладене так, щоб його точні корені були наперед відомими, можна тлумачити як наближене прочитування характеристичного рівняння (8.88), корені якого, а отже і значення величин (8.90), важко або неможливо точно зідентифікувати. В такому разі функцію (8.84) є сенс вважати наближеним відображенням точного розв'язку (8.89) диференціального рівняння (8.87). Беручи різні системи чисел r_1, r_2, …, r_n, можна побудувати найрізноманітніші характеристичні рівняння (8.83) і перші наближення розв'язку (8.89). Очевидно, що при $r_i = k_i$, $i = \overline{1,n}$, функція $\mu(x)$ перетвориться на тотожний нуль, а отже наближений розв'язок (8.83) трансформується у точний (8.89).

За будь-якого (з наперед заданими коренями) рівняння (8.83) відомими стають всі елементи інтегрального рівняння Вольтерри (8.93). Тому розв'язуючи це інтегральне рівняння методом послідовних наближень, завжди можна з бажаною точністю віднайти функцію $\mu(x)$, а разом з нею і розв'язок диференціального рівняння (8.87). Це означає, що існує можливість побудови наближеного розв'язку диференціального рівняння без розв'язування відповідного йому характеристичного рівняння.

Наголосімо на тому, що функції $\mu_0(x)$ і $\Phi(x-s)$ — неперервні, а це забезпечує існування і єдиність розв'язку інтегрального рівняння (8.93), а також збіжність процесу послідовних наближень.

Звернімося для прикладу до задачі другого порядку

$$p_0 y''(x) + p_1 y'(x) + p_2 y(x) = q(x),\; y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y'_0 \;(\,p_0 \neq 0\,).$$

Їй відповідає характеристичне рівняння

$$p_0 k^2 + p_1 k + p_2 = 0$$

з коренями

$$k_1 = \alpha - \beta i\,, \quad k_2 = \alpha + \beta i\,,$$

де

$$\alpha = -\frac{p_1}{2p_0}\,,\; \beta = \sqrt{\frac{p_2}{p_0} - \frac{p_1^2}{4p_0}}\,,\; i = \sqrt{-1}\,.$$

На підставі (8.71)

$$y(x) = y_0 \frac{\overset{2}{\Delta}_{k1}(x-x_0)}{\overset{2}{\Delta}_k} + y'_0 \frac{\overset{2}{\Delta}_{k2}(x-x_0)}{\overset{2}{\Delta}_k} + \int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p_0} \frac{\overset{2}{\Delta}_{k2}(x-s)}{\overset{2}{\Delta}_k}\, ds =$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}} \left(y_0 \begin{vmatrix} e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} + y'_0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} \end{vmatrix} \right) +$$

$$+\frac{1}{p_0\begin{vmatrix}1 & 1\\ k_1 & k_2\end{vmatrix}}\int_{x_0}^{x} q(s)\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)}\end{vmatrix}ds$$

або

$$y(x)=e^{\alpha(x-x_0)}\left(y_0\cos\beta(x-x_0)+\frac{y_0'-\alpha y_0}{\beta}\sin\beta(x-x_0)\right)+$$

$$+\frac{1}{p_0}\int_{x_0}^{x} q(s)\,e^{\alpha(x-s)}\,\frac{\sin\beta(x-s)}{\beta}\,ds\,.$$

Той самий розв’язок можна шукати як розв’язок задачі

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=a_0\left(\frac{q(x)}{p_0}+\mu(x)\right),\ \ y(x_0)=y_0\,,\ \ y'(x_0)=y_0'\ \ (a_0\neq 0),$$

якій відповідає характеристичне рівняння

$$a_0r^2+a_1r+a_2=0\,.$$

Тож, в даному разі

$$y(x)=y_0\,\frac{\overset{2}{\Delta}_{r1}(x-x_0)}{\overset{2}{\Delta}_{r}}+y_0'\,\frac{\overset{2}{\Delta}_{r2}(x-x_0)}{\overset{2}{\Delta}_{r}}+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{q(s)}{p_0}+\mu(s)\right)\frac{\overset{2}{\Delta}_{r2}(x-s)}{\overset{2}{\Delta}_{r}}\,ds=$$

$$=y_0\,\frac{r_2e^{r_1(x-x_0)}-r_1e^{r_2(x-x_0)}}{r_2-r_1}+y_0'\,\frac{e^{r_2(x-x_0)}-e^{r_1(x-x_0)}}{r_2-r_1}+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{q(s)}{p_0}+\mu(s)\right)\frac{e^{r_2(x-x_0)}-e^{r_1(x-x_0)}}{r_2-r_1}\,ds\ \ .$$

Побудуймо інтегральне рівняння, з якого можна було б визначити функцію $\mu(s)$. Для цього послідовно знайдімо (див. (8.94) — (8.97)):

$$y_{r\circ}(x)=y_0\,\frac{\overset{2}{\Delta}_{r1}(x-x_0)}{\overset{2}{\Delta}_{r}}+y_0'\,\frac{\overset{2}{\Delta}_{r2}(x-x_0)}{\overset{2}{\Delta}_{r}}=$$

$$=y_0\,\frac{r_2e^{r_1(x-x_0)}-r_1e^{r_2(x-x_0)}}{r_2-r_1}+y_0'\,\frac{e^{r_2(x-x_0)}-e^{r_1(x-x_0)}}{r_2-r_1}\,,$$

$$y_{r\circ}'(x)=y_0\,\frac{a_2}{a_0}\,\frac{e^{r_1(x-x_0)}-e^{r_2(x-x_0)}}{r_2-r_1}+y_0'\,\frac{r_2e^{r_2(x-x_0)}-r_1e^{r_1(x-x_0)}}{r_2-r_1}\,,$$

$$\mu_0(x) = \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{p_2}{p_0}\right) y_{r\circ}(x) + \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{p_1}{p_0}\right) y'_{r\circ}(x) =$$

$$= \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{p_2}{p_0}\right)\left(y_0 \frac{r_2 e^{r_1(x-x_0)} - r_1 e^{r_2(x-x_0)}}{r_2 - r_1} + y'_0 \frac{e^{r_2(x-x_0)} - e^{r_1(x-x_0)}}{r_2 - r_1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{p_1}{p_0}\right)\left(y_0 \frac{a_2}{a_0} \frac{e^{r_1(x-x_0)} - e^{r_2(x-x_0)}}{r_2 - r_1} + y'_0 \frac{r_2 e^{r_2(x-x_0)} - r_1 e^{r_1(x-x_0)}}{r_2 - r_1}\right),$$

$$\phi_1 = r_1^2 + \frac{p_1}{p_0} r_1 + \frac{p_2}{p_0}, \ \phi_2 = r_2^2 + \frac{p_1}{p_0} r_2 + \frac{p_2}{p_0},$$

$$\Phi(x-s) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \phi_1 e^{r_1(x-s)} & \phi_2 e^{r_2(x-s)} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(r_2^2 + \frac{p_1}{p_0} r_2 + \frac{p_2}{p_0}\right) e^{r_2(x-s)} - \left(r_1^2 + \frac{p_1}{p_0} r_1 + \frac{p_2}{p_0}\right) e^{r_1(x-s)}.$$

Отже виникає можливість укласти інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$\mu(x) = \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{p_2}{p_0}\right)\left(y_0 \frac{r_2 e^{r_1(x-x_0)} - r_1 e^{r_2(x-x_0)}}{r_2 - r_1} + y'_0 \frac{e^{r_2(x-x_0)} - e^{r_1(x-x_0)}}{r_2 - r_1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{p_1}{p_0}\right)\left(y_0 \frac{a_2}{a_0} \frac{e^{r_1(x-x_0)} - e^{r_2(x-x_0)}}{r_2 - r_1} + y'_0 \frac{r_2 e^{r_2(x-x_0)} - r_1 e^{r_1(x-x_0)}}{r_2 - r_1}\right) -$$

$$- \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{x_0}^{x} \left(\left(r_2^2 + \frac{p_1}{p_0} r_2 + \frac{p_2}{p_0}\right) e^{r_2(x-s)} - \left(r_1^2 + \frac{p_1}{p_0} r_1 + \frac{p_2}{p_0}\right) e^{r_1(x-s)} \right) \mu(s) ds$$

з ядром

$$J(x-s) = \frac{1}{r_2 - r_1} \left(\left(r_2^2 + \frac{p_1}{p_0} r_2 + \frac{p_2}{p_0}\right) e^{r_2(x-s)} - \left(r_1^2 + \frac{p_1}{p_0} r_1 + \frac{p_2}{p_0}\right) e^{r_1(x-s)} \right).$$

Процес розв’язування отриманого інтегрального рівняння методом послідовних ітерацій (методом побудови ітерованих ядер) не викликає принципових труднощів. Ітеровані ядра можна отримати в замкненій формі. Проте, цей процес не позбавлений рутинності.

Проведений тут аналіз засвідчив, що лінійні зі змінними коефіцієнтами диференціальні задачі можна розглядати у певному взаємозв'язку з лінійними задачами зі сталими коефіцієнтами. При цьому виникають підстави лінійні задачі зі сталими коефіцієнтами тлумачити як наближене відображення диференціальних задач іншого типу. Виявилося, що розв'язки двох лінійних динамічних диференціальних задач зі сталими коефіцієнтами взаємозв'язані через розв'язок інтегрального рівняння Вольтерри другого роду (див. (8.93)). Через розв'язок інтегрального рівняння і розв'язок лінійної диференціальної задачі зі сталими коефіцієнтами визначаються також і розв'язки лінійних диференціальних задач зі змінними коефіцієнтами. Зокрема, диференціальне рівняння з задачі (8.80) (зі змінними коефіцієнтами) можна звести до диференціального рівняння (зі сталими коефіцієнтами)

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y' + b_n y = b_0 \left(\frac{q(x)}{p_0(x)} + \mu(x) \right).$$

Можливість досліджувати рівняння зі змінними коефіцієнтами в рамках теорії рівнянь зі сталими коефіцієнтами пересічно дає значні методологічні переваги.

8.8 Еквівалентні інтегральні рівняння

Відомо, що розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x), \ x \ge 0, \tag{8.98}$$

з початковими умовами

$$y(0) = y_0, \ y'(0) = y'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \tag{8.99}$$

(коефіцієнти $p_1(x)$, $\ldots$, $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ та вільний член $q(x)$ є заданими неперервними функціями, що не мають особливостей при $x = 0$; y_0, y'_0, $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ — задані числа) однозначно відтворюється за розв'язком деякого еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$u(x) - \int_0^x J(x,s) u(s)\, ds = f(x). \tag{8.100}$$

Щоб віднайти це еквівалентне інтегральне рівняння, покладімо

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x),$$

звідки

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(s)\,ds + c_1\,, \;\; \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x\int_0^x u(s)\,dsds + c_1 x + c_2\,, \;\; \ldots,$$

$$y = \int_0^x \overset{n}{\ldots} \int_0^x u(s)\,ds \overset{n}{\ldots} ds + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_n\,, \qquad (8.101)$$

де c_i, $i = \overline{1,n}$, — довільні сталі. Отже, диференціальне рівняння (8.98) можна замінити на **еквівалентне інтегральне рівняння**

$$u(x) + p_1(x)\int_0^x u(s)\,ds + p_2(x)\int_0^x\int_0^x u(s)\,dsds + \ldots +$$

$$+ p_n(x)\int_0^x \overset{n}{\ldots} \int_0^x u(s)\,ds \overset{n}{\ldots} ds = q(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x)\,,$$

де

$$\alpha_i(x) = p_i(x) + \frac{x}{1!} p_{i+1}(x) + \ldots + \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} p_n(x)\,;$$

сталі c_i, $i = \overline{1,n}$, можна знайти за початковими умовами (8.99).

На підставі формули

$$\int_a^s \overset{r}{\cdots} \int_a^s f(t)\,dt \overset{r}{\ldots} dt = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^s (s-t)^{r-1} f(t)\,dt$$

отримане інтегральне рівняння можна звести до класичного вигляду (8.100):

$$u(x) - \int_0^x J(x,s)u(s)\,ds = f(x)\,, \;\; x \geq 0\,, \qquad (8.102)$$

де

$$J(x,s) = -\left(p_1(x) + p_2(x)\frac{x-s}{1!} + \ldots + p_n(x)\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \right),$$

$$f(x) = q(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x)\,. \qquad (8.103)$$

З першої формули (8.103) випливає, зокрема, що якщо коефіцієнти p_i, $i = \overline{1,n}$, диференціального рівняння (8.98) є сталими, то ядро $J(x,s)$ інтегрального рівняння (8.102) визначатиметься через різницю $x - s$:

$$J(x,s) = J(x-s)\,.$$

Загальною аналітичною формою запису розв'язку **інтегрального рівняння Вольтерри другого роду**

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x J(x,s)u(s)\,ds \tag{8.104}$$

є вираз

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,s)\, f(s)\,ds\,; \tag{8.105}$$

ядро $J(x,s)$ тут задано в трикутнику $a < s \le x \le b$. Функцію $R(x,s)$ називають **резольвентою** (або ж **резольвентним** чи **розв'язувальним ядром) інтегрального рівняння**.

Підставляючи послідовно $n+1$ разів у рівняння (8.104) замість $u(s)$ вираз, що стоїть у правій частині цього самого рівняння, матимемо:

$$\begin{gathered} u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x J(x,s)\, f(s)\,ds + \lambda^2 \int_a^x J(x,s) \int_a^s J(s,s_1)\, f(s_1)\,ds_1 ds + \\ + \lambda^3 \int_a^x J(x,s) \int_a^s J(s,s_1) \int_a^{s_1} J(s_1,s_2)\, f(s_2)\,ds_2 ds_1 ds + \ldots + \\ + \lambda^n \int_a^x J(x,s) \int_a^s J(s,s_1) \ldots \int_a^{s_{n-2}} J(s_{n-2},s_{n-1})\, f(s_{n-1})\,ds_{n-1} \ldots ds_1 ds + R_{n+1}(x) \end{gathered} \tag{8.106}$$

де

$$R_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \int_a^x J(x,s) \int_a^s J(s,s_1) \ldots \int_a^{s_{n-1}} J(s_{n-1},s_n)\,u(s_n)\,ds_n \ldots ds_1 ds \tag{8.107}$$

Таким чином, розв'язок рівняння (8.104) можна записати у вигляді ряду (8.106) з залишковим членом (8.107). Цей ряд є збіжним рівномірно для всіх x і s, належних окресленій трикутній області.

Справді, загальний член ряду має вигляд

$$u_n = \lambda^n \int_a^x J(x,s) \int_a^s J(s,s_1) \ldots \int_a^{s_{n-2}} J(s_{n-2},s_{n-1})\, f(s_{n-1})\,ds_{n-1} \ldots ds_1 ds\,;$$

беручи до уваги те, що $a \le x \le b$, і покладаючи

$$|\,J(x,s)\,| \le M\,,\ |\,f(s)\,| \le N\,,\ |\,u(s)\,| < U$$

(M, N, U — сталі) матимемо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\le\lim_{n\to\infty}\left\{\lambda\frac{M(b-a)}{n}\right\}=0\,. \tag{8.108}$$

Залишковий член (8.107) при $n\to\infty$ необмежено зменшується:

$$\lim_{n\to\infty}|R_{n+1}(x)|\le\lim_{n\to\infty}\left\{U\frac{(\lambda M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!}\right\}=0\,. \tag{8.109}$$

Співвідношення (8.108), (8.109) якраз і засвідчують, що шуканий розв'язок інтегрального рівняння (8.104) можна подати у вигляді збіжного (за будь-якого значення λ) ряду (8.106)

$$u(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i\int_a^x J_i(x,s)\,f(s)\,ds\,.$$

Порівнюючи (8.105) і (8.106), резольвенту запишімо у вигляді

$$R(x,s,\lambda)=J(x,s)+\lambda\int_a^s J(x,s)\,J(s,s_1)\,ds_1+$$

$$+\lambda^2\int_a^s\int_a^{s_1}J(x,s)\,J(s,s_1)\,J(s_1,s_2)\,ds_2ds_1+\ldots+$$

$$+\lambda^n\int_a^s\int_a^{s_1}\ldots\int_a^{s_{n-1}}J(x,s)\,J(s,s_1)\ldots J(s_{n-2},s_{n-1})\,J(s_{n-1},s_n)\,ds_n\ldots ds_2ds_1+\ldots \tag{8.110}$$

Якщо вдатися до **формули Діріхле**

$$\int_a^x\left(\int_a^s F(x,s,t)\,dt\right)ds=\int_a^x\left(\int_t^x F(x,s,t)\,ds\right)dt$$

і ввести ітеровані (повторні) ядра

$$J_1(x,s)=J(x,s)\,,\;\;J_2(x,s)=\int_s^x J_1(x,t)\,J(t,s)\,dt\,,$$

$$J_3(x,s)=\int_s^x J_2(x,t)\,J(t,s)\,dt\,,\;\ldots,\;J_n(x,s)=\int_s^x J_{n-1}(x,t)\,J(t,s)\,dt\,,\;\ldots, \tag{8.111}$$

то резольвенті можна надати простого вигляду

$$R(x,s,\lambda)=J_1(x,s)+\lambda J_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}J_n(x,s)+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i J_{i+1}(x,s)\,. \tag{8.112}$$

Ітеровані ядра і резольвента не залежать від нижньої границі a в інтегральному ряді.

В загальному випадку між ядром і резольвентою існує зв'язок

$$R(x,s,\lambda) = J(x,s) + \lambda \int_s^x J(x,t)\, R(t,s,\lambda)\, dt$$

або

$$R(x,s,\lambda) = J(x,s) + \lambda \int_s^x R(x,t,\lambda)\, J(t,s)\, dt\,.$$

Друге співвідношення можна тлумачити як інтегральне рівняння для резольвенти $R(x,s,\lambda)$: резольвента $R(x,s,\lambda)$ в даному разі править за невідому функцію, а ядро $J(x,s)$ — за задану функцію.

Нехай ядро $J(x,s)$ є многочленом степеня $n-1$ вигляду

$$J(x,s) = a_1(x) + a_2(x)(x-s) + \ldots + \frac{a_n(x)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1} \tag{8.113}$$

(коефіцієнти $a_i(x)$ неперервні в $[0,a]$). Нехай також відома функція $\varphi(x,s;\lambda)$, що є розв'язком однорідного диференціального рівняння

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n} - \lambda\left(a_1(x)\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n(x)\varphi\right) = 0 \tag{8.114}$$

і задовольняє умови

$$\varphi\big|_{x=s} = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=s} = \ldots = \left.\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}}\right|_{x=s} = 0\,,\ \left.\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\right|_{x=s} = 1\,. \tag{8.115}$$

В такому разі відповідною інтегральному рівнянню

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x J(x,s;\lambda)\, u(s)\, ds$$

з ядром (8.113) буде резольвента

$$R(x,s;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{d^n\varphi(x,s;\lambda)}{dx^n}\,, \tag{8.116}$$

визначувана власне через означену тут функцію $\varphi(x,s;\lambda)$ (функцію, що задовольняє співвідношення (8.114) та (8.115)). Цілком подібно: у тому разі, коли (порівняймо з (8.113))

$$J(x,s) = b_1(s) + b_2(s)(s-x) + \ldots + \frac{b_n(s)}{(n-1)!}(s-x)^{n-1}\,,$$

резольвента матиме вигляд

$$R(x,s;\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d^n\varphi(s,x;\lambda)}{ds^n},$$

де $\varphi(s,x;\lambda)$ — розв'язок рівняння

$$\frac{d^n\varphi}{ds^n} + \lambda\left(b_1(s)\frac{d^{n-1}\varphi}{ds^{n-1}} + b_2(s)\frac{d^{n-2}\varphi}{ds^{n-2}} + \ldots + b_n(s)\varphi\right) = 0,$$

що задовольняє умови (8.115).

Нехай ідеться про однорідне диференціальне рівняння

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{8.117}$$

якому відповідає фундаментальна функція $K(x,s)$, та інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_0^x J(x,s)u(s)\,ds,$$

в якому

$$f(x) = q(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i(x),\ \alpha_i(x) = p_i(x) + \frac{x}{1!}p_{i+1}(x) + \ldots + \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}p_n(x).$$

Надамо величинам, що фігурують у визначальних для резольвенти виразах (8.114) та (8.115) такого змісту:

$$\varphi = K(x,s),\ -\lambda a_i(x) = p_i(x)\ \ (i = \overline{1,n}),$$

Очевидно, що умови (8.115) справджуватимуться в цьому випадку власне завдяки властивостям фундаментальної функції $K(x,s)$.

В такому разі відповідно до (8.113), (8.116) вирази

$$R(x,s;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{d^nK(x,s)}{dx^n}, \tag{8.118}$$

$$J(x,s) = \sum_{r=0}^{n-1} a_{r+1}(x)\frac{(x-s)^r}{r!} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} p_r(x)\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!} \tag{8.119}$$

правитимуть за резольвенту і ядро відповідного диференціальному співвідношенню (8.117) інтегрального рівняння (порівняймо з (8.103))

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^x J(x,s)u(s)\,ds = f(x) - \int_a^x \sum_{r=1}^{n} p_r(x)\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}u(s)\,ds.$$

З одного боку, резольвенту $R(x,s;\lambda)$ можна визначити за формулою (8.118), а з іншого, на підставі (8.119) — або за формулою (8.110), або за системою формул (8.111) — (8.112).

Зокрема, відповідно до (8.105), (8.101) та (8.118) розв'язками еквівалентних інтегрального (8.100) та диференціального (8.98) рівнянь будуть функції

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{d^n K(x,s)}{dx^n} f(s)\,ds$$

та

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-s)^{n-1} f(s)\,ds + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-s)^{n-1}\int_0^s \frac{d^n K(s,t)}{ds^n} f(t)\,dtds +$$

$$+ c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_n, \qquad (8.120)$$

де

$$f(x) = q(x) + \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x), \quad \alpha_i(x) = p_i(x) + \frac{x}{1!} p_{i+1}(x) + \ldots + \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} p_n(x).$$

Беручи до уваги (8.118), (8.111) — (8.112), матимемо:

$$\frac{d^n K(x,s)}{dx^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i J_i(x,s), \qquad (8.121)$$

де

$$J(x,s) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^n p_r(x) \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!},$$

$$J_1(x,s) = J(x,s), \quad J_2(x,s) = \int_s^x J(x,t)\, J_1(t,s)\,dt,$$

$$J_3(x,s) = \int_s^x J(x,t)\, J_2(t,s)\,dt, \ \ldots,$$

$$J_n(x,s) = \int_s^x J(x,t)\, J_{n-1}(t,s)\,dt, \ \ldots \qquad (8.122)$$

Звідси

$$K(x,s) = \overbrace{\int_s^x \ldots \int_s^x}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i J_i(x,s)\, \overbrace{dx \ldots dx}^{n} + \frac{K^{(n-1)}(s,s)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1} +$$

$$+\frac{K^{(n-2)}(s,s)}{(n-2)!}(x-s)^{n-2}+\ldots+\frac{K'(s,s)}{1!}(s-a)+K(s,s)\,.$$

Таким чином,

$$K(x,s)=\int_s^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i J_i(t,s)\,dt+\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,. \tag{8.123}$$

Розгляньмо приклад. Диференціальному рівнянню

$$y''+xy'-y=0 \tag{8.124}$$

відповідає ядро

$$J(x,s)=-\frac{1}{\lambda}\big(p_1(x)+p_2(x)(x-s)\big)=-\frac{1}{\lambda}\big(x-(x-s)\big)=-\frac{s}{\lambda}$$

певного еквівалентного інтегрального рівняння. На підставі (8.122)

$$J_1(x,s)=J(x,s)=-\frac{s}{\lambda}\,,$$

$$J_\nu(x,s)=\frac{(-1)^\nu}{\lambda^\nu}s\int_s^x x_1\int_s^{x_1}x_2\ldots\int_s^{x_{\nu-3}}x_{\nu-2}\int_s^{x_{\nu-2}}t\,dt\,dx_{\nu-2}\ldots dx_2dx_1=$$

$$=\frac{(-1)^\nu}{(\nu-2)!}\frac{s}{\lambda^\nu}\int_s^x t\left(\int_t^x\tau\,d\tau\right)^{\nu-2}dt=\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\frac{s}{\lambda^\nu}\left(\frac{x^2-s^2}{2}\right)^{\nu-1}.$$

Тут використано формулу

$$\int_a^x\varphi(x_1)\,dx_1\int_a^{x_1}\varphi(x_2)\,dx_2\ldots\int_a^{x_{n-1}}\varphi(x_n)\,dx_n\int_a^x f(t)\,dt=\frac{1}{n!}\int_a^x f(t)\left(\int_t^x\varphi(s)\,ds\right)^n dt\,,$$

Отже,

$$R(x,s;\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i J_{i+1}(x,s)=-\frac{s}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\left(\frac{x^2-s^2}{2}\right)^i=-\frac{s}{\lambda}e^{-\frac{x^2-s^2}{2}}\,,$$

і відповідно до (8.121), (8.123)

$$\frac{d^nK(x,s)}{dx^n}=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i J_i(x,s)=\lambda R(x,s;\lambda)=-se^{-\frac{x^2-s^2}{2}}\,,$$

$$K(x,s)=-se^{\frac{s^2}{2}}\int_s^x(x-t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt+(x-s)=x-s\left(x\int_s^x e^{-\frac{t^2-s^2}{2}}dt+e^{-\frac{x^2-s^2}{2}}\right).$$

Нехай ідеться про еквівалентні однорідну диференціальну задачу зі змінними дійсними коефіцієнтами

$$p_0(x)y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_{n-1}(x)y'(x)+p_n(x)y(x)=0\,,$$

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y_0'\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{8.125}$$

та неоднорідну диференціальну задачу зі сталими дійсними коефіцієнтами

$$b_0y^{(n)}(x)+b_1y^{(n-1)}(x)+\ldots+b_{n-1}y'(x)+b_ny(x)=q(x) \tag{8.126}$$

й тими самими початковими умовами (8.125); $p_0(x)\neq 0$, $b_0\neq 0$.

Розв'язок задачі (8.126) можна записати у вигляді (1.61)

$$y=y_0K^{(n-1)}(x-x_0)+\frac{1}{b_0}(b_1y_0+b_0y_0')\,K^{(n-2)}(x-x_0)+$$

$$+\frac{1}{b_0}(b_2y_0+b_1y_0'+b_0y_0'')\,K^{(n-3)}(x-x_0)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{b_0}(b_{n-1}y_0+b_{n-2}y_0'+\ldots+b_0y_0^{(n-1)})\,K(x-x_0)+$$

$$+\frac{1}{b_0}\int_{x_0}^{x}K(x-s)\;q(s)\,ds\,, \tag{8.127}$$

де

$$K(x-x_0)=\frac{\overset{n}{\Delta}_n(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}}\,,\quad \overset{n}{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_n(x-x_0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2}\\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)}\end{vmatrix},$$

r_1, r_2, …, r_n — комплексні числа, що є коренями характеристичного рівняння

$$B[r]\equiv b_0r^n+b_1r^{n-1}+\cdots+b_{n-1}r+b_n=0\,.$$

Еквівалентність задач означає існування спільного розв'язку. Підставляючи (8.127) в диференціальне рівняння задачі (8.125), отримаємо інтегральне рівняння вигляду

$$q(x)+\int_{x_0}^{x}\left(K^{(n)}(x-s)+\frac{p_1(x)}{p_0(x)}K^{(n-1)}(x-s)+\ldots+\frac{p_n(x)}{p_0(x)}K(x-s)\right)q(s)\,ds=$$
$$=F(x)$$

чи

$$q(x)+\frac{1}{p_0(x)}\int_{x_0}^{x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2} \\ P[x,r_1]e^{r_1(x-s)} & P[x,r_2]e^{r_2(x-s)} & \cdots & P[x,r_n]e^{r_n(x-s)} \end{vmatrix} q(s)ds=F(x),$$

в якому за невідому править функція $q(x)$ — права частина диференціального рівняння задачі (8.126) чи еквівалентний динамічний вхід; тут

$$P[x,r]\equiv p_0(x)r^n+p_1(x)r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}(x)r+p_n(x).$$

Наприклад, для задачі другого порядку маємо:

$$y=y_0K'(x-x_0)+\frac{1}{b_0}(b_1y_0+b_0y_0')K(x-x_0)+\frac{1}{b_0}\int_{x_0}^{x}K(x-s)\;q(s)\,ds,$$

$$\overset{2}{\Delta}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix},\ \overset{2}{\Delta}_2(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} \end{vmatrix},$$

$$K=K(x-x_0)=\frac{\overset{2}{\Delta}_2(x-x_0)}{\overset{2}{\Delta}}=\frac{e^{r_2(x-x_0)}-e^{r_1(x-x_0)}}{r_2-r_1}.$$

Тож еквівалентний динамічний вхід визначатиме інтегральне рівняння

$$\frac{p_0(x)}{b_0}q(x)+p_0(x)y_0K'''+\frac{1}{b_0}[p_1(x)b_0y_0+p_0(x)(b_1y_0+b_0y_0')]K''+$$
$$+\frac{1}{b_0}[p_2(x)b_0y_0+p_1(x)(b_1y_0+b_0y_0')]K'+\frac{p_2(x)}{b_0}(b_1y_0+b_0y_0')K+$$
$$+\frac{1}{b_0}\int_{x_0}^{x}(p_0(x)K''(x-s)+p_1(x)K'(x-s)+p_2(x)K(x-s))\;q(s)\,ds.$$

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Анго А.* Математика для электро- и радиоиженеров/ Пер. с франц.— М.: Наука, 1965.— 779 с.
2. *Бабаков И. М.* Теория колебаний.— М.: ГИТТЛ, 1958.— 628 с.
3. *Бернштейн С. А., Керопян К. К.* Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции.— М.: Госстройиздат, 1960.— 281 с.
4. *Бидерман В. Л.* Прикладная теория механических колебаний.— М.: Высшая школа, 1972. — 416 с.
5 *Бойчук Л. М.* Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления.— М.: Энергия, 1971.— 113 с.
6. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем.— М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
7. *Василенко Н. В.* Теория колебаний.— Киев: Вища школа, 1992.— 429 с.
8. *Вибрации* в технике: Справочник: В 6 т.— М.: Машиностроение, 1978—1981.— Т. 1: Колебания линейных систем.— 1978.— 351 с.
9. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
10. *Гащук П.* Энергопреобразующие системы автомобиля: Идентификация и анализ.— Харьков: РИО ХГАДТУ, 1998.— 272 с.
11. *Гащук П.* Лінійні динамічні системи і звичайні диференціальні рівняння.— Львів: Українські технології, 2002.— 608 с.
12. *Гащук П., Зорій І.* Імпульсні збуджувальні функції в задачах про параметричні коливання// Машинознавство.— 2001.— № 6.— С.13–18.
13. *Гащук П., Зорій І.* Метод часткової дискретизації в динаміці круглих мембран// Матеріали VI міжнародної наукової конференції „Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”.— Львів, 2003.— С. 467–469.
14. *Гащук П., Зорій І.* Метод часткової дискретизації в динаміці круглих мембран// Фіз.-хім. механіка матеріалів.— 2003.— № 6.—С. 92–96.

15. *Гащук П., Зорій І.* Основи математичного моделювання динаміки одновимірних пружно-жорстких механічних систем// Мат. методи і фіз.-мех. поля, 1999.— 42, № 1.— С. 125–131.

16. *Гащук П., Зорій І.* Статика і динаміка пружно-жорстких систем у термінах функції впливу// Машинознавство, 1999. № 9 (27).— С.39–43.

17. *Гащук П., Зорій І.* Статика та динаміка регулярних пружно-жорстких механічних систем// Тези доп. 4-го Міжнародного симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові.— Львів, 1999.— С.77.

18. *Гащук П. М., Зорій І. Л.* Фундаментальна функція і двобічні оцінки в задачах про параметричні коливання// Труды Одесского политехнического университета, 2001. Вып. 1(13).— С.188–193.

19. *Гащук П., Зорій І.* Характеристичні рівняння та якісне дослідження динаміки складених пружно-жорстких систем// Матеріали міжнародної наукової конференції „Сучасні проблеми механіки і математики”, 1998. — С.87.

20. *Гащук П., Зорій Л.-М.* Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем.— Львів: Українські технології, 1999.— 372 с.

21. *Гащук П., Зорій Л.-М.* Функції впливу в задачах про коливання деформівних систем// Машинознавство, 1999.— № 12 (30).— С. 19–21.

22. *Голубенцев А. Н.* Обобщенный вход в динамике.— Киев: Техніка, 1971.— 136 с.

23. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях.— М.: Мир, 1970.— 328 с.

24. *Ден-Гартог Дж.* Механические колебания/ Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1960.— 580 с.

25. *Диференціальні* рівняння/ Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф. — Київ: Вища школа, 1981.— 504 с.

26. *Ершова В. В.* Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление.— Минск: Вышейшая школа, 1976.— 255 с.

27. *Зорий Л. М.* Об одном фундаментальном свойстве функций влияния// Докл. АН УССР.— Сер. А.— 1978.— № 9.— С. 806–808.

28. *Зорий Л. М.* О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений// Докл. АН УССР.— Сер. А.— 1979.— № 5.— С. 351–355.

29. *Зорій І.* Метод функцій впливу та вимушені коливання стержнів// Матеріали конференції, присвяченої 70-річчю від дня народження проф. П. С. Казімірського.— Львів, 1995.— С.27.

30. *Зорій Л.* Метод функцій впливу та дискретизації в задачах динаміки пружних систем// Праці наукового товариства ім. Шевченка.— 1997. — Т.1.— С. 579–587.

31. *Зорий Л. М.* Об универсальных характеристических уравнениях в задачах колебаний и устойчивости упругих систем// Известия АН СССР.— МТТ.— 1982.— № 6.— С. 155–162.

32. *Зорий Л., Яскилка Н.* Колебания систем, составленных из упругих валов переменного поперечного сечения// IX Symposium techniki wibracyjnej i wibroakustyki.— Kraków, 12–14. XII. 1990.— S. 193–196.
33. *Ивович В. А.* Переходные матрицы в динамике упругих систем.— М.: Машиностроение, 1969.— 199 с.
34. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям/ Пер. с нем. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
35. *Каудерер Г.* Нелинейная механика/ Пер. с нем.— М.: Изд-во ИЛ, 1961.— 777 с.
36. *Кожевников С. Н.* Динамика нестационарных процессов в машинах.— Киев: Наукова думка, 1986.— 286 с.
37. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями/ Пер. с англ.— М.: Наука, 1968.— 503 с.
38. *Коренев Б. Г., Резников Л. М.* Динамические гасители колебаний. Теория и технические приложения.— М.: Наука, 1988.— 303 с.
39. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров): Определения, теоремы, формулы/ Пер. с англ.— М.: Наука, 1977.— 832 с.
40. *Кушнир Р. М.* О построении решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами// Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— 9.— С. 55–59.
41. *Лазарян В. А., Конашенко С. И.* Обобщенные функции в задачах механики.— Киев: Наукова думка, 1974.— 191 с.
42. *Леонов М. Я.* Основы механики упругого тела.— Т. 1.— Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1963.— 328 с.
43. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем/ Пер. с нем.— М.: Мир, 1982.— 303 с.
44. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье/ Пер. с англ.— М.: Изд-во ИЛ, 1953.— 476 с.
45. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки.— М.: Наука, 1979.— 384 с.
46. *Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Б. С.* Опір матеріалів.— Київ: Вища школа, 1993.— 655 с.
47 *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры.— М.: Наука, 1984.— 368 с.
48. *Посацький С. Л.* Опір матеріалів.— Львів: Вид-во Львів ун-ту, 1973.— 404 с.
49. *Прочность*, устойчивость, колебания: Справочник: В 3 т./ Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко.— М.: Машиностроение, 1968.— Т. 1.— 831 с.— Т.2.— 463 с.— Т.3.— 567 с.
50. *Расчеты* и испытания на прочность. Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости и малых колебаний прямолинейных стержней переменного сечения. Методические рекомендации МР 213— 87.— М.: Госстандарт СССР.— Всесоюзный научно-исследоват. ин-т по нормализации в машиностроении (ВНИИНМАШ), 1987.— 43 с.

51. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища школа, 1987.— 288 с.

52. *Справочник* по динамике сооружений/ Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича.— М.: Стройиздат, 1972.— 511 с.

53. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М.: ГИТТЛ, 1953.— 468 с.

54. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах/ Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1953. — 256 с.

55. *Сю Ц. С.* Импульсивное параметрическое возбуждение. Теория// Прикладная механика.— М.: Мир, 1972, №2.— С. 234–241.

56. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле/ Пер. с англ.— М.: Машиностроение, 1985.— 472 с.

57. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем.— М.: Машиностроение, 1970.— 736 с.

58. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций/ Пер. с англ.— М.: Мир, 1971.— 192 с.

59. *Чернуха Ю. А.* Циліндричний згин слабо викривлених пластин.— Київ: АН УРСР, 1963.— 80 с.

60. *Hashtchuk Petro, Zoriy Ihor.* Parametric vibration problems and method of influence function// Abstracts of XIX th Symposium "Vibrations in physical systems". Poznań-Błażejewko, 2000.— P.136–137.

61. *Hashtchuk P., Zoryj I.* The fundamentals of a generalized technique for dynamic analysis of mechanical systems// Abstracts of XVIII th Symposium "Vibrations in physical systems". Poznań-Błażejewko, 1998.— P.139–140.

62. *Hsu C. S., Cheng W.-H.* Application of the Theory of impulsive parametric excitation and new treatments of general parametric excitations problems// Trans. ASME.— 1973.— E 40, N 1.— P. 78–86.

63. *Jaroszewicz J., Zoryj L.* Metody analizy drgań i stateczności kontynualno-dyskretnych układów mechanicznych.— Białystok: Politechnika Białostocka, 1997.— 128 s.

64. *Piszczek K., Walczak J.* Drgania w budowie maszyn.— Warszawa: PWN, 1972.— 322 s.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ „ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Петро Миколайович ГАЩУК, Ігор Лонгінович ЗОРІЙ

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ПРУЖНО-ЖОРСТКИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Монографія

Затверджено до друку вченою радою
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

Редактор Б. М. Рішняк
Художні редактори: Т. Н. Гнатюк, С. В. Нікіпчук
Технічний редактор О. М. Шайнога
Коректор Х. І. Козак

Підписано до друку 20.08.04. Формат 60×90/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 20. Умовн. фарбовідб. 21,1.
Наклад 1020 прим. Зам. 5-22

Верстання, макетування та друкування здійснено
Науково-виробничою фірмою “Українські технології”
79005, Львів, вул. І. Франка, 4
Тел./факс: (+380 322) 72-15-52, E-mail: ukrtech@mail.lviv.ua

Г 24

Гащук П., Зорій І. Л.

Динамічний аналіз лінійних моделей пружно-жорстких механічних систем: Монографія.— Львів: Українські технології, 2005.— 320 с.— 22 іл., 19 табл.— Бібліогр.: 64 назви.

ISBN 966-345-005-3

Викладаються засади узагальненої методології аналізу динамічних властивостей лінійних моделей параметрично збурюваних механічних систем з одним ступенем вільності та одновимірних пружно-жорстких систем з довільними допустимими законами розподілу жорсткостей, мас, сил тертя і навантажень, а також деяких двовимірних систем. Методологія спирається на моделі й методи механіки деформівного твердого тіла, теорії коливань, теорії стійкості та поняття фундаментальної функції, відповідної звичайному диференціальному рівнянню, зокрема такому, що може мати особливості типу імпульсних функцій в коефіцієнтах та правих частинах.

Для наукових працівників, аспірантів, інженерів.

УДК 621.81.001.2
ББК 22.16

ISBN 966-345-005-3