

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ  
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ  
ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

# МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

ВИПУСК 5

ЛЬВІВ-2019

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ  
ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

# МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

## ВИПУСК 5

Збірник наукових праць

*За загальною редакцією  
академіка НАН України Р.М. Кушніра  
та члена-кореспондента НАН України Г.С. Кіта*

Львів – 2019

**Математичні проблеми механіки неоднорідних структур:** збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Г.С. Кіта // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2019. – Вип. 5. – 289 с.

Збірник містить наукові праці, присвячені актуальним проблемам математичного моделювання в механіці деформівних твердих тіл; математичних методів механіки та термомеханіки; механіки неоднорідних твердих тіл і наномеханіки; механіки контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями; динаміки неоднорідних середовищ; оптимізації та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем. Вони були предметом обговорення на X Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», яка проходила 17–19 вересня 2019 р. у Львові.

Для наукових працівників, докторантів, аспірантів, магістрів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

**Редактори:** академік НАН України Р.М. Кушнір,  
член-кореспонент НАН України Г.С. Кіт

**Заступники редакторів:** д.ф.-м.н., проф. О.Р. Гачкевич,  
д.ф.-м.н., проф. Г.Т. Сулим,  
д.ф.-м.н., ст.н.с. Ю.В. Токовий

**Відповідальні секретарі:** к.ф.-м.н., ст.н.с. В.С. Пакош,  
к.ф.-м.н. Н.М. Івасько

**Члени редколегії:** академік НАН України д.ф.-м.н., проф. В.Т. Грінченко; члени-кореспонденти НАН України: д.т.н., проф. О.Є. Андрейків, д.т.н., проф. В.С. Гудрамович, д.т.н., проф. О.М. Трофимчук, д.ф.-м.н., проф. Я.Я. Рушицький; д.ф.-м.н., проф. В.Є. Бербюк, д.ф.-м.н., ст.н.с. Б.Д. Дробенко, д.ф.-м.н., проф. Я.О. Жук, д.ф.-м.н., проф. К.Б. Казарян, д.ф.-м.н., проф. П.П. Костробій, д.ф.-м.н., ст.н.с. Я.І. Кунець, д.ф.-м.н., проф. В.В. Лобода, д.ф.-м.н., проф. Р.М. Мартиняк, д.ф.-м.н., проф. М.В. Марчук, д.ф.-м.н., проф. В.В. Михаськів, д.т.н., проф. В.В. Можаровський, д.ф.-м.н., проф. М.М. Николишин, д.ф.-м.н., проф. В.Г. Попов, д.ф.-м.н., ст.н.с. Б.В. Процюк, д.т.н., ст.н.с. Я.Д. П'янило, д.ф.-м.н., проф. М.П. Саврук, д.ф.-м.н., ст.н.с. І.М. Турчин, д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Чекурін, д.ф.-м.н., ст.н.с. А.В. Ясінський.

**Рецензенти:** член-кореспондент НАН України І.М. Дмитрах,  
д.ф.-м.н., проф. Є.Я. Чапля

**Ухвалено до друку** Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (протокол № 8 від 29.08.2019)

**За підтримки** Західноукраїнського об'єднаного осередку IEEE

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE  
PIDSTRYHACH INSTITUTE FOR APPLIED PROBLEMS  
OF MECHANICS AND MATHEMATICS

# **MATHEMATICAL PROBLEMS OF MECHANICS OF NONHOMOGENEOUS STRUCTURES**

## **FIFTH ISSUE**

Collection of scientific papers

*Edited by*

*Academician of NAS of Ukraine R.M. Kushnir  
and Corresponding Member of NAS of Ukraine H.S. Kit*

L'viv – 2019



**Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures:** collection of scientific papers of the 10<sup>th</sup> International Scientific Conference / Edited by R.M. Kushnir and H.S. Kit // L'viv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. – 2019. – 5<sup>th</sup> issue. – 289 p.

This proceedings book contains scientific papers covering current problems of mathematics and mechanics, i.e., mathematical modelling in mechanics of deformable solids, mathematical methods of mechanics and thermomechanics, mechanics of nonhomogeneous solids and nanomechanics, mechanics of contact interaction, solids with cracks and thin inclusions, dynamics of nonhomogeneous media, optimization and design structural elements and biomechanical systems. The papers were the subject matter of the discussions on the X International Conference «Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures», held on September 17–20, 2019 in L'viv.

The book may be useful to scientists, PhD students, post-graduate students, masters and students of relevant specialties.

**Editors-in-Chief:** R.M. Kushnir, Academician of NAS of Ukraine,  
H.S. Kit, Corresponding Member of NAS of Ukraine

**Deputy Editors-in-Chief:** O.R. Hachkevych, Dr. of Sci., Prof.,  
H.T. Sulym, Dr. of Sci., Prof.,  
Yu.V. Tokovyy, Dr. of Sci.

**Board Secretaries:** V.S. Pakosh, PhD,  
N.M. Ivas'ko, PhD

**Board Members:** Academician of NAS of Ukraine V.T. Grinchenko, Corresponding Members of NAS of Ukraine O.Ye. Andreikiv, V.S. Gudramovych, O.M. Trofimchuk, J.Ya. Ruschchitsky; Profs. V.Ye. Berbyuk, B.D. Drobenko, V.F. Chekurin, K.B. Ghazaryan, P.P. Kostrobiiy, Ya.I. Kunets, V.V. Loboda, M.V. Marchuk, R.M. Martynyak, V.V. Mozharovskyy, V.V. Mykhaskiv, M.M. Nykolyshyn, V.G. Popov, B.V. Protsyuk, Ya.D. Pyanylo, M.P. Savruk, I.M. Turchyn, A.V. Yasinsky, Ya.O. Zhuk.

**Reviewers:** I.M. Dmytrakh, Corresponding Member of NAS of Ukraine,  
Ye.Ya. Chaplya, Prof.

**Approved by** the Academic Council of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine (Meeting Record No. 8, August 29, 2019)

**Supported** by IEEE UKRAINE SECTION (WEST) MTT/ED/AP/EP/SSC SOCIETIES JOINT CHAPTER

## ЗМІСТ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У МЕХАНІЦІ  
ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

<b>Аветісян Ара, Гачкевич Микола, Тріщ Богдан, Тарлаковський Дмитро</b> Модель оптимізації за напруженнями режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок конвективним способом і тепловим опроміненням .....	15
<b>Андрейків Олександр, Гембара Назар</b> Моделювання впливу границь зерен на дифузію водню .....	17
<b>Асташкін Володимир, Онишко Олексій, Пелка Кшиштоф, Станік-Беслер Аніда</b> Моделювання фізико-механічного стану стрижня з пам'яттю форми за дії термосилового навантаження .....	20
<b>Бобилєв Дмитро</b> Моделювання росту тріщин в неоднорідних структурах методом граничних елементів .....	22
<b>Боженко Богдан, Онишко Олексій, Онишко Любов, Флюд Володимир</b> Напружений стан та фазовий склад консоли, виготовленої з матеріалу з пам'яттю форми при згинанні .....	24
<b>Бойко Василь, Гром'як Роман, Стащук Микола</b> Методика обчислення напружень у суцільному тілі, викликаних концентрацією водню .....	26
<b>Вайсфельд Наталя, Луценко Георгій, Толкачов Андрій</b> Кручення зрізаного пружного конуса .....	28
<b>Вайсфельд Наталя, Пожиленков Олексій</b> Мішана крайова задача теорії пружності для прямокутної області .....	30
<b>Вайсфельд Наталя, Процеров Юрій</b> Концентрація напружень в околі циліндричної тріщини всередині скінченного циліндра .....	32
<b>Ветров Олег</b> Напружено-деформований стан стан тонкої ізотропної оболонки під дією локального навантаження складної форми .....	34
<b>Волчанські Томаш, Гачкевич Олександр, Козакевич Тереза</b> Залишкові структурний та напружений стани сталевих пластин за нагріву рухомими джерелами тепла, зумовлені різницею питомих об'ємів фазових складових .....	35
<b>Гарт Етері, Марченко Олег, Кравцов Дмитро</b> Веб-сервіс для розрахунку тонких пластин методом скінчених елементів .....	37
<b>Гачкевич Микола, Ірза Євгеній, Торський Адріан, Равска-Скотнічни Анна</b> Моделювання та оптимізація за напруженнями режимів відпалу термочувливих скляних елементів при нагріві конвективним способом і джерелами тепла .....	39
<b>Гачкевич Олександр, Гуменчук Орест, Терлецький Ростислав, Мариновіч Анджей</b> Моделювання термонапруженого стану частково прозорого шару за двостороннього теплового опромінення випромінювачами різних типів .....	41

<b>Гачкевич Олександр, Івасько Роман, Моринь Стефан, Чорний Борис</b> Математична модель та методика наближеного визначення квазістатичного напруженого стану лінійно намагнічуваних тонких оболонок при дії квазіусталеного електромагнітного поля за наявності скінефекту .....	43
<b>Гачкевич Олександр, Івасько Роман, Станік-Беслер Аніда</b> Математичне моделювання квазістатичної термомеханічної поведінки лінійних відносно магнітних і електричних властивостей тіл за дії квазіусталених електромагнітних полів при наявності підмагнічування .....	45
<b>Гембара Оксана, Чепіль Ольга, Гембара Тарас, Сапужак Ярослав</b> Моделювання впливу водню на нагромадження пошкодження в металі за повзучості .....	47
<b>Грицина Ольга</b> Рівняння локально градієнтної теорії пружних балок Бернуллі-Ейлера .....	49
<b>Гуменчук Орест, Терлецький Ростислав, Журавска Александра, Буркевич-Янік Ева</b> Температурні поля і напруження в частково прозорому шарі при тепловому опроміненні за використання двох типових промислових випромінювачів .....	50
<b>Ірза Євгеній, Козьярська Анна, Шинкаренко Георгій</b> Математичні моделі і методи термомеханіки тіл обертання, виготовлених з термов'язкопружних функціонально-градієнтних матеріалів, за теплового навантаження .....	52
<b>Ірза Євгеній, Мельчарек Аніта, Можаровський Валентин</b> Моделювання та дослідження температурних полів і напружень в градієнтно неоднорідному тілі обертання за теплового навантаження .....	54
<b>Камінський Анатолій, Поліщук Тетяна, Черноіван Юрій</b> Моделювання та розрахунок зони передруйнування поблизу вершини клиновидного вирізу, що виходить на негладку межу розділу середовищ .....	56
<b>Крутій Юрій, Сур'янінов Микола</b> Дослідження коливання ортотропної пластини числово-аналітичним методом граничних елементів .....	58
<b>Курпа Лідія, Тимченко Галина, Осетров Андрій, Щербініна Тетяна</b> Дослідження геометрично нелінійних коливань багатошарових оболонок складної форми з центральним отвором .....	60
<b>Курпа Лідія, Шматко Тетяна</b> Вільні коливання багатошарових циліндричних панелей з функціонально-градієнтними шарами .....	61
<b>Кушнір Роман, Гачкевич Олександр, Терлецький Ростислав, Івасько Роман</b> Вибрані проблеми механіки зв'язаних полів у деформівних тілах за комплексних навантажень .....	62
<b>Мануйленко Роман</b> Моделювання та дослідження напружень, зміщень і фільтрації метану у масиві з розроблюваним вугільним пластом і допоміжною виробкою .....	64
<b>Махоркін Микола</b> Вплив швидкості зміни навантаження на напружений стан циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною .....	66

<b>Можаровський Валентин, Кузьменков Дмитро, Голубєва Олена</b> Методологія розрахунку напружень в трубі з в'язкопружною теплоізоляцією .....	68
<b>Мусій Роман, Стасюк Галина, Казарян Карен, Моринь Стефан</b> Моделі термомеханіки електропровідних тіл з плоскопаралельними межами за дії імпульсних електромагнітних полів при врахуванні термопружного розсіювання енергії .....	70
<b>Орленко Сергій</b> Динаміка тришарових конічних оболонок з підкріпленням та масами .....	72
<b>Плашенко Сергій, Кузьменко Василь</b> Зв'язані задачі взаємодії пружних тіл з рідиною та газом .....	74
<b>Сачук Юрій, Максимук Олександр</b> Математичне моделювання контактної взаємодії тіл для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі .....	76
<b>Сенченков Ігор, Червінко Ольга, Рябцев Ігор</b> Розрахунок залишкового напружено-деформованого стану тонкошарових призматичних тіл при нарощуванні шарами рідкого металу .....	78
<b>Улітко Ігор</b> Сферичне джерело гармонічних хвиль у пружному середовищі, яке рівномірно обертається .....	79
<b>Чекурін Василь, Бойчук Юрій</b> Математичне моделювання кондуктивно-променевого теплообміну та температурних напружень у плоскому діелектричному шарі .....	81
<b>Belubekyan Mels, Ghazaryan Karen, Marzocca Pier</b> Localised waves in elastic thin-walled structures .....	83
<b>Belubekyan Mels, Sarkisyan Samvel</b> Waves propagation in the system of thin layer-half-space with mixed boundary conditions .....	85
<b>Rasoulzadeh Sam, Mousavi Atefeh</b> Hydrodynamic analysis with heat transfer in solid gas fluidized bed reactor for solar thermal applications .....	87
<b>Rushchitsky Jeremiah</b> Analysis of evolution of plane harmonic and solitary hyperelastic waves .....	89
<b>Shitikova Marina</b> Mathematical modeling of transient waves propagation in Cosserat-type thin shells and spatially curved beams of open profile .....	91
<b>Shitikova Marina, Ajenez Oleg</b> Mathematical modeling the impact response of viscoelastic plates made of auxetic materials .....	93

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ ТА ТЕРМОМЕХАНІКИ

<b>Акуленко Леонід, Козаченко Тетяна, Лещенко Дмитро</b> Еволюція руху твердого тіла під дією нестационарного відновлюючого та збурюючого моментів .....	94
<b>Антоненко Ніна, Ткаченко Ірина</b> Плоска стаціонарна задача теплопровідності для багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами .....	96

<b>Гарматій Галина</b> Чисельне визначення неусталеного теплового стану термочутливого порожнистого шаруватого циліндра за умов складного теплообміну .....	98
<b>Киричок Іван, Жук Ярослав, Чернюшок Ольга, Тарасов Андрій</b> Резонансна термомеханічна поведінка податливої на зсув в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзосенсорами .....	100
<b>Кіт Григорій, Івасько Наталія, Андрійчук Роман</b> Функції Гріна дво- і тривимірних задач термопружності для півпросторів зі стаціонарними джерелами і диполями тепла .....	102
<b>Коляно Ярослав, Сасс Тарас</b> Розв'язання нестационарної кондуктивної задачі термовологопровідності для двохшарової пластини щодо теплової обробки поліграфічних матеріалів .....	104
<b>Кондратюк Ярослав</b> Оптимальність адаптивного методу скінченних елементів для опуклих задач мінімізації .....	106
<b>Курпа Лідія, Любицька Катерина, Морачковська Ірина</b> Геометрично нелінійний згин функціонально-градієнтних пологих оболонок на пружній основі .....	107
<b>Кушнір Роман, Вовк Оксана, Соляр Тетяна</b> Дослідження термопружного стану термочутливих півпростору та шару з тепловиділеннями на межі контакту .....	108
<b>Кушнір Роман, Махоркін Ігор</b> Побудова аналітично-числового розв'язку задач теплопровідності та термопружності термочутливих багатшарових тіл простої геометрії .....	110
<b>Михайлишин Віра</b> Лінеаризація задачі неізотермічної пружно-пластичності для тіл з анізотропно зміцнених термочутливих матеріалів .....	113
<b>Михайлишин Віра</b> Узгодження напружень відповідно до кривої пружно-пластичного деформування .....	115
<b>Процюк Борис</b> Методика розв'язання задач термопружності для кусково-неоднорідного порожнистого ортотропного термочутливого циліндра .....	116
<b>П'янило Ярослав</b> Математичне моделювання масопереносу в складних технічних та медико-біологічних системах .....	118
<b>Ревенко Віктор</b> Подання розв'язку тривимірних рівнянь теорії пружності ортотропного тіла .....	120
<b>Скородинський Ігор</b> Усталений режим деформування нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії зосередженого періодичного навантаження .....	122
<b>Турчин Ігор, Василько Галина</b> Квазістатичні температурні напруження в порожнистому циліндрі, зумовлені нагріванням змішаного типу .....	124
<b>Тучапський Роман</b> Розрахунок напружено-деформованого стану локально навантажених оболонок обертання на основі методу $\{m, n\}$ -апроксимації .....	125

<b>Чекурін Василь, Постолак Леся</b> Системи власних функції осесиметричних бі-гармонічних задач для циліндричної області та їх застосування в теорії пружності .....	126
<b>Чорненький Андрій, Казберук Анджей, Саврук Михайло</b> Напружений стан квазіортотропної півплощини із синусоїдним краєм за одновісного розтягу ..	127
<b>Шевчук Віктор, Гаврись Олександр</b> Задача термопружності для півпростору з багатшаровим покриттям за термоциклічної обробки .....	129
<b>Augustyniak Jakub, Perkowski Dariusz M.</b> Determination of dimensionless parameters in two-phase flow .....	131
<b>Augustyniak Jakub, Perkowski Dariusz M.</b> Nonlinear approach to two-phase flow	133
<b>Ziari Fahd A., Benslama Achour</b> Numerical solution for a convective-radiative longitudinal colling fin with variable internal heat source and variable thermal properties .....	134

## МЕХАНІКА НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ І НАНОМЕХАНІКА

<b>Григоренко Олександр, Лоза Ігор, Васильєва Лариса</b> Радіальні коливання товстостінної порожнистої кулі з функціонально градієнтного п'езокерамічного матеріалу .....	136
<b>Григоренко Ярослав, Григоренко Олександр, Рожок Лілія</b> Напружений стан еліптичних порожнистих циліндрів з неперервно-неоднорідних матеріалів	138
<b>Дзюба Анатолій, Сіренко Володимир</b> Про гомогенізацію фізико-механічних характеристик матеріалу в задачах розрахунку і оптимізації параметрів багатшарових композитних оболонок обертання .....	140
<b>Нагірний Тарас, Червінка Костянтин</b> Приповерхневий дефект маси у гетерогенних тілах сферичної геометрії .....	142
<b>Стасюк Богдан</b> Моделювання поверхневого натягу в тривимірних наноконструкціях за умови змінної кривини міжфазної поверхні .....	144
<b>Ткачук Микола (мол.)</b> Пружне осереднення матеріалів із композиційною мережевою мікробудовою .....	146
<b>Шваб'юк Василь, Мікуліч Олена</b> Використання уточнених моделей механіки суцільного середовища для дослідження напруженого стану пористих тіл з дефектами за нестационарного навантаження .....	148
<b>Шваб'юк Василь, Ротко Світлана, Маткова Ада</b> До питання уточненого експериментального визначення пружних сталих комозитних матеріалів .....	150
<b>Doroszko Michał, Seweryn Andrzej</b> Densification effect analysis of sintered porous metal under compression using FEM and micro-CT .....	152
<b>Doroszko Michał, Seweryn Andrzej</b> Numerical modeling of the compressive mechanical properties of sintered porous metal based on micro-CT .....	153

<b>Sebastianiuk Piotr, Perkowski Dariusz M., Kulchytsky-Zhyhailo Roman</b> Green functions for a microperiodic composite half-space with slant layering .....	154
<b>Sebastianiuk Piotr, Perkowski Dariusz M., Kulchytsky-Zhyhailo Roman</b> On a plane contact problem for a microperiodic composite half-space with slant lamination .....	156
<b>Tokovy Yuriy, Gao Cunfa</b> Axisymmetric elastic and thermoelastic equilibrium of FGM long solid cylinders .....	158
<b>Tokovy Yuriy, Ma Chien-Ching</b> Governing equations of three-dimensional thermoelasticity problems for inhomogeneous transversely isotropic solids .....	159

МЕХАНІКА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ, ТІЛ З ТРІЩИНАМИ  
ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

<b>Бедзір Олександр, Шопа Василь</b> Контактна взаємодія прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем при неоднорідному терті .....	160
<b>Васільєв Кирил, Сулим Георгій</b> Метод вирізування у задачі поздовжнього зсуву анізотропного шару з пружним центральним анізотропним включенням .....	162
<b>Дацків Анна, Лобода Володимир</b> Електрично ізольоване включення зі змінною жорсткістю між п'єзоелектричними матеріалами .....	164
<b>Демидов Олександр, Попов Всеволод</b> Нестационарний закрут скінченного циліндра, частково зчепленого з жорсткою основою із круговим відшаруванням ..	165
<b>Дудик Михайло, Дякон Валерій, Колмакова Віра, Поліщук Тетяна, Решітнік Юлія</b> Про метод урахування маломасштабних зон передруйнування в околі концентраторів напружень .....	167
<b>Козачок Олег</b> Контакт текстурованих гідрофільних тіл з урахуванням ідеально-го газу та рідини у міжповерхневих просвітах .....	169
<b>Кравець Володимир</b> До побудови критеріїв руйнування тіл з U-подібними вирізами довільної кривини .....	171
<b>Кривий Олександр, Морозов Юрій</b> Задача термопружності для кругового міжфазного включення при різних умовах взаємодії з трансверсально-ізотропним простором .....	174
<b>Кузьменко Василь, Плащенко Сергій</b> Зв'язані контактні задачі .....	176
<b>Курташ Ірина, Шацький Іван</b> Гранична рівновага пластини з ненаскрізно заповненим тріщиноподібним дефектом .....	178
<b>Маковійчук Микола, Даляк Тарас</b> Взаємодія тріщини з колінеарною щільною у пластині на пружній основі за згину бімоментним навантаженням .....	179
<b>Максимович Олеся, Соляр Тетяна</b> Пружно-пластичне деформування біля висердленого отвору в пластинах із залишковими напруженнями .....	180

<b>Мішарін Андрій, Попов Всеволод</b> Напружений стан біля довільно орієнтованих тріщин на продовженні жорсткого включення при дії зсувної гармонічної сили .....	183
<b>Николишин Мирон, Опанасович Віктор, Куротчин Леся, Слободян Микола</b> Кусково-однорідна пружно-пластична пластина з міжфазною наскрізною тріщиною за дії зосереджених сил .....	185
<b>Онишкевич Володимир</b> Математичне моделювання зношування в плоскій задачі про контакт штампа і пружної півплощини .....	187
<b>Онишко Любов, Кваснюк Олексій, Біда Надія</b> Коефіцієнти інтенсивності напружень для лінзоподібного та ромбічного отворів в ортотропному тілі за антиплоскої деформації .....	189
<b>Острик Володимир</b> Контакт берегів міжфазної півнескінченної тріщини у кусково-однорідній смузі .....	192
<b>Попов Всеволод, Литвин Оксана</b> Визначення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень для тонких дефектів у вигляді ламаних при антиплоскої деформації .....	194
<b>Прокопишин Ігор</b> Дослідження методами декомпозиції області осесиметричної задачі про контакт двох пружних тіл за наявності несущільного циліндричного пружного покриття .....	196
<b>Сеньків Леся, Дяків Василь</b> Гранична рівновага ортотропної циліндричної оболонки з внутрішньою тріщиною вздовж гвинтової лінії .....	198
<b>Середницька Христина</b> Термопружна поведінка біматеріалу, послабленого періодичною системою міжфазних заповнених щілин з урахуванням теплопровідності і тиску газу .....	200
<b>Сулим Георгій, Васишин Андрій</b> Термомагнітоелектропружність структурно неоднорідних біматеріальних тіл із неідеальним тепловим контактом складових .....	202
<b>Сулим Георгій, Гльчук Наталія, Пастернак Ярослав</b> Термомагнітоелектропружність анізотропних тіл із просторовими нитчастими жорсткими включеннями .....	204
<b>Сулим Георгій, Опанасович Віктор, Слободян Микола, Білаш Оксана</b> Чистий згин балки з тріщиною з урахуванням пластичних смуг біля її вершин .....	206
<b>Сулим Георгій, Опанасович Віктор, Яцик Ігор</b> Критичне навантаження пластини Рейсснера зі системою тріщин з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів за згину .....	208
<b>Сяський Андрій, Шевцова Наталія, Дейнека Олег</b> Математична модель міжфазного розриву між нескінченною пластинкою з криволінійним отвором і пружним замкненим ребром .....	210
<b>Накобыан Vahram</b> Axially symmetric stressed state of a uniformly layered space with a periodic system of internal defects .....	212



<b>Накобьян Ваграм, Сахакян Аветик, Амирджанян Нарутюн</b> Stress state of a compound plane with an interface rigid inclusion and a crack having common tip	214
---	-----

ДИНАМІКА НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

<b>Бутитер Ігор, Дівєєв Богдан, Черчик Геннадій</b> Дослідження механічних коливань симетричних шаруватих балок з магнетореологічними прошарками ...	216
<b>Бутрак Іванна</b> Напружений стан в околі сфероїдального нановключення з поверхневим натягом за хвильового навантаження .....	218
<b>Васюник Зоряна</b> Застосування методу головних компонент до колориметричного сенсорного масиву даних .....	219
<b>Дівєєв Богдан</b> Проектування динамічних гасників коливань .....	221
<b>Костробій Петро, Рижа Ірина</b> Моделювання впливу дифузійних ефектів на каталітичне окиснення чадного газу .....	223
<b>Максимів Юлія, Рабош Роман, Кунець Ярослав</b> Моделі динамічних процесів у п'єзокерамічних тілах з тонкими металічними прошарками .....	225
<b>Марченко Ольга, Самойленко Тетяна, Благовещеньська Тетяна</b> Осесиметрична задача динаміки неізотермічних процесів в неоднорідному ґрунтового середовищі .....	226
<b>Матус Валерій, Міщенко Віктор, Пороховський Василь</b> Хвильові процеси у шаруватих пружних композитах з тонкими міжфазними неоднорідностями .	228
<b>Перепічка Василь</b> Переміна напрямку руху пружного стрижня з зовнішнім сухим тертям при ударі з подальшим розвантаженням зусилля притиску .....	229
<b>Станкевич Володимир, Михаськів Віктор</b> Усталені коливання пружного біматеріалу з трщинами і тонким пружним прошарком .....	230
<b>Ткачук Антон</b> Прямі методи побудови обернених матриць мас для явних методів динаміки .....	232
<b>Трофимчук Олександр, Савицький Олег</b> Моделювання динаміки контакту системи фундамент-ґрунт методом ортогональних поліномів .....	234
<b>Чернуха Ольга, Білушак Юрій</b> Процеси конвективної дифузії у тришаровому пористому тілі .....	236
<b>Шопа Тетяна</b> Динамічна поведінка ортотропної панелі подвійної кривини з двома включеннями, які взаємодіють з панеллю через пружні прошарки типу Вінклера .....	238
<b>Шопа Тетяна, Тужеляк Ольга</b> Поперечні коливання ортотропної пластини з множиною отворів довільної конфігурації за врахування розподіленого навантаження на поверхні .....	239

## ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ І БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

<b>Андрейків Олександр, Долінська Ірина, Райтер Орест</b> Континуальна модель для оцінки залишкової довговічності фібробетонних конструкцій за локальної повзучості .....	241
<b>Бабуров Володимир, Акімов Дмитро, Ларіонов Ігор, Клименко Дмитро, Грищак Віктор, Гоменюк Сергій</b> Результати дослідження напружено-деформованого стану головного обтічника з полімерних композиційних матеріалів при дії комбінації максимальних силових факторів .....	243
<b>Бездір Олександр, Шопа Василь</b> Фрикційна взаємодія прорізної циліндричної оболонки та неоднорідного заповнювача .....	246
<b>Богданов Вячеслав, Григоренко Олександр, Сторожук Євген, Тормахов Микола</b> Про чисельне моделювання пружного деформування біомеханічної системи імплантат-кістка .....	247
<b>Гудрамович Вадим, Сіренко Володимир, Гарт Етері, Клименко Дмитро, Данієв Юрій</b> Нормативні основи обґрунтування ресурсу стартових споруд ракет-носіїв космічного призначення .....	249
<b>Демидюк Мирослав, Литвин Богдан</b> Сукупна оптимізація параметрів стопи та руху двоногого крокуючого робота .....	251
<b>Дробенко Богдан, Будз Степан, Асташкін Володимир</b> До проблеми подовження термінів експлуатації котлоагрегатів енергоблоків теплових електростанцій .....	253
<b>Дробенко Богдан, Клименко Дмитро, Харченко Володимир, Сіренко Володимир</b> До оцінювання міцності тонкостінних конструкцій .....	255
<b>Дяченко Тетяна, Клименко Дмитро, Скочко Анатолій</b> Методика визначення тримкої здатності комбінованого композиційного балона високого тиску ..	257
<b>Журавльова Ольга, Харченко Володимир</b> Методика розрахунку малогабаритного ракетного двигуна твердого палива .....	258
<b>Калиняк Богдан</b> Необхідні умови відсутності термонапружень у неоднорідному довгому стержні з прямокутним перерізом і можливість їх реалізації ....	259
<b>Марчук Михайло, Харченко Володимир, Хом'як Микола, Пакош Віра</b> Модель для визначення фізико-механічних характеристик перехресно армованих композитів з урахуванням просторового характеру напружено-деформованого стану .....	260
<b>Махненко Олег, Кандаля Степан, Бабенко Андрій, Ананченко Нікіта</b> Вплив технологічних параметрів пошарового формування виробів з титанового сплаву VT6 з використанням електронно-променевого наплавлення на експлуатаційні характеристики .....	262

<b>Махненко Олег, Пустовой Антон, Саприкіна Галина</b> Розробка зварних конструкцій несучих елементів візка вантажного вагону з підвищеними характеристиками опору втомі та живучості на основі використання математичного моделювання .....	265
<b>Мусій Роман, Мельник Наталія, Бандирський Богдан, Гошко Любомир, Моринь Стефан</b> Термомеханічна поведінка біметалевих порожнистих циліндрів за нестационарних електромагнітних дій .....	267
<b>Поліщук Олександр</b> Багатошарові мережеві структури та системи .....	269
<b>Харченко Володимир, Клименко Дмитро</b> Напружено-деформований стан штифто-шпилькового з'єднання відсіків ракети при граничних температурах експлуатації .....	271
<b>Химко Ольга, Чекурін Василь</b> Математична модель для моніторингу цілісності довгого газопроводу .....	272
<b>Яджак Михайло</b> Оптимізація обчислень під час попереднього опрацювання вхідних даних, які використовуються для дослідження складних систем ....	273
<b>Яджак Михайло, Тютюнник Марія</b> Проблема оптимізації квазісистолических систем .....	275
<b>Ясіньський Анатолій, Токова Людмила</b> Оптимізація двовимірних температурних переміщень та напружень півпростору за допомогою зовнішнього теплого навантаження .....	277
<b>Berbyuk Viktor</b> Towards optimal design of engineering systems .....	278
<b>Derpeński Łukasz, Seweryn Andrzej</b> Experimental investigation of ductile fracture of elements with notches under elevated temperature .....	280
<b>Derpeński Łukasz, Seweryn Andrzej</b> Numerical investigation of ductile fracture of elements with notches under elevated temperature .....	281
<b>Egbuhuzor Udechukwu</b> Finite deformation of internally pressurized synthetic rubber-like material .....	282
<b>Falkowska Anna, Prymak Monika</b> Study on the influence of type and density of filling on the strength of medical devices obtained with FDM technology (Fused Deposition Modeling) .....	283
<b>Falkowska Anna, Seweryn Andrzej</b> Experimental tests of strength and fatigue life of 3D printed polymers .....	284
<b>Velychkovych Andrii, Shatskyi Ivan, Shopa Vasyl</b> On extreme hysteretic properties of damper with cutted shell .....	285
Алфавітний покажчик .....	286

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

УДК 539.3

### МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА НАПРУЖЕННЯМИ РЕЖИМІВ НАГРІВУ СКЛЯНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК КОНВЕКТИВНИМ СПОСОБОМ І ТЕПЛОВИМ ОПРОМІНЕННЯМ

**Ара Аветісян, Микола Гачкевич, Богдан Тріщ, Дмитро Тарлаковський**

*Інститут механіки НАН Вірменії;*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики*

*ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України;*

*Московський держуніверситет ім. М.В. Ломоносова (Росія)*

[ara.serg.avetisyan@gmail.com](mailto:ara.serg.avetisyan@gmail.com); [bogdan.trishch@gmail.com](mailto:bogdan.trishch@gmail.com); [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)

Необхідно здійснити нагрів зовнішньої поверхні ( $\gamma = h$ ) скляних кусково-однорідних оболонок конвективним способом та джерелами тепла, зумовленими інфрачервоним опроміненням, від початкової температури  $t_p$  до максимальної  $t_0$  за час  $\tau_0$ , витримати їх заданий час  $\tau_1$  при цій температурі і охолодити до температури  $t_*$  за час  $\tau_2$  при обмеженнях на параметри термонапруженого стану і швидкості нагріву.

При оптимізації за напруженим станом таких режимів нагріву теплового опромінювання (як одного з джерел нагріву при комбінованому способі нагріву розглядуваних оболонок, який включає як конвективний спосіб нагріву, так і джерельний) запропоновано алгоритм оптимізації, уточнений шляхом постановки прямої задачі за врахування нагріву інфрачервоним опромінюванням [1].

При цьому в алгоритмі оптимізації уточнюється пряма задача. Вона формулюється за три етапи. На першому етапі записуємо відповідні задачі, що окреслюють інтенсивність електромагнітного випромінювання (ЕМВ) на основі закону Бугера, а далі – визначаємо тепловиділення в оболонці з використанням відомих залежностей [1-3]. На другому етапі формулюємо задачі, що описують температурне поле. В них тепловиділення є питомою густиною неперервно розподілених джерел тепла в рівнянні теплопровідності, а крайовими умовами – умови теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого зі сторони зовнішньої поверхні оболонки виступає як функція керування. Для забезпечення міцності оболонки на проміжку нагріву приймаємо, що

компоненти тензора сумарних температурних напружень на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки менші відомих допустимих.

При цьому вихідні співвідношення прямої задачі для кількісного опису параметрів електромагнітних, теплових і механічних процесів, зумовлених дією ЕМВ формулюємо, як прийнято в літературі, за два етапи. На першому етапі записуємо в квазіусталеному наближенні рівняння для характеристик ЕМВ, а також вирази для тепловиділень через ці характеристики. На другому етапі формулюємо задачі термомеханіки на основі прийнятої термомеханічної теорії [1-3].

Поле випромінювання у частково прозорих тілах (до яких відносяться тіла зі скла) характеризується спектральними інтенсивностями випромінювання  $I_{\lambda,k}$ , що описуються отриманими феноменологічно на основі закону Бугера рівняннями переносу. При відомій інтенсивності випромінювання густина тепловиділень в складових частинах визначається відомим співвідношенням. Термонапружений стан кусково-однорідної оболонки описуємо з використанням теорії незв'язаної термопружності при залежних від температури коефіцієнтах теплового розширення.

Задача оптимізації зводиться до знаходження екстремалей функціоналу максимальних нормальних напружень. Для реалізації етапу пошуку умовного мінімуму функціоналу використовуємо метод локальних варіацій в просторі стану функції управління при відомому розв'язку прямої задачі. Побудова оптимального режиму при такому нагріві здійснюється за певною схемою. При цьому на другому етапі розв'язування вихідної задачі, тобто при оптимізації режиму конвективного нагріву при обмеженому часі дії випромінювання приймаємо, що температура і напруження в момент закінчення променевого нагріву є початковими значеннями для наявних температури та напружень.

Як приклад, розглянуто оптимальний нагрів кусково-однорідної циліндричної оболонки, яка складається з трьох різних типів скла.

1. *Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Будз С.Ф.* Оптимізація за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. – 334 с.
2. *Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф.* Термомеханіка тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання інфрачервоного діапазону частот // Доп. АН УРСР, Сер. А. – 1990. – № 7. – С. 38-41.
3. *Гачкевич А.Р.* Термоупругість електропровідних тел, находящихся под воздействием электромагнитного излучения инфракрасного диапазона частот. (Препр. АН Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача, № 10-93. – Львов, 1993. – 55 с.).

**MODEL OF OPTIMIZATION ON THE STRESSES OF THE MODES OF HEATING OF GLASS PIECEWISE HOMOGENEOUS SHELLS BY CONVECTIVE METHOD AND THERMAL RADIATION**

*A mathematical model and a technique of optimization of combined heating of piecewise homogeneous glass shells are proposed.*

**МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ГРАНИЦЬ ЗЕРЕН НА ДИФУЗІЮ ВОДНЮ****Олександр Андрейків, Назар Гембара***Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України;**Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України*[andreykiv@ipm.lviv.ua](mailto:andreykiv@ipm.lviv.ua); [nazar@botscrew.com](mailto:nazar@botscrew.com)

У процесі деформації заліза і його сплавів водень може і в мікро- і макромасштабі не тільки окрихчувати, але і пластифікувати метал [1]. У роботі [2] встановлено, що для низьколегованих трубопровідних сталей існує деяке характеристичне значення концентрації водню  $C_H = C_{H*}$  у металі, за якого змінюється механізм впливу водню на деформування сталі: при  $C_H \leq C_{H*}$  водень спричиняє пластифікацію матеріалу, а при  $C_H \geq C_{H*}$  – його окрихчення. Для сталі 20 значення  $C_{H*}$  достатньо низьке  $((1,77...2,09) \cdot 10^{-6} \text{ mol/cm}^3)$ . Тому актуальним завданням є створення математичної моделі для визначення концентрації водню, за якої відбувається зміна механізму деформування.

Відомо [1], що дифузія водню в металі залежить не тільки від типу кристалічної ґратки металу, але і від міри її досконалості. Зокрема, границі зерен є легшим шляхом для дифузії, ніж самі зерна. Перенесення атомів відбувається на кілька порядків швидше, ніж по зерну. Нагромадження водню по границях зерен до певного критичного рівня викликає ослаблення цих границь, зменшуючи їх поверхневу енергію і сприяє руху дислокацій, тим самим збільшуючи пластичну деформацію. Після насичення границь воднем, починає відбуватися його перерозподіл в тіло зерна і блокування руху дислокацій, що приводить до окрихчення.

У даній роботі пропонується математична модель дифузії водню в полікристалічному тілі з урахуванням неоднорідності параметрів дифузії і розчинності водню в тілі зерна і по границях. Для випадку кусково-неоднорідних тіл на границі переходу між підобластями однорідності функція розчинності водню матиме стрибок, а значить матиме стрибок і функція концентрації водню, що впливає із умови неперервності функції хімічного потенціалу водню по всій області [1, 2]. Для цього введемо замість концентрації водню, неперервну по всій області, так звану, функцію потенціалу водню  $\Pi$ , запропоновану в роботі [3]:

$$\Pi_i(x, y, z, t) = C_i(x, y, z, t) / K_i(x, y, z, t). \quad (1)$$

Будемо шукати розподіл поля концентрацій водню на основі узагальненого закону Фіка, який в термінах функції потенціалу водню  $\Pi$  набуде виду:

$$\partial \Pi_i / \partial t = D_i \Delta \Pi_i. \quad (2)$$

Для задачі дифузії у паралелепіпеді  $-l_1 < x < l_1$ ,  $-l_2 < y < l_2$ ,  $-l_3 < z < l_3$  за таких початкових і крайових умов:

$$\Pi_i(x, y, z, 0) = \Pi_0; \quad \Pi_i(\pm l_1, y, z, t) = \Pi_i(x, \pm l_2, z, t) = \Pi_i(x, y, \pm l_3, t) = \Pi_1 \quad (3)$$

отримали розв'язок задачі (1)–(3) у вигляді [4]

$$\frac{\Pi_i(x, y, z, t) - \Pi_1}{\Pi_0 - \Pi_1} = \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k+1}}{\beta_i \beta_j \beta_k} \cos \frac{\beta_i x}{2l_1} \cos \frac{\beta_j y}{2l_2} \cos \frac{\beta_k z}{2l_3} \times \exp \left[ - \left( \beta_i^2 K_1^2 + \beta_j^2 K_2^2 + \beta_k^2 K_3^2 \right) \left( l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2} \right) D_i t / 4 \right],$$

де  $\beta_i = (2i-1)\pi$ ;  $\beta_j = (2j-1)\pi$ ;  $\beta_k = (2k-1)\pi$ ,  $K_i = \left( l_i \sqrt{l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2}} \right)^{-1}$ .

Апробацію отриманого розв'язку провели для бікристалу заліза (рис. 1) за нульової початкової концентрації та постійної зовнішньої концентрації. На рис. 2 подано зміну з часом концентрації водню по границі зерна та в самому зерні.

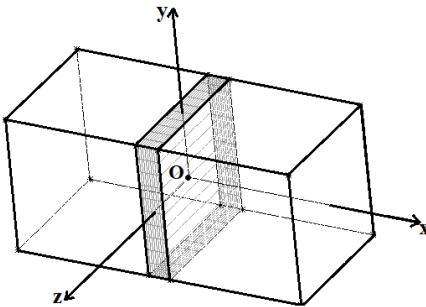


Рис. 1 Схема бікристалу

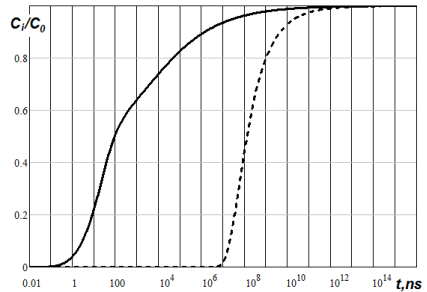


Рис. 2 Характер зміни граничної (суцільна крива) та об'ємної (штрихова) концентрації водню в бікристалі

Як видно з рис. 2 дифузія водню по об'єму зерна проходить із запізненням порівняно з границею.

1. *Андрейків О.Є., Гембара О.В.* Механіка руйнування та довговічність металічних матеріалів у водневмісних середовищах. – Київ: Наук. думка, 2008. – 344 с.

2. Дмитрах І.М., Лецак Р.Л., Сиротюк А.М., Лутицький О.Л. Вплив об'ємної концентрації водню в металі на особливості деформування низьколегованої трубопровідної сталі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – № 2. – С. 16-23.
3. Походня И.К., Демченко В.Ф., Демченко Л.И. Математическое моделирование поведения газов в сварных швах. – Киев: Наук. думка, 1979. – 56 с.
4. Гембара О.В., Чепіль О.Я., Гембара Н.Т. Вплив параметрів дискредитації на точність числового розв'язку тривимірної задачі дифузії водню // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – № 2. – С. 119-123.

#### **SIMULATION OF THE GRAIN BOUNDARIES EFFECT ON HYDROGEN DIFFUSION**

*A mathematical model of hydrogen diffusion in a polycrystalline body taking into account the heterogeneity of the diffusion and solubility parameters of hydrogen in the body of grain and in the grain boundaries in the 3D formulation is proposed. Approbation of the obtained solution for an iron bicrystal has been carried out.*



УДК 539.3:536.424

## МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНОГО СТАНУ СТРИЖНЯ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ ЗА ДІЇ ТЕРМОСИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

**Володимир Асташкін, Олексій Онишко,  
Кшиштоф Пелка, Аніда Станік-Беслер**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;  
Політехніка Опольська (Польща)*

[onyszko@ukr.net](mailto:onyszko@ukr.net); [a.stanik-besler@po.opole.pl](mailto:a.stanik-besler@po.opole.pl)

У термомеханічних моделях для кількісного опису деформування і теплообміну в твердих тілах за параметри, що описують механічні процеси, зазвичай приймають компоненти тензорів напружень і деформацій. Такий опис зручний, якщо зміни параметрів немеханічних процесів у розглядуваній системі (концентрація, фазовий склад, температура) пов'язані лише зі зміною об'єму. Проте відомо, що існують такі процеси в твердих тілах, протікання яких істотно залежить не тільки від зміни об'єму (гідростатичного тиску), а й від зміни форми елемента об'єму, пов'язаної з другим інваріантом тензора напружень чи деформацій. Це перш за все стосується фазових перетворень, які можуть протікати під впливом зсувних напружень, зокрема в тілах, виготовлених з матеріалів з пам'яттю форми.

Поведінку таких тіл зручно описувати за допомогою інваріантів тензорів напружень і деформацій, які можна розглядати, як незалежні параметри стану. Інваріантний підхід дозволяє окремо врахувати вплив як кульової (зміна об'єму), так і девіаторної (зміна форми) частин тензорів напружень і деформацій на фазовий склад системи.

На підставі викладених вище міркувань сформульовані основні положення макроскопічної термодинамічної моделі для кількісного опису процесу деформування ізотропних твердих тіл, в яких відбуваються фазові перетворення, зумовлені впливом всестороннього розтягу – стиску та зсуву [1]. При цьому застосовано відомі методи механіки суцільного середовища та термодинаміки нерівноважних процесів.

У пропонованій праці з використанням цього підходу досліджується поведінка стрижня колового перерізу, виготовленого зі сплаву з пам'яттю форми, в якому спочатку внаслідок дії зсувних напружень відбувається утворення мартенситу, а наступний нагрів викликає протікання зворотнього перетворення.

Розглядається довгий стрижень радіуса  $R$ , виготовлений зі сплаву з пам'яттю форми, який навантажений моментом кручення  $M$  (стрижень відне-

сено до циліндричної системи координат із віссю  $z$ , скерованою вздовж його осі). Приймається, що в початковому стані матеріал стрижня перебуває в аустенітній (високотемпературній) фазі (відносний вміст мартенситу  $\Xi = 0$ ). Температура стрижня  $T = T_1$  стала. Вона відповідає наявності аустенітної фази і така, що навіть незначні напруження можуть викликати виникнення мартенситу. Застосувавши результати, приведені в [1], отримано розподіл мартенситу та залишкових напружень за радіусом стрижня після припинення дії навантаження ( $M = 0$ ).

Розглянуто важливий практичний випадок – рівномірний нагрів вільного від механічного навантаження стрижня від температури  $T_1$  до  $T_2$ . При цьому відбувається зворотне перетворення мартенситу в аустеніт. Отримані відповідні розподіли фазового складу та залишкових напружень.

На основі отриманих результатів проведені розрахунки для деяких поширених сплавів з пам'яттю форми. Наведені розподіл мартенситу в стрижні, викликаний дією моменту кручення  $M$ , і фазовий склад після наступного нагріву, а також розподіли залишкових напружень, що виникли внаслідок протікання перетворення: прямого – внаслідок кручення, зворотнього – за нагріву.

З отриманих результатів випливає, що за кручення в стрижні формується неоднорідний за радіусом фазовий склад і викликаний ним неоднорідний розподіл залишкових напружень. Після наступного нагріву напруження зменшуються (це пояснюється протіканням зворотнього перетворення та наближенням при цьому фазового складу стрижня до початкового). Отримані закономірності узгоджуються з відомими даними про поведінку сплавів з пам'яттю форми.

Запропонована модель опису термомеханічних процесів з урахуванням мартенситного перетворення є теоретичною підставою для розробки оптимальних режимів виготовлення та експлуатації конструктивних елементів зі сплавів з пам'яттю форми у відповідних технічних пристроях, зокрема, для фіксаторів, які застосовуються при відновлювальному лікуванні після переломів.

1. Асташкин В., Боженко Б., Будз С., Оньшко А. Моделирование с использованием инвариантов тензоров напряжений и деформаций термомеханических процессов в твердых телах при технологическом нагреве // Projektowanie procesów i systemów technologicznych. – Lublin: Societas Scientarium Lublinensis, 2003. – С. 164-170.

#### MODELING OF PHYSICAL-MECHANICAL STATE OF THE ROD WITH SHAPE MEMORY UNDER THERMOMECHANICAL LOADING

*On the base of a mathematical model proposed before, the phase and stressed state of shape memory rod during torsion and following heating has been determined. The non-uniform distribution of residual stresses induced by change of phase structure under loading decreases after heating in consequence of returning material to initial phase state.*

**МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ ТРІЩИН В НЕОДНОРІДНИХ  
СТРУКТУРАХ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**Дмитро Бобилєв**

*Криворізький державний педагогічний університет (Україна)*

[dmytrobobylyiev@gmail.com](mailto:dmytrobobylyiev@gmail.com)

В останні десятиліття дослідженню процесів накопичення пошкоджень у залежності від росту тріщин приділяється велика увага [1-4]. Одним з ефективних шляхів розв'язання задач даного типу є використання чисельних методів, наприклад методу граничних елементів (МГЕ), який дозволяє адекватно описати розподіл напружень і деформацій. Однак застосування такого підходу обмежене класом задач, в яких не розглядається зв'язок поширення тріщини з передісторією накопичення пошкоджень в матеріалі.

При дослідженні і моделюванні тріщин, поширення яких тісно пов'язане з інформацією про передісторію пошкоджень в структурі матеріалу, перебування сітки без залучення додаткових складних процедур неприйнятна, тому що вона призводить до стирання інформації про зміну структури.

Дана робота присвячена формулюванню і реалізації принципів побудови сітки граничних елементів, яка дозволяє вирішити цю проблему. Моделювання всього процесу розвитку тріщини на одній сітці граничних елементів, з одного боку, природним чином зберігає інформацію про рівень пошкоджень, що передують руйнуванню елемента, а з іншого боку – дозволяє мінімізувати вплив сітки на траєкторію тріщини. Розроблено оригінальну структуру сітки, що відповідає запропонованим принципам і проведена її верифікація.

Тіло з тріщиною розглядається в цьому випадку у вигляді неоднорідної структури, внутрішня (фіктивна) межа якої включає в себе поверхню розриву – тріщину  $\Omega$  з граничними умовами, що враховують навантаженість берегів тріщини та їх взаємодією.

Важливим питанням при моделюванні (і особливо для нелінійних процесів деформування і руйнування середовищ) є математичне обґрунтування точності та обчислювальної стійкості отриманих результатів. Стосовно МГЕ таке обґрунтування може бути виконане на основі теорії псевдодиференціальних операторів. Також аналіз якості одержаних розв'язків будемо оцінювати на прикладах розв'язання модельних задач з відомими результатами, які отримані іншими методами (задача Кірша).

Похибка МГЕ, в тому числі разом з методом дискретних областей, не перевищує 1 %. Гарний збіг результатів поблизу отвору отримано і для задачі пластичності. Збільшення числа граничних елементів вдвічі не мало помітного впливу на точність отриманих результатів при 16-точковій (по 4 в кожному напрямку) квадратурі Гауса обчислення інтегралів. Цей приклад, крім його практичної значущості, є хорошою демонстрацією можливостей МГЕ в описі тонких локальних особливостей в процесах деформування і руйнування неоднорідних структур.

Представлено модифікацію МГЕ для розв'язання двовимірних задач деформування і руйнування неоднорідних тіл складної форми з локальними особливостями типу тріщин. Узагальнено підхід на розрахункові області з довільно орієнтованими дефектами, що сильно розрізняються розмірами окремих елементів і / або властивостями матеріалів. При цьому використовується метод дискретних областей. Враховуються складні історії термосилового навантаження неоднорідних структур і можливість їх відносного зсуву на межах в зоні контакту. Отримано розв'язки нелінійних задач деформування і руйнування двовимірних тіл. Результати порівняно з відомими числовими або аналітичними розв'язками.

1. *Carollo V., Guillén-Hernández T., Reinoso J., Paggi M.* Recent advancements on the phase field approach to brittle fracture for heterogeneous materials and structures // *Adv. Model. Simul. Eng. Sci.* – 2018. – 5. doi:10.1186/s40323-018-0102-y.
2. *Citarella R., Cricri G., Armentani E.* Multiple crack propagation with dual boundary element method in stiffened and reinforced full scale aeronautic panels // *Key. Eng. Mater.* – 2013. – 560:129–55. doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.560.129.
3. *Santana E., Portela A.* Dual boundary element analysis of fatigue crack growth, interaction and linkup // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2016. – 64. – P. 176–95. doi:10.1016/j.enganabound.2015.12.002.
4. *Suresh S., Sugimura Y., Tschegg E.K.* The growth of a fatigue crack approaching a perpendicularly-oriented, bimaterial interface // *Scr. Metall. Mater.* – 1992 – 27. – P. 1189–94. doi:10.1016/0956-716X(92)90597-8.

#### **MODELING OF GROWTH OF CRACK IN NONHOMOGENEOUS STRUCTURES BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD**

*The work is devoted to the formulation and implementation of the principles of constructing a grid of boundary elements. Due to the simulation of the whole process of fatigue development on the same grid, the boundary elements can, on the one hand, naturally store information about the level of damage, preceding the destruction of the element, and on the other hand, minimize the effect of the grid on the trajectory of the crack. An original grid structure is developed that meets the proposed principles and verifies it.*

УДК 539.3:536.424

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТА ФАЗОВИЙ СКЛАД КОНСОЛІ, ВИГОТОВЛЕНОЇ З МАТЕРІАЛУ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ ПРИ ЗГІНАННІ

**Богдан Боженко, Олексій Онишко, Любов Онишко, Володимир Флюд**

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем  
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Політехніка Опольська (Польща);*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України;  
Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

[b.bozhenko@po.opole.pl](mailto:b.bozhenko@po.opole.pl); [onyszko@ukr.net](mailto:onyszko@ukr.net)

При конструюванні сучасних машин і механізмів широко застосовують конструктивні елементи, виготовлені з використанням сплавів з пам'яттю форми. Раніше авторами побудована математична модель [1], що дозволяє здійснювати кількісний опис термомеханічних процесів у тілах з таких матеріалів. Модель розроблена з допомогою методів механіки суцільного середовища та термодинаміки нерівноважних процесів з використанням результатів експериментальних матеріалознавчих досліджень. В даній праці на підставі цієї моделі розраховується фазовий стан, напруження та переміщення консольного елемента, виготовленого із сплаву з пам'яттю форми, при силовому навантаженні.

Розглянемо однорідну пружну консоль з матеріалу з пам'яттю форми товщини  $2h$  ( $-h \leq y \leq h$ ) і довжини  $l$  ( $0 \leq x \leq l$ ) один кінець якої  $x = l$  жорстко защемлений, а до іншого,  $x = 0$ , прикладена поперечна сила  $P$ . У початковому стані матеріал консолі перебуває в аустенітній фазі (відносний вміст мартенситу  $\Xi = 0$ ). Температура консолі стала і така, що внаслідок механічної дії на неї може утворитися мартенсит [1].

Необхідну умову протікання мартенситного перетворення визначаємо з умови мінімуму вільної енергії  $F$  за вмістом мартенситу  $\Xi$  при фіксованих значеннях деформації та температури [1]. Ця умова для даної задачі має вигляд

$$K_{\xi} \Xi - \frac{1}{\rho} (K\beta e + G\beta' e_i) = 0, \quad (1)$$

де  $e$  і  $e_i$  – інваріанти тензора деформацій (відносна зміна середніх лінійних розмірів та інтенсивність деформацій відповідно);  $K_{\xi}$  – енергія, необхідна для перетворення одиниці маси матеріалу з аустеніту в мартенсит;  $K$  – модуль усестороннього стиску;  $\beta$  – коефіцієнт зміни об'єму за мартенситного перетворення;  $G$  – модуль зсуву;  $\beta'$  – коефіцієнт залежності інтенсивності

деформацій від вмісту мартенситу.

При розв'язанні задачі необхідно задовольнити умови рівності переміщень на межі області утворення мартенситу, а також умови

$$\int_{-h}^h \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-h}^h \sigma_x y dy = -Px \quad (2)$$

в перерізах  $x = \text{const}$ .

За вказаних умов у частині консолі  $-h \leq y \leq y_0$  утворюється суміш аустеніту та мартенситу, а в частині  $y_0 \leq y \leq h$  фазовий склад не змінюється ( $\Xi = 0$ ). Звідси випливає, що

$$K\beta e + G\beta' e_i = 0 \quad \text{при} \quad y = y_0. \quad (3)$$

Використавши рівняння стану [1] і сумісності деформацій, а також рівність (1) та задовольнивши умови (2), (3), отримаємо вираз, який окреслює межу розділу фаз  $y_0$ , розподіли мартенситу і напружень по товщині консолі, а також переміщення в ній за дії прикладеної поперечної сили  $P$ .

Після зняття прикладеної сили ( $P = 0$ ) в консолі будуть виникати лише залишкові напруження та переміщення, викликані зміною фазового складу. Оскільки матеріалам з пам'яттю форми притаманний різний характер зміни фазового складу при прямому та зворотньому перетворенні, то після припинення дії сили фазовий склад залишиться тим, що встановився при навантаженні  $P$ .

На підставі отриманих співвідношень для деяких конкретних матеріалів проведено числові розрахунки: розподіли мартенситу по товщині консолі та вздовж її поверхні; розподіли максимальних напружень по товщині консолі за дії сили  $P$  та залишкових напружень після її зняття; положення серединної лінії консолі як за дії навантаження, так і після його припинення.

З результатів дослідження випливає, що максимальні залишкові напруження у консолі, спричинені зміною фазового складу, сягають 35 % від максимальних значень напружень, викликаних дією навантаження. Вільний кінець консолі після зняття сили переміщується в напрямку, протилежному до напрямку дії сили, причому значення прогину для розглянутих матеріалів становить від 37 % до 52 % значення, викликаного дією поперечної сили. Це зумовлено неоднорідним фазовим складом як по товщині, так і по довжині консолі.

1. Асташкін В., Гачкевич О., Онишко О., Боженко Б. Моделювання з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій термомеханічних процесів у деформівних твердих тілах при врахуванні структурних перетворень // *Машинознавство*. – 2003. – № 11. – С. 14-17.

#### STRESSED AND PHASE STATES OF THE CONSOLE WITH SHAPE MEMORY UNDER BENDING

*On the base of mathematical model proposed before, the phase and stressed-strained states of console made of shape-memory alloy under force loading has been determined. The non-uniform distributions of martensitic phase content, residual stresses and strains over the thickness and the length of console for certain examples are obtained.*

## МЕТОДИКА ОБЧИСЛЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У СУЦЬЛЬНОМУ ТІЛІ, ВИКЛИКАНИХ КОНЦЕНТРАЦІЄЮ ВОДНЮ

Василь Бойко, Роман Громяк, Микола Стащук

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України;*

*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя (Україна)*

[bvm.spas@gmail.com](mailto:bvm.spas@gmail.com); [hromjakt@gmail.com](mailto:hromjakt@gmail.com); [stashchuk@ipm.lviv.ua](mailto:stashchuk@ipm.lviv.ua)

За наводнення металевого тіла змінюються лінійні розміри його елементів та об'єм [1]. Водночас зміна об'єму тіла, за певних умов, викликає внутрішні напруження. Приймаємо, що взаємодія між атомами водню незначна. Потрібно встановити напружено-деформований стан металевого тіла, обумовлений концентрацією водню у ньому.

Також за дії зовнішніх навантажень у тілі виникають напруження  $\sigma_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ). Згідно з класичною теорією пружності, напруження такого характеру обумовлюють відповідні видовження та зсуви. Тому напруження  $\sigma_{ik}$  викликають деформації.

За законом суперпозиції приріст повних деформацій рівний сумі деформацій, викликаних зміною концентрації водню, та деформацій, обумовлених напруженнями в тілі, тобто

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^h + \varepsilon_{ij}^p.$$

Для розв'язування задачі використано метод скінченних елементів. За принципом віртуальної роботи для квазістатичних рівнянь рівноваги при покроковому формулюванні для моменту часу  $t + \Delta t$  запишемо таке скінченно-елементне рівняння

$$[K]\{\Delta u\} = \{F_h\} + \{\Phi\}. \quad (1)$$

Тут

$$[K] = \int_V [B]^T [D^p] [B] dV, \quad \{F_h\} = \int_V [B]^T [D^p] \{\Delta \varepsilon_h\} dV, \quad \{\Phi\} = - \int_V [B]^T (\{\sigma\})^t dS, \quad (2)$$

де  $[D]$  – матриця пружності;  $[B]$  – матриця диференціювання переміщень;  $\{\Delta \varepsilon_h\}$  – приріст вектора водневих деформацій;  $V$  – об'єм досліджуваного тіла.

В момент часу  $t + \Delta t$  поле напружень буде

$$\{\Delta \sigma\} = [D]([B]\{\Delta u\} - \{\Delta \varepsilon_h\}), \quad \{\sigma\}_{t+\Delta t} = \{\sigma\}_t + \{\Delta \sigma\}. \quad (3)$$

Згідно роботи [1] приріст водневих деформацій такий

$$\{\Delta\varepsilon_h\} = \alpha_h (C_{t+\Delta t} - C_t) \{\mathbf{I}\},$$

де  $\{\mathbf{I}\}^T = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$ ;  $\alpha_h$  – коефіцієнт водневого розширення.

Концентрацію водню можна обчислити із рівняння Фіка

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(D_c \nabla C) + \nabla\left(\frac{D_c V_H}{RT} \nabla \sigma_h\right), \quad (4)$$

де  $D_c$  – коефіцієнт дифузії;  $R$  – універсальна газова постійна;  $T$  – абсолютна температура;  $V_H$  – парціальний молярний об'єм водню в металі;  $\sigma_h$  – гідростатична компонента тензора напружень в металі;  $t$  – час.

Рівняння (6) розв'язуємо при таких початкових умовах  $C(x, y, z, 0) = C_0$ .

На частині поверхні  $S_c$  задаємо значення концентрації водню  $C_b$ , а на іншій частині  $S_N$  – потік водню  $\varphi$ ,  $S_c \cup S_N = S$ .

У роботі [2] показано, що при нульовому потоці концентрацію водню в момент часу  $t+\Delta t$  можна обчислити із наступного рівняння

$$\left[ \frac{[M_{aa}]}{\Delta t} + [K_{1aa}] \right] \{C_{t+\Delta t}\} = [M_{aa}] \frac{\{C_t\}}{\Delta t} - [K_{ac}] \{C_b\} - [K_{2aa}]_t \{C_t\}, \quad (5)$$

де матриці  $[M_{aa}]$ ,  $[K_{1aa}]$ ,  $[K_{ac}]$  та  $[K_{2aa}]$  встановлені в цій же роботі.

Для обчислення напружень в момент часу  $\Delta t$  спочатку розв'язуємо рівняння (5) та знаходимо для цього часу  $\{\Delta\varepsilon_h\}$ . При цьому використовуємо початкові та граничні умови для рівняння Фіка. Після цього згідно зі співвідношеннями (2) обчислюємо значення  $[K]$ ,  $\{F_h\}$  та  $\{\Phi\}$ . Оскільки на першому кроці напруження рівні нулю, то задаємо  $\{\Phi\} = \{0\}$ . Розв'язуємо рівняння (1). Використовуючи рівняння (3), знаходимо напруження в тілі для часу  $\Delta t$ . Аналогічно знаходимо напруження для часів  $2\Delta t$ ,  $3\Delta t$ ,  $4\Delta t$  до заданого моменту часу.

Як приклад, розглянуто обчислення напружень у циліндричному тілі при наводнюванні та зневоднюванні. Для таких задач у роботі [1] знайдено точні розв'язки, які добре корелюють з отриманими даними.

1. *Stashchuk M.H.* Influence of hydrogen concentration of the stresses in a solid metallic cylinder // *Materials Science*. – 2017. – **53**, № 6. – P. 823-831.
2. *Boiko V.M., Hembara O.V.* Analytic the kinetics of hydrogen redistribution of bimetallic joints // *Materials Science*. – 2014. – **50**, № 2. – P. 179-182.

#### METHOD OF CALCULATION OF STRESSES QUESTIONED WITH WATER CONCENTRATION, IN A SIMILAR BODY

*Through finite element modeling, the stresses due to hydrogen in a solid metal body are calculated.*



## КРУЧЕННЯ ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО КОНУСА

Наталя Вайсфельд, Георгій Луценко, Андрій Толкачов

*Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова (Україна)*[vaysfeld@onu.edu.ua](mailto:vaysfeld@onu.edu.ua); [shhadow@mail.ru](mailto:shhadow@mail.ru); [georglutsenko@gmail.com](mailto:georglutsenko@gmail.com)

Конічні тіла є складовими частинами інженерних конструкцій, наприклад, купольно-конічні тіла використовують у зварюванні, конічні індентори застосовують для перевірки вибухонебезпечності вугільного шару, тощо. Складність геометрії призводить до багатьох математичних труднощів під час розв'язання крайових задач для тіл такої форми. Один із методів розв'язання крайових задач теорії пружності для конічних тіл було запропоновано у [1]. Цей метод застосовано у даній роботі для дослідження напруженого стану зрізаного пружного конуса за умови кручення.

Постановка задачі. Пружний конус заповнює область  $a \leq r \leq \infty$ ,  $0 < \theta \leq \omega$ ,  $-\pi \leq \phi \leq \pi$  ( $r, \theta, \phi$  – сферичні координати). Модуль зсуву позначатимемо через  $G$ , а переміщення – через  $u_\phi(r, \theta) = w(r, \theta)$ ,  $(u_r(r, \theta, \phi) = u_\theta(r, \theta, \phi) \equiv 0)$ . Переміщення  $w(r, \theta)$  мають задовольняти рівняння

$$\left[ r^2 w'(r, \theta) \right]' + \frac{\left[ \sin(\theta) w^\bullet(r, \theta) \right]^\bullet}{\sin \theta} - \frac{w(r, \theta)}{\sin^2 \theta} = 0.$$

Торець конуса  $r = a$  є защемленим, на боковій поверхні  $\theta = \omega$  задано напруження. Отже, крайові умови подамо у формі

$$w(a, \theta) = 0; G \left[ w^\bullet(r, \omega) - c \operatorname{tg}(\omega) w(r, \omega) \right] = r q(r).$$

Потрібно знайти переміщення та напруження у конусі.

Введемо нову невідому функцію  $u(r, \theta)$ , зв'язану з вихідною функцією переміщень  $w(r, \theta)$  співвідношенням

$$w(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} u \left( \ln \frac{r}{a}, \theta \right), \ln \frac{r}{a} = \xi.$$

Після застосування інтегрального перетворення Фур'є за змінною  $\xi$  задачу зведено до одновимірної. Розв'язок цієї задачі отримано у явному вигляді

$$u(r, \theta) = \frac{q_\lambda P_V^1(\cos \theta)}{G P_V^2(\cos \theta)},$$

де  $q_\lambda = \int_0^\infty (ae^\xi)^{1.5} q(ae^\xi) \sin(\lambda \xi) d\xi$ ,  $P_V^1(\cos \theta), P_V^2(\cos \theta)$  – функції конуса першого роду  $\left( \nu = -\frac{1}{2} - i\lambda \right)$  [2].

До отриманого розв'язку застосовано обернене перетворення Фур'є та виконано перехід до вихідних переміщень  $w(r, \theta)$ . Остаточню розв'язок задачі подано формулою

$$w(r, \theta) = \frac{2}{\pi G \sqrt{r}} \int_0^\infty \sin\left(\lambda \ln \frac{r}{a}\right) \frac{P_V^1(\cos \theta)}{P_V^2(\cos \theta)} q_\lambda d\lambda.$$

Числові розрахунки проведено для параметрів  $1 \leq r \leq 10$ ,  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ,  $q(r) = \ln^2(r)r^{-3.5}$  (див. рис. 1).

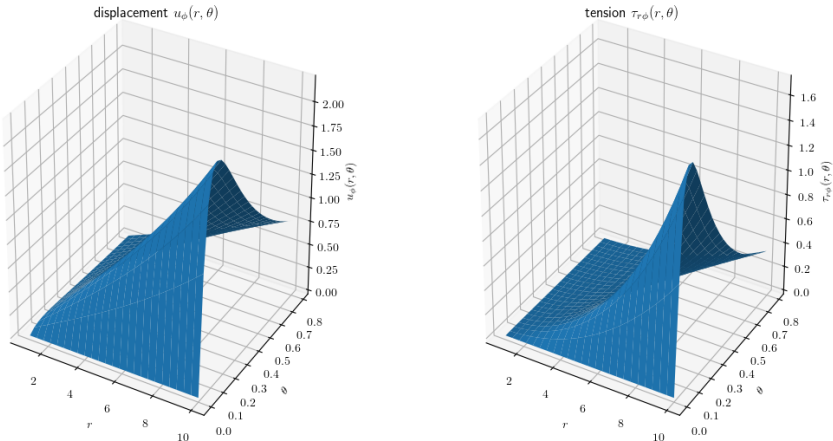


Рис. 1

1. Вайсфельд Н.Д., Попов Г.Я. Кручення зрізаного конічно-шаруватого пружного конуса // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56** (2). – С. 112-123.
2. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 1. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 212 p.

## МІШАНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

**Наталія Вайсфельд, Олексій Пожиленков**

[vaysfeld@onu.edu.ua](mailto:vaysfeld@onu.edu.ua); [leshiy12345678@gmail.com](mailto:leshiy12345678@gmail.com)

*Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова (Україна)*

Дослідженню напруженого стану прямокутної області присвячено роботи [1, 2]. Інший підхід до розв'язання цієї задачі запропоновано у [3].

Постановка задачі. Пружна прямокутна область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  ( $G$  – модуль зсуву,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона) знаходиться під дією навантаження на верхній поверхні

$$\sigma_y(x, b) = -p(x), \tau_{yx}(x, b) = 0.$$

На нижній грані виконуються умови ідеального контакту:

$$u_y(x, 0) = 0, \tau_{yx}(x, 0) = 0.$$

На інших гранях мають місце крайові умови:

$$u_x(0, y) = 0, \tau_{yx}(0, y) = 0,$$

$$u_x(a, y) = 0, \tau_{yx}(a, y) = 0.$$

Переміщення задовольняють рівняння:

$$U''(x, y) + U^{**}(x, y) + \mu_0(U''(x, y) + V'^*(x, y)) = 0,$$

$$V''(x, y) + V^{**}(x, y) + \mu_0(U'^*(x, y) + V^{**}(x, y)) = 0. \quad (1)$$

Тут введено позначення:

$$U(x, y) = u_x(x, y), \quad V(x, y) = u_y(x, y),$$

$$f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f^*(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Після використання  $\sin$  - та  $\cos$  - перетворень Фур'є до першого та дру-

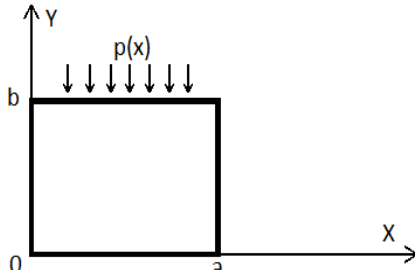


Рис. 1.

гого рівнянь (1) у просторі трансформант отримуємо одновимірну крайову задачу, яку переформулюємо у векторному поданні

$$\begin{cases} L_2(Z(y)) = 0, \\ U_i[Z(y)] = D_i, \quad i = 0, 1, \end{cases}$$

де  $L_2(Z(y)) = AZ''(y) + BZ'(y) + EZ(y)$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $E$  – відомі матриці  $2 \times 2$ ,

$Z(y) = \begin{pmatrix} U_n(y) \\ V_n(y) \end{pmatrix}$  – невідомий вектор трансформант переміщень. Для побудови

точного розв'язку задачі використано апарат матричного дифференціального числення. Розв'язок знаходиться за допомогою фундаментальної матриці

$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds$ , де контур  $c$  охоплює всі особливі точки підінтег-

рального виразу. Матриця  $M^{-1}(s)$  є оберненою матрицею до матриці  $M(s)$ , яку знайдено в явному вигляді. Отже, розв'язок у просторі трансформант побудовано точно за формулами:

$$Z(y) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} Y_1(y) + \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} Y_2(y),$$

де  $C_i$  – відомі константи,  $Y_i(y)$  – матрична фундаментальна система розв'язків.

Після обернення перетворення Фур'є переміщення знайдено у явному вигляді.

1. *Vihak V.M., Tokovyy Yu.* Construction of elementary solutions to plane elastic problem for a rectangular domain // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, No. 7. – P. 79-87.
2. *Meleshko V.V., Gomilko A.M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // *Proc. Royal Soc. – A.* – 1997. – **453**, No. 1965. – P. 2139-2160.
3. *Popov G., Vaysfeld N., Zozulevich B.* The exact solution of elasticity mixed plain boundary value problem in a rectangular domain / *Books of articles 20-th International Conference Engineering Mechanics (Srvatka, Czech Republic, 2014).*

## КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТРІЩИНИ ВСЕРЕДИНІ СКІНЧЕНОГО ЦИЛІНДРА

**Наталя Вайсфельд, Юрій Процеров**

*Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова (Україна)*

[vaysfeld@onu.edu.ua](mailto:vaysfeld@onu.edu.ua); [protserov@onu.edu.ua](mailto:protserov@onu.edu.ua)

Добре відомо, що однією з типових поверхонь, за якими розвиваються тріщини всередині пружних тіл є циліндричні поверхні [3, 4]. Дослідженню концентрації напружень біля циліндричних тріщин у нескінченних та півнескінченних пружних тілах присвячено чимало робіт [1, 2 та ін.]. Скінченні циліндри, послаблені циліндричними тріщинами, розглядаються авторами набагато рідше, що пов'язано з труднощами задоволення відповідних крайових умов на торцях циліндричного тіла.

Розглядаємо скінченний пружний циліндр, до верхнього торця якого прикладені нормальне та дотичне навантаження. Циліндрична поверхня та нижня основа знаходяться в умовах ідеального контакту. Всередині циліндра розташовано циліндричний дефект у вигляді тріщини, береги якої вільні від напружень. Потрібно побудувати поле переміщень та напружень, яке задовольняє осесиметричні рівняння Ламе.

Застосування інтегрального перетворення Ганкеля до вихідної задачі за відповідною схемою приводить у просторі трансформант до одновимірної задачі. Її розв'язок, який побудовано в аналітичному вигляді, має невідомі похідні стрибків переміщень. Умова відсутності напружень на берегах тріщини приводить до розв'язання системи інтегральних рівнянь. Її розв'язано методом ортогональних поліномів, що враховує характер особливостей розв'язків на кінцях проміжків інтегрування. За результатами розрахунків, які отримано за стандартною числовою процедурою методу, проаналізовано значення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Встановлено важливі особливості механічних характеристик за наявності певної форми навантаження та місця розташування тріщини. За умови впливу рівномірно розподіленого навантаження, сформульованих крайових умов та відсутності тріщини задача має елементарний розв'язок. При цьому наявність тріщини вносить збурення у розподіл напружень, але вони однакові по верхньому та нижньому колам тріщини та не залежать від розташування по висоті циліндра. За умови впливу нормального параболічного навантажен-

ня встановлено, що величина коефіцієнту інтенсивності напружень  $K_I$  за абсолютними значеннями суттєво більша, ніж величина коефіцієнта  $K_{II}$ . Крім того, зі збільшенням довжини тріщини коефіцієнт інтенсивності напружень зростає, а зі зменшенням радіусу, навпаки, зменшується. Це пов'язано з впливом крайової умови на поверхні циліндра. Суттєва різниця між значеннями коефіцієнтів інтенсивності напружень на різних основах тріщини за умови впливу параболічного навантаження спостерігається зі зростанням відносної довжини тріщини.

1. *Gribova M.B., Nuller M.B.* Torsion of a circular cylinder weakened by a cylindrical crack // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, No. 3 – P. 68-76.
2. *Ito S.* Dynamic stress intensity factors around a cylindrical crack in an infinite elastic medium subject to impact load // *Int. J. Solids Struct.* – 2007. – **44**. – P. 7340-7356.
3. *I.S., Newman J.C.* Stress-intensity factors for internal and external surface cracks in cylindrical vessels // *J. Press. Vessel Technol.* – 1982. – **104**, No. 4. – P. 293-298.
4. *Wuthrich C.* Stress intensity factors for cylindrical cracks in long cylinders // *Engineering Fracture Mechanics.* – 1980. – **13**, No. 4. – P. 987-990.

#### STRESS CONCENTRATION NEAR CYLINDRICAL CRACK INSIDE FINITE CYLINDER

*The authors consider a finite elastic cylinder with a cylindrical crack inside. The normal and tangent loads are applied to the cylinder's upper face. The conditions of ideal contact are fulfilled at the cylindrical surface and lower base. The crack's branches are free from stress. It is necessary to derive a field of displacements and stresses satisfying the axisymmetric Lamé equations and stated boundary conditions.*

*The application of the integral Hankel's transform to the original problem according to the corresponding scheme leads to the one-dimensional boundary problem in the transforms' domain. Its solution was constructed in an analytical representation. It has the unknown derivative of the displacements' jumps. The condition of stress absence on the the crack's branches leads to the solution of the integral equation system. This system is solved by the orthogonal polynomial method. It gives opportunity to take into consideration the singularities' order of the solutions at the ends of the integration interval. On the basis of the calculations obtained by the standard numerical procedure of the method, the values of stress intensity coefficients are analyzed.*

*The important features of mechanical characteristics are established in the presence of a certain form of loading and the location of the crack. It was stated also that under the influence of uniformly distributed load, the formulated boundary conditions and the absence of a crack, the problem has an elementary solution. In this case, the presence of a crack creates disturbance in the distribution of stresses, but they are identical in the upper and lower circles of the crack and do not depend on the location of the cylinder height.*

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТАН ТОНКОЇ  
ІЗОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНОГО  
НАВАНТАЖЕННЯ СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

**Олег Ветров**

*Донецький національний університет імені Василя Стуса (Україна)*

[o.vetrov@donnu.edu.ua](mailto:o.vetrov@donnu.edu.ua)

На практиці елементи конструкцій завжди перебувають під дією навантажень різної фізичної природи (силові, температурні тощо) і характеру зміни в часі (статичні, динамічні). В роботі розглядаються силові навантаження на тонкооболончасті елементи конструкції. Залежно від області дії силових факторів навантаження поділяють на зосереджені та локальні. Дію зосередженого навантаження, як правило, моделюють за допомогою дельта-функції Дірака. Вільний член диференціального рівняння, що описує напружено-деформований стан, містить дельта-функцію, а отримані в результаті розв'язки називаються фундаментальними. Цей підхід дозволяє не лише ефективно використовувати математичний апарат узагальнених функцій, але й є основою для подальшого розв'язку задачі про дію локального навантаження, розподіленого по деякій замкнутій області.

В роботі досліджується напружено-деформований стан тонкої ізотропної оболонки під дією конкретного локального навантаження, розподіленого по еліптичній області. Розглядаються статичний та динамічний випадки навантаження. В основу покладені фундаментальні розв'язки, раніше отримані в [1, 2].

Робота виконана у рамках держбюджетної фундаментальної науково-дослідної теми № 0119U100042 (науковий керівник – академік В.П. Шевченко).

1. *Шевченко В.П.* Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998 – С. 205-207. (Механика композитов: В 12 т.; т. 7).
2. *Vetrov O.S., Shevchenko V.P.* Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – **183**, No. 2. – P. 231-240.

**THE STRESS-DEFORMED STATE OF A THIN ISOTROPIC SHELL  
UNDER THE ACTION OF A COMPLEX FORM LOCAL LOAD**

*The problem of the action on a thin isotropic shell of the complex shape local load is considered. The problem is investigated by using the method of fundamental solutions.*

**ЗАЛИШКОВІ СТРУКТУРНИЙ ТА НАПРУЖЕНИЙ СТАНИ  
СТАЛЕВИХ ПЛАСТИН ЗА НАГРІВУ РУХОМИМИ ДЖЕРЕЛАМИ  
ТЕПЛА, ЗУМОВЛЕНІ РІЗНИЦЕЮ ПИТОМИХ ОБ'ЄМІВ  
ФАЗОВИХ СКЛАДОВИХ**

**Томаш Волчаньські, Олександр Гачкевич, Тереза Козакевич**

*Політехніка Опольська (Польща);*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

Багато елементів сучасних конструкцій і машин є сталевими маловуглецевими низьколегованими пластинчастими елементами, а в технологічних процесах їх виготовлення і обробки часто використовують локальний високотемпературний нагрів, який практично реалізують застосовуючи рухомі джерела нагріву (газові, електричні, електромагнітні, лазерні, інфрачервоного опромінення і т.п.). Високі температури нагріву і режими подальшого охолодження можуть змінювати структурний стан сталі, що приводить до зміни її механічних властивостей (твердості, міцності, пластичності, в'язкості та ін.), а також до виникнення у відповідних елементах поряд з пластичними і структурними залишковими деформаціями та напружень, рівні яких можуть перевищувати допустимі. Для прогнозування механічних властивостей конструктивних елементів і рівня залишкових напружень в них за використовуваних способів нагріву – охолодження є важливою і актуальною розробка методик дослідження і оптимізації за різними критеріями фазового і напруженого станів таких елементів як в процесі нагріву – охолодження, так і після його завершення.

Запропоновано варіант методики та відповідну розрахункову схему дослідження залишкових фазового та напруженого станів тонких пластин, виготовлених з маловуглецевих низьколегованих сталей, за локального нагріву рухомими розподіленими (за Гауссового розподілу) джерелами тепла з різними центрами локалізації до температур повної аустенізації сталі в зоні термічного впливу та наступного монотонного охолодження. Варіант ґрунтується на адаптованій до розглядуваного класу задач відомій моделі опису фазового складу та зумовлених ним залишкових напружень у маловуглецевих низьколегованих сталевих тілах за їх монотонного охолодження (з високотемпературного початкового стану зі зоною повної аустенізації), яка оснований на наявних в літературі інтерполяційних залежностях вмісту фазових складових, отриманих статистичною обробкою відповідних термодинамічних діаграм розпаду аустеніту.

Побудовано для розглядуваної пластини основу на методах зважених залишків і скінченних елементів методики числового розв'язування сформу-



льованих складових задач наявних трьох етапів запропонованої розрахункової схеми поставленої комплексної задачі механіки деформівного твердого тіла за врахуванням фазових перетворень (визначення температурного поля і відповідного приведенного часу перебування точок пластини в інтервалі температур поліморфних перетворень за монотонного охолодження; знаходження відсоткового вмісту залишкових фазових складових на основі вище згаданих відомих аналітичних залежностей, отриманих з використанням статистичного аналізу експериментальних термодинамічних діаграм фазових змін у зразках, виготовлених з двох типів розглядуваних сталей за монотонного охолодження в інтервалі поліморфних перетворень (де він встановлений у межах  $850\div 500$  °C); визначення залишкових напружень на основі задачі, сформульованої в переміщеннях за підходу методу умовних деформацій при знайденій деформації, зумовленій різним відсотковим вмістом наявних при перетвореннях фазових складових за відмінності у їх питомих об'ємах).

Розроблено для збільшення пластичності зони термічного впливу методу параметричної оптимізації характеристик рухомих розподілених джерел тепла (з одним, двома та трьома центрами локалізації) відносно відсоткового вмісту мартенситу (за критерієм мінімуму максимального вмісту мартенситу) при зменшенні рівня залишкових напружень.

Виявлені на основі аналізу отриманих розв'язків з використанням опрацьованого програмного забезпечення нові дані про залишкові напруження та фазові розподіли в тонких маловуглецевих низьколегованих сталевих пластинах при високотемпературному нагріві одним джерелом, цим джерелом і одним та двома додатковими за різних (в тому числі оптимальних) центрів їх локалізації і параметрів потужності, а також при одному джерелі за врахування вихідного хімічного складу сталі та певних термічних і технологічних умов нагріву [1].

1. Волчаньски Т, Гачкевич О, Козакевич Т., Кушинир Р. Моделирование и оптимизация остаточных структурного и напряженного состояний стальных пластин при нагреве подвижными источниками тепла с учетом избранных дополнительных термических и технологических факторов // Manufacturing processes. Actual Problems. – 2018.– Vol 2: Modelling and optimization of manufacturing processes (Моделирование и оптимизация производственных процессов). Studia i monografie z. 493 (ISBN 978-83-66033-23-8, pod red. nauk.: O. Hachkevych, A. Stanik-Besler, T. Wolczański). – Opole: Oficyna Wydawnicza politechniki Opolskiej, 2018. – Глава 12. – С. 217-232.

**RESIDUAL STRUCTURAL AND STRESSED STATES OF STEEL PLATES SUBJECTED TO HEATING BY MOVING HEAT SOURCES STIPULATED BY DIFFERENCE OF SPECIFIC VOLUMES OF PHASE COMPONENTS**

*Methodic and corresponding calculation scheme for definition of residual phase and stress states of thin plates made of low carbon low alloy steels subjected to local heating by moving distributed heat sources are proposed.*

## ВЕБ-СЕРВІС ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ТОНКИХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Етері Гарт, Олег Марченко, Дмитро Кравцов**

*Дніпровський національний університет ім. О. Гончара (Україна);*

*Громадська організація "АСОЦІАЦІЯ НООСФЕРА" (Україна)*

[hart@ua.fm](mailto:hart@ua.fm); [marchenko@noosphere.com](mailto:marchenko@noosphere.com); [kravtsov@noosphere.com](mailto:kravtsov@noosphere.com)

На сьогоднішній день використання тонкостінних конструкцій, елементами яких є пластини і оболонки, є невід'ємною частиною проектування. Застосування аналітичних методів у більшості практичних випадків доволі обмежене, а іноді навіть неможливе, тому часто використовують числові методи розрахунку [1-3].

Розроблений та запрограмований на мові С# веб-сервіс МСЕ-аналізу дозволяє виконувати розрахунки тонких пластин в мережі Інтернет з будь-якого сучасного пристрою – мобільного телефону, планшета, ноутбука, персонального комп'ютера тощо. Моделювання проводиться з використанням трикутних або чотирикутних скінченних елементів із можливістю побудови адаптивних сіток.

Робота з сервісом починається з задання геометричних параметрів пластини і отворів, їх кількості і місця розташування (вказуються розміри отворів та координати їх центрів), механічних властивостей матеріалу та вибору типу скінченних елементів. Далі задаються параметри створення сітки. Сітку можна будувати рівномірну, зі сталими розмірами по всій пластині, або адаптивну, зі згущенням її в окремих місцях пластини, де спостерігається зростання градієнту. Користувач, вибираючи адаптивну сітку, має можливість у ручному режимі вказати зону її подрібнення та задати її крок.

Після вибору параметрів сітки необхідно задати умови закріплення пластини. У сервісі доступні три види закріплень на краях пластини: жорстке заземлення, нерухома опора та вільний край.

Наступним кроком користувач повинен обрати вид навантаження. Ця можливість реалізована в виборі одного з трьох видів навантаження, а саме: рівномірне, за лінійною та параболічною залежностями у випадку прямокутної сітки або рівномірне у разі трикутної сітки. Вибір виду навантаження передбачає, що сервіс здійснює його приведення до вузлових значень у відповідності до побудованої сітки. Так, формула приведення навантаження до вузлового має вигляд [1, 2]:  $P_i = \int_{\Omega_r} p(x, y) f_i d\Omega_r$ , де  $p(x, y)$  – функція навантаження;  $f_i$  – ко-

$$\Omega_r$$

ординатні функції,  $\Omega_r$  – область довільного скінченного елемента.

Для різних видів навантаження використовуються такі вирази:

- рівномірно розподілене:  $p(x, y) = P$ ;
  - лінійно розподілене:  $p(x, y) = Px / A$ ;
  - розподілене за параболічною залежністю:  $p(x, y) = P(1 - (2x + A)^2) / A^2$ ,
- де  $A$  – ширина пластини;  $P$  – максимальне значення інтенсивності навантаження.

Після приведення заданих неперервних навантажень до вузлових знаходиться розв'язок системи лінійних рівнянь за допомогою градієнтного методу. Отримані результати візуалізуються. Сервіс передбачає можливість побудови 2D- і 3D-зображень напружень, деформацій і прогину деформованої моделі пластини, а також графіків розподілу отриманих параметрів вздовж вказаного користувачем поперечного перерізу пластини.

Перспективами розвинення даного сервісу є додавання наступних можливостей: розрахунок різних за формою пластин; інші геометричні форми отвору; застосування гібридного скінченного елемента; інші види розподілу навантаження; інші способи фіксації пластини. Ці та інші модифікації зроблять сервіс придатним для практичних розрахунків в галузях авіа- та ракетобудування, цивільного та промислового будівництва. Сервіс розташований за адресою: <https://www.sciencehunter.net/Services/Apps/FiniteElements>.

1. Белкин А.Е., Гаврюшин С.С. Расчет пластин методом конечных элементов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 232 с.
2. Варвак П.М., Бузин И.М., Городецкий А.С., Пискунов В.Г., Толокнов Ю.Н. Метод конечных элементов. – К.: Вища школа, 1981. – 176 с.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method for solid and structural mechanics. – New York: Elsevier, 2005. – 632 p.

### A WEB SERVICE FOR CALCULATION OF THIN PLATES BY THE FINITE ELEMENT METHOD

*Thin-walled structures are very often used in design. The one example of such structures is plates. Cracks and holes in them are very common. There are analytical and numerical methods for calculating the plates. The analytical methods allow us to calculate simple cases, whereas the numerical ones are more versatile and programmable. The well-known finite element method (FEM) is used in SolidWorks, Ansys, Nastran, Creo etc.*

*There was created a web service based on FEM. It allows users to work with plates with holes under different loads (linear, uniform, parabolic). It also allows to visualize obtained stresses, strains, displacements and stress intensities. The distribution of stress and strain over cross sections of the plate can be visualized for rectangular FE. The service is available at <https://www.sciencehunter.net/Services/Apps/FiniteElements>.*

УДК 539.3

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ЗА НАПРУЖЕННЯМИ  
РЕЖИМІВ ВІДПАЛУ ТЕРМОЧУТЛИВИХ СКЛЯНИХ ЕЛЕМЕНТІВ  
ПРИ НАГРІВІ КОНВЕКТИВНИМ СПОСОБОМ  
І ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА**

**Микола Гачкевич, Євгеній Ірза,  
Адріан Торський, Анна Равска-Скотнічни**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем  
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Політехніка Опольська (Польща)*

В роботі розглянуто задачу про моделювання та оптимізацію за напруженим станом режимів відпалу скляних елементів конструкцій з метою пониження рівня залишкових напружень шляхом їх релаксації. При цьому за розрахунковий елемент вибрано елемент малої кривини, який моделюється вільною на краях (торцях) пластиною постійної товщини  $2h$ .

Пластину необхідно нагріти зовнішньою температурою і джерелами тепла від сталोї початкової температури  $t_p$  до максимальної  $t_0$  за час  $\tau_0$  на поверхні  $\gamma = h$ , витримати цю температуру деякий проміжок часу  $\tau_B$ , а потім охолодити поверхню до кінцевої  $t_*$  ( $t_* \leq t_0$ ) за час  $\tau_*$  при заданих обмеженнях на зміну температури і температурні напруження. Функцією керування є температура зовнішньої поверхні пластини (яка є шуканою функцією) і задовольняє у відповідності до мети нагріву певним умовам, що відображають завдання нагріву і специфіку термообробки скляних виробів. В якості критерію оптимальності приймається функціонал максимальних нормальних напружень.

Розв'язок сформульованої задачі оптимізації будується на основі принципу поетапної параметричної оптимізації, причому для здійснення етапу пошуку умовного мінімуму функціоналу застосовується ітераційний метод локальних варіацій, який базується за відомих значень варіюваних величин, (які є розв'язками прямих задач: температура-задачі теплопровідності за постійних характеристик матеріалу, а напруження-задачі термопружності тонких оболонок за термочутливого коефіцієнта температурного розширення).

При відомих оптимальній температурі  $t^+(\tau)$  поверхні  $\gamma = h$  і значеннях коефіцієнтів тепловіддачі, на основі крайових умов Ньютонів встановлюється відповідний цій температурі закон зміни температури зовнішнього середовища  $t^c$  (гріючої температури – функції керування).

В прямій задачі теплопровідності приймається, що на основах  $\gamma = \pm h$

пластини підтримується відома змінна в часі температура  $t^\pm(\tau)$ . Температурне поле в пластині описується стандартним неоднорідним рівнянням теплопровідності за ненульової початкової умови.

Для отримання наближеного розв'язку задачі теплопровідності, зручно-го для використання в числових алгоритмах оптимізації, розподіл температури апроксимується за товщинною координатою  $\gamma$  кубічним поліномом

$$t(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \sum_{i=1}^m b_{i-1}(\alpha_1, \alpha_2, \tau) \gamma^{i-1}. \quad (1)$$

Тут  $(\alpha_j, \gamma)$  – змішана ортогональна система координат, в якій  $\alpha_j$ ,  $j=1;2$  – лінії головних кривин серединної поверхні пластини, а  $\gamma$  – нормаль до цієї поверхні;  $\tau$  – час.

Функції  $b_{i-1}(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$  виражено через наступні усереднені характеристики температурного поля за товщинною координатою  $\gamma$  оболонки

$$T_p = \frac{2p-1}{2h^p} \int_{-h}^h t \gamma^{p-1} d\gamma, \quad p = \overline{1; m-1} \quad (2)$$

і задані крайові умови.

Рівняння для визначення усереднених характеристик  $T_p$  отримуються шляхом множення рівняння теплопровідності на  $\gamma^{p-1}$  і інтегруванням по цій координаті з врахуванням співвідношень (2).

Невідомі коефіцієнти  $b_{i-1}$  апроксимуючого полінома (1) визначено з системи рівнянь, яку отримано безпосередньою підстановкою представлень (1) у відповідні межові умови і співвідношення (2).

Для заданого закону нагріву (при відомій температурі поверхні) усереднені характеристики температури знаходяться з відповідної системи рівнянь методом найменших квадратів. При обчисленні чисто теплової деформації і її усереднених характеристик залежність коефіцієнта лінійного теплового розширення від температури апроксимується за допомогою кусково-лінійних функцій. При відомих значеннях чисто теплової деформації і її усереднених характеристик величина напружень в термочутливій пластині визначається за відомими формулами.

Проведено числовий аналіз побудованих оптимальних режимів при однорідному симетричному нагріві пластини і дії в ній постійних джерел тепла потужністю  $10^5$  Вт/м<sup>3</sup>.

**THE METHOD OF OPTIMIZATION OF THE MODES OF SATURATED THERMULATED GLASS ELEMENTS IN HEATING BY CONVECTIVE METHOD AND HEAT SOURCES**

*The technique of optimization of the annealing modes of heat-sensitive glass elements is proposed for heating by convective method and heat sources.*

## МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЧАСТКОВО ПРОЗОРОГО ШАРУ ЗА ДВОСТОРОННЬОГО ТЕПЛОВОГО ОПРОМІНЕННЯ ВИПРОМІНЮВАЧАМИ РІЗНИХ ТИПІВ

**Олександр Гачкевич, Орест Гуменчук,  
Ростислав Терлецький, Анджей Маринович**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;  
Політехніка Опольська (Польща)*

[dept13@iapmm.lviv.ua](mailto:dept13@iapmm.lviv.ua); [or1961@ukr.net](mailto:or1961@ukr.net); [a.marynowicz@po.opole.pl](mailto:a.marynowicz@po.opole.pl)

Термообробка частково прозорих елементів приладів та конструкцій з використанням електромагнітного випромінювання, а також їх експлуатація за умов дії такого випромінювання, в багатьох випадках спричинюють виникнення значних деформацій та температурних напружень, які можуть приводити до порушення функціональних властивостей виробів. Таке випромінювання в технологічному нагрівачі створюється в переважній більшості за допомогою ксенонових ламп (найбільш потужних джерел випромінювання) та ламп типу КГ, нитка розжарювання яких виготовлена з вольфраму. Основна кількість енергії випромінювання цих ламп припадає на ділянку спектру, який відноситься до теплового випромінювання, проте розподіл такої енергії за спектром для кожної з ламп суттєво відрізняється. Це призводить до поглинання тілом різної для кожного випромінювача кількості енергії.

В реальних умовах, особливо при експлуатації приладів, частково прозорі елементи конструкцій зазнають радіаційного впливу від багатьох джерел випромінювання, потоки енергії від яких мають різний спектральний склад. В зв'язку з цим актуальним є дослідження термомеханічної поведінки частково прозорих тіл за умов опромінення багатьма випромінювачами з урахуванням їх реальних спектральних розподілів енергії випромінювання.

Одночасне опромінення частково прозорого тіла декількома випромінювачами з відмінними розподілами за спектром променевої енергії спричинює залежність від їх спектрів просторового розподілу енергії випромінювання в тілі. Тоді і тепловиділення в тілі, що виникають в результаті поглинання матеріалом тіла променевої енергії, і відповідний їм термонапружений стан тіла є залежними від змінного спектрального складу стороннього опромінення.

В даній роботі сформульовано задачу про нагрів за двостороннього опромінення, сформованого різними випромінювачами з відмінними один від іншого розподілами за спектром енергії випромінювання, скляного шару. Особливістю такої дії є змінність просторово-спектрального розподілу енер-

гії випромінювання і можливість керованості ним в шарі. Досліджено вплив на термонапружений стан скляного шару як опромінення окремо кожного з випромінювачів, так і їх комбінації.

При цьому на основі феноменологічної теорії випромінювання в наближенні не випромінюючого і нерозсіюючого матеріалу та співвідношень квазістатичної термопружності розвинуто відому [1] модель опису зумовленого тепловим опроміненням термонапруженого стану частково прозорого тіла на випадок комбінованого спектрального складу потоку енергії випромінювання. В рамках цієї моделі, на основі припущень незалежності від температури та рівності середнім значенням на проміжку нагрівання характеристик шару, дифузності поверхонь випромінювачів та шару, механічної крихкості матеріалу шару, дія поля теплового випромінювання на термонапружений стан тіла описується наступною розрахунковою схемою [1]:

– з задачі теорії випромінювання, в якій вихідним є рівняння переносу в наближенні не випромінюючого і нерозсіюючого матеріалу [2], визначається спектральна інтенсивність випромінювання та відповідні їй тепловиділення. При цьому на основі балансових співвідношень на радіаційні потоки на поверхнях розділу середовищ [2] з урахуванням законів Планка і Бугера [2] сформульовано систему інтегральних рівнянь для визначення спектральних густин потоків енергії випромінювання на поверхнях (кількість яких рівна кількості сторін поверхонь, що приймають участь у теплообміні випромінюванням, в тому числі і випромінювачів);

– з задачі теплопровідності, в якій окреслені на першому етапі тепловиділення використані як питома потужність неперервно розподілених теплових джерел, знаходиться температурне поле;

– при відомих температурному полі та силових навантаженнях на основі розв'язку квазістатичної задачі термопружності встановлюються параметри спричиненого ними пружного-деформівного стану тіла.

Результати числових досліджень проілюстровано на прикладі задачі про термомеханічну поведінку скляного шару за двостороннього теплового опромінення ксеноновими та галогенними лампами. Проаналізовано можливості оптимізації процесу нагріву шару за наявності керованості спектральним розподілом енергії випромінювання в ньому.

1. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 192 с.
2. Зигель Р., Хауэлл Д. Теплообмен излучением. – Москва: Мир, 1975. – 935 с.

**MODELLING OF THERMOSTRESSED STATE OF SEMITRANSSPARENT LAYER  
SUBJECTED TO BILATERAL THERMAL RADIATION  
BY EMITTERS OF DIFFERENT TYPES**

*The thermo-stressed state of the glass layer subjected to bilateral thermal radiation is investigated.*

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА МЕТОДИКА НАБЛИЖЕНОГО  
ВИЗНАЧЕННЯ КВАЗИСТАТИЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ  
ЛІНІЙНО НАМАГНІЧУВАНИХ ТОНКИХ ОБОЛОНОК  
ПРИ ДІЇ КВАЗІУСТАЛЕНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ  
ЗА НАЯВНОСТІ СКІНЕФЕКТУ**

**Олександр Гачкевич, Роман Івасько, Стефан Моринь, Борис Чорний**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;  
Політехніка Опольська (Польща);  
Львівський філіал Дніпровського національного університету  
залізничного транспорту (Україна)*

[dept13@iapmm.lviv.ua](mailto:dept13@iapmm.lviv.ua); [roman\\_ivasko@ukr.net](mailto:roman_ivasko@ukr.net); [s.moryn@po.opole.pl](mailto:s.moryn@po.opole.pl)

При індукційній термообробці елементів конструкцій оболонкового типу широко застосовують нагрів струмами високої частоти, за якого забезпечується найбільший коефіцієнт корисної дії передачі електромагнітної енергії в тіло, що нагрівається. Однак виникаючі за такого нагріву тепловиділення і пондеромоторні сили концентруються в приповерхневих шарах тіл, що приводить до великої градієнтності температурних полів в області нагріву, а також пондеромоторних сил і, як наслідок – значних рівнів деформацій та напружень, які можуть перевищувати допустимі.

В літературі відома розрахункова модель визначення квазістатичного напруженого стану електропровідних неферромагнітних оболонок при індукційному нагріві за наявності скінефекту [1-3]. При цьому термонапружений стан пов'язується з усередненими за період коливань електромагнітної хвилі джоулевими тепловиділеннями. Приймається, що наявна частота електромагнітного поля (ЕМП) міститься поза вузьким околom резонансної (яка для добрих провідників практично рівна половині відповідної власної частоти коливань досліджуваної оболонки).

В зв'язку з вищевикладеним є актуальними і практично важливими моделювання та опрацювання методик визначення, дослідження і оптимізації температурних полів і напружень, які виникають в електропровідних оболонках за дії ЕМП, що створюються заданими зовнішніми квазіусталеними електричними струмами, при максимальному використанні характерних особливостей розподілу наявних полів в оболонках за поверхневого індукційного нагріву [2, 3].

В даному дослідженні опрацьовано математичну модель і методику визначення квазістатичного термонапруженого стану лінійних відносно магнітних властивостей електропровідних пластин і оболонок за поверхневого індукційного нагріву квазіусталеними ЕМП. При цьому ЕМП відносно тіла вважається сторонньою дією, яка проявляється наявністю тепловиділень і силових факторів. Приймається, що частота ЕМП міститься поза околами резо-



нансних [3]. Термонапружений стан пов'язується з такими факторами дії поля: усередненими за період електромагнітних коливань джоулевими тепловиділеннями і пондеромоторними силами дії поля на струми.

В наближенні незалежних від температури характеристик матеріалу запропоновано трьохетапну розрахункову схему розв'язування проблеми, в якій на першому етапі визначаються з відповідної задачі електродинаміки параметри ЕМП, записуються вирази чинників дії поля через ці параметри. На другому етапі на основі відповідної задачі теплопровідності, де об'ємними джерелами тепла виступають джоулеві тепловиділення, знаходиться температурне поле. На третьому етапі, використовуючи теорію термомеханіки тонких пластин і оболонок при вже відомих температурному полі і пондеромоторній силі (яка виступає як об'ємна сила), визначаються параметри напружено-деформівного стану.

На першому етапі, тобто при знаходженні ЕМП, використано метод Вішика-Люстерника подання шуканого розв'язку відповідних сингулярно збудованих рівнянь електродинаміки у вигляді асимптотичного розкладу в ряд за малим параметром відносної глибини проникання індукційних струмів. При знаходженні температурного поля застосовано скінченне інтегральне перетворення за товщиною оболонки. При визначенні температурних напружень в оболонці за вихідні прийнято рівняння незв'язаної квазістатичної термопружності тонких оболонок, яка ґрунтується на гіпотезі Кірхгофа-Лява і використано відомі методи розв'язування таких рівнянь.

Як приклад, розглянуто задачу про визначення джоулевого тепла, пондеромоторної сили, температурних полів та напружень в тонких пластинах при їх односторонньому індукційному нагріві зовнішніми струмами, розподіленими в струмонесучій площині, яка паралельна поверхні пластини.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень" КПКВК 6541230.

1. *Гачкевич А.Р., Чорний Б.И.* Определение напряженного состояния электропроводных оболочек при приповерхностном индукционном нагреве / Исследования по механике твердого деформируемого тела. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1981. – С. 75-80.
2. *Hachkevych O., Kasperski Z., Chornyj B., Dzyubachyk O.* Study of the thermostressed state of electrically conductive nonferromagnetic shells // J. Theor. Appl. Mech. – 2003. – 41, No. 3. – P. 521-526.
3. *Гачкевич А.Р.* Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 192 с.

**MATHEMATICAL MODEL AND METHODS FOR THE APPROXIMATE DETERMINATION OF THE QUASI-STATIC STRESS STATE OF LINEARLY MAGNETIZED THIN SHELLS SUBJECTED TO QUASI-STEADY ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE PRESENCE OF SKIN-EFFECT**

*The mathematical model and methods of determination of quasistatic thermally stressed state of linear with respect to magnetic properties electrically conductive shells subjected to surface induction heating by quasi-steady electromagnetic fields are developed.*

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КВАЗИСТАТИЧНОЇ  
ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ЛІНІЙНИХ ВІДНОСНО  
МАГНІТНИХ І ЕЛЕКТРИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТІЛ  
ЗА ДІЇ КВАЗІУСТАЛЕНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ  
ПРИ НАЯВНОСТІ ПІДМАГНІЧУВАННЯ**

**Олександр Гачкевич, Роман Івасько, Аніда Станік-Беслер**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;  
Політехніка Опольська (Польща)*

[dept13@iapmm.lviv.ua](mailto:dept13@iapmm.lviv.ua); [roman\\_ivasko@ukr.net](mailto:roman_ivasko@ukr.net); [a.stanik-besler@po.opole.pl](mailto:a.stanik-besler@po.opole.pl)

У багатьох сучасних технологіях використовують термообробку виробів із застосуванням квазіусталених за часом електромагнітних полів, параметри яких мало змінюються за період електромагнітних коливань (КУЕМП). У таких виробках індукуються електричні струми, які спричинюють виникнення тепловиділень та пондеромоторних сил. Ці фактори приводять до наявності температурних полів та напружень, які можуть досягати значних величин і перевищувати допустимі. Для оцінки характеристик згаданих полів необхідні ефективні розрахункові моделі визначення параметрів електромагнітного поля (ЕМП), тепловиділень, пондеромоторних сил, температури та механічних напружень залежно від параметрів зовнішнього електромагнітного навантаження, умов теплообміну розглядуваного тіла з довкіллям, механічних граничних умов, електрофізичних, теплофізичних та механічних характеристик матеріалу. В літературі наявні окремі роботи про визначення механічної поведінки електропровідних тіл за дії усталених і квазіусталених ЕМП. Проте часто дія таких полів відбувається за наявності стороннього (природного чи створюваного технічними засобами) постійного магнітного поля (т.зв. підмагнічування [1]). Тому має практичне значення дослідження термомеханічної поведінки електропровідних тіл за таких навантажень.

Запропоновано математичну модель дослідження параметрів, що описують термомеханічну поведінку електропровідних тіл з лінійного відносно електричних і магнітних властивостей матеріалу за дії зовнішніх КУЕМП, заданих значенням вектора напруженості магнітного поля на поверхні тіла, який є сумою квазіусталеного вектора і паралельного до нього постійного (вектора підмагнічування).

Використано відому розрахункову схему задачі магнітотермомеханіки, при якій розв'язок будується за три етапи [1]. На першому етапі з використанням принципу суперпозиції ЕМП з рівнянь електродинаміки визначено

магнітне поле в квазіусталеному наближенні і просумовано з наявним постійним. Після цього записано відповідні вирази для потужності тепловиділень і густини пондеромоторних сил. На другому етапі з відповідного рівняння теплопровідності (в якому джерелами тепла є тепловиділення, окреслені на першому етапі) знайдено температурне поле. На третьому етапі на основі співвідношень динамічної термопружності за відомих виразів для температури і пондеромоторних сил визначено переміщення і напруження.

Числові дослідження проведено для шару, виготовленого з різних ферромагнітних металевих матеріалів за наявності дії монохроматичного складника  $H_1 \sin \omega t$  і незалежного від часу рівного  $H_0$ .

Верхня основа  $z = 0$  шару вільна від стороннього силового навантаження, а при  $z = 1$  переміщення  $u_z$  рівні нулю (механічні умови, при яких задача динамічної термопружності є одновимірною).

Проведений аналіз термонапруженого стану розглядуваного електропродовного ферромагнітного шару за наявності окресленого підмагнічування показав, що як і у випадку без підмагнічування рівні температурних полів і напружень значно зростають при наближенні частоти зовнішнього ЕМП до наявних (резонансних) значень. Це зростання зумовлене квазіусталеними складовими пондеромоторних сил і джоулевого тепла, коли їх частота  $2\omega$  наближається до однієї з власних частот пружних коливань тіла  $\omega_*$ .

Отримано, що термопружний стан шару за одночасної дії гармонічної та незалежної від часу компонент зовнішнього магнітного поля суттєво залежить також від співвідношення між  $H_1$  і  $H_0$  та відносної глибини проникання магнітного поля.

Досліджено закономірності розподілів температури і напружень у шарі для широкого діапазону значень магнітного поля, за яких напруження не перевищують межі пружності.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень” КПКВК 6541230.

1. *Гачкевич А., Івасько Р., Солодяк М., Станик-Бєслер А., Тарлаковський Д.* Модели описания электромагнитного поля в ферромагнитной среде при наличии подмагничивания // In: Manufacturing processes. Actual problems – 2013. – Vol. II. Modeling and optimization of manufacturing processes. – Studia i monografie. – Z. 365 / Pod red. nauk.: *M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler.* – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2013. – Гл. 2. – С. 35-44.

**MATHEMATICAL MODELING OF QUASISTATIC THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF LINEAR WITH RESPECT TO MAGNETIC AND ELECTRICAL PROPERTIES SOLIDS SUBJECTED TO QUASI-STEADY ELECTROMAGNETIC FIELDS WITH BIASING**

*The method for approximate calculation of the parameters to describe thermoelastic state of linear with respect to magnetic and electrical properties solids subjected to quasi-steady electromagnetic field with biasing is proposed.*

## МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ВОДНЮ НА НАГРОМАДЖЕННЯ ПОШКОДЖЕННЯ В МЕТАЛІ ЗА ПОВЗУЧОСТІ

**Оксана Гембара, Ольга Чепіль, Тарас Гембара, Ярослав Сапужак**

*Національний університет «Львівська політехніка» МОН України;*

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України;*

*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності (Україна)*

[hembara@ipm.lviv.ua](mailto:hembara@ipm.lviv.ua); [oljach0409@gmail.com](mailto:oljach0409@gmail.com);  
[taras.gembara@gmail.com](mailto:taras.gembara@gmail.com); [yaragsap@gmail.com](mailto:yaragsap@gmail.com)

Елементи багатьох конструкцій хімічної, паливно-енергетичної та ряду інших галузей промисловості під час експлуатації піддаються впливу навантажень, температур і агресивних робочих середовищ, при цьому в багатьох випадках агресивним середовищем є воденьмісне [1].

Як показують експериментальні дослідження, вплив водню негативно позначається на механічних характеристиках матеріалів конструктивних елементів, приводячи до зміни напружено-деформованого стану, нагромадження пошкоджень і в результаті до скорочення довговічності.

Залежно від температури і тиску водень може двояко впливати на матеріал конструкції. За низьких і нормальних температур і тисках водень викликає т.зв. водневе окрихчення, тобто матеріал, який був пластичним, з часом стає крихким. За високої температури (більше 200 градусів) і тиску (близько 30-40 МПа) викликає хімічну взаємодію компонентів матеріалу з ним, приводячи до обезвуглечення матеріалу і появи наведеної неоднорідності і зміни напружено-деформованого стану конструктивних елементів.

Однією з найважливіших характеристик, що визначають надійну і довговічну роботу обладнання і трубопроводів в різних галузях промисловості, є тривала міцність матеріалу, оскільки водень може діяти тривалий час і при експлуатації діючих елементів конструкцій дуже жорстко стоїть питання про ресурс їх роботи, а дані отримані за короткочасних випробувань в умовах впливу водню не можуть відповісти на питання про ресурс. Тому таке важливе практичне значення мають дослідження на тривалу міцність і повзучість з урахуванням впливу водню.

У роботах, на основі раніше розробленого авторами підходу [2, 3], проведено дослідження впливу рівня наводнювання на кінетику нагромадження пошкодження в металі та довговічність в цілому.

Досліджували зразок Бріджмана, виготовленого зі сталі 0.5Cr0.5Mo0.25V, за умов простого розтягу за температури 640 °С, наванта-

ження  $P = 40$  МПа, після наводнювання за трьох різних тисків водню:  $P_{1H} = 1$ ,  $P_{2H} = 3$ ,  $P_{3H} = 32$  МПа. Задачу розв'язували методом скінченних елементів за допомогою програмного пакету MSC Marc Mentat 2014.0.0. У результаті побудовано криві, що характеризують кінетику нагромадження пошкоджень за різних концентрацій водню (рис. 1) та його вплив на довговічність зразка (рис. 2).

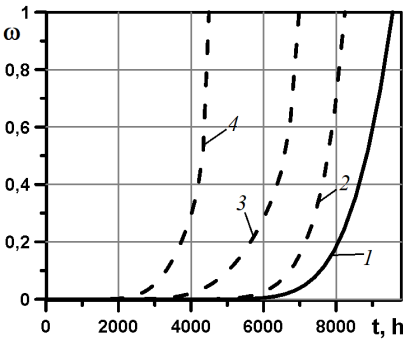


Рис. 1 Кінетика накопичення пошкоджень в ненаводненому (1) і наводненому (2, 3, 4) зразку

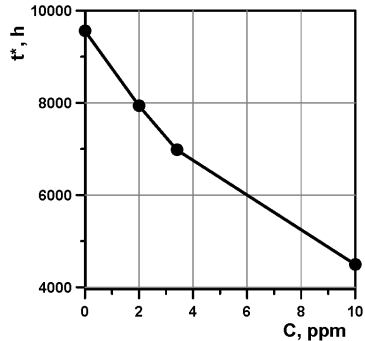


Рис. 2 Вплив водню на час до руйнування зразка Бріджмена

Як видно з цих результатів, наводнювання зразка суттєво впливає на його довговічність. Так, за концентрації водню 2 ppm, час до руйнування становив 7935 h, що на 13 % менше порівняно з показником довговічності для ненаводненого зразка, який становив 9560 h. Але вже за наводнювання до  $C_0 = 10$  ppm спостерігається різке падіння показників довговічності до 4494 h, майже 53 %.

1. *Андрейків О.Є., Гембара О.В.* Механіка руйнування та довговічність металічних матеріалів у водневмісних середовищах. – Київ: Наук. думка, 2008. – 344 с.
2. *Fabing Qin., Гембара О.В., Ченіль О.Я.* Моделювання впливу водню на несучу здатність елементів енергетичного обладнання в умовах температурної повзучості // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – **53**, № 4. – С. 99-106.
3. *Chang Shu, Гембара О.В., Ченіль О.Я.* Розрахунок ресурсу теплоенергетичного обладнання за довготривалого статичного навантаження, високої температури та дії водню // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 1. – С. 105-111.

#### MODELING OF THE EFFECT OF HYDROGEN ON THE ACCUMULATION OF DAMAGE IN THE METAL BY CREEP

*The effect of different concentrations of hydrogen on the Bridgman sample durability had been analyzed using the energy criterion proposed by the authors [2, 3]. It has been established that hydrogen reduces the durability of structural elements by 17-53%, depending on the level of hydrogen concentration in the conditions of material creep.*

## РІВНЯННЯ ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНИХ БАЛОК БЕРНУЛЛІ-ЕЙЛЕРА

Ольга Грицина

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

[hrytsyna.olha@gmail.com](mailto:hrytsyna.olha@gmail.com)

Сформульовано систему рівнянь локально градієнтної теорії балок. При цьому використано гіпотези теорії пружних балок Бернуллі-Ейлера та локально градієнтної пружності. Розв’язувальну систему рівнянь та відповідні крайові умови отримано з використанням варіаційного принципу. Сформульовані рівняння застосовані для визначення переміщень консольної нанобалки з пружними характеристиками матеріалу PZT-5H. Вільний кінець балки перебуває під дією зосередженої сили  $Q = 1$  nN. Результати числових досліджень наведені на рис. 1 для нанобалки завдовжки 500 nm, завтовшки 10 nm та висотою 20 nm. Штрих-пунктирна лінія відповідає класичній теорії, а суцільні лінії – локально градієнтній теорії балок для  $a = 0.21$  та  $a = 0.51$ , де  $a$  – параметр взаємозв’язку локального зміщення маси з механічними полями. Аналіз одержаного результату засвідчив, що локально градієнтна теорія передбачає менший (порівняно з класичною) прогин наноконсольної балки, тобто збільшення її жорсткості. Такий результат добре узгоджується з результатами градієнтної теорії балок, що враховує градієнт тензора деформації (див. штрихові лінії, які відповідають значенням характерної віддалі  $l = 3$  nm і  $l = 4$  nm).

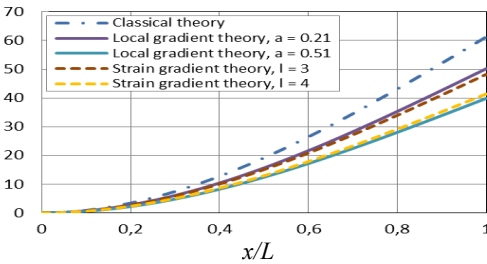


Рис. 1 Прогин  $W$  (nm) нанобалки

### EQUATIONS OF THE LOCAL GRADIENT THEORY OF BERNOULLI-EULER ELASTIC BEAM

Analytical solution of a bending problem for cantilever beam is obtained within the framework of the local gradient theory of Bernoulli-Euler beam. The governing equations and boundary conditions are derived from a variational principle. It is shown that the deflection in the local gradient theory is smaller than that in the classical beam theory which indicates that the accounting of the local mass displacement stiffens the beam.

**ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ І НАПРУЖЕННЯ В ЧАСТКОВО  
ПРОЗОРОМУ ШАРІ ПРИ ТЕПЛОВИМУ ОПРОМІНЕННІ  
ЗА ВИКОРИСТАННЯ ДВОХ ТИПОВИХ ПРОМИСЛОВИХ  
ВИПРОМІНЮВАЧІВ**

**Орест Гуменчук, Ростислав Терлецький,  
Александра Журавска, Ева Буркевич-Янік**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;  
Політехніка Опольська (Польща)*

[or1961@ukr.net](mailto:or1961@ukr.net); [dept13@iapmm.lviv.ua](mailto:dept13@iapmm.lviv.ua); [a.zurawska@po.opole.pl](mailto:a.zurawska@po.opole.pl)

Термообробка частково прозорих елементів приладів і конструкцій (матеріали яких є, як правило, крихкими) з використанням теплового опромінення, а також їх експлуатація в умовах такого впливу в багатьох випадках викликають виникнення значних деформацій і температурних напружень, які можуть призводити до порушення функціональних властивостей виробів.

Реалізація процесу термообробки з використанням теплового опромінення пов'язана з вибором джерел випромінювання. Найбільш поширеними випромінювачами в технологічних пристроях (печах) нагріву є ксенонові лампи (потужні джерела випромінювання) і кварцові галогенні лампи (типу КГ), основним елементом яких є вольфрамова нитка розжарення в інертному газі (йоді або бромі). Основна кількість енергії випромінювання емітується цими лампами на ділянці спектра, який припадає на теплове випромінювання, проте її розподіл по спектру для даних типів ламп може істотно відрізнитися.

Реальний розподіл енергії випромінювання нагрітого тіла по спектру відрізняється від ідеалізованого еталонного випромінювання абсолютно чорного тіла, що проявляється в спектральній залежності ступеня чорноти конкретного матеріалу. Крім цього, дугові лампи типу ксенонових мають свій особливий спектр випромінювання. Це призводить до поглинання тілом різної для кожного випромінювача кількості енергії.

У літературі відомі роботи, присвячені знаходженню тепловиділень, температурних полів і напружень в частково прозорих тілах при дії теплового випромінювання. Однак в переважній більшості з них при описі процесів теплообміну випромінюванням розподіл по спектру променевої енергії приймається пропорційним спектральному розподілу енергії випромінювання абсолютно чорного тіла з певним коефіцієнтом (що є спрощенням при врахуванні радіаційних властивостей), який може бути інтегральним ступенем чорноти матеріалу випромінювача. Тому актуальним є дослідження впливу на термомеханічну поведінку частково прозорого тіла при зовнішньому опромі-

ненні спектрального складу випромінювання і його співвідношення із спектральною залежністю поглинаючої властивості матеріалу тіла.

У зв'язку з цим на основі феноменологічної теорії випромінювання в наближенні не випромінюючого і нерозсіюючого матеріалу та співвідношень квазістатичної термпружності сформульована задача про визначення термонапруженого стану частково прозорого шару за зовнішнього теплового опромінення. З використанням відомої методики розв'язування таких задач досліджено термомеханічні процеси в скляному шарі при зовнішньому тепловому опроміненні і зроблено порівняльний аналіз тепловиділень, температури і напружень в шарі з різних видів скла за дії згаданих вище типів джерел випромінювання.

Для дослідження впливу на термонапружений стан частково прозорого тіла випромінювання довільного спектрального складу (який може і не відповідати складу теплового випромінювання) розглянуто скляний шар товщиною 10 мм при дії зовнішнього теплового випромінювання, яке створено одним з двох типових промислових випромінювачів – галогенною (КГ-1000) або ксеноною (ДКсШ3000) лампами за відомих характерних для них спектральних залежностей випромінювальної здатності.

Матеріалом шару є один з типів скла (IR-11 або С95-3). Інтегральний потік енергії ефективного випромінювання для кожного конкретного матеріалу шару приймається однаковим для обох джерел випромінювання (і рівним потоку енергії з поверхні галогенної лампи при температурі вольфрамової нитки розжарення 2000 К; для шару зі скла IR-11 даної товщини такий потік дорівнює  $253665,6 \text{ Вт/м}^2$ ). Початкову температуру шару і температуру зовнішнього середовища приймаємо однаковими і рівними  $T_0 = T_C(t) = 20^\circ \text{C}$ .

Для заходження часово-просторових розподілів тепловиділень, температури та напружень в шарі використані числові методи Гаусса з вибором головного елемента (для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь); скінченних різниць (неявна схема) і метод прогонки (розв'язування лінійних алгебраїчних систем з трьохдіагональною матрицею); Сімпсона чисельного інтегрування та інші.

З результатів проведених досліджень випливає, що розподіли за товщиною координатою тепловиділень, температури і напружень в шарі істотно залежать як від спектрального розподілу енергії зовнішнього випромінювання, так і від спектральної залежності поглинаючої властивості матеріалу шару і їх співвідношення.

#### TEMPERATURE FIELDS AND STRESSES IN SEMITRANSSPARENT LAYER AT THERMAL IRRADIATION USING THE TWO TYPICAL INDUSTRIAL EMITTERS

*Modeling, research and comparative analysis of thermomechanical processes in a semi-transparent layer under the influence of external thermal radiation produced by two typical industrial emitters were carried out.*



**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І МЕТОДИ ТЕРМОМЕХАНІКИ ТІЛ  
ОБЕРТАННЯ, ВИГОТОВЛЕНИХ З ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ  
ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ,  
ЗА ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

**Євгеній Ірза, Анна Козьярська, Георгій Шинкаренко**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;  
Політехніка Опольська (Польща);*

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

В останні роки пройшли великі зміни в нанотехнологіях. Завдяки нанотехнологіям отримано матеріали з фізико-механічними характеристиками, які неперервно залежать від просторової координати і температури. Такі матеріали отримали назву «функціонально-градієнтні матеріали».

Конструкції з функціонально-градієнтних матеріалів досить часто піддаються певним тепловим процесам, які пов'язані з їх нагрівом і подальшим охолодженням. В результаті дії температурних полів в них виникають температурні напруження, які можуть перевищувати допустимі значення і приводити до руйнування конструкцій. Тому є важливою методика прогнозування рівня цих напружень з метою подальшої їх мінімізації. В даній роботі запропоновано таку методику за різних теплових навантажень і температур нагрівання.

Розглянуто дві типові моделі, які описують механічну поведінку тіла обертання з функціонально-градієнтних матеріалів при різних теплових навантаженнях, в залежності від діапазону температур нагріву: модель пружного термочутливого функціонально-градієнтного тіла

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\})$$

і модель в'язкопружного термочутливого функціонально-градієнтного тіла

$$\begin{cases} d\{\tilde{\varepsilon}\} = d\{\tilde{\varepsilon}^e\} + d\{\tilde{\varepsilon}^c\}, \\ \sigma_0 = 3K_0(\varepsilon_0 - \varepsilon^t). \end{cases}$$

Тут:

$$d\{\tilde{\varepsilon}^e\} = d\left(\frac{1}{2G}\{\tilde{\sigma}\}\right) - \text{закон Гука};$$

$$d\{\tilde{\varepsilon}^c\} = \frac{1}{2\eta}\{\tilde{\sigma}\} - \text{закон в'язкого течіння Ньютона};$$

$\{\tilde{\sigma}\}, \{\tilde{\varepsilon}\}$  – компоненти девіатора напружень і деформацій відповідно;

$\sigma_0, \varepsilon_0$  – середні нормальні напруження і відносні видовження відповідно;

$$\{\varepsilon^t\} = [111000]^T \cdot \int_{t_0}^t \alpha_t(s, \zeta) d\zeta - \text{тензор температурних деформацій};$$

$\eta(s, t)$  – динамічна в'язкість;  $G(s, t)$  – модуль пружності при зсуві;

$K_0(s, t)$  – модуль об'ємного стиску.

Неоднорідна структура матеріалу тіла відображається фізико-механічними характеристиками, які є залежними від просторової координати  $s$  і температури  $t$ .

В рамках цих моделей запропоновано відповідний алгоритм визначення параметрів механічних процесів. При розв'язанні використовується метод зв'язаних залишків в поєднанні з методом скінченних елементів [1]. Такий підхід дозволяє отримати ефективні наближені розв'язки сформульованих задач. Алгоритм розв'язування даних задач включає розбиття області на елементи; апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття; отримання на цій основі системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій у вузлах елементів за врахування специфіки матеріальних зв'язків в різних температурних інтервалах і алгоритм розв'язування цієї системи.

Як приклад, розв'язано задачу знаходження термонапруженого стану в порожнистому циліндрі, виготовленому з функціонально-градієнтного матеріалу за товщиною. Циліндр перебуває під дією конкретного температурного навантаження. Проведений числовий аналіз отриманих розв'язків.

Запропонована числова методика визначення напружень в тілах обертання, виготовлених з пружного функціонально-градієнтного матеріалу, за їх нагріву-охолодження дає можливість розв'язувати широкий клас задач, які пов'язані з дослідженням параметрів, що характеризують теплові і механічні процеси в конструкціях.

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Vol 1. The Basis. – London: “Butterworth Heinemann”, 2000. – 689 p.

**NUMERIC ALGORITHM OF THE SOLUTION OF THE THERMOMECHANIC PROBLEM AT THE THERMAL WORKING OF THE TREATMENT OF THERMAL-COMPRESSED GRADIENT-INHOMOGENEOUS MATERIALS**

*The numerical method of solving the problems of thermomechanics in the heat treatment of rotational bodies from thermally elastic gradient-inhomogeneous materials is proposed. One such method is the method of suspended residues in combination with the finite-element approach, which allows to obtain approximate solutions of the above tasks.*

## МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ І НАПРУЖЕНЬ В ГРАДІЄНТНО НЕОДНОРІДНОМУ ТІЛІ ОБЕРТАННЯ ЗА ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

**Євгеній Ірза, Аніта Мельчарек, Валентин Можаровський**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Політехніка Опольська (Польща);*

*Гомельський державний університет ім. Ф. Скорини (Білорусь)*

[dept13@iapmm.lviv.ua](mailto:dept13@iapmm.lviv.ua); [valenmozh@gmail.com](mailto:valenmozh@gmail.com)

Розглянуто математичну модель стану та методика визначення термонапруженого стану тіл обертання з пружних функціонально-градієнтних матеріалів.

Задачу про визначення напружено-деформованого стану в тілі формулюємо в квазістатичній постановці (в переміщеннях). Тіло обертання займає область  $\Omega$  евклідового простору  $R^3$  і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею  $\Gamma$ . Тіло віднесено до криволінійної циліндричної системи координат  $Or\varphi z$ . На частині  $\Gamma_u$  поверхні  $\Gamma$  задані переміщення  $\vec{u} = \vec{u}_0$ , а на частині  $\Gamma_\sigma$  – силове навантаження, яке характеризується вектором  $\vec{p}$ ,  $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$ . Неоднорідна структура матеріалу тіла описується фізико-механічними характеристиками, які є залежними від просторової координати і температури. Тіло піддається технологічному осесиметричному нагріванню зовнішнім середовищем з температурою  $t_c(\tau)$  через частину поверхні  $\Gamma_t$ , тепловим потоком  $q(\tau)$  через частину поверхні  $\Gamma_q$ ,  $(\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma)$ , а також розподіленими джерелами тепла потужності  $Q(\vec{r}, \tau)$ ,  $(\vec{r} \in \Omega)$ . Температурне поле в тілі описуємо відомим рівнянням теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1)$$

за таких початкової і крайових умов

$$t(r, z, 0) = t_0(r, z); \quad \left[ k \left( \frac{\partial t}{\partial r} n_r + \frac{\partial t}{\partial z} n_z \right) + \alpha(t - t_c) \right]_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Тут  $k(s, t)$  – коефіцієнт теплопровідності;  $c(s, t)$  – питома теплоємність;

$\rho(s, t)$  – густина;  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $n_r, n_z$  – компоненти зовнішньої нормалі до поверхні тіла;  $s$  – просторова координата в напрямку неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу тіла;  $\tau$  – біжучий час;  $r, z$  – просторові координати точки.

Зв'язок між компонентами тензорів напружень  $\{\sigma\}$  і деформацій  $\{\varepsilon\}$  приймається у вигляді

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}), \quad (3)$$

де  $[D]$  – матриця пружних характеристик;  $\{\varepsilon_t\}$  – тензор температурного навантаження.

В області  $\Omega$  повинні виконуватися рівняння рівноваги і крайові умови:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad (4)$$

$$n_r \sigma_{rr} + n_z \sigma_{zr} - p_r = 0, \quad n_r \sigma_{rz} + n_z \sigma_{zz} - p_z = 0 \quad \text{на } \Gamma_\sigma, \quad (5)$$

$$u_r = u_r^0, \quad u_z = u_z^0 \quad \text{на } \Gamma_u.$$

Обмежимося малими деформаціями. Зв'язок між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора має вигляд:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (6)$$

При розв'язуванні сформульованої задачі (1)–(6) використано метод зв'язаних залишків в поєднанні зі скінченно-елементним підходом.

Рівняння теплопровідності (1)–(2) зведено до вигляду

$$[C_t] d\{T\}/d\tau + [K_t]\{T\} = \{f_t\}.$$

Тут  $[C_t]$ ,  $[K_t]$ ,  $\{f_t\}$  – відповідні температурні матриці жорсткості і вектор навантаження.

Системи рівнянь (3)–(6) записано так:

$$[K_u]\{U(\tau)\} = \{F_0(\tau)\},$$

де  $[K_u]$ ,  $\{F_0\}$  – відповідно матриці жорсткості і вектор навантаження.

Як приклад, досліджено поведінку порожнистого циліндра за конкретного режиму нагріву-охолодження.

#### MODELING AND INVESTIGATION OF TEMPERATURE FIELDS AND STRESSES IN A GRADIENTALLY NONUNIFORM BODY OF REVOLUTION UNDER HEAT LOAD

*A numerical mathematical technique for determining the thermal stress state of rotational bodies from elastic functional-gradient materials is proposed. We used the weighted residue method in combination with the finite element approach to solve this problem.*

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ  
ПОБЛИЗУ ВЕРШИНИ КЛИНОВИДНОГО ВИРІЗУ, ЩО ВИХОДИТЬ  
НА НЕГЛАДКУ МЕЖУ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ****Анатолій Камінський, Тетяна Поліщук, Юрій Черноіван**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;  
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини (Україна)*

[dfm11@ukr.net](mailto:dfm11@ukr.net); [polischuk\\_t@ukr.net](mailto:polischuk_t@ukr.net)

В умовах плоскої симетричної задачі в рамках моделі розриву дотичного переміщення здійснено кількісний опис та розрахунок зони передруйнування поблизу кутової точки клиновидного вирізу у кусково-однорідному пружному тілі, що виходить на негладку межу поділу двох різних середовищ. Вважається, що тіло складене із різних однорідних частин, які з'єднані між собою тонким з'єднувальним шаром, матеріал якого є більш пластичним, ніж матеріал частин та одна із частин тіла містить клиновидний виріз, вершина якого співпадає з кутовою точкою межі поділу середовищ. Область, що розглядається, є симетричною відносно прямої, яка містить бісектриси відповідних кутів.

При як завгодно малих зовнішніх навантаженнях поблизу кутової точки межі поділу середовищ з'являється і розвивається зона передруйнування. Вивчатимемо лише початкову стадію її розвитку, вважаючи зовнішні навантаження достатньо малими. Тоді розмір зони буде значно меншим, ніж розміри тіла. В силу властивостей з'єднувального шару зона буде розвиватися вздовж межі поділу середовищ у вигляді пари вузьких смуг, що виходять з кутової точки. З'єднувальний шар вважається настільки тонким, що його можна вважати лінією, на якій формулюються відповідні граничні умови.

Переважні деформації в зоні передруйнування розвиваються за механізмом зсуву. Тому смужку-зону моделюватимемо лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює границі текучості на зсув  $\tau_s$ .

З урахуванням малості зони передруйнування приходимо до відповідної статичної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини, що містить клиновидний виріз із прямолінійними розрізами у вершині. На нескінченності формулюється умова, яка дозволяє врахувати вплив зовнішнього поля.

Для побудови точного розв'язку задачі теорії пружності будемо використовувати метод Вінера-Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [2, 3]. Задача, що розглядається, зводиться до функціональ-

ного рівняння Вінера-Гопфа виду:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau}{p+\lambda+1} = -A \operatorname{tg}(p\pi) G(p) \Phi^-(p). \quad (1)$$

Подібні рівняння розв'язані, наприклад, в [4, 5].

За допомогою розв'язку рівняння (1) визначається довжина зон передруйнування. Має місце наступна формула, яка визначає закон розвитку початкової зони передруйнування поблизу вершини клиновидного вирізу:

$$l = L(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2) \left( \frac{|C|}{\tau_s} \right)^{-1/\lambda},$$

де  $L$  – відома функція. За допомогою розв'язку рівняння (1) та формули обернення Мелліна визначаються напруження в задачі, що розглядається.

Результати розрахунків свідчать, що існує проміжок зміни кута  $\beta$ , при якому кутова точка  $O$  не є концентратором напружень. У діапазоні зміни кута  $\beta$  від 0 до  $\alpha - \frac{\pi}{2}$  зі збільшенням  $e_0$  концентрація напружень в області деструкції

матеріалу посилюється, а в діапазоні його зміни від  $\frac{\pi}{2}$  до  $\alpha$  – послаблюється.

1. *Панасюк В.В., Саврук М.П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 1. – С. 49-68.
2. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва, 1962. – 279 с.
3. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград, 1967. – 402 с.
4. *Кипнис Л.А.* Однородная задача для клина с симметричной трещиной в вершине // Прикладная математика и механика. – 1981. – **45**, № 2. – С. 396-400.
5. *Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Polishchuk T.V.* Initial fracture process zone at the corner point of the interface between elastic bodies // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, No 6. – P. 700-709.

#### ON CALCULATION OF THE PREFRACTURE ZONE AT THE CORNER POINT OF THE WEDGE-SHAPED CUT THAT OUTGOES ON THE ROUGH INTERFACE OF MEDIA

*The plane symmetric problem of the prefracture zone calculation at the corner point of the wedge-shaped cut that outgoes on the rough interface of isotropic elastic media is considered. The prefracture zone is modeled by lines of rupture of tangential displacement located on the interface. The solution of the corresponding problem of the theory of elasticity is constructed by the Wiener-Hopf method.*

## ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Юрій Крутій, Микола Сур'янінов**

*Одеська державна академія будівництва та архітектури (Україна)*

[yurii.krutii@gmail.com](mailto:yurii.krutii@gmail.com); [sng@ogasa.org.ua](mailto:sng@ogasa.org.ua)

Для дослідження коливань ортотропної пластини використовують різні підходи – класичні методи будівельної механіки, метод сіток, метод скінчених елементів (МСЕ) і ін. Ці методи мають певні недоліки, що визначає актуальність пошуку інших шляхів розв'язання задач динаміки, одним з яких, на наш погляд, є застосування числово-аналітичного методу граничних елементів (ЧА МГЕ) [1].

"Аналітична складова" ЧА МГЕ зводиться до побудови системи ортонормованих фундаментальних функцій, функції Гріна і компонентів вектора зовнішнього навантаження, після чого в пакетах MATLAB, SCILAB або інших реалізується "числова складова" методу.

Диференціальне рівняння коливань ортотропної пластини має вигляд [2]

$$W^{IV} - 2r^2W'' + s^4W = 0. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння (1) залежить від коренів відповідного йому характеристичного рівняння

$$K^4 - 2r^2K^2 + s^4 = 0, \quad K_{1-4} = \pm\sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}.$$

Можливі чотири варіанти співвідношення між  $r$  та  $s$ , кожному з яких відповідають 16 фундаментальних функцій.

Оскільки при власних коливаннях зовнішнє навантаження відсутнє, рівняння коливань пластини буде мати вигляд

$$|A_*(\omega)| = 0, \quad (2)$$

де  $A_*$  – квадратна матриця значень фундаментальних ортонормованих функцій з компенсаційними елементами, що описують топологію системи.

Рівняння (2) є трансцендентним частотним рівнянням, корені якого дають повний спектр частот власних коливань пластини.

На відміну від інших існуючих методів, визначник (2) містить лише систему фундаментальних функцій, що дозволяє істотно спростити пошук час-

тот власних коливань. Інтервал, що містить корінь рівняння (2), фіксується при зміні знаку визначника або при його прямуванні до нуля.

Всі аналітичні вирази цих функцій отримані у [2], але проблема в тому, що більшість цих виразів має занадто складний вигляд.

Тому пропонується, поряд з вихідним диференціальним рівнянням, розглядати рівносильну систему рівнянь для невідомого вектору стану пластини. В [3] нами доведено, що в такому випадку обчислень деяких аналітичних виразів, пов'язаних з визначниками високих порядків, можна уникнути, скориставшись формулою Якобі [4]. В результаті обчислення визначника в довільній точці зводиться до обчислення в точці  $x = 0$ , що призводить до суттєвого спрощення всіх аналітичних виразів числово-аналітичного методу граничних елементів.

Таким чином, застосування методу прямого інтегрування в загальному алгоритмі числово-аналітичного методу граничних елементів призводить до суттєвого спрощення всіх аналітичних виразів і проміжних перетворень, що робить більш ефективним застосування ЧА МГЕ до розрахунку ортотропних пластин.

1. *Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г.* Численно-аналитический метод граничных элементов. – Одесса: ВМВ, 2010. – Т. 1. – 416 с.; Т. 2. – 512 с.
2. *Балдук П.Г., Сурьянинов Н.Г., Маковкина Т.С.* Фундаментальные решения задачи о колебаниях ортотропной пластины // *European Journal of Technical and Natural Science.* – 2018. – № 2. – С. 29-32.
3. *Suriyaninov M., Krutii Yu.* To the solution of the problem of bending of a cylindrical shell by the boundary elements / *MATEC Web of Transbud-2018.* –2018. – **230**, 02020.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 2004. – 560 с.

#### **TO THE SOLUTION OF THE PROBLEM ON THE VIBRATIONS OF ORTHOTROPIC PLATE BY THE NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD OF BOUNDARY ELEMENTS**

*The application of the numerical-analytical method of boundary elements to the solution of the problem of oscillations of an orthotropic plate is considered. The main problem here is due to the fact that most analytical expressions (fundamental functions, Green functions, vectors of external loads) are very cumbersome. It is proposed, along with the original differential equation, to consider an equivalent system of equations for an unknown plate state vector. In this case, using the Jacobi formula, the calculation of the determinant at an arbitrary point reduces to its calculation at the point  $x = 0$ , which leads to a significant simplification of all analytical expressions of the numerical-analytical method of boundary elements.*



УДК 539.3

**ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ  
БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ  
З ЦЕНТРАЛЬНИМ ОТВОРОМ**

**Лідія Курпа, Галина Тимченко, Андрій Осетров, Тетяна Щербініна**

*Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут» (Україна)*

[kurpalidia@gmail.com](mailto:kurpalidia@gmail.com); [gntimchenko2000@gmail.com](mailto:gntimchenko2000@gmail.com);  
[andy.osetrov@gmail.com](mailto:andy.osetrov@gmail.com); [tes2001@i.ua](mailto:tes2001@i.ua)

В роботі запропоновано числово-аналітичний метод, заснований на теорії R-функцій [3] та варіаційних методах. Як і у роботі [1], цей метод застосовано для дослідження нелінійних коливань багатошарових пологих оболонок з центральним шестикутним закріпленням отвором. Вивчено лінійні та нелінійні вільні коливання багатошарових оболонок з різною кривиною, виготовлених з багатошарових матеріалів. Розглядаються різні типи граничних умов на зовнішньому контурі. Методом Рунге-Кутта побудовано амплітудно-частотні криві для одномодового наближення. Вивчено вплив різних параметрів (кривини, кількості шарів, граничних умов) на поведінку амплітудно-частотних характеристик. Числові результати для тестових задач, отримані за допомогою запропонованого методу та створеного програмного забезпечення, добре узгоджуються з тими, що є у літературі. Запропонований підхід може бути легко розповсюджений на пологі оболонки з отворами різної форми та різними способами їх закріплення.

1. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Осетров А.А. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек и пластин с вырезами и различными граничными условиями // Вісник НТУ "ХПІ". Сер. Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2018. – № 3. – С. 52-59.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

**INVESTIGATION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR VIBRATION OF THE  
LAMINATED PLATES WITH COMPLEX FORM AND CENTRAL CUTOUT**

*In this paper, we consider an effective method of geometrically nonlinear free vibrations investigation of composite elements of thin-walled structures that are modeled by multilayered shallow shells with a complex shape in plan. The proposed method is based on the joint use of the theory of R-functions, variational methods, and the Bubnov-Galerkin procedure. Solutions of the new problems of linear and nonlinear oscillations of multilayered shallow shells with cutouts are obtained.*

## ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ З ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИМИ ШАРАМИ

Лідія Курпа, Тетяна Шматко

Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут» (Україна)

[kurpalidia@gmail.com](mailto:kurpalidia@gmail.com); [ktv\\_ua@yahoo.com](mailto:ktv_ua@yahoo.com)

Функціонально градієнтні (ФГ) циліндричні панелі, як структурні елементи багатьох сучасних конструкцій, широко використовуються в різних галузях промисловості. Існує велика кількість публікацій, в яких аналізуються лінійні та геометрично нелінійні коливання таких оболонок. Але в більшості з відомих статей розглянуто одношарові ФГ пологі оболонки. Досить обмежена кількість публікацій, в яких аналізуються багатошарові пологі оболонки з ФГ шарами. Зазвичай вивчено прямокутні оболонки типу «сендвіч» з ФГ наповнювачем та ізотропними зовнішніми шарами, або навпаки.

В даній роботі для розв'язання задачі про вільні коливання багатошарових циліндричних панелей з ФГ шарами пропонується використання теорії R-функцій [1] та варіаційного методу Рітца. Розглянуто тришарові пологі оболонки, для яких застосовано класичну та уточнену теорію першого порядку, яка враховує деформації зсуву. Вважається, що властивості матеріалів неперервно змінюються вздовж товщини панелі. Обчислення ефективних властивостей ФГМ виконано за допомогою степеневого закону. Розроблений метод програмно реалізовано та застосовано для вирішення як тестових задач, так і для дослідження пологих оболонок складної геометричної форми з різними типами граничних умов. Також досліджено вплив товщини шарів, схем їх розташування, властивостей матеріалів, які є складовими ФГМ (металу та кераміки), величини складової долі кераміки на власні частоти та форми коливань.

1. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

### FREE VIBRATION OF LAMINATED CYLINDRICAL PANELS WITH FUNCTIONALLY GRADED LAYERS

*The R-functions theory and variational Ritz's method is employed to research free vibrations of the laminated shallow shells with functionally graded layers. Mathematical formulation has used classical and Timoshenko's theories. Created software is applied to investigate laminated FGM cylindrical shallow shells of the complex plan form and different boundary conditions. Effects of different geometrical and mechanical parameters on natural frequencies have been investigated.*

**ВИБРАНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ  
У ДЕФОРМІВНИХ ТІЛАХ ЗА КОМПЛЕКСНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

**Роман Кушнір, Олександр Гачкевич,  
Ростислав Терлецький, Роман Івасько**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[dept19@iapmm.lviv.ua](mailto:dept19@iapmm.lviv.ua); [dept13@iapmm.lviv.ua](mailto:dept13@iapmm.lviv.ua)

Вивчення взаємозв'язаних процесів механічної і немеханічної природи в деформівних твердих тілах призвело до формування нового напрямку в механіці деформівного твердого тіла – механіки зв'язаних полів. Він охоплює побудову відповідних математичних моделей, які достатньо адекватно описують поведінку механічних систем з урахуванням взаємовпливу розглядуваних процесів різної фізичної природи, розробку математичних методів дослідження запропонованих математичних моделей і вивчення на їх основі особливостей такої механічної поведінки.

В Інституті проведено ґрунтовні фундаментальні дослідження з теоретичного моделювання в механіці деформівних твердих тіл з урахуванням їх реальної структури і взаємовпливу процесу деформації і процесів немеханічної природи – основного напрямку механіки зв'язаних полів. Зокрема, запропонований термодинамічний підхід до побудови конкретних моделей механіки дозволив провести важливі дослідження проблем взаємодії полів різної природи стосовно до задач теплоенергетики, машино- та приладобудування, теплофізики, геофізики і нової техніки.

У прикладному аспекті викладені вище результати дали можливість визначити напружений стан, довготривалість, дифузійну стабільність складу, ставити і розв'язувати задачі теоретичного прогнозування робочого ресурсу конструкцій в екстремальних умовах експлуатації за наявності комплексних навантажень (теплових, механічних і електромагнітних) з урахуванням локальних неоднорідностей типу включень, дислокацій, приповерхневих ефектів та інших факторів, які інтенсифікують протікання процесів і їх взаємозв'язок, як і задачі, пов'язані з застосуванням окремих матеріалів і підходів у медицині, енергетиці та техніці.

В останні роки все більше уваги приділяється дослідженню та опису фундаментальних закономірностей і явищ термомеханіки – важливого за обсягом досліджень, особливостями розглядуваної тематики і широти її застосувань розділу механіки зв'язаних полів (який є водночас і самостійним розділом механіки деформівного твердого тіла).

Особливе значення в механіці зв'язаних полів мають математичні методи, в т.ч. числово-аналітичні і числові. При їх опрацюванні можуть бути ефективно використані і розвинуті методи, вже розроблені в Інституті при розв'язуванні задач конкретних напрямків досліджень, зокрема сучасні методи розв'язування інтегральних рівнянь. Такі методи можуть опрацьовуватись і у співпраці спеціалістів з механіки зв'язаних полів з математиками на основі отриманих результатів з якісних і кількісних методів дослідження рівнянь із частинними похідними (чи рівнянь математичної фізики). Постановка та розв'язування нових неklasичних змішаних задач механіки зв'язаних полів, зокрема задач з узагальненими гранично-контактними умовами для тепломасоелектропровідних тіл неоднорідної структури, що описують у взаємозв'язку поля різної природи у складних механічних системах за комплексних зовнішніх дій, з урахуванням фазових перетворень і непружних деформацій при оцінюванні та прогнозуванні контактної міцності, надійності, зносостійкості, оптимізації технологій виготовлення нових конструктивних матеріалів вимагають розробки нових кількісних і якісних методів розв'язування отримуваних задач математичної фізики, а також засобів і методів відповідної комп'ютерної симуляції, які можуть бути ефективно опрацьовані тільки в результаті співпраці математиків, механіків, фізиків, інформатиків та ін.

Для сучасного етапу розвитку механіки зв'язаних полів характерним є вивчення і оцінка впливу на механічну поведінку систем взаємодії різних типів фізико-механічних полів (температурних, концентраційних, електромагнітних, гравітаційних і механічних) з урахуванням протікання в системі структурних, електрохімічних, хімічних, гідродинамічних, фільтраційних і інших процесів. Розглядаються континуальні системи за врахування реальної їх будови (багатокомпонентні, пористі, анізотропні, композитні, структурно-неоднорідні, термочутливі і т.п.) за підходами механіки континуальних систем, а також будова і особливості процесів на мікрорівні за підходами наномеханіки. Такі задачі виникають в енергетиці, машинобудуванні, авіабудуванні, суднобудуванні, медицині, екології та ін. Вони є актуальними також у зв'язку з техногенними катастрофами. Ці задачі вимагають більш досконаліх математичних методів для їх дослідження, «потужніших» обчислювальних засобів і розвитку експериментальних методів для верифікації результатів.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень (КПКВК 6541230)».

#### SELECTED PROBLEMS OF MECHANICS OF COUPLED FIELDS IN DEFORMABLE SOLIDS UNDER THE COMPLEX LOADINGS

*A brief analysis of investigations, carried out in recent years in L'viv scientific school in mechanics of coupled fields, on the problems of construction and generalization of mathematical models and methods of description, determination and optimization of the thermomechanical behavior of the bodies under the complex action of force, heat and electromagnetic loadings.*

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНЬ, ЗМІЩЕНЬ  
І ФІЛЬТРАЦІЇ МЕТАНУ У МАСИВІ З РОЗРОБЛЮВАНИМ  
ВУГІЛЬНИМ ПЛАСТОМ І ДОПОМІЖНОЮ ВИРОБКОЮ**

**Роман Мануйленко**

*Інститут прикладної математики і механіки НАН України*

[ronma2016@gmail.com](mailto:ronma2016@gmail.com)

При проведенні гірничих робіт і видобуванні вугілля напруження у пластах вугілля та навколишніх породах на деяких ділянках стають критичними, а в інших місцях відбувається розвантаження. Внаслідок перепаду напружень виникає рух рідини і метану поблизу виробки.

Концентрація метану поблизу місць проведення робіт може призвести до динамічних явищ, вибухів, жертв. Для їх запобігання проводять дегазацію шахт. При цьому метан може використовуватися і як джерело енергії.[1]

Одним зі способів видобування метану є буріння свердловин до місць накопичення метану і подальший гідророзрив пласта. Інший спосіб – створення виробок для акумуляції газу поблизу очисних виробок. При видобуванні вугілля метан, який знаходиться в пласті корисної копалини, мігрує в породи. Лінії напружень дозволяють установити напрямок руху метану. Виробка, проведена над пластом, концентрує метан, який надходить з вугілля. Далі з виробки метан іде в свердловину, а звідти – в резервуар або трубопровід.

У даній роботі сформульовано і розв’язано задачу про напружено-деформований стан вуглепородного масиву з очисною і круговою виробкою, розташованою над зоною опорного тиску. Враховано пружну анізотропію порід і пластичну анізотропію пласта корисної копалини. Початкові умови [1] формулюються за врахування рівності нулю нормальних і зсувних напружень в околі порожнини. Поблизу вибою існує зона пластичних деформацій вугілля. Розподіл напружень і деформацій в ній встановлено за допомогою знайдених раніше формул [1].

Біля очисної виробки задача розв’язана за допомогою формули Келдиша-Седова [3]. Поблизу кругової виробки розподіл напружень і зміщень знаходиться за допомогою формул Лехницького [2] для еліптичного отвору. Загальне поле напружень визначається за алгоритмом Шварца методом послідовних наближень з використанням принципу суперпозиції полів. Спочатку задається поле напружень для незайманого масиву, потім поле напружень бі-

ля очисної виробки. Далі знаходяться напруження і зміщення поблизу кругового контура, а потім – знову біля очисної виробки. Циклічний алгоритм триває доти, доки не будуть задоволені крайові умови з необхідною точністю.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити такі висновки. Біля вибою існує зона розвантаження вугільного пласта. Далі стискаючі напруження зростають за абсолютною величиною і у 3-4 рази перевищують початковий гірничий тиск. За межами пластичної зони напруження прямують до початкових значень у незайманому масиві. При великих напруженнях відбувається порушення кристалічної структури вугілля. При подальшій розробці вугільного пласта змінюються межі пластичної зони. При наближенні вибою до точки напруження спадають за абсолютною величиною. Порушення в кристалічній ґратці і зменшення напружень до менших за модулем від вихідних призводить до посилення фільтрації метану у вугіллі та породах. Таким чином, знаючи напруження у вугільному пласті та навколишніх породах і динаміку їх змін за період розробки, можна знайти кількість газу в пласті та оцінити його фільтрацію в очисну виробку і породи.

Нааявність виробки в породах призводить до зменшення модуля стискаючих напружень у пласті і породах під нею. При наближенні максимуму напружень до допоміжної виробки розвантаження напружень сприяє безпеці ведення робіт. При подальшому наближенні вибою до виробки стрімко зростає кількість газу в ній і метан, накопичений у вугіллі та породах, можна використовувати як енергоресурс.

Зазвичай допоміжні виробки роблять не круговими, а склепінними, проте коло і еліпс є цілком прийнятними наближеннями для оцінювання напруженого стану в масиві. Для одержання більш точного розв'язку можна застосувати метод конформних відображень.

1. Андреев М.М., Камішан В.В., Андреев М.М., Мануйленко Р.І. Гірничий тиск – основний фактор розвитку динамічних явищ вугленосного масиву / Труды ИПММ. – С. 3-12.
2. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
3. Мухомелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. – Москва: Наука, 1968. – 516 с.

#### **RESEARCH OF STRESSES, DEFORMATIONS AND FILTRATION OF METHANE IN MASSIVE WITH DEVELOPING COAL PLATE AND ASSISTIVE WORKING**

*The stressed-deformed state of the mining array with the developed coal seam is analyzed. Unload zones, zones of stress concentration and their changes during lava moving are investigated. The impact of secondary working is analyzed. Methane movement towards secondary hole is projected.*

## ВПЛИВ ШВИДКОСТІ ЗМІНИ НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРИЩИНОЮ

Микола Махоркін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[mahorkin@ukr.net](mailto:mahorkin@ukr.net)

Важливою задачею, що безпосередньо пов'язана з прогнозуванням міцності конструкційних елементів оболонкового типу за дії змінного в часі навантаження, є визначення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів поблизу вершин дефектів.

Методику подану в [1] для статичного навантаження адаптовано для вирішення задачі про граничну рівновагу замкненої безмежної циліндричної оболонки з наскрізним повздовжнім розрізом, довжиною  $2l$ , береги якого навантажені зусиллям, що змінюється за експоненціальним законом (рис. 1). У результаті, задачу зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь [2].

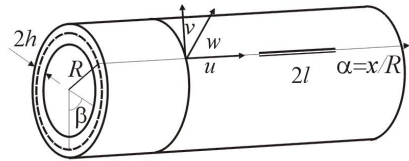


Рис. 1

Вирази для поля вільних від напружень деформацій вздовж розрізу, за вказаних умов, подано у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta\beta}^0 &= \varepsilon_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1} [v(\alpha, \tau)] \delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\beta}^0 &= \varepsilon_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1} [u(\alpha, \tau)] \delta(\alpha), \\ \kappa_{\beta\beta}^0 &= \kappa_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-1} \{ [\theta_{\beta}(\alpha, \tau)] \delta(\beta) - R^{-2} [w(\alpha, \tau)] \partial_{\beta} \delta(\beta) \}, \\ \kappa_{\alpha\beta}^0 &= \kappa_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-2} \partial_{\alpha} [w(\alpha, \tau)] \delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 &= \kappa_{\alpha\alpha}^0 = 0, \end{aligned}$$

де  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $\kappa_{ij}^*$  ( $i, j = \alpha, \beta$ ) не залежать від часу [1, 2];  $[u(\alpha)]$ ,  $[v(\alpha)]$ ,  $[w(\alpha)]$ ,  $[\theta_{\beta}(\alpha)]$  – стрибки переміщень та кутів повороту [1];  $\tau$  – час;  $\gamma$  – деякий сталий коефіцієнт розмірності  $[c^{-1}]$  ( $\gamma \in R$ ), що характеризує швидкість зміни навантаження. Систему рівнянь рівноваги в переміщеннях, згідно з [1], отримано у такому вигляді [2]:

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w - R^2 c_{\tau}^{-2} \ddot{g}_k = q_k^{0*} \quad (k=1,2,3), \quad (1)$$

де  $L_{km}$  ( $m=1,2,3$ ) – оператори;  $g_1 = u$ ,  $g_2 = v$ ,  $g_3 = w$ ;  $q_i^{0*}$  – праві частини рівнянь, котрі обчислюють за відомими виразами;  $c_\tau^2 = E\rho^{-1}(1-\nu^2)^2$ .

Згідно з міркуваннями, аналогічними як у [1], розв’язок (1) подано так:

$$f(\alpha, \tau) = f^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R \sum_{j=2}^3 \left( L_{jf}^* \varphi_j + P_{jf}^* \psi_j \right) e^{\gamma\tau} \quad (f = \{u, v, w\}).$$

Тут  $L_{kl}^* = L_{kl} + L_{kl}^{**}$ ,  $P_{kl}^* = P_{kl} + P_{kl}^{**}$  ( $l = u, v, w$ ), де  $L_{kl}$ ,  $P_{kl}$  – оператори, тожні поданим у [1], а  $L_{kl}^{**}$ ,  $P_{kl}^{**}$  – оператори, які враховують залежність навантаження від часу [2].

Ключові функції  $\varphi_j$ ,  $\psi_j$  мають структуру, аналогічну [1], де:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 e^{-a_j n |z|} (q_{jn} p_{jn}^+)^{-1} [(b_{jn} C_{jn} - a_{jn} B_{jn}) \cos b_{jn} z + (a_{jn} C_{in} - b_{jn} B_{jn}) \sin b_{jn} |z|],$$

якщо корені відповідного характеристичного рівняння [2] мають вигляд  $\lambda_{1,2,3,4} = \pm(b_{1n} \pm ia_{1n})$ ,  $\lambda_{5,6,7,8} = \pm(b_{2n} \pm ia_{2n})$  та

$$\Phi_n(z) = [A_{1n} \cos b_{1n} z + B_{1n} \sin b_{10} |z|] e^{-a_{1n} |z|} + A_{2n} e^{-a_{20} |z|} + B_{2n} e^{-b_{20} |z|},$$

якщо вони мають вигляд  $\lambda_{1,2,3,4} = \pm(b_{1n} \pm ia_{1n})$ ,  $\lambda_{5,6} = \pm ib_{20}$ ,  $\lambda_{7,8} = \pm ia_{20}$ .

Виконавши дії, аналогічно як у [1], отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення похідних від стрибків функцій переміщень та кутів повороту. Загальний вигляд їх ядер наведено у [2].

Використовуючи отримані рівняння досліджено коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів поблизу кінців тріщини за її симетричного навантаження залежно від швидкості зміни навантаження  $\gamma$ .

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
2. Махоркін М.І. Николишин М.М. Гранична рівновага циліндричної оболонки з позовжною тріщиною за врахування інерційності матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 1. – С. 67-145.

#### THE EFFECT OF LOADING SPEED CHANGE ON THE STRESSED STATE OF CYLINDRICAL SHELL WITH A LONGITUDINAL CRACK

*An elastic cylindrical isotropic shell with a longitudinal crack under surface loading, in time according to exponential law, has been considered. A system of singular integral equations has been constructed. The solutions of these equations have been used for study of the stress state near the crack tips.*



## МЕТОДОЛОГІЯ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНЬ В ТРУБИ З В'ЯЗКОПРУЖНОЮ ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЄЮ

Валентин Можаровський, Дмитро Кузьменков, Олена Голубєва

*Гомельський державний університет ім. Ф. Скорини (Білорусь)*

[mozh@gsu.by](mailto:mozh@gsu.by); [d\\_kuzm@tut.by](mailto:d_kuzm@tut.by); [alena\\_golubeva92@mail.ru](mailto:alena_golubeva92@mail.ru)

**Моделювання і постановка задачі.** В системі теплопостачання широко використовують тришарові полімерні і композитні труби, які необхідно розраховувати не тільки на міцність, але і на деформативність через зміну форми труби внаслідок змін в часі в'язкопружних властивостей [1].

У зв'язку з цим, розглянемо задачу про трубу, вкладену в податливу (наприклад, поліетиленову) оболонку з поліуретановою теплоізоляцією, навантаженої внутрішнім тиском.

**Методи дослідження.** Приймаємо, що поведінка оболонки і труби описуються фізичними рівняннями теорії пружності, а наповнювача – рівняннями в'язкопружності. Для розв'язування задачі в'язкопружності для тришарової труби використано операторний метод, вважаючи, що поліуретан володіє реономними властивостями (замінюючи модуль пружності на часовий оператор за принципом Вольтера). Необхідно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь з такими операторами при заданих геометричних і фізичних параметрах, знайти напруження і переміщення.

**Отримані результати.** Виходячи з рівняння рівноваги в переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0,$$

знайдемо розв'язок для розрахунку композитної труби, вважаючи (в загальному пружному випадку), що матеріал циліндра (тобто внутрішнього шару) функціонально-градієнтний з  $E(r) = E_0 r^\beta$ ,  $-2 \leq \beta \leq 2$ :

$$u_r^1 = A_1 r^{m_1} + B_1 r^{m_2}, \quad u_r^2 = A_2 r^{m_1} + B_2 r^{m_2},$$

де  $m_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\beta \pm \sqrt{4 + \beta^2 - 4\beta\nu^*} \right)$  для наповнювача і оболонки

$$u_r^{(i)} = A_i r + B_i / r, \quad (i = 2, 3).$$

Шукані коефіцієнти  $A_i, B_i$  знаходимо з граничних умов:

$$\begin{aligned} \sigma_{r/r=a}^{(1)} &= -p, & u_{r/r=b}^{(1)} &= u_{r/r=b}^{(2)}, \\ \sigma_{r/r=b+h1}^{(2)} &= \sigma_{r/r=b+h1}^{(3)} u_{r/r=b+h1}^{(2)} = u_{r/r=b+h1}^{(3)}, \\ \sigma_{r/r=b}^{(1)} &= \sigma_{r/r=b}^{(2)} & \sigma_{r/r=b+h1+h2}^{(3)} &= 0. \end{aligned}$$

**Алгоритм розв'язання задачі.** Розв'язуємо систему рівнянь при заданих геометричних і фізичних параметрах (з урахуванням функціональної градієнтності матеріалу циліндра), а потім для в'язкопружного випадку застосовуємо алгебру операторів. Отримані коефіцієнти підставляємо в фізичні рівняння для визначення напружень і переміщень в трубі.

Для тестування результатів і спрощення обчислення розрахунок проводився для часу  $t = 0$ ,  $t = \infty$ .

Розроблено алгоритм і створена програма, що реалізує розрахунок напружень і переміщень в трубі з функціонально-градієнтного матеріалу в податливій оболонці з теплоізоляцією (для ізотропного випадку вибираємо  $\beta = 0$ ). Програма за заздалегідь визначеним алгоритмом будує матрицю і вектор вільних членів системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язує її, за формулами визначає напруження і переміщення і виводить результати у вигляді таблиці. На рис. 1 показано приклад розрахунку тришарової труби: циліндр в податливій оболонці під дією внутрішнього тиску; зміна напружень для  $t = 0$ ,  $t = \infty$  при  $\beta = 1$  для  $E = 7$  МПа,  $E = 3,5$  Мпа,  $t = 0$ .

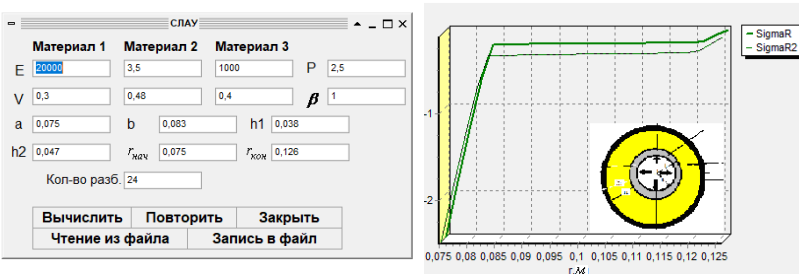


Рис. 1

1. *Можаровский В.В. Кўзьменков Д.С.* Реалізація розрахунку напружень багатощарових труб // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2015. – № 5. – С. 173-178.

### REALIZATION OF STRESS CALCULATION IN PIPES WITH VISCOELASTIC THERMAL INSULATION

*The paper presents the results of research in the field of numerical calculation of laminated pipes made of polymeric materials, taking into account the elasticity, proposed mathematical and mechanical models for calculating the stress-strain state of cylindrical pipes, including functional gradient, used in mechanical engineering and in power engineering industries.*

**МОДЕЛІ ТЕРМОМЕХАНІКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ  
З ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИМИ МЕЖАМИ ЗА ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ  
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ ПРИ ВРАХУВАННІ  
ТЕРМОПРУЖНОГО РОЗСИЮВАННЯ ЕНЕРГІЇ**

**Роман Мусій, Галина Стасюк, Карен Казарян, Стефан Моринь**

*Національний університет «Львівська політехніка» МОН України;*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Інститут механіки НАН Вірменії;*

*Політехніка Опольська (Польща)*

[musiy@lp.edu.ua](mailto:musiy@lp.edu.ua); [halyna.stasyuk@gmail.com](mailto:halyna.stasyuk@gmail.com);  
[ghkarren@gmail.com](mailto:ghkarren@gmail.com); [s.moryn@po.opole.pl](mailto:s.moryn@po.opole.pl)

Запропоновано математичну модель термомеханіки неферромагнітних електропровідних тіл з плоскопаралельними межами за дії імпульсних електромагнітних полів (ЕМП) з модуляцією амплітуди за врахування термопружного розсіювання енергії [1]. За визначальні функції вибрано вектор напруженості магнітного поля, температуру та компоненти тензора напружень.

Сформульовано новий клас дво- і одновимірних задач термомеханіки для неферромагнітного електропровідного шару з плоскопаралельними межами за неоднорідної (відносно повздовжньої координати) та однорідної зміни імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди за врахування процесу термопружного розсіювання енергії.

Розвинуто методику побудови розв'язків зв'язаних дво- і одновимірних задач термомеханіки для електропровідного шару, що ґрунтується на апроксимації розподілів всіх визначальних функцій – дотичної компоненти вектора напруженості магнітного поля, температури і відповідних компонент тензора напружень за товщиною координатою кубічними многочленами та подальшому застосуванні інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа.

Побудовано розв'язки задач термомеханіки для електропровідного шару за однорідної відносно повздовжньої координати дії двох, часто використовуваних у технологіях імпульсної електромагнітної обробки виробів, характерних типів імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди – в режимі з імпульсним модульним сигналом (РІМС) та в режимі згасної синусоїди (РЗС). На основі проведеного числового аналізу досліджено термомеханічну поведінку і не-

сучу здатність даного шару за дії цих двох типів імпульсних ЕМП.

Отримано розв'язки двовимірних задач термомеханіки для розглядуваного електропровідного шару за неоднорідної (косинусоїдальної за повздовжньою координатою) дії імпульсних ЕМП в РІМС і в РЗС. Досліджено термонапружений стан і несучу здатність розглядуваного шару за таких дій залежно від часових параметрів модульованих сигналів, частоти несучих електромагнітних коливань та параметра, що характеризує ступінь неоднорідності імпульсного ЕМП.

Встановлено нові закономірності термомеханічної поведінки неферромагнітних електропровідних тіл з плоскопаралельними межами за дії однорідних і косинусоїдальних за повздовжньою координатою імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди в РІМС та в РЗС [1, 2].

1. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Стасюк Г.В. Зв'язані задачі термомеханіки електропровідних тіл з плоскопаралельними межами за імпульсних електромагнітних дій. – Львів: Растр-7, 2019. – 280 с.
2. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Стасюк Г.В. Зв'язана задача термомеханіки для електропровідного шару за однорідної імпульсної електромагнітної дії // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, № 4. – С. 60-66.

**THE THERMOMECHANICAL MODELS FOR ELECTROCONDUCTIVE SOLIDS  
WITH PLANE-PARALLEL BOUNDARIES UNDER THE ACTION  
OF PULSE ELECTROMAGNETIC FIELDS TAKING INTO ACCOUNT  
A THERMAL-ELASTIC ENERGY DISSIPATION**

*The mathematical model of thermomechanics of non-ferromagnetic electroconductive layer with plane-parallel boundaries under the actions of pulsed electromagnetic fields with regard to coupling of stress fields and temperature is proposed. The magnetic field vector, temperature and components of the dynamic stress tensor are chosen as defining functions. The methodology to solve the formulated problems was developed using approximation of the defining functions distributions by the thickness coordinate with cubic polynomial and further application of Fourier and Laplace integral transformations. The new class of two- and one-dimensional thermomechanical problems for conductive layer under the actions of two specific types of amplitude modulated pulse EMF (pulse amplitude modulated mode (PAMM) and dumped sine signal mode DSSM)) with homogeneous and cosine change in longitudinal coordinate was solved and investigated.*

**ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК  
З ПІДКРІПЛЕННЯМ ТА МАСАМИ**

**Сергій Орленко**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України*

[Orlenko\\_Sergey@ukr.net](mailto:Orlenko_Sergey@ukr.net)

В лінійній постановці на основі зсувної теорії (модель С.П. Тимошенка) розглянуто задачу про власні коливання та напружено-деформований стан тришарової ортотропної конічної оболонки з підкріплюючими повздожніми та кільцевими ребрами, яка контактує в заданих локальних областях з масами, при дії динамічних навантажень.

На відміну від раніше розробленої методики [3], де переміщення середньої поверхні оболонки апроксимувались подвійними тригонометричними рядами по повздожній і коловій координатах. Тут вздовж твірної оболонки застосовується апроксимація переміщень В-сплайнами третього ступеня, що дозволяє розглянути різні комбінації граничних умов.

Для тришарової оболонки, повздожніх і кільцевих ребер, приєднаних мас вирази для потенційної і кінетичної енергій отримані в припущенні, що кут повороту нормалі при деформації оболонки один для всіх її шарів [1], а також для ребер і мас в місцях їх з'єднання з оболонкою.

Застосувавши подання переміщень середньої поверхні оболонки через тригонометричні ряди по коловій координаті, з принципу Гамільтона отримуємо систему рівнянь (наводимо перше рівняння та природні граничні умови, отримані в результаті варіювання по переміщенню  $u$ )

$$\sum_{\bar{n}=0}^N \left\langle \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \sum_{n=0}^N [\tilde{a}_{111} \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \xi^2} + \tilde{a}_{112} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \xi} + \tilde{a}_{113} \tilde{u}_n + \tilde{a}_{121} \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial \xi} + \tilde{a}_{122} \tilde{v}_n + \tilde{a}_{131} \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial \xi} + \tilde{a}_{132} \tilde{w}_n + \right. \right. \\ \left. \left. + \tilde{a}_{141} \frac{\partial^2 \psi_{1n}}{\partial \xi^2} + \tilde{a}_{151} \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial \xi} + \tilde{b}_{113} \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial t^2} + \tilde{b}_{143} \frac{\partial^2 \psi_{1n}}{\partial t^2} \right] = \tilde{a}_1 a_\xi b_\xi \right\rangle d\xi \delta \tilde{u}_n ; \quad (1)$$

$$\sum_{\bar{n}=0}^N \left\{ \sum_{n=0}^N [\tilde{a}_{111}^g \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \xi} + \tilde{a}_{121}^g \tilde{v}_n + \tilde{a}_{131}^g \tilde{w}_n + \tilde{a}_{141}^g \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \tilde{a}_{151}^g \psi_2] = \tilde{T}_1 \right\} \delta \tilde{u}_n \Big|_{\xi_1}^{\xi_2}. \quad (2)$$

Інші рівняння системи мають аналогічний вигляд.

Апроксимація переміщень вздовж твірної оболонки В-сплайнами має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(\xi_j) &= \sum_{i=-1}^{M+1} u_n^i B_{3,i}(\xi_j); & \tilde{v}_n(\xi_j) &= \sum_{i=-1}^{M+1} v_n^i B_{3,i}(\xi_j); & \tilde{w}_n(\xi_j) &= \sum_{i=-1}^{M+1} w_n^i B_{3,i}(\xi_j); \\ \Psi_{1n}(\xi_j) &= \sum_{i=-1}^{M+1} \Psi_{1n}^i B_{3,i}(\xi_j); & \Psi_{2n}(\xi_j) &= \sum_{i=-1}^{M+1} \Psi_{2n}^i B_{3,i}(\xi_j), \end{aligned}$$

де  $i$  – номер вузла сплайн-сітки,  $\xi_j$  – координата  $j$ -тої точки колокації,  $(M+3)$  – число вузлів сплайн-сітки разом з  $-1, 0, M+1$  вузлами, яке дорівнює числу точок колокації, разом з точками на границях (точки сплайн-сітки  $0, M$ ). Точки колокації в області вибирались відповідно до рекомендацій [2].

Після відповідних перетворень отримуємо систему алгебраїчних рівнянь, яка дозволяє обчислити частоти і форми власних коливань (при нульовій правій частині) і за методикою, викладеною в [3], напружений стан оболонки при дії нестационарних динамічних навантажень.

Зазначимо, що в разі необхідності задовольнити ненульові граничні умови, відповідні рівняння на границі (2) включаються в систему, отриману в результаті перетворень рівнянь (1).

Для тришарової оболонки з 8 повздовжніми ребрами (зовнішні шари та ребра – алюміній, внутрішній шар – однонаправлений вуглепластик) з основними параметрами  $r = 0,25$  м,  $H = 0,45$  м,  $h = 0,005$  м ( $h_1 = h_3 = 0,001$  м,  $h_2 = 0,003$  м),  $E_1 = E_3 = 0,68 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>,  $\rho_1 = \rho_3 = 2,67 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_1 = \nu_3 = 0,3$  проведені розрахунки власних частот, прогинів і напружень при дії розподіленого навантаження, постійного на протязі заданого проміжку часу  $\Delta t_1$ . Проаналізовано вплив конусності оболонки (розглядалось два значення меншої основи оболонки  $r_1 = 0,2$  м і  $r_1 = 0,15$  м) та умов закріплення її країв.

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Физматлит, 1961. – 384 с.
2. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Расчет пластин и пологих оболочек из композитных материалов на основе сплайн-аппроксимации. В кн.: Механика композитов. Т. 11 Численные методы. Глава 1, 2. – Киев: А.С.К., 2001. – С. 9-64.
3. Луговой П.З., Сиренко В.Н., Скосаренко Ю.В., Батутина Т.Я. Динамика дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки при действии локального импульсного нагружения // Прикл. механика. – 2017 – 53, № 2. – С. 71-80.

#### DYNAMICS OF THREE-LAYER CONIC SHELLS WITH REINFORCEMENTS AND MASSES

*In the linear formulation based on the shear theory (model S.P. Timoshenko), the problem of natural oscillations and the stress-strain state under dynamic loading of a three-layer orthotropic conical shell with reinforcing longitudinal and annular ribs in contact with given masses in given local regions is considered.*

## ЗВ'ЯЗАНІ ЗАДАЧІ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНИХ ТІЛ З РІДИНОЮ ТА ГАЗОМ

Сергій Плашенко, Василь Кузьменко

Дніпровський національний університет ім. О. Гончара (Україна)

[sergey.plashenko@gmail.com](mailto:sergey.plashenko@gmail.com)

Було розглянуто дві зв'язані задачі про взаємодію рідини та газу з пружними тілами.

В першій задачі досліджувалась деформація мембрани під дією талого снігу, що лежить на ній. Зі зміною температури сніг починає танути, що приводить до перерозподілу навантажень на поверхні мембрани. У відповідності з формою мембрани тала вода збігає до її центру, що зумовлює зростання прогинів та подальшу зміну положення води на мембрані. Поведінка такої мембрани описується рівнянням Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{q}{T} = -\frac{\gamma_1 \max(u-h, 0) + \gamma_2(1-\beta)\frac{V_1}{a^2}}{T},$$

де  $u(x, y)$  – переміщення точки  $(x, y)$  мембрани,  $h$  – початкова висота стовпа води,  $V_1$  – початковий об'єм води,  $\beta$  – кількість води, що розтанула,  $a$  – лінійний розмір мембрани,  $T$  – сила натягу мембрани,  $\gamma_1, \gamma_2$  – питома вага води та снігу.

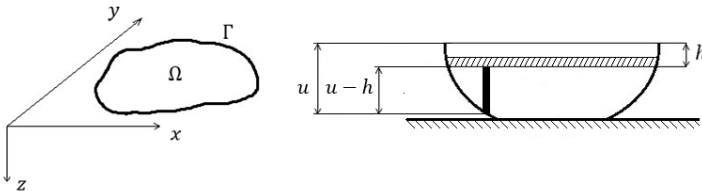


Рис. 1

Задачу було зведено до безрозмірного вигляду. Побудовано ітераційний процес уточнення прогинів мембрани. Отримано результати за різних значень початкової кількості снігу та наявності перешкоди. Проведено аналіз збіжності ітераційного процесу.

В другій задачі розглядалась деформація пружної порожнистої кулі під дією тиску на її внутрішню поверхню. Внаслідок деформування об'єм порож-

нини збільшується, що приводить до зміни тиску, яка впливає на деформування. Така задача є зв'язана. Її було зведено до операторного рівняння відносно об'єму порожнини

$$Q_1 V = Q_2^{-1} V.$$

Оператор  $Q_1$  було отримано з закону Менделєєва-Клайперона

$$p = \frac{m RT}{\mu V},$$

де  $p$  – тиск газу,  $V$  – об'єм газу,  $T$  – термодинамічна температура,  $m$  – маса газу,  $R$  – універсальна газова стала,  $\mu$  – молярна маса газу.

Для побудови оператора  $Q_2^{-1}$  використано відоме співвідношення [1]:

$$p = 4 \left( \frac{b}{B} - \frac{a}{A} \right) \left( C_1 + \frac{1}{4} C_1 \left( \frac{a}{A} + \frac{b}{B} \right) \left( \left( \frac{a}{A} \right)^2 + \left( \frac{b}{B} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} C_2 \left( \frac{a}{A} + \frac{b}{B} \right) + \frac{ABC_2}{ab} \right),$$

де  $C_1, C_2$  – параметри моделі Муні [2],  $a, b$  – внутрішній та зовнішній радіуси кулі в недеформованому стані,  $A, B$  – внутрішній та зовнішній радіуси кулі в деформованому стані. При цьому операторне рівняння набуває вигляду

$$\frac{3}{4} \frac{m}{\mu} \left( \frac{1}{A} \right)^3 RT = 4 \left( \frac{b}{B} - \frac{a}{A} \right) \left( C_1 + \frac{1}{4} C_1 \left( \frac{a}{A} + \frac{b}{B} \right) \left( \left( \frac{a}{A} \right)^2 + \left( \frac{b}{B} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} C_2 \left( \frac{a}{A} + \frac{b}{B} \right) + \frac{ABC_2}{ab} \right).$$

Проведено аналіз впливу початкової товщини кулі на її деформації. Встановлено залежність товщини стінки кулі та тиску всередині від маси закачаного газу.

1. Лурье А.И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
2. Green A.E., Zerna W. Theoretical elasticity. 2<sup>nd</sup> ed. – New York: Dover Publications, Inc., 1992. – 451 p.

#### COUPLED PROBLEMS OF INTERACTION OF THE ELASTIC BODIES WITH LIQUID OR GAS

*Two coupled problems about elastic bodies deformation under liquid or gas influence were considered. The first problem describes the flat membrane deformation under melted snow pressure. Temperature change leads to water distribution change, which as a result leads to further deformation and water location. Mathematical model was suggested for the problem. Iterative method was applied to solve the problem. Results were analyzed under different conditions. The second problem describes hollow sphere deformation under the gas pressure inside it. Temperature changing leads to pressure increasing which results in sphere deformation. From the other side, the deformation influences the pressure inside the sphere. Operator equation was built for the problem. Problem was solved numerically and the results were investigated.*



МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ  
ДЛЯ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ З ДВОМА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОСТЕЛІ

Юрій Сачук, Олександр Максимук

*Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки (Україна);**Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*[sachykyra@gmail.com](mailto:sachykyra@gmail.com); [ov.maksymuk@gmail.com](mailto:ov.maksymuk@gmail.com)

У більшості випадків для моделювання покриттів у плоских контактних задачах у якості пружної основи використовується математична модель пружної півплощини або модель Вінклера з одним коефіцієнтом постелі [2-4]. Такі моделі мають, як свої переваги так і недоліки. Перша модель достатньо адекватно описує напружено-деформований стан, однак її використання вимагає значних математичних зусиль (метод сингулярних рівнянь, метод Вінера-Гопфа, еліптичні інтеграли третього роду і т.п.) [4, 5]. Але головний її недолік – неможливість порахувати переміщення у пружній основі. Модель Вінклера є простою у використанні, але недостатньо адекватно описує пружний стан основи – не передає дію штамп у горизонтальному напрямку. У роботі запропонована математична модель пружної основи з двома коефіцієнтами

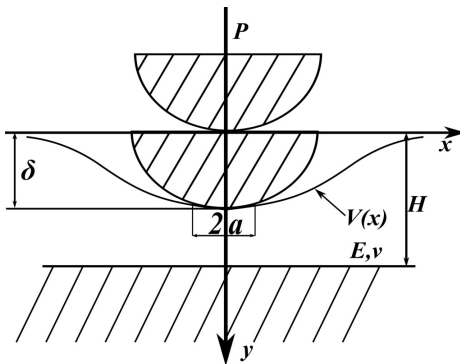


Рис. 1 Схема контактної взаємодії

ми постелі для розв'язування плоских контактних задач [2]. Модель дозволяє порахувати переміщення у пружній основі та оцінити напружено-деформований стан в ній [2, 3].

У пружний шар з двома коефіцієнтами постелі, який лежить на пружній основі без проковзування, силою  $P$  втискується жорсткий штамп.

Прирівнявши прогин в області контакту  $2a$  з формою штамп, отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма I-го роду

для визначення контактного тиску  $p(x)$  [4]:

$$\delta - f(x) = V(x) = c \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi, x \in [-a, a], \quad (1)$$

$\delta$  – невідома осадка штампа, як жорсткого тіла,  $f(x)$  – форма профілю штампа,  $c$  та  $\alpha$  залежать від параметрів основи.

Для визначення області контакту використовуємо умову рівноваги штампа:

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx .$$

Провівши відповідні математичні перетворення і враховуючи особливості розв’язування (1) при умові (2) [1], отримуємо аналітичний розв’язок для контактного тиску у вигляді ( $f(x) = x^2/(2R)$ ,  $R$  – радіус кривизни штампа в точці  $x = 0$ ):

$$p(x) = \frac{\alpha}{2RC} \left( \frac{a^2}{\alpha} + \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{x^2}{2} \right) = \left( 1 - \frac{x^2}{2 \left( \frac{a^2}{2} + \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right)} \right) .$$

Знайдено аналітичні розв’язки інтегрального рівняння (1) для штампів з параболічною, клиновидною та плоскою формою поверхні. Побудовано графіки контактного тиску та проведено числовий аналіз напружено-деформованого стану пружної основи.

1. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 491 с.
3. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
4. *Острик В.И.* Контактна механіка. – Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2015. – 560 с.
5. *Сачук Ю.В., Максимук О.В.* Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – № 20. – С. 180-187.

#### MATHEMATICAL MODELING OF CONTACT INTERACTION BODY FOR EASY BASIS WITH TWO CODE OF CONTAINERS

*The paper proposes a mathematical model of an elastic basis with two bed coefficients for solving flat contact problems for various stamps. The problems are reduced to the solution of the Fredholm integral equation of the first kind. For stamps of parabolic, wedge-shaped and flat forms, analytical solutions are found.*

## РОЗРАХУНОК ЗАЛИШКОВОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКОШАРОВИХ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ ПРИ НАРОЩУВАННІ ШАРАМИ РІДКОГО МЕТАЛУ

Ігор Сенченков, Ольга Червінко, Ігор Рябцев

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;  
Інститут електрозварювання ім. Є.О Патона НАН України*

[term@inmech/kyiv.ua](mailto:term@inmech/kyiv.ua); [ryabtsev@paton.kiev.ua](mailto:ryabtsev@paton.kiev.ua)

Наплавлення листових деталей широко використовується для захисту від корозії, абразивного зносу, виготовлення шаруватих композитів різного призначення [1]. На відміну від масивних деталей важливого значення набуває короблення деталей. В роботі розроблена скінченно-елементна методика розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) тонкошарових призматичних тіл. В постановці задачі використовується модель Боднера-Партома в'язкопластичної поведінки металів, модель зростаючих тіл з концепцією власних деформацій і температури, термокінетичні діаграми для опису мікроструктурних перетворень при розпаді переохолодженого аустеніту.

На рис. 1 наведено співставлення експериментальних і розрахункових залишкових прогинів пластини зі сталі Св08кп, жорстко закріпленої по краях  $x = 0, 0,12$  м, що наплавляється вздовж осі  $Oz$  20-ма валиками із нержавіючої сталі СвХ19Н18Г6МЗВ2.

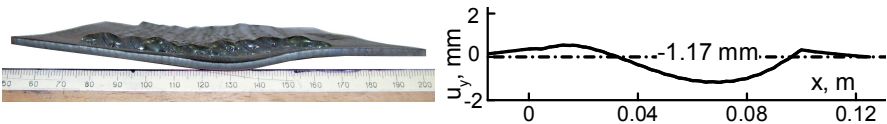


Рис. 1

Встановлена якісна кореляція експериментальних і розрахункових даних.

1. *Рябцев И.А., Сенченков И.К., Турык Е.* Наплавка. Материалы, технологии, математическое моделирование. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2015. – 590 с.

### CALCULATION OF THE RESIDUAL STRESS-STRAIN STATE OF THIN-SHEET ELEMENTS UNDER SURFACING BY LIQUID METAL LAYERS

*The method of calculation of the residual stress-strain state of thin-sheet elements under surfacing by liquid metal layers is developed. The comparison of numerical and experimental data is presented.*

**СФЕРИЧНЕ ДЖЕРЕЛО ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ У ПРУЖНОМУ  
СЕРЕДОВИЩІ, ЯКЕ РІВНОМІРНО ОБЕРТАЄТЬСЯ**

**Ігор Улітко**

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна)*

[ulitko@univ.kiev.ua](mailto:ulitko@univ.kiev.ua)

Якщо в початку координат у нерухомому однорідному ізотропному середовищі здійснюється гармонічне точкове збурення  $\sigma_p = -P \cdot \exp(i\omega t)$ , то джерело хвиль всебічного розтягу-стиску у сферичних координатах  $(\rho, \vartheta, \phi)$  описується чисто радіальними переміщеннями з амплітудою

$$u_\rho = -\frac{1}{2}P \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \exp\left(-i \frac{\omega \rho}{c_1}\right) \right], \quad u_\vartheta = 0, \quad u_\phi = 0. \quad (1)$$

Картина суттєво змінюється коли середовище обертається з постійною кутовою швидкістю. Гармонічні хвилі в такому середовищі характеризуються коріолісовою дисперсією [1,2]: їх хвильові числа або фазові швидкості складним чином залежать від кутової швидкості обертання, а переміщення описуються зв'язаними компонентами квазіповздовжних та квазіпоперечних складових. Характер коріолісової дисперсії є подібним до дисперсії хвиль у трансверсально-ізотропному тілі, при цьому роль вісі анізотропії тут відіграє вісь обертання. Тому розв'язки узагальненого рівняння динаміки Ламе

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{u}}), \quad (2)$$

у якому  $\mathbf{u}$  – вектор малих відносних переміщень,  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{k} \cdot \Omega_0$ ,  $\Omega_0 = \text{const}$  – кутова швидкість обертання,  $c_1, c_2$  – швидкості хвиль розширення-стиску та зсуву, доцільно будувати не у сферичній, а у циліндричній системі координат  $(r, \phi, z)$ , приймаючи вісь  $Oz$  за вісь обертання.

Еквівалентні крайові умови для сферичного джерела можна сформулювати у площині  $z = 0$ , враховуючи повну симетрію задачі

$$u_z|_{z=0} = \frac{1}{2}P \frac{\delta(r)}{r}, \quad \frac{\tau_{zr}}{G} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2}Q \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta(r)}{r} \right), \quad \frac{\tau_{z\phi}}{G} \Big|_{z=0} = 0. \quad (3)$$

де  $\delta(r)$  – дельта функція Дірака,  $G$  – модуль зсуву, а  $P$  й  $Q$  визначають інтенсивність джерела.

Розв'язок крайової задачі (2)-(3) будується за методом інтегрального пе-

ретворення Ганкеля. З'ясується, що радіальні  $u_r$ , кругові  $u_\phi$  та осьові  $u_z$  переміщення у хвилях є зв'язаними, а їх властивості визначаються з бікубічного характеристичного рівняння. У випадку малої  $\omega$  у порівнянні з частотою кутової швидкості обертання  $(\Omega_0 / \omega) \ll 1$  в екваторіальній площині  $z = 0$  сферичної області інтеграли обертання за Ганкелем розраховуються аналітично і можна подати такі асимптотичні формули:

$$\begin{aligned} u_r(r, 0) &\approx -\frac{1}{2}P \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \exp\left(-i \frac{\omega r}{c_1}\right) \right] + \left( \frac{\Omega_0}{\omega} \right)^2 \frac{c_1^2}{c_1^2 - c_2^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \exp\left(-i \frac{\omega r}{c_2}\right) \right], \\ u_\phi(r, 0) &\approx -iP \frac{\Omega_0}{\omega} \frac{c_1^2}{c_1^2 - c_2^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \exp\left(-i \frac{\omega r}{c_1}\right) - \frac{1}{r} \exp\left(-i \frac{\omega r}{c_2}\right) \right), \\ u_z(r, 0) &\approx -\frac{1}{2}P \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \exp\left(-i \frac{\omega r}{c_1}\right) \right], \quad P = Q, \quad \frac{\Omega_0}{\omega} \ll 1. \end{aligned} \quad (4)$$

При  $\Omega_0 = 0$  комбінація переміщень  $u_r$  та  $u_z$  дає результат

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_r u_r + \mathbf{k} u_z = -\frac{1}{2}P \text{grad} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \exp\left(-i \frac{\omega}{c_1} \sqrt{r^2 + z^2}\right) \right],$$

що співпадає з формулою (1) при заміні  $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ .

Формули (4) вказують на те, що сферичне джерело в середовищі, яке обертається, формується не лише хвилями з чисто радіальними переміщеннями. Завдяки коріолісовій дисперсії виникають кругові переміщення  $\hat{u}_\phi$ , амплітуда яких прямо пропорційна першому порядку малості відношення  $\Omega_0 / \omega$  й містить як повздовжні, так і зсувні складові. Радіальні переміщення  $\hat{u}_r$  слабо спотворюються складовою порядку  $(\Omega_0 / \omega)^2$  у вигляді хвилі зсуву.

1. *Schoenberg M., Censor D.* Elastic waves in rotating media // *Quart. Appl. Math.* – 1973. – No. 4. – P. 115-125.
2. *Улитко И.А.* Дисперсия плоских гармонических волн в равномерно вращающемся упругом пространстве // *ДАН України.* – 1995. – № 1. – С. 54-57.

**SPHERICAL SOURCE OF HARMONIC WAVES  
IN THE STEADILY ROTATING ELASTIC MEDIUM**

*Spherical source of harmonic waves in a rotating elastic medium is formed not only by waves with purely radial displacements of particles. Due to the Coriolis dispersion circular displacements arise, which amplitudes are directly proportional to the angular velocity and inversely proportional to the frequency. Radial displacements are weakly distorted by the small component of the second order in the form of a shift wave.*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНДУКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ ТА ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ У ПЛОСКОМУ ДІЕЛЕКТРИЧНОМУ ШАРІ

**Василь Чекурін, Юрій Бойчук**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[chekurin@iapmm.lviv.ua](mailto:chekurin@iapmm.lviv.ua); [yuronchuk@gmail.com](mailto:yuronchuk@gmail.com)

Металокерамічні, пористі, волокнисті композити, композиційні фарби та інші матеріали, що мають низьку теплопровідність знаходять широке застосування для створення теплоізоляційних і термозахисних покривів. Їхні експлуатаційні властивості можуть істотно залежати як від об'ємних, так і поверхневих радіаційних властивостей. Тому для оптимального проектування таких покривів, розроблення технологій їх виготовлення, а також оцінювання їхніх експлуатаційних властивостей необхідні математичні моделі для опису теплових процесів та визначення їхнього напружено-деформованого стану і міцності.

У цьому зв'язку в доповіді розглянуто модель кондуктивно-променевого теплообміну та температурних напружень у плоскому діелектричному шарі  $y \in [0, L]$  матеріалу низької теплопровідності. Тут  $L$  – товщина,  $y$  – координата, нормальна до поверхонь  $y = 0, L$  шару. Поверхня шару  $y = 0$  перебуває в ідеальному тепловому контакті з тілом високої теплопровідності (метал), температура  $T_0$  якого задана, а інша поверхня  $y = L$  обмінюється теплом за механізмами конвективного і радіаційного теплообміну із зовнішнім середовищем, температура  $T_{env}$  якого також відома.

Матеріал шару в об'ємі й на поверхні здатен поглинати, випромінювати та розсіювати теплове (інфрачервоне) електромагнітне випромінювання (ІЧ-радіацію). Поверхня  $y = 0$  є абсолютно чорна й випромінює потік енергії ІЧ-радіації, який, згідно закону Стефана-Больцмана, пропорційний четвертій степені її абсолютної температури. Поверхню  $y = L$ , натомість, розглядаємо як двовимірний матеріальний континуум, який здатен поглинати, випромінювати та розсіювати ІЧ-радіацію.

Сформульована нелінійна математична модель, в якій кондуктивно-променевий теплообмін у такому тілі, визначають дві ключові функції – темпе-

ратура, залежна від просторової координати, та інтенсивність ІЧ-випромінювання, залежна від просторової координати та напрямку поширення.

Модель містить нелінійну інтегро-диференціальну систему рівнянь теплопровідності та перенесення випромінювання, яка визначає ключові функції в об'ємі шару, та крайові умови, які визначають їх на поверхнях шару. Рівняння теплопровідності й перенесення випромінювання містять доданки типу джерел, які враховують поглинання та емісію ІЧ-радіації матеріалом шару в його об'ємі. Крайові умови на температуру містять доданки, які враховують поглинання розсіювання ІЧ-радіації, що надходить із об'єму шару та зовнішнього середовища, власне теплове випромінювання поверхні, як в об'ємі шару, так і в зовнішнє середовище, кондуктивний теплообмін поверхні шару з матеріалом, що в його об'ємі, та її конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Крайові умови на інтенсивність випромінювання враховують розсіювання поверхнею ІЧ-радіації, що надходить із об'єму шару та зовнішнього середовища, власне теплове випромінювання поверхні.

Термопружний стан визначають тензори напружень та деформації, які задовольняють рівняння Дюгамеля-Неймана, рівноваги та сумісності деформації, а також умови навантаження та/чи закріплення поверхонь шару.

Розроблено ітераційний метод розв'язування задач теплообміну, сформульованих в рамках такої моделі. З використанням цього методу проведено кількісне дослідження температурного поля, параметрів ІЧ-випромінювання та температурних напружень у шарі залежно від об'ємних та поверхневих радіаційних властивостей матеріалу, товщини  $L$  та температури  $T_0$ .

Розроблений математичний апарат можна застосувати для кількісного оцінювання експлуатаційних властивостей теплозахисних і теплоізоляційних покриттів та оптимального їх проектування.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень" КПКВК 6541230.

1. *Chekurin V. and Boychuk Y. An Iterative Method for Solving of Coupled Equations for Conductive-Radiative Heat Transfer in Dielectric Layers // Advances in Mathematical Physics. – 2017. – Article ID 9139135.*

#### MATHEMATICAL MODELING OF CONDUCTIVE-RADIATIVE HEAT EXCHANGE AND TEMPERATURE STRESSES IN A PLAIN LAYER

*A mathematical model for heat exchange in a dielectric layer capable to emit, absorb and scatter IR-radiation in its volume and on the surface has been considered in the paper.*

UDC 539.3

## LOCALISED WAVES IN ELASTIC THIN-WALLED STRUCTURES

**Mels Belubekyan, Karen Ghazaryan, Pier Marzocca**

*Institute of Mechanics, National Academy of Sciences (Armenia);*

*School of Engineering, Aerospace Engineering and Aviation, RMIT University (Australia)*

[mbelubekyan@yahoo.com](mailto:mbelubekyan@yahoo.com); [ghkarren@gmail.com](mailto:ghkarren@gmail.com); [pier.marzocca@rmit.edu.au](mailto:pier.marzocca@rmit.edu.au)

In this report we present a review of our investigations concerning localized bending waves in thin-walled structures. Localized bending waves are perturbations concentrated in the vicinity of the free edge of thin plates and shells and decaying within a short distance from the edge. These bending localized waves are also called “edge waves” or “edge resonance waves”. Based on the Kirchhoff theory of isotropic elastic thin plates, the existence of a bending wave localised near the free edge of a semi-infinite medium was first demonstrated by Konenkov in [1]. From a mathematical point of view, the edge wave resonance eigenvalue problem is similar to the eigenvalue problem for the local stability of plate [2] which was firstly reported by Ishlinskii in [3].

A number of studies have been devoted to specific cases of edge waves in plates with complex configuration and interactions [4–11]. The problem of bending waves localized near the free edge of a transversely isotropic plate is investigated in [4] using the Ambartsumian higher-order plate theory which takes account the transverse shears generated by flexural deformation. Within this analysis the existence of localized bending waves in transversely isotropic plates is established, and solutions of the dispersion equation are obtained.

The study of planar and bending magnetoelastic vibrations of a perfectly conductive flat plate immersed in a uniform external magnetic field is presented in [5, 6]. The Kirchhoff’s plate theory and the model of a perfect conductive medium are used. The conditions for the existence of localized bending vibrations in the vicinity of the free edge of the plate are established. It is shown that the localized vibrations can be detected and can be eliminated by means of an applied magnetic field.

Within the framework of the Ambartsumian’s refined plate theory, in [7] the existence and propagation problems of electro-elastic bending waves localized at the free-edge of a 6mm hexagonal symmetry piezoelectric plate was established. It was shown that the piezoelectric effect significantly decreases the depth of penetration of localized wave.

The problems of localized bending waves for elastic isotropic and orthotropic



cantilever plates with a rib reinforcement where studied in [8, 9]. Herein the effect of inertial and elastic contributions due to the rib have been separately analysed. It is worth noting that features, like rib reinforcements, are potential sources of scattering and guided waves. These investigations revealed that the presence of a reinforcement rib can suppress localized bending waves.

Finally, in [10, 11] the important role played by the edge waves in the theory of elastic cylindrical shells was demonstrated. In the framework of the membrane theory of cylindrical shells, the localised vibration near the shell free edges of finite and semi-infinite is considered. The derived dispersion equations lead to the localised membrane vibration conditions which are analysed and the appropriate recommendations are offered.

1. *Konenkov Y.K.* A Rayleigh-type flexural wave // *Acoustic Journal*. – 1960. – **6**, No. 1. – P. 122-123 (in Russian).
2. *Belubekyan M.V.* The Problems of Plates Localized Instability / Proceedings of International Conference “Optimal Control, Stability and Durability Problems of Mechanical Systems. Yerevan, 1997. – P. 95-99 (in Russian).
3. *Ishlinskii A.Y.* On a limiting process in the theory of the stability of elastic rectangular plates // *Doklady Akademii Nauk*. – 1954. – **95**. – P. 477-479 (in Russian).
4. *Piliposian G.T., Belubekyan M.V., and Ghazaryan K.B.* Localized bending waves in a transversely isotropic plate // *Journal of Sound and Vibration*. – 2010. – **329**, No. 17. – P. 3596-3605.
5. *Belubekyan M.V.* Magnetoelastic Vibrations Localized in the Vicinity of the Free-edge of a Thin Plate / Proceedings of Armenian National Academy of Sciences. Mechanics. Yerevan, Armenia, 2003. – **56**, No. 2.
6. *Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C.* Localized Magnetoelastic, Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate // *Journal of Applied Mechanics*. – 2007. – **74**. – P. 1071-1076.
7. *Piliposian G.T., Ghazaryan K.B.* Localized bending vibrations of piezoelectric plates // *Journal Waves in Random and Complex Media*. – 2011. – **21**, No. 3. – P. 418-433.
8. *Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C.* Localized Bending Waves in a Rib-Reinforced Elastic Orthotropic Plate // *Journal of Applied Mechanics*. – 2007. – **74**. – P. 169-171.
9. *Milanese A., Marzocca P., Belubekyan M., Ghazaryan K.* Effect of the stiffness and inertia of a rib reinforcement on localized bending waves in semi-infinite strips // *International Journal of Solids and Structures*. – 2009. – **46**. – P. 2126-2135.
10. *Belubekyan M., Ghazaryan K., Vardanov V., Milanese A., Marzocca P.* Localized Vibrations Near the Free-edge of a Cylindrical Shell / Proceedings of 49<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. – Washington DC: AIAA Publishing, 2008. – P. 1874-1876.
11. *Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P.* Localised membrane vibration of cylindrical shells // *Journal of the Acoustical Society of America*. – 2017. – **141**, No. 3. – P. 1947-1952.

UDC 539.3

**WAVES PROPAGATION IN THE SYSTEM OF THIN LAYER-HALF-SPACE WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS**

**Mels Belubekyan, Samvel Sarkisyan**

*Institute of Mechanics, National Academy of Sciences (Armenia);  
Yerevan State University (Armenia)*

[mbelubekyan@yahoo.com](mailto:mbelubekyan@yahoo.com); [vas@ysu.am](mailto:vas@ysu.am)

In the mathematical modeling of physical phenomena plays the most important role the choice of boundary conditions. In studying the process of wave propagation in elastic solids, one of the assumptions is accepted: the boundaries of the body are rigidly fixed or the boundaries of the body are free. However, in practice, there are many situations where you cannot neglect the real properties of the media surrounding the body [1–4]. Here, we propose a model for the study of wave propagation in elastic bodies with boundary conditions, where the tangential stress changes linearly at the boundary of the half-space with the corresponding velocity.

Pure shear elastic waves in the layer-half-space system are considered. A half-space of elastic material in a rectangular coordinate system  $(x, y, z)$  occupies the region  $x, z \in (-\infty, \infty)$ ,  $y \in [0, \infty)$ , and the layer occupies the region  $x, z \in (-\infty, \infty)$ ,  $y \in [-h, 0]$ . The values related to the layer will be marked with index 1, and the corresponding values for the half-space will be without indexes. The following condition is imposed on the external boundary of the layer

$$\sigma_{23}^1 + \alpha_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0, \quad \alpha_0 = \text{const} \quad \text{by } y = -h.$$

On the contact plane of the layer and the half-space, the continuity of displacement and stress is assumed. It is required to find solutions of the equations of pure-shear waves in the layer and half-space satisfying the boundary conditions and the damping condition  $\lim_{y \rightarrow \infty} w = 0$ . For a sufficiently thin layer (comparing to the wavelength), the equation of pure-shear waves is reduced to the boundary condition [5]

$$h\mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha_0 \frac{\partial w}{\partial t} - \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

and yields the following dispersion equation

$$H(\eta^2\theta - 1) + i\gamma\eta\alpha_* - \gamma\sqrt{1 - \eta^2} = 0,$$

which can be represented in the form

$$\sqrt{1 - \eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta}} \left( \gamma^{-1} H(\eta^2\theta - 1) + i\alpha_*\eta \right)$$

that is convenient for finding the root by successive approximations method.

For the Love problem with impedance boundary conditions [6-8]

$$\sigma_{23}^1 + \omega Z w_1 = 0$$

the dispersion equation for the half-space with thin layer, we get

$$H(\theta\eta^2 - 1) = \sqrt{1 - \eta^2} \left( \gamma - \frac{\omega Z}{\mu_1} - \frac{\gamma\omega Zh}{\mu_1} \right).$$

1. *Kossovich L.Y., Mukhomodyarov R.R., Parfenova Y.A.* Wave propagation in an elastically restrained isotropic layer // Vestnik of Samara University. Natural Science Series. Mechanics – 2008. – No. 8/2 (67). – P. 78-89 [in Russian].
2. *Meleshko V.V., Bondarenko A.A., Dovgiy S.A., Trofimchuk A.N., Heijst G.J.F. van.* Up-rugie volnovody: istoriya i sovremennost // Mathematical methods and physico-mechanical fields. – 2008. – **51**, No. 2. – P. 86-104 (in Russian).
3. *Belubekyan M.V.* The Rayleigh waves in the case of the elastically restrained boundary // Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics. – 2011. – **64**, No. 4. – P. 3-6 (in Russian).
4. *Belubekyan M.V., Sarkisyan S.V.* Three-dimensional problem of Rayleigh waves propagating in a half-space with restrained boundary // Z. Angew. Math. Mech. – 2018. – **98**. – P. 1623-1631. <https://doi.org/10.1002/zamm.201700157>.
5. *Belubekyan V.M., Sarkisyan S.V.* Love Problem for a Half-Space with a Viscoelastic Coating // Reports of NAS RA. – 2018. – **118**, No. 1. – P. 33-38 (in Russian).
6. *Pham Chi Vinh, Trinh Thi Thanh Hue.* Rayleigh waves with impedance boundary conditions in incompressible anisotropic half-spaces // Int. J. Eng. Sci. – 2014. – **85**. – P. 175-185.
7. *Pham Chi Vinh, Nguyen Quynh Xuan.* Rayleigh waves with impedance boundary condition: Formula for the velocity. Existence and Uniqueness // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2017. – **61**. – P. 180-185.
8. *Baljeet Singh.* Reflection of Elastic Waves from Plane Surface of a Half-space with Impedance Boundary Conditions // Geosciences Research. – 2017. – **2**, No.4. <https://dx.doi.org/10.22606/gr.2017.24004>.

UDC 539.3

## HYDRODYNAMIC ANALYSIS WITH HEAT TRANSFER IN SOLID GAS FLUIDIZED BED REACTOR FOR SOLAR THERMAL APPLICATIONS

**Sam Rasoulzadeh, Atefeh Mousavi**

*Mechanical Engineering Department, Tehran University (Islamic Republic of Iran);  
Science and Research Branch, Islamic Azad University (Islamic Republic of Iran)*

[sam.rasulzade@gmail.com](mailto:sam.rasulzade@gmail.com)

Nowadays, the applications of solar reactors from dense gas-solid fluidized beds, mixing and separation processes play an important role in speed and efficiency of reaction. Significant efforts have been made for developing advanced techniques of measuring dense solid-gas flow dynamics in fluidized beds such as Particle Image Velocity (PIV), Digital Image Analysis (DIA), positron particles tracking, magnetic resonance imaging, electrical capacitor tomography, etc. However, it is very challenging to obtain accurate flow characteristics at reasonable cost [1]. With the rapid advances in computers and numerical algorithms, the computational fluid dynamics (CFD) has become a powerful tool for obtaining dense solid-gas flow particularity. The Euler-Euler and Euler-Lagrange models are the most widely used ones. Within the framework of the discrete particles model, particle collisions are modeled by the soft sphere or the hard sphere method. In the early stages, the simulation particles number was only a few thousand, but now with advanced computers and advanced techniques, 100.000 particles can be simulated with a single core processor. With parallel computing, fluidized bed systems with several million particles have been simulated for a variety of issues [2].

Fluidized bed reactors are used as receiver and storage systems of concentrated solar factories which are one of the most promising developing technologies [3]. Solar particle receptors (SPRs) have been developed to deploy centralized solar power stations (CSPs) at higher operating temperatures and increasing the efficiency of power cycles. In the CSP system based on SPR, solid particles are used as a heat transfer media (HTM) instead of salt or liquid vapor [4]. Different numerical and experimental studies were performed to improve the thermal performance of fluidized beds of centralized solar power stations and thermal energy storage programs [5]. In this study, we investigate the heat transfer in the reactor by hydrodynamics in solid gas bed that plays a role in the mixing and separation process and plays a very important role in solar thermal applications.

In this research, for geometric design, CATIA software was used for modeling the desired plan. For analysis, the intended model was defined to the ANSYS software and the system was analyzed in the Fluid Flow (CFX) environment.

In general, the results have shown that the flow of fluid in the reactor entrance has less temperature compared with the outlet and when the fluid passes from the reactor, heat transfer occurs between the cylinder, solar panel and fluid which makes the fluid temperature to increase in the pump outlet. In the outlet zones, the fluid kinetic energy increases.

1. Wang Q., Feng Y., Lu J., Yin W., Yang H., Witt P.J., Zhang M. Numerical study of particle segregation in a coal beneficiation fluidized bed by a TFM-DEM hybrid model: influence of coal particle size and density // *Chem. Eng. J.* – 2015. – **260**. – P. 240-257.
2. Lu L., Morris A., Li T., Benyahia S. Extension of a coarse-grained particle method to simulate heat transfer in fluidized beds // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2017. – **111**. – P. 723-735.
3. Ruud van Ommen J., Mudde R.F. Measuring the gas-solids distribution in fluidized beds – a review // *Int. J. Chem. React. Eng.* – 2008. – **6**. – P. 1542-6580.
4. Tsuji Y., Kawaguchi T., Tanaka T. Discrete particle simulation of two-dimensional fluidized bed // *Powder Technol.* – 1993. – **77**, No. 1. – P. 79-87.
5. Zhang H., Yu A., Zhong W., Tan Y. A combined TLBM-IBM-DEM scheme for simulating isothermal particulate flow in fluid // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2015. – **91**. – P. 178-189.

UDC 539.3

## ANALYSIS OF EVOLUTION OF PLANE HARMONIC AND SOLITARY HYPERELASTIC WAVES

**Jeremiah Rushchitsky**

*S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*

[rushch@inmech.kiev.ua](mailto:rushch@inmech.kiev.ua)

Among different kinds of waves, the plane waves (including elastic ones) are studied most fully [1, 2]. Analysis of such waves within the framework of linear approach can be thought as completed. But the nonlinear analysis is still in progress and is developed in different directions. A fragment of study in one of existing directions is presented in this lecture. A comparative analysis of fourteen (known and new) variants of description of evolution of the initial wave profile is shown. Each variant is characterized by the used method, number of approximations, and initial wave profile shape.

Three approaches (methods) are used to analyze the evolution of a plane waves that propagate in a nonlinear hyperelastic medium – method of successive approximations, method of slowly varying amplitudes, method of restriction on the displacement gradient. The evolution is understood as a change of the initial wave profile during propagation of wave in the nonlinear elastic medium. Fourteen variants (new and known) of an approximate analysis of evolution of the propagating in a hyperelastic medium plane longitudinal wave are described and commented. It is shown that each variant gives answer on some aspect in studying the wave evolution. An attention is drawn to similarity and difference in results of analysis.

The model of linear elastic deformation does not describe the evolution of plane waves [1, 2]. Therefore, this study uses one of the most developed models of nonlinear theory of elasticity – the five-constant Murnaghan model [2]. In the framework of this model, a propagation of longitudinal (P-wave) and transverse (S-wave) waves is described by the very distinguishing nonlinear wave equations. In conditions when only one wave is initially excited and propagated in directions of abscissa axis, the first approximation gives for P-wave the quadratic nonlinear wave equation, whereas for S-wave – the cubic nonlinear wave equation:

$$u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1},$$

where  $N_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]$ ,  $\rho$  is density,  $u_k$  is displacement,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  are elastic constants in Murnaghan model,  $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  is velocity of P-wave in the linear model;  $u_{3,tt} - (c_T)^2 u_{3,11} = (N_4/\rho) u_{3,11} (u_{3,1})^2$ ,  $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$  is

velocity of S-wave in the linear model,  $N_4 = 1/2[2(\lambda + 2\mu) + 5A + 14B + 6C]$ .

So, just these two nonlinear wave equations are the basic ones in the study of evolution. Three different profiles and two kinds of plane waves are studied – P-wave + harmonic profile, S-wave + asymmetric profile in the form of Whittaker function, P-wave and S-wave + symmetric profile in the form of Gauss function. In pictures below (Fig. 1), the 3D plots “displacement – distance – time” are shown for four variants that demonstrate the features of evolution of initial profile.

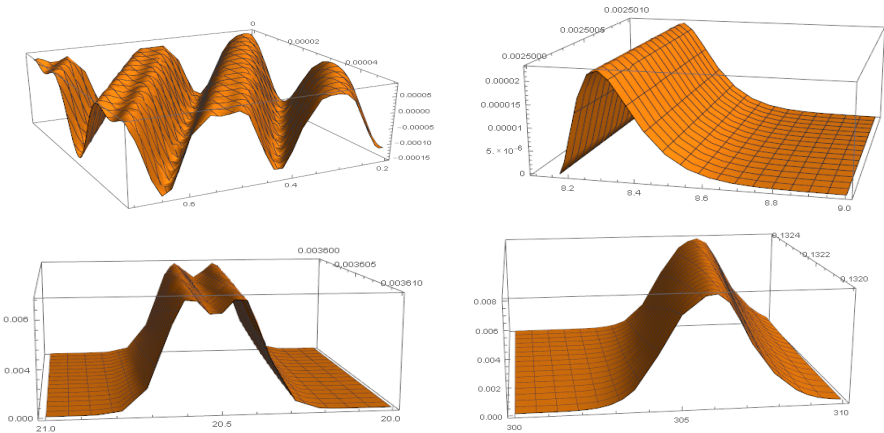


Fig. 1

All used methods work well, when the evolution of harmonic wave is studied [3]. A distortion of waves with more complicate profiles (Gauss and Whittaker) are analyzed successfully by the method of restriction on displacement gradient. A representation of wave within the framework of two or three first approximations and corresponding wave evolution are differing essentially for methods of successive approximations and restriction on displacement gradient. At that, the method of successive approximations describes generation of the first, second, fourth, eighth, etc harmonics, whereas the method of restriction on displacement gradient describes generation of all harmonic successfully – the first, second, third, fourth etc. This is responding for the distindushing scenarios of wave evolution.

1. *Rushchitsky J.J.* Theory of waves in materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2012. – 270 p.
2. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear elastic waves in materials / Series: Foundations of Engineering Mechanics. – Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
3. *Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J.* Numerical analysis of evolution of the plane longitudinal nonlinear elastic waves with different initial profiles // Int. App. Mech. – 2017. – 53, No. 1. – P. 104-110.

UDC 539.3

**MATHEMATICAL MODELING OF TRANSIENT WAVES  
PROPAGATION IN COSSERAT-TYPE THIN SHELLS AND SPATIALLY  
CURVED BEAMS OF OPEN PROFILE**

**Marina Shitikova**

*Voronezh State Technical University (Russia)*

[mvs@vgsu.vrn.ru](mailto:mvs@vgsu.vrn.ru)

The method of ray expansions proposed recently for investigating transient wave processes in thin elastic isotropic plates and shells [1] and spatially curved beams of open profile [2] considering the rotary inertia and transverse shear deformations, but without such additional material constants as shear coefficients in contrast to the Timoshenko theory, has been extended to transient dynamic analysis of thin-walled beams of open profile [3] and shells [4] made of Cosserat-type material.

The proposed mathematical theory of dynamic response of three-layered thin-walled beams of open profile and thin shells, which has been constructed on the basis of the Cosserat dynamic set of equations, allows one to solve the boundary-value problems dealing with nonstationary excitations on such beams. For this purpose, utilizing the conditions of compatibility the recurrent set of equations has been obtained what enables one to determine the discontinuities in desired values as well as the discontinuities in their time-derivatives of arbitrary order within an accuracy of arbitrary constants on each from four types of transient waves. Then using the superposition of the ray series (the power series wherein the discontinuities in the desired values are the coefficients, while the variable is the distance from the front of the corresponding wave up to the boundary where this wave is generated) the relationships for each of the values to be found are constructed, and arbitrary constants are found from the boundary conditions, which should be expanded in terms of the Taylor series with respect to the time.

Thus, starting from the 3D Cosserat continuum, the velocities of four transient waves propagating in thin shells and beams with micro-structure have been determined according to the wave theory for thin-walled plates, shells and beams [3, 4]. Using the expansion ray theory and conditions of compatibility for thin-walled structures, it has been found that (1) the velocities depend only on material constants, and (2) only one micropolar modulus, which governs the asymmetry of the stress tensor, influences the velocity of the quasi-shear wave, while the Lamé mo-



duli do not affect the velocities of Cosserat waves, which are generated due to micropolar rotations. This results to the fact that the mathematical theory due to Cosserat is not coupled one. The knowledge of the velocities of transient waves in thin shells and beams made of Cosserat-type materials allows one to solve boundary-value transient dynamic problems resulting in the propagation of surfaces of strong and weak discontinuity.

The problem on impact of a long elastic rod with a rounded end against a three-layered thin-walled spatially curved Cosserat beam of open profile has been solved as an example illustrating the proposed theory. It has been assumed that the Cosserat moment is generated within the core by the contact force, resulting in the initiation of the Cosserat rotational wave. It has been found that the account for micropolar properties of the target material results in the decrease in magnitudes of all key parameters of the impact interaction, namely: the indentation, its maximal value, the contact duration, and the maximal contact force, as compared with those obtained in [2] during the analysis of the impact response of the elastic isotropic thin-walled beam of open generic profile. In other words, the beams possessing micropolar properties exhibit more high impact resistance.

This research has been supported by the Russian Ministry of Science and Education (Project No. 9.994.2017/PP).

1. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* The method of ray expansions for investigating transient wave processes in thin elastic plates and shells // *Acta Mechanica* – 2007. – **189**. – P. 87-121.
2. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Dynamic response of pre-stressed spatially curved thin-walled beams of open profile / Springer Series: Springer Briefs in Applied Sciences and Technology, 2011. – 86 p.
3. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Transient wave velocities in pre-stressed thin-walled beams of open profile with Cosserat-type micro-structure // *Composites. Part B: Engineering*. – 2015. – **83**. – P. 323-332.
4. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Transient wave propagation in Cosserat-type shells // *Composites. Part B: Engineering* – 2019. – **163**. – P. 145-149.

UDC 539.3

## MATHEMATICAL MODELING THE IMPACT RESPONSE OF VISCOELASTIC PLATES MADE OF AUXETIC MATERIALS

**Marina Shitikova, Oleg Ajeneza**

*Voronezh State Technical University (Russia)*

[mvs@vgasu.vrn.ru](mailto:mvs@vgasu.vrn.ru); [ajeneza@mail.ru](mailto:ajeneza@mail.ru)

Nowadays material engineers are looking for methods rising physical and mechanical characteristics of traditional materials via creating the structures possessing essential abnormal deformational features. As shown by experimental results, materials with negative Poisson's ratio (auxetics) belong to such abnormal materials. There are a lot of papers devoted to auxetic materials, however, the majority of them are dealing with the internal structure of auxetics, experimental determination of Poisson's ratios, as well as with the description of features of different auxetics [1]. Papers discussing the mathematical models describing the behavior of viscoelastic auxetics and structures made of them are rare [2].

In the present paper, the problem on impact of a rigid spherical impactor upon a linear viscoelastic Kirchhoff-Love plate, made of viscoelastic auxetic material possessing fractional viscosity, has been formulated for the case, when the shear operator is governed by the fractional derivative Kelvin-Voigt model in conjunction with the assumption that the bulk extension-compression operator is assumed to be time-independent, i.e., volumetric relaxation is neglected.

The behavior of Kirchhoff-Love plate, made of viscoelastic auxetic is different from the behavior of the viscoelastic plate lacking auxetic properties. This is due to the fact that the auxetic's Poisson's ratio is a time-dependent value changing from negative to positive magnitudes with time. The solution out of the contact domain is found via the Green's function, and within the contact domain via the Hertz theory. Using the algebra of dimensionless Rabotnov's fractional operators, integral equations for the contact force and the local indentation have been obtained.

This research has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 17-01-00490\_a).

1. *Ren X., Das R., Tran P., Ngo T.D., Xie Y.M.* Auxetic metamaterials and structures: A review // *Smart Mater. Struct.* – 2018. – 27, No. 2. – Article ID 023001.
2. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Fractional calculus models in dynamic problems of viscoelasticity / In: *Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences. Part A* (D. Baleanu, A.M. Lopes, Eds.). – De Gruyter, 2019. – P. 139-158.

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ ТА ТЕРМОМЕХАНІКИ

УДК 531.383

ЕВОЛЮЦІЯ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ  
НЕСТАЦІОНАРНОГО ВІДНОВЛЮЮЧОГО  
ТА ЗБУРЮЮЧОГО МОМЕНТІВ

Леонід Акуленко, Тетяна Козаченко, Дмитро Лещенко

*Інститут проблем механіки РАН (Росія);**Одеська державна академія будівництва та архітектури (Україна)*[gavrikov@ipmnet.ru](mailto:gavrikov@ipmnet.ru); [kushpil.t.a@gmail.com](mailto:kushpil.t.a@gmail.com); [leshchenko\\_d@ukr.net](mailto:leshchenko_d@ukr.net)

Досліджуються збурені рухи динамічно симетричного важкого твердого тіла відносно нерухомої точки під дією відновлюючого та збурюючого моментів, які повільно змінюються з часом  $\tau = \varepsilon t$ , де  $t$  – час, а  $\varepsilon$  – малий параметр, що характеризує величину збурень ( $\varepsilon \ll 1$ ). Рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu(\tau)\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu(\tau)\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3; \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\psi} &= (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \tau = \varepsilon t, \\ \dot{\theta} &= p\cos\varphi - q\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $p, q, r$  – проєкції вектора кутової швидкості на головні осі інерції тіла,  $\varepsilon M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – проєкції вектора збурюючого моменту на ці ж осі;  $\psi, \theta, \varphi$  – кути Ейлера;  $A$  – екваторіальний, а  $C$  – осьовий момент інерції тіла. Припускається, що на тіло діє відновлюючий момент  $\mu(\tau)$ , який повільно змінюється з часом і є функцією, що диференціюється. Зокрема, при  $\varepsilon = 0$  і відновлюючому моменті, незалежному від часу, система (1) описує рух у випадку Лагранжа.

Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи (1) при значеннях малого параметра  $\varepsilon$ , відмінних від нуля, на досить великому інтервалі часу за допомогою метода усереднення.

Усереднення проводиться по фазі кута нутації за допомогою модифікованої процедури, викладеної в [2]. Після ряду перетворень перші три рівняння системи (1) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon F_1(G_z, H, r, \tau, \theta), & F_1 &= M_1^* \sin \theta + M_3^* \cos \theta, \\ \dot{H} &= \varepsilon F_2(G_z, H, r, \tau, \theta), & F_2 &= M_2^* + M_3^* r + \frac{d\mu(\tau)}{d\tau} \cos \theta, \\ \dot{r} &= \varepsilon F_3(G_z, H, r, \tau, \theta), & F_3 &= C^{-1} M_3^*, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $G_z$  – проекція вектора кінетичного моменту на вертикаль,  $H$  – повна енергія тіла,  $r$  – проекція вектора кутової швидкості на вісь динамічної симетрії. Для можливості застосування методу усереднення праві частини системи (2) мають бути  $2\pi$ -періодичними функціями по фазі кута нутації  $\theta$ , а також повинні бути виконані необхідні і достатні умови, що накладаються на збурюючі моменти:

$$\begin{aligned} M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi &= M_1^*, & M_1 p + M_2 q &= M_2^*, & M_3 &= M_3^*, \\ M_i^* &= M_i^*(G_z, H, r, \tau, \theta), & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Систему рівнянь (2) після ряду перетворень, заміни змінних приводимо до усередненої системи рівнянь першого наближення.

Як приклад запропонованої методики розглянуто збурений рух тіла, близький до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища. Збурюючі моменти мають вигляд:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r; \quad a(\tau), b(\tau) > 0,$$

де  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  – інтегровані функції, що залежать від властивостей середовища і форми тіла.

Усереднена система проінтегрована чисельно для  $\tau \geq 0$  при різних початкових умовах і параметрах задачі. Повна енергія тіла, проекція вектора кінетичного моменту на вертикаль та кутова швидкість обертання відносно осі динамічної симетрії монотонно спадають. Повна енергія спадає, асимптотично наближаючись до значення  $H = -0.5$ . Під дією нестационарних дисипативного і відновлюючого моментів тіло прагне до стійкого нижнього положення рівноваги швидше, ніж у розглянутих раніше випадках [1, 2].

1. Akulenko L.D., Zinkevich Ya.S., Kozachenko T.A., Leshchenko D.D. The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque // J. Appl. Math. Mech. – 2017. – **81**, № 2. – P. 79-84.
2. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. – Cham: Springer, 2017. – 241 p.

#### THE EVOLUTION OF THE MOTIONS OF A RIGID BODY UNDER THE ACTION OF UNSTEADY RESTORING AND PERTURBATION TORQUES

*We investigate the perturbed motion of a rigid body, close to Lagrange's case, under the influence of slowly time-varying perturbation and restoring torques.*

**ПЛОСКА СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ  
ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ПЛИТИ З НЕІДЕАЛЬНИМ  
ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ**

**Ніна Антоненко, Ірина Ткаченко**

*Національний університет «Запорізька політехніка» (Україна);*

*Запорізький національний університет (Україна)*

[antonenkonina.ua@gmail.com](mailto:antonenkonina.ua@gmail.com); [tig.phd81@gmail.com](mailto:tig.phd81@gmail.com)

Під багатошаровою плитою будемо розуміти пакет із  $n$  зчеплених між собою пружних шарів, які вважаються невагомими однорідними та ізотропними. На спільних межах шарів виконуються умови неідеального теплового контакту [2]. На верхній та нижній межах плити відома температура. Необхідно знайти розподіл температури в точках багатошарової плити, що розглядається.

Нумерація шарів проводиться зверху вниз, починаючи з одиниці. Усі величини, що відносяться до  $k$ -го шару, позначаються нижнім індексом  $k$  (якщо це не призводитиме до неоднозначності, то індекси опускатимемо). У кожному шарі введено локальну декартову систему координат  $O_k x_k z_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) з початком на верхній межі шару, причому всі осі  $O_k x_k z_k$  всіх систем координат збігаються та мають напрямок вглиб шарів, а осі  $O_k x_k$  співнапрявлені та збігаються з межею відповідного шару.

Задача зводиться до розв'язання диференціального рівняння відносно температури  $T_k = T_k(x, z)$  для кожного шару плити [4]:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Умови на спільних межах шарів [2]:

$$k_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial x}(x, h_k) = R_k^{-1} (T_{k+1}(x, 0) - T_k(x, h_k)),$$

$$k_{Tk+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial x}(x, 0) = k_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial x}(x, h_k), \quad k = \overline{1, n-1},$$

де  $R_k$  – коефіцієнт теплового опору,  $k_{Tk}$  – коефіцієнт теплопровідності.

Крайові умови:  $T_1(x, 0) = f(x)$ ,  $T_n(x, h_n) = \tilde{f}(x)$ .

Для розв'язання поставленої задачі використано метод функцій податливості, який раніше застосовувався до багатошарових основ з ідеальним [3] та неідеальним [1] тепловим контактом між шарами. У [3] трансформанти температури кожного шару представлено у вигляді лінійних комбінацій допоміжних функцій  $\eta = \bar{T}(\xi, 0)$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{p} \frac{d\bar{T}}{dz}(\xi, 0)$ . Відомо, що допоміжні функції сусідніх шарів пов'язані співвідношеннями ( $k = \overline{1, n-1}$ ) [1]:

$$\eta_{k+1} = (C_k + pL_k S_k) \eta_k + (S_k + pL_k C_k) \varepsilon_k, \quad \varepsilon_{k+1} = \Delta_k (S_k \eta_k + C_k \varepsilon_k),$$

де  $S_k = \text{sh } p_k$ ,  $C_k = \text{ch } p_k$ ,  $p_k = p h_k$ ,  $\Delta_k = k_{T_k} / k_{T_{k+1}}$ ,  $L_k = k_{T_k} R_k$ .

Для  $k = n$  введено фіктивний шар з номером  $n+1$ . Вважалось, що на спільній межі  $n$ -го та  $(n+1)$ -го шарів ідеальний тепловий контакт:  $T_{n+1}(x, 0) = T_n(x, h_n)$  або в просторі трансформант  $\bar{T}_{n+1}(\xi, 0) = \bar{T}_n(\xi, h_n)$ . Отже,  $\eta_{n+1} = C_n \eta_n + S_n \varepsilon_n$ , тоді  $\varepsilon_n = -\text{cth } p_n \eta_n + S_n^{-1} \eta_{n+1}$ . Доведено, що допоміжні функції пов'язані співвідношенням  $\varepsilon_k = -r_k \eta_k + F_k \eta_{n+1}$ , в якому функції  $r_k$ ,  $F_k$  називаються функціями податливості.

Отримано співвідношення, для обчислення функцій податливості плити:

$$r_n = \text{cth } p_n, \quad F_n = 1/S_n,$$

$$r_k = \frac{\Delta_k S_k + r_{k+1} (C_k + pL_k S_k)}{\Delta_k C_k + r_{k+1} (S_k + pL_k C_k)}, \quad F_k = \frac{F_{k+1}}{\Delta_k C_k + r_{k+1} (S_k + pL_k C_k)}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

1. Антоненко Н.М., Ткаченко І.Г., Долгорукий П.Ю. Плоска термопружна деформація багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами // Актуальні проблеми інженерної механіки: VI Міжнар. наук.-практ. конф., Одеса, 20-24 травня 2019 р.: тези доп. – Одеса: ОДАБА, 2019. – С. 16-19.
2. Боли Б. Теория температурных напряжений. – Москва : Мир, 1964. – 517 с.
3. Величко І.Г., Ткаченко І.Г. Плоска термопружна деформація багатошарової основи // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8, Т. 1. – С. 154-161.
4. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.

**PLANE STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR A MULTILAYER PLATE WITH A NON-IDEAL THERMAL CONTACT BETWEEN ITS LAYERS**

*The compliance functions method has been used for finding temperature at the points of the multilayer plate with a non-ideal thermal contact between its layers. New compliance functions have been introduced. The recurrence relations for the compliance functions have been constructed.*

**ЧИСЕЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ НЕУСТАЛЕНОГО ТЕПЛООВОГО СТАНУ  
ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПОРОЖНИСТОГО ШАРУВАТОГО ЦИЛІНДРА  
ЗА УМОВ СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ****Галина Гарматій***Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*[galynaharmatiy@gmail.com](mailto:galynaharmatiy@gmail.com)

Визначення і дослідження неусталеного розподілу температурного поля в елементах конструкцій, що знаходяться в умовах високотемпературного нагрівання, на основі математичних моделей, які враховують залежність від температури теплофізичних характеристик матеріалів, приводить до розв'язування нелінійних нестационарних крайових задач теплопровідності. Знаходження розв'язків таких задач значно ускладнюється у випадку кусково-однорідних елементів конструкцій за умов складного теплообміну. При цьому використовують переважно чисельні методи, оскільки отримання точних аналітичних розв'язків пов'язано зі значними математичними труднощами.

В роботі [1] чисельно, методом прямих, розв'язано нелінійну нестационарну крайову задачу теплопровідності для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну через внутрішню та зовнішню поверхні зі середовищами сталих температур. Тут розглядається чисельне визначення неусталеного розподілу температурного поля в тришаровому порожнистому термочутливому циліндрі за умов лінійної залежності від часу температури внутрішньої поверхні циліндра та конвективного теплообміну через зовнішню поверхню з середовищем змінної в часі температури. Головною перевагою використання методу прямих є зведення нелінійного рівняння теплопровідності в часткових похідних з розривними коефіцієнтами та граничних умов шляхом дискретизації за просторовою змінною до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, яка може бути розв'язана з достатньо високою точністю. Проведений огляд методів чисельного розв'язування такого типу задач показує, що існує велика кількість робіт, присвячених знаходженню розв'язків квазілінійних рівнянь з гладкими коефіцієнтами. В [2] показано, що тільки консервативні різницеві схеми збігаються в класі розривних коефіцієнтів. Тому у даній роботі дискретизацію за просторовою змінною рівняння теплопровідності та граничних умов здійснено за допомогою методу балансу (інтегро-інтерполяційного методу), який приводить до різницевих схем, що збігаються у класі розривних коефіцієнтів.

Нелінійне рівняння теплопровідності у циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$  в одновимірній постановці для визначення неусталеного розподілу температурного поля (залежить від радіуса  $r$  та часу  $\tau$ ) в порожнистому тришаровому циліндрі з внутрішнім радіусом  $r_0$  і зовнішнім –  $R$  ( $r_2 - r_1$  – товщина проміжного шару) має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) = c(r, t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad r_0 < r < R,$$

де

$$\lambda(r, t) = \begin{cases} \lambda^{(1)}(t), & r_0 \leq r < r_1, \\ \lambda^{(2)}(t), & r_1 < r < r_2, \\ \lambda^{(3)}(t), & r_2 < r \leq R, \end{cases} \quad c(r, t) = \begin{cases} c^{(1)}(t), & r_0 \leq r < r_1, \\ c^{(2)}(t), & r_1 < r < r_2, \\ c^{(3)}(t), & r_2 < r \leq R, \end{cases}$$

$\lambda^{(j)}(t)$ ,  $c^{(j)}(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – залежні від температури коефіцієнт теплопровідності та об'ємна теплоємність матеріалу  $j$ -го шару циліндра.

Граничні умови на поверхнях  $r = r_0$  та  $r = R$  задані у вигляді

$$t|_{r=r_0} = t_p + v_1 \tau, \quad \lambda^{(3)}(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} + \alpha (t|_{r=R} - (t_p + v_2 \tau)) = 0,$$

де  $v_1$ ,  $v_2$  – швидкості нагрівання внутрішньої і зовнішньої поверхонь циліндра,  $t_p$  – початкова температура,  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну.

Визначено неусталений розподіл температурного поля у тришаровому термочутливому порожнистому циліндрі, виготовленому з кераміки з внутрішнім вольфрамовим шаром.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень” КПКВК 6541230.

1. *Гарматій Г.Ю., Калиняк Б.М., Кутнів М.В.* Незв'язана квазістатична задача термодинаміки для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 4. – С. 78-87.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.

**NUMERICAL DEFINITION OF AN UNSTEADY THERMAL STATE OF A THERMOSENSITIVE HOLLOW LAYERED CYLINDER UNDER CONDITIONS OF A COMPLEX HEAT-EXCHANGE**

*Nonlinear non-stationary boundary-value thermal conductivity problem for a three-layer hollow cylinder is reduced to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations using the numerical method of lines. The conservative discretization for the spatial variable of the heat equation with discontinuous coefficients and boundary conditions is carried out by the integro-interpolation method.*



## РЕЗОНАНСНА ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА ПОДАТЛИВОЇ НА ЗСУВ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З П'ЄЗОСЕНСОРАМИ

**Іван Киричок, Ярослав Жук, Ольга Чернюшок, Андрій Тарасов**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;*

*Київський національний університет ім. Тараса Шевченка (Україна);*

*Київський національний університет харчових технологій (Україна)*

[y.zhuk@i.ua](mailto:y.zhuk@i.ua); [chernyushokolga@ukr.net](mailto:chernyushokolga@ukr.net)

Конструктивні елементи типу балок, пластинок і оболонок із непружних активних і пасивних матеріалів із характерними властивостями шаруватості, анізотропії складових та податливості на зсув широко застосовують як функціональні складові конструкцій сучасної техніки. В більшості випадків вони перебувають в стані вимушених коливань під дією інтенсивних гармонічних навантажень з частотою, що близька до резонансної. При цьому через внутрішні гістерезисні втрати в непружних матеріалах процес деформування супроводжується дисипативним розігрівом [1, 2].

В даній роботі розглядається тришарова циліндрична оболонка довжиною  $\ell$ , віднесена до ортогональної системи координат  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $z$  з координатою  $z = 0$  на середині внутрішнього шару радіуса  $R$  і товщини  $h_0$ . Внутрішній шар виготовлено із пасивного трансверсально-ізотропного матеріалу, а зовнішні товщиною  $h_1$  – із поляризованої по товщині в протилежних напрямках п'єзокераміки. Матеріали шарів вважаємо в'язкопружними, властивості яких залежать від температури. Поляризація верхнього ( $z \geq h_0/2$ ) і нижнього ( $z \leq h_0/2$ ) п'єзошарів характеризуються значеннями п'єзомодулів  $+d_{31}$  і  $-d_{31}$  відповідно. Поверхні, що контактують з пасивним шаром, покриті суцільними нескінченно тонкими електродами, на яких задано електричний потенціал  $\phi(\pm h_0/2) = 0$ . Поверхні  $z = \pm(h_0/2 + h_1)$  електродовані на ділянці  $s^\pm = 2\pi R \Delta_\alpha$ , де  $(\Delta_\alpha = \alpha_1 - \alpha_0)$ , та неелектродовані поза  $s^\pm$ , де виконуються такі електростатичні граничні умови:

$$\iint_{s^\pm} D_z^\pm dz = 0, \quad (\alpha_0 < \alpha \leq \alpha_1); \quad D_z^\pm = 0, \quad (0 \leq \alpha < \alpha_0, \alpha_1 < \alpha \leq \ell),$$

де  $D_z^\pm$  – нормальна складова електричної індукції в п'єзоелектричних шарах.

Оболонка навантажена осесиметричним поверхневим тиском  $q_z = q'_z(\alpha)\cos\omega t$ , що змінюється за гармонічним законом у часі  $t$  з амплітудою  $q'_z$  і круговою частотою  $\omega$ , яка близька до резонансної. В результаті гармонічного деформування на розімкнутих електродах сенсора  $s^\pm$  виникають електричні потенціали  $\pm V_s$ , амплітудні значення яких розраховуються або визначаються експериментально. Вважаємо, що торці оболонки вільні в тангенціальному і шарнірно закріплені в поперечному напрямках, а на її граничних поверхнях виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем температури  $T_c$ .

З використанням методології [1] та прийнятих припущень задача про вимушені коливання і вібророзігрів розглядуваної оболонки відносно шуканих комплексних величин зводяться до розв'язання рівнянь гармонічних коливань, визначальних співвідношень для зусиль і моментів, залежностей між амплітудними значеннями деформацій і переміщень, виразів для електричної індукції в п'єзошарах, усередненого за період коливань і по товщині оболонки рівняння теплопровідності з відповідною дисипативною функцією при заданих механічних граничних і теплових граничних та початкових умовах. Сформульована задача електротермомеханіки в силу залежності властивостей матеріалів від температури є зв'язаною і нелінійною. Для її розв'язання застосовується покроковий за часом метод [2].

На першому кроці розв'язується лінійна задача при ізотермічних властивостях матеріалів. Потім обчислюється дисипативна функція і розв'язується задача теплопровідності методом скінчених різниць з використанням явної схеми. Далі з урахуванням розподілу температури обчислюються жорсткісні характеристики і процес повторюється на наступному кроці за часом.

У такий спосіб досліджується вплив деформації зсуву, температурної залежності властивостей матеріалів та умов теплообміну на амплітудно- і температурночастотні характеристики, електричні показники сенсора, критичні значення амплітуд механічного навантаження, при яких відбувається теплова деградація системи.

1. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
2. Киричок І.Ф., Жук Я.О., Карнаухова Т.В. Резонансні коливання і дисипативний розігрів гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоактуаторами при врахуванні деформації зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 2. – С. 66-74.

#### RESONANT THERMOMECHANICAL RESPONSE OF THE SHEAR COMPLIANT VISCOELASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH PIEZOSENSORS

*The problem of the forced axisymmetric vibration and dissipative heating of hinged viscoelastic cylindrical shell with piezoelectric sensor is studied with account of shear strain and temperature dependence of the material properties.*

УДК 539.3

## ФУНКЦІЇ ГРІНА ДВО- І ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРІВ ЗІ СТАЦІОНАРНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ І ДИПОЛЯМИ ТЕПЛА

**Григорій Кіт, Наталія Івасько, Роман Андрійчук**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[hkit@iapmm.lviv.ua](mailto:hkit@iapmm.lviv.ua); [natalya\\_ivasko@ukr.net](mailto:natalya_ivasko@ukr.net); [andriyehukroman@gmail.com](mailto:andriyehukroman@gmail.com)

За дії стаціонарного джерела чи диполя тепла побудовано функції Гріна дво- і тривимірних задач стаціонарної теплопровідності й термопружності для півбезмежних тіл з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура або теплоізоляція.

При розв'язуванні задачі теплопровідності використано потенціали простого або подвійного шару. Для визначення густини джерел або диполів тепла побудовано інтегральні рівняння з сингулярними і регулярними ядрами, які враховують взаємодію включення з межею тіла. При цьому густини потенціалів мають простий фізичний сенс – це потужність джерел або диполів тепла на місці розташування включень. Для кругової області ці рівняння можна розв'язувати аналітично-числовим способом: регуляризуємо їх, розбиваємо область на граничні елементи за радіусом та кутом і задовольняємо рівняння в колокаційних точках усередині введених елементів, використовуючи кусково-сталу апроксимацію шуканих функцій та різницеві схеми для її перших і других похідних. Так приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Для розв'язання задачі термопружності використано термопружні потенціали переміщень у безмежному тілі із дзеркально розташованими відносно межі півпростору джерелами або диполями тепла. Для виконання крайових умов на межі тіла побудовано бігармонічні функції Лява та функції Буссінеска. Метод функцій Лява зручний, коли термопружний потенціал переміщень виражений інтегралом Ганкеля [2, 3]. Якщо ж цей потенціал заданий в явному вигляді, то зручніше користуватися функціями Буссінеска, вираженими через суму двох гармонічних функцій [1, 4-7], побудова яких зводиться до розв'язування крайових задач для гармонічних функцій у півпросторі.

Отримані співвідношення для температури, переміщень і напружень є відповідними функціями Гріна і можуть бути використані при визначенні

температурного поля і термопружного стану півпростору за тепловиділення і теплоізоляції в областях, розташованих у паралельних або перпендикулярних до межі площинах.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень” КПКВК 6541230.

1. *Івасько Н.М.* Двовимірна задача термопружності для півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у паралельній до неї стрічковій області // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2017. – Вип. 15. – С. 139-146.
2. *Кім Г.С., Андрійчук Р.М.* Вплив стаціонарного джерела тепла на напружений стан півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 78-86.
3. *Кім Г.С., Андрійчук Р.М.* Термонапружений стан півпростору з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за теплоізоляції в області, розміщеній у паралельній до межі площині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 4. – С. 111-123.
4. *Кім Г.С., Андрійчук Р.М.* Термопружний стан півпростору із закріпленою межею за тепловиділення у паралельній до неї круговій області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – **53**, № 3. – С. 98-104.
5. *Кім Г.С., Андрійчук Р.М.* Функції Буссінеска тривимірних задач термопружності для півпросторів з джерелом або диполем тепла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 3. – С. 40-44.
6. *Кім Г.С., Івасько Н.М.* Двовимірна задача термопружності для півпростору за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 147-155.
7. *Кім Г.С., Івасько Н.М.* Двовимірна задача термопружності для півпростору з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за теплоізоляції у паралельній до неї стрічковій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 2. – С. 80-90.

#### **GREEN'S FUNCTIONS OF TWO- AND THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR HALF-SPACES WITH STATIONARY SOURCES AND HEAT DIPOLES**

*Under the action of a heat source or thermal dipole, the Green's functions of the stationary heat conduction and thermoelasticity problems for semi-infinite body with a free, rigidly, smoothly or flexibly clamped boundary, on which zero temperature or thermal insulation is maintained, are constructed. The harmonic potentials of the simple or double layer and the potentials of thermoelastic displacements in an infinite space with two mirror-like heat sources or thermal dipoles relative to the half-space boundary are used in solving the heat conduction problem and thermoelasticity problem. The density of heat sources and thermal dipoles is determined from the integral equations with singular and regular kernels. Biharmonic Love functions or Boussinesq's functions for the satisfaction of the boundary conditions are constructed. Explicit expressions for temperature, displacements and stresses used to determine the temperature field and half-space thermoelastic state at heat-generation and heat-insulation in domains, located on the planes parallel or perpendicular to the boundary.*

## РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ КОНДУКТИВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОВОЛОГОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ ЩОДО ТЕПЛОВОЇ ОБРОБКИ ПОЛІГРАФІЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

Ярослав Коляно, Тарас Сас

*Українська академія друкарства (Україна)*

[orange3005@gmail.com](mailto:orange3005@gmail.com)

Значна частина кількшарових матеріалів (композитів) піддаються тепловій обробці (нагріванню, сушінню) на різних етапах виробництва. Такими композитами в поліграфії є: деякі види паперу (крейдований, картографічний папір); картону (шаруватий картон (целюлоза, деревна маса, картон), картон із захисною плівкою, гофрокартон); сучасні пакувальні матеріали (папір-лак, папір-фольга, картон-поліетилен); палітурні кришки (картон, клейовий шар, покрівельний матеріал), друкарські форми та ін.. Оптимізація процесів теплової обробки таких матеріалів є важливим і актуальним завданням [1]. Першим кроком до розв'язання таких задач термовологопровідності (задач сушіння) для кількшарових тіл є розв'язання відповідних нестационарних задач теплопровідності (задач нагрівання) [2].

Розглядається волога необмежена пластина товщини  $h$ , що складається з двох шарів, які мають різні термодинамічні коефіцієнти і товщини  $h_1, h_2$ . Початкові температура  $t_0$ , потенціал вологоперенесення  $\theta_0$ . Висушування пластини здійснюється шляхом, коли нижня поверхня нагрівається тепловим потоком  $q$ , а верхня взаємодіє з оточуючим середовищем температури  $t_c$  згідно з законом конвективного термовологообміну (кондуктивна (контактна) задача термовологопровідності). Потрібно знайти розподіли температури і потенціалу вологоперенесення в довільній точці цієї двошарової пластини залежно від часу. Для цього використовуємо виведену акад. О.В. Ликовим систему диференціальних рівнянь, яка після обезрозмірення для кожного окремого шару має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_i}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial Z^2} - \varepsilon_i K o_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial Fo}, \\ \frac{\partial \Theta_i}{\partial Fo} = Lu_i \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial Z^2} - Lu_i P n_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial Z^2}, \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

де  $T_i(Z, Fo)$ ,  $\Theta_i(Z, Fo)$  – шукані безрозмірні температури та потенціали во-

логоперенесення;  $Z = z/h$  – безрозмірна координата,  $Z_1 = h_1/h$ ;  $Fo$ ,  $Lu_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $Ko_i$ ,  $Pn_i$  – певні критерії ( $i = 1, 2$ ). Рівняння системи (1) розв’язуємо при таких безрозмірних початково-крайових умовах:

$$T_1(Z, 0) = 0, T_2(Z, 0) = 0, \Theta_1(Z, 0) = 0, \Theta_2(Z, 0) = 0, Fo = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial Z}(1, Fo) - Bi_{q2}(1 - T_2) + (1 - \varepsilon_2)Ko_2Lu_2Bi_{m2}(1 - \Theta_2) = 0, Z = 1,$$

$$-\frac{\partial \Theta_2}{\partial Z}(1, Fo) + Pn_2 \frac{\partial T_2}{\partial Z} + Bi_{m2}(1 - \Theta_2) = 0, \quad Z = 1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial Z}(0, Fo) + Ki_{q1}(Fo) = 0, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial Z}(0, Fo) - Pn_1 \frac{\partial T_1}{\partial Z} = 0, \quad Z = 0, \quad (4)$$

$$T_1 = T_2, \quad \frac{\partial T_1}{\partial Z} = K_{\lambda_q}^* \frac{\partial T_2}{\partial Z}, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial Z} = K_{\lambda_m}^* \frac{\partial \Theta_2}{\partial Z}, \quad Z = Z_1. \quad (5)$$

Тут  $Ki_{q1} = q(Fo)h/\lambda_q(t_c - t_0)$  – критерій теплового потоку Кірпічова,  $q(Fo)$  – густина теплового потоку ґріночі ( $Z = 0$ ) поверхні,  $Bi_{q2}, Bi_{m2}$  – критерії Біо. Застосовуючи інтегральне перетворення Лапласа до задачі (1)-(5), приходимо до трансформованої задачі, загальний розв’язок якої в трансформантах  $\bar{T}_1(Z, s), \bar{T}_2(Z, s), \bar{\Theta}_1(Z, s), \bar{\Theta}_2(Z, s)$  містить довільні постійні  $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4$ , які знаходимо із розв’язання СЛАР 8-го порядку. В результаті, після застосування до трансформант теореми розкладу Вашенка-Захарченка [1, 2], розв’язок задачі (1)-(5)  $T_1(Z, Fo), T_2(Z, Fo), \Theta_1(Z, Fo), \Theta_2(Z, Fo)$  подаємо у вигляді рядів, згідно яких будуть виконуватись чисельні обрахунки для композитних матеріалів: картон-полімер, картон-тканина, папір-фольга-полімер і т.д.

1. Коляно Я.Ю., Сасс Т.С., Іваник Е.Г. Моделирование кондуктивной сушки полиграфических материалов капиллярно-пористой коллоидной структуры // Инженерно-физический журнал. – Минск, 2018. – 91, № 5. – С. 1231-1241.
2. Коляно Я.Ю., Сасс Т.С. Нестационарна задача теплопроводності для двошарової плити щодо сушіння поліграфічної продукції // Комп’ютерні технології друкарства: Збірник наук. праць. – Львів: УАД, 2009. – № 21. – С. 226-234.

**SOLUTION A NON-STATIONARY CONDUCTIVE PROBLEM OF THERMAL AND MOISTURE CONDUCTIVITY OF A TWO-LAYER PLATE FOR THERMAL PROCESSING OF PRINTING MATERIALS**

*Applying differential equation system and respective boundary conditions derived by Likov A.V. is making possible to find solutions for problems of modeling of conductive drying processes for two-layer plate.*

**ОПТИМАЛЬНІСТЬ АДАПТИВНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ  
ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ОПУКЛИХ ЗАДАЧ МІНІМІЗАЦІЇ****Ярослав Кондратюк**[kondratyuk.research@gmail.com](mailto:kondratyuk.research@gmail.com)

Адаптивний метод скінченних елементів (МСЕ) демонструє вражаючу ефективність для апроксимації різноманітних задач науки та техніки [8]. Перші доведення оптимальності адаптивного МСЕ були представлені в працях [1, 7]. Оптимальність адаптивного МСЕ для змішаних варіаційних задач вивчалась в працях [3–6].

Метою цієї презентації є детальний аналіз оптимальності адаптивного МСЕ для опуклих задач мінімізації на основі праці [2] та побудова більш загального та покращеного підходу.

1. *Binev P., Dahmen W., DeVore R.* Adaptive finite element methods with convergence rates // *Numer. Math.* – 2004. – **97**, № 2. – P. 219-268.
2. *Carstensen C., Kondratyuk Y.* Two adaptive finite element methods for uniformly convex minimisation problems of optimal complexity // Preprint, Researchgate, 2009.
3. *Fratta G., Fuhrer T., Gantner G., Praetorius D.* Adaptive Uzawa algorithm for the Stokes equation // ASC Report 34/2018, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology.
4. *Kondratyuk Y.* Adaptive finite element algorithms for the Stokes problem: Convergence rates and optimal computational complexity // Preprint, Department of Mathematics, Utrecht University, The Netherlands, 2006.
5. *Kondratyuk Y., Stevenson R.* An optimal adaptive finite element method for the Stokes problem. // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2008. – **46**, № 2. – С. 747-775.
6. *Kondratyuk Y.* Adaptive Finite Element Algorithms of Optimal Complexity // PhD thesis. Utrecht University, 2006.
7. *Stevenson R.* Optimality of a standard adaptive finite element method // *Found. Comput. Math.* – 2007. – **7**, № 2. – P. 245-269.
8. *Verfurth R.* A posteriori error estimation techniques for finite element methods. – Oxford: Oxford University Press, 2013. – 416 p.

**OPTIMALITY OF ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHODS FOR CONVEX  
MINIMISATION PROBLEMS**

*We present detailed analysis of optimality of adaptive finite element methods for convex minimisation problems.*

**ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ ЗГИН ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ****Лідія Курпа, Катерина Любицька, Ірина Морачковська***Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут» (Україна)*[lyubitska@gmail.com](mailto:lyubitska@gmail.com); [kurpalidia@gmail.com](mailto:kurpalidia@gmail.com); [i.morachkovska@gmail.com](mailto:i.morachkovska@gmail.com)

В даній роботі розглядається задача геометрично-нелінійного згину пологих елементів конструкцій, виготовлених з функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) під впливом різноманітного поперечного навантаження. При цьому пологі оболонки, які розглядаються, можуть мати довільну форму плану та контактують з пружною основою типа Вінклера-Пастернака.

Математичну постановку було виконано в рамках класичної геометрично-нелінійної теорії. Для лінеаризації нелінійної системи диференціальних рівнянь рівноваги застосовано метод послідовних навантажень в комплексі з методом Ньютона-Канторовича [1]. Ефективні механічні характеристики ФГМ змінюються в напрямку товщини та обчислюються згідно зі степеневим законом. Додатково було використано теорію R-функцій [2], що дозволило побудувати необхідні системи координатних функцій у разі довільної геометрії плану оболонки та способів її обпирання.

Запропонований підхід було програмно реалізовано, протестовано та застосовано для розв'язання задач згину пологих оболонок складної форми плану. Досліджено вплив коефіцієнтів пружності основи, механічних характеристик матеріалів, градієнтного показника в розподіленні долей металу та кераміки, та інших параметрів.

1. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов, 1975. – 119 с.
2. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

**GEOMETRICALLY NONLINEAR BENDING OF FUNCTIONALLY GRADIENT SHALLOW SHELLS ON ELASTIC FOUNDATION**

*Geometrically nonlinear bending of FGM shallow shells on elastic foundation subjected to the transverse load is investigated. The approach is based on combination of the step-by-step method, Neuton's method and the R-function theory. The proposed method is applied to solve bending problem for shells with complex planform. The effect of various mechanical parameters is investigated.*



**ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ  
ТЕРМОЧУТЛИВИХ ПІВПРОСТОРУ ТА ШАРУ  
З ТЕПЛОВИДІЛЕННЯМИ НА МЕЖІ КОНТАКТУ**

**Роман Кушнір, Оксана Вовк, Тетяна Соляр**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[dept19@iapmm.lviv.ua](mailto:dept19@iapmm.lviv.ua); [t\\_solyar@ukr.net](mailto:t_solyar@ukr.net)

Дана робота є продовженням досліджень ефективності використання числового обернення перетворення Лапласа на основі адаптованої формули Пруднікова в задачах термопружності термочутливих тіл. Раніше було досліджено ефективність її застосування в задачах теплопровідності для термочутливих півпростору, контактуючих півпросторів та задачі термопружності для кусково-однорідного півпростору. Тут проведено аналогічні дослідження для термочутливих півпростору та шару за дії джерела тепла на межі контакту.

Нестационарні температурні поля  $t_j$  термочутливих ідеально контактуючих півпростору та шару, через поверхню якого відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона та дією на межі контакту джерела тепла, діючого постійно або впродовж певного проміжку часу, визначається з нелінійної крайової задачі теплопровідності:

$$\partial(\lambda_i^j(t_j)\partial t_j/\partial z)/\partial z = c_v^j(t_j)\partial t_j/\partial \tau, \quad j = \begin{cases} 1, 0 < z \leq z_0; \\ 2, z < 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$t_j|_{\tau=0} = t_p, \quad \left[ \lambda_i^1(t_1)\partial t_1/\partial z + \alpha(t_1 - t_c) \right]_{z=z_0} = 0, \quad \partial t_2/\partial z|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad (2)$$

$$t_1|_{z=0} = t_2|_{z=0}, \quad \left[ \lambda_i^{(2)}(t_2)\partial t_2/\partial z \right]_{z=0} - \left[ \lambda_i^{(1)}(t_1)\partial t_1/\partial z \right]_{z=0} = q_j(\tau), \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

де  $t_p$  – початкова температура півпростору та шару,  $t_c$  – температура середовища,  $\lambda_i^j(t)$  – коефіцієнти теплопровідності,  $c_v^j(t)$  – об'ємні теплоємності матеріалів тіл, які володіють властивістю простої нелінійності,  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну через поверхню  $z = z_0$ ,  $q_1(\tau) = q_0 S_-(\tau)$  за постійно діючого сталого джерела,  $q_2(\tau) = q_0 S_+(\tau_k - \tau)$  за діючого впродовж часу  $\tau_k$  джерела тепла потужності  $q_0$ ,  $S_-(\tau) = \begin{cases} 1, \tau \geq 0; \\ 0, \tau < 0, \end{cases}$   $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, \tau > 0; \\ 0, \tau \leq 0. \end{cases}$

В результаті застосування аналітично-числової методики, що передбачає зведення задачі (1)-(3) до безрозмірного вигляду, введення змінної Кірхгофа, застосування методу лінеаризувальних параметрів для лінеаризації крайових умов та перетворення Лапласа до отриманої лінеаризованої задачі на змінні Кірхгофа, одержано безрозмірні залежності зображень змінних Кірхгофа:

$$\tilde{\theta}_1 = C_1^1 e^{\bar{z}\sqrt{s}} + C_2^1 e^{-\bar{z}\sqrt{s}}, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad \tilde{\theta}_2 = C_1^2 e^{\bar{z}\sqrt{sK_a}}, \quad \bar{z} < 0,$$

де  $C_1^1 = (Bi^* \tilde{\theta}_c V_1 - \tilde{q}_j s^{-1/2} V_3 (1 + \kappa_2)) (e^{\sqrt{s}} V_1 V_4 - e^{-\sqrt{s}} V_2 V_3)^{-1}$ ,  $C_2^1 = (Bi^* \tilde{\theta}_c e^{\sqrt{s}} - C_1^1 e^{2\sqrt{s}} V_4) / V_4$ ,  $C_1^2 = (C_1^1 + C_2^1) / (1 + \kappa_2)$ ,  $V_1 = K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \kappa_2$ ,  $V_2 = K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \kappa_2$ ,  $V_3 = -\sqrt{s} + Bi^*$ ,  $V_4 = \sqrt{s} + Bi^*$ ,  $Bi^* = (1 + \kappa_1) Bi$ ,  $Bi = \alpha z_0 / \lambda_i^{(0)}$ ,  $K_a = a_0^{(1)} / a_0^{(2)}$ ,  $K_\lambda = \lambda_{i0}^{(2)} / \lambda_{i0}^{(1)}$ ,  $\tilde{\theta}_c = \theta_c / s$ ,  $\theta_c = T_c / (1 + \kappa_1)$ ,  $\tilde{q}_1 = Ki / s$ ,  $\tilde{q}_2 = Ki (1 - e^{-sF_0 k}) / s$ ,  $Ki = q_0 z_0 / (\lambda_{i0}^{(1)} t_0)$ ,  $\tilde{\theta}_j = \int_0^\infty \theta_j e^{-sF_0} dF_0$ ,  $s$  – параметр перетворення Лапласа.

Оригінали змінних Кірхгофа отримано з використанням адаптованої до такого класу задач формули Пруднікова [1, 2], а температуру півпростору та шару визначено з оберненого перетворення Кірхгофа за відомих лінійних залежностей коефіцієнтів теплопровідності. Невідомі лінеаризувальні параметри  $\kappa_1, \kappa_2$  визначено з системи трансцендентних рівнянь, одержаних підставкою температурних залежностей у крайові умови на поверхні півпростору та рівності температур на межі контакту з шаром.

На основі отриманих розв'язків досліджено тепловий та термопружний стан такої кусково-однорідної структури. Використовуючи для порівняння результати раніше проведених досліджень, встановлено ефективність використання запропонованої методики.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень” КПКВК 6541230.

1. *Вовк О., Соляр Т.* Числове обернення перетворення Лапласа в задачі теплопровідності для термочутливого півпростору // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2018. – Вип. 27. – С. 9-18.
2. *Kushnir R., Vovk O., Solyar T.* Thermoelastic state of a thermosensitive piecewise-homogeneous half-space // The 12<sup>th</sup> International Congress on Thermal Stresses (Hangzhou, China, 1-5 June 2019). Part II: Paper. – Zhejiang University, 2019. – P. 265-268.

#### RESEARCH OF THERMOELASTIC STATE OF THE CONTACTING THERMOSENSITIVE HALF-SPACE AND LAYER WITH HEAT RELEASE ON THE CONTACT SURFACE

*A solution of quasi-static thermoelasticity problem for contacting thermosensitive half-space and layer under convective heat exchange and constant or for some time heat releases using the Prudnikov formula for the numerical inverse of the Laplace transform was constructed. The efficiency of its application was researched.*

**ПОБУДОВА АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТЕРМОЧУТЛИВИХ  
БАГАТОШАРОВИХ ТІЛ ПРОСТОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

**Роман Кушнір, Ігор Махоркін**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[termomech@iapmm.lviv.ua](mailto:termomech@iapmm.lviv.ua)

На адекватність теоретичних досліджень теплової та термопружної поведінки елементів конструкцій, що працюють в умовах інтенсивних термосилових навантажень, суттєво впливає неврахування їх функціональної неоднорідності (зокрема, шаруватості) та залежності фізико-механічних характеристик (ФМХ) від температури (термочутливості).

Нижче пропонується методика побудови аналітично-числових розв'язків одновимірних задач теплопровідності та термопружності для шаруватих тіл простої геометрії, що перебувають в умовах комбінованого термосилового навантаження за врахування термочутливості усього спектра ФМХ матеріалів.

З цією метою розглянуто багатошарові тіла з термочутливих матеріалів, віднесені до однієї з класичних ортогональних систем координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$ : декартової  $(x, y, z)$ , циліндричної  $(r, \varphi, z)$  чи сферичної  $(r, \varphi, \theta)$ . Граничні поверхні тіл співпадають з координатними поверхнями  $(\alpha, \beta, \gamma) \sim \eta_i = \text{const}$  ( $i = 0, n$ ), а поверхні спряження матеріалів – з координатними поверхнями  $\alpha = \alpha_i = \text{const}$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ), на яких виконуються умови ідеального термомеханічного контакту. Вважається, що термопружний стан тіла характеризується одновимірними стаціонарним температурним полем  $t(\alpha)$  та вектором переміщень  $\bar{u}(\alpha) = u(\alpha)\bar{e}_\alpha$ .

Математичною моделлю термопружної поведінки такого тіла є крайова задача термопружності, що сформульована ґрунтуючись на відомих співвідношеннях нелінійної теорії теплопровідності та лінійної теорії термопружності неоднорідних тіл [1], у яких ФМХ вважаються кусково-змінними функціями координати та температури виду

$$p(\alpha, t) = p^{(1)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( p^{(i+1)}(t) - p^{(i)}(t) \right) S_+(\alpha - \alpha_i).$$

Вона полягає у визначенні п'яти функцій координати  $\alpha$ , а саме трьох компонент тензора напружень, температури і переміщення відповідно за розв'язками рівнянь теплопровідності та рівноваги за конкретизованих граничних умов, які описують зовнішнє термосилове навантаження.

Шляхом подання з заданою точністю температурних залежностей ФМХ матеріалів шарів у вигляді

$$p^{(i)}(t) \approx \tilde{p}^{(i)}(t) = \tilde{p}_1^{(i)} + \sum_{j=1}^m \left( \tilde{p}_{j+1}^{(i)} - \tilde{p}_j^{(i)} \right) S_+(t - t_j),$$

$$t_0 = t_n < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_k = t_{m+1},$$

а також введення у розгляд функції, аналогічної до змінної Кірхгофа [2],

$$\vartheta(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i^{(i)}(\xi) N_i(\alpha) d\xi, \text{ врахування взаємнооднозначності між } \vartheta \text{ та } t$$

$$\text{отримано, що } t = \left[ \vartheta + \sum_{i=1}^n F_i(\vartheta) N_i(\alpha) \right] / \left[ \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i^{(i)}(\vartheta) N_i(\alpha) \right].$$

Функція  $\vartheta$  є розв'язком рівняння

$$\alpha^{-k} \frac{d}{d\alpha} \left\{ \alpha^k \frac{d\vartheta}{d\alpha} - \sum_{i=1}^{n-1} \left( K_i \vartheta|_{\alpha_i} + Q_i \right) \alpha_i^k \delta_+(\alpha - \alpha_i) \right\} = 0. \quad (1)$$

При цьому рівняння рівноваги має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \alpha^{-k} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^k u) \right] + \sum_{i=1}^n \left[ \sigma_i(u) \delta_+(\alpha - \alpha_i) + \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(u) \delta_+(\vartheta - \vartheta_{ij}) \right] = \beta(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}. \quad (2)$$

де ( $k=0, \alpha=x$ ), ( $k=1, \alpha=r$ ), ( $k=2, \alpha=r$ ) – відповідно для декартової, циліндричної та сферичної систем координат,  $\beta(\vartheta)$ ,  $F_i(\vartheta)$ ,  $\sigma_i(u)$ ,  $\sigma_{ij}(u)$ ,  $K_i$ ,  $Q_i$  – відомі функції і величини,  $[t_n, t_k]$  – температурний інтервал визначення ФМХ,  $N_i(\alpha) = S_+(\alpha - \alpha_{i-1}) - S_+(\alpha - \alpha_i)$ ,  $S_+(\zeta - \zeta_i)$  – асиметрична функція Хевісайда.

Рівняння (1), (2), з використанням властивостей імпульсних функцій [1], уможливили побудову в замкнутому аналітичному вигляді наближених аналітично-числових розв'язків одновимірних статичних задач термомеханіки

шаруватих тіл простої геометрії за довільного характеру температурної залежності ФМХ матеріалів. При цьому відсутня потреба з'ясування однозначності розв'язку нелінійної задачі теплопровідності, а точність обчислень значень параметрів теплового та термопружного станів є не нижчою точності апроксимації ФМХ.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень" КПКВК 6541230.

1. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
2. *Кушнір Р.М., Попович В.С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: СПО-ЛОМ, 2009. – 412 с.

**CONSTRUCTION OF ANALYTICAL-NUMERICAL SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTIVITY AND THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR A HEAT SENSITIVE MULTI-LAYER BODIES WITH SIMPLE GEOMETRY**

*The approach to analytical-numerical determination of the one-dimensional thermoelastic state of layered bodies of simple geometry taking into account the thermo sensitivity of the physical-mechanical characteristics of the material, regardless of its nature, is proposed. It is based on the use of generalized functions, the introduction of the Kirchhoff function type as a function and the approximation of the material physical-mechanical characteristics temperature dependences by piecewise-constant temperature functions.*

УДК 539.3

## ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ НЕІЗОТЕРМІЧНОЇ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З АНІЗОТРОПНО ЗМІЦНЮВАНИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ МАТЕРІАЛІВ

**Віра Михайлишин**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[vira.mykhailyshyn@gmail.com](mailto:vira.mykhailyshyn@gmail.com)

Розв'язування фізично нелінійних задач, сформульованих на основі ключових рівнянь теорії течіння, базується на покрокових апроксимаціях вихідних співвідношень та лінеаризації цих співвідношень в межах "кроків". При розробці методів розв'язування задач потрібно конструювати лінеаризуючі ітераційні схеми відповідно до варіанту теорії пластичності. В даній роботі ці схеми розроблені для теорії пластичного неізотермічного течіння [3], яка описує поведінку анізотропно зміцнюваних термочутливих матеріалів. Частковим випадком теорії [3] є теорія [4], для якої автором розроблені лінеаризуючі схеми у роботі [2]. Ключовим рівнянням теорії [3] є:

$$\begin{aligned} \{d\sigma\} = & \left( [D]^{(k)t+dt} - \frac{9}{4\left(\bar{\sigma}_i^t\right)^2} \cdot \frac{[D]^{(k)t+dt} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^{t'} [D]^{(k)t+dt}}{H^{(k)t} + 3G^{(k)t+dt}} \right) \left( \{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^T\} \right) + \\ & + \left( [dD]^{(k)} - \frac{9}{4\left(\bar{\sigma}_i^t\right)^2} \cdot \frac{[D]^{(k)t+dt} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^{t'} [dD]^{(k)}}{H^{(k)t} + 3G^{(k)t+dt}} \right) \left( \{\varepsilon\}^t - \{\varepsilon^p\}^t - \{\varepsilon^T\}^t \right) + \\ & + \frac{3}{2\bar{\sigma}_i^t} \cdot \frac{[D]^{(k)t+dt} \{\bar{s}\}^t \frac{\partial \tilde{\sigma}_i^t}{\partial T}}{H^{(k)t} + 3G^{(k)t+dt}} dT. \end{aligned} \quad (1)$$

Узагальнення полягає у врахуванні температурної залежності термомеханічних характеристик. В зв'язку з цим ускладнена структура рівняння стану через наявність двох останніх складових, де матриця  $[dD]$  її є матрицею приросту пружних сталей матеріалу, зумовлених зміною температури. У формулі (1)  $[D]$  – матриця пружних сталей,  $G$  – модуль пружності при зсуві,  $H$  – поточне значення тангенса кута нахилу кривої деформування матеріалу.

Величини  $\{\sigma\}$ ,  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{\bar{s}\}$ ,  $\sigma_i$  означають відповідно вектори напружень Піоли-Кіргофа II роду, деформацій Гріна, девіаторних напружень, віднесених до центру поверхні текучості, та інтенсивність напружень. Через  $\bar{\sigma}_i$  позначено інтенсивність напружень, віднесених до центру поверхні текучості; через  $\tilde{\sigma}_i$  – інтенсивність напружень Коші, через  $\varepsilon_i$  – інтенсивність деформацій. Верхні індекси  $(k)$ ,  $t$ ,  $p$ ,  $T$  вказують відповідно на номер кроку, момент часу, пластичні та температурні складові вектора деформацій. Сформульована на основі рівняння стану (1) фізично нелінійна задача включає рівняння (1), рівняння рівноваги, геометричні лінійні співвідношення, критерій пластичності та відповідні крайові умови.

В роботі розроблені ітераційні схеми методу змінних параметрів пружності і методу додаткових навантажень, які лінеаризують сформульовану задачу. Додатковим співвідношенням, ітераційно уточнюваним в лінеаризуючому процесі, є зміщення центру поверхні текучості за правилом Ціглера [3]. Отримані формули для початкових наближень величин та їхніх ітераційних уточнень.

Пропонується розв'язування задач пружно-пластичності з використанням методу скінченних елементів, який базується на еквівалентному варіаційному формулюванні. Отримані лінеаризовані за методом змінних параметрів пружності та методом додаткових навантажень співвідношення вихідної задачі є базовими при лінеаризації варіаційних рівнянь. Розроблене програмне забезпечення [1] апробоване на розв'язуванні ряду задач термопружно-пластичності.

1. *Гачкевич О., Михайлишин В., Равська-Скотнічна А.* Числова методика розв'язування задач термомеханіки тіл у разі охолодження в процесі високотемпературного відпалювання // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 12. – С. 78-92.
2. *Михайлишин В.* Ітераційні процедури для задач неізотермічної пружно-пластичності з ізотропно-кінематичним зміщенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – 35, № 4. – С. 102-112.
3. *Морозов Е.М., Никшиков Г.П., Черныш Т.А.* Неизотермическая модель упруго-пластического тела с комбинированным законом упрочнения и ее применение для МКЭ-расчета тел с трещинами // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. – Свердловск: Уральск. науч. центр АН СССР. – 1986. – С. 87-94.
4. *Морозов Е.М., Никшиков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 256 с.

#### LINEARIZATION OF THE NON ISOTHERMAL ELASTO-PLASTIC PROBLEM FOR SOLIDS FROM ANISOTROPICALLY HARDENING THERMOSENSITIVE MATERIALS

*For the variant of the plasticity theory, the linearization of the initial relationships is carried out. Also for the appropriate variational formulation of the problem, the iteration schemes are developed. This work is oriented on the using of the finite element method.*

УДК 539.3

## УЗГОДЖЕННЯ НАПРУЖЕНЬ ВІДПОВІДНО ДО КРИВОЇ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

**Віра Михайлишин**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[vira.mykhailyshyn@gmail.com](mailto:vira.mykhailyshyn@gmail.com)

Не існує єдиної теорії пластичності, згідно з якою зв'язок між напруженнями та деформаціями точно задовольняв би криву деформування матеріалу "інтенсивність напружень  $\sigma_i$  – інтенсивність деформацій  $\varepsilon_i$ ". Розв'язування задач пластичності зводиться до визначення напружень на основі відповідних рівнянь стану та уточнення цих напружень стосовно кривої деформування. Дана робота присвячена важливому обчислювальному аспекту запропонованої раніше [1] розрахункової методики, що базується на методі скінченних елементів – отриманню співвідношення для корекції напружень внаслідок їх відхилення від фактичних значень на основі моделі анізотропно зміцнених термочутливих матеріалів з умовою текучості Мізеса. Отримане на основі рівняння стану [2] співвідношення для ізотропних анізотропно зміцнених термочутливих матеріалів є узагальненням співвідношення Nayak G.C., Zienkiewicz O.C. [3] стосовно ізотропно зміцнених нетермочутливих матеріалів.

1. *Гачкевич О., Михайлишин В., Равська-Скотнічна А.* Числова методика розв'язування задач термомеханіки тіл у разі охолодження в процесі високотемпературного відпалювання // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 12. – С. 78-92.
2. *Морозов Е.М., Никишков Г.П., Черныш Т.А.* Неизотермическая модель упруго-пластического тела с комбинированным законом упрочнения и ее применение для МКЭ-расчета тел с трещинами // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. – Свердловск: Уральск. науч. центр АН СССР. – 1986. – С. 87-94.
3. *Nayak G.C., Zienkiewicz O.C.* Elasto-plastic stress analysis. A generalisation for various constitutive relations including strain softening // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1972. – 5, No. 1. – P. 113-135.

### ADJUSTMENT OF STRESSES ACCORDING TO THE ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION CURVE

*The relationship for the adjustment of stresses during elastic-plastic deformation of solids of anisotropic hardenable thermal sensitive materials is obtained.*



## МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ОРТОТРОПНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА

**Борис Процюк**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

У роботі викладено методику побудови розв'язків статичних і квазістатичних задач термопружності для циліндричного тіла складеного з  $n$  ортотропних концентрично розташованих ідеально контактуючих шарів, фізико-механічні характеристики (ФМХ) яких залежать від координати і температури  $t_p(r, \tau)$  ( $p = \overline{1, n}$ ). Припускалось, що на обмежувальних циліндричних поверхнях задано рівномірно розподілені навантаження, а на торцях – зусилля, рівнодійна яких –  $P(\tau)$ .

Для їх побудови здійснено перехід від системи рівнянь відносно переміщень  $u_p(\rho, \tau)$  і умов контакту шарів до еквівалентного їм рівняння з узагальненими похідними. Отримано інтегральне подання розв'язку задачі для цього рівняння за допомогою функції Гріна задачі пружності для багат шарового ортотропного порожнистого циліндра [1] зі сталими в межах шарів ФМХ та відповідні подання для  $p$ -го шару. Використовуючи представлення

$$u_p(\rho, \tau) = u_p^t(\rho, \tau) + u_p^y(\rho, \tau) - \varepsilon_z(\tau)u_p^\varepsilon(\rho, \tau),$$

де з урахуванням неоднорідності і термочутливості перші два доданки описують переміщення зумовленні відповідно температурним полем і поверхневими навантаженнями у тілі із закріпленими торцями, а третій – умовами на торцях ( $\varepsilon_z(\tau)$  – осьова деформація), сформовано системи рівнянь, які містять інтегральні оператори Вольтерри і Фредгольма та значення шуканих переміщень  $u_p^s(\rho, \tau)$ , ( $s = t, y, \varepsilon$ ) на поверхнях поділу і обмежувальних поверхнях. Для розв'язання цих систем використано метод послідовних наближень, обмежений лише першим наближенням. За нульове наближення при цьому взято переміщення  $\bar{u}_p^s(\rho, \tau)$  ( $s = t, y, \varepsilon$ ), які є точними розв'язками [1] відповідної задачі термопружності при тих же сталих ФМХ, що й у співвідношеннях для функції Гріна, та заданих залежностях коефіцієнтів лінійного розширення.

Для оцінки точності розв'язку аналогічно знайшли переміщення, які відповідають першому наближенню, в такому ж кусково-неоднорідному тілі, але при цьому вважали, що область  $r_{p-1} < r < r_p$  складена з  $n_p$  концентричних циліндричних неоднорідних шарів, ФМХ яких визначаються відповідни-

ми залежностями  $p$ -ої області. Отримані формули мають такий самий вигляд, як і в попередньому випадку, але тепер вхідними для них будуть відповідні параметри задачі термопружності для  $N$  шарового тіла, де  $N = \sum_{p=1}^n n_p$ .

В подальшому порівнювали переміщення, підраховані на основі перших наближень для  $n$  і  $N$  шарових тіл. Якщо різниця між їх значеннями на одних і тих же поверхнях  $p$ -ої області знаходиться не в межах заданої точності, то збільшуємо  $n_p$ , повторюємо процедуру знаходження перших наближень і порівнюємо на тих же поверхнях значення переміщень, отримані в суміжних процедурах. Такий процес продовжуємо, допоки не буде досягнута задана точність.

На основі знайдених переміщень і співвідношень Дюгамеля-Неймана, отримали вирази для напружень. Осьову деформацію знайшли з умови рівності рівнодіючої осьових напружень на торцевій поверхні рівнодійній  $P(\tau)$ .

Методику апробували на статичній задачі термопружності для тришарового вільного від навантажень ортотропного термочутливого циліндра із закріпленими торцями, на внутрішній і зовнішній поверхні якого задано відповідно тепловий потік і температура. Кожен із шарів розбивали на однакову кількість областей. Порівнювали переміщення і напруження обчислені за різних  $N$ . Встановлено, зокрема, що задана точність визначення кільцевих і осьових напружень за запропонованою методикою досягається за значно меншою кількістю розбиттів, ніж на основі розв'язку задачі зі сталим ФМХ шарів (за нульового наближення).

Зауважимо, що за аналогічною методикою знайдено розв'язок задачі термопружності для кусково-неоднорідного ізотропного термочутливого циліндра [2].

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень" КПКВК 6541230.

1. Процюк Б.В. Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2004. – 47. № 3. – С. 95-109.
2. Процюк Б.В. Визначення термопружного стану кусково-неоднорідного термочутливого порожнистого циліндра // *Прикл. пробл. мех. і мат.* – 2015. – Вип. 13. – С. 90-101.

#### THE METHOD OF SOLUTION OF THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR A PIECEWISE-INHOMOGENEOUS HOLLOW ORTHOTROPIC THERMOSENSITIVE CYLINDER

*The procedure is offered to determine the one-dimensional thermoelastics state of a multi-layer hollow orthotropic cylinder with the coordinate and known temperature dependent characteristics. The procedure anticipates obtaining using the generalized functions and matrix of Green's functions the corresponding elasticity problem with constant characteristics of the systems of integral equations respect to radial displacements and their solution by the method of successive approximations, limited by the first approximation only.*

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНОСУ В СКЛАДНИХ  
ТЕХНІЧНИХ ТА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ**

**Ярослав П'янило**

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем  
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[danylo794@gmail.com](mailto:danylo794@gmail.com)

Багато природних процесів, в тому числі і технічних та біологічних, описуються диференціальними рівняннями, звичайними або в частинних похідних. Адаптивність та точність математичних моделей опису цих процесів залежать, в основному, від характеру вхідних даних та методів розв'язування відповідних задач математичної фізики [1]. На цей час уточнення математичних моделей йде двома шляхами – уточнення самих моделей та вдосконалення або уточнення існуючих методів розв'язування задач математичної фізики. Уточнення моделей проводиться шляхом врахування додаткових параметрів та факторів процесу, що вивчається, або використанням більш складних залежностей, зокрема використання похідних дробових порядків.

У випадку застосування математичних моделей до оперативного керування процесами, що вивчаються, основними вимогами є адаптивність та час розв'язування сформульованої задачі [2]. У зв'язку із зростанням можливостей технічних засобів час виконання операцій відходить на другий план. Задоволення проблеми адаптивності вимагає уточнення моделей та методів розв'язування. Слід врахувати, що особливостями таких задач є наступні: вхідна інформація відома в дискретній формі і з невисокою точністю; параметрами процесів є, як правило, номінальні характеристики, що вимагає їх уточнення в ході обчислювального процесу; сформульовані задачі є некоректними за Тихоновим.

Далі, у випадку математичного моделювання складних систем, як правило, необхідно будувати математичну модель всієї системи, а не її окремих елементів.

Робота присвячена аналізу проблем, які виникають при математичному моделюванні процесу руху газу в трубопроводах та складних пористих середовищах та процесу руху крові в м'яких тканинах живих організмів. Одним із способів уточнення математичних моделей є застосування похідних дробових порядків.

У літературі введено декілька видів дробових похідних та інтегралів. Найбільш вживаними є дробові похідні в термінах Капуто та Рімана-Ліувілля [3, 4].

Оператор дробової похідної у термінах Капуто визначається так:

$${}^c D_{\tau}^{\alpha} = \frac{c \partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \int_0^{\tau} \left( \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} \varphi(\xi) \right) / (\tau - \xi)^{\alpha-m} d\xi,$$

де  $m = [\alpha], \dots, [\cdot]$  – ціла частина дійсного числа, а в термінах Рімана-Ліувілля –

$$D_t^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} \varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} \int_0^t \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-m}} d\xi.$$

Однією із задач, де застосування дробових похідних є ефективним, виступає моделювання процесу масопереносу в складних пористих середовищах, зокрема, фільтрація газу в них, та моделювання процесу руху крові в м'яких тканинах живих організмів. Ці процеси у термінах дробової похідної Рімана-Ліувілля за часовою змінною описуються рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^j}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^j}{\partial z} \right) = 2mh \left( \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} \left( \frac{p}{\chi} \right) + 2qp_{at} \right).$$

В останній формулі для процесу фільтрації газу слід покласти  $j=2$  та  $\chi = 1/(1+fp)$ ,  $f = (24 - 0,21t^{\circ}C) \cdot 10^4$ , а для рідини –  $j=1$  та  $\chi = 1$ . Якщо покласти  $\alpha = 1$ , то отримуються диференціальні рівняння в частинних похідних. Розглянуто один з підходів до моделювання руху крові в м'яких тканинах живих організмів.

1. *П'янило Я.Д.* Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу. – Львів: Сплайн, 2011. – 248 с.
2. *Прутула Н.М., П'янило Я.Д., Прутула М.Г.* Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи). – Львів: Ви-во “Растр-7”, 2015. – 266 с.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
4. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – Москва: Физматлит, 2003. – 272 с.

#### MATHEMATICAL MODELING OF MASSOPERENCE IN COMPLEXED TECHNICAL AND MEDICAL-BIOLOGICAL SYSTEMS

*In the work the features of simulation of complex systems of different nature are considered. The features of modeling of complex systems, formulation of problems of mathematical physics and methods of their solving are noted.*

## ПОДАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ТРИВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ОРТОТРОПНОГО ТІЛА

Віктор Ревенко

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*[victorrev@ukr.net](mailto:victorrev@ukr.net)

Інтегрування рівнянь теорії пружності та знаходження напружень у пружному тілі в загальному випадку ортотропії є важливою задачею [1, 2]. На даний час подання загального розв'язку знайдено тільки для часткових випадків: ізотропного та трансверсально-ізотропного тіла [2].

За відсутності об'ємних сил розв'язок задач лінійної теорії пружності ортотропного тіла зводиться до інтегрування трьох рівнянь рівноваги. Виключено з них по чергово переміщення  $u_j$  і одержано систему рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial x_2} L_1^1 u_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} L_2^1 u_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} L_1^1 u_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} L_3^1 u_3, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} L_2^1 u_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} L_3^1 u_3, \quad (1)$$

де

$$L_j^1 = D_{km} L_j - D_{jk} D_{jm} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad k \neq j \neq m, \quad L_k = \sum_{j=1}^3 T_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

$$T_{kk} = B_{kk}, \quad T_{kj} = G_{kj}, \quad D_{kj} = B_{kj} + G_{kj}, \quad k \neq j, \quad k = \overline{1,3} \quad [1].$$

Розв'язок системи рівнянь (1), коли  $L_j^1 \neq c L_m^1$ ,  $j \neq m$ , знайдено у вигляді:

$$u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \prod_{k \neq j} L_k^1 \phi, \quad (2)$$

$$L\phi = 0, \quad (3)$$

де

$$L = d_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^6} + d_2 \frac{\partial^6}{\partial x_1^4 \partial x_2^2} + d_3 \frac{\partial^6}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} + d_4 \frac{\partial^6}{\partial x_1^4 \partial x_3^2} + d_5 \frac{\partial^6}{\partial x_1^2 \partial x_3^4} +$$

$$+ d_6 \frac{\partial^6}{\partial x_2^6} + d_7 \frac{\partial^6}{\partial x_2^4 \partial x_3^2} + d_8 \frac{\partial^6}{\partial x_2^2 \partial x_3^4} + d_9 \frac{\partial^6}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3^2} + d_{10} \frac{\partial^6}{\partial x_3^6}.$$

Відзначено, що рівняння (3) у частинних похідних шостого порядку відносно трьох змінних  $x_k$ , в загальному випадку, не розкладається на множники, що ускладнює аналітичну побудову загального розв'язку.

Показано, як знаходити розв'язок рівняння (3) і напружено-деформований стан (НДС) для деяких навантажень і ортотропних тіл.

Розглянуто напружено-деформований стан прямокутної призми  $\Pi = \{(x, y, z) \in [-a, a] \times [-b, b] \times [0, \infty)\}$ , яка локально навантажена тільки посередині грані  $z = 0$ , а на протилежній грані на нескінченності задано  $\sigma_3 = \sigma_3^0 = \text{const}$ . Збурений самозрівноважений НДС в області  $\Pi$ , який визначається із розв'язку рівняння (3), шукатимемо у вигляді

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 a_k^j \exp(-k\sqrt{\mu_j}z) \cos(k\omega_1 x) \cos(k\omega_2 y), \quad (4)$$

де  $\phi$  – функція переміщень,  $\omega_1 = k_1/a$ ,  $\omega_2 = k_1/b$ ,  $2,8 < k_1 \leq \pi$ , а власні значення  $\mu_j$  визначаються із рівняння (3), яке зводиться до характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} d_{10}\mu^3 + g_1\mu^2 + g_2\mu + g_3 &= 0, \\ g_1 &= -(d_5\omega_1^2 + d_8\omega_2^2), \quad g_2 = d_4\omega_1^4 + d_7\omega_2^4 + d_9\omega_1^2\omega_2^2, \\ g_3 &= -(\omega_1^6 d_1 + \omega_1^4 \omega_2^2 d_2 + \omega_1^2 \omega_2^4 d_3 + \omega_2^6 d_6). \end{aligned} \quad (5)$$

Залежно від значень коефіцієнтів ортотропії матеріалу [1] рівняння (5) може мати три дійсних, або один дійсний і два комплексні корені.

Виражено переміщення і напруження через подання (2), (4). Невідомі коефіцієнти  $a_k^j$  визначено із крайових умов, заданих на грані  $z = 0$ .

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Чен В.Т. Некоторые задачи трансверсально изотропных упругих материалов // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Сер. Е, Прикладная механика. – 1966. – 33, № 2. – С. 98-107.

#### SOLVING THE THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF THE THEORY ELASTICITY OF ORTHOTROPIC BODY

*The solution of three-dimensional equations of orthotropic body is constructed in the Cartesian coordinate system. The components of the stress state are expressed in terms of the displacement function, which satisfies the equation of the sixth order in partial derivatives. The three-dimensional stress-strain state of an elastic orthotropic rectangular prism is determined, when it is loaded on two opposite planes.*

## УСТАЛЕНИЙ РЕЖИМ ДЕФОРМУВАННЯ НЕСКІНЧЕННОГО В'ЯЗКОПРУЖНОГО ШАРУ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ЗА ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОГО ПЕРІОДИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

**Ігор Скородинський**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[skorodynski@ukr.net](mailto:skorodynski@ukr.net)

Циклічні, зокрема періодичні, навантаження є одними з найбільш розповсюджених у природі та в техніці. Особливо актуальним є дослідження дії таких навантажень на непружні середовища та елементи конструкцій, коли мають місце такі явища як запізнення реакції матеріалу на зовнішню механічну дію, незворотні залишкові деформації, встановлення усталеного режиму деформування у в'язкопружних твердих тілах за дії періодичних навантажень та інші.

Дана доповідь присвячена дослідженню встановлення усталеного режиму деформування нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі, що знаходиться під дією зосередженого періодичного навантаження

$$P(t) = P_0 \sum_{i=1}^N [H_+(t-t_i) - H_+(t-t_i - \tau_l)],$$

де  $P_0$  – амплітуда навантаження;  $t_i = (i-1)T_c$  ( $i = \overline{1, N}$ );  $T_c$  – період циклу;  $\tau_l$  – час дії навантаження, а  $H_+(t)$  – асиметрична функція Хевісайда. Навантаження прикладене в точці  $(0, h)$  ( $2h$  – товщина шару) і має від'ємний знак. Матеріал шару описується моделлю Кельвіна-Фойгта. Задача розглядається в рамках плоскої деформації.

В рамках узагальненої двопараметричної моделі [1] отримано формули для вертикального переміщення навантаженої поверхні шару  $v(0, t) \leq 0$  в точці прикладання зосередженої сили, на основі яких проаналізовано відповідні часові залежності для трьох матеріалів шару. Проведений аналіз показав, що при  $N \rightarrow \infty$  вертикальні переміщення навантаженої поверхні в моменти часу  $t$  та  $t+nT_c$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) стають майже однаковими. Такий режим деформування, коли закон зміни в часі вертикального переміщення навантаженої поверхні наближається до періодичного, будемо називати усталеним режимом.

Розглянемо функціональну послідовність

$$v_n(t) = v(0, t + t_n) = v(0, t + (n-1)T_c) \quad (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T_c]). \quad (1)$$

Кожний член послідовності (1) дає часову залежність вертикального переміщення навантаженої поверхні при  $x = 0$  в  $n$ -му циклі. Послідовність (1) є монотонно спадною та обмеженою знизу для кожного фіксованого  $t \in [0, T_c]$  точною нижньою границею  $v_s(t) < 0$ , до якої вона рівномірно збігається з швидкістю геометричної прогресії зі знаменником  $e^{-T_c/\tau_k}$ . Гранична функція  $v_s(t)$  є неперервною і може бути періодично продовжена на всю часову вісь  $t \in [0, \infty)$  з періодом  $T_c$ . Це продовження дає часову залежність  $v(0, t)$  в усталеному режимі.

В якості умови збіжності послідовності (1) природно взяти

$$\max_{0 \leq t \leq T_c} |v_{n+1}(t) - v_n(t)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2)$$

Показано, що максимум модуля в умові (2) досягається при  $t = 0$ , так що встановлення усталеного режиму за умови збіжності (2) визначається залишковими переміщеннями (деформаціями)  $v_m = v_n(0) = v(0, t_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Проведено розрахунки для трьох матеріалів з різними в'язкопружними характеристиками при  $\varepsilon = 0.02$ . Встановлено, що найшвидше усталений режим настає у випадку найбільш податливого матеріалу (після 4-го циклу), а найповільніше – у випадку найжорсткішого матеріалу (після 22-го циклу). Проведене дослідження показує, що при періодичному навантаженні у в'язкопружних твердих тілах розвиваються залишкові деформації, які відповідають за встановлення усталеного режиму при умові збіжності (2). При повному знятті навантаження залишкові деформації прямують до нуля.

Таким чином, в рамках узагальненої двопараметричної моделі з допомогою функціональної послідовності (1) досліджено встановлення усталеного режиму деформування у в'язкопружному шарі на жорсткій основі, а також накопичення залишкових деформацій (переміщень) та їхню роль у процесі за дії зосередженого періодичного навантаження.

1. *Скородинський І.С., Максимук О.В.* Узагальнена модель в'язкопружного проміжного шару або покриття, що враховує деформацію поперечного зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 1. – С. 62-70.

#### STEADY-STATE REGIME OF DEFORMATION OF AN INFINITE VISCOELASTIC LAYER ON THE RIGID FOUNDATION SUBJECTED TO CONCENTRATED PERIODIC LOAD

*Reaching of the steady-state regime of deformation in an infinite viscoelastic layer on the rigid foundation under the action of concentrated periodic load is investigated. Accumulation of residual strains and their role in the process are studied.*



## КВАЗИСТАТИЧНІ ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ, ЗУМОВЛЕНІ НАГРІВАННЯМ ЗМІШАНОГО ТИПУ

Ігор Турчин, Галина Василько

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

[ihorturchyn@gmail.com](mailto:ihorturchyn@gmail.com); [galina.vasylo@gmail.com](mailto:galina.vasylo@gmail.com)

Розглядається півбезмежний однорідний порожнистий циліндр, який з моменту часу  $t = 0$  миттєво занурюється на глибину  $L$  в середовище, що має сталу температуру  $T^*$ . Вважається, що в результаті цього на торцевій поверхні циліндра, а також на частині внутрішньої та зовнішньої поверхонь є заданим часовий розподіл температури, а зовні цієї ділянки відбувається теплообмін за законом Ньютона із середовищем нульової температури. Вважається також, що початкова температура циліндра рівна нулю і всі його граничні поверхні вільні від напружень.

Розв'язок задачі будується із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є за змінною  $\gamma = z/L$ . В результаті одержано послідовності звичайних диференціальних рівнянь, в яких враховано умови на торцевій поверхні  $\gamma = 0$ . Урахування змішаних крайових умов на бічних поверхнях циліндра проводиться із використанням методу рядів Неймана, згідно із яким одержано послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь. Обґрунтовується збіжність методу редукції одержаних систем. Остаточо розв'язок вихідної задачі теплопровідності подається у вигляді ряду за поліномами Лагерра.

За результатами числового експерименту проводиться аналіз точності задоволення крайових умов, залежно від утримання членів в рядах за поліномами Лагерра та редукції безмежних алгебричних систем рівнянь, а також особливості нестационарного процесу поширення тепла та трансформації напруженого стану в циліндрі.

### THE QUASISTATIC THERMAL STRESSES IN THE CYLINDER UNDER HEATING OF THE MIXED TYPE

*This paper considers the cylinder with at the part of surface of which the temperature distribution is known. Outside this area the heat transfer by Newton's law is performed. Finally, the unknown temperature and thermal stresses is submitted as a series of Laguerre polynomials. The coefficient of these series is Fourier integrals.*

УДК 539.3

**РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ  
ЛОКАЛЬНО НАВАНТАЖЕНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ НА  
ОСНОВІ МЕТОДУ  $\{m, n\}$ -АПРОКСИМАЦІЇ****Роман Тучапський***Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*[roman.tuch@gmail.com](mailto:roman.tuch@gmail.com)

У сучасній техніці широко використовуються анізотропні оболонки обертання. Часто вони потрапляють під вплив різноманітних локальних навантажень. В [1] побудовано математичні моделі локальних навантажень з використанням дельтоподібних послідовностей узагальнених частинних сум рядів Фур'є. У [3] за допомогою методу  $\{m, n\}$ -апроксимації побудовано систему диференціальних рівнянь, що описують пружну деформацію тонких анізотропних оболонок обертання. У цій роботі побудовану в [3] систему за допомогою рядів Фур'є й наведеного в [1] тригонометричного розвинення дельтоподібних функцій зведено до нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь, яку можна розв'язати за допомогою методу ортогональної прогонки С.К. Годунова [2]. У якості прикладу використання цієї схеми розглянуто задачу розрахунку напружено-деформованого стану кругової циліндричної панелі, на яку діє механічне навантаження, локалізоване на частині лицьової поверхні між двома меридіональними й двома крайніми поперечними перерізами.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень" КПКВК 6541230.

1. Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: "Інтелект-Захід", 2007. – 240 с.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – XVI, вып. 3 (99). – С. 171-174.
3. Тучапський Р.І. Рівняння тонких анізотропних пружних оболонок обертання методом  $\{m, n\}$ -апроксимації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 3. – С. 43-56.

**CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF LOCALLY LOADED SHELLS OF  
REVOLUTION BASED ON THE  $\{m, n\}$ -APPROXIMATION METHOD**

*A method of numerical calculation of locally loaded thin anisotropic elastic shells of revolution that bases on equations of the  $\{m, n\}$ -approximation method and uses the S.K. Godunov method of orthogonal successive substitutions is presented.*

## СИСТЕМИ ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ БІГАРМОНІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБЛАСТІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

**Василь Чекурін, Леся Постолакi**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[chekurin@iapmm.lviv.ua](mailto:chekurin@iapmm.lviv.ua); [lesya.postolaki@gmail.com](mailto:lesya.postolaki@gmail.com)

Розглядаються власні функції осесиметричних бігармонічних задач для циліндричної області з однорідними умовами на бічній чи торцевих поверхнях. Застосування до осесиметричного бігармонічного рівняння методу відокремлення змінних у циліндричних координатах приводить до звичайного диференціального рівняння (ЗДР) четвертого порядку, залежного від радіальної координати  $r$  (коли однорідні умови задано на бічній поверхні) чи осьової координати  $z$  (коли однорідні умови задано на торцевих поверхнях). Підпорядковуючи розв'язки бігармонічних задач однорідним крайовим умовам, отримуємо відповідні їм однорідні крайові задачі для цих ЗДР. Комплексно-значні власні функції та власні значення обох цих задач залежать від типу заданих на відповідних поверхнях однорідних умов (Діріхле, Неймана чи мішані). На базі власних функцій ЗДР побудовано відповідні класи власних бігармонічних функцій, які задовольняють однорідні крайові умови на бічній чи торцевих поверхнях. Отримані класи бігармонічних функцій використані для побудови розв'язків осесиметричних прямих і обернених задач теорії пружності для скінченного циліндра. У доповіді розглянуто приклади таких задач, зокрема – обернені задачі визначення залишкових напружень з використанням даних, отриманих методами фотопружності [1].

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень” КПКВК 6541230.

1. *Chekurin V., Postolaki L.* Residual stresses in a finite cylinder. Direct and inverse problems and their solving using the variational method of homogeneous solutions // *Mathematical modeling and computing*. – 2018. – Vol. 5, № 2. – P. 119-133.

### EIGENFUNCTION SYSTEMS FOR AXISYMMETRIC BIHARMONIC PROBLEMS IN CYLINDRICAL DOMAIN AND THEIR APPLICATION IN THE THEORY OF ELASTICITY

*Systems of axially symmetric biharmonic functions, which satisfy homogeneous boundary conditions on the lateral surface or the end faces of a cylinder, have been obtained. The systems have been applied to build solutions of some direct and inverse elasticity problems.*

УДК 539.3

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН КВАЗІОРТОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ ІЗ СИНУСОЇДНИМ КРАЄМ ЗА ОДНОВІСНОГО РОЗТЯГУ

Андрій Чорненко, Анджей Казберук, Михайло Саврук

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України;

Білостоцька політехніка (Польща)

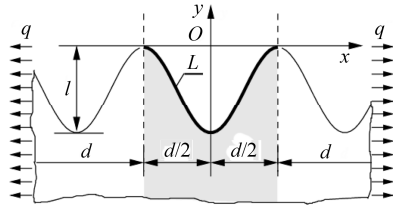
[a.b.chornenki@gmail.com](mailto:a.b.chornenki@gmail.com); [a.kazberuk@pb.edu.pl](mailto:a.kazberuk@pb.edu.pl); [savruk@ipm.lviv.ua](mailto:savruk@ipm.lviv.ua)

Розглянемо розтяг на нескінченності пружної квазіортотропної півплощини [1, 2] зі синусоїдним краєм, вільним від навантаження. Параметричне рівняння синусоїди  $L$  запишемо у вигляді

$$t = \omega(\xi) = \xi / (\pi \tilde{\gamma}) - i(1 + \cos \xi) / 2, \quad -\pi \leq \xi \leq \pi,$$

де параметр  $\tilde{\gamma} = 2l / d$ ,  $l$  – максимальна глибина крайових вирізів (рис. 1).

Рис. 1 Квазіортотропна півплощина із синусоїдним краєм



Значення напружень на краю півплощини знайдемо за формулою [3]

$$\sigma_s^*(t') = 4 \operatorname{Re}[q / (4\gamma^2) + \Phi_1^-(t')], \quad t' \in L.$$

Тут

$$\Phi_1^-(t') = -\frac{i}{2} g_1'(t') + \frac{1}{2d} \int_{L_1} g_1'(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (t_1 - t') dt_1,$$

$g_1'(t_1)$  – невідома густина потенціалу  $\Phi_1(t_1)$ , яку визначають із сингулярного інтегрального рівняння,  $t_1 = z_1 = x + iy \in L_1$ ,  $\gamma$  – параметр ортотропії (для плоско-напруженого стану  $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$ ,  $E_x, E_y$  – модулі пружності вздовж осей  $Ox$  і  $Oy$ ). Контур  $L_1$  в площині  $z_1$  відповідає контуру  $L$  в площині  $z$ .

Коефіцієнт концентрації напружень  $k_t = \sigma_s^*/q$  у вершині вирізу ( $\xi = 0$ )

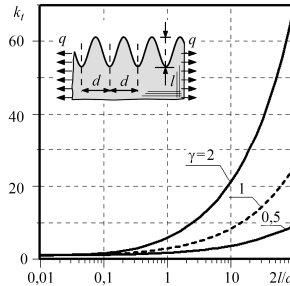
$$k_t = 4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4\gamma^2} - \frac{i}{2} \frac{u(0)}{\omega_1'(0)} + \frac{l\pi}{nd} \sum_{k=1}^{2n} u(t_k) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} l [\omega_1(\xi_k) - \omega_1(0)] \right\}. \quad (1)$$

Тут  $\xi_k = \pi(2k-1)/(2n) - \pi$ ,  $k = \overline{1, 2n}$ . Значення  $u(0)$  визначаємо на основі інтегральної формули Лагранжа на рівномірних вузлах

$$u(t) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u(\xi_k) \sin[n(t - \xi_k)] \operatorname{ctg} \left( \frac{t - \xi_k}{2} \right).$$

Числові розрахунки коефіцієнтів концентрації напружень (1) виконано для параметра  $\tilde{\gamma} = 2l/d$  у межах  $0,01 \leq \tilde{\gamma} \leq 100$  (рис. 2).

Рис. 2 Залежність коефіцієнта концентрації напружень  $k_t$  у вершині вирізу від параметра  $2l/d$  для квазіортотропної півплощини зі синусоїдним краєм



Зі зменшенням радіуса кривини у вершині вирізу до нуля коефіцієнт концентрації напружень  $k_t$  прямує до нескінченності, а зі збільшенням віддалі між вершинами вирізів ( $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ ) значення  $k_t$  наближається до одиниці (півплощина з прямолінійним краєм).

1. Hasebe N. and Sato M. Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – **50**. – P. 209-216.
2. Savruk M.P., Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham (Switzerland): Springer, 2017. – 516 p.
3. Саврук М.П., Казберук А., Чорненко А.Б. Напружений стан квазіортотропної півплощини з криволінійним краєм // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2019. – **52**, № 2. – С. 88-95.

**STRESS STATE IN THE QUASI-ORTHOTROPIC HALF-PLANE WITH SINUSOIDAL EDGE UNDER UNIAXIAL TENSION**

*The method of singular integral equation in application to solving the periodic problem of elasticity theory for a quasi-orthotropic plane with sinusoidal edge is considered. Stress concentration factors on the half-plane boundary are obtained.*

**ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ  
ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ  
ЗА ТЕРМОЦИКЛІЧНОЇ ОБРОБКИ**

**Віктор Шевчук, Олександр Гавриш**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[shevchuk@iapmm.lviv.ua](mailto:shevchuk@iapmm.lviv.ua); [dept11@iapmm.lviv.ua](mailto:dept11@iapmm.lviv.ua)

**1. Постановка задачі теплопровідності.** Термоциклічна обробка є одним із сучасних та широко використовуваних технологічних методів зміцнення, в якому застосовується багаторазова циклічна зміна температури зовнішнього середовища за відсутності витримки [2]. Розглядається процес конвективного багатоперіодового теплообміну півпростору з середовищем через  $n$ -шарове тонке покриття товщиною  $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$ . Довільний  $k$ -й цикл ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) складається з періодів нагрівання та охолодження, а  $\tau_{k-1,k}$  ( $\tau_{k-1} < \tau_{k-1,k} < \tau_k$ ) є моментом миттєвого перемикання періодів у межах одного циклу [1]. Одновимірною крайовою задачею теплопровідності формулюється наступним чином:

$$\frac{\partial t_j(z, \tau)}{\partial \tau} = a_j \frac{\partial^2 t_j(z, \tau)}{\partial z^2}, \quad z > 0, \tau > 0, \quad j = \text{II}, 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

$$t_{\text{II}}(z, 0) = t_0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} t_{\text{II}}(z, \tau) = t_0, \quad (2)$$

$$\lambda_{\text{II}} \left( 1 + \frac{\mu}{H} \right) \frac{\partial t_{\text{II}}(z, \tau)}{\partial z} + \mu (t_{\text{C}}(\tau) - t_{\text{II}}(z, \tau)) = \Omega \frac{\partial t_{\text{II}}(z, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$

$$t_{\text{C}}(\tau) = \sum_{k=1}^K \left[ t_{\text{C}}^{(k,1)} S(\tau - \tau_{k-1}) + (t_{\text{C}}^{(k,2)} - t_{\text{C}}^{(k,1)}) S(\tau - \tau_{k-1,k}) \right] \times \\ \times [S(\tau - \tau_{k-1}) - S(\tau - \tau_k)]. \quad (4)$$

Тут  $t$ ,  $a$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\tau$ ,  $z$  – температура, температуропровідність, теплопровідність, теплоємність, час і координата;  $\mu$  – коефіцієнт теплообміну між зовнішньою поверхнею покриття і середовищем;  $\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \delta_i$ ,

$H^{-1} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$  – зведені теплоємність і термоопір покриття;  $t_C^{(k,1)}$ ,  $t_C^{(k,2)}$  – температури середовища в першому і другому періодах  $k$ -го циклу;  $S(\zeta)$  – одинична функція Гевісайда ( $S(\zeta) = 0$ ,  $\zeta < 0$  і  $S(\zeta) = 1$ ,  $\zeta \geq 0$ ). Індексом  $\Pi$ ,  $C$  та  $i$  позначено величини, що відносяться до півпростору, середовища та  $i$ -го шару покриття.

**2. Розв’язування задачі теплопровідності.** Для розв’язання крайової задачі (1)–(2) в півпросторі з узагальненою граничною умовою (3) зі змінною температурою середовища (4) використано інтегральне перетворення Лапласа, а для визначення температури в шарах покриття – формули відновлення [3].

**3. Розв’язування задачі термопружності.** Нерівномірний розподіл температури  $t_j(z, \tau)$  в системі зумовлює в ній теплові напруження, які визначаються за формулами [3]:

$$\sigma_{xx}^{\Pi} = \sigma_{yy}^{\Pi} = \sigma^{\Pi}(z, \tau) = -\frac{E_{\Pi}\beta_{\Pi}}{1-\nu_{\Pi}}[t_{\Pi}(z, \tau) - t_0], \quad 0 \leq z < \infty, \quad (5)$$

$$\sigma_{xx}^i = \sigma_{yy}^i = \sigma^i(z, \tau) = -\frac{E_i\beta_i}{1-\nu_i}[t_i(z, \tau) - t_0], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad z_i \leq z \leq z_{i-1},$$

де  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\beta$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення,  $z_0 = 0$ ,  $z_i = -\sum_{m=1}^i \delta_m$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**4. Числовий аналіз.** На підставі отриманих співвідношень проведено дослідження впливу зміни параметрів термоциклоування (зміни моментів перемикання, тривалості циклів, збільшенні інтенсивності теплообміну з середовищем) на термонапружений стан поверхні контакту півпростору з покриттям та системи півпростір-тришарове покриття у фіксовані моменти часу для теоретичного вибору раціональних режимів термообробки.

1. *Курсанов Ю.А.* Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухонагревателях. – Москва: Физматлит, 2007. – 240 с.
2. *Тихонов А.С., Белов В.В., Леушин И.Г., Еременко В.И., Забелин С.Ф.* Термоциклическая обработка сталей, сплавов и композиционных материалов. – Москва: Наука, 1984. – 186 с.
3. *Шевчук В.А., Гавриш О.П.* Термонапружений стан півпростору з багат шаровим покривом за променево–конвективного теплообміну // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 171-179.

**THERMOELASTIC PROBLEM FOR A HALF-SPACE WITH  
A MULTILAYER COATING AT THERMAL CYCLIC TREATMENT**

*Based on the obtained analytical solution of the thermoelastic problem for a half-space with a multilayer coating at cyclic change of the ambient temperature, the influence of thermal cycling conditions on thermal stress state of such a system has been investigated.*

UDC 539.3

## DETERMINATION OF DIMENSIONLESS PARAMETERS IN TWO-PHASE FLOW

**Jakub Augustyniak, Dariusz M. Perkowski**

*Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*

[j.augustyniak@pb.edu.pl](mailto:j.augustyniak@pb.edu.pl); [d.perkowski@pb.edu.pl](mailto:d.perkowski@pb.edu.pl)

In the classic approach of fluid mechanics in the modeling of one, two and multi-phase flows, the determination of dimensionless similarity numbers like Reynolds, Bond, Weber number is used. They defined as follows [1]:

$$\text{Re} = \frac{d_b v_b}{\nu_L},$$

$$\text{Bo} = \frac{g \Delta \rho d_b^2}{\sigma},$$

$$\text{We} = \frac{\rho v^2 d_b}{\sigma},$$

where:  $d_b$  – bubble diameter perpendicular to its movement direction,  $v_b$  – bubble speed,  $\nu_L$  – kinematic viscosity of the surrounding liquid,  $g$  – terrestrial acceleration,  $\Delta \rho$  – phase density difference,  $\sigma$  – surface tension factor,  $\rho$  – liquid density.

Bond's number is dependent on the shape of the bubble. The Reynolds number determines the complexity of the process, showing changes in the flow pattern of the bubble. The Weber number, on the other hand, illustrates destructive influence of hydrodynamic forces on the strength of the surface tension that stabilizes the fluid. In other words, it shows whether the surface tension is more dominant, or whether the kinetic energy of the fluid plays a greater role in the process of shaping the flow.

The results for a single gas bubble trajectory generated for the air flow equal  $q=0.0228$  l/min are shown in Fig. 1.

The results shown in Fig. 1 c) d) e) respectively represent individual values of three dimensionless similarity numbers (Reynolds, Bond, Weber) determined for a single trajectory of gas bubble generated at a constant air flow equal to  $q = 0.0228$  l/min. In addition, graphic interpretations of the outer surface of the bubble were applied (Fig. 1 a, b). The first big changes are taking place at the moment of transition from straight to zigzag movement then at each change of di-



rection of movement (individual values increase or decrease quickly, indicating changes in the movement of bubbles). Noteworthy is the fact that the Weber number is consistent with the Reynolds number.

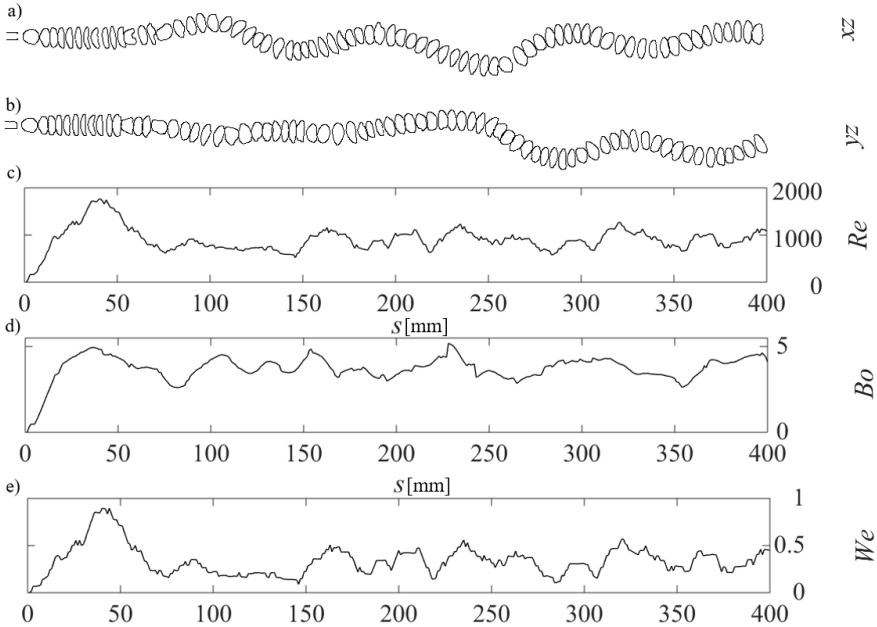


Fig. 1 Dimensionless similarity numbers for a single gas bubble trajectory: a, b) gas bubble trajectory as a projection of bubble shapes on the  $xz$  and  $yz$  plane; c) Reynolds number; d) Bond number; e) Weber number [2]

Project financed by the program of the Poland Ministry of Science and Higher Education „Regional Initiative of Excellence” (years 2019-2022), project number 011/RID/2018/19. The work has been accomplished under the research project No. 2018/29/N/ST8/01672 financed by the Poland National Science Centre.

1. Tryggvason G., Scardovelli R., Zaleski S. Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 201, p. 43.
2. Augustyniak J. Multifractal analysis of gas bubble motion trajectory, Doctoral Thesis, Bialystok university of Technology, 2019.

## NONLINEAR APPROACH TO TWO-PHASE FLOW

**Jakub Augustyniak, Dariusz M. Perkowski***Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*[j.augustyniak@pb.edu.pl](mailto:j.augustyniak@pb.edu.pl); [d.perkowski@pb.edu.pl](mailto:d.perkowski@pb.edu.pl)

Speaking of the complexity of the system, we can distinguish two cases: namely a homogeneous process, which is identified with one type of fractal, thus it can be described using one fractal dimension or a heterogeneous process in which we distinguish different fractals, differently scaled at different time intervals (multi-scale) features of the multifractal process [1]. The character of the gas bubbles path generated in liquid, and thus its shape, depend on many factors (nozzle size, air volume flow rate, medium in which the bubbles are generated, etc.). The authors decided to use a multifractal analysis that would be able to capture all aspects of the heterogeneous system as a subset of the basic elements. It is believed that it will allow to establish and compare the degree of complexity of the system based on the range (band) of the occurrence of characteristic exponents in the statistical distribution. The range of changes in exponents is a measure of the complexity of the process being studied. The results of the multifractal analysis will be presented as a multifractal spectrum, which describes the dimension of the fractal subset of function points. The multifractal spectrum is defined as [2]:

$$D(\alpha) = D_F \{x, \alpha(x) = \alpha\},$$

where:  $\alpha(x)$  is a function that describes the Holder exponent,  $D_F$  is the Hausdorff dimension of the set of points.

Project financed by the program of the Poland Ministry of Science and Higher Education „Regional Initiative of Excellence” (years 2019-2022), project number 011/RID/2018/19. The work has been accomplished under the research project No. 2018/29/N/ST8/01672 financed by the Poland National Science Centre.

1. *Muzy J.F., Barcy E., Arneodo A.* Wavelet and multifractal formalism for singularity signals: Application to turbulence data // *Physical Review Letters*. – 1991. – **67**, No. 25. – P. 3515-3518.
2. *Berg C., Duran A.J.* A transformation from Hausdorff to Stieltjes moment sequences // *Arkiv for Matematik*. – 2004. – P. 239-257.

**NUMERICAL SOLUTION FOR A CONVECTIVE-RADIATIVE  
LONGITUDINAL COLLING FIN WITH VARIABLE INTERNAL  
HEAT SOURCE AND VARIABLE THERMAL PROPERTIES**

**Fahd A. Ziari, Achour Benslama**

*Department of physics and chemistry, ENSET of Skikda  
(People's Democratic Republic of Algeria);*

*Faculty of exact sciences, University of Constantine 1  
(People's Democratic Republic of Algeria)*

[fahd50ziari@gmail.com](mailto:fahd50ziari@gmail.com); [abenslama@gmail.com](mailto:abenslama@gmail.com)

The heat transfer process through extended surfaces exposed to convective-radiative environments has many interesting applications in various industrial fields. Unfortunately, analytical solutions are obtainable under certain idealizing assumptions, mainly when the fin thermal properties are independent of temperature [2, 3]. Therefore, numerical techniques are absolutely required to get accurate solutions for the temperature distribution together with the rate of heat transfer and the thermal performance. In this work, we employ the shooting method to solve the steady heat transfer temperature equation in a convective-radiative straight longitudinal fin with constant rectangular cross section and having an internal heat function that varies linearly with temperature [2]. We assume that the temperature of the fin base is constant, whereas the fin tip is considered insulated. The fin thermal conductivity and the surface emissivity were assumed to be linear functions of temperature [1–3]. The convective heat transfer coefficient is assumed to be a power law function of temperature [1]. Under these assumptions, the high nonlinear fin boundary value problem is transformed into a simple initial value problem and numerically integrated using four orders Runge-Kutta method [4]. The unknown temperature derivative at the fin base which is vital for calculations has been evaluated iteratively using a guessing procedure in conjunction with bisection method.

The nonlinear second order differential fin temperature equation is given in the dimensionless form as [1–3]:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 + A(w - w_a)) \frac{dw}{dx} \right] = N_{cc} \frac{(w - w_a)^{n+1}}{(1 - w_a)^n} + N_{rc} (1 + B(w - w_r)) (w^4 - w_r^4) + N_{hc} (1 + C(w - w_a)) \quad (1)$$

with the dimensionless boundary conditions:

$$w = 1, \quad \frac{dw}{dx} = 0. \quad (2)$$

Here,  $x$  is the dimensionless coordinate,  $w$  is the dimensionless temperature,  $w_a$  is the dimensionless convection temperature and  $w_r$  is the dimensionless radiation temperature [1];  $N_{cc}$ ,  $N_{rc}$  and  $N_{hc}$  are convective-conductive, radiative-conductive and internal heat generated-conductive dimensionless numbers respectively [1] and [2];  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $n$  are dimensionless parameters that accordingly describe the dependency temperature of the thermal conductivity, the surface emissivity, the internal heat function and the convection heat transfer coefficient [1–3].

Results have been computed using a FORTRAN code and compared with those tabulated in paper [3]. Fig. 1 provides the validation of our numerical model and clearly shows a high accuracy of our solutions.

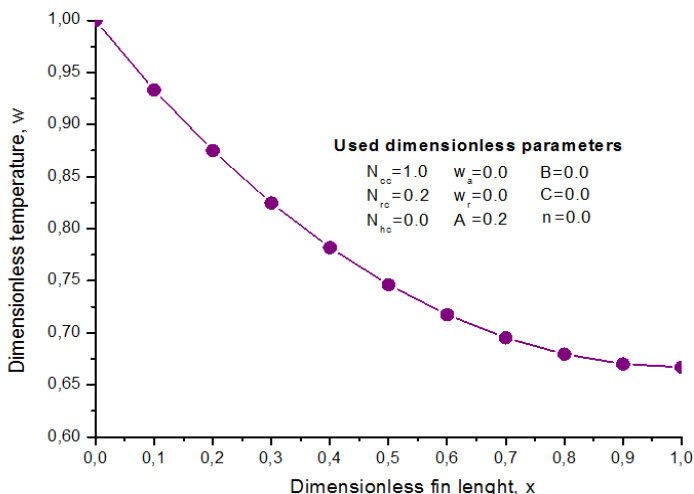


Fig. 1 Dimensionless temperature distribution along fin length, solid line – our solutions, fulfilled circle – solutions of paper 1

1. *Aziz A. and Torabi M.* Convective-radiative fins with simultaneous variation of thermal conductivity, heat transfer coefficient, and surface emissivity with temperature // *Heat Transfer-Asian Research*. – 2011. – No. 41. – P. 100-113.
2. *Roy P.K. and Mallik A.* Thermal analysis of straight rectangular fin using homotopy perturbation method // *Alexandria Engineering Journal*. – 2016. – No. 55. – P. 2269-2277.
3. *Roy P.K., Mondal H., and Mallik A.* A decomposition method for convective-radiative fin with heat generation // *Ain Shams Engineering Journal*. – 2014. – No. 6. – P. 307-313.
4. *Shen W.* An introduction to numerical computation // *World scientific*. – 2015.

## МЕХАНІКА НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ І НАНОМЕХАНІКА

УДК 539.3

РАДІАЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТОВСТОСТІННОЇ ПОРОЖНИСТОЇ  
КУЛІ З ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНОГО  
П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО МАТЕРІАЛУ

Олександр Григоренко, Ігор Лоза, Лариса Васильєва

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;**Національний транспортний університет (Україна);**Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського (Україна)*[ayaagrigorenko1991@gmail.com](mailto:ayaagrigorenko1991@gmail.com); [lozaigor1956@gmail.com](mailto:lozaigor1956@gmail.com); [lara@vasiliev.mk.ua](mailto:lara@vasiliev.mk.ua)

Розглядається задача про коливання порожнистої кулі з функціонально-градієнтного п'єзокерамічного матеріалу. Коли матеріал порожнистої п'єзокерамічної кулі є однорідним, розв'язок задачі можна отримати аналітично. Якщо коливання збуджуються підведенням до вільних бічних поверхонь кулі нормальній компоненти електричної індукції маємо частотне рівняння

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad (1)$$

де

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \left( 2\beta - \frac{\alpha k}{2} + \alpha k\nu \right) \begin{pmatrix} J_\nu(kR_-) \\ N_\nu(kR_-) \end{pmatrix} - \alpha k R_- \begin{pmatrix} J_{\nu+1}(kR_-) \\ N_{\nu+1}(kR_-) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \left( 2\beta - \frac{\alpha k}{2} + \alpha k\nu \right) \begin{pmatrix} J_\nu(kR_+) \\ N_\nu(kR_+) \end{pmatrix} - \alpha k R_+ \begin{pmatrix} J_{\nu+1}(kR_+) \\ N_{\nu+1}(kR_+) \end{pmatrix},$$

$\alpha = c_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2$ ,  $k = \omega\sqrt{\rho/c_{33}}$ ,  $\beta = (c_{13}\varepsilon_{33} + e_{33}e_{13})/\alpha$ ,  $\nu = \sqrt{\nu^2 + 1/4}$ ,  $\nu^2 = 2(c_{11} + c_{12} - c_{13})/c_{33}$ ,  $c_{ij}$  – пружні модулі,  $e_{ij}$  – п'єзомодулі,  $\varepsilon_{ij}$  – діелектричні проникності матеріалу,  $\omega$  – частота,  $\rho$  – густина матеріалу,  $R_-$  та  $R_+$  – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси кулі,  $J_\nu(kr)$  і  $N_\nu(kr)$  – функції Бесселя першого і другого роду.

Якщо на поверхні задається електростатичний потенціал, то розв'язок задачі ускладнюється. Його можна знайти з неоднорідного рівняння Бесселя:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \left( k_1^2 r^2 - \nu_1^2 \right) \frac{u}{r^2} = -2 \frac{e_{31} D_0}{\alpha r^3}. \quad (2)$$

Тут  $k_1 = \omega / k_{33} = \omega \sqrt{\rho \varepsilon_{33} / \alpha}$ ,  $k_{33}^2 = c_{33} + e_{33}^2 / \varepsilon_{33}$  – статичний коефіцієнт електромеханічного зв'язку,  $\nu_1^2 = 2 \left( (c_{11} + c_{12}) \varepsilon_{33} + 2e_{33}^2 - \beta \alpha \right) / \alpha$ . Якщо  $e_{ij} = 0$ , то  $k = k_1$  та  $\nu = \nu_1$ . Розв'язок однорідного рівняння (2) має вигляд:

$u_0 = A_1 j_{n+1/2}(k_1 r) + A_2 y_{n+1/2}(k_1 r)$ , де  $n + 1/2 = \sqrt{\nu_1^2 + 1/4}$ ,  $j_{n+1/2}(k_1 r)$ ,  $y_{n+1/2}(k_1 r)$  – сферичні функції Бесселя. Частинний розв'язок рівняння (2) можна отримати за допомогою методу невизначених множників Лагранжа. Однак замкнений розв'язок у спеціальних функціях є складним для чисельного аналізу і на сьогоднішній день є не дослідженим. Крім того, якщо матеріал кулі є функціонально градієнтний, то аналітичний розв'язок взагалі неможливо отримати, оскільки у рівняннях (1) та (2) величини  $k(r)$ ,  $k_1(r)$  та  $\nu(r)$ ,  $\nu_1(r)$  є функціями радіальної координати, а відтак, рівняння (1) та (2) не є рівняннями Бесселя. Тому для знаходження розв'язку задачі (власних частот та форм коливань) запропоновано стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації.

Чисельно досліджено власні частоти та форми коливань порожнистої п'єзокерамічної функціонально градієнтної кулі, матеріал якої складається з двох фаз – сталі та п'єзокераміки, які змінюються за товщиною за законом  $P(r) = (P_m - P_p)V(r) + P_p$ , де  $V(r)$  виражає об'ємну долю кераміки та визначається за формулою  $V(r) = ((r - R_0) / (2h) + 1/2)^n$ ,  $R_0 = (R_- + R_+) / 2$  – радіус серединної поверхні кулі,  $n$  характеризує ступінь неоднорідності матеріалу (при  $n = 0$  матеріал кулі є сталь, а при великих значеннях  $n$  – п'єзокераміка),  $P_m$  та  $P_p$  – відповідно властивості сталі та п'єзокераміки.

#### RADIAL VIBRATION OF THICKWALLED HOLLOW SPHERE MADE OF AN FGM PIEZOCERAMIC MATERIAL

*A problem on the forced radial vibrations of a hollow sphere made of functionally graded piezoceramic material polarized in the radial direction is solved. The properties of the material change continuously along a radial coordinate according to a power law. The vibrations are excited by the changing electrostatic potential on the surface of the sphere. After separation of variables and representation of the components of the vectors electric and mechanic displacements, electrostatic potential and of the stress tensor in terms of spherical functions, the problem is reduced to a boundary-value problem for ordinary differential equations. This problem is solved by a stable discrete-orthogonalisation technique. Numerical results are given for a case study. In particular, we investigated the influence of the inhomogeneity, geometric, mechanical and electric parameters on the vibration modes of the forced vibrations of an inhomogeneous piezoceramic thick-walled sphere.*

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛІПТИЧНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ З НЕПЕРЕРВНО-НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

Ярослав Григоренко, Олександр Григоренко, Лілія Рожок

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;  
Національний транспортний університет МОН України*

[avagrigorenko1991@gmail.com](mailto:avagrigorenko1991@gmail.com); [r.l.s@ua.fm](mailto:r.l.s@ua.fm)

У зв'язку з розвитком новітніх технологій, особливого значення набуває використання неоднорідних матеріалів, властивості яких мають неперервно-змінний характер за певним напрямком. При цьому слід враховувати неоднорідність мікроструктури з помірно змінюваними механічними та фізичними властивостями матеріалу, внаслідок чого відповідні характеристики (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона та ін.) стають залежними від певних координат. Неперервно-неоднорідні матеріали (ННМ) знаходять своє застосування в аерокосмічній галузі, машинобудуванні, медицині та ін. [1-3].

У просторовій постановці з використанням методів відокремлення змінних, дискретних рядів Фур'є та дискретної ортогоналізації [5] розв'язано задачу про напружений стан порожнистих циліндрів еліптичного поперечного перерізу, виготовлених з полімерних ННМ за умов простого обпирання торців.

Розглядаються порожністі циліндри еліптичного поперечного перерізу за дії внутрішнього тиску, які виготовлені з полімерних ННМ з градієнтним профілем, що відповідає квадратичному закону зміни модуля Юнга по товщині  $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$  [4]

$$E(\gamma) = a\gamma^2 + b\gamma + c. \quad (1)$$

Коефіцієнти у рівності (1) визначаємо наступним чином:

- 1) для зростаючого модуля Юнга ( $E(-h/2) = 110$  МПа;  $E(0) = 150$  МПа;  $E(h/2) = 243$  МПа):  $a = 26,6$  МПа;  $b = -66,5$  МПа;  $c = 150$  МПа;
- 2) для спадного модуля Юнга ( $E(-h/2) = 243$  МПа;  $E(0) = 150$  МПа;  $E(h/2) = 110$  МПа):  $a = 26,6$  МПа;  $b = 66,5$  МПа;  $c = 150$  МПа;
- 3) для усередненого за товщиною модуля Юнга:  $E = 158,33$  МПа.

Для коефіцієнта Пуассона взято значення  $\gamma = 0,4$ , що пов'язано з незначними розбіжностями коефіцієнта Пуассона для полімерних ННМ. Геометричні параметри циліндрів: довжина  $L = 5$ ; товщина  $h = 2$ ; радіус відповідного кола

$R = 4$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,1$ .

Таблиця 1

E	$\sigma_t / q_0$			$\sigma_s / q_0$		
	$\Delta = 0$	$\Delta = 0,1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0,1$	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
$\gamma = -h / 2$						
1	1,75	7,54	0,46	-13,88	-10,10	-14,62
2	11,33	21,83	8,72	-19,93	-12,68	-21,39
3	5,10	12,68	3,33	-16,34	-11,56	-17,34
$\gamma = h / 2$						
1	17,25	12,48	17,98	17,21	11,56	18,44
2	7,85	5,09	8,31	8,89	5,65	9,61
3	11,32	7,79	11,88	12,12	7,98	13,02

Значення нормальних напружень  $\sigma_t$  та  $\sigma_s$  на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра в двох перерізах напрямної наведено в табл. 1 для трьох варіантів модуля пружності. З таблиці видно як впливає неоднорідність матеріалу та геометрія циліндрів на розподіл величини зазначених напружень.

1. *Nguyen D.D., Nguyen P.N., Nguyen D.K.* Nonlinear dynamic analysis and vibration of eccentrically stiffened S-FGM elliptical cylindrical shells surrounded on elastic foundations in thermal environments // *Thin-Walled Struct.* – 2017. – **117**. – P. 178-189.
2. *Качаев А.А., Ваганова М.Л., Геращенков Д.В., Лебедева Ю.Е.* Керамические функционально-градиентные материалы (обзор) // *Перспективные материалы.* – 2016. – № 9. – С. 51-58.
3. *Кушнір Р.М., Николишин Т.М., Ростун М.Й.* Гранична рівновага виготовленої з функціонально градієнтного матеріалу циліндричної оболонки з поверхневою тріщиною // *Машинознавство.* – 2006. – № 5. – С. 3-7.
4. *Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Коротких Ю.А.* Осесимметричные свободные колебания цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородных материалов // *Прикл. механика.* – 2015. – **51**, № 6. – С. 61-71.
5. *Григоренко Я.М., Рожок Л.С.* Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2005. – **48**, № 2. – С. 79-100.

**STRESS STATE OF ELLIPTIC HOLLOW CYLINDERS  
MADE OF CONTINUOUSLY INHOMOGENEOUS MATERIALS**

*On the basis of the functions approximation method by discrete Fourier series, the stress states of elliptic hollow cylinders made of continuously inhomogeneous materials are investigated. The distribution of stress at the quadratic law of the elastic modulus variation across the thickness is referenced.*



**ПРО ГОМОГЕНІЗАЦІЮ  
ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРІАЛУ  
В ЗАДАЧАХ РОЗРАХУНКУ І ОПТИМІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ  
БАГАТОШАРОВИХ КОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ**

**Анатолій Дзюба, Володимир Сіренко**

*Дніпровський національний університет ім. О. Гончара (Україна);*

*Державне підприємство «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна)*

[dzb@ua.fm](mailto:dzb@ua.fm)

Високі експлуатаційні характеристики тонкостінних конструкцій із композитних матеріалів і можливості сучасних технологій виготовлення композитних оболонок досить складної форми та фактично з довільною схемою армування і зміною товщини шарів (методом неперервної намотки із включеннями) обумовлюють досить широке використання таких конструктивних елементів в сучасному машинобудуванні.

У той же час визначення напружено-деформованого стану таких конструктивних елементів та вибір їх оптимальних параметрів суттєво ускладнюється, оскільки структура матеріалу оболонки, яка безпосередньо пов'язана з технологічним процесом її виготовлення, визначається змінними вздовж меридіана оболонки обертаня кутами армування і, як наслідок, фізико-механічні характеристики її матеріалу також виявляються неперервно змінними як по товщині, так і у поздовжньому напрямках оболонки обертаня.

У поданій роботі пропонується розрахунково-експериментальна методика визначення змінних вздовж меридіану оболонки та усереднених по товщині стінки фізико-механічних характеристик матеріалу, як вихідних даних для числового розрахунку напружено-деформованого стану та вибору оптимальних параметрів. Вважається, що оболонка є пружною та тонкою, а шари матеріалу її стінки деформуються без проковзування.

Підхід ґрунтується на використанні значень фізико-механічних характеристик, отриманих шляхом експериментальних випробувань зразків композитного матеріалу у поздовжньому та поперечному напрямках армування та подальшого використання залежностей, що пов'язують деформації і напруження у напрямку та поперек волокон з деформаціями і напруженнями на площинах, розташованих під кутом армування у відповідній точці вздовж меридіану оболонки.

Практична доцільність такого підходу, пов'язаного з використанням «зразка-свідка», виготовленого в тих же умовах, що і оболонка, підтверджується, зокрема, і особливостями технологічного процесу намотки конструкції, оскільки дає можливість врахування таких факторів як натяг армуючих волокон, режим полімеризації та інших важко контрольованих параметрів.

Для випадку багатошарової оболонки обертання, що складається з  $n$  симетрично розташованих відносно серединної поверхні шарів, виготовленої шляхом неперервної перехресної намотки з односпрямованих армуючих ниток, розташованих по чергово під кутами. Визначення пружних характеристик здійснюється шляхом заміни вихідного гетерогенного матеріалу деяким умовно-однорідним ортотропним середовищем.

Приймаючи рівність деформацій виділених елементів, що знаходяться в умовах плоского напруженого стану при розтягу-стику в двох ортогональних напрямках та зсуву, вихідного гетерогенного та умовного ортотропного матеріалу, з використанням відомих геометричних співвідношень, що визначають перетворення пружних сталей при повороті осей координат, отримані вирази для узагальнених жорсткостей та фізико-механічних характеристик як функцій кута намотки волокна і далі координат точок вздовж меридіану.

Таким чином, задача зводиться до розрахункової математичної моделі оболонки обертання зі змінною вздовж меридіана ортотропією, числовий аналіз якої може здійснюватись методом скінченних елементів або безпосереднім інтегруванням відповідної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Розв'язок задачі визначення оптимального змінного вздовж меридіану оболонки кута намотки здійснюється з використанням методів теорії оптимальних процесів (принцип максимуму Л.С. Понтрягіна).

Подано результати розрахунку та вибору оптимальних параметрів для випадку двошарової оболонки обертання. Аналізуються похибки усереднення. Обговорюється ефективність підходу.

**ON HOMOGENIZATION OF MATERIAL PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES  
IN PROBLEMS OF CALCULATION AND OPTIMIZATION  
OF PARAMETERS FOR MULTI-LAYER COMPOSITE SHELL OF ROTATION**

*The calculating and experimental method for determination of material physical and mechanical properties that are variable along shell coordinates and are averaged on thickness is proposed. These properties, as initial data for calculation, are based on the test experimental data of composite specimens that are reinforced in the longitudinal and transverse directions. The problem is reduced to the calculating mathematical model of structural-orthotropic shell. The calculation results and optimal parameters determination for two-layer shell of rotation are presented.*

## ПРИПОВЕРХНЕВИЙ ДЕФЕКТ МАСИ У ГЕТЕРОГЕННИХ ТІЛАХ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

**Тарас Нагірний, Костянтин Червінка**

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем  
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Механічний факультет Зеленогурського університету (Польща);*

*Механіко-математичний факультет Львівського національного університету  
ім. Івана Франка МОН України*

[t.nahirnyj@gmail.com](mailto:t.nahirnyj@gmail.com); [k.tchervinka@gmail.com](mailto:k.tchervinka@gmail.com)

В останні десятиліття в інженерній практиці широко використовують різноманітні наноелементи, а саме тонкі плівки, волокна та малі частинки. Такі елементи характеризуються співмірністю поверхневого та об'ємного факторів у внутрішній енергії. Основою для вивчення поведінки наноелементів є різноманітні нелокальні математичні моделі механіки. Такі моделі зазвичай враховують далекодію, тобто стан у розглянутій точці тіла залежить від стану в сусідніх точках.

До моделей, що ефективно описують приповерхневу неоднорідність та зумовлені нею розмірні ефекти у реальних тілах із врахуванням полів різної фізичної природи, належать локально неоднорідні моделі термомеханіки [1].

Лінеаризована система рівнянь моделі локально неоднорідного пружного тіла, записана для усталеного режиму на вектор переміщення  $\mathbf{u}$  та густину  $\rho$ , має вигляд [2]

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (3\lambda + 2\mu) a_m \nabla \rho = 0, \quad \nabla^2 \rho - \xi_m^2 (\rho - \rho_*) = 0. \quad (1)$$

Якщо замість вектора переміщення за визначальну функцію вибрати тензор напружень  $\boldsymbol{\sigma}$ , то ключовою системою рівнянь моделі є:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0, & \nabla^2 \rho - \xi_m^2 (\rho - \rho_*) &= 0, \\ \nabla \times \left( \nabla \times \left( \boldsymbol{\sigma} - \left( \frac{\lambda \boldsymbol{\sigma}}{3\lambda + 2\mu} - 2\mu a_m (\rho - \rho_*) \right) \mathbf{I} \right) \right)^T &= 0. \end{aligned}$$

Тут  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  – одиничний тензор,  $\lambda$ ,  $a_m$ ,  $\mu$  – сталі,  $\rho_*$  – густина тіла віднесення,  $\nabla$  – вектор-оператор Гамільтона, "·", ":", "×", "T" – символи, що означають звичайний і подвійний внутрішній та векторний добутки й операцію транспонування. Параметр  $\xi_m^{-1}$  є характерним розміром структурної не-

однорідності матеріалу [1].

Ненульовий напружено-деформований стан тіла, вільного від зовнішнього силового навантаження, спричинений відмінністю густини  $\rho$  від густини тіла віднесення  $\rho_*$ , т.зв. дефектом маси. Виникає питання: яке значення густини  $\rho_a$  необхідно задавати на поверхні тіла і яким чином це значення залежить від кривини поверхні.

На основі аналізу системи рівнянь моделі та граничних умов з точки зору фізично малого елемента встановлено, що його характерним розміром є  $3\xi_m^{-1}$ . Це накладає обмеження на розмір досліджуваних тіл. Переміщаючи фізично малий елемент з глибини півпростору на його поверхню, приходимо до значення  $\rho_a$ , коли центр такого елемента знаходиться на поверхні півпростору. Означає це, що для плоскої межі тіла існує природна гранична умова  $\rho_a = \rho_* / 2$ . Оскільки реальним поверхням пружних тіл властива шорсткість, то значення  $\rho_a = \rho_* / 2$  слід трактувати як верхню межу значення густини на плоскій поверхні.

Для густини на поверхні суцільної кулі радіуса  $R$  та поверхні сферичної порожнини того ж радіуса аналогом наведеної вище формули є:

$$\rho_a^e = \frac{\rho_*}{2} \left( 1 - \frac{9}{16} \frac{\xi_m^{-1}}{R} \right), \quad \rho_a^i = \frac{\rho_*}{2} \left( 1 + \frac{9}{16} \frac{\xi_m^{-1}}{R} \right). \quad (2)$$

Граничні умови у вигляді (2) дозволяють коректно порівнювати напружено-деформований стан у тілах сферичної геометрії різних розмірів.

На прикладі порожнистої кулі вивчено вплив кривини поверхонь тіла на розподіл та значення напружень, а також розмірний ефект поверхневих напружень.

1. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Основи механіки локально неоднорідних деформованих твердих тіл. – Львів : Растр-7, 2018. – 204 с.
2. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical modeling of structural and near-surface non-homogeneities in thermoelastic thin films // *Int. J. Eng. Sci.* – 2015. – **91**. – С. 49-62.

#### NEAR-SURFACE MASS DEFECT IN HETEROGENEOUS SOLIDS OF SPHERICAL GEOMETRY

*From viewpoint of a representative volume element, the systems of equations and boundary conditions for the model of locally heterogeneous body are analyzed. The strong dependence of the surface value of density and near-surface mass defect from the curvature of the spherical body surface is indicated. The effect of the near-surface defect of the mass on the stressed state and the size effect of surface stresses have been investigated using example of a hollow sphere.*

## МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ В ТРИВИМІРНИХ НАНОКОМПОЗИТАХ ЗА УМОВИ ЗМІННОЇ КРИВИНИ МІЖФАЗНОЇ ПОВЕРХНІ

**Богдан Стасюк**

*Національний університет «Львівська політехніка» МОН України*

[stasyuk.bohdan.m@gmail.com](mailto:stasyuk.bohdan.m@gmail.com)

Гомогенізація пружних композитів з наноструктурою передбачає врахування поверхневих напружень у зоні контакту матриці та наповнювача. Серед відомих моделей поверхневого натягу найбільш поширеною є модель матеріальної плівки Гуртіна–Мердока [1], що припускає наявність стрибків напружень за умови неперервності переміщень на міжфазних поверхнях:

$$\sigma_{3\ell}^M - \sigma_{3\ell}^I = \frac{-1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial(h_{3-\ell} \sigma_{\ell\ell}^S)}{\partial x_\ell} + \frac{\partial(h_\ell \sigma_{3-\ell,\ell}^S)}{\partial x_{3-\ell}} + \sigma_{3-\ell,\ell}^S \frac{\partial h_{i\ell}}{\partial x_{3-\ell}} - \sigma_{\ell\ell}^S \frac{\partial h_{3-\ell}}{\partial x_\ell} \right) - \frac{\sigma_{3\ell}^S}{\rho_\ell}, \quad (1)$$

$$\sigma_{33}^M - \sigma_{33}^I = \frac{-1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial(h_2 \sigma_{31}^S)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 \sigma_{32}^S)}{\partial x_2} \right) - \frac{\sigma_{11}^S}{\rho_1} - \frac{\sigma_{22}^S}{\rho_2},$$

де  $\ell = 1, 2$ ;  $x_3$  – нормальний, а  $x_1$  та  $x_2$  – дотичні орти прив'язаної до геометрії міжфазної поверхні системи координат;  $h_1$  та  $h_2$  – коефіцієнти Ляме поверхні контакту;  $\rho_1$  та  $\rho_2$  – радіуси головних кривин міжфазно поверхні;  $\sigma_{ij}^S$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  – напруження матеріальної плівки на межі контакту включення і матриці, що визначаються через переміщення точок цієї межі.

Описуючи з використанням методу потенціалів пружну рівновагу нановключення та безмежної матриці, що його містить, отримуємо шість інтегральних сингулярних рівнянь, яка разом із диференціальними рівняннями Гуртіна–Мердока (1) утворює замкнуту систему дев'яти рівнянь відносно міжфазних значень переміщень та зусиль з обох боків інтерфейсу. Розв'язки такої системи рівнянь можуть слугувати як для обчислення ефективних модулів пружності нанокompозиту, так і для розв'язування локальних задач наномеханіки при визначенні напружено-деформованого стану всередині та зовні нановключення.

У випадку, коли міжфазна поверхня має постійні головні кривини та коефіцієнти Ляме, отримати умови Гуртіна–Мердока (1) в замкнутому вигляді відносно просто. Цим пояснюється виконання більшості досліджень на дану тему для сферичних або циліндричних (short fiber) форм нановключень. У літературі відомі також дослідження для випадку, коли кривина міжфазної поверхні змінюється за певним законом (сфероїдальні [2] та еліпсоїдальні [3] нановключення). Якщо ж головні кривини або коефіцієнти Ляме гладкої міжфазної поверхні змінюються стрибкоподібно, то змінюються не лише стрибки напружень, але і самі вирази для їх визначення.

У даній роботі запропоновано модифіковану методику методу граничних елементів для дискретизації диференціальних (1) та інтегральних рівнянь задачі про пружну рівновагу нанопорожнини у формі сфероциліндра в безмежній пружній матриці зі застосуванням спарених вузлів в місцях з'єднання сферичної і циліндричної поверхонь. При цьому порядок топологічної інтерполяції на одиницю вищий за порядок інтерполяції шуканих функцій, що дозволяє побудувати точні кінцево-різницеві дискретні аналоги похідних першого і другого порядків шуканих переміщень поверхні нанопорожнини. У сингулярних інтегралах попередньо проведено процедуру їх чисельної регуляризації методом регуляризуючих відображень.

1. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Rat. Mech. Analysis. – 1975. – 57, № 4. – P. 291-323.
2. Ou Z.Y., Wang G., Wang T. An analytical solution for the elastic fields near spheroidal nano-inclusions // Acta Mechanica Sinica. – 2009. – 25, № 6. – P. 821-830.
3. Dong C.V., Zhang G.L. Boundary element analysis of threedimensional nanoscale inhomogeneities // Int. J. Solids Struct. – 2013. – 50. – P. 201-208.

#### MATERIAL SURFACE MODELING IN THREE-DIMENSIONAL NANOCOMPOSITES WITH VARIABLE CURVATURE OF INTERPHASE

*The sphero-cylindrical particle nanocomposite with Gurtin–Murdoch type interface stress is considered. Closed-form formulas for the components of stress jumps on the spherical and cylindrical part of the interface have been developed. A complete set of boundary conditions for the unit-cell model problem has been obtained by means of the modified boundary element method using binary nodes. The value of the displacements and forces on the interface are determined from the obtained system of six boundary integral equations and three differential equations after regularization and discretization on the involved mesh of boundary elements. Influence geometric parameters on contribution of the surface effects to the stress-strain state of the material containing sphero-cylindrical cavities has been analyzed for two sets of surface properties within the framework of the Gurtin–Murdoch model.*

## ПРУЖНЕ ОСЕРЕДНЕННЯ МАТЕРІАЛІВ ІЗ КОМПОЗИЦІЙНОЮ МЕРЕЖЕВОЮ МІКРОБУДОВОЮ

**Микола Ткачук (мол.)**

*Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут» (Україна)*

[m.tkachuk@tmm-sapir.org](mailto:m.tkachuk@tmm-sapir.org)

Насьогодні ведеться активний пошук нових полімерних матеріалів із комбінованою внутрішньою будовою з метою отримати механічні властивості, значно вище за ті, які мають окремі складові. Як приклад можна навести еластомери з бімодальним розподілом довжини полімерних ланцюжків [2], гелі з подвійними мережами, утворені перехресними ковалентними зв'язками [1], надзвичайно гнучкі та міцні гідрогелі з ковалентними та іонними зв'язками [3].

Пропонується поширити раніше запропоновану модель MAPC [4] на подібні матеріали з неоднорідною мережевою будовою. Для цього у статистичному описі необхідно розрізнити ланцюжки різних фракцій, а отже ввести два чи більше окремих просторів початкових орієнтацій. У випадку ізотропної двокомпонентної мережі з питомими частками фракцій  $p$  та  $q$ ,  $p + q = 1$ , які відповідно позначимо такими самими індексами, кінематичне мікро-макроспіввідношення для невідомих векторів мікродеформацій  $\lambda^p$ ,  $\lambda^q$  набуває наступного вигляду

$$\frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} (\tilde{p}\lambda^p + \tilde{q}\lambda^q) \otimes \lambda_0 |d\lambda_0| = \frac{1}{3} \mathbf{F}, \quad (1)$$

де  $S_0$  – одинична сфера,  $\mathbf{F}$  – градієнт деформації. Слід зазначити, що вагові коефіцієнти  $\tilde{p}$  і  $\tilde{q}$  обчислюють не лише за вмістом кожного з різновидів ланцюжків, але й за їхньою довжиною у початковому стані. Тим самим враховується дуже істотна геометрична властивість внутрішньої будови композиційної мережі.

Розподіл мікроскопічних деформацій в мережі визначається відповідно до принципу мінімуму осередненої внутрішньої енергії. При цьому розв'язується задача математичного програмування з лінійними обмеженнями, в якості яких виступає тотожність (1). Її дискретизація здійснюється із використанням спеціальних квадратурних формул для інтегрування на одиничній мікросфері.

Осереднені пружні напруження при цьому обчислюються у вигляді пер-

шого тензора напружень Піола-Кірхгофа за значеннями мікроскопічних осьових сил

$$\mathbf{P} = n \left\{ p \left\langle \mathbf{f}_f^p \otimes \lambda_0^p \right\rangle + q \left\langle \mathbf{f}_f^q \otimes \lambda_0^q \right\rangle \right\}. \quad (1)$$

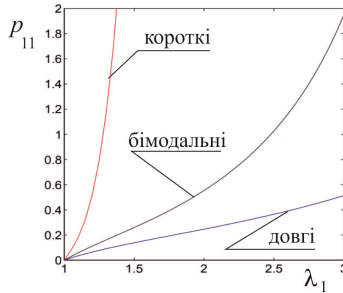


Рис. 1 Пружний відгук бімодальної мережі

Застосування цієї моделі демонструється на прикладі бімодальних мереж полідиметилсілоксану [2]. Вони відрізняються високим вмістом коротких ланцюжків у молярному співвідношенні до довгих ланцюжків. Надзвичайно мала довжина коротких ланцюжків, що складає за молярної маси 660 г/моль лише 6 мономерів, зумовлює їхню обмежену здатність до розтягнення. Тим не менше, завдяки перерозділу мікрое деформацій у мережі, невелика частка довгих макромолекул, що міститься у ній, дає можливість уникнути передчасного досягнення межі розтягнення коротких ланцюжків. У результаті цього істотно підвищується гнучкість еластомера, порівняно з монодисперсними мережами, отримуваних із кожної зі складових окремо (Рис. 1).

1. *Gong J.P., Katsuyama Y., Kurokawa T., Osada Y.* Double-network hydrogels with extremely high mechanical strength // *Advanced Materials*. – 2003. – **15**, No. 14. – P. 1155-1158.
2. *Mark J.E.* Elastomeric networks with bimodal chain-length distributions // *Acc. Chem. Res.* – 1994. – **27**, No. 9. – P. 271-278.
3. *Sun J.Y., Zhao X., Illeperuma W.R., Chaudhuri O., Oh K.H., Mooney D.J., Vlassak J.J., Suo Z.* Highly stretchable and tough hydrogels // *Nature*. – 2012. – **489**. – P. 133-136.
4. *Tkachuk M., Linder C.* The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure // *Phil. Mag.* – 2012. – **92**, No. 22. – P. 2779-2808.

#### ELASTIC HOMOGENIZATION OF MATERIALS WITH COMPOSITE NETWORK MICROSTRUCTURE

*The maximal advance path constraint model is extended for elastic homogenization of composite networks. The kinematic micro-macro relation is reformulated for the updated statistical representation of this multicomponent microstructure. The model is applied to bimodal end-linked polydimethylsiloxane network composed of short and long chains.*



УДК 539.3

**ВИКОРИСТАННЯ УТОЧНЕНИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІКИ  
СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ  
НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОРИСТИХ ТІЛ З ДЕФЕКТАМИ  
ЗА НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

**Василь Шваб'юк, Олена Мікуліч**

*Луцький національний технічний університет (Україна)*

[shyprao@gmail.com](mailto:shyprao@gmail.com); [v.shvabyk@gmail.com](mailto:v.shvabyk@gmail.com)

Розвиток нових технологій спрямований на розширення сфер застосування пористих матеріалів у сучасному виробництві, що не можливе без детального прогнозування їх міцності та надійності. Це зумовлює необхідність розвитку методів аналізу напружено-деформованого стану елементів конструкцій, що виготовлені з таких матеріалів та містять отвори чи порожнини. Експериментальні дослідження показують, що використання апарату класичної теорії пружності не дає можливості коректно описати розподіл деформацій у структурно-неоднорідних тілах. Тому актуальним є розвиток методів дослідження перехідних процесів, що виникають у пористих тілах з дефектами, які б дали можливість вивчати поширення нестационарних процесів у таких тілах.

Оскільки рівняння класичної (симетричної) теорії пружності ґрунтуються на припущенні, що деформації, спричинені навантаженням, неперервно розподіляються по всьому тілу, тому їх використання є ефективним для аналізу поведінки матеріалів у макромасштабі, де можна нехтувати розміром мікроструктури.

Для моделювання напружено-деформованого стану пористих структурно-неоднорідних матеріалів слід використовувати уточнені моделі механіки суцільного середовища, що дають можливість враховувати вплив мікроструктури матеріалу, зокрема, розмірно-залежну механіку.

У роботі для дослідження напружено-деформованого стану пористих матеріалів використано апарат моментної теорії пружності, що базується на моделі континууму Коссера. Ця модель ґрунтується на припущенні, що кожна мікрочастинка середовища володіє властивостями твердого тіла: має шість ступенів вільності, що характеризують положення у просторі та орієнтацію. У рамках континууму Коссера з'являються додаткові фізичні параметри, що характеризують лінійний розмір, момент інерції частин та властивості частин відносно обертання. Рівняння руху моментного континууму Коссера записуються у вигляді:

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad \epsilon_{kji} \sigma_{ij} + \mu_{jk,j} + Y_k = I \ddot{\phi}_k,$$

де  $u_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $\phi_k(\mathbf{x}, t)$  – компоненти векторів переміщень та мікроповоротів,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $X_i$ ,  $Y_k$  – компоненти вектора масових сил та моментних зусиль;  $\rho$  – густина;  $I$  – інерція обертання одиничного об'єму;  $\epsilon_{ijk}$  – антисиметричний тензор Леві-Чівіта;  $\sigma_{ji}$ ,  $\mu_{ji}$  – силові та моментні напруження [1], що у позначеннях Новацького задавалися:

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ij} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij}, \end{aligned}$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  – пружні характеристики матеріалу в континуумі Коссера;  $\lambda$ ,  $\mu$  – сталі Ляме;  $\gamma_{ij} = u_{i,j} - \epsilon_{kji} \phi_k$  – несиметричний тензор деформацій;  $\kappa_{ij} = \phi_{i,j}$  – тензор згину-кручення.

У випадку плоскої деформації пористе середовище моделювалося у вигляді сукупності стільникових елементів, що послаблені круговими отворами. Для використаної моделі мікрочастинки середовища визначено залежність інерції обертання мікроелементу від пористості матеріалу.

Використовуючи розвинений для континууму Коссера модифікований метод граничних інтегральних рівнянь [2], досліджено вплив змінного у часі локально розподіленого навантаження на розподіл напружень та деформацій у пористому середовищі, що послаблене тунельною порожниною сталого перерізу. Отримані числові результати порівнювалися з даними, отриманими у рамках класичної теорії пружності на основі підходу, розробленого у [3].

1. *Nowacki W.* The linear theory of micropolar elasticity / in W. Nowacki, W. Olszak (eds) Micropolar elasticity – Symposium Organized by the Department of Mechanics of Solids, June 1972. – New York: Springer, 1974. – P. 1-43.
2. *Sulym H., Mikulich O., Shvabyuk V.* Investigation of the dynamic stress state of foam media in Cosserat elasticity // Mechanics and Mechanical Engineering. – 2018. – 22, No. 3. – P. 739-750.
3. *Mikulich O., Shvabyuk V., Sulym H.* Dynamic stress concentration at incisions at the plates under the action of weak shock waves // Acta Mechanica et Automatica. – 2017. – 11, No. 3. – P. 217-221.

**APPLICATION OF THE REFINED MODELS OF SOLID MECHANICS FOR ANALYSIS OF STRESS STATE IN POROUS SOLIDS WITH DEFECTS UNDER NON-STATIONARY LOAD**

*By making use of a modified boundary integral equation method developed within the framework of the Cosserat elasticity, the dynamic stress state of porous medium with a tunnel cavity of uniform cross-section under the action of a locally distributed transient loading is investigated. Numerical results are compared with the relevant ones obtained in classical elasticity.*

## ДО ПИТАННЯ УТОЧНЕНОГО ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНИХ СТАЛИХ КОМОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

**Василь Шваб'юк, Світлана Ротко, Ада Маткова**

*Луцький національний технічний університет (Україна)*

[v.shvabyuk@gmail.com](mailto:v.shvabyuk@gmail.com); [svitlanarotko61@gmail.com](mailto:svitlanarotko61@gmail.com); [ada.matkova@gmail.com](mailto:ada.matkova@gmail.com)

Однією з основних проблем застосування композитних матеріалів у відповідальних елементах конструкцій і споруд є проблема передбачення їх надійності та довговічності. У багатьох випадках характерною особливістю таких матеріалів є анізотропія їхніх фізико-механічних характеристик [1, 2]. Наприклад, для визначення модулів пружності композитних матеріалів користуються досить простими випробуваннями на триточковий згин прямих зразків. У цьому випадку Ю.М. Тарнопольським і його науковою школою [1] запропоновано визначати реальний модуль пружності через фіктивний модуль у залежності  $E_{\phi}^{-1} = E^{-1} \left( 1 + kE(2h/l)^2 / G' \right)$ , де  $E_{\phi} = Fl^3 / (48Iw_{\max})$ ;  $k = 1 \div 1,5$  – коефіцієнт, який вибирають залежно від використовуваної моделі згину стрижнів;  $E$  – модуль пружності в поздовжньому напрямку;  $G'$  – модуль зсуву у поперечному перерізі зразка;  $I = 2th^3 / 3$ ,  $w_{\max}$  – момент інерції та усереднене переміщення центрального перерізу зразка, яке знаходиться з експерименту;  $2h$ ,  $t$ ,  $l$  – висота, ширина та довжина зразка.

Для того, щоб скористатися наведеною формулою, необхідно знайти невідоме відношення  $E / G'$ . Для цього додатково використовують результати дослідів чотириточкового (чистого) згину, де майже відсутній поперечний зсув. Тобто, за такою формулою та розробленою методикою, пружні характеристики прямолінійних композитних зразків можна визначити з достатньою точністю.

Багато машин і конструкцій мають своїми елементами оболонки та кільця з композитних матеріалів, які мають криволінійну анізотропію та одержані способом намотування. Для елементів, армованих волокнами, дослідження фізико-механічних характеристик за допомогою плоских зразків не можна вважати достовірними. Формули опору матеріалів у цих випадках є дуже неточними і їх потрібно уточнювати за допомогою прикладних теорій. Одним із варіантів таких теорій є дослідження авторів [2, 3], що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення. Згідно з цією теорією, тангенціальне та ра-

діальне переміщення перерізу кільця змінюються стосовно поперечної координати  $z$  відповідно за законами кубічної параболи і параболи четвертого степеня:

$$V(\varphi, z) = \underline{v(\varphi)} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{z}{R} \frac{d\tilde{w}}{d\varphi} + \frac{z}{2A} \left( 3 + \frac{z}{R} - \frac{z^2}{h^2} - \frac{h^2}{R^2} \right) \frac{Q}{G'}, \quad Q = \int_{-h}^h \tau_{z\varphi} dz, \quad (1)$$

$$W(\varphi, z) = \underline{w(\varphi)} - v \left( \left( 1 + \frac{z}{2R} \right) \frac{dv}{d\varphi} - \frac{z^2}{2R} \frac{d^2w}{d\varphi^2} \right) + \frac{z}{E'} \left( q_1 + \frac{q_2}{8} \left( 3 \frac{z}{h} - \frac{z^3}{2h^3} \right) \right).$$

Тут  $v(\varphi)$  і  $w(\varphi)$  – тангенціальна та радіальна складові переміщення середньої лінії кільця, що знаходяться із розрахункових рівнянь [2, 3];  $A = 2ht$  – площа перерізу кільця. Інші характеристики такі ж, як у [2]. Підкреслені члени у формулах (1) відповідають класичній теорії згину кілець.

На прикладі композитного кільця, що стискається діаметрально прикладеними зосередженими силами, розв'язано задачу про визначення деформованого стану, тобто знайдено переміщення (1). Далі знаходять значення переміщення  $w$  на горизонтальному і вертикальному діаметрах –  $w(0)$  і  $w(\pi/2)$ , відповідно (кут  $\varphi$  відраховується від горизонтального діаметра  $2R$ ). У ці залежності входить модуль пружності  $E_\varphi$  і відношення  $E_\varphi / G'$ . Розв'язавши систему двох рівнянь відносно названих величин, одержимо:

$$E_\varphi = \frac{0,5PR^3 (1 - 2/\pi) (1 - 0,11\pi h^2 / R^2)}{I' w(\pi/2) - \pi w(0) / 2}, \quad I' = \iint_A \frac{Rz^2}{R+z} dA.$$

Подібним чином визначається і модуль поперечного зсуву  $G'$ .

1. *Тарнопольский Ю.М., Розе А.В.* Особенности расчета деталей из армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1969. – 276 с.
2. *Шваб'юк В.І., Ротко С.В.* Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2015. – 264 с.
3. *Sulym H.T., Rotko S.V., Shvabiuk V.I.* Strength of composite ring damaged by a crack // Mater. IV Symp. Mechaniki Zniszczenia Materialow i Konstrukcji, Augustow, 2007. – P. 261-263.

#### ON THE QUESTION OF THE REFINED EXPERIMENTAL DETERMINATION OF ELASTIC CONSTANTS OF COMPOSITE MATERIALS

*A method on more precise determination of elastic constants of composite materials is developed for a composite ring compressed by diametrically applied concentrated forces. The equations of the refined theory of curved beams (rings) are used in the study, which account for the transverse displacement and compression.*

**DENSIFICATION EFFECT ANALYSIS OF SINTERED POROUS METAL UNDER COMPRESSION USING FEM AND MICRO-CT**

**Michał Doroszko, Andrzej Seweryn**

*Department of Mechanics and Applied Computer Science,  
Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*

[m.doroszko@pb.edu.pl](mailto:m.doroszko@pb.edu.pl); [a.seweryn@pb.edu.pl](mailto:a.seweryn@pb.edu.pl)

This work presents the analysis of densification effect in sintered porous 316L steel under compression by making use of the finite element method (FEM) and X-ray computed microtomography (micro-CT). For case-study analysis, we considered the porous sinters of 316L steel obtained by the powder metallurgy process with cold pressing. Depending on the applied compression pressure, sintered metals with various porosity values were obtained.

The calculation modeling considers the mesoscopic shape of the pores occurring in the material by micro-CT. Due to limited micro-CT accuracy, two calculation models [1, 2] were used in order to compensate the influence of not mapping the geometric details of porous mesostructures onto the results of numerical calculations.

Compression of porous materials (such as sintered 316L steel) causes local closure of the pores in the mesostructure and macroscopic densification of the material. In order to compare the densification characteristics of the investigated materials, we analyzed the relationships for the change of relative density during compression for all the studied computational models, in particular, the relationship  $\rho / \rho_0$  describing the ratio of the actual material density  $\rho$  to the initial density  $\rho_0$ .

The project was supported under the program of the Minister of Science and Higher Education (Poland) entitled "Regional Initiative of Excellence"; duration: 2019-2022; project number: 011/RID/2018/19; funding amount: 12 000 000 PLN. The work was accomplished under grant No. UMO-2016/23/N/ST8/03519 at the Bialystok University of Technology and financed by the National Science Centre (Poland).

1. *Doroszko M., Seweryn A.* Numerical modeling of the tensile deformation process of sintered 316L based on microtomography of porous mesostructures // *Mater. Des.* – 2015. – **88**. – P. 493-504.
2. *Doroszko M., Seweryn A.* A new numerical modelling method for deformation behaviour of metallic porous materials using X-ray computed microtomography // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2017. – **689**. – P. 142-156.

## NUMERICAL MODELING OF THE COMPRESSIVE MECHANICAL PROPERTIES OF SINTERED POROUS METAL BASED ON MICRO-CT

**Michał Doroszko, Andrzej Seweryn**

*Department of Mechanics and Applied Computer Science,  
Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*

[m.doroszko@pb.edu.pl](mailto:m.doroszko@pb.edu.pl); [a.seweryn@pb.edu.pl](mailto:a.seweryn@pb.edu.pl)

This talk is concerned with the finite element modeling of the compressive mechanical properties of sintered porous 316L steel based on X-ray computed microtomography (micro-CT). For the presented research, we used the porous sintered 316L steel obtained by the powder metallurgy process with cold pressing. Depending on the used powder compression pressure, porous metals with different porosity values were obtained.

The presented computational modeling covers the porous structure shape (within the mesoscopic scale) of the analyzed material by means of the microtomography. Due to the insufficient accuracy of the microtomography, two methods [1, 2] were used to compensate the impact of not mapping the fissures and small pores in porous structures onto the numerical modeling.

One of the main contributions of this work is the application of already developed methods in order to model the compression of porous 316L steel. As a result, the macroscopic stress-strain curves for the studied porous metals and distributions of stress and strain in the deformed mesostructures were obtained. Based on the analysis of the numerical results, the deformation process for porous sintered 316L steel was described and the influence of porous structure deformation within the mesoscopic scale on the material behavior in the macroscale was determined.

The project was supported under the program of the Minister of Science and Higher Education (Poland) entitled "Regional Initiative of Excellence"; duration: 2019-2022; project number: 011/RID/2018/19; funding amount: 12 000 000 PLN. The work was accomplished under grant No. UMO-2016/23/N/ST8/03519 at the Bialystok University of Technology and financed by the National Science Centre (Poland).

1. *Doroszko M., Seweryn A.* Numerical modeling of the tensile deformation process of sintered 316L based on microtomography of porous mesostructures // *Mater. Des.* – 2015. – **88**. – P. 493-504.
2. *Doroszko M., Seweryn A.* A new numerical modelling method for deformation behaviour of metallic porous materials using X-ray computed microtomography // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2017. – **689**. – P. 142-156.

**GREEN FUNCTIONS FOR A MICROPERIODIC COMPOSITE  
HALF-SPACE WITH SLANT LAYERING**

**Piotr Sebestianiuk, Dariusz M. Perkowski, Roman Kulchytsky-Zhyhailo**

*Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*

[p.sebestianiuk@gmail.com](mailto:p.sebestianiuk@gmail.com); [d.perkowski@pb.edu.pl](mailto:d.perkowski@pb.edu.pl); [r.kulchytsky@pb.edu.pl](mailto:r.kulchytsky@pb.edu.pl)

The problem under consideration is a boundary-load problem with concentrated force  $\sigma_0$  applied at an angle  $\theta$  to the surface of a microperiodic composite half-space with a certain shift relative to the origin of the Cartesian coordinate system, given by constant  $a$  (Fig. 1). The homogenized model with microlocal parameters under the plane-strain hypothesis is governed by the following equations (where components of the averaged macro-displacement vector within a periodic cell in the direction of the  $x$  and  $y$  axes are denoted  $U = U(x, y)$  and  $V = V(x, y)$ , respectively) [1]:

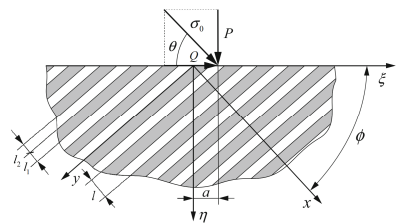


Fig. 1 Scheme of the considered concentrated-load problem

$$A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (B + C) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad A_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (B + C) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

where  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$  and  $c$  are constants from the homogenized model [1].

A solution to the system of equations (1) was constructed by means of the elastic potentials method [2], where the macro-displacement components are:

$$U(x, y) = \kappa_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \kappa_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}, \quad V(x, y) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}, \quad (2)$$

and  $\kappa_k = (A_2 \gamma_k^2 - C) / (B + C)$ ,  $\Psi_k = \Psi_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2$  are the elastic potentials, and the roots  $\gamma_k$  are determined from the characteristic equation

$$A_2 C \gamma_k^4 + (B^2 + 2BC - A_1 A_2) \gamma_k^2 + A_1 C = 0$$

in the form

$$\gamma_k = \sqrt{(A_1 A_2 - 2BC - B^2 + (-1)^k \sqrt{\Delta}) / (2A_2 C)},$$

where  $\Delta = (B^2 + 2BC - A_1A_2)^2 - 4A_1A_2C^2 > 0$ ,  $k = 1, 2$ .

Equations (1) and (2) can be reduced to a partial differential equation

$$\gamma_k^2 \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial y^2} = 0, \quad k = 1, 2,$$

which can be written in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} (\gamma_k^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} \sin \varphi \cos \varphi (\gamma_k^2 - 1) + \\ + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} (\gamma_k^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Partial differential equation (3) can be solved by the Fourier integral transform method and elastic potentials  $\Psi_k$  are to be determined in the way to solve the relevant boundary value problem. The boundary conditions for the considered problem for  $m$ -th kind of material can be given as:

$$\sigma_{\eta\eta}^{(m)}(\xi, 0) = -P\delta(a - \xi), \quad \sigma_{\xi\eta}^{(m)}(\xi, 0) = -Q\delta(a - \xi),$$

where  $P, Q = \text{const}$  and  $\delta(\cdot)$  is the Dirac delta function. These conditions can be expressed in the matrix form as

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(m)} & \sigma_{xy}^{(m)} & 0 \\ \sigma_{xy}^{(m)} & \sigma_{yy}^{(*)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{xx}^{(m)} \sin\varphi - \sigma_{xy}^{(m)} \cos\varphi \\ -\sigma_{xy}^{(m)} \sin\varphi - \sigma_{yy}^{(*)} \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2,$$

where  $\sigma_{yy}^{(*)}$  is the averaged stress tensor component in the layering direction [3]:

$$\sigma_{yy}^{(*)}(\xi, \eta) = \chi \sigma_{yy}^{(1)}(\xi, \eta) + (1 - \chi) \sigma_{yy}^{(2)}(\xi, \eta) = B \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial x} + A_2 \frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial y}.$$

The solutions obtained in the general form for concentrated forces allow for solving the boundary value problems for other pressure distributions.

1. *Matysiak S.J., Woźniak C.* On the modelling of heat conduction problem in laminated bodies // *Acta Mech.* – 1987. – **65**. – P. 223-238.
2. *Kaczyński A., Matysiak S.J.* On the complex potentials for the linear thermoelasticity with microlocal parameters // *Acta Mech.* – 1988. – **71**, No. 3-4. – P. 245-259.
3. *Kulchytzky-Zhyhailo R., Matysiak S.J., Perkowski D.M.* On displacements and stresses in a semi-infinite laminated layer: comparative results // *Meccanica.* – 2007. – **42**, No. 2. – P. 117-126.



**ON A PLANE CONTACT PROBLEM FOR A MICROPERIODIC COMPOSITE HALF-SPACE WITH SLANT LAMINATION**

**Piotr Sebstianiuk, Dariusz M. Perkowski, Roman Kulchytsky-Zhyhailo**

*Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*

[p.sebstianiuk@gmail.com](mailto:p.sebstianiuk@gmail.com); [d.perkowski@pb.edu.pl](mailto:d.perkowski@pb.edu.pl); [r.kulczycki@pb.edu.pl](mailto:r.kulczycki@pb.edu.pl)

A problem on pressing a non-deformable homogeneous punch into a composite microperiodic half-space with slant layering is presented (Fig. 1). This problem is solved within the framework of the homogenized model with microlocal parameters [1]. The homogenized model with microlocal parameters in the plane-strain state is governed by the following equations [2] (where components of the averaged macro-displacement vector within a periodic cell in the direction of the  $x$  and  $y$  axes are denoted as  $U = U(x, y)$  and  $V = V(x, y)$ , respectively):

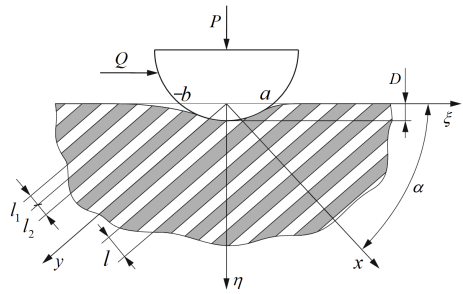


Fig. 1 Scheme of the considered plane-strain contact problem

$$A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (B + C) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad A_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (B + C) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

where  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$  and  $C$  are constants from the homogenized model [2].

A solution to the system of equations (1) was constructed by means of the elastic potentials method [3], where the macro-displacement components are:

$$U(x, y) = \kappa_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \kappa_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}, \quad V(x, y) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}, \quad (2)$$

and  $\kappa_k = (A_2 \gamma_k^2 - C) / (B + C)$ ,  $\Psi_k = \Psi_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2$  are the elastic potentials, and the roots  $\gamma_k$  are determined from the characteristic equation

$$A_2 C \gamma_k^4 + (B^2 + 2BC - A_1 A_2) \gamma_k^2 + A_1 C = 0$$

in the form

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{A_1 A_2 - 2BC - B^2 + (-1)^k \sqrt{\Delta}}{2A_2 C}},$$

where  $\Delta = (B^2 + 2BC - A_1 A_2)^2 - 4A_1 A_2 C^2 > 0$ ,  $k = 1, 2$ .

Equations (1) and (2) are reduced to a partial differential equation

$$\gamma_k^2 \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial y^2} = 0, \quad k = 1, 2,$$

which can be solved by means of the Fourier integral transform method so that the elastic potentials  $\Psi_k$  are determined from the relevant boundary value problem.

The loading functions are to satisfy the equations of the punch equilibrium:

$$P = \int_{-b}^a p(\xi) d\xi, \quad Q = \int_{-b}^a q(\xi) d\xi,$$

where  $p(\xi)$  and  $q(\xi)$  are the normal and tangential loadings, respectively.

It is assumed that the tangential load loading is given by Amonton's law, with a given averaged friction coefficient  $f$  as

$$q(\xi) = f p(\xi).$$

Assume also the derivative  $U_\eta(\xi, \eta)$  of the displacement that is normal to the boundary to be

$$U_\eta(\xi, \eta = 0) = D - g(\xi),$$

where  $D$  is the maximum depth of the punch penetration and  $g(\xi)$  stands for the function of the punch shape.

A general form of the elastic potentials  $\Psi_k = \Psi_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2$  is given by [2]. The presented problem is reduced to the dual integral equations which can be solved similarly to [1]. On the basis of an obtained loading functions, we can determine the stress tensor components under the surface of the half-space for both components of the considered microperiodic composite.

1. *Kulchitsky-Zhyhailo R., Matysiak S.J., Perkowski D.M.* On displacements and stresses in a semi-infinite laminated layer: comparative results // *Meccanica*. – 2007. – **42**, No. 2. – P. 117-126.
2. *Matysiak S.J., Woźniak C.* On the modelling of heat conduction problem in laminated bodies // *Acta Mech.* – 1987. – **65**. – P. 223-238.
3. *Kaczyński A., Matysiak S.J.* On the complex potentials for the linear thermoelasticity with microlocal parameters // *Acta Mech.* – 1988. – **71**, No. 3-4. – P. 245-259.

**AXISYMMETRIC ELASTIC AND THERMOELASTIC  
EQUILIBRIUM OF FGM LONG SOLID CYLINDERS****Yuriy Tokovyy, Cunfa Gao***Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine;**Nanjing University of Aeronautics and Astronautics (China)*[tokovyy@iapmm.lviv.ua](mailto:tokovyy@iapmm.lviv.ua); [cfgao@nuaa.edu.cn](mailto:cfgao@nuaa.edu.cn)

The analysis of thermoelastic performance of functionally graded material (FGM) cylinders attracts considerable attention in numerous studies due to the wide applications of such structural elements in practical engineering and, on the other hand, the possibility for reducing the general three-dimensional problems to two- or one-dimensional ones by taking the advantage of their shape symmetry. But even under such simplifications, the material inhomogeneity delivers considerable difficulties into the treatment of relevant boundary-value problems and affects the accuracy of analysis. The major difficulty is concerned with the governing partial differential equations with variable coefficients, which, in general, cannot be solved by means of the classical methods. On the other hand, the advancement in modeling and analysis of FGM structural elements with spatial variation of the material properties calls for the development of efficient methods applicable for solving the relevant heat-conduction, elasticity, and thermoelasticity problems with arbitrary profiles of inhomogeneity under different-type complex loadings. However, in the case when the material properties are arbitrary functions of the radial coordinate, the nonplane axisymmetric problems present a challenge due to the need of solving a system of two compatibility equations, which, when given in terms of stresses, contain variable coefficients depending on the radial coordinate. When solving these problems in terms of displacements, the equations of equilibrium necessarily deliver the same difficulty.

In this talk, we present an analytical method for solving axisymmetric heat-conduction, elasticity and thermoelasticity problems for an FGM long solid cylinder exposed to thermal and force loadings which vary along the axial coordinate. The material properties of the cylinder are arbitrary functions of the radial coordinate. By making use of the direct integration method [1], the formulated problems are reduced to second-kind integral equations, which can be solved by making use of various analytical or numerical techniques.

The first co-author gratefully acknowledges the support of this research by the Grant GP-455 of the President of Ukraine to the doctors of sciences for carrying out scientific research in 2019.

1. *Tokovyy Yu.* Direct integration method / in R.B. Hetnarski (ed.) // *Encyclopedia of Thermal Stresses.* – Dordrecht: Springer, 2014. – 1. – P. 951-960.

UDC 539.3

**GOVERNING EQUATIONS OF THREE-DIMENSIONAL  
THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR INHOMOGENEOUS  
TRANSVERSELY ISOTROPIC SOLIDS**

**Yuriy Tokovyy, Chien-Ching Ma**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine;*

*Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University (Taiwan, R.O.C.)*

[tokovyy@iapmm.lviv.ua](mailto:tokovyy@iapmm.lviv.ua); [ccma@ntu.edu.tw](mailto:ccma@ntu.edu.tw)

The advancement in the analysis of the elastic performance of operating structure members implies wide spectra of the material properties to be taken into consideration. Particularly, the features of anisotropy and inhomogeneity can be regarded as the ones of the most significant material impacts on the thermomechanical response of elastic solids. The construction of analytical solutions to the problems of the elasticity and thermoelasticity theories for inhomogeneous solids with arbitrary profiles of the material properties distribution is complicated due to the need of solving the governing partial-differential equations with variable coefficients. In the case of anisotropic inhomogeneous materials, this problem becomes even more complicated because the coefficients of the governing equations are expressed through the variable elastic and thermophysical moduli those are different in different spatial directions. It is also well known that the analytical treatment of general three-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity is rather complicated due to the complexity of the governing partial-differential equations. By these reasons, the deriving of the governing equations in a simple-to-analyze form is an important step in solving three-dimensional problems for anisotropic inhomogeneous solids.

By making use of the direct integration method [1], a system of governing equations in terms of stresses is derived for three-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity for transversely isotropic solids exhibiting arbitrary variations of the material properties in the transversal to the plane of isotropy direction. The obtained equations can be easily uncoupled and then reduced to second-kind integral equations for individual stress-tensor components.

The authors gratefully acknowledge the financial support of this research by the Ministry of Science and Technology of Taiwan under Grant MOST 107-2221-E-002-086-MY3.

1. *Tokovyy Yu.* Direct integration method / in R.B. Hetnarski (ed.) // Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht: Springer, 2014. – 1. – P. 951-960.

## МЕХАНІКА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ, ТІЛ З ТРИЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

УДК 539.3

### КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ПРОРІЗНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ПРИ НЕОДНОРІДНОМУ ТЕРТІ

Олександр Бедзір, Василь Шопя

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[olbedzir@gmail.com](mailto:olbedzir@gmail.com); [vasyl.shopa@gmail.com](mailto:vasyl.shopa@gmail.com)

Прорізнi оболонковi пружнi елементи є важливою складовою вiдомого класу вiброзахисних пристроїв [2]. Моделювання роботи оболонкових пружних систем зводиться до постановки змiшаних контактних задач про фрикцiйну взаємодiю тонкостiнних оболонок з деформiвним заповнювачем. [1] Метою даної роботи є визначення напружено-деформованого стану елементiв контактної системи та її жорсткостi для конструкцiї з кусково-неоднорiдним тертям на поверхнi спрyження прорiзна оболонка – заповнювач.

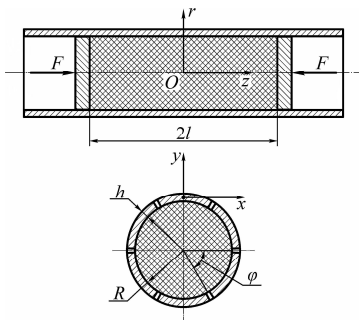


Рис. 1

нат  $Or\theta z$ , зображеній на рис. 1. Для моделювання прорізної оболонки та заповнювача використовуємо рівняння, які представлені в монографії [3]. Фрикційну взаємодію прорізної оболонки і заповнювача при монотонному зовнішньому навантаженні системи моделюємо співвідношеннями одностороннього нормального контакту. Поверхня спрyження заповнювача та прорізної оболонки має ділянки з різними значеннями коефіцієнта тертя між кон-

**Постановка задачі.** Розглянемо пружний циліндр радіуса  $R$  та довжини  $2l$ , який заповнює прорізну циліндричну оболонку завтовшки  $h$ . На торці пружного заповнювача через абсолютно жорсткі поршні передається зовнішнє навантаження  $F$ . Тертям між заповнювачем і поршнями нехтуємо. Характер контактної взаємодії заповнювача та прорізної оболонки визначається законом сухого неоднорідного тертя. Напружено-деформований стан прорізного пружного елемента досліджуємо в циліндричній системі координат

такуючими тілами:

$$\tau(\zeta) = -f_i \sigma \operatorname{sgn} \zeta, \quad \zeta \in W_i, \quad i = 1, 2,$$

де  $f_i$  – коефіцієнти тертя відповідно на поверхнях  $W_i$ ;  $W_1 \in [-1, -t] \cup [t, 1]$ ,  $W_2 = (-t, t)$  – поверхні спряження контактних тіл з різними коефіцієнтами тертя;  $t \in [0, 1]$  – координата точки розділу ділянок  $W_i$ .

На торцях заповнювача виконуються умови:  $\sigma_\zeta(\pm 1) = -p \equiv -\frac{F}{\pi R^2}$ .

Контактну задачу зведено до інтегрального рівняння відносно функції розподілу контактних напружень між заповнювачем та оболонкою

$$\sigma(\zeta) + \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{W_i} K_i(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi \right] = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad \zeta \in [-1; 1].$$

Ядра інтегрального рівняння визначаються формулами

$$K_i(\xi, \zeta) = -\frac{\nu}{1-\nu} f_i \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 G(\xi, \zeta), \quad i = 1, 2,$$

де  $4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu(\zeta)} \frac{l^4 b}{R I_x} \frac{E}{E_0}$ ,  $b = 2R \sin(\phi/2)$  – ширина панелі;  $E_0 I_x = 0,5 E_0 h R^3 \times \times (\phi + \sin(\phi) - 8 \sin^2(\phi/2) / \phi)$  – жорсткість панелі на згин;  $\phi = 2\pi/N$ ,  $N$  – кількість розрізів;  $E_o, E, \nu$  – модулі Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалів оболонки та заповнювача,  $G(\zeta, \xi)$  – функція Гріна крайової задачі [3].

Інтегральне рівняння розв'язано методом квадратур, з використанням формули трапецій з рівномірною сіткою вузлів.

1. *Попадюк І.Й., Шацький І.П., Шона В.М.* Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 180 с.
2. *Шона В.М., Величкович А.С., Величкович С.В., Шацький І.П., Попадюк І.Й., Шона Т.В.* Оболонкові пружини. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.
3. *Шона В.М., Шацький І.П., Бедзір О.О., Величкович А.С.* Контактна взаємодія прорізаних оболонок з деформівними тілами. – Ів.-Франківськ: ІФНТУНГ, 2015. – 208 с.

#### CONTACT INTERACTION OF A SLOTTED CYLINDRICAL SHELL WITH A DEFORMABLE FILLER ALLOWING FOR DRY INHOMOGENEOUS FRICTION

*The statement of the mixed problem on frictional interaction in the system which consists of cylindrical slit shells, divided by a deformable filler, is realized. Using one-dimensional shell and filler models, the integral equation for finding the contact is constructed. On the basis of numerical solutions the effect of mechanical, geometric and tribologic parameters of contacting pairs on nature of distribution of contact pressure, rigidity and strength of the system is investigated.*

## МЕТОД ВИРІЗУВАННЯ У ЗАДАЧІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ АНІЗОТРОПНОГО ШАРУ З ПРУЖНИМ ЦЕНТРАЛЬНИМ АНІЗОТРОПНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

**Кирил Васільєв, Георгій Сулим**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

[dept19@iapmm.lviv.ua](mailto:dept19@iapmm.lviv.ua); [gtsulym@gmail.com](mailto:gtsulym@gmail.com)

Розроблений раніше метод прямого вирізування [1, 4] поширено на випадок врахування можливої анізотропії матеріалу. Апробація методу здійснена на прикладі дослідження задачі поздовжнього зсуву анізотропного (ортотропного у напрямку) шару товщини  $2H$  з модулями пружності  $a_{ij}$  ( $i, j = 4; 5$ ) за наявності у ньому центрального пружного включення  $L_1$  довжини  $2a_1$  з модулями пружності  $a_{ij}^{1,in}$  ( $i, j = 4; 5$ ) та кутом орієнтації  $\varphi_1$  щодо осі абсцис. Навантаження задане симетричними напруженнями  $\tau$  на межах шару.

Основа методу прямого вирізування полягає у моделюванні задачі визначення напруженого стану обмеженого тіла з тонкими неоднорідностями (тріщинами, дуже жорсткими або податними включеннями) за допомогою задачі пружної рівноваги геометрично простішого тіла, зокрема нескінченного простору з дещо збільшеною кількістю тонких неоднорідностей, які у свою чергу формують межі досліджуваного тіла.

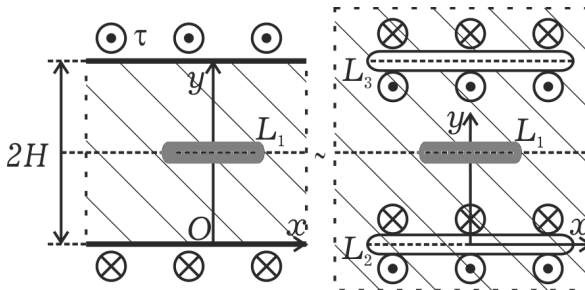


Рис. 1

Навантаженими тріщинами моделюємо крайові умови першого роду, а впровадженими в матрицю з певним натягом абсолютно жорсткими включеннями – крайові умови другого роду.

Таким чином вихідна задача зводиться до задачі визначення напруженого стану нескінченного анізотропного простору з трьома тонкими неоднорідностями  $L_1, L_2, L_3$  (рис. 1). Тут  $L_2, L_3$  – навантажені тріщини, що моделюють межі шару,  $L_1$  – досліджуване пружне включення.

Методика розв'язування такої задачі відома [2, 3]. З використанням методу функцій стрибків та умов взаємодії матриці з пружним включенням задача зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь, розв'язування якої здійснено з використанням методу колокацій. Вивчено вплив орієнтації та матеріалу неоднорідності на узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень за різних пружних характеристик матеріалу шару. Отримані результати обчислення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень збіглися з відомими з літератури.

1. Васильєв К., Сулим Г. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування // *Машинознавство*. – 2006. – № 11-12. – С. 10-17.
2. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. Sulym G., Shevchuk S. Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations // *J. Theor. and Appl. Mech.* – 1999. – **37**, № 1. – P. 47-63.
4. Vasil'ev K.V., Sulym H.T. Method of direct cutting-out in the problems of piecewise homogeneous bodies with interface cracks under longitudinal shear // *J. Math. Sci.* – 2019. – **238**, No. 1. – P. 46-62.

#### CUTTING-OUT METHOD IN THE PROBLEM OF LONGITUDINAL SHEAR OF ANISOTROPIC LAYER WITH AN ELASTIC CENTRAL ANISOTROPIC INCLUSION

*The previously developed direct cutting-out method [1, 4] is extended to the case of taking into account the possible anisotropy of the material. Approbation of the method is carried out on the problem of longitudinal shear of the anisotropic (orthotropic in the direction) layer in the presence of an elastic central anisotropic inclusion. The load is given by symmetric stresses on the layer boundaries. The basis of the method consists in modelling the original problem of determining the stress state of a limited body with thin inclusions by a technically simpler problem of elastic equilibrium of a geometrically simpler body, infinite space in particular, with a slightly increased number of thin inhomogeneities, which, in turn, form the boundaries of the investigated body. By loaded cracks we model the boundary conditions of the first kind, and by absolutely rigid inclusions – the boundary conditions of the second kind. Using the method of the jump functions and the interaction conditions of a matrix with inclusion, the problem is reduced to a system of singular integral equations, the solution of which is carried out using the method of collocations. The influence of inhomogeneity orientation and material on the generalized stress intensity factors was studied.*



## ЕЛЕКТРИЧНО ІЗОЛЬОВАНЕ ВКЛЮЧЕННЯ ЗІ ЗМІННОЮ ЖОРСТКІСТЮ МІЖ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

Анна Дацків, Володимир Лобода

*Дніпровський національний університет ім. О. Гончара (Україна)*

Розглядається електрично ізольоване включення  $c \leq x_1 \leq b$  на межі  $x_2 = 0$  поділу двох п'єзоелектричних напівбезмежних просторів під дією антиплоского механічного навантаження і електричного поля, паралельного осі  $x_1$ . Вважається, що зона  $(c, a)$  включення є абсолютно жорсткою, а інша  $(a, b)$  – механічно м'якою, причому положення точки  $a$  є довільним.

Для побудови розв'язку задачі отримано представлення всіх електромеханічних величин за допомогою кусково-аналітичних вектор-функцій, а далі з використанням цих представлень сформульована комбінована крайова задача Діріхле-Рімана, для якої виписаний точний аналітичний розв'язок. На його основі отримано досить прості аналітичні вирази для необхідних електромеханічних факторів вздовж інтерфейсу. Зокрема, знайдено стрибок зсувного напруження  $\sigma_{23}(x_1, x_2)$  при переході через механічно жорстку частину включення, і додатково наведено варіацію цього напруження вздовж його верхньої межі.

Визначено сингулярні точки зсувного напруження, а також електричного поля і відповідні коефіцієнти інтенсивності:

$$K_3 = \lim_{x_1 \rightarrow a-0} \sqrt{2\pi(a-x_1)} \sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0), \quad K_E = \lim_{x_1 \rightarrow a-0} \sqrt{2\pi(a-x_1)} E_1^{(1)}(x_1, 0).$$

Досліджено залежність цих коефіцієнтів інтенсивності від величини електричного зміщення і співвідношення довжин жорстких і м'яких зон. Показано, що відповідний вибір електричного поля дає змогу суттєво зменшити і навіть спрямувати до нуля КІН  $K_3$ .

### ELECTRICALLY INSOLATED INCLUSION WITH VARIABLE REGIDITY BETWEEN PIEZOELECTRIC MATERIALS

*Two glued piezoelectric semi-infinite spaces under the action of antiplane mechanical and in-plane electric loadings with an electrically insulated inclusion at the interface are analyzed. It is assumed that one zone of the inclusion is absolutely rigid while the other part is mechanically soft. An analytical solution of this problem is found and required electro-mechanical quantities at the interface are derived.*

УДК 539.3

## НЕСТАЦІОНАРНИЙ ЗАКРУТ СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА, ЧАСТКОВО ЗЧЕПЛЕНОГО З ЖОРСТКОЮ ОСНОВОЮ ІЗ КРУГОВИМ ВІДШАРУВАННЯМ

Олександр Демидов, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія» (Україна)

[alexandr.v.demidov@gmail.com](mailto:alexandr.v.demidov@gmail.com); [dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com)

Розглядається скінченний пружний циліндр з ізотропного матеріалу з висотою  $a$  і радіусом  $r_0$  (рис. 1). Джерелом навантаження є жорстка накладка того ж радіуса, що і циліндр, зчеплена з верхнім торцем, яка знаходиться під дією крутного моменту  $M(t)$ . Нижній торець циліндра зчеплений з жорсткою основою. В області зчеплення є кругове відшарування радіусом  $b < r_0$ , центр якого знаходиться на осі циліндра й має координату  $z = 0$ .

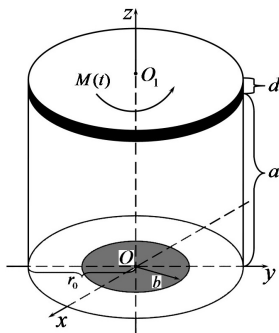


Рис. 1

Бічна поверхня циліндра і поверхня тріщини вважаються вільними від напружень. За цих умов циліндр перебуває у стані осесиметричної деформації крутіння й відмінним від нуля буде тільки кутове переміщення  $w(r, z, t)$ , яке задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

з нульовими початковими умовами і наступними граничними умовами:

$$w(r, 0, t) = 0, \quad b < r < r_0, \quad \tau_{\varphi z}(r, 0, t) = 0, \quad 0 \leq r \leq b,$$

$$w(r, a, t) = \alpha(t)r, \quad \tau_{\varphi r}(r_0, z, t) = 0.$$

Тут  $\alpha(t)$  – невідомий кут повороту накладки, який визначається з рівняння руху.

Для розв'язання сформульованої початково-крайової задачі застосуємо підхід, який ґрунтується на різницевій апроксимації тільки похідних за часом і детально викладений у [3]. Скориставшись перетвореннями, аналогічними до викладених у [1], задачу звели до сукупності послідовно розв'язуваних однорідних початково-крайових задач для рівняння Гельмгольца.

Розв'язок цих задач знаходимо методом інтегральних перетворень. В результаті застосування цього методу отримане інтегральне подання, яке містить невідомий стрибок кутового переміщення у площині тріщини. З граничної умови на тріщині отримано інтегральне рівняння відносно невідомої функції, пов'язаної зі стрибком. Це рівняння за відомою методикою [2] перетворено до рівняння Фредгольма другого роду, наближений розв'язок якого шукаємо методом коллокацій.

В результаті отримано формули для розрахунку КІН у вузлах розбиття за часом. За допомогою цих формул проведено числове дослідження впливу різних видів навантаження, маси накладки та геометричних параметрів циліндра на значення КІН за часом.

1. Демидов О.В., Попов В.Г. Нестационарный закрут скінченного циліндра з круговою тріщиною // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 131-142.
2. Попов В.Г. Напряженное состояние конечного упругого цилиндра с круговой трещиной при крутильных колебаниях // Прикладная механика. – 2012. – 48, № 4. – С. 86-93.
3. Savruk M.P. New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // Mater. Sci. – 2003. – 39, № 4. – P. 465-471.

#### NONSTATIONARY TORSION OF THE FINITE CYLINDER PARTLY ADHESION WITH RIGID BASE WITH CIRCULAR DELAMINATION

*The axisymmetric dynamic problem of determining the stress state in the partly adhesion with a rigid base finite cylinder with circular delamination is solved. The source of the loading is the rigid circular plate, which is coupled with one of the cylinder ends and loaded by the torsional moment, which depends on time. The original problem is reduced to a sequence of homogeneous boundary value problems for the Helmholtz equation. Their solution contains an unknown displacement jump on the crack. The integral equation with respect to the unknown jump reduces to the Fredholm integral equation of the second kind. The found numerical solution of this equation gave the possibility to obtain the approximate formula for the SIF calculation.*

УДК 539.375

## ПРО МЕТОД УРАХУВАННЯ МАЛОМАСШТАБНИХ ЗОН ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В ОКОЛІ КОНЦЕНТРАТОРІВ НАПРУЖЕНЬ

**Михайло Дудик, Валерій Дякон, Віра Колмакова,  
Тетяна Поліщук, Юлія Решітник**

*Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини (Україна);  
Уманська філія ПВНЗ "Європейський університет" (Україна)*

[dudik\\_m@hotmail.com](mailto:dudik_m@hotmail.com); [valera.diakon@gmail.com](mailto:valera.diakon@gmail.com); [kolmakova@udpu.edu.ua](mailto:kolmakova@udpu.edu.ua);  
[polischuk\\_t@ukr.net](mailto:polischuk_t@ukr.net); [dikhtiarenko\\_iu@udpu.edu.ua](mailto:dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua)

*Пам'яті проф. Л.А. Кіпніса*

Аналізується метод врахування маломасштабного передруйнування в околі гострокінцевих концентраторів напружень, вперше реалізований Г.П. Черепановим в [1]. Метод базується на наступних вихідних положеннях:

1) розкладання загальної задачі про визначення параметрів мало-масштабної зони передруйнування (ЗП) і напружено-деформованого стану в околі вершини гострокінцевого концентратора напружень на зовнішню задачу, яка описує НДС досліджуваного тіла без ЗП, і внутрішню задачу, метою якої є визначення параметрів ЗП і НДС біля вершини;

2) використання "принципу мікроскопа" [2] для обґрунтування опису локального поля напружень і переміщень біля вершини концентратора за допомогою асимптотичної частини розв'язку зовнішньої задачі;

3) побудова асимптотичної частини розв'язку зовнішньої задачі як розв'язку однорідної крайової задачі теорії пружності за методом Вільямса розвинення за власними функціями. Вклад кожної складової цієї частини розв'язку визначається коренями відповідного характеристичного рівняння задачі, які пов'язані з локальною структурою привершинної області і у випадку від'ємних значень є показниками сингулярності напружень, та сталими коефіцієнтами, що залежать від загальної структури тіла і зовнішнього навантаження;

4) використання моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла для зведення внутрішньої задачі нелінійної механіки руйнування про розрахунок параметрів маломасштабної ЗП до статичної крайової задачі теорії пружності про лінію розриву переміщення з заданими на ній умовами переходу у передруйнівний стан, що виходить з вершини концентратора;

5) формулювання для внутрішньої задачі умови на нескінченості як вимоги зшивання розшукуваного розв'язку на відстанях, що значно перевищу-

ють розміри ЗП, але значно менші порівняно з характерними розмірами концентратора напружень або розміру іншого актуального елемента будови тіла, з розв'язком зовнішньої задачі;

6) врахування сингулярної поведінки напружень і деформацій в кінці ліній розриву переміщення, відомої із загальних принципів лінійної механіки руйнування [2];

7) зведення сформульованої крайової задачі за допомогою інтегрального перетворення до функціонального рівняння відносно трансформант напружень і деформацій та його наступне розв'язання за допомогою методу Вінера-Гопфа;

8) розрахунок лінійного розміру та очікуваної орієнтації зони передруйнування з отриманого на попередньому етапі розв'язку функціонального рівняння задачі з умови обмеженості напружень в кінці зони і певного критерію напрямку її розвитку;

9) визначення змін локального поля напружень і деформацій в околі вершини концентратора внаслідок утворення маломасштабної зони передруйнування.

Описаний метод ілюструється на прикладі розв'язання задачі про розрахунок маломасштабної зони передруйнування, що прилягає до кутової точки межі розділу двох різних пружних середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина. Зона моделюється відрізком розриву нормального переміщення. Досліджено залежність довжини зони та її розкриття у кутовій точці від навантаження, кута зламу межі розділу і пружних параметрів середовищ. На основі деформаційного критерію досліджені умови зрушення тріщини.

Результати числового дослідження засвідчили, що вплив сингулярних членів нижчого порядку у розвиненнях напружень в околі вершини тріщини може бути за певних умов досить істотним, тому нехтування ними, що зазвичай роблять при розв'язанні задач лінійної механіки руйнування, може привести до істотних похибок в оцінюванні граничних навантажень, які ведуть до руйнування композиційних матеріалів і конструкцій.

1. Черепанов Г.П. Пластические линии разрыва в конце трещины // Прикл. мат. мех. – 1976. – 40, № 4. – С. 720-728.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.

#### ABOUT THE METHOD OF ACCOUNTING OF SMALL-SCALE PREFRACTURE ZONES NEAR THE STRESS CONCENTRATORS

*The method of taking into account the small-scale pre-fracture zone in the vicinity of the stress concentrators is analyzed. His application is illustrated by the example of solution the problem about the pre-fracture zone at the corner point of interface of two dissimilar elastic media from which the interfacial crack goes out.*

УДК 539.3

## КОНТАКТ ТЕКСТУРОВАНИХ ГІДРОФІЛЬНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ ТА РІДИНИ У МІЖПОВЕРХНЕВИХ ПРОСВІТАХ

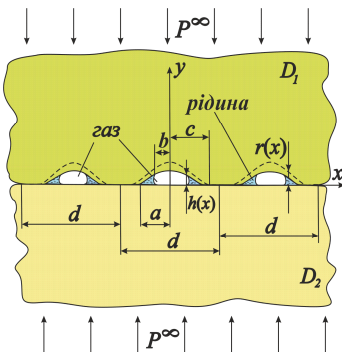
**Олег Козачок**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[OlegKozachok@ukr.net](mailto:OlegKozachok@ukr.net)

Розглянемо безфрикційну контактну взаємодію двох пружних ізотропних півнескінченних тіл  $D_1$  і  $D_2$  із різних матеріалів за умов плоскої деформації. Межа одного з тіл прямолінійна, а іншого – текстурована плитками пологими виїмками однакової форми завдовжки  $2c$  кожна, розташованими з періодом  $d$  вздовж всієї межі. В основній смузі періодів  $-d/2 \leq x \leq d/2$  форма виїмки задається парною неперервно-диференційованою функцією  $r(x) = A(1 - tg^2(\pi x/d) / tg^2(\pi c/d))^{3/2}$ ,  $r(x) \ll c$ . Такі виїмки в їх крайніх точках плавно переходять в пряму ( $r(\pm c) = 0$ ,  $r'(\pm c) = 0$ ).

Тіла вступають у контакт під дією рівномірно розподілених на нескінченності стискальних навантажень  $P^\infty$ . Внаслідок того, що поверхня одного з тіл є текстурованою, інтерфейс між ними складається з періодичної системи ділянок контакту та періодичної системи просвітів завширшки  $2a$  (рис.). Вважаємо, що вони заповнені частково ідеальним газом та нестисливою рідиною, що змочує їх поверхні. Під дією поверхневого натягу  $\sigma$  рідина формуватиме рідинні містки на краях просвітів, де вони найвужчі. У середній частині просвітів, ширина якої  $2b$ , міститься газ, тиск якого  $P_1$  описує рівняння Клапейрона-Менделєєва. Об'єм нестисливої рідини  $V_0$ , що припадає на одиницю довжини зазору у поздовжньому напрямі, є сталою величиною ( $V_0 = const$ ). Перепад тисків у рідині і газі описує формула Лапласа  $P_1 - P_2 = 2\sigma / h(a)$ , де  $h(a)$  – висота просвіту на межі рідини і газу.



Використовуючи метод функцій міжконтактних зазорів [1], задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно функції  $h'(x)$  [2], яке після заміни змінних  $\xi = tg(\pi x/d)$ ,  $\eta = tg(\pi t/d)$ ,  $\alpha = tg(\pi a/d)$ ,  $\beta = tg(\pi b/d)$ ,  $\gamma = tg(\pi c/d)$  переходить в СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{dK(P^\infty - P(\xi))}{2(1 + \xi^2)} + \frac{3A\pi}{\gamma} \left( \frac{\xi^2}{\gamma^2} - \frac{1}{2} \right), \quad |\xi| \leq \alpha,$$

де  $P(\xi) = \begin{cases} P_1, & |\xi| \leq \beta, \\ P_1 - 2\sigma/h(\beta), & \beta < |\xi| \leq \alpha, \end{cases} \quad K = (1 + \kappa_1)/2G_1 + (1 + \kappa_2)/2G_2;$

$\kappa_n = 3 - 4\nu_n$ ;  $G_n$ ,  $\nu_n$  – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла  $D_n$  ( $n = 1, 2$ ).

Внаслідок гладкості виїмок береги зазорів плавно зникаються. Тому похідна від висоти зазору в точках змикання повинна задовольняти умову  $h'(-\alpha) = h'(\alpha) = 0$ , яка забезпечує обмеженість контактних напружень.

З умови збереження кількості рідини в зазорах з урахуванням її нестисливості, з рівняння Клапейрона-Менделєєва, з формули Лапласа та з умови існування обмеженого розв'язку СІР отримано систему чотирьох трансцендентних рівнянь для визначення ширини просвітів, ширини ділянки дії газу, тиску рідини та тиску газу. Запропоновано аналітично-числову процедуру розв'язання цієї системи рівнянь і СІР та досліджено вплив маси ідеального газу та поверхневого натягу рідини на контактні параметри розглянутої структури.

1. *Kozachok O.P., Martynyak R.M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // *Mathematics and Mechanics of Solids.* – 2018. – DOI: 10.1177/1081286518781679.
2. *Kozachok O.P., Мартиняк Р.М., Слободян Б.С.* Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. – Львів: Растр-7, 2018. – 200 с.

**CONTACT OF TEXTURED HYDROPHILIC BODIES  
TAKING INTO ACCOUNT IDEAL GAS AND LIQUID IN INTERCONTACT GAPS**

*The model of contact interaction between two elastic hydrophilic solids in the presence of a ideal gas and a wetting liquid inside interface gaps is proposed. The difference between a gas pressure and a liquid pressure is described by the Laplace formula. The non-linear problem of elasticity is reduced to a singular integral equation with Hilbert kernel for a height of the gaps. For calculating a length of the gaps and a length of a zone of gas action and gas and liquid pressures, four transcendent equations are obtained.*

## ДО ПОБУДОВИ КРИТЕРІЇВ РУЙНУВАННЯ ТІЛ З U-ПОДІБНИМИ ВИРІЗАМИ ДОВІЛЬНОЇ КРИВИНИ

Володимир Кравець

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України*

[vlad@ipm.lviv.ua](mailto:vlad@ipm.lviv.ua)

Запропоновано підхід до побудови загального критерію руйнування (КР) тіл з U-подібними вирізами, який узгоджується як із відомими критеріями механіки руйнування для тіл з тріщинами, так і з класичною теорією міцності для тіл з гладкими вирізами (з відносно великими радіусами закруглення у їх вершинах). Отримані результати ґрунтуються на розв'язках пружних [1] та пружно-пластичних (в межах моделі смуг пластичності) задач для ізотропної площини з періодичною системою гладких отворів різних форм із двома крайовими прямолінійними тріщинами або смугами пластичності при їх вершинах (I тип деформування). Проведено дослідження впливів форми отвору та радіуса закруглення  $\rho$  у його вершинах на коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для крайових тріщин та довжини смуг пластичності і розкривів у вершинах отворів. За однакових радіусів  $\rho$  найнебезпечнішими (за максимальними КІН або розкривами) виявились отвори у формі фізичних щілин (гладкі контури яких утворюють два паралельні відрізки прямих, з'єднаних півколами радіуса  $\rho$ ). Коли довжини тріщин або пластичних смуг набагато менші за розміри концентраторів напружень, отримані розв'язки задач можна застосувати до прямокутних зразків скінченних розмірів з крайовими вирізами різних форм, зокрема, U-подібними.

Для силового КР критеріальну залежність записано на КІН у вершинах крайових тріщин деякої малої довжини  $l = l_0$ :  $K_I = K_{Ic}$ , де  $K_{Ic}$  – критичний КІН для тіл з тріщинами, який не пов'язаний з класичною границею міцності матеріалу  $\sigma_c$ ,  $l_0 = (1/\pi)(K_{Ic}/\sigma_c)^2$  – параметр критичної відстані, який вважають характеристикою матеріалу [4].

За деформаційного КР гранична рівновага пружно-пластичного тіла порушується тоді, коли розкрив  $\delta_I$  у вершині концентратора напружень досягне свого критичного значення:  $\delta_I = \delta_c$ . Припускаємо, що  $\delta_c$  – стала величина для даного матеріалу і за малих пластичних деформацій рівна критичному



розкрити для відповідного зразка з тріщиною:  $\delta_c = K_c^2 / (E\sigma_c)$  (плоский напружений стан), де  $K_c$  – критичне значення КІН у зразку з тріщиною,  $E$  – модуль Юнга.

Порівняно відносні руйнівні навантаження зразка  $p_c / \sigma_c$ , знайдені з критеріальних рівнянь розглянутих КР з відповідними експериментальними даними [3], отриманими на прямокутних зразках з оргскла (ПММА марки СОЛ-90) товщини  $t = 2\text{ mm}$  з бічними U-подібними вирізами (див. рис. 1). Руйнування вважали крихким  $\sigma_c \approx \sigma_Y = 86\text{ MPa}$ , де  $\sigma_Y$  – границя текучості матеріалу,  $K_c = 34.8\text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ ,  $l_0 = 0.052\text{ mm}$ . Тут криві 1, 2 побудовані на основі силового та деформаційного КР з розв’язків пружних і пружно-пластичних задач для площини з періодичною системою фізичних щілин із двома крайовими прямолінійними тріщинами або смугами пластичності. Крива 3 – на основі деформаційного КР з розв’язку плоскої пружно-пластичної задачі (в межах моделі смуг пластичності) для площини з одним напівнескінченим U-подібним вирізом [3]. Штрихова крива 5 – з класичного критерію міцності для зразка з U-подібними вирізами на основі апроксимаційної формули для коефіцієнтів концентрації напружень [2]. Кружками позначені експериментальні результати [3].

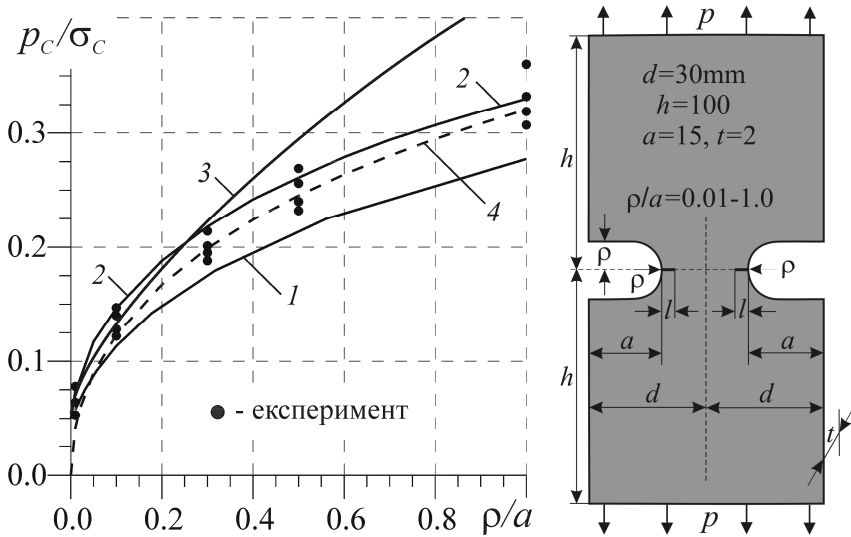


Рис. 1

Для малих відносних радіусів закруглення вершин U-вирізів  $\rho/a$  експериментальні дані добре узгоджуються із силовим та деформаційним КР (криві 1-3), а для  $\rho/a > 0.2$  – з класичним критерієм (крива 4) та деформаційним КР на основі розв'язків пружно-пластичних задач для площини з періодичною системою отворів із двома крайовими смугами пластичності (крива 2). Останні результати дають змогу запропонувати загальний двопараметричний КР (куди б входили критичний КІН  $K_c$  та границя міцності  $\sigma_c$  матеріалу), який добре узгоджується з даними експериментів для довільних відносних радіусів кривини  $\rho/a$ . Це дає підстави вважати цей критерій сполучною ланкою між критеріями механіки руйнування (для тіл з тріщинами) та класичними критеріями (теоріями) міцності. Запропонований критерій містить стандартні характеристики матеріалів і його можна використовувати для знаходження характеристики тріщиностійкості  $K_c$  крихких матеріалів (тверді сплави, силікатне скло, кераміка, бетон) на зразках із закругленими вирізами (без тріщин), коли важко виготовити зразок з гострокінцевими вирізами або тріщинами.

1. *Кравець В.С., Саврук М.П.* Плоска періодична задача теорії пружності для ізотропної площини з криволінійними отворами та крайовими тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 6. – С. 102-109.
2. *Baratta F.I., Neal D.M.* Stress-concentration factors in U-shaped and semi-elliptical edge notches // J. Strain Anal. Eng. Des. – 1970. – **5**, № 2. – P. 121-127.
3. *Savruk M., Kazberuk A., Panasyuk V.* On deformation fracture criterion for solids with U-notches / Сучасні проблеми механіки. Тези доп. Міжнародної наукової конференції. – Львів, 2009. – С. 22.
4. *Taylor D.* Predicting the fracture strength of ceramic materials using the theory of critical distances // Eng. Fract. Mech. – 2004. – **71**. – P. 2407-2416.

#### TO THE CONSTRUCTION OF FRACTURE CRITERIA FOR SOLIDS WITH U-SHAPED NOTCHES OF ARBITRARY CURVATURE

*The approach to the constructing a general fracture criterion of solids with U-shaped notches is proposed, which is consistent with the known criteria of fracture mechanics for solids with cracks and with the classical theory of strength for bodies with smooth cuts. The obtained results are based on solutions of elastic and elastic-plastic (within the scope of model of plasticity strips) problems for an isotropic plane with a periodic system of smooth holes of various forms with two edge rectilinear cracks or plasticity strips at their vertices (Mode I).*

## ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КРУГОВОГО МІЖФАЗНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ПРИ РІЗНИХ УМОВАХ ВЗАЄМОДІЇ З ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ ПРОСТОРОМ

**Олександр Кривий, Юрій Морозов**

*Національний університет «Одеська морська академія» (Україна);*

*Одеський національний політехнічний університет (Україна)*

[krivoy-odessa@ukr.net](mailto:krivoy-odessa@ukr.net); [morozovyu@gmail.com](mailto:morozovyu@gmail.com)

Нехай у площині  $z = 0$  з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів розташовано абсолютно жорстке включення, що займає область  $\Omega$ . На включенні задано тепловий потік  $q_0$  та прикладено довільне навантаження, дія якого зводиться до рівнодійної сили  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$  і головного момента  $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ . Розташування граней включення після деформації описують функції:

$$\zeta_6^\pm = \zeta_6^0 + \vartheta_0^\pm(x_1, x_2), \quad \zeta_k^\pm = \zeta_k^0, \quad k = 4, 5, \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$\zeta_4^0 = \delta_1 - \varphi_3 x_3, \quad \zeta_5^0 = \delta_2 + \varphi_3 x_1, \quad \zeta_6^0 = \delta_3 + \varphi_2 x_2 + \varphi_1 x_2,$$

$$\{\zeta_k^\pm\}_{k=1}^8 = \{\sigma_3(\mathbf{x}), \sigma_4(\mathbf{x}), \sigma_5(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\}|_{x_3=\pm 0},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_k\}_{k=1}^6 = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\}, \quad \mathbf{u} = \{u_k\}_{k=1}^3 = \{u, v, w\}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Грані включення можуть знаходитися або в умовах повного зчеплення з півпросторами, відомими в цьому випадку будуть стрибки та суми переміщень:

$$\chi_4^\pm(x_1, x_2) = (1 \pm 1)\zeta_4^0, \quad \chi_5^\pm(x_1, x_2) = (1 \pm 1)\zeta_5^0,$$

$$\chi_6^\pm(x_1, x_2) = \vartheta_0^\pm(x_1, x_2) + (1 \pm 1)\zeta_6^0, \quad \vartheta_0^\pm = \vartheta_0^+ \pm \vartheta_0^-, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\chi_k^\pm = \langle \chi_k(x_1, x_2) \rangle^\pm = \zeta_k(x_1, x_2, +0) \pm \zeta_k(x_1, x_2, -0), \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

або в умовах гладкого контакту, у цьому випадку стрибки та суми дотичних напружень перетворюються в нуль:  $\chi_k^\pm(x_1, x_2) = 0, k = 2, 3$ , а стрибки і суми нормальних зміщень визначаються за формулами (1).

Враховуючи умови

$$\chi_k^-(x_1, x_2) = 0, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (x_1, x_2) \notin \Omega,$$

$$\lambda_3^+ \partial_2 \zeta_7(x_1, x_2, +0) = \lambda_3^- \partial_2 \zeta_7(x_1, x_2, -0), \quad \zeta_7(x_1, x_2, +0) = \zeta_7(x_1, x_2, -0),$$

які відображають факт з'єднання півпросторів поза включеннями та результати праць [1–3], поставлені задачі можна звести до систем двовимірних СІР. Одержано розв'язки цих систем у явному вигляді. Зокрема, для повного зчеплення розв'язки мають вигляд:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle^- &= -\frac{1}{\pi \rho^2} \partial_\rho \int_\rho^a \frac{t \eta_{10}^-(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ e^{i\varphi} \partial_\rho \int_\rho^a \frac{\eta_{11}^-(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right], \\ \langle \tau_{z\rho} \rangle^- + i \langle \tau_{z\varphi} \rangle^- &= -\frac{1}{\pi \rho^2} \partial_\rho \int_\rho^a \frac{\eta_{20}^-(t) + \eta_{30}^-(t)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt - \\ &- \frac{1}{\pi} e^{i\varphi} \partial_\rho \frac{1}{\rho^2} \int_\rho^a \frac{(\eta_{21}^-(t) + \eta_{31}^-(t))t}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt - \frac{1}{\pi \rho^2} e^{-i\varphi} \partial_\rho \int_\rho^a \frac{(\bar{\eta}_{21}^-(t) - \bar{\eta}_{31}^-(t))t}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt. \end{aligned}$$

У випадку гладкого контакту розв'язки можна подати так:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle^- &= \frac{m_0 + m_1(\varphi)\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + \frac{s_{11}}{\rho} (L[F_0^-(\rho)])'_\rho - \tilde{s}_{11} v_5^-(\rho, \varphi), \\ \langle u_\rho \rangle^- &= \frac{2s_{21}}{\pi \rho} \{L[F_n^-(\rho)] - f_* \sqrt{a^2 - \rho^2}\} + \\ &+ \sqrt{a^2 - \rho^2} \{q_0 \operatorname{Re}(be^{i\varphi}) [m_2(5a^2(a^2 - \rho^2) - 3\rho^2) - m_3 a^2] - m_4 \operatorname{Re}(\varphi_{xy} e^{-i\varphi})\}, \\ \langle u_\varphi \rangle^- &= \sqrt{a^2 - \rho^2} \{q_0 \operatorname{Im}(be^{i\varphi}) (m_3 a^2 - m_2(3\rho^2 + 5a^2(a^2 - \rho^2))) - m_4 \operatorname{Im}(\varphi_{xy} e^{-i\varphi})\}. \end{aligned}$$

1. *Кривий О.Ф.* Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С. 23-35.
2. *Кривий О.Ф.* Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space // Materials Science. – 2014. – Vol. 3, No. 2. – P. 245-253.
3. *Кривий А.Ф., Морозов Ю.А.* Решение задачи теплопроводности для кусочно-однородного ортотропного пространства с межфазными дефектами // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012, 17, вип. 3 (15). – С. 107-119.

**THE PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR CIRCULAR INTERPHASE INCLUSION UNDER DIFFERENT CONDITIONS OF INTERACTION WITH TRANSVERSAL-IZOTROPIC SPACE**

*An exact solution of the thermoelasticity problem for interphase circular inclusion is constructed, which is in conditions of smooth contact with different transversal-isotropic half-spaces. The dependences of the translational displacements of the inclusion on the temperature, the resultant load, the main moment, and the thermomechanical characteristics of transversal-isotropic materials are obtained.*

## ЗВ'ЯЗАНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ

Василь Кузьменко, Сергій Плашенко

*Дніпровський національний університет ім. О. Гончара (Україна)*[sergey.plashenko@gmail.com](mailto:sergey.plashenko@gmail.com)

Сили, прикладені до штампу, зводяться до головного вектора  $\bar{P}$  та головного момента  $\bar{M}$ . Рух штампу описується поворотом на кут  $\Phi$  та переміщенням  $U$ . Було введено оператори  $A_1$  та  $A_2$  які однозначно визначають залежність між  $(\bar{P}, \bar{M})$  та  $(\bar{U}, \bar{\Phi})$ :

$$(\bar{U}, \bar{\Phi}) = A_1(\bar{P}, \bar{M}),$$

$$(\bar{P}, \bar{M}) = A_2(\bar{U}, \bar{\Phi}).$$

Розв'язання зводиться до розв'язання операторного рівняння:

$$(\bar{U}, \bar{\Phi}) = A_1(A_2(\bar{U}, \bar{\Phi})).$$

Було розглянуто дві конкретні задачі контактної взаємодії.

1. На поверхні півпростору встановлений соленоїд з циліндричним немагнітним осердям. Осердя притискається центральною силою  $\bar{P}$ . Соленоїд містить  $N$  витків площею  $S$ . У соленоїді, який знаходиться у однорідному магнітному полі з індукцією  $\bar{B}$ , протікає струм  $I$ .

Використовуючи відомий розв'язок контактної задачі про дію на штамп пари сил з моментом  $M$  [1] було отримано аналітичний вираз для кута повороту штамп

$$\alpha = \frac{\frac{3}{4} \frac{1-v^2}{Ea^3} NISB \cos \beta}{1 - \frac{3}{4} \frac{1-v^2}{Ea^3} NISB \sin \beta}$$

та розподілу контактного тиску

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \left[ P - 6 \frac{y}{a} \frac{NISB}{a} \frac{\cos \beta}{1 - \delta \sin \beta} \right],$$

де  $\beta$  – кут між вектором індукції та площиною витка соленоїда.

2. Нехай штамп зчеплений з півпростором втискається за допомогою гвинтового механізму. Штамп отримує поступальне переміщення у напрямку осі гвинта та поворот навколо цієї осі. До гвинта прикладений зовнішній крутний момент  $M_0$ . Дія різьби на гвинт зводиться до осьової сили  $P_T$  та моменту сил тертя  $M_T = \mu P_T b$ , де  $b$  – радіус різьби.

Осьова реакція різьби урівноважується силою  $P_T = P$ . Із умови рівноваги моментів відносно осі гвинта маємо

$$M + M_T = M_0.$$

Тоді зв'язок між моментом  $M$  та силою  $P$  можна записати таким чином:

$$M = M_0 - M_T = \mu P b.$$

Під дією осьової сили  $P$  та крутного моменту  $M$  штамп отримує осьове переміщення  $\delta$  та поворот навколо осі на кут  $\kappa$ . Вважається, що залежність цих кінематичних характеристик від  $P$  та  $M$  відома як розв'язок контактної задачі теорії пружності:

$$\delta = f_1(P, M), \quad \kappa = f_2(P, M).$$

За поступально-обертального руху гвинта переміщення  $\delta$  та поворот  $\kappa$  штампу пов'язані співвідношенням

$$\delta = \frac{\kappa}{2\pi} h,$$

де  $h$  – крок різьби. Тоді, отримуємо таке рівняння відносно осьової сили  $P$ :

$$f_1(P, M_0 - \mu P b) = \frac{h}{2\pi} f_2(P, M_0 - \mu P b).$$

Отриманий розв'язок не залежить від форми штампку та пружного тіла, однак ефективне розв'язання задачі потребує конкретних аналітичних виразів для функцій  $f_1(P, M)$  та  $f_2(P, M)$ . Встановлені умови, за яких можливе проковзування штампку відносно поверхні півпростору.

1. Лурье А.И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.

#### COUPLED CONTACT PROBLEMS

*Two coupled problems about heavy stamp and half space interaction were considered. The first problem describes solenoid rotation and displacement in magnetic field. Analytical solution was obtained for the problem. The second problem describes translator-rotational heavy stamp motion. General problem definition was obtained. More specific case when stamp base is flat and round was considered, friction influence was investigated.*

## ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНИ З НЕНАСКРІЗНО ЗАПОВНЕНИМ ТРІЩИНОПОДІБНИМ ДЕФЕКТОМ

**Ірина Курташ, Іван Шацький**

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки  
і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[ira.k@meta.ua](mailto:ira.k@meta.ua); [ipshatsky@gmail.com](mailto:ipshatsky@gmail.com)

Розглядаються проблеми міцності тонкостінних конструкцій з ін'єктованими дефектами [1]. В рамках класичної двовимірної теорії пластин розглянуто задачу про пружну та граничну рівновагу пластини, послабленої вузькою прямолінійною щілиною, ненаскрізно заповненою низькомодульним матеріалом. Для включення малої ширини прийнято гіпотезу пружного вінклерівського прошарку.

Сформульовано крайову задачу для пари бігармонічних рівнянь із знесеними на лінію розрізу ускладненими крайовими умовами:

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \Delta\Delta w = 0, (x, y) \in \mathbf{R}^2 / L;$$

$$\left( N_y, N_{xy}, M_y, M_{xy}^* \right)^T = \mathbf{A} \cdot \left( [u_y], [u_x], [\vartheta_y], [\vartheta_x] \right)^T, y = 0, x \in L,$$

де  $\mathbf{A}$  – матриця інтегральних жорсткостей заповнювача, яка зв'язує зусилля і моменти з розривами переміщень і кутів повороту нормалі та залежить від геометричної структури заповнення.

Для випадку еліптичної форми щілини та рівномірного навантаження побудовано аналітичний розв'язок сингулярних інтегродиференціальних рівнянь задачі. Розглянуто два механізми руйнування композиції [2]: розтріскування пластини біля вершин щілини та порушення цілісності заповнювача. Досліджено залежності граничного навантаження від ступеня та від форми часткового заповнення тріщини.

1. *Marukha V.I., Panasyuk V.V., Sylovanyuk V.P.* Injection technologies for the repair of damaged concrete structures. – New York: Springer, 2014. – 230 p.
2. *Shatskyi I., Kurtash I.* Strength of plate with the filled crack under multiparameter loading // *Procedia Structural Integrity*. – 2018. – **13**. – P. 1482-1487.

### LIMITING EQUILIBRIUM OF PLATE WITH NOT THOROUGHLY FILLED CRACK-LIKE DEFECT

*The problem of the elastic and limiting state of a plate weakened by narrow rectilinear slit not thoroughly filled with low-modulus material is considered within framework the classical two-dimensional plates theory.*

## ВЗАЄМОДІЯ ТРІЩИНИ З КОЛІНЕАРНОЮ ЩІЛИНОЮ У ПЛАСТИНІ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ЗА ЗГИНУ БІМОМЕНТНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Микола Маковійчук, Тарас Даляк

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки  
і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[makoviy@ua.fm](mailto:makoviy@ua.fm); [tdalyak@gmail.com](mailto:tdalyak@gmail.com)

Розглядається нескінченна ізотропна пластина, послаблена двома співвісними дефектами: тріщиною і щілиною однакової довжини та підкріплена пружною основою Вінклера. Під тріщиною розуміємо математичний розріз, береги якого можуть контактувати вздовж лінії в одній з лицьових поверхонь пластини; щілину розглядаємо як розріз з вільними від напружень поверхнями, на якому допускається від'ємний стрибок переміщень [1]. До берегів обох дефектів прикладено самозрівноважені та рівномірно розподілені згинні моменти, причому напрямок дії навантаження на одному дефекті є протилежним до напрямку дії на іншому. Решта поверхонь пластини, включаючи безмежно віддалені точки, вільні від навантаження. У рамках двовимірних теорій досліджується вплив закриття тріщини, жорсткості основи і взаємного розташування дефектів на напружено-деформований стан та граничну рівновагу пластини.

Для побудови розв'язку поставленої задачі використано метод сингулярних інтегральних рівнянь та числовий метод квадратур. За знайденими функціями стрибків переміщень і кутів повороту нормалі підраховано коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин дефектів, а також розподіл контактної реакції на тріщині. Із енергетичного критерію руйнування при комбінованому розтязі-згині встановлено граничне навантаження, при якому розпочинається поширення дефектів.

1. *Шацький І.П., Даляк Т.М.* Взаємодія тріщини з колінеарною щілиною за згину пластини // Вісник Зап. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2015. – № 1. – С. 211-218.

### INTERACTION OF CRACK WITH COLLINEAR SLOT IN PLATE ON ELASTIC FOUNDATION UNDER BENDING BY BIMOMENT LOAD

*The problem about interaction of crack with collinear slot in plate on elastic foundation under bending bimoment load is considered. Force and moment intensity factors near defects tips and contact reaction on the crack are calculated. The influence of crack closure, distance between defects and foundation rigidity on the plate strength is studied.*



## ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ БІЛЯ ВИСВЕРДЛЕНОГО ОТВОРУ В ПЛАСТИНАХ ІЗ ЗАЛИШКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Олеся Максимович, Тетяна Соляр

*Національний університет «Львівська політехніка» МОН України;*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики*

*ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[t\\_solyar@ukr.net](mailto:t_solyar@ukr.net)

Для визначення залишкових напружень широко використовують метод висвердлювання отворів [1]. В процесі створення отвору в пластині змінюються напруження і деформації. На основі змінених деформацій, які вимірюють експериментально, в літературі отримані співвідношення для визначення вихідних залишкових напружень, які були в пластині перед висвердлюванням в області отвору. Такі співвідношення використовують на основі припущення, що при створенні отвору в пластині проходить пружне деформування. В той же час відомо, що отвори є концентраторами напружень, тому біля них напруження можуть переважати межу текучості. Дослідимо концентрацію напружень у пластині довільної форми з прямолінійним зварним швом, серединна лінія якого розміщена на осі Оу. Для цього використаємо відомий теоретико-експериментальний метод [2].

Згідно з цим методом приймаємо, що залишкові деформації, які відмінні від нуля при  $|x| < d$ , мають вигляд:

$$\varepsilon_x^0 = C_x f(x), \quad \varepsilon_y^0 = C_y f(x), \quad \gamma_{xy}^0 = 0,$$

де  $f(x)$  – відома функція,  $C_x = -k_x \sigma_T / E$ ,  $C_y = -k \sigma_T / E$ ,  $k_x, k$  – безрозмірні параметри, які характеризують рівень напружень,  $\sigma_T$  – межа текучості,  $d$  – півширина пластичної зони.

Визначимо напруження і деформації, які виникнуть у пластині після створення отворів при  $f(x) = 1 - x^2/d^2$ , за умови, що межі пластини й отворів вільні від навантаження.

**а) Визначення напружень за пружного деформування.** Прийmemo, що біля отвору проходить тільки пружне деформування. Розв'язок задачі теорії пружності подамо у вигляді суми двох складових (часткового та коригувального).

Частковий розв'язок для напружень і деформацій запишемо у вигляді

$$\sigma_y = k \sigma_T f(x), \quad \varepsilon_x = (C_x + \nu C_y) f(x), \quad \sigma_x = \tau_{xy} = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0.$$

Вектор напружень  $(X_0, Y_0)$ , що відповідає частковому розв'язку, на довільній площинці визначасмо за формулами

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = \sigma_y \sin \gamma, \quad (1)$$

де  $\gamma$  – кут між віссю  $Ox$  і перпендикуляром до площинки.

**Коригувальний розв’язок.** Для його знаходження розглянуто задачу теорії пружності для заданої пластини (без залишкових напружень), до межі якої та меж отворів прикладено знайдені вище зусилля (1) з протилежним знаком:  $X = 0, Y = -k\sigma_T f(x) \sin \gamma$ . Для розв’язування цієї задачі використано метод сингулярних інтегральних рівнянь [3].

**Результати розрахунків.** Проведено розрахунок напружень біля кругових отворів різних радіусів у прямокутній пластині з півсторонами  $a=0.2$  м,  $b=0.3$  м за півширини області пластичності  $d=0.04$  м.

Розраховані максимальні напруження для отворів, центр яких розміщено посередині шва, радіусів  $R=0.01$  м,  $R=0.02$  м і  $R=0.03$  м дорівнювали  $2.4k\sigma_T, 1.4k\sigma_T, 0.92k\sigma_T$ . Тобто при створенні отворів малих розмірів (при  $R < 0.01$  м) пружне деформування проходить тільки у випадках, коли максимальні залишкові напруження менші за  $0.42\sigma_T$ .

Створивши отвір достатньо великих розмірів (орієнтовно  $R > 0.7d$ ), можна уникнути пластичного деформування біля нього для різних значень залишкових напружень.

**б) Врахування пластичного деформування біля отвору.** Отже, при висвердлюванні отворів малих розмірів біля них виникнуть пластичні деформації. Для їх визначення розглянемо спочатку осесиметричну задачу. Приймемо, що в околі початку координат в області  $r < R_D$  (область  $D$ ) діють сталі нормальні й кільцеві напруження  $\sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = m\sigma_T, m < 1$ . Створимо в центрі цієї області круговий отвір радіуса  $R$  ( $R \ll R_D$ ).

Напруження в пластині після утворення отвору запишемо у вигляді

$$\sigma_r^1 = \sigma_r^0 + \sigma_r, \quad \sigma_\theta^1 = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta.$$

Підставивши ці напруження у рівняння деформаційної задачі пластичності, отримаємо систему рівнянь для визначення додаткових напружень  $\sigma_r, \sigma_\theta$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} = \frac{\sigma_i^1 - \omega(\sigma_i^1)(\sigma_r^1 - 0,5\sigma_\theta^1)(\sigma_\theta^1 - 0,5\sigma_r^1)}{\sigma_i^1 - \omega(\sigma_i^1)(\sigma_\theta^1 - 0,5\sigma_r^1)^2} \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \end{cases}$$

за граничних умов

$$\sigma_r(a) = -\sigma_r^0(a), \quad \sigma_r(b) = 0,$$

де  $\omega(\sigma_i)$  – функція, яка визначається на основі діаграми деформування матеріалу за врахування зміцнення,  $a = R, b = R_D$ .

$$\text{Тут } \sigma_i^1 = \sqrt{(\sigma_r + \sigma_r^0)^2 - (\sigma_r + \sigma_r^0)(\sigma_\theta + \sigma_\theta^0) + (\sigma_\theta + \sigma_\theta^0)^2}.$$

Виконано розрахунки деформацій, які виникають у пластині в результаті створення отвору в пластичній ( $\varepsilon_r^p, \varepsilon_\theta^p$ ) та пружній ( $\varepsilon_r^e, \varepsilon_\theta^e$ ) постановках за різних значень параметра  $m$ . На рис. 1. наведено відношення деформацій  $W_t = \varepsilon_\theta^p / \varepsilon_\theta^e$  (суцільні лінії) та  $W_r = \varepsilon_r^p / \varepsilon_r^e$  (штрихові лінії) у пластині залежно від відносної координати  $r/a$ .

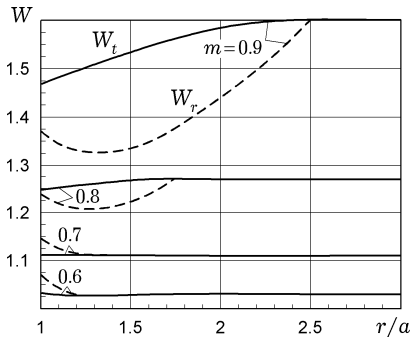


Рис. 1 Пружно-пластичні деформації біля отвору, ідеальна пластичність

Аналогічні розрахунки (на основі теорії течіння, умови текучості Мізе-са, методу додаткових деформацій) виконано також для неосесиметричного розподілу залишкових напружень.

1. *Schajer G.S.* Measurement of non-uniform residual stresses using the hole-drilling method // *Journal of Engineering materials and technology.* – 1988. – **110.** – P. 338-343.
2. *Осадчук В., Токовий Ю.* Визначення залишкових напружень у зварному стиковому з'єднанні двох прямокутних пластин // *Машинознавство.* – 2005. – № 9 (99). – С. 3-9.
3. *Максимович О., Ілляшин О.* Stress calculation and optimization in composite plates with holes based on the modified integral equation method // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2017. – **83.** – P. 180-187.

#### ELASTOPLASTIC DEFORMATION AT THE DRILLED HOLE IN A PLATE WITH RESIDUAL STRESSES

*An approach to the determination of stress concentration at the drilled hole in a plate with residual stresses is developed. To assess the residual stresses in solid plates a theoretical-experimental method known in literature is used. The stress concentration at the drilled hole is investigated for two cases. In the first case it is assumed that deformation is elastic. The stresses at the holes of different shape are investigated by the method of boundary integral equations. In the second case for large residual stresses the investigation of deformation at the hole is performed with account of the elastoplastic deformation, using numerical-analytical methods, which are applied for solving the problems of plasticity theory.*

УДК 539.3

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН БІЛЯ ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНИХ ТРІЩИН НА ПРОДОВЖЕННІ ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ ПРИ ДІЇ ЗСУВНОЇ ГАРМОНІЧНОЇ СИЛИ

Андрій Мішарін, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія» (Україна)

[as.mishandr@gmail.com](mailto:as.mishandr@gmail.com); [dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com)

Розглядається необмежене ізотропне пружне тіло, що знаходиться в умовах антиплоскої деформації. В ньому міститься наскрізний дефект у вигляді абсолютно жорсткого включення, від кінців якого під довільним кутом виходять тріщини. В середовищі відбуваються коливання повздовжнього зсуву внаслідок дії на включення зсувної сили  $P = P_0 e^{-i\omega t}$ , спрямованої вздовж осі  $Oz$ , де  $\omega$  – частота коливань. За таких умов єдина відмінна від нуля  $z$  – компонента вектора переміщень задовольняє рівняння Гельмгольца. Граничні умови на тріщинах сформульовані, виходячи з того, що їх поверхні незавантажено, а включення ідеально зчеплене з матрицею.

Розв'язок задачі шукається у вигляді суперпозиції розривних розв'язків рівняння Гельмгольца, побудованих відповідно для тріщин і включення. Після цього внаслідок реалізації граничних умов отримуємо систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків напружень і переміщень на дефекті:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{S(\tau, \zeta)}{\tau - \zeta} + G(\tau, \zeta) + R(\tau, \zeta) \right) F(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \kappa_0^2 D \ln |\tau - \zeta| + R_0(\tau, \zeta) \right) \Phi(\tau) d\tau = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_0(\tau) [\gamma \ln |1 + \tau| + R_1(\tau)] d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) R_2(\tau) d\tau = -\frac{P_1}{4\epsilon \kappa_0^2 \gamma^2 \rho}, \end{cases} \quad (1)$$

$$F(\tau) = (\varphi_0(\tau), \varphi_1'(\tau), \varphi_2'(\tau))^T = (f_0(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau))^T; \quad \Phi(\tau) = (0, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))^T;$$

$$S(\tau, \zeta) - \text{діагональна матриця, } q_0(\tau, \zeta) \equiv -1, \quad q_l(\tau, \zeta) = \frac{1 + (-1)^l \tau}{1 + (-1)^l \zeta}, l = 1, 2 \quad - \text{ii}$$

елементи;  $G(\tau, \zeta) = \{g_{lj}(\tau, \zeta)\}$ ,  $l, j = 0, 1, 2$  – матриця, ненульові елементи якої дорівнюють:

$$g_{10}(\tau, \zeta) = \frac{\gamma \sin \beta_1 \tau^+}{p_1(\tau^+, \zeta^-)}, g_{20}(\tau, \zeta) = \frac{\gamma \sin \beta_2 \tau^-}{p_2(\tau^-, \zeta^+)}, g_{01}(\tau, \zeta) = \frac{-\tau^-}{p_1(\zeta^+, \tau^-)}, \tau^\pm = 1 \pm \tau,$$

$$g_{02}(\tau, \zeta) = \frac{\tau^+}{p_2(\zeta^-, \tau^+)}; p_j(x, y) = \gamma^2 x^2 + 2\gamma\gamma_j xy \cos \beta_j + \gamma_j^2 y^2, \zeta^\pm = 1 \pm \zeta, j = 1, 2,$$

$D$  – діагональна матриця з елементами  $0, \gamma_l^2, l = 1, 2$ ;

$$f_l(\tau) = d_l^{-1} \chi_l(\eta), x_l = d_l \zeta, \eta = d_l \tau, \gamma_l = d_l b^{-1}, f_0(\tau) = G^{-1} \chi(\eta), \eta = d \tau,$$

$$\gamma = db^{-1}, b = \max(d, d_l), P_1 = P_0 b^{-1}, \beta_1 = \alpha_1 - \pi, \beta_2 = \alpha_2.$$

Сингулярна складова системи (1) містить нерухомі особливості при  $\tau = \pm 1, \zeta = \pm 1$ . Це визначає наступний вигляд для невідомих функцій:

$$(\varphi_l(\tau))' = (1 + (-1)^l \tau)^{\delta_l} (1 - (-1)^l \tau)^{-1/2} \psi_l(\tau), \varphi_0(\tau) = (1 + \tau)^{\delta_1} (1 - \tau)^{\delta_2} \psi(\tau), l = 1, 2,$$

де степеневі показники знаходяться за формулами:

$$\delta_l = -\frac{\pi + 2\beta_l}{2(\pi + \beta_l)}, 0 < \beta_l < \pi, l = 1, 2.$$

Невідомі функції  $\psi_l(\tau)$  наближаються інтерполяційними многочленами. Така апроксимація дає можливість отримати для сингулярних інтегралів спеціальні квадратурні формули і застосувати до (1) метод колокації. Отримано формули для розрахунку КІН для тріщин і досліджено вплив на їх значення кутів між включенням і тріщинами та частоти хвилі, що виникла при дії зсувної гармонічної сили.

#### STRESS STATE NEAR ARBITRARILY ORIENTED CRACKS ON THE CONTINUATION OF A RIGID INCLUSION UNDER THE ACTION OF THE SHEAR HARMONIC FORCES

*The problem about determining of the dynamic stress intensity factors (SIF) for the cracks that are located at an angle from the ends of the inclusion is solved. The inclusion is located in an unbounded elastic body, under the conditions of deformation of the longitudinal shear, where harmonic oscillations occur due to the shear force applied to the inclusion. The initial problem is reduced to solve the system of singular integral-differential equations with fixed singularities. For the numerical solution of the system the method is developed. It takes into account the real asymptotic of the unknown functions and uses the special quadrature formulas for singular integrals.*

УДК 539.3

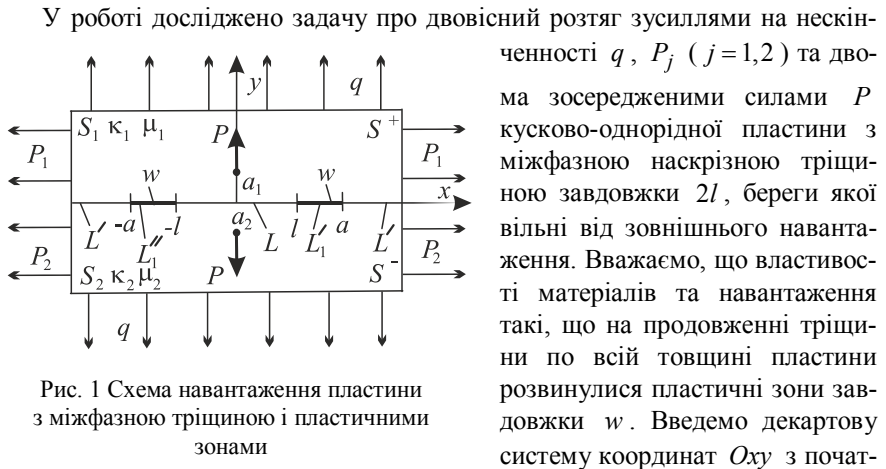
## КУСКОВО-ОДНОРІДНА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА ПЛАСТИНА З МІЖФАЗНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ

**Мирон Николишин, Віктор Опанасович,  
Леся Куротчин, Микола Слободян**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

[klesi@i.ua](mailto:klesi@i.ua); [slobkolia@gmail.com](mailto:slobkolia@gmail.com)



Згідно з формулюванням задачі, маємо такі краєві умови:

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ = (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^-, (u + iv)^+ = (u + iv)^-, x \in L';$$

$$\sigma_{yy}^\pm = 0, \sigma_{xy}^\pm = 0, x \in L;$$

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_0, \quad \sigma_{xy}^{\pm} = \tau_0, \quad x \in L_1;$$

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_0, \quad \sigma_{xy}^{\pm} = -\tau_0, \quad x \in L_1';$$

де  $u, v$  – проєкції вектора переміщення точки пластини на осі  $Ox, Oy$  відповідно,  $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень,  $\sigma_0, \tau_0$  – невідоме нормальне і дотичне напруження; символами «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини при  $y \rightarrow \pm 0$ .

За використання методів теорії функції комплексних змінних і комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі [1, 2] розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, розв'язок яких знаходимо в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон, та отримано вирази для невідомих значень нормальних і дотичних напружень; визначено напружено-деформований стан на межі поділу матеріалів. Використовуючи умову пластичності отримано трансцендентне рівняння для визначення довжини пластичної зони  $w$ . Проведено числовий аналіз задачі.

1. *Николишин М.М., Опанасович В.К., Куротчин Л.П.* Двоісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2006. – 4. – С. 101-108.
2. *Николишин М.М., Опанасович В.К., Куротчин Л.П., Слободян М.С.* Знаходження довжини пластичних зон біля вершин наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2012. – Вип. 136. – С. 294-300.

**PIECEWISE-HOMOGENEOUS ELASTICO-PLASTIC PLATE WITH AN INTERFACE THROUGH CRACK UNDER CONCENTRATED FORCES**

*The limited equilibrium of a piecewise-homogeneous elastico-plastic plate with interface through crack under homogeneous stress field at infinity and concentrated forces is studied. Using the method of the theory of complex variable function and Kolosov-Muskhelishvili potentials, the solution of the problem is reduced to the problem of linear conjugation, the solution of which is constructed in the class of functions, bounded in the peaks of plastic zones. The equation is obtained to find the unknown normal and tangential stresses in the plastic zones and the length of plastic zone too. The problem is analyzed analytically.*

УДК 539.3

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗНОШУВАННЯ В ПЛОСКІЙ ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ ШТАМПА І ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

Володимир Онишкевич

*Національний лісотехнічний університет України*

[onyshkevych@nltu.edu.ua](mailto:onyshkevych@nltu.edu.ua)

Як відомо, математичні моделі зношування вперше були наведені в [1]. Тут розглядається плоска задача про зношування пружного півпростору під дією прямокутного штампа, який рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Оскільки задача формулюється в стаціонарній постановці, то нехтуємо температурними ефектами, які при цьому виникають [4]. Вважаємо, що до моменту часу  $\tau=0$  під втиснутим силою  $P$  у пружну півплощину штампом тиск стаціонарно розподілявся, змінюючи мікронерівності поверхні. З моменту часу  $\tau=0$  штамп рухається з постійною швидкістю  $V_0$  і відбувається стирання півплощини. Поза штампом поверхня півплощини є незавантаженою.

Для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати рівняння теорії пружності за таких граничних умов:

$$y=0: v = f(x) + (k_1 V_0 \tau / H_b + k_2) \left| \sigma_y(x) \right|^\alpha, \quad |x| \leq a,$$

$$\sigma_y(x) = 0, \quad |x| \geq a; \quad \tau_{xy}(x) = 0, \quad |x| < \infty,$$

де  $f(x)$  – задані переміщення під штампом,  $a$  – півширина штампа,  $H_b$  – твердість за Брінелем матеріала півплощини,  $\tau$  – час. Процес зношування визначається параметрами  $k_1, k_2, 0 \leq \alpha \leq 1$  [2].

Розв'язок задачі теорії пружності будується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Контактні напруження шукаються у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти розвинення якого задовольняють парним інтегральним рівнянням. Використавши метод точкової колокації, для знаходження невідомих коефіцієнтів отримано систему нелінійних алгебричних рівнянь. При значеннях параметрів  $\alpha=0$  та  $\alpha=1$  вона перетворюється у лінійну і набуває вигляду  $\bar{z}_1(\|A\| + C\|D\|) = \bar{b}$  та  $\bar{z}_0\|A\| = \bar{b} - \bar{c}$  відповідно. Ці граничні випадки становлять найбільший інтерес, оскільки дають можливість обчислити найменше і найбільше зношування. В інших випадках (при  $0 < \alpha < 1$ ) розв'язок буде міс-



титися між розв'язками цих задач. Для розв'язання нелінійної системи рівнянь використано метод простої ітерації, за нульове наближення вибрано середнє значення розв'язків обох крайніх випадків.

Числові обчислення проведено при таких параметрах (система SI): матеріал півплощини – алюміній,  $V_0 = 0.25$ ,  $a = 0.25$ ,  $f(x) = \text{const} = 0.01$ ,  $k_1 = 10^{-10}$ ,  $k_2 = 10^{-11}$ . Отримано еволюцію контактних напружень і зношування в часі. Зокрема, у випадку  $\alpha = 1$  зі збільшенням часу взаємодії вертикальні переміщення зростають, що свідчить про інтенсивніше зношування матеріалу. При  $\alpha = 0$  вертикальні переміщення  $v$  виявились постійними. На отриманий розв'язок слід накласти розв'язок антиплоскої задачі, коли до півплощини прикладено дотичні напруження  $\tau_{yz} = k\sigma_y$ , де  $k$  – коефіцієнт тертя, а  $\sigma_y$  визначається за формулою розвинення в ряд Фур'є.

У частковому випадку  $\alpha = 0$ ,  $\tau = 0$  отримані результати співпадають з відомими [3].

1. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел // ДАН СССР. – 1983. – 271, № 4. – С. 827-831.
2. Гавриков М.В., Мазинг Р.И. Применение наследственно-стареющей модели изнашивания к осесимметричной контактной задаче // Трение и износ. – 1989. – 10, № 6. – С. 981-987.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа // ПММ. – 1976. – 40, № 6. – С. 981-989.
4. Онишкевич В.М., Сулим Г.Т.. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплотворення від тертя // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2017. – № 3. – С. 165-168.

#### MATHEMATICAL MODELLING OF WEAR IN A PLANE PROBLEM ABOUT CONTACT OF PUNCH AND ELASTIC HALF-PLANE

*The plane contact problem on wear of elastic half-plane by a rigid punch has been considered. The punch moves with constant velocity. Arising thermal effects are neglected because the problem is investigated in stationary statement. In this case the crumpling of the nonhomogeneities of the surfaces and abrasion of half-plane take place. Out of the punch the surface of half-plane is free of load. The solution for problem of theory of elasticity is constructed by means of Fourier integral transformation. Contact stresses are found in Fourier series which coefficients satisfy the dual integral equations. It leads to the system of nonlinear algebraical equations for unknown coefficients by a method of collocations. This system is reduced to linear system in the partial most interesting cases for computing of maximum and minimum wear. The iterative scheme is considered for investigation of other nonlinear cases, for initial approximation the mean value of boundary cases is used. The evolutions of contact stresses, wear and abrasion in the time are given. For both last cases increase or invariable of vertical displacement correspondently is obtained. In the boundary case coincidence of results with known is obtained.*

УДК 539.3

## КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ЛІНЗОПОДІБНОГО ТА РОМБІЧНОГО ОТВОРІВ В ОРТОТРОПНОМУ ТІЛІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

**Любов Онишко, Олексій Кваснюк, Надія Біда**

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України*

[oni@ipm.lviv.ua](mailto:oni@ipm.lviv.ua)

Розроблений єдиний підхід до розв'язування плоских задач теорії пружності та механіки руйнування ізотропних та ортотропних тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами [1] нижче поширено на відповідні антиплоскі задачі. На основі отриманих залежностей між коефіцієнтами концентрації напружень (ККН) у закругленій вершині напівнескінченного кутового вирізу та коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у відповідній гострій вершині побудовано розв'язки задач про концентрацію напружень біля гострокутних отворів в ортотропній площині за поздовжнього зсуву на нескінченності. Розв'язок задач для ортотропної площини, послабленої отворами із закругленими вершинами малого радіуса кривини, одержано методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

Розглянуто ортотропне тіло з овальним (контур  $L$  краю отвору складається зі симетричних дуг кола радіуса  $R$ , кінці яких гладко з'єднані між собою дугами кола радіуса  $\rho$ ) чи ромбічним (контур  $L$  закруглений у вершинах дугами кола радіуса  $\rho$ ) отворами діаметром  $2l$  [1] (рис. 1). Краї отворів вільні від зовнішніх зусиль, а на нескінченності задані зсувні напруження  $\tau$ . Розв'язок задач для тіл з двокутним лінзоподібним та ромбічним отворами з гострими вершинами отримано за допомогою граничного переходу, коли  $\rho \rightarrow 0$ .

Задачу розв'язували методом суперпозиції, взявши комплексний потенціал напружень  $\Phi_3(z_3)$  ( $z_3 = x + i\gamma_3 y$ ,  $i\gamma_3$  – уявний корінь характеристичного рівняння [2-4]) у формі [1]

$$\Phi_3(z_3) = \tau + \frac{1}{\pi} \int_{L_3} \frac{\gamma'(t_3) dt_3}{t_3 - z_3},$$

де контур  $L_3$  у площині  $z_3$  відповідає контуру  $L$  (овального чи ромбічного отворів) у площині  $z = x + iy$ .

Для знаходження невідомої густини  $\gamma'(t_3)$  отримали СІР

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_3} K(t_3, t'_3) \gamma'(t_3) dt_3 + \frac{1}{\pi l} \int_{L_3} \gamma'_3(t_3) dt_3 = -\tau(t'_3), \quad t'_3 \in L_3$$

де

$$K(t_3, t'_3) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{t_3 - t'_3} \frac{dt'_3}{ds'} \right], \quad \tau(t'_3) = -\tau \operatorname{Re} \left[ \frac{dt'_3}{ds'} \right],$$

$$t_3 = [(1 + \gamma_3)t + (1 - \gamma_3)\bar{t}] / 2, \quad t_3 \in L_3, t \in L.$$

Концентрацію напружень у закругленій вершині  $A$  овального чи ромбічного отворів  $L$  (схема на рис. 1а) знайдемо за використання комплексного потенціалу (1) за формулою

$$\tau_{sz}(A) = K_{III}^V R_{III}(\beta)(\rho)^{-\lambda_{III}} / \sqrt{2\pi}.$$

Тут  $s$  – дугова абсциса точки  $t \in L$ ,  $\lambda_{III}$  – порядок особливості поля напружень у вершині ортотропного клина,  $R_{III}(\beta)$  – коефіцієнт впливу закруглення кутового вирізу на напруження на контурі  $L$ , який також залежить від форми контуру та пружних сталей ортотропного матеріалу,  $K_{III}^V$  – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у кутовій вершині ромба або лінзоподібного отвору, який визначається за допомогою граничного переходу [1]

$$K_{III}^V = \left\{ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi}(\rho)^{\lambda_{III}} \tau_{sz}(A) \right] \right\} / R_{III}(\beta).$$

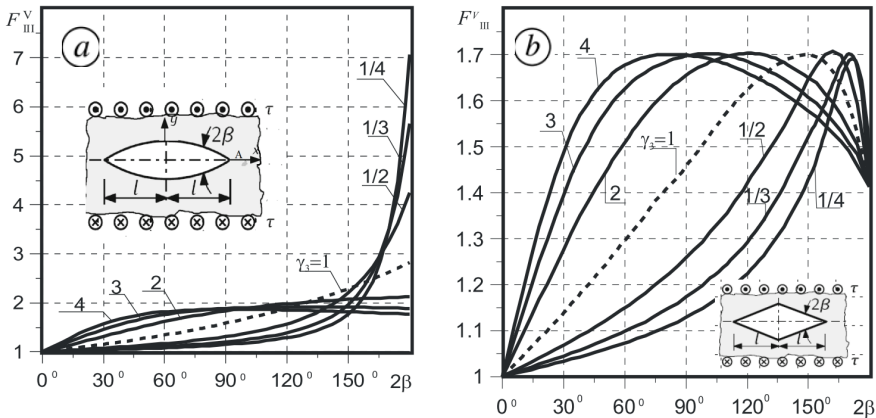


Рис. 1 Залежність відносних КІН від кута розхилу  $2\beta$  для лінзоподібного (а) та ромбічного (б) отворів.

Для низки параметрів ортотропії  $\gamma_3$  наведено залежність безрозмірних КІН  $F_{III}^V = K_{III}^V / (\tau l^{\lambda_{III}} \sqrt{\pi})$  у гострих вершинах двокутного лінзоподібного (рис. 1a) та ромбічного (рис. 1b) отворів від кутів розхилу  $2\beta$ .

Зробивши порівняння параметрів  $F_{III}^V$ , приходимо до висновку, що вони є близькі між собою для кутів  $2\beta \leq \pi/2$  та якісно відрізняються для кутів, близьких до  $2\beta = \pi$ . Пояснюється це тим, що у тілі з виродженим ромбічним отвором при  $2\beta = \pi$  (тріщина вздовж осі  $y$ ) реалізується однорідний напружений стан для довільних параметрів ортотропії  $\gamma_3$ , а лінзоподібний отвір переходить в коловий, концентрація напружень біля якого залежить від параметра  $\gamma_3$ . Штрихові лінії (рис. 1) відповідають ізотропним випадкам ( $\gamma_3 = 1$ ) і добре узгоджуються з відомими даними [1].

Результати досліджень можуть бути використані для оптимального вибору форм отворів і матеріалів елементів конструкцій з отворами як з гострими, так і закругленими вершинами.

1. Savruk M.P., Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
2. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
3. Саврук М.П., Казберук А., Онишко Л.Й. Вплив анізотропії матеріалу на розподіл напружень біля параболічного вирізу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – № 6. – С. 24-33.
4. Ting T.C.T. Anisotropic Elasticity. Theory and Applications. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 587 p.

#### STRESS INTENSITY FACTORS FOR LENS-LIKE AND RHOMBIC HOLES IN ORTHOTROPIC BODY UNDER ANTIPLANE DEFORMATION

*Using the singular integral equation method and the unified approach for problem of stress concentration at the sharp and rounded V-shaped notches the problem on longitudinal shear of orthotropic plane with a lens-like and rhombic holes are solved. Dimensionless notch stress intensity factors at the tips of lens-like and rhombic holes with respect to vertex angle  $2\beta$  are obtained.*

**КОНТАКТ БЕРЕГІВ МІЖФАЗНОЇ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ ТРІЩИНИ  
У КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ СМУЗІ**

**Володимир Острик**

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна)*

[v.i.ostryk@gmail.com](mailto:v.i.ostryk@gmail.com)

Кусково-однорідна смуга складається із двох різнорідних смуг  $-\infty < x < \infty$ ,  $-h_1 \leq y \leq 0$ ,  $0 \leq y \leq h_2$  з модулями зсуву  $G_1$ ,  $G_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  відповідно. На частині  $0 \leq x < \infty$  межі  $y = 0$  поділу матеріалів смуги жорстко з'єднані, а на іншій її частині  $-\infty < x < 0$  кусково-однорідна смуга має півнескінченну тріщину. Грані  $y = -h_1$ ,  $y = h_2$  загальної смуги з'єднані із жорсткими стінками, до яких прикладені стискальне і зсувне рівномірно розподілені навантаження інтенсивностей  $p$  і  $q$ . В області контакту берегів тріщини враховано сили тертя згідно закону Амонтона. Залежно від відношення  $q/p$  тріщина може бути як повністю закритою, так і частково розкритою на скінченному або на півнескінченному інтервалі (рис. 1-3). Випадок повністю закритої тріщини для тріщини на межі однорідної смуги та жорсткої стінки ( $G_2 = \infty$ ) розглянуто в роботі [1].

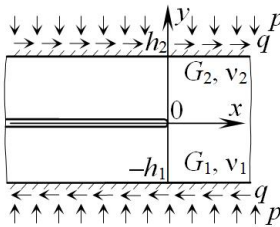


Рис. 1

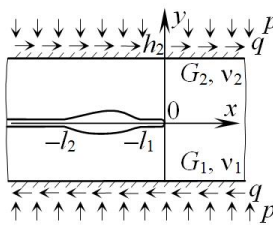


Рис. 2

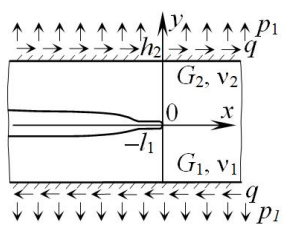


Рис. 3

**Випадок 1.** У випадку закритої тріщини відношення  $q/p$  не перевищує деякого граничного значення  $\bar{q}_*$ . При цьому  $p > 0$ ,  $q > \mu_0 p$ , де  $\mu_0$  – коефіцієнт тертя.

Із застосуванням інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до інтегрального рівняння на півосі з різницеvim ядром відносно функції  $\varphi(\xi) =$

$$= -\frac{q - \mu_0 p}{G_1} + \frac{1}{2G_1} \left( \tau_{xy} + \mu_0 \sigma_y \right) \Big|_{y=0} \quad \left( \xi = \frac{x}{h_1} \right) \text{ і отримано її точний розв'язок ме-}$$

тодом Вінера-Гопфа. Знайдено напруження в області контакту берегів тріщини та на лінії продовження тріщини. Обчислення показали, що при зростанні  $q/p$  напруження  $\sigma_y$  на значній частині області контакту зменшуються за абсолютним значенням і у випадку  $\mu_0 = 0,25$ ,  $q/p = \bar{q}_* = 3,2614$ ,  $G_2 = \infty$  досягають нульового значення у точці  $x/h_1 = 0,9$ . Подальше збільшення  $q/p$  призводить до появи ділянки в околі точки  $x/h_1 = 0,9$ , де напруження  $\sigma_y$  стають додатними, що суперечить постановці задачі і вказує на часткове розкриття тріщини.

Нормалізовані значення  $\tilde{K}_{II} = \pi^{-\gamma} q^{-1} (4h)^{-1/2+\gamma} K_{II}$  коефіцієнта інтенсивності напружень

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow +0} (2\pi x)^{1/2-\gamma} \tau_{xy} \Big|_{y=0}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \mu_0 \frac{(1-2\nu_1)G_2 - (1-2\nu_2)G_1}{2(1-\nu_1)G_2 + 2(1-\nu_2)G_1} \right)$$

залежно від відношення зусиль  $q/p$  у випадку  $\nu = 1/3$ ,  $\mu_0 = 0,25$ ,  $G_2 = \infty$  наведено у табл. 1. Коли відношення зусиль досягає свого критичного значення  $\bar{q}_* = 3,2614$ , коефіцієнт  $\tilde{K}_{II}$  збігається з відповідним значенням  $\tilde{K}_{II} = 2,530$  за відсутності тертя, незалежним від відношення  $q/p$ . Без урахування тертя ( $\mu_0 = 0$ ) максимальне значення напружень  $\sigma_y$  сягає нуля, якщо  $\bar{q}_* = 3,05$ .

Таблиця 1

$q/p$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,2614
$\tilde{K}_{II}$	1,370	2,055	2,283	2,397	2,466	2,512	2,530

**Випадок 2.** Часткове розкриття тріщини на інтервалі  $-l_2 < x < -l_1$  відбувається, якщо  $q/p > \bar{q}_*$ ,  $p > 0$  (рис. 2). Задачу із застосуванням узагальненої схеми методу Вінера-Гопфа зведено до нескінченної системи рівнянь.

**Випадок 3.** Тріщина розкривається на півнескінченному інтервалі  $-\infty < x < -l_1$ , якщо  $p = -p_1 \leq 0$  (рис. 3).

1. *Острик В.І.* Закрита півнескінченна тріщина на межі пружної смуги і жорсткої стінки // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – **53**, № 1. – С. 84-89.

#### CONTACT OF FACES OF THE SEMI-INFINITE INTERFACE CRACK IN PIECEWISE HOMOGENEOUS STRIP

*Using the Wiener-Hopf method, the contact problem is solved for the semi-infinite interface crack in piecewise homogeneous strip with taking into account a contact of its faces. The cases are investigated, when the crack is completely closed and partially open on the finite or semi-infinite interval.*

## ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ТОНКИХ ДЕФЕКТІВ У ВИГЛЯДІ ЛАМАНИХ ПРИ АНТИПЛОСКІЙ ДЕФОРМАЦІЇ

**Всеволод Попов, Оксана Литвин**

*Національний університет «Одеська морська академія» (Україна)*

[dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com); [litvinov.od@gmail.com](mailto:litvinov.od@gmail.com)

Розглядається пружний ізотропний простір, який містить тонкий наскрізний дефект (тріщина або жорстке включення), переріз якого має вигляд довільної ламаної лінії, що складається з  $N$  ланок. З дефектом взаємодіє плоска гармонічна хвиля повздовжнього зсуву. При таких умовах  $z$  – компонента переміщень розсіяного хвильового поля має задовольняти рівняння Гельмгольца

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad (1)$$

$\omega$  – частота коливань,  $\rho$  – густина пружного середовища,  $G$  – модуль зсуву. Для формулювання граничних умов на поверхні дефекту з кожною його ланкою пов'язується локальна система координат  $Ox_k y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Тоді у випадку тріщин, поверхня яких вільна від напружень, виконуються умови:

$$\tau_{zy_k}(x_k, 0) = -\tau_{zy_k}^0(x, 0), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad (2)$$

$$W_k(x_k, +0) - W_k(x_k, -0) = \chi_{1k}(x_k).$$

У рівностях (2)  $\tau_{zy_k}^0$  – напруження, викликане хвилею, що поширюється,  $\chi_{1k}(x_k)$  – невідомі стрибки переміщень на поверхні тріщин,  $2d_k$  – довжина  $k$ -ої ланки дефекту.

Якщо дефектом є жорстке включення, то при повному зчепленні з зовнішнім середовищем здійснюються умови:

$$W_k(x_k, 0) = C - W_k^0(x_k, 0), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad (3)$$

$$\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0) = \chi_{2k}(x_k).$$

Тут  $W_k^0(x_k, y_k)$  – переміщення, викликані хвилею, що поширюється,  $\chi_{2k}(x_k)$  – невідомі стрибки напружень на поверхні включення,  $C$  – невідомі амплітуди коливань включень під дією хвилі, які визначають з рівнянь руху включення

$$-CM\omega^2 = \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{2k}(x_k) dx_k,$$

де  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$  – маси включень.

Розв'язання сформульованих граничних задач ґрунтується на поданні переміщення розсіяного хвильового поля у вигляді суперпозиції розривних розв'язків (1) зі стрибками (2) або (3). Для визначення невідомих стрибків з граничних умов отримана в залежності від типу дефекту система інтегро-диференціальних або інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Для наближеного розв'язання цих систем запропоновано числовий метод, який враховує справжні особливості розв'язків і ґрунтується на застосуванні спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів. Показано швидку практичну збіжність пропонованого числового методу у досить широкому частотному діапазоні. Здійснено детальне дослідження впливу форми дефекту на частотну залежність КІН.

#### THE DETERMINATION OF DYNAMIC STRESS INTENSITY FACTOR FOR BREAK-LINE SHAPED DEFECT IN ANTYPLANE STRAIN CONDITION

*The problem of determining stressed state in the vicinity of a tunnel defect (crack or thin rigid inclusion) when its cross-section a broken line is solved. The defect is located in an infinite elastic medium with propagating plane harmonic longitudinal shear waves. The problem is reduced to the solution of at system singular integral or integro-differential equations with fixed singularities. A numerical method of the solving of this system with regard to true asymptotic of the unknown functions is developed.*



**ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДАМИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ  
ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ  
ДВОХ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ НЕСУЦІЛЬНОГО  
ЦИЛІНДРИЧНОГО ПРУЖНОГО ПОКРИТТЯ**

**Ігор Прокопишин**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[ihor84@gmail.com](mailto:ihor84@gmail.com)

Розглянуто осесиметричну контактну задачу для трьох пружних тіл обертання. Між першим і другим тілом відбувається односторонній контакт без тертя, а між другим і третім – ідеальний механічний контакт. Використовуючи метод штрафу, здійснено слабе формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння у гільбертовому просторі.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння зі штрафом осесиметричної контактної задачі на основі результатів праць [1-5] запропоновано клас паралельних ітераційних методів декомпозиції області (МДО) типу Робіна. Встановлено умови слабкої збіжності цих методів, а також існування і єдиності розв'язку варіаційного рівняння.

Розроблено програмне забезпечення, яке реалізує отримані МДО зі застосуванням скінченноелементних апроксимацій на лінійних і квадратичних трикутних елементах. За допомогою одержаних алгоритмів досліджено задачу про односторонній контакт двох пружних тіл обертання, одне з яких має несущільне циліндричне пружне покриття. Вивчено вплив висоти і жорсткості покриття на нормальні контактні напруження на інтерфейсі між покриттям і верхнім тілом та на нормальні і дотичні міжфазні напруження на межі між покриттям і основою.

1. *Прокопишин І.І.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 123-133.
2. *Прокопишин І.І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фіз.-мат. наук: спеціальність 01.05.02 – «Мат. моделювання та обчисл. методи». – Львів, 2010. – 163 с.

3. Прокопишин І.І. Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач про ідеальний контакт пружних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 1. – С. 41-56.
4. Дыяк І.І., Prokopyshyn I.I., Prokopyshyn I.A. Penalty Robin-Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // arxiv.org. – 2012. – <http://arxiv.org/pdf/1208.6478v1.pdf>. – 32 p.
5. Prokopyshyn I.I., Дыяк І.І., Martynyak R.M., Prokopyshyn I.A. Penalty Robin-Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – 91. – P. 647-654.

**INVESTIGATION OF AN AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM  
FOR TWO ELASTIC BODIES WITH NONUNIFORM CYLINDRICAL ELASTIC COATING  
BY DOMAIN DECOMPOSITION METHODS**

*We consider an axisymmetric contact problem for three elastic bodies of rotation. The unilateral contact conditions are prescribed between the first body and the second body and the perfect mechanical contact conditions hold between the second and the third of the bodies. Using a penalty method, we obtain a weak formulation of the problem in the form of a nonlinear variational equation in Hilbert space. To solve this nonlinear variational equation we propose a class of parallel iterative Robin type domain decomposition methods (DDMs). With the use of the proposed DDMs and the finite element approximations we investigate the contact interaction between two axisymmetric elastic bodies, one of which has a nonuniform cylindrical elastic coating. The influence of geometrical and mechanical properties of the coating on the contact stresses is studied.*

## ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ВЗДОВЖ ГВИНТОВОЇ ЛІНІЇ

Леся Сеньків, Василь Дяків

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[dept20@iapmm.lviv.ua](mailto:dept20@iapmm.lviv.ua)

При розрахунку на міцність реальних тонкостінних елементів конструкцій слід враховувати наявність в них ненаскрізних тріщин. При цьому на напруження, збудені тріщиною, суттєво впливає границя твердого тіла.

Розглядається тонка неполога ортотропна замкнута циліндрична оболонка радіуса  $R$  і товщиною  $2h$ , яка послаблена внутрішньою тріщиною довжиною  $2l_0$  під кутом (рис. 1). Глибина тріщини задається величинами  $d_1$  та  $d_2$  (відстані відповідно від зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки). При цьому ( $\min(d_1 + d_2) \leq 0.4h$ ).

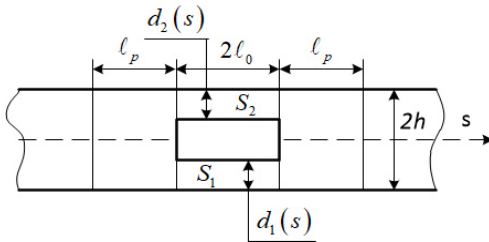


Рис. 1

Оболонка та береги тріщини завантажені симетричними зусиллями та моментами такими, що береги тріщини не контактують між собою. Площа тріщини, зовнішнє навантаження та властивості матеріалу такі, що на продовженнях тріщини  $l_p$  по

всій товщині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Вважатимемо, що в областях  $S_1$  та  $S_2$  коло тріщини в глибину до зовнішньої чи внутрішньої поверхонь оболонки діють постійні напруження

$$\sigma^0 = (\sigma_{Bi} + \sigma_{Ti})/2,$$

де  $\sigma_{Bi}$  – границя міцності, а  $\sigma_{Ti}$  – поріг текучості матеріалу оболонки.

Відповідно до аналога  $\delta_c$  – моделі [1] зони пластичних деформацій моделюють фіктивними тріщинами невідомої довжини  $l_p$  – лініями розриву пружних переміщень і кутів повороту, Саму ненаскрізну тріщину завдовжки

$2l_0$  замінюємо наскрізною тріщиною невідомої довжини, до берегів якої прикладено зусилля і моменти основного напруженого стану. До берегів фіктивних тріщин прикладені також невідомі зусилля і моменти, які задовольняють одну з умов пластичності і які є реакцією матеріалу пластичної зони на пружну. На берегах тріщини довжиною  $2l_0$  діють зусилля і моменти, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під тріщиною вздовж гвинтової лінії.

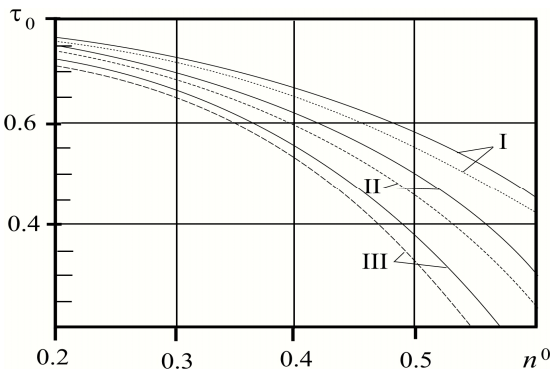


Рис. 2

З використанням методу дисторсії для пружно-пластичної задачі про напружений стан ортотропної непологої циліндричної оболонки Кірхгофа з ненаскрізною тріщиною вздовж гвинтової лінії записано відповід-

ну нелінійну систему сингулярних інтегральних рівнянь з розривними правими частинами. На цій основі за врахування умови пластичності, рівності нулю коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах фіктивних тріщин та умов однозначності переміщень знайдено залежності довжини пластичної зони від навантаження (рис. 2) та розкриття тріщини від довжини та орієнтації тріщини та ортотропії матеріалу.

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛІОМ, 2003. – 320 с.
2. Сеньків Л.М. Напружений стан циліндричної ортотропної оболонки з тріщиною під кутом // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – Т. 58, № 3. – С. 122-127.

**LIMIT EQUILIBRIUM OF ORTHOTROPIC ELASTO-PLASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH INTERNAL CRACK ALONG SPIRAL LINE**

*Using the distortion method and analogue of the  $\delta\epsilon$ -model the elastic-plastic problem on the stressed state of orthotropic cylindrical shell with internal crack along spiral line is reduced to the system of nonlinear singular integral equations. The dependence of crack opening displacements and sizes of the plastic zone from geometric and mechanical parameters is studied.*

**ТЕРМОПРУЖНА ПОВЕДІНКА БІМАТЕРІАЛУ, ПОСЛАБЛЕНОГО  
ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ МІЖФАЗНИХ ЗАПОВНЕНИХ ЩІЛИН  
З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ І ТИСКУ ГАЗУ**

**Христина Середницька**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[labmtd@iapmm.lviv.ua](mailto:labmtd@iapmm.lviv.ua)

Розглянемо біматеріальну площину, складену з матеріалів, які характеризуються коефіцієнтами Пуассона ( $\nu_1, \nu_2$ ), модулями зсуву ( $G_1, G_2$ ), коефіцієнтами лінійного теплового розширення ( $\alpha_1, \alpha_2$ ), коефіцієнтами теплопровідності ( $\lambda_1, \lambda_2$ ). На межі з'єднання матеріалів розташовані з періодом  $d$  щілини з однаковою довжиною  $2a$  та однаковою початковою висотою  $h_0(x)$ . Порожнини щілин заповнені газом з коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda_g$ . Вважаємо, що газ чинить тиск  $P_g$  на береги щілин. На нескінченності біматеріал підданий дії розтягувальних зусиль  $p$  і стаціонарного однорідного теплового потоку  $q$ , перпендикулярних до міжфазної лінії. Між берегами кожної щілини відбувається теплопередача за умови неідеального теплового контакту, що моделюється термоопором, залежним від розкриття щілини і змінним в процесі навантаження. Тиск газу на береги щілини визначено з рівняння Клапейрона-Менделєєва [1]. Сумарна дія щілин зумовлює додатковий перепад температури, який визначається усередненим стрибком температури  $\gamma_{ef}$ .

Використовуючи методику розв'язування задач термопружності для біматеріалів з міжфазними тріщинами [2], сформульовану задачу зведено до системи двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибка температури  $\gamma(x)$  між берегами щілини і її розкриття  $h(x)$ :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(t)}{t-\xi} dt + \frac{\lambda d \eta^-}{2(1+\xi^2)} (\gamma(\xi) - \gamma_{ef}) = -\frac{dG^*}{2(1+\xi^2)} (p + P_g) + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'_0(t)}{t-\xi} dt, \quad |\xi| < \alpha; \quad (1)$$

$$\frac{\gamma(\xi)}{(1+\xi^2)(h(\xi)/\lambda_g)} - \frac{\lambda}{2d} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\gamma'(t)}{t-\xi} dt = \frac{q}{(1+\xi^2)}, \quad |\xi| < \alpha; \quad (2)$$

де  $h(\pm\alpha) = 0$ ,  $\gamma(\pm\alpha) = 0$ ;  $\gamma_{ef} = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\gamma(\xi) d\xi}{1+\xi^2}$ ;  $P_g = \frac{m_g R T_g \pi}{dl \mu_g} \left( \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h(\xi) d\xi}{1+\xi^2} \right)^{-1}$ ,

$m_g$  – маса газу,  $R$  – газова стала,  $T_g$  – абсолютна температура газу,  $\mu_g$  – мо-

лярна маса газу,  $l = 1m$ ;  $\xi = tg\left(\frac{\pi x}{d}\right)$ ,  $\alpha = tg\left(\frac{\pi a}{d}\right)$ ;  $\lambda = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ ;

$$G^* = \frac{(1-\kappa_1\kappa)}{G_1(1-\kappa_2)}, \quad \eta^- = \eta_2 - \eta_1, \quad \kappa_n = 3 - 4\nu_n, \quad \eta_n = \alpha_n(1 + \nu_n)/\lambda_n, \quad n = 1, 2.$$

Систему рівнянь (1), (2), розв'язуємо за допомогою аналітично-числової процедури побудованої на основі методів послідовних наближень та колокацій. Проведено числовий аналіз залежностей тиску газу, розкриття щілин, стрибка температури між їх берегами та коефіцієнтів інтенсивності міжфазних напружень від прикладеного навантаження, теплопровідності та маси газу і щільності розташування тріщин.

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1966. – 404 с.
2. Мартиняк Р.М., Середницька Х.І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.

**THERMO-ELASTIC BEHAVIOR OF BIMATERIAL, WEAKENED BY A PERIODIC SYSTEM OF INTERFACE FILLED CRACKS TAKING INTO ACCOUNT THE THERMAL CONDUCTIVITY AND THE PRESSURE OF GAS**

*The thermo-stresses state of bimaterial with periodic system of interface cracks, filled with gas is investigated. The gas is heat-permeable and exerts pressure on the faces of cracks. The total action of cracks causes an additional temperature distribution, which determined average temperature jump between surfaces of cracks. The thermoelastic problem is reduced to a system of singular integro-differential equations for a temperature jump and a crack opening. The dependences of the opening of the cracks, the temperature jump and the stress intensity factors on the loads are given at infinity and the density and direction of the heat flow are analyzed. The dependence of gas pressure on the applied load, mass and thermal conductivity of gas is constructed.*

**ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНІСТЬ СТРУКТУРНО  
НЕОДНОРІДНИХ БІМАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ ІЗ НЕІДЕАЛЬНИМ  
ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ СКЛАДОВИХ**

**Георгій Сулим, Андрій Василюшин**

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

[gtsulym@gmail.com](mailto:gtsulym@gmail.com); [vasylvshyn.c.h@gmail.com](mailto:vasylvshyn.c.h@gmail.com)

Сучасні розвинуті високотехнологічні виробництва, особливо приладів точної механіки, все частіше використовують при виготовленні різноманітних пристроїв термомагнітоелектропружні матеріали. Останні є інтелектуальними композитами, створеними на основі механічного поєднання піроелектричних (сегнетоелектричних) та магнітострикційних (п'єзомагнітних) матеріалів. Це дає можливість пов'язати та перетворювати всередині одного матеріалу чотири поля різної фізичної природи (механічне, температурне, електричне та магнітне). Таким чином ці біматеріальні структури мають значні перспективи до впровадження у приладових та сенсорних системах, пристроях точного позиціонування тощо.

При створенні таких матеріалів, зазвичай, утворюється тонкий проміжний шар, який впливає на поля напружень та температур у всьому кусково-однорідному середовищі. Вплив цього шару зводять до умов неідеального теплового та магніто-електро-механічного контакту складових біматеріалу. Загалом, у науковій літературі [1, 2] виділяють два типи неідеальних теплових умов контакту тонкого шару із середовищем – висока та слабка теплопровідність, та два типи неідеальних механічних умов – податлива та жорстка межа контакту. При цьому для спрощення, зазвичай, моделювання структурно неоднорідного тіла зводиться до розгляду задач із плоскою межею контакту (інтерфейсом) двох півпросторів із різними властивостями, що в свою чергу можуть містити інші неоднорідності.

Таким чином постає наукове завдання побудови цілісних математичних моделей та методів аналізу біматеріальних термомагнітоелектропружних тіл, які можуть містити як дефекти структури, так і цілеспрямовано впроваджені тонкі прошарки, що змінюють властивості цих тіл.

На даний час інтенсивно розвиваються методи аналізу взаємодії механічного, електричного та магнітного полів в анізотропних інтелектуальних матеріалах. Ефективним методом при розв'язуванні таких задач є підхід, заснований на методах теорії функції комплексної змінної і формалізму Стро. Так, у роботі [3] одержано граничні інтегральні рівняння типу Сомільяни для

аналізу граничних елементів анізотропного термоелектропружного біматеріалу з отворами, тріщинами і тонкими вклученнями. Такий підхід застосовувався також у праці [4] для біматеріального твердого тіла з інтерфейсом типу Капіци.

У даній роботі розроблено математичну модель термомагнітоелектропружного біматеріального тіла з інтерфейсом високої теплопровідності та ідеальним магніто-електро-механічним контактом складових, що в свою чергу можуть містити тонкі деформівні вклученням. У замкнутій формі побудовано справді крайові інтегральні рівняння сформульованої задачі, а також метод граничних елементів, що дає можливість ефективного (високоточного та швидкого) її розв'язування. Особливістю запропонованого граничноелементного підходу є застосування принципу спряження континуумів різної вимірності при моделюванні тонких вклучень. Усе це дає можливість розв'язувати із високою точністю задачі термомагнітоелектропружності для біматеріальних тіл з інтерфейсом високої теплопровідності із тонкими стрічковими деформівними вклученнями чи тріщинами, що не вдавалося зробити до цього часу застосуванням традиційних числових підходів, зокрема методів граничних чи скінченних елементів.

1. *Kaessmair S., Javili A., Steinmann P.* Thermomechanics of solids with general imperfect coherent interfaces // *Archive of Applied Mechanics.* – 2014. – **84**, No. 9-11. – P. 1409-1426.
2. *Benvensite Y.* A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2006. – **54**. – P. 708-734.
3. *Pasternak I., Pasternak R., Sulym H.* Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2014. – **48**. – P. 87-101.
4. *Pasternak I., Pasternak R., Sulym H.* 2D boundary element analysis of defective thermoelectroelastic bimaterial with thermally imperfect but mechanically and electrically perfect interface // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2015. – **61**. – P. 194-206.

#### **THERMOMAGNETOELECTROELASTICITY OF STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS BIMATERIAL SOLIDS WITH THERMALLY IMPERFECT INTERFACE**

*This work studies the problem of an thermomagnetoelastic anisotropic bimaterial with imperfect high temperature-conducting coherent interface, which components contain thin inclusions. Using the extended Stroh formalism and complex variable calculus the Somigliana type integral formulae and corresponding boundary integral equations for the anisotropic thermomagnetoelastic bimaterial with high temperature-conducting coherent interface are obtained. These integral equations are introduced into the modified boundary element approach. The numerical analysis of new problems is held and results are presented.*



**ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНІСТЬ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ПРОСТОРОВИМИ НИТЧАСТИМИ ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

**Георгій Сулим, Наталія Ільчук, Ярослав Пастернак**

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України;*

*Луцький національний технічний університет (Україна)*

[gtsulym@gmail.com](mailto:gtsulym@gmail.com); [n.ilchuk@lntu.edu.ua](mailto:n.ilchuk@lntu.edu.ua), [iaroslav.m.pasternak@gmail.com](mailto:iaroslav.m.pasternak@gmail.com)

При виготовленні конструкційних елементів сучасних машино-, авіа- та ракетобудування часто використовуються композитні матеріали, що складаються із регулярно чи стохастично заповненої включеннями (волокнами, плівками) основи. Це дає можливість оптимізувати вагу конструкції, змінювати її утримувальну здатність чи жорсткість у бажаному напрямі, а завдяки введенню п'єзоелектричних чи магнітострикційних включень – моніторити її внутрішній стан.

На даний час, з огляду на стрімкий розвиток обчислювальних методів механіки деформівного твердого тіла, включення варто поділити на 3 класи, зважаючи на їхні геометричні особливості: 1) глобулярні; 2) тонкі стрічкові чи оболонкові; 3) нитчасті. Теорія композитних матеріалів із глобулярними включеннями бере свій початок від робіт Дж. Ешелбі [2], де вивчено напружено-деформований стан пружних тіл із еліпсоїдними неоднорідностями. Водночас зрозуміло, що у випадку істотної відмінності розмірів включення у різних напрямках слід застосовувати спеціальні методи дослідження фізико-механічних полів у структурно-неоднорідному матеріалі, з огляду на появу математичних особливостей розв'язків відповідних задач. Так виникла теорія тонкостінних включень, докладний виклад якої подано у монографії [1].

Проте практично поза увагою дослідників залишився клас задач термомеханіки нитчастих неоднорідностей, дослідження якого однак є основою для побудови теорії волокнистих композитів, зокрема фібро-бетонів, нанокомпозитів тощо. Існують лише поодинокі дослідження голчастих включень на основі аналітичного розв'язку [2].

У цій роботі продовжуються нещодавно започатковані [3] дослідження тіл із просторовими нитчастими включеннями. Останні моделюються просторовою кривою із наперед невідомою густиною розподілених уздовж неї сил (зарядів) та джерел тепла. Для визначення невідомих функцій густини для абсолютно жорсткого ідеально теплопровідного нитчастого включення отрима-

но гіперсингулярні інтегральні рівняння з симетричними ядрами особливості  $O(1/r)$ :

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}_0) = \theta^0 - \theta^\infty(x_0), \quad (1)$$

$$\int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \tilde{p}_J(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + A_{IJ}(\mathbf{x}_0) \tilde{p}_J(\mathbf{x}_0) + \int_L V_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) = \tilde{u}_I^0 + \tilde{\varepsilon}_{Ijk} \omega_j^0 x_{0k} - \tilde{u}_I^\infty(\mathbf{x}_0). \quad (2)$$

Тут  $\gamma(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{p}_J(\mathbf{x})$  – відповідно шукані розподіли джерел тепла та зусиль (електричних зарядів та струмів) на лінії  $L$  нитчастого включення;  $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ ,  $U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ ,  $V_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  – фундаментальні розв’язки теплопровідності, магнітоелектропружності та термомагнітоелектропружності;  $B(\mathbf{x}_0)$ ,  $A_{IJ}(\mathbf{x}_0)$  – коефіцієнти, що залежать від властивостей матеріалу та дотичної до гладкої кривої  $L$  у точці  $\mathbf{x}_0$ ;  $\theta^0$ ,  $\tilde{u}_I^0$ ,  $\omega_j^0$  – температура, розширені переміщення та поворот включення;  $\theta^\infty(x_0)$ ,  $\tilde{u}_I^\infty(\mathbf{x}_0)$  – поля температур та розширених переміщень, зумовлених прикладеним на безмежності навантаженням.

Для розв’язування інтегральних рівнянь (1), (2) створено схему методу граничних елементів, що використовує модифіковані квадратурні формули Кутта та спеціальні розривні граничні елементи. Це дає можливість швидкого та високоточного числового розв’язування рівнянь (1), (2). Досліджено числові приклади. Здійснено верифікацію результатів шляхом порівняння із даними, отриманими на основі аналітичного розв’язку для голчастого включення та числового на основі методу скінченних елементів. В останньому випадку обґрунтовано переваги застосування запропонованого підходу.

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // Proc. of Royal Society of London. – 1957. – A241. – P. 376-396.
3. Sulym H., Ilchuk N., Pasternak Ia. Heat conduction in anisotropic medium with perfectly conductive thread-like inclusions // Conf. Proc. of 10<sup>th</sup> Int. Symp. on Mechanics of Materials and Structures (Augustow, June 2-6, 2019). – P. 107-108.

#### THERMOMAGNETOELECTROELASTICITY OF ANISOTROPIC SOLIDS WITH SPATIAL THREAD-LIKE RIGID INCLUSION

*This study derives integral equations for thermomagnetoelastic solids with thread-like inclusions and presents boundary element method for their solution.*

## ЧИСТИЙ ЗГИН БАЛКИ З ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ СМУГ БІЛЯ ЇЇ ВЕРШИН

**Георгій Сулим, Віктор Опанасович, Микола Слободян, Оксана Білаш**

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України;*

*Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного (Україна)*

[gtsulym@gmail.com](mailto:gtsulym@gmail.com)

В роботі досліджено задачу про чистий згин смуги (балки) з прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки  $2l$ , яка є перпендикулярною до осі балки з центром на відстані  $x_0$  від неї. Нехай  $2h$  – висота поперечного перерізу балки, а  $2\tilde{a}$  – її ширина. Вважаємо, що балка перебуває в умовах чистого згину зі згинальним моментом  $M$ . Вісь  $Oy$  декартової системи координат  $xOy$  спрямовуємо вздовж осі балки, а вісь  $Ox$  – уздовж осі тріщини. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження і вона розміщена в області напружень розтягу, її кінці мають координати  $(a, 0)$  і  $(b, 0)$ . Вважаємо, що біля вершини тріщини на її продовженні утворилися вузькі смуги пластичності, де нормальні напруження дорівнюють межі текучості матеріалу балки  $\sigma_Y$ . При цьому кінці цих смуг мають координати на осі  $Ox$   $d_2$  і  $a$  та  $b$  і  $d_1$  (рис. 1). Лінію розташування тріщини на осі  $Ox$ , позначимо через  $L$ , а пластичні смуги завдовжки  $\Delta_1 = d_1 - b$  і  $\Delta_2 = a - d_2$  – відповідно через  $L_1$  і  $L_2$ . Окрім того, введемо позначення  $\tilde{L}_1 = L_1 + L_2$  і  $\tilde{L} = L + \tilde{L}_1$ .

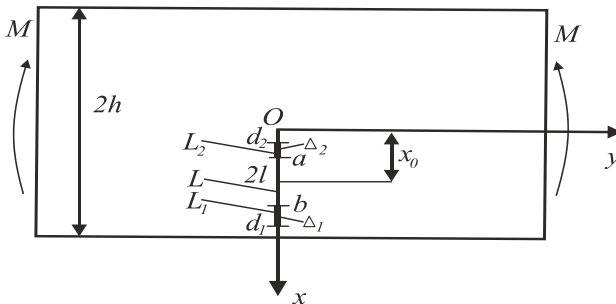


Рис. 1 Схема навантаження балки та розташування тріщини з пластичними смугами

Сформульованій задачі відповідають такі крайові умови

$$\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in \tilde{L}, \quad \sigma_{yy}^{\pm} = 0, \quad x \in L, \quad \sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_Y, \quad x \in \tilde{L}_1,$$

де  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень; індексами «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини при  $y \rightarrow \pm 0$ .

Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали [1] розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, отримано їх аналітичний розв'язок в класі функцій обмежених на кінцях пластичних смуг, а для знаходження довжини  $\Delta_i$  ( $i=1,2$ ) пластичних смуг у вершинах тріщини отримано систему трансцендентних рівнянь:

$$2[\arccos(a_1) + \arccos(a_2)] = \tilde{\sigma}\pi(2\tilde{x} + w_1 - w_2),$$

$$\tilde{\sigma}\gamma_1^2\pi\left(\sqrt{w_2(2+w_1)} + \sqrt{w_1(2+w_2)}\right) = 16(w_1 - w_2),$$

де  $\tilde{x} = x_0/l$ ,  $w_i = \Delta_i/l$ ,  $a_i = 1 - 2w_i/\gamma_1$  ( $i=1,2$ ),  $\gamma_1 = 2 + w_1 + w_2$ ,  $\tilde{\sigma} = 3Ml/(4\tilde{a}h^3\sigma_Y)$ .

Розходження  $\delta_b$  берегів тріщини у її вершині  $b$  знайдемо за формулою

$$\frac{2\mu\delta_b}{\sigma_Y l(1+k)} = \frac{\gamma_1}{2} \left[ \frac{\gamma_1 \tilde{\sigma}}{4} \left( a_1 \sqrt{1-a_1^2} - \arccos a_1 \right) - \frac{1}{\pi} (\gamma_3 + \gamma_2 \arccos a_1) \right],$$

де  $\mu$  – модуль зсуву,  $k$  – стала Мусхелішвілі [1],  $\gamma_2 = \sqrt{1-a_1^2} - \sqrt{1-a_2^2}$ ,

$$2\gamma_3 = (a_1 - a_2) \ln \left\{ \left[ 1 - a_1 a_2 - \sqrt{(1-a_1^2)(1-a_2^2)} \right] / \left[ 1 - a_1 a_2 + \sqrt{(1-a_1^2)(1-a_2^2)} \right] \right\}.$$

Проведено числовий аналіз задачі.

1. Панасюк В.В., Лозовий Б.Л. Згин полос із прямолінійною щілиною // Прикл. механіка. – Т. 7. – № 6. – 1961. – С. 627-634.

#### CLEAN BEND OF TYPE (BEAM) WITH CRACK IN THE ZONE OF STRETCHING STRESSES WITH AT PRESENCE OF PLASTIC ZONES IN HER TIPS

*The problem of clean bend of type (beam) with straight slot crack, which is perpendicular to her axis and is located in the zone of stretching stresses, and at her tops are situated narrow plastic zones is investigated. Using methods the theory of complex variable and complex potentials, the solving of problem is reduced to problems of linear conjunction, solution of some of them is received in the class of functions limited in the end of plastic zones and dependences for finding their lengths are obtained. Expression for definition crack opening in her tips are recorded. Numerical analysis of the problem is conducted.*

## КРИТИЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА ЗІ СИСТЕМОЮ ТРІЩИН З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ ЗА ЗГИНУ

Георгій Сулим, Віктор Опанасович, Ігор Яцик

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

[kafmech@lnu.edu.ua](mailto:kafmech@lnu.edu.ua); [ihoryatsyk85@gmail.com](mailto:ihoryatsyk85@gmail.com)

Досліджено задачу про згин рівномірно розподіленими згинальними моментами  $M_x^\infty$ ,  $M_y^\infty$  та  $H_{xy}^\infty$  на нескінченності ізотропної пластини завтовшки  $2h$  зі системою наскрізних прямолінійних тріщин завдовжки  $2l_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) (рис. 1). Вважаємо, що під впливом зовнішнього навантаження береги тріщин зазнають гладкого контакту вздовж усієї довжини тріщин. Зона контакту є смугою сталої ширини  $h_1$ , що прилягає до верхньої основи пластини. До деформування пластини береги тріщин були вільними від зовнішнього навантаження.

Виберемо декартову систему координат  $Oxy\bar{z}$  з координатною площиною  $Oxy$  у серединній площині пластини.

Введемо також локальні системи координат  $O_k x_k y_k$  з початками у точках  $O_k(x_k^0; y_k^0)$ , що збігаються з геометричними центрами  $k$ -ї тріщини, і осями  $O_k x_k$  та  $O_k y_k$ , відповідно уздовж та перпендикулярно до лінії  $k$ -го дефекту. Відрізок дійсної осі  $O_k x_k$ , для якого  $|x_k| \leq l_k$ , позначимо через  $L_k$ .

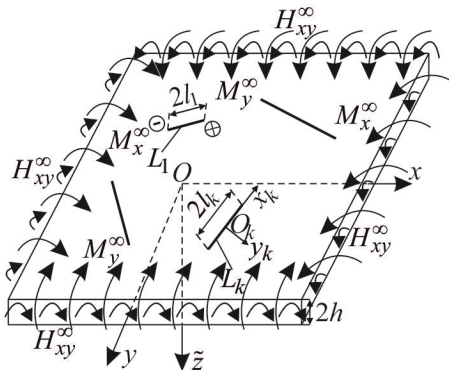


Рис. 1 Схема навантаження та розміщення тріщин у пластині

Для урахування контакту берегів тріщин розв'язок задачі розглядаємо як суперпозицію двох: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

Відповідно до цього вимагатимемо на берегах  $k$ -ої тріщини виконання таких крайових умов:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_k y_k}^+ &= \sigma_{y_k y_k}^- = -N_k / (2h), \quad \sigma_{x_k y_k}^+ = \sigma_{x_k y_k}^- = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = \overline{1, N}; \\ M_{y_k}^\pm &= M_k, \quad Q_{y_k}^\pm = 0, \quad H_{x_k y_k}^\pm = 0, \quad M_k = (1 - \gamma/3) h N_k, \quad x_k \in L_k, \quad k = \overline{1, N}; \\ \partial_x [v_{p_k}] - 0,5 \left\{ 1 + (1 - \gamma)^2 \right\} h \partial_{x_k} [\varphi_{y_k}] &= 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

де  $\sigma_{x_k y_k}$ ,  $\sigma_{y_k y_k}$  та  $v_{p_k}$  – відповідно компоненти тензора напружень та проекція вектора переміщення точки пластини на вісь  $O_k y_k$  у плоскій задачі;  $\varphi_{y_k}$  – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину;  $M_{y_k}$  – згинальний момент;  $Q_{y_k}$  і  $H_{x_k y_k}$  – поперечна сила і крутний момент відповідно;  $\partial_{x_k} = \partial / \partial x_k$ ,  $[f] = f^+ - f^-$ ; символами «+» і «-» позначені відповідно граничні значення функції при прямуванні точки площини до берегів тріщин при  $y_k \rightarrow \pm 0$ ;  $\gamma = h_1 / h$  – зведена ширина області контакту;  $N_k$  – контактне зусилля між берегами тріщини.

За допомогою методів теорії функції комплексної змінної, комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини [1] отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно похідних від стрибків переміщень, усереднених за товщиною пластини кутів повороту нормалі до серединної площини пластини, поперечних сил і крутних моментів, яка розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур. У часткових випадках отримано відомі в літературі результати для однієї, двох і періодичної системи співвісних тріщин, коли контакт відбувається вздовж лінії на одній з основ пластини. Здійснено числовий аналіз задачі та побудовано графічні залежності для критичного навантаження, що може бути прикладеним до пластини, при різних значеннях параметрів задачі.

1. Мазурак Л.П., Бережницький Л.Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.

#### CRITICAL LOAD OF REISSNER'S PLATE BENDING CONTAINING SYSTEM OF CRACKS TAKING INTO ACCOUNT CONTACT ZONE WIDTH OF THEIR FACES

*In the paper stressedly-deformed state of the boundless isotropic plate with a straight through-the-thickness cracks system is investigated which faces are free of the external loading. The plate is under the loading by the evenly distributed bending moments on the infinity. It is assumed that the cracks faces are in the smooth contact on all cracks length on a two-dimensional region on overhead basis of plate. The numerical analysis of the problem solution is conducted.*

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МІЖФАЗНОГО РОЗРІЗУ МІЖ  
НЕСКІНЧЕННОЮ ПЛАСТИНКОЮ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ  
І ПРУЖНИМ ЗАМКНЕНИМ РЕБРОМ**

**Андрій Сяський, Наталія Шевцова, Олег Дейнека**

*Рівненський державний гуманітарний університет (Україна);*

*Національний університет водного господарства та природокористування (Україна)*

[AndriySyasky@gmail.com](mailto:AndriySyasky@gmail.com); [Shevtsova\\_nv@ukr.net](mailto:Shevtsova_nv@ukr.net); [Dejneka\\_7@ukr.net](mailto:Dejneka_7@ukr.net)

Пропонується розв'язок мішаної контактної задачі для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором, контур якого підсилений замкненим пружним кільцем сталого прямокутного поперечного перерізу  $2h_1 \times 2\eta_1$ , за наявності на межі їх зварювання симетричного міжфазного розрізу малої ширини, береги якого в процесі деформації не контактують. Пластинка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності, створеного зусиллями  $p$  і  $q$ , що діють у напрямках координатних осей. Спільна серединна площина пластинки і ребра віднесена до полярної системи відліку  $(\rho, \lambda)$  з полюсом в центрі отвору.

Моделюючи ребро замкненим пружним стрижнем, поверхня сполучення якого з пластинкою не співпадає з його серединною поверхнею, а зварювальний шов – частиною безмоментної циліндричної тонкої оболонки товщиною  $b_0$  і висотою  $2h$ , отримано умови сумісності деформацій пластинки, зварювального шва і підсилювального ребра:

$$\begin{aligned}
 & (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_1(\lambda, t)T_\rho(\lambda) + \Phi_2(\lambda, t)S_{\rho\lambda}(\lambda)] dt + \alpha\tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + \beta\tilde{\nu}^0 = \\
 & = E_0F_0\delta(\lambda)N^{(0)}(\lambda)/(E_1F_1); \quad \delta(\lambda) = 2Eh(\alpha^2 + \beta^2)/(E_0F_0); \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\
 & \frac{E_0F_0}{E_1F_1} N^{(0)}(\lambda) = -N_0 \cos\theta + \tilde{N} + \frac{\eta_1 + \eta_c}{\rho} \cdot \frac{\rho - \eta_1}{\omega_0} \left( L_b^0 + (x - x_0 - \eta_1(1 + \cos\theta))N_0 + \tilde{L}_b \right); \\
 & (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)S_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_1(\lambda, t)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \Phi_2(\lambda, t)T_\rho(\lambda)] dt + \alpha\tilde{\nu}^0 - \beta\tilde{\varepsilon}_\lambda^0 = \\
 & = \delta(\lambda) \int_0^\lambda \left[ -N_0 \cos\theta + \tilde{N} + \frac{\rho - \eta_1}{\omega_0} \left( L_b^0 + (x - x_0 - \eta_1(1 + \cos\theta))N_0 + \tilde{L}_b \right) \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda \quad (1)
 \end{aligned}$$

та диференціальні рівняння рівноваги елемента стрижня:

$$\begin{aligned}
 T_p(\lambda)\rho d\theta &= (\tilde{N}(\lambda) + N^{(0)}(\lambda))d\theta - d\tilde{Q}(\lambda); \\
 \tilde{L}_b(\lambda) - \eta_1 \tilde{N}(\lambda) - \int_{-\alpha_0}^{\lambda} \tilde{Q}(\lambda) |\omega'(\sigma)| d\lambda &= 0; \\
 S_{p\lambda}(\lambda)\rho d\theta + dN^{(0)}(\lambda) &= -\tilde{Q}(\lambda)d\theta - d\tilde{N}(\lambda), \tag{2}
 \end{aligned}$$

де  $T_p$ ,  $S_{p\lambda}$  – контактні зусилля на межі сполучення зварювального шва і пластинки;  $N^{(0)}$  – поздовжня сила у шві;  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{L}_b$  – поздовжня і поперечна сили та згинальний момент, що виникають у поперечних перерізах стрижня, які викликані контактними зусиллями;  $N_0$ ,  $L_b^0$  – поздовжня сила і згинальний момент в умовному поперечному перерізі стрижня площиною  $\theta = -\pi$ ;  $E_1 F_1$  – жорсткість шва на розтяг (стиск). Решта позначень наведені в [2].

Співвідношення (1), (2) разом із умовами однозначності зміщень і кутів повороту стрижня [2] визначають повну систему рівнянь для визначення функцій  $T_p$ ,  $S_{p\lambda}$ ,  $N^{(0)}$ ,  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{L}_b$ , сталих  $N_0$ ,  $L_b^0$  та складають математичну модель поставленої задачі.

У процесі розв’язання задачі встановлено, що функції  $N^{(0)}$ ,  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{L}_b$  обмежені та неперервні на проміжку  $[-\alpha_0; \alpha_0]$ , а на його кінцях дорівнюють нулю. Контактні зусилля на кінцях проміжку мають кореневу особливість, на яку накладається локальна осциляція.

Наближений розв’язок побудовано методом механічних квадратур і колокації [1], яким встановлено залежність напруженого стану елементів розглянутої конструкції від відносної жорсткості зварювального шва.

1. Сяський А.О., Батишкіна Ю.В. Контактна взаємодія розіркнених стрижнів змінної жорсткості з еліптичним отвором нескінченної ортотропної пластинки // Вісник Терн. держ. техн. ун-ту. – 2004. – 9, № 3. – С. 17-24.
2. Сяський А.О., Шеєцова Н.В., Дейнека О.Ю. Міжфазний розріз в ізотропній пластинці з криволінійним контуром, підсиленням замкненим пружним ребром // Вісник Хмельн. нац. ун-ту. – 2019. – № 3 (271). – С. 18-23.

#### MATHEMATICAL MODEL OF INTERPHASE INCISION BETWEEN AN INFINITE PLATE AND AN ELASTIC CLOSED RIB

*The mathematical model of the mixed contact problem for an infinite isotropic plate with an curvilinear hole, whose contour is amplified by a closed elastic rib, is considered in the presence of a symmetric interfacial section of a small width at the boundary of their weld, the shores of which in the process of deformation are not in contact. By the method of mechanical quadratures and collocation investigated the effect of the stiffness of the welding seam on the distribution of the components of the stressed state along the contour of the hole in the plate in the welding seam and the elastic rib.*



**AXIALLY SYMMETRIC STRESSED STATE OF A UNIFORMLY  
LAYERED SPACE WITH A PERIODIC SYSTEM  
OF INTERNAL DEFECTS****Vahram Hakobyan***Institute of Mechanics, National Academy of Sciences (Armenia)*[vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

Two problems on the axially symmetric stress state of a piecewise-homogeneous, uniformly layered space, obtained by alternately sequenced junction of two heterogeneous layers of the same thickness, are considered. In the first problem, it is assumed that the space on the median planes of heterogeneous layers contains periodic systems of circular disk-shaped parallel cracks. In the second problem, it is considered that the space on the middle planes of one of the heterogeneous layers contains a periodic system of circular disk-shaped parallel cracks, and on the middle planes of the second of heterogeneous layer contains a periodic system of circular disk-shaped parallel absolutely rigid inclusions. Both problems are formulated as boundary value problems for basic cells, separated as two-component layers. Using the integral Hankel transform, the problems are reduced to a system of integral equations with Weber–Sonin kernels with respect to either crack opening in heterogeneous layers (for the first problem) or the tangential contact stresses acting on front sides of inclusions and crack opening (for the second problem). With the help of rotation operators, the resulting governing systems of equations are reduced to a system of Fredholm integral equations of the second kind with respect to the derivatives of the cracks in heterogeneous layers in the first case and a derivative of the reduced cracks and the reduced tangential contact stresses acting under the inclusions in the second case.

The numerical analysis was carried out and the regularities of changes in the intensity factors of destructive stresses and crack opening within the first problem, and the intensity factors of destructive stresses, crack opening, as well as normal and tangential contact stresses under the inclusions depending on the physical and mechanical and geometric characteristics of the problem were revealed. As expected, the mutual influence of cracks and inclusions increases with their approach.

In the case of the removal of cracks from each other (the first problem), or cracks from inclusions (the second problem), the cracks work as separate, single disk-shaped cracks in homogeneous spaces, and the contact stresses on the face of

the inclusions disappear.

It is also shown [1, 2] that the rigidity increment of the second layer, when the rigidity of the first layer does not change, leads in both problems to the decrement in both the intensity factors of destructive stresses and opening of cracks. Some interesting results were obtained for the second problem when studying the patterns of changes in the contact stresses on facial sides of inclusion depending on the ratio of the radii of the circles of cracks and inclusions. It is shown that with an increase in the radius of inclusions, zones are formed where the normal contact stresses acting on the front sides of the inclusions are tensile, which can lead to the detachment of inclusions from the matrix. It is also interesting that the tangential contact stresses on the bordering circles of inclusions have a root singularity, and the normal contact stresses on these circles are bounded.

This study was carried out with the financial support of the Committee on Science and Education of the Ministry of Education and Science of the Republic of Armenia and the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) within the framework of the joint research project SCS 18RF061 and RFBR 18-51-05012.

1. *Hakobyan V.N., Hakobyan L.V., Dashtoyan L.L.* The discontinuous solutions of axis-symmetrical theory of elasticity for piecewise homogeneous, layered space with periodical interphase disk-shaped defects // *Mechanics of Composite Materials*. – 2019. – **55**, No. 1. – P. 2-24 [in Russian].
2. *Hakobyan V., Dashtoyan L., Murashkin E.* The axis-symmetrical stress state of piecewise layered space with periodical inner disk-shaped cracks / in Proc. IX<sup>th</sup> Int. Conf. “The Problems of Dynamics of Interaction of Deformable Media”, Goris, Armenia, October 1-6, 2018. – P. 29-33 [in Russian].

**STRESS STATE OF A COMPOUND PLANE WITH AN INTERFACE RIGID INCLUSION AND A CRACK HAVING COMMON TIP**

**Vahram Hakobyan, Avetik Sahakyan, Harutyun Amirjanyan**

*Institute of Mechanics, National Academy of Sciences (Armenia)*

[vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am); [avsahakyan@gmail.com](mailto:avsahakyan@gmail.com); [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

The plane stress state of a compound elastic plane, containing a finite crack and an absolutely rigid thin inclusion on the junction line between two heterogeneous half-planes, is considered. The crack and inclusion continue each other and have a common end (Fig. 1).

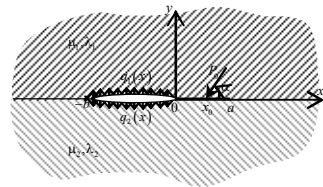


Fig. 1

Using the discontinuous solutions of the Lamé equations for the composite plane with interface defects, the governing system of singular integral equations of the problem is derived with respect to the stress jump function acting on the front sides of the inclusion and the dislocation of displacements of the points of the crack edges [1]. In dimensionless values, it has a form, where coefficients are the combinations of elastic constants of half-planes,

$$\begin{cases} l_1\varphi(t) + \frac{il_3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s)}{s-t} ds + \frac{il_2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(s)}{s+1+b(1-t)/a} ds = g_1(t), \\ d_0\psi(t) - \frac{id_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(s)}{s-t} ds - \frac{il_2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s)}{s-1-a(1+t)/b} ds = g_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(s) ds = 0, \quad \int_{-1}^1 \psi(s) ds = 2P_0^* (\sin \alpha - i \cos \alpha) = -2iP_0^* \exp(i\alpha).$$

The behaviour of unknown functions at the end points of the defects is studied and the solution of the system (1) is being sought in the following form:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1-2\nu_1}{2\mu \cos \pi\alpha_1} \Phi(t)(1-t)^{\alpha_1}(1+t)^\beta + \Psi(t)(1-t)^{\alpha_2}(1+t)^\beta, \\ \psi(t) &= \Phi(t)(1-t)^\gamma(1+t)^{\alpha_1} + \frac{2\cos \pi\alpha_2}{1-2\nu_2} \Psi(t)(1-t)^\gamma(1+t)^{\alpha_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

where the new unknown functions will be the  $\Phi(t)$  and  $\Psi(t)$  satisfying the Hölder continuity condition on the interval  $[-1,1]$  and

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi} \ln \kappa_1, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \ln \kappa_2, \quad \kappa_j = 3 - 4\nu_j, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

$$\beta = -\frac{1}{2} - i\theta, \quad \gamma = -\frac{1}{2} + i\left(\theta + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right), \quad \theta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \mu \kappa_2}{\mu + \kappa_1}.$$

The solution to the problem is constructed by making use of the method of mechanical quadratures [2]. The regulations of changes in the contact stresses acting on the front sides of the inclusion, crack opening and the Cherepanov-Rice  $J$ -integral at the end point of the crack are revealed, depending on the physical, mechanical and geometric parameters of the problem. In Fig. 2, for example, the curves of Cherepanov–Rice  $J$ -integral dependence on the ratio of shear modules  $\mu = \mu_1 / \mu_2$  are shown at different values of Poisson ratio.

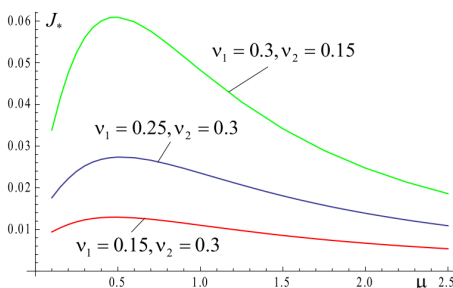


Fig. 2

Unlike the analogous problem for a homogeneous plane that allows closed solution, the heterogeneity of the half-planes and the presence on the junction line of a system of stress concentrators consisting of crack and inclusion that continue each other, significantly complicates the solution of the problem, since it does not allow to obtain an analytical solution by known methods developed for contact problems of the theory of elasticity. An algorithm for the numerical-analytical solution of the stated problem of the theory of elasticity for a piecewise homogeneous plane by the method of mechanical quadratures is proposed.

1. *Hakobyan V.N.* Mixed boundary value problems on interaction of continuum deformable bodies with different types stress concentrators. – Yerevan: Gitutyun, 2014. – 322 p. [in Russian].
2. *Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A.* Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series – 2018. – 991 012070. – DOI:10.1088/1742-6596/991/1/012070.

**ДИНАМІКА НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ**

УДК 539.3

**ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ СИМЕТРИЧНИХ  
ШАРУВАТИХ БАЛОК З МАГНЕТОРЕОЛОГІЧНИМИ  
ПРОШАРКАМИ**

**Ігор Бутитер, Богдан Дівесв, Геннадій Черчик**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Національний університет «Львівська політехніка» МОН України;*

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України*

Шаруваті композитні тонкостінні елементи з керованими властивостями все частіше застосовують у конструкціях сучасних об'єктів. Порівняно з ізотропними металевими одношаровими пластинами та оболонками вони володіють поліпшеними властивостями, через що ефективніші у використанні. Віб्राції в шаруватих пластинах контролюють магнетореологічними віскоеластомерами (МРВЕ). Тому тут важливо прогнозувати динамічні характеристики таких елементів, зокрема розсіювання енергії (демпфування), контролюване прикладеним магнетним полем.

МРВЕ звичайно складаються зі силіконової гуми і розподілених пропорційно карбонатних часток заліза. Вони поєднують такі динамічні характеристики магнетореологічної рідини і гнучкого еластичного полімеру, як контрольована жорсткість і частотно залежне демпфування, які можуть змінюватися за мілісекунди зі зміною магнетного поля. Для визначення характеристик шаруватих структур з МР шарами застосовували, як правило, класичні моделі. Досліджували тришарові конструкції (сандвічі) з внутрішнім магнетним шаром, вживаючи і аналітичні методи, і метод скінченних елементів [1-4].

Для знаходження характеристик шаруватих композитів користуються різними числовими схемами, які тісно корелюють з відомими числовими моделями визначення динаміки композитних шаруватих пластин. Порівняльний аналіз теорій шаруватих елементів за різних умов навантаження наведено в [5]. Для дослідження динаміки тонкостінних елементів все частіше залучають теорії високого порядку. Тут найважливіше визначити демпфуючі властивості тонкостінних шаруватих елементів конструкцій, які використовують в аерокосмічній техніці, машинобудуванні. У даній роботі використаний адаптивний алгоритм розрахунку шаруватих структур на основі узагальнених кінематичних апроксимацій і класичного методу Гальоркіна для системи рів-

нянь лінійної теорії пружності [6, 7].

За розробленими уточненими розрахунковими схемами визначено вплив магнетного поля в шаруватій балці на її амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) і демпфування. Дію магнетного поля на МР шар враховано введенням комплексного модуля зсуву шару в залежності від напруженості магнетного поля і частоти коливаль. Досліджено механічні коливання консольної і вільно опертої шаруватих балок з різними МР матеріалами внутрішніх шарів і з різними матеріалами зовнішніх жорстких шарів, такими як алюміній, мідь, композит. Якісний характер АЧХ і демпфування балок подібний для всіх матеріалів обкладинок. Розглянуто чотири типи МР матеріалів: три – з частотно незалежними параметрами [1–3], четвертий – із залежними від частоти і напруженості магнетного поля модулями пружності [4]. Порівняно динамічні характеристики три- і п'ятишарової балок за малих магнетних полів. Виявлено, що п'ятишарова балка має дещо більше демпфування (за інтенсивності магнетного поля 150 Гс), ніж тришарова з подібним розподілом матеріалів (сумарна товщина МР шарів і жорстких однакова).

1. *Ramesh Babu V. and Vasudevan R.* Dynamic analysis of tapered laminated composite magnetorheological elastomer (MRE) sandwich plates // *Smart Mater. Struct.* – 2016. – **25**. – P. 035006 (19 p.).
2. *Rajamohan V., Rakheja S., Sedaghati R.* Vibration analysis of a multi-layer beam containing magnetorheological fluid // *Smart Mater. Struct.* – 2010. – **19**. – P. 015013 (12 p.).
3. *Manoharan R., Vasudevan R., Jeevanantham A.K.* Dynamic characterization of a laminated composite magnetorheological fluid sandwich plate // *Smart Mater. Struct.* – 2014. – **23**. – P. 025022 (16 p.).
4. *Eshaghi M., Rakheja S., Sedaghati R.* An accurate technique for pre-yield characterization of MR fluids // *Smart Mater. Struct.* 2015. – **24**. – P. 065018 (13p).
5. *Potier-Ferry M., Daya El.M., Hu H., Belouettar S.* Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites // *Comp. Struct.* – 2008. – **84**. – P. 282-292.
6. *Diveyev B., Butyter I., Shcherbyna N.* Influence of fixation conditions and material anisotropy on frequency spectrum of laminated beams // *Mechanics of Composite Materials.* – **47**, No. 2. – May 2011. – P. 149-160.
7. *Diveyev B., Kohut S., Butyter I., Cherchyk H.* Determination of energy dissipation in layered beams under vibratory loads // *Materials Science.* – **52**, No. 6. – May 2017. – P. 786-794.

#### INVESTIGATION OF MECHANICAL VIBRATIONS OF SYMMETRIC LAYERED BEAMS WITH MAGNETORHEOLOGICAL LAYERS

*The dynamic characteristics of the layered plates consisting of rigid outer layers and inner layers with magneto-rheological (MR) properties are analyzed. The magnetic field influence on the frequency and the loss factor for various MR layers and face layers is evaluated. The proposed refined theoretical model includes the deformations of each layer and takes into account the effects of deformation of the transverse shear, transverse normal deformation, and nonlinear displacement changes with respect to the plates thickness.*

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН В ОКОЛІ СФЕРОЇДАЛЬНОГО  
НАНОВКЛЮЧЕННЯ З ПОВЕРХНЕВИМ НАТЯГОМ  
ЗА ХВИЛЬОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

**Іванна Бутрак**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[butrak@ukr.net](mailto:butrak@ukr.net)

Композитні матеріали нанорозмірної структури стають все більш поширеними у повсякденному житті через їх унікальні механічні, теплові, електронні та оптичні властивості. Для структурно-неоднорідних матеріалів властива значна концентрація напружень на міжфазних поверхнях, яка є результатом взаємодії включень з матрицею. При моделюванні наноструктурних матеріалів широко використовується теорія поверхневих напружень [1-3], згідно з якою має місце неперервність переміщень і стрибок напружень. У даній доповіді розглянуто задачу взаємодії сфероїдального нановключення у пружній ізотропній матриці з пружною хвилею переміщень. Здійснено інтегральні подання пружних полів у матриці та нановключенні за допомогою потенціалів типу Гельмгольца, а також виведено граничні інтегральні рівняння відносно міжфазних переміщень та зусиль. Запропоновано алгоритми для числового розв'язання цих рівнянь.

Робота виконана за підтримки НАНУ-УНТЦ (проект № 6247).

1. *Kushch V.I., Shmegeera S.V., Mykhas'kiv V.V.* Multiple spheroidal cavities with surface stress as a model of nanoporous solid // *Int. J of Solids and Structures*. – 2018. – **152-153**. – P. 261-271.
2. *Parvanova S.L., Manolis G.D., Dineva P.S.* Wave scattering by nanoheterogeneities embedded in an elastic matrix via BEM // *Engineering with boundary Elements*. – 2015. – P. 57-69.
3. *Rahimzadeh M.* Elastic wave propagation in nano-composites with random distribution of spherical inclusions // *Latin American J of Solids and Structures*. – 2013. – **10**. – P. 813-831.

**STRESS STATE IN THE VICINITY OF A SPHEROIDAL NANOINCLUSION WITH A  
SURFACE TENSION UNDER THE WAVE LOADING**

*A three-dimensional problem of interaction of a spheroidal nanoinclusion in an elastic isotropic matrix with an elastic wave of displacements is considered.*

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГОЛОВНИХ КОМПОНЕНТ ДО КОЛОРИМЕТРИЧНОГО СЕНСОРНОГО МАСИВУ ДАНИХ

**Зоряна Васюник**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[z-vasjunyk@ukr.net](mailto:z-vasjunyk@ukr.net)

Людська діяльність неминуче призводить до змін атмосферного повітря. З кожним історичним періодом їх масштаби неспинно зростають, набуваючи глобального характеру. З метою обмеження шкідливих викидів у атмосферу і запровадження сучасних високоефективних методів очищення повітря необхідно здійснювати постійний моніторинг його стану, що вимагає вдосконалення засобів вимірювання хімічного складу газових середовищ та створення нових більш ефективних і недорогих вимірювальних приладів.

З огляду на вище сказане надзвичайно актуальним є створення малогабаритних ефективних наносенсорів, чутливих до широкого спектру газових сумішей [1, 2]. Важливою частиною вимірювальних приладів є цифрова обробка отриманих даних, т.зв. колориметричного сенсорного масиву, яка здійснюється з допомогою сучасних методів класифікації багатовимірних даних.

В даній роботі при селекції газових сумішей в газосенсорних системах та обробці колориметричного сенсорного масиву даних застосовано метод головних компонент [3], який є одним з найбільш розповсюджених методів аналізу багатовимірних даних. Головною метою цього методу є 1) зменшення вимірності даних; 2) візуалізація отриманих даних на площині; 3) визначення структури взаємозв'язків між змінними, тобто класифікація даних.

Застосування інформації про взаємозв'язки змінних дозволяє досягнути кращих результатів кластеризації і пояснити семантику кластерів (сегментів), що виділяються.

Метод головних складових виникає з наступної оптимізаційної задачі: для даної центрованої таблиці даних  $X = [\vec{x}_1^T, \vec{x}_2^T, \dots, \vec{x}_n^T]$  знайти такий одиничний вектор  $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ ,  $\vec{a}^T \vec{a} = 1$ , щоб критерій

$$K(\vec{a}) = \sum_{n=1}^N (y_n)^2 = \sum_{n=1}^N (\vec{x}_n^T \vec{a})^2$$

був максимальним.



Дана задача має  $n$  розв'язків. Ними є такі вектори  $\vec{a}$ , які задовольняють матричне рівняння:

$$(S_X - \lambda I)\vec{a} = 0, \text{ або } S_X \vec{a} = \lambda \vec{a}, \quad (1)$$

де  $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_d]^T$  є одним з головних напрямків, а  $S_X$  матриця коваріації вхідних даних  $X$ .

Рівняння (1) має  $N$  розв'язків, які відповідають  $N$  власним значенням матриці  $S$ . Впорядковуючи власні значення в порядку спадання, отримуємо:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0.$$

З кожним з тих власних значень пов'язаний відповідний власний вектор  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ . Дані власні вектори визначають матрицю  $G$ :

$$G = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N].$$

Окрім того,  $S_X G = G \Lambda$ , де  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ .

Можна сказати, що матриця  $G$  визначає трансформацію, яка є поворотом системи залежних змінних  $\langle x_1, \dots, x_N \rangle$  (взятих в початковій точці) до системи залежних змінних.

Перетворення, яке визначається матрицею  $G$ , можна вважати лінійним перетворенням матриці  $X$ . Після виконання цього перетворення отримуємо:  $Y = XG$ . Оскільки нові змінні отримані в результаті лінійного перетворення змінних  $X$ , варіація нових змінних ( $\text{Var}(Y)$ ) отримується з матриці коваріації  $S_X$  як квадратична форма, яка визначається через старі змінні:

$$\text{Var}(Y) = G^T S_X G.$$

Цифрова обробка колориметричного сенсорного масиву даних за допомогою вище описаного методу дає можливість значно підвищити селективність аналізу вимірювальних наносенсорних приладів.

1. Helwig A. Principles of gas sensing at semiconductor surfaces. – Munchen: Hieronymus, 2008. – 174 p.
2. Gafiychuk V.V., Ostafiychuk B.K., Popovych D.I., Popovych I.D., Serednytsky A.S. ZnO nanoparticles produced by reactive laser ablation // Applied Surface Science. – 2011. – 257, No. 20. – P. 8396-8401.
3. Morrison D.F. Multivariate Statistical Methods. – McGraw-Hill, 1981.

#### PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS WITH APPLICATION TO COLORIMETRIC SENSOR ARRAY DATA

*Method of the principal components analysis applied to selection of gas mixtures in the gas sensory systems and processing of the colorimetric sensor data array. This method makes it possible to significantly increase the selectivity of analysis of measuring nanosensory devices.*

**ПРОЕКТУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ГАСНИКІВ КОЛИВАНЬ****Богдан Дівесв***Національний університет «Львівська політехніка» МОН України*

На даний час більшість машин та будівель в Україні, такі як електричні станції, газо- та нафтотранспортуюча техніка, тепло і водопостачаюче устаткування, мости, вежі, близькі до руйнування. В будь-який момент можливе катастрофічне руйнування газокompресорних станцій, турбогенераторів і насосів внаслідок вібрації, оскільки устаткування експлуатується надто довго і не вистарчає грошей на його заміну. Так в останній час відбувся ряд аварій мостів та літаків конструкції провідних фірм.

Ефективним способом вирішення цієї проблеми є застосування оптимально сконструйованого динамічного гасника коливань (ДГК), чи низки таких гасників. В автомобілях, літаках, кораблях вібрація може викликати зношуваність та механічну втому частин. Друге застосування – це промислове устаткування, де дебаланси обертових машин можуть викликати вібрацію. Можна навести ще десятки різних типів машин і споруд, де доцільне застосування ДГК.

Демпфування коливань будівель і споруд, машин і приладів, їх окремих конструкцій і елементів є важливою науково-технічною проблемою в багатьох областях техніки – промислового і цивільного будівництва, суднобудуванні, авіабудуванні, транспортному і енергетичному машинобудуванні. Зниження амплітуд коливань дозволяє значно підвищити втомну міцність, надійність і довговічність конструкцій, поліпшити технічні умови їх експлуатації. У зв'язку з цим розробка ефективних засобів і методів віброзахисту є однією з істотних проблем динаміки споруд і машин.

Первинною задачею в цьому напрямку є необхідність удосконалення аналітичного методу розрахунку дії динамічних навантажень з метою наближення теоретичних результатів до експериментальних даних та досягнення раціонального і ефективного проектування ДГК. Для отримання оптимальних проектів у множині конструктивних параметрів застосовувалися алгоритми генетичної оптимізації у поєднанні з конденсованими малопараметричними схемами. Оптимізація ДГК для недемпфованої одномасової основної системи при дії гармонійного збудження належить до стандартних задач. Детальний розгляд методів розрахунку ДГК добре відомі [1, 2]. Більшість практичних застосувань ДГК базуються на недостатньо повних математичних моделях

складних конструкцій. У даній роботі застосовано варіант динамічної конденсації: зменшення порядку вирішуючої системи рівнянь динамічної рівноваги шляхом апіорного врахування формозміни елементів [3-5]. Ці конденсовані моделі дозволяють оперувати конструктивними параметрами, що безпосередньо впливають на якість функціонування агрегату та його міцність. Наведено конкретні приклади оптимізації системи ДГК. На основі теоретико-експериментальних досліджень розроблено низку нових ДГК з покращеними функціональними та ресурсними даними. Результати цих досліджень дозволили оформити ряд патентів та в багатьох випадках надати рекомендації для виробників такого роду техніки.

На основі отриманих розрахункових схем розглянуто також проектування ДГК для висотних споруд [6], обертових машин та керованих ДГК. Виявлено ряд особливостей таких ДГК, не відображений у відомих джерелах.

1. Вибрации в технике. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. – Москва: Машиностроение. 1981. – 456 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – Москва: Наука, 1967. – 444 с.
3. Cherchyk H., Diveyev B., Martyn V., Sava R. Parameters identification of particle vibration absorber for rotating machines // Proceeding of ICSV21, Beijing, China. – 2014 (electronic edition).
4. Diveyev B. Impact and particle buffered vibration absorbers optimization and design // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Material Science. – 2016. – 1, No. 2. – P. 35-50.
5. Diveyev B., Konyk S., and Malcolm C.J. Dynamic properties and damping predictions for laminated plates: High order theories. Timoshenko beam // J. Sound Vibration. – 2018. – 413. – P. 173-190.
6. Diveyev B. Semi-active vibration absorbers for the high-rise objects // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Material Science. – 2018. – 4, No. 1. – P. 74-104.

### DESIGN OF THE DYNAMIC VIBRATION ABSORBERS

*The paper deals with the methods of calculation of vibration processes in machines and buildings. Mathematical model for the functional elements vibration level decreasing by means of dynamic vibration absorbers is proposed.*

## МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ДИФУЗІЙНИХ ЕФЕКТІВ НА КАТАЛІТИЧНЕ ОКИСНЕННЯ ЧАДНОГО ГАЗУ

Петро Костробій, Ірина Рижка

Національний університет «Львівська політехніка» МОН України

[petro.kostrobi@gmail.com](mailto:petro.kostrobi@gmail.com); [ira.saj@gmail.com](mailto:ira.saj@gmail.com)

Розглянуто математичну модель реакційно-дифузійних процесів окиснення чадного газу (CO) на поверхні платинового (Pt) катализатора на основі узагальнення КЕЕ-моделі [4]. Вона враховує особливості механізму Ленгмюра-Гіншелвуда [2] проходження хімічної реакції, перебудову наноструктури поверхні Pt(110) в процесі окиснення CO [1,5], а також процеси дифузії адсорбованих молекул CO та атомів кисню (O) по поверхні катализатора [7]. Поверхню катализатора вважаємо плоскою із заданою декартовою системою координат  $XOY$ . Координатні осі  $OX$  та  $OY$  для Pt(110) направимо вздовж перпендикулярних напрямків  $[1\bar{1}0]$  та  $[001]$ . Температура катализатора  $T$  є сталою і виступає зовнішнім параметром моделі. Система кінетичних рівнянь, які описують зміну в часі поверхневих покриттів адсорбованих CO ( $u$ ) і O ( $v$ ), частки поверхні катализатора неперестроєної структури  $1 \times 1$  ( $w$ ) та ступеня огранювання поверхні катализатора ( $z$ ), має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p_{CO} \kappa_u s_u \left[ 1 - (u/u_s)^3 \right] - k_1 uv - k_2 u + D_{u_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_{u_2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = p_{O_2} \kappa_v \left[ w s_{v_1} + (1-w) s_{v_2} + z s_{v_3} \right] (1 - u/u_s - v/v_s)^2 - k_1 uv + \\ + D_{v_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_{v_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k_3 \left( \left[ 1 + \exp \left( \frac{u_0 - u/u_s}{\delta u} \right) \right]^{-1} - w \right) + D_{w_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{w_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k_4 uv w (1-z) - k_5 z (1-u). \quad (4)$$

Величини параметрів, які присутні в моделі, наведено в [6].

Спочатку систему (1)-(4) досліджено для випадку, коли дифузійний

доданок у рівнянні (3) для зміни  $w$  відсутній, тобто  $D_{w_1,2} \equiv 0$ . При парціальних тисках  $p_{CO} = 2,65 \cdot 10^{-5}$  тор,  $p_{O_2} = 6,4 \cdot 10^{-5}$  тор і температурі  $T = 540$  К у системі виникають коливання змішаного режиму – тонка структура коливної реакції. При цьому для різних значень модельного параметра дифузії адсорбованих атомів О характер коливного режиму не змінюється і до того ж співпадає з відповідними результатами числових розрахунків для випадку, коли адсорбований кисень вважається нерухомим [3]. Результати числового аналізу моделі (1)–(4) для випадку, коли у рівнянні (3) для зміни  $w$  враховані дифузійні складові, показують, що при тих самих зовнішніх параметрах, що і в попередньому випадку, осциляційна поведінка системи різко змінюється. При  $D_{u_1} \sim 10D_{w_1}$  коливний режим не має яскраво вираженого характеру, а при  $D_{u_1} \sim D_{w_1}$  – коливань взагалі немає, і система перебуває у стані з високою реактивністю, коли на поверхні каталізатора перебувають адсорбовані молекули СО і атоми О.

1. *Gritsch T., Coulman D., Behm R.J., Ertl G.* Mechanism of the CO-induced (1×2)–(1×1) structural transformation of Pt(110) // *Phys. Rev. Lett.* – 1989. – **63**, No. 10. – P. 1086-1089.
2. *Imbihl R., Ertl G.* Oscillatory kinetics in heterogeneous catalysis // *Chem. Rev.* – 1995. – **95**, No. 3. – P. 697-733.
3. *Kostrobij P., Ryzha I.* Two-dimensional mathematical model for carbon monoxide oxidation process on the platinum catalyst surface // *Chem. Chem. Technol.* – 2018. – **12**, No. 4. – P.451-455.
4. *Krischer K., Eiswirth M., Ertl G.* Oscillatory CO oxidation on Pt(110): Modeling of temporal self-organization // *J. Chem. Phys.* – 1992. – **96**, No. 12. – P. 9161-9172.
5. *Ladas S., Imbihl R., Ertl G.* Microfacetting of a Pt(110) surface during catalytic CO oxidation // *Surf. Science.* – 1988. – **197**, No. 1-2. – P. 153-182.
6. *Ryzha I., Gaiduchok O.* Mathematical model for carbon monoxide oxidation: influence of diffusion effects // *Math. Model. Comput.* – 2019. – **6**, No. 1. – 129-136.
7. *von Oertzen A., Rotermund H.H., Nettesheim S.* Diffusion of carbon monoxide and oxygen on Pt(110): experiments performed with the PEEM // *Surf. Science.* – 1994. – **311**, No. 3. – P. 322-330.

#### MODELING OF THE INFLUENCE OF DIFFUSION EFFECTS ON CARBON MONOXIDE CATALYTIC OXIDATION

*A two-dimensional mathematical model for carbon monoxide oxidation on the platinum catalyst surface is investigated according to the Langmuir-Hinshelwood mechanism. This model takes into account the influence of diffusion effects on the course of reaction-diffusion processes. It is established that the diffusion of adsorbed oxygen atoms can be neglected, and the structural changes of the catalyst surface have a significant influence on the character of oscillatory mode of reaction.*

**МОДЕЛІ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ТІЛАХ  
З ТОНКИМИ МЕТАЛІЧНИМИ ПРОШАРКАМИ****Юлія Максимів, Роман Рабош, Ярослав Кунець***Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*[romanrabosh@gmail.com](mailto:romanrabosh@gmail.com); [kunets@iapmm.lviv.ua](mailto:kunets@iapmm.lviv.ua)

Взаємодія тонких пружних неоднорідностей з оточуючим середовищем досліджувалась, в основному, без врахування електричних властивостей матеріалів. Нижче запропоновано моделі динамічної взаємодії тонкого прямолінійного металічного включення з п'єзокерамічним ізотропним середовищем. Вісь попередньої поляризації матеріалу п'єзокерамічної матриці перпендикулярна до площини поширення SH-хвиль. На межі розділу середовищ виконуються умови ідеального механічного контакту і умова рівності нулю електричного потенціалу. Електропружна система знаходиться за умов поздовжнього зсуву. Для переміщень у матриці виконується умова випромінювання Зоммерфельда.

Методика дослідження базується на методах теорії сингулярних збурень, коли переміщення та електричний потенціал у складових композиту подаються у вигляді асимптотичних розвинень за малим параметром, що характеризує малу відносну товщину прошарку. Ця методика була розвинута для випадку, коли тонке п'єзокерамічне включення знаходиться у пружній матриці [1].

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).

1. *Rabosh R.V., Kunets Ya.I., Maksymiv Yu.I.* Effective dynamical parameters of piezoelectric medium with randomly distributed piezoelectric inclusions // Proc. XXIII<sup>rd</sup> International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory. – Tbilisi, 2018. – P. 153-156.

**MODELS OF DYNAMICAL PROCESSES IN PIEZOCERAMIC SOLIDS  
WITH THIN METALLIC LAYERS**

*Models of dynamic interaction between thin rectilinear metal layers and piezoceramic isotropic medium are proposed. The methodology to obtain the models is based on the methods of singular perturbations theory, when the displacement and electric potential in the composite are presented in the form of asymptotic expansions by a small parameter characterizing the small relative thickness of the layer.*

## ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ НЕІЗОТЕРМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНОМУ ҐРУНТОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Ольга Марченко, Тетяна Самойленко, Тетяна Благовещенська

*Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України*

[march64@ukr.net](mailto:march64@ukr.net); [tsamoil@i.ua](mailto:tsamoil@i.ua); [tatyana\\_blag@ukr.net](mailto:tatyana_blag@ukr.net)

Для дослідження неоднорідного ґрунтового масиву навколо свердловин промислової експлуатації геотермальних вод пропонується розглядати змішану систему [1] рівнянь фільтрації, теплопровідності та динамічної теорії пружності для ізотропного тіла у випадку осової симетрії:

$$\tilde{\mu}_i r \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_i (u_r, u_z, T) \frac{\partial h}{\partial r} \right) - r \frac{\partial}{\partial z} \left( k_i (u_r, u_z, T) \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0,$$

$$c_i r \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial r} \right) - r \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \rho_i r \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \left( (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{u_r}{r} + r \mu_i \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. + \lambda_i \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \lambda_i \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = f_{1,i}(h, r, z, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_i r \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \left( \lambda_i \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu_i \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial z} + r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. + \lambda_i \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = f_{2,i}(h, r, z, t), \quad (r, z, t) \in \Omega_i, \tilde{T} = \Omega_i \times (0, \tilde{T}], \quad i = 1, 2, \quad r \geq r_0 > 0, \end{aligned}$$

де  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ;  $h(r, z, t)$  – п'єзометричний напір,  $T(r, z, t)$  – температура,  $(u_r(r, z, t), u_z(r, z, t))^T$  – вектор зміщень;  $\tilde{\mu}_i$  – вологоємність,  $\rho_i$  – щільність ґрунту,  $c_i$  – теплоємність,  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$  – коефіцієнти Ламе.

Умови спряження на ділянці контакту  $\gamma$  ( $\gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ ):

$$\left\{ k_i (u_r, u_z, T) \frac{\partial h}{\partial r} \cos(n, r) + k_i (u_r, u_z, T) \frac{\partial h}{\partial z} \cos(n, z) \right\}^{\pm} = R_1[h],$$

$$\left\{ \tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial r} \cos(n, r) + \tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial z} \cos(n, z) \right\}^{\pm} = R_2[T],$$

$$[u_n] = 0, [\sigma_n] = 0, [\tau_s] = 0, \{\tau_s\}^\pm = R_3[u_s], i = 1, 2, (r, z, t) \in \gamma_{\tilde{T}} = \gamma \times (0, \tilde{T}],$$

де  $n$  – зовнішня нормаль до  $\partial\Omega_1$  на  $\gamma$ ;  $R_i \geq 0, i = \overline{1,3}$ .

Крайові умови – неоднорідні змішані, початкові умови – неоднорідні.

Узагальнена постановка задачі – задача Коші для

$$\bar{m} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, v \right) + m \left( \frac{\partial w}{\partial t}, v \right) + a(w, v) = (F, v) \quad \forall t \in (0, \tilde{T}] \quad \forall v(r, z) \in Z_0,$$

$v = (v_h, v_T, v_r, v_z)^T, w = (h, T, u_r, u_z)^T \in Z, Z, Z_0$  – простори Гальоркіна,

$$\bar{m} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, v \right) = \iint_{\Omega} \rho r \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} v_r + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} v_z \right) d\Omega,$$

$$m \left( \frac{\partial w}{\partial t}, v \right) = \iint_{\Omega} r \left( \tilde{\mu} \frac{\partial h}{\partial t} v_h + c \frac{\partial T}{\partial t} v_T \right) d\Omega,$$

$$a(w, v) = \iint_{\Omega} r \left( k(u_r, u_z, T) \left( \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial v_h}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial v_h}{\partial z} \right) + \tilde{\lambda}_i \left( \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial v_T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial v_T}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{u_r v_r}{r^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \lambda \left( \frac{u_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \lambda \left( \frac{u_r}{r} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) d\Omega + \int_{\gamma} r (R_1[h][v_h] + R_2[T][v_T] + R_3[u_s][v_s]) d\gamma,$$

$$(F, v) = \iint_{\Omega} (f_1(h, r, z, t)v_r + f_2(h, r, z, t)v_z) d\Omega + \int_{\partial\Omega \setminus \gamma} r(p(r, z, t), v) d\Gamma,$$

$p(r, z, t)$  – вектор-функція крайових умов другого роду,  $\tilde{\mu} \equiv \tilde{\mu}_i, c \equiv c_i, \rho \equiv \rho_i, \lambda \equiv \lambda_i, \mu \equiv \mu_i, f_j \equiv f_{j,i}, i, j = \overline{1,2}$ .

Наближений розв’язок шукаємо МСЕ за схемою Кранка-Ніколсона.

1. *Богаченко В.А., Марченко О.А., Самойленко Т.А.* Анализ численного моделирования неизоотермических процессов в грунтовой массе // Компьютерная математика. – 2016. – № 2. – С. 3-11.

#### THE OSESYMETRIC PROBLEM OF DYNAMICS OF NON-ISOTHERMAL PROCESSES IN THE INHOMOGENEOUS SOIL ENVIRONMENT

*The construction of the approximate solution of the initial boundary value problem for the mixed system of filtration equation, heat transfer equation and dynamic theory of elasticity equations for inhomogeneous in structure soils in the case of axial symmetry is considered.*



**ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ У ШАРУВАТИХ ПРУЖНИХ КОМПОЗИТАХ  
З ТОНКИМИ МІЖФАЗНИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ**

**Валерій Матус, Віктор Міщенко, Василь Пороховський**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[matus@iapmm.lviv.ua](mailto:matus@iapmm.lviv.ua); [adm@iapmm.lviv.ua](mailto:adm@iapmm.lviv.ua); [porvas@meta.ua](mailto:porvas@meta.ua)

Характеристики хвиль, що поширюються у шаруватих композитах суттєво залежать від умов контакту складових композиту. На сьогодні в літературі достатньо повно досліджено акустичні властивості композитів при ідеальному контакті їх елементів (неперервність векторів переміщень та напружень). В доповіді із застосуванням теорії сингулярних збурень запропоновано асимптотично точні моделі динамічної взаємодії тонкостінного прошарку з прилеглими компонентами композиту через введення ефективних умов неідеального контакту цих компонент [1]. Модель міжфазного прошарку малої жорсткості описується зв'язком динамічних напружень зі стрибками переміщень на поверхні неідеального контакту і охоплюється відношенням пружних параметрів тонкостінного елемента до пружних параметрів прилеглих компонент того ж порядку малості, що і відносна товщина прошарку. Для моделі неконтрастного тонкостінного прошарку, коли відношення відповідних пружних параметрів мають порядок одиниці в порівнянні з його товщиною, відповідні стрибки переміщень та напружень є відомими величинами і визначаються із розв'язку задачі за повного ідеального контакту складових композиту.

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).

1. *Кунець Я., Матус В.* Розсіяння SH-хвиль пружним волокном неканонічного поперечного перерізу за наявності тонкого міжфазного прошарку // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 132-139.

**WAVE MOTIONS IN LAYERED ELASTIC COMPOSITES  
WITH THIN INTERPHASE HETEROGENEITIES**

*Applying the theory of singular perturbations, asymptotically accurate models of dynamic interaction of a thin-walled layer with the surrounding components of a composite are proposed.*

УДК 539.3

**ПЕРЕМІНА НАПРЯМУ РУХУ ПРУЖНОГО СТРИЖНЯ З ЗОВНІШНІМ СУХИМ ТЕРТЯМ ПРИ УДАРІ З ПОДАЛЬШИМ РОЗВАНТАЖЕННЯМ ЗУСИЛЛЯ ПРИТИСКУ**

**Василь Перепічка**

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[v.v.perepichka@gmail.com](mailto:v.v.perepichka@gmail.com)

Розглянута нестационарна задача про збурення півнескінченного пружного стержня при ударі з лінійним в часі спаданням сили притиску на торці. Нелінійна початково-крайова задача для знаходження переміщень зрушених перерізів стержня  $u(x, t)$  в рамках гіпотези Бернуллі має вигляд:

$$\frac{u''}{L} + \frac{\tau_x}{E} = \frac{\ddot{u}}{L}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$\tau_x = -\tau_c \operatorname{sgn} \dot{u}, \quad \dot{u} \neq 0 \quad \text{або} \quad \dot{u} = 0, \quad |\tau_x| \leq \tau_c;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0, \quad x > 0;$$

$$\frac{u'(0, t)}{L} = -\frac{\sigma_0}{E} (1 - Kt) H(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0.$$

Тут  $x = X/L$ ,  $t = cT/L$  – безрозмірні координата та час,  $L = F/\Pi$  – характерний розмір, а  $F$ ,  $\Pi$  – площа та периметр поперечного перерізу стержня,  $\tau_x$  – дотичне напруження на бічній поверхні,  $\tau_c$  – порогове значення дотичних напружень в моделі сухого тертя,  $K$  – безрозмірний параметр, що характеризує швидкість зміни притиску на торці ( $K = L\Delta/c\sigma_0$ ),  $\sigma_0$  і  $\Delta$  – напруження удару та зменшення напруження за одиницю часу на торці стержня,  $c = \sqrt{E/\rho}$  – акустична швидкість в матеріалі стержня,  $\rho$ ,  $E$  – густина та модуль Юнга матеріалу стержня,  $H(t)$  – функція Гевісайда.

**CHANGE THE DIRECTION OF MOVEMENT OF THE ELASTIC ROD WITH EXTERNAL DRY FRICTION AT IMPACT WITH SUBSEQUENT UNLOADING OF THE CLAMPING FORCE**

*The analytical solution of the formulated non-stationary boundary value problem is built. The influence of the effect of unloading the edge pressure on the structure of the region of motion and the distribution of non-stationary displacement, velocity, and stress fields has been analyzed.*

## УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО БІМАТЕРІАЛУ З ТРІЩИНАМИ І ТОНКИМ ПРУЖНИМ ПРОШАРКОМ

Володимир Станкевич, Віктор Михаськів

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[stan\\_volodja@yahoo.com](mailto:stan_volodja@yahoo.com); [tex@iapmm.lviv.ua](mailto:tex@iapmm.lviv.ua)

Поширення пружних хвиль у шаруватих композитах із тріщинами характеризується складними хвильовими процесами. Наявність у таких тілах вільних та інтерфейсних поверхонь може призводити до появи нових типів хвиль, дисперсійних та резонансних явищ. Такі задачі становлять значний інтерес для неруйнівних методів контролю, геофізики, механіки руйнування. На окрему увагу заслуговує випадок порушення ідеального контакту на інтерфейсній поверхні спряження матеріалів внаслідок пошкодження поверхні (розтріскування), адгезійних явищ, клейового контакту тощо. У дослідженнях таку поверхню запропоновано моделювати фізичною поверхнею з заданими на ній пружними крайовими умовами.

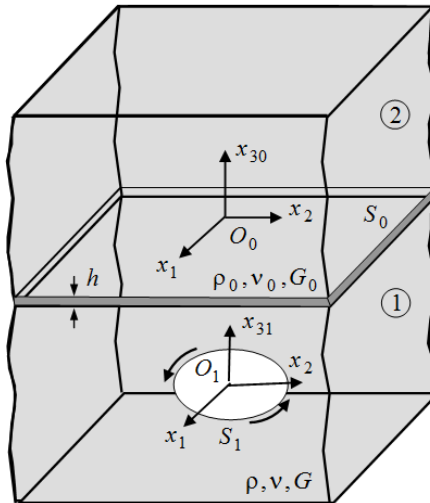


Рис. 1

Розглянуто тривимірну динамічну задачу про усталені коливання пружного біматеріального тіла з системою кругових тріщин та тонким пружним прошарком на межі спряження компонент тіла (рис. 1). Задачу описуємо відповідними диференціальними рівняннями Гельмгольца та двома групами крайових умов: умовами на поверхнях тріщин та пружними крайовими умовами на фізичній інтерфейсній поверхні, яка моделює тонкий прошарок. Для дослідження напружено-деформівного стану твердого тіла використано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР).

Розв'язки відповідних диференціальних рівнянь вибрано у вигляді інтегральних представлень (потенціалів Гельмгольца) із невідомими густинами, які характеризують розкриття поверхонь тріщин та переміщення точок поверхонь компонент біматеріалу. Шляхом задоволення крайових умов поставлену задачу зведено до системи двовимірних ГІР відносно лише невідомих функцій розкриття тріщин.

Як приклад, розглянуто випадок поодинокі кругової тріщини скручування, паралельної межі спряження матеріалів. Показано, що ядра відповідних ГІР задачі мають гіперсингулярну особливість. Наведено процедуру регуляризації отриманих ГІР та зведення їх до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно дискретних значень невідомих функцій розкриття тріщин. За допомогою останніх визначено динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (ДКІН) поздовжнього зсуву в околі точок контуру тріщини.

Наведено графічні залежності ДКІН у низькочастотному спектрі коливань від співвідношення пружних сталей компонент тіла, товщини прошарку, глибини залягання дефекту.

1. *Alers G., Graham I.* Reflection of ultrasonic waves by thin interfaces // In: Ultrasonics symposium. – 1975. – P. 579-582. doi:10.1109/ULTSYM.1975.196590.
2. *Bostrom A., Kvasha O.* Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with periodic interface cracks exact versus spring boundary conditions // J. Mech. Materials Struct. – 2010. – 5, No. 1. – P. 67-78.
3. *Mykhas'kiv V., Stankevych V., Zhabdynskyi I., Zhang Ch.* 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces // Int. J. Fract. – 2009. – 159, No. 2. – P. 137-149.
4. *Shifrin E.* Inverse spectral problem for a rod with multiple cracks // Mech. Syst. Signal Process. – 2015. – 56-57. – P. 181-196. doi:10.1016/j.ymsp.2014.11.004.

#### TIME HARMONIC OSCILLATION OF ELASTIC BIMATERIAL WITH CRACKS AND THIN ELASTIC INTERLAYER

*The 3-D dynamic problem of time-harmonic oscillations of bimaterial with cracks and thin elastic interlayer is considered. Using spring boundary conditions on the interface surface, the problem is reduced to 2-D boundary integral equations relative to unknown crack opening functions. Dynamic SIF mode III are analyzed.*

**ПРЯМІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ ОБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ МАС  
ДЛЯ ЯВНИХ МЕТОДІВ ДИНАМІКИ****Антон Ткачук***Штутгартський університет (Німеччина)*[tkachuk@ibb.uni-stuttgart.de](mailto:tkachuk@ibb.uni-stuttgart.de)

Більшість явних методів динаміки використовують діагональні матриці мас, що дає змогу тривіального обчислення вектора вузлових прискорень з вектора вузлових зусиль. У останній час, декілька альтернативних методів дискретизації було запропоновано, у яких використовуються розріджені обернені матриці мас [1-3,5]. Однією з переваг застосування таких матриць є потенційне збільшення кроку інтегрування у часі. У цій доповіді розглянута варіаційна побудова, що оминає обернення матриць на глобальному рівні [1, 3]. Ця побудова використовує параметризований принцип Гамільтона з незалежними полями для переміщень, швидкості та імпульсу. За умови використання біортогональних інтерполяцій імпульсу і переміщень стає можливим пряма побудова обернених матриць мас. Приклади скінченних елементів з такими матрицями мас і їх застосування до нелінійних систем ілюструють переваги наведеної дискретизації. Також розглянуті питання імплементації таких матриць у скінченно-елементних пакетах та обрахунку кроку інтегрування з урахуванням контактної взаємодії [4].

1. *Tkachuk A., Bischoff M.* Direct and sparse construction of consistent inverse mass matrices: general variational formulation and application to selective mass scaling // *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* – 2015. – **101**, No. 6. – P. 435-469.
2. *González J.A., Kolman R., Cho S.S., Felippa C.A., Park K.C.* Inverse mass matrix via the method of localized Lagrange multipliers // *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* – 2018. – **113**, No. 2. – P. 277-295.
3. *Schaeuble A.-K., Tkachuk A., Bischoff M.* Variationally consistent inertia templates for B-spline and NURBS-based FEM: Inertia scaling and customization // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 2017. – **326.** – P. 596-621.
4. *Schaeuble A.-K., Tkachuk A., Bischoff M.* Time step estimates for explicit dynamics with reciprocal mass matrices // *Computers & Structures.* – 2018. – **202.** – P. 74-84.
5. *González J.A., Kopačka J., Kolman R., Cho S.S., Park K.C.* Inverse mass matrix for isogeometric explicit transient analysis via the method of localized Lagrange multipliers // *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* – 2019. – **117**, No. 9. – P. 939-966.

**DIRECT METHODS FOR CONSTRUCTION OF RECIPROCAL MASS MATRICES  
IN EXPLICIT DYNAMICS**

*Standard explicit dynamic codes rely on lumped mass matrices, which enables trivial computation of the nodal acceleration vector from the total force vector. Recently, alternative approaches were proposed that are using sparse reciprocal mass matrices [1-3, 5]. These matrices allow larger critical time steps and reduce the total computational cost. In this contribution, variational construction is presented that is based on parametrized Hamilton's principle with independent fields for displacement, velocity and linear momentum and it avoids matrix inversion on a global level [1, 3]. Usage of biorthogonal bases for linear momentum enables a construction of sparse inverse matrices. Examples finite elements with reciprocal mass matrices and their application to non-linear structural mechanics illustrate advantages of the proposed approach. In addition, implementation details and time step estimates for penalized contact problems are considered [4].*

**МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ КОНТАКТУ СИСТЕМИ  
ФУНДАМЕНТ-ГРУНТ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ**

**Олександр Трофимчук, Олег Савицький**

*Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України*

[itelua@kv.ukrtel.net](mailto:itelua@kv.ukrtel.net); [osavitsky@ukr.net](mailto:osavitsky@ukr.net)

Обґрунтування, приклади та огляд застосувань методу ортогональних поліномів при розв'язку інтегральних рівнянь динамічних контактних задач взаємодії малозаглиблених фундаментів з дисперсним ґрунтом розглянуто в роботах [1, 2]. Перевагою методу є отримання ефективних розв'язків задач визначення для узагальнених моделей як параметрів коливань систем споруда-фундамент-ґрунт (переміщень, реакцій, контактних тисків, резонансних частот різної природи), так і передаточних функцій (чи геотехнічних імпедансів) для системи фундамент-ґрунт з заданими геометричними та фізико-механічними параметрами. Останні можуть бути застосовані у складних динамічних розрахункових схемах споруд. Для штампа з непроникною підшвою розглянуто закономірності розподілу контактних тисків на поверхні пористо-пружної насиченої рідиною (ППНР) основи як від твердого пористого скелету так і від порової рідини. Теоретичний аналіз ядер інтегральних рівнянь для моделі Біо у [1] показав, що перший відповідає розподілу ефективних контактних напружень з кореневою особливістю по краях (логарифмічне ядро, подібно пружній основі), а другий особливостей не має. Представлення невідомих ефективних напружень та порового тиску при вертикальних коливаннях прямокутного штампа у вигляді нескінченних рядів з невідомими коефіцієнтами підібрано у інтегрально-диференційній формі на основі спектральних співвідношень для ортогональних поліномів Чебишова.

Параметри моделі ґрунту як двофазного ППНР середовища [1] враховують щільність матеріалів фаз, пружні характеристики фаз та середовища, осереднену пористість твердого скелету, в'язкість порової рідини, фільтраційні характеристики середовища, форму пор. Особливими фізичними явищами є розповсюдження двох поздовжніх хвиль, загасання коливань від різниці швидкостей пористої пружної твердої та в'язкої рідинної фаз (інерційної взаємодії). В даному дослідженні враховуються також хвильові процеси під жорстким прямокутним штампом в шаруватій основі у вигляді ППНР шарі з затисненою тильною гранню. Методом інтегральних перетворень у символній формі вперше знайдено подвійні трансформанти Фур'є переміщення фаз

прямокутної поверхні основи від розподілених навантажень на фази. Отримано їх асимптотичні вирази, необхідні для забезпечення збіжності при оцінці невластних інтегралів, використовуючи зокрема скорочення експоненційних співмножників та асимптотичних розкладань [1]. Методом ортогональних поліномів отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (коефіцієнти системи – подвійні інтеграли від комплексних функцій) для визначення методом редукції коефіцієнтів рядів для обчислення розподілу тисків, зміну з частотою реакцій фаз. Останні (як і переміщення штампів) представляються простими формулами з коефіцієнтами при перших членах рядів.

Розроблено програмне забезпечення, яке протестоване на відомих числових результатах для пружного та ППНР півпростору та шару (див. [1]). На прикладах досліджується залежність від частоти реакції основи на одиничне вертикальне переміщення фундаменту (штампа), відомі як геотехнічний імпеданс [1]. Уявна частина імпедансу характеризує, крім загасання в матеріалі, середню за період коливань потужність хвильової енергії для підшви. Показано розподіл складових імпедансу між фазами в сейсмічному діапазоні частот (безрозмірних) при варіюванні геометричних та фізико-механічних параметрів. Для шаруватої ППНР основи у випадку просторової задачі зміна жорсткості та загасання відрізняється від реакції півпростору та смуги [1]. Згідно дослідженням учнів І.І. Воровича, на частотах, менших частоти виникнення першої нормальної хвилі в шарі реакція пружна, при наближенні до цієї частоти спостерігається обернена хвиля. Для дільниць між частотами виходу нормальних хвиль встановлюється співвідношення між жорсткістю та загасанням для фаз на поверхні контакту. Рідинна фаза змінює характер імпедансу по відношенню до реакції пружної однофазної основи.

1. *Гомилко А.М., Савицький О.А., Трофимчук А.Н.* Методы суперпозиции, собственных функций и ортогональных многочленов в граничных задачах теории упругости и акустики. – Киев: Наук. думка, 2016. – 436 с.
2. *Попов Г.Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. – Київ-Одеса: Вища школа, 1982. – 168 с.

#### MODELING OF DYNAMICS OF BASE-SOIL SYSTEM CONTACT BY THE ORTHOGONAL POLYNOMIALS METHOD

*The modeling of the oscillation of a rigid rectangular stamp on soil base by the solution of dynamic contact problems for an liquid-impenetrable stamp on a layered porous-elastic fluid-saturated base (Biot's model) is considered. The mixed boundary value problems for Biot's differential equations under contact conditions are reduced to a system of integral equations. Method of orthogonal polynomials for analytical and numerical solution is applied. The variations of model mechanical parameters and design scheme influencing on geotechnical impedance function is studied numerically.*



## ПРОЦЕСИ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ У ТРИШАРОВОМУ ПОРИСТОМУ ТІЛІ

Ольга Чернуха, Юрій Білушак

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем  
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Національний університет «Львівська політехніка» МОН України*

[cher@cmm.lviv.ua](mailto:cher@cmm.lviv.ua); [byixx13@gmail.com](mailto:byixx13@gmail.com)

Досліджено процеси конвективної дифузії двокомпонентного водного розчину з урахуванням сорбції частинок на скелеті у тришаровому пористому тілі із застосуванням визначення ефективної роботи промислових фільтрів і розрахунку їхніх параметрів [1]. Узагальнено метод розв'язання крайових задач на основі інтегральних перетворень окремо в контактуючих областях на випадок багатшарових пористих тіл [2]. Для розрахунку довговічності роботи фільтрів запропоновано метод чисельного визначення подвійних інтегралів зі змінними верхніми межами.

Прийнято, що довільна область кожного шару складається зі скелету та водного розчину, який заповнює поровий простір, скелет не деформується, і пористість залишається сталою. Частинки забруднення знаходяться у двох станах – конвективно рухомому розчині і на поверхні скелету. Вважаємо, що шар безрозмірної товщини  $x_0$  складається з трьох підшарів (рис. 1).

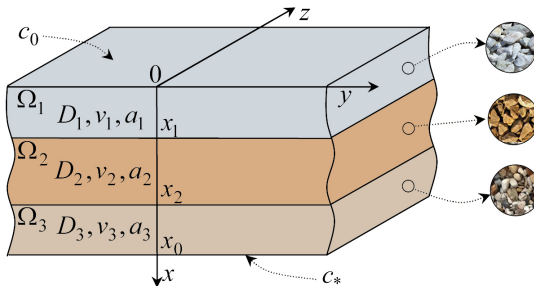


Рис. 1 Тришаровий фільтр, в якому мігрують частинки забруднення

У такому тілі масоперенесення домішок описують системи рівнянь:

$$\frac{\partial c_1^{(j)}(t, x)}{\partial t} = d_j \frac{\partial^2 c_1^{(j)}(t, x)}{\partial x^2} - v_j \frac{\partial c_1^{(j)}(t, x)}{\partial x} - a_j c_1^{(j)}(t, x),$$

$$\frac{\partial c_2^{(j)}(t, x)}{\partial t} = a_j c_1^{(j)}(t, x), \quad x \in \Omega_j \quad (j = 1, 3),$$

де  $d_j$  і  $v_j$  - коефіцієнти дифузії домішки і конвективного перенесення в шарі  $j$ ,  $a_j$  - коефіцієнти інтенсивності сорбції частинок на скелет.

Прийнято крайові умови першого роду. На границях контакту шарів накладено умови неідеального контакту на функцію концентрації.

Аналітичний розв'язок сформульованої задачі отримано на основі інтегральних перетворень, у тому числі зі зсувом, за просторовою змінною окремо в контактуючих областях  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  і  $\Omega_3$ , доозначуючи шукані функції на міжшарових границях з використанням умов контакту. Отримано аналітичні вирази для концентрації забруднення в структурних елементах фільтра, які містять доданки в інтегральній формі.

Для встановлення ефективності роботи фільтра необхідно знаходити концентрацію сорбованої домішки, в тому числі обчислювати подвійні інтеграли від складних функцій зі змінними верхніми межами. Для цього розроблений чисельний метод подвійного інтегрування зі змінними межами за такими етапами: встановлення змінної області інтегрування; накладення змінної прямокутної сітки на область інтегрування; виділення у змінній області інтегрування підобластей, які складаються з квадратних і трикутних елементів; застосування квадратур у підобласті, яка складається з квадратних елементів; здійснення триангуляційного розбиття вздовж змінної межі; обчислення об'ємів елементарних елементів, в основі яких є трикутники; підрахунок вихідного інтеграла; встановлення похибки обчислень. Головний член похибки

$$R = \int_0^{\tau} \int_0^{\tau'} f(\tau, \tau', \tau'') d\tau'' d\tau' - S \cdot f(\tau, \tau'_c, \tau''_c),$$

знайдено розкладом в ряд Тейлора самого подвійного інтеграла зі змінними межами з урахуванням теореми Барроу. Апробація методу здійснена на відомих лінійних, експоненціальних та тригонометричних підінтегральних функціях.

Проведено кількісний аналіз процесів конвективної дифузії частинок забруднення з урахуванням їхньої сорбції на скелет. Визначено час ефективної роботи тришарового засипного фільтра води.

1. *Журба М.* Основы процессов доочистки сточных вод фильтрованием // Тепло- и массообмен в капиллярнопористых телах. – 1965. – № 1. – С. 60-73.
2. *Чанля С.Я., Чернуха О.Ю.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – Київ: Наук. думка, 2009. – 302 с.

#### PROCESSES OF ADVECTIVE DIFFUSION IN A TREE-LAYERED POROUS BODY

*In the work the processes of advective diffusion of two-component water solution is investigated with taking into consideration sorption of admixture particles on the skeleton in a three-layered porous body with the use of determining the effective operation of industrial filters and the calculation of their parameters.*

**ДИНАМІЧНА ПОВЕДІНКА ОРТОТРОПНОЇ ПАНЕЛІ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ З ДВОМА ВКЛЮЧЕННЯМИ, ЯКІ ВЗАЄМОДІЮТЬ З ПАНЕЛЛЮ ЧЕРЕЗ ПРУЖНІ ПРОШАРКИ ТИПУ ВІНКЛЕРА****Тетяна Шопя***Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*[tetyana.sh@gmail.com](mailto:tetyana.sh@gmail.com)

Розглянуто задачу про усталені коливання прямокуної в плані шарнірно опертої ортотропної панелі подвійної кривини з двома круглими в перерізі абсолютно жорсткими включеннями, які взаємодіють з панеллю через пружні прошарки типу Вінклера. На обидва включення діють сили, рівнодійні яких є нормальними до серединної поверхні панелі. Вважаємо, що включення здійснюють поступальний рух в нормальному напрямку до серединної поверхні панелі. Для дослідження використано рівняння уточненої теорії пологих оболонок, які враховують поперечні зсуви. Числовий розв'язок отримано за використання непрямого методу граничних елементів та послідовнісного представлення функцій Гріна [1]. Досліджено вплив розташування, маси та розмірів включень, жорсткості пружних прошарків на частотно-амплітудні характеристики панелі.

1. *Shopa T.* Vibration of orthotropic doubly curved panel with a set of inclusions of arbitrary configuration with different types of connections with the panel // *Mathematical Modeling and Computing.* – 2018. – 5, No. 2. – P. 221-234.

**DYNAMIC BEHAVIOR OF ORTHOTROPIC DOUBLY CURVED PANEL  
WITH TWO INCLUSIONS INTERACTING WITH THE PANEL  
VIA ELASTIC INTERLAYERS OF THE VINKLER TYPE**

*In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state vibration of the orthotropic panel with two absolutely rigid inclusions with circular cross sections is considered. It is assumed that inclusions perform the translational motion in the normal direction to the middle surface of the panel. Rectangular in plane external boundary of the panel is simply supported. The solution is obtained on the basis of the indirect boundary elements method. The sequential approach to the representation of the Green's functions is used. Integral equations are solved by the collocation method. The influence of the location, mass, and size of the inclusions, stiffness of the elastic interlayers on the amplitude/frequency characteristics of the panel is investigated.*

**ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ  
З МНОЖИНОЮ ОТВОРІВ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ  
ЗА ВРАХУВАННЯ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ  
НА ПОВЕРХНІ**

**Тетяна Шопя, Ольга Тужеляк**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[tetyana.sh@gmail.com](mailto:tetyana.sh@gmail.com); [oliatuzheliak@gmail.com](mailto:oliatuzheliak@gmail.com)

Розглянуто задачу про усталені поперечні коливання ортотропної пластини, яка має  $N$  отворів, в рамках теорії, яка враховує поперечні зсуви. Контурами отворів є криві  $L^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, N}$ . Зовнішня границя пластини є також довільної форми, а її контуром – три взаємодоповнюючі криві  $L^{(N+1)}$ ,  $L^{(N+2)}$  та  $L^{(N+3)}$ . На поверхні пластини діє гармонічне в часі довільне розподілене навантаження, яке задається функціями  $q, m_1, m_2$ . Використано позначення статті [1].

Ключова система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{L}]\mathbf{U} &= \mathbf{P}, \quad \mathbf{U} = \{w, \gamma_1, \gamma_2\}^T, \quad \mathbf{P} = \{q, m_1, m_2\}^T, \\
 \mathbf{L}_{11} &= \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\
 \mathbf{L}_{22} &= D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{12} = -\mathbf{L}_{21} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \\
 \mathbf{L}_{33} &= D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{13} = -\mathbf{L}_{31} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \\
 \mathbf{L}_{23} &= (D_1 \nu_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{32} = (D_{12} + D_2 \nu_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Крайові умови на контурах отворів та на зовнішній границі пластини:

$$\begin{aligned}
 w &= w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \\
 \gamma_\tau &= \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, j = \overline{1, N}, \alpha \in L^{(N+1)}, j = N+1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_n &= Q_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_\tau = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \\
 M_n &= M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1+1, N_1+N_2}, \quad \alpha \in L^{(N+2)}, \quad j = N+2, \\
 w &= w^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \\
 \gamma_\tau &= \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1+N_2+1, N}, \quad \alpha \in L^{(N+3)}, \quad j = N+3. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Крайову задачу (1), (2) розв'язано непрямим методом граничних елементів. Використано функції Гріна в прямокутній області  $\Pi$ , яка містить розглядувану багатозв'язну область  $\Omega$ , з однорідними крайовими умовами:

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad \gamma_\tau = 0, \quad \alpha \in \partial\Pi, \quad (3)$$

побудовані в роботі [1]. Розв'язок представлено у вигляді суми потенціалу простого шару та розв'язку системи (1) в прямокутній області  $\Pi$  з крайовими умовами (3), знайденого на основі методу рядів Фур'є. При отриманні інтегральних рівнянь з метою уникнення стрибка похідної від потенціалу простого шару на границі розглянуто метод фіктивного контуру, який полягає в тому, що задовольняємо крайові умови не на реальній границі, а на границі фіктивно зміщеної на деяку малу відстань  $\varepsilon$  всередину розглядуваної області у тих випадках, коли на контурах отворів чи частині зовнішньої межі пластини задано зусилля. Систему інтегральних рівнянь розв'язано методом колокацій, використовуючи апроксимацію функцій густин потенціалів простого шару таку ж, як у роботі [1]. Задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно дискретних значень функцій густин потенціалів простого шару на контурах отворів та на зовнішній границі пластини.

1. *Shopa T.V.* Transverse vibration of an orthotropic plate with a collection of holes of arbitrary configuration and mixed boundary conditions // *Materials Science*. – 2018. – **54**, No. 3. – P. 368-377.

**TRANSVERSE VIBRATION OF ORTHOTROPIC PLATE WITH SET OF CUTOUTS OF ARBITRARY CONFIGURATION TAKING INTO ACCOUNT EXTERNAL LOAD ON THE SURFACE**

*In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state flexural vibration of the orthotropic plate with the arbitrary number of cutouts of the arbitrary geometrical form and location under the harmonic in time arbitrary distributed external load on the surface is constructed. External boundary of the plate is of the arbitrary geometrical configuration. Mixed harmonic in time boundary conditions on the external boundary of the plate and on the contours of the cutouts are considered. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method. The sequential approach to the representation of the Green's functions is used. Integral equations are solved by the collocation method.*

## ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ І БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

УДК 691.328:666.972

### КОНТИНУАЛЬНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦІНКИ ЗАЛИШКОВОЇ ДОВГОВІЧНОСТІ ФІБРОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ЛОКАЛЬНОЇ ПОВЗУЧОСТІ

**Олександр Андрейків, Ірина Долінська, Орест Райтер**

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України;*

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України*

[andreykiv@ipm.lviv.ua](mailto:andreykiv@ipm.lviv.ua); [ira\\_dolinska@ukr.net](mailto:ira_dolinska@ukr.net); [orest.raiter@gmail.com](mailto:orest.raiter@gmail.com)

Протягом останніх років не припиняються спроби створити теорії запобігання руйнування фібробетонів за довготривалого статичного навантаження і визначення їх довготривалої міцності та довговічності [1]. У даній роботі зроблена спроба на основі фізичних законів створити таку теорію, зокрема, розрахункову модель для визначення періоду росту об'ємного пошкодження фібробетону до критичного значення за довготривалого статичного навантаження. В основу даної теорії покладена розрахункова модель, яка базується на першому законі термодинаміки [2, 3] про енергетичний баланс і баланс швидкостей змін енергій в фібробетонному елементі конструкції з об'ємним пошкодженням  $V$ , який розтягується довготривалим статичним навантаженням  $P$ . Суть даного підходу полягає в наступному.

Вважаємо, що фібробетон є гомогенним ортотропним лінійно-пружним матеріалом з певними усередненими значеннями механічних та фізичних характеристик, а ріст об'ємного пошкодження  $V$  в ньому проходить стрибками. На основі цього представимо функцію енергії деформування його у вигляді двох складових – енергія деформування фібробетону під час інкубаційного періоду до стрибка росту пошкодження і енергія деформування фібробетону після стрибка. Швидкість росту пошкодження можна представити усереднено як відношення об'єму її стрибка до часу інкубаційного періоду. На основі цього і рівняння балансу швидкостей зміни енергій отримуємо рівняння для визначення швидкості росту пошкодження у фібробетоні за довготривалого статичного навантаження з відповідними початковими і кінцевими умовами.

$$\frac{dV}{dt} = \left[ \frac{\partial W_p^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} \right]_{t=\Delta t_c} / (\gamma_{CC} - \gamma_t), \quad t = 0, V(0) = V_0; \quad t = t_*, V(t_*) = V_*, \quad \max[\varepsilon(V_*)] = \varepsilon_{fbc}. \quad (1)$$

Тут  $A$  – робота зовнішніх сил;  $W_p^{(2)}(t)$  – частина роботи непружних деформацій в зоні пошкодженості, яка виділяється за постійного об'єму пошкодженості під час інкубаційного періоду підготовки стрибка його росту на  $\Delta V_c$ , залежить тільки від часу  $t$  і генерується самим тілом;  $\gamma_{CC}$  – питома по елементарному об'єму енергія руйнування при рості пошкодження у фібробетоні;  $\gamma_t$  – початкова питома енергія деформування в пошкодженому об'ємі фібробетону за навантаження  $P$ ;  $V_*$  – величина критичного об'єму пошкодженості фібробетону;  $\varepsilon_{fbc}$  – критична величина нормальної деформації;  $V_0$  – початковий об'єм пошкодженості фібробетону.

Таким чином, якщо будуть знайдені функції  $W_p^{(2)}$ ,  $A$ ,  $\gamma_{CC}$ ,  $\gamma_t$ , то визначення залишкового ресурсу  $t = t_*$  фібробетонного елемента конструкції дається співвідношенням (1). Отже, задача звелася до визначення енергетичних складових процесу деформування і руйнування фібробетону, що в свою чергу призводить до встановлення реологічних моделей його складових.

Модель застосовано під час розв'язання задачі про визначення залишкової довговічності фібробетонної плити з круговим отвором за всестороннього розтягу. При цьому використані експериментальні дані праці [1].

1. Андрейків О.Є., Скальський В.Р., Долінська І.Я., Райтер О.К. Методи оцінювання міцності і довговічності фібробетонів (огляд) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – № 3. – С. 19-36.
2. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Механіка руйнування металічних пластин при високо-температурній повзучості // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – № 2. – С. 62-68.
3. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Міцність тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами під час повзучості // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – № 2. – С. 33-39.
4. Неутов С.Ф., Сидорчук М.М., Сур'янінов М.Г. Дослідження повзучості сталеві фібробетону // Міжвуз. зб. "НАУКОВІ НОТАТКИ". – 2017. – Вип. 60. – С. 181-186.

#### CONTINUOUS MODEL FOR ASSESSMENT OF RESIDUAL LIFE TIME OF FIBER CONCRETE STRUCTURES FOR LOCAL CREEP

*In this paper, an attempt was made to create a calculation model for determining the period of growth of volumetric damage to fibro concrete to a critical value under a long-term static load. The basis of this calculation model is the first law of thermodynamics on the energy balance and the balance of the rates of energy changes in a fibro concrete element of a structure with bulky damage, which is stretched by a long-term static load. The application of this calculation model has been demonstrated when solving the problem of determining the residual life of a fibro concrete slab with a circular opening under the outstretched extension.*

УДК 539.3

## РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГОЛОВНОГО ОБТІЧНИКА З ПОЛІМЕРНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ДІЇ КОМБІНАЦІЇ МАКСИМАЛЬНИХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ

**Володимир Бабуров, Дмитро Акімов, Ігор Ларіонов,  
Дмитро Клименко, Віктор Грищак, Сергій Гоменюк**

*Державне підприємство «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна);*

*Запорізький національний університет (Україна)*

[literator11@i.ua](mailto:literator11@i.ua); [akimoff2017@gmail.com](mailto:akimoff2017@gmail.com); [klymenko\\_dv@hotmail.com](mailto:klymenko_dv@hotmail.com);  
[grk@znu.edu.ua](mailto:grk@znu.edu.ua); [gserega71@gmail.com](mailto:gserega71@gmail.com)

У пропонуваній доповіді представлені результати дослідження напружено-деформованого стану головного обтічника (ГО) ракети космічного призначення (РКП) при дії комбінації максимальних балочних навантажень і зовнішнього надлишкового тиску, що реалізуються в польоті РКП.

На рис. 1 (а-в) показаний розподіл максимальної інтенсивності напруги залежно від кута армування при комбінованій силовій дії (момент, що вигинає, зовнішній тиск, осьова і зрушуюча сили), а на рис. 2 – зіставлення розподілу інтенсивності напруги в головному обтічнику при використанні армування з кутом  $0^\circ$  і раціональної схеми армування  $78^\circ$ .

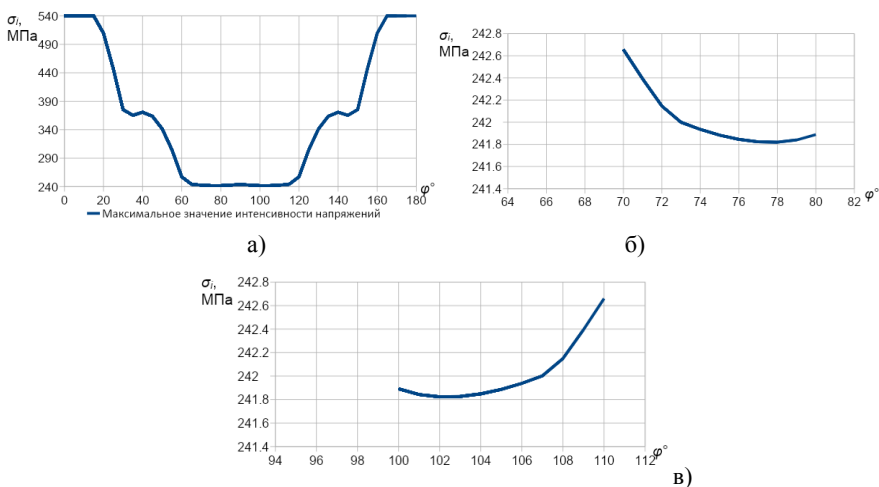


Рис. 1 Залежність максимальної інтенсивності напруження від кута армування



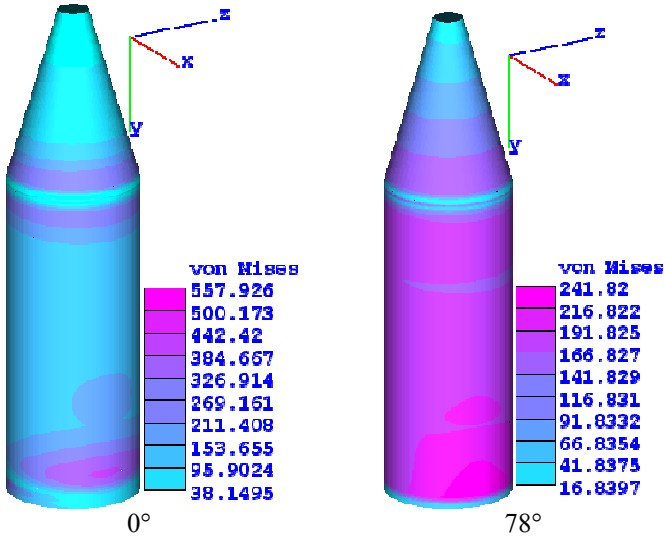


Рис. 2 Співставлення розподілу інтенсивності напруження у головному обтічнику при куті армування 0° і 78°

Спільна дія моменту, що вигинає, осьової і зрушуючої сил і зовнішнього тиску дають наступні значення для раціональних кутів намотування волокнистого композиту: 78° і 102°. З точки зору розрахунку на міцність в діапазоні кутів армування від 65° до 115° інтенсивність напруги наближується до мінімальних значень.

За допомогою скінченно-елементних моделей показаний вплив товщини заповнювача на характеристики міцності тришарової конструкції головного обтічника при різних варіантах силової дії. На рис. 3 показана залежність максимальної інтенсивності напруги (МПа) від товщини заповнювача (м) при дії надлишкового зовнішнього тиску ( $q = 0,25 \text{ кгс/см}^2$ ).

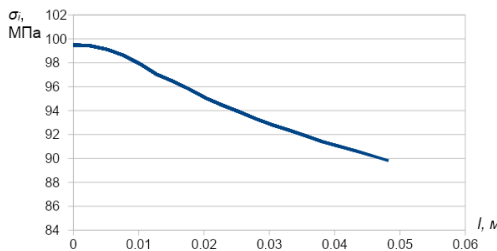


Рис. 3 Розподіл інтенсивності напруги залежно від товщини заповнювача при дії зовнішнього тиску

На рис. 4 показана залежність максимальної інтенсивності напруги (МПа) від товщини заповнювача (м) при дії комбінації ряду силових чинників – моменту, що вигинає, осьової і зрушуючої сил (лінія з трикутниками) і моменту, що вигинає, осьової і зрушуючої сил і зовнішнього тиску (лінія з квадратами).

Як можна відмітити, при дії комбінації силових чинників без зовнішнього тиску графік (рис. 4) має точку локального мінімуму (приблизно 0,008 м-кодів). Проте, визначальним силовим чинником, що впливає на функцію інтенсивності напруги, є зовнішній тиск, і, не рахуючи короткого діапазону максимальної інтенсивності напруги (приблизно 0–0,004), при подальшому збільшенні товщини заповнювача інтенсивність напруги зменшується згідно із законом близькому до лінійного.

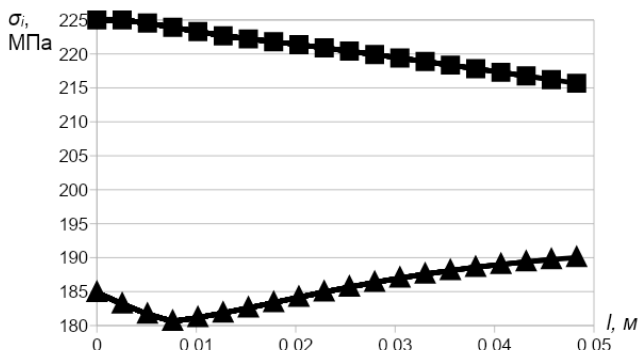


Рис. 4 Розподіл інтенсивності напруги залежно від товщини заповнювача при дії комбінацій силових чинників

Аналогічна картина спостерігається і при дії комбінації навантажень, тому в даному випадку основним чинником, що впливає на визначення товщини заповнювача, є досягнення межі міцності величиною інтенсивності напруги.

**RESULTS OF THE STRESS-STRAIN STATE ANALYSIS OF THE HEAD FAIRING FROM POLYMERIC COMPOSITE MATERIALS UNDER THE ACTION OF THE COMBINATION OF MAXIMUM POWER FACTORS**

*The report presents the results of a study of the stress-strain state of the head fairing of a space rocket (SR) under the action of a combination of maximum beam loads and external overpressure realized during the SR flight. The distribution of the maximum stress intensity in the design of the head fairing is presented, depending on the reinforcement angle and the filler thickness.*

**ФРИКЦІЙНА ВЗАЄМОДІЯ ПРОРІЗНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ  
ТА НЕОДНОРІДНОГО ЗАПОВНЮВАЧА****Олександр Бедзір, Василь Шопя***Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*[olbedzir@gmail.com](mailto:olbedzir@gmail.com); [vasyl.shopa@gmail.com](mailto:vasyl.shopa@gmail.com)

Прорізні оболонкові пружні елементи є важливою складовою відомого класу віброзахисних пристроїв [1]. З метою оптимізації оболонкових конструкцій здійснюються наукові дослідження, спрямовані на вивчення особливостей деформування пружних елементів. Для регулювання пружних характеристик та демпфувальної здатності пружних елементів пропонується використання неоднорідного заповнювача. Метою роботи є визначення напружено-деформованого стану елементів контактної системи та її жорсткості у випадку використання неоднорідного заповнювача. Вважаємо, що фізичні властивості матеріалу заповнювача лінійно змінюються вздовж осі конструкції. Моделювання роботи оболонкових пружних систем зводиться до постановки змішаних контактних задач про фрикційну взаємодію тонкостінних оболонок з деформівним заповнювачем [2].

У роботі здійснено постановку змішаної контактної задачі, яку зведено до інтегрального рівняння відносно функції розподілу контактних напружень між заповнювачем та оболонкою. Інтегральне рівняння розв'язано методом квадратур, з використанням формули трапецій з рівномірною сіткою вузлів.

На основі числових розв'язків досліджено основні властивості пружної системи в залежності від геометричних, трибологічних та фізичних характеристик контактних тіл.

1. *Шопя В.М., Величкович А.С., Величкович С.В., Шацький І.П., Попадюк І.Й., Шопя Т.В.* Оболонкові пружини. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.
2. *Шопя В.М., Шацький І.П., Бедзір О.О., Величкович А.С.* Контактна взаємодія прорізаних оболонок з деформівними тілами. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2015. – 208 с.

**A CONTACT IS WITH FRICTION OF SLOTTED CYLINDRICAL SHELL  
WITH A HETEROGENEOUS FILLER**

*The statement of the mixed problem on frictional interaction in the system which consists of cylindrical slit shells, divided by a deformable filler, is realized. Using one-dimensional shell and filler models, the integral equation for finding the contact is constructed. On the basis of numerical solutions, the effect of mechanical, geometric and tribology parameters of contacting pairs on nature of distribution of contact pressure, rigidity and strength of the system is investigated.*

## ПРО ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ БІОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ІМПЛАНТАТ-КІСТКА

**Вячеслав Богданов, Олександр Григоренко,  
Євген Сторожук, Микола Тормахов**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України*

[bogdanov@nas.gov.ua](mailto:bogdanov@nas.gov.ua); [ayagrigorenko1991@gmail.com](mailto:ayagrigorenko1991@gmail.com);  
[stevan@ukr.net](mailto:stevan@ukr.net); [plast@inmech.kiev.ua](mailto:plast@inmech.kiev.ua)

Дентальна імплантологія займає важливе місце у сучасній стоматології. Серед різноманітних конструкцій дентальних імплантатів найпоширенішими є циліндричні імплантати. Вибір найкращого імплантату значною мірою визначається якістю моделювання напружено-деформованого стану (НДС) біомеханічної системи імплантат-кістка. В даний час для розв'язання такої проблеми найчастіше використовуються чисельні методи, серед яких чільне місце займає метод скінченних елементів (МСЕ) [1, 2].

Розглянемо осесиметричну задачу про НДС біомеханічної системи, до складу якої входять циліндричний імплантат з різьбою і кісткова тканина. Моделюємо дану систему кусково-однорідним тілом обертання. Основні рівняння запишемо в циліндричній системі координат  $(z, r, \theta)$ .

Геометричні співвідношення подамо на основі залежностей Коші:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r},$$

а фізичні – згідно закону Гука:

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta];$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_z + \nu\varepsilon_\theta];$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_z + \nu\varepsilon_r]; \quad \sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{rz},$$

де  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$  і  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$  – компоненти деформацій і напружень;  $w, u$  – осьове і радіальне переміщення;  $E, \nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу імплантату або кістки.

Крайову задачу про НДС системи імплантат-кістка розв'язуємо МСЕ. Автори розробили варіант МСЕ для розв'язання задач даного класу, який ре-

алізовано у вигляді прикладних програм. Створені програми складаються з трьох окремих частин: генератора сітки скінченних елементів, програми розв'язування осесиметричних задач лінійної теорії пружності і програми видачі на друк результатів розрахунків.

Систему розв'язувальних рівнянь отримаємо з варіаційного рівняння Лагранжа:

$$2\pi \iint_{\Sigma} (\sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta} + \sigma_{rz} \delta \varepsilon_{rz}) r dr dz - \delta A = 0.$$

Тут  $\Sigma$  – область осьового перерізу системи імплантат-кістка;  $A$  – робота зовнішніх сил.

За допомогою розробленого генератора сітки скінченних елементів (СЕ) розбиваємо область  $\Sigma$  на криволінійні чотирикутні восьмивузлові елементи. В межах СЕ апроксимуємо невідомі функції  $(w, u)$  біквдратичними поліномами локальних координат  $\xi, \eta$ :

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) w^{(i)}; \quad u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u^{(i)},$$

де  $w^{(i)}, u^{(i)}$  – значення переміщень в  $i$ -му вузлі;  $N_i(\xi, \eta)$  – біквдратичні функції форми виду:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left[ (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) - (1 + \xi \xi_i)(1 - \eta^2) - (1 + \eta \eta_i)(1 - \xi^2) \right] \text{ для } i = \overline{1, 4};$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \eta \eta_i)(1 - \xi^2) - i = 5, 7; \quad N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i)(1 - \eta^2) - i = 6, 8.$$

З використанням розробленої чисельної методики і складених програм досліджено вплив геометричних параметрів різьби (форми і розмірів) на НДС біомеханічної системи імплантат-кістка та визначено їх оптимальні значення.

1. *Деменко В.Ф., Несвіт В.Ф., Воробьев А.Ю., Линецкий И.В., Ранджи З.Р.* Изучение биомеханического взаимодействия имплантатов и опорных тканей челюсти с применением метода конечных элементов // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Харьков: НАКУ “ХАИ”, 2007. – Вып. 37. – С. 53-72.
2. *Дяк І., Копитко М., Коркуна М.* Дослідження напружено-деформованого стану біомеханічної системи «коронка–циліндричний імплантат–кістка» на основі осесиметричної моделі // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 78-87.

#### ON NUMERICAL MODELING OF ELASTIC DEFORMATION OF BIOMECHANICAL SYSTEM IMPLANT-BONE

*With the help of the developed numerical method, the effect of the geometrical parameters of the thread on the stress-strain state of the implant-bone system is investigated.*

УДК 539.3+629.76+629.7.08

## НОРМАТИВНІ ОСНОВИ ОБҐРУНТУВАННЯ РЕСУРСУ СТАРТОВИХ СПОРУД РАКЕТ-НОСІЇВ КОСМІЧНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

**Вадим Гудрамович, Володимир Сіренко, Етері Гарт,  
Дмитро Клименко, Юрій Данісв**

*Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України;  
Державне підприємство «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна);  
Дніпровський національний університет ім. О. Гончара (Україна)*

[hdramovich@i.ua](mailto:hdramovich@i.ua); [v.sirenko@ukr.net](mailto:v.sirenko@ukr.net); [hart@ua.fm](mailto:hart@ua.fm); [klymenko\\_dv@hotmail.com](mailto:klymenko_dv@hotmail.com)

Стартові споруди успішно функціонують в різних країнах світу, де роботи в галузі ракетно-космічної техніки є пріоритетними. Вони призначені для пусків космічних ракет-носіїв, основна мета яких – виведення на колоземну орбіту космічних апаратів різного призначення. Такі споруди мають особливості, виходячи з типу і потужності ракет-носіїв, особливостей їх експлуатування [7, 9, 11]. Різноманітні питання, які виникають при створенні нормативних основ розрахунку ресурсу стартових споруд, пов'язані з розгляданням спеціальних задач міцності і ресурсу елементів споруд та конструкцій ракет-носіїв [2, 4, 6, 7, 11]. За граничний ресурс можливо вважати критичний час роботи або число циклів (пусків) за цей час, після проведення яких в небезпечних зонах несучих елементів досягаються задані граничні стани: руйнування з виникненням тріщин, недопустимих пластичних деформацій, локальної втрати стійкості, розвитку корозійних пошкоджень та ін. [1, 2, 4]. Розглянуто питання визначення пошкоджень які є небезпечні при експлуатуванні та вибору гіпотез їх підсумовування, а також критеріїв граничного стану [1, 2, 4, 5].

Розрахунки за оцінкою ресурсу здійснюються з використанням аналітичних і числових методів. Останні для складних неоднорідних елементів конструкцій змінної жорсткості при урахуванні різноманітних контактних явищ, особливостей взаємодії, навантажень і елементів конструкцій (в т.ч. локальні ефекти), використання моделей фізично і геометрично нелінійного деформування і руйнування, є пріоритетними (особливо при інженерних розрахунках).

При розрахунках використовуються пакетні комплекси розрахункових програм. Використання ліцензованих пакетів (ЛП) (зокрема на основі методу скінченних елементів) для відповідальних розрахунків є зазвичай умовою замовника. Вказані ЛП мають відомі особливості. При необхідності оперативного проведення великої кількості розрахунків (відпрацювання конструкцій) іноді доцільно створення проєкційно-ітераційних схем розрахунку (для методів скінченних елементів, скінченних різниць, локальних варіацій) особливо при наявності локальних концентраторів НДС (вирізи, включення, тріщини), пластичному деформуванні і повзучості матеріалу, що дає особливості розра-

хунку (побудова схем послідовних наближень в кожному вирішуються задачі теорії пружності) [8]. Відмічено, що наявність суперкомп'ютерів, які суттєво зменшують час розрахунків, робить пріоритетним розрахунки на основі ЛП для числових методів.

Розглянуто методологічні етапи розрахунку, надана класифікація елементів стартового обладнання (з використанням теорії ієрархічних систем [3]), термомеханічних навантажень великої інтенсивності [6]. Для підрахування числа пусків, що визначають ресурс, використовується поняття малої багаточислової втоми [4, 5, 10]. При розробці нормативних основ розрахунку ресурсу доцільне використання сучасних експериментальних методів, методів технічної діагностики (зокрема при неруйнівному навантаженні – голографічної інтерферометрії і акустичної емісії) [1, 5].

1. *Мак-Ивили А.Дж* Анализ аварийных разрушений: пер. с англ. – Москва: Техносфера, 2010. – 416 с.
2. *Проблемы прочности, техногенной безопасности и конструкционного материаловедения* / Под ред. Н.А. Махутова, Ю.Г. Матвиенко, А.Н. Романова – Москва: Ленанд, 2018. – 720 с.
3. *Месарович М., Махо Д., Токахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем: пер. с англ. – Москва: Мир, 1973. – 344 с.
4. *Прочность, ресурс, живучесть и безопасность машин* / Отв. ред. Н.А. Махутов. – Москва: Книжн. дом «Либроком», 2019. – 576 с.
5. *Технічна діагностика матеріалів і конструкцій: Довідн. посібн. у 8 т.* / За ред. З.Т. Назарчука. – Львів: Простір, 2016.
6. *Технологические объекты наземной инфраструктуры ракетно-космической техники* / Под ред. И.В. Бармина. – Москва: Полиграфикс РПК, 2005. – Кн. 1. – 412 с.; 2006. – Кн. 2. – 376 с.
7. *Шестидесять лет в ракетостроении и космонавтике* / Под общ. ред. А.В. Дегтярева. – Днепропетровск: АРТ Пресс, 2014. – 540 с.
8. *Hudratovich V.S., Hart E.L., Rjabokon S.A.* Plastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Math. Eng. – 2013. – 78, No. 1. – P. 181-197.
9. <http://www.yuzhnoe.com/presscenter/media/photo/technique/launch-vehique>.
10. *Manson S.S., Halford G.R.* Fatigue and durability of structural materials. – Ohio, USA: ASM Int. Mater. Park, 2006. – 456 p.
11. *Song Z.* Test and launch control technology for launch vehicles. – Beijing: Nat. defence, Industry Press / Singapore: Springer, 2018. – 256 p.
12. *Spacecraft systems engineering* / Ed. P. Fortescue, G. Swinerd, J. Stark. – New York: John Wiley&Sons, Ltd., Publ., 2011. – 712 p.

#### REGULATORY FRAMEWORK FOR THE JUSTIFICATION OF THE RESOURCE LAUNCH FACILITIES FOR SPACE LAUNCH VEHICLES

*Approaches to a substantiation for normative bases for calculation of a resource of elements of starting complexes of the space launch vehicles intended for a conclusion into a circumterrestrial orbit of space apparatus of various purpose are determined. Classification of the launch facilities elements, thermomechanical loadings and technological and operational defects are given. The considered schemes take into account concepts a little and much cyclic weariness. Quickly converging projective-iterative schemes of numerical methods are proposed. The need to use methods of technical diagnostics for non-destructive testing are noted.*

## СУКУПНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ СТОПИ ТА РУХУ ДВОНОГОГО КРОКУЮЧОГО РОБОТА

Мирослав Демидюк, Богдан Литвин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[demydyuk@iapmm.lviv.ua](mailto:demydyuk@iapmm.lviv.ua); [b\\_lytwyn@ukr.net](mailto:b_lytwyn@ukr.net)

Серед експлуатаційних характеристик мобільних автономних систем (зокрема, крокуючих роботів) важливим є рівень енергоспоживання. Обмеженість енергетичних ресурсів, необхідних для переміщення таких систем, робить актуальними задачі оптимізації їх конструкцій та режимів керування.

Нижче досліджуємо задачу сукупної оптимізації законів руху двоногого робота (антропоморфного типу) та конструктивних параметрів його стоп. Робот переміщується (крокує вздовж прямої лінії) по нерухомій горизонтальній поверхні. Для моделювання його руху використовуємо систему дев'яти твердих тіл: корпус та дві однакові чотириланкові нижні кінцівки (стегно, гомілка, дволанкова стопа); тіла послідовно з'єднані між собою циліндричними шарнірами, осі яких ортогональні сагітальній площині. Рух системи відбувається під дією керівних моментів сил у шарнірах (вектор  $\mathbf{M}$ ), сили тяжіння та реакції опорної поверхні.

Ходу робота моделюємо на проміжку подвійного кроку  $[0, T]$  у класі симетричної ходи (рух однієї ноги повторює рух іншої із запізненням у часі  $T/2$ ). При цьому на ходу робота накладаємо умови антропоморфності переміщення: а) природний рух стоп (перекат через п'ятку, опора на всю стопу, плюснефаланговий перекач, перекач через носок, перенесення стопи) з відповідними ритмічними, кінематичними та динамічними обмеженнями; б) двосторонні обмеження (виду  $v^0(t) \leq v(t) \leq v^1(t)$ ) на міжланкові кути нижніх кінцівок. За оптимізуючі параметри стопи (вектор  $\mathbf{c}$ ) приймаємо такі три безрозмірні (віднесені до довжини стопи) параметри: положення гомілковостопного шарніра відносно основи стопи (довжина п'ятки та відстань від гомілковостопного шарніра до основи стопи), довжину передньої частини (носки) стопи,  $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$ , де  $\mathbf{C}$  – множина допустимих значень. Формулюємо таку задачу. Для заданих довжини та тривалості одинарного кроку робота визначити такі параметри стопи  $\mathbf{c}^* \in \mathbf{C}$  та керування  $\mathbf{M}^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , які з огляду на накладені обмеження мінімізують заданий функціонал:  $E[\mathbf{c}, \mathbf{M}] \xrightarrow[\mathbf{c}, \mathbf{M}]{} \min$ .



Ефективною в дослідженні сформульованої задачі є методика параметричної оптимізації [1-5]. Відповідно до кількості ступенів вільності системи на ритмічних фазах руху вводимо множину незалежно варійованих функцій, які апроксимуємо кубічними згладжувальними сплайнами з невідомими параметрами (вектор  $\mathbf{z}$ ) у вузлах. Накладені на рух робота обмеження задовольняємо методом штрафних функцій, заздалегідь звівши їх до інтегрального вигляду. Статичну невизначеність системи на двоопорних фазах руху вирішуємо довизначенням (за допомогою кубічних Ермітових многочленів) відповідних характеристик за їх граничними значеннями на суміжних одноопорних фазах та значеннями перших похідних у граничних точках (останні також добавляємо до параметрів оптимізації). Далі, використовуючи підхід обернених задач динаміки, із рівнянь руху знаходимо параметричне сімейство керувань  $\mathbf{M}(t, \mathbf{c}, \mathbf{z})$ , що зводить цільовий функціонал до функції багатьох змінних  $\tilde{E}[\mathbf{c}, \mathbf{z}]$ . Остаточо одержуємо задачу нелінійного математичного програмування  $P(\mathbf{z}, \mathbf{c}) + \langle \lambda, \mathbf{V}(\mathbf{z}) \rangle \xrightarrow{\mathbf{z}, \mathbf{c}} \min$ , де  $\lambda$  – вектор штрафних коефіцієнтів, вектор-функцію  $\mathbf{V}(\mathbf{z})$  отримуємо із відповідних обмежень вихідної задачі з урахуванням їх інтегрального подання. Для розв’язання отриманої задачі використовуємо числові процедури математичного програмування.

Запропонований алгоритм реалізовано у вигляді комплексу програм (у середовищі Inprise Delphi 7). Проведено серію числових експериментів, які підтвердили ефективність алгоритму та програмного комплексу. Під час обчислень встановлено, що зазначені вище лінійні розміри стопи суттєво впливають на енергетичні характеристики крокуючого робота.

1. Бербюк В.Є., Демидюк М.В., Литвин Б.А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двоногого крокуючого робота // Вісник Київ. ун-ту. Сер. Кібернетика. – 2002. – № 3. – С. 17-20.
2. Демидюк М.В., Литвин Б.А., Голуб Б.М. Параметрична оптимізація ходи двоногого робота // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 162-171.
3. Demidyuk M.V. Parametric optimization of four-link close-chain manipulator with active and passive actuators // J. Math. Sci. – 2010. – 168, No. 5. – P. 746-758.
4. Demidyuk M.V., Lytwyn B.A. The Mathematical Modeling of the Human Gait with Ankle Hinged Orthosis // J. Automation Information Sci. – 2015. – 47, No. 4. – P. 64-77.
5. Demidyuk M.V., Lytwyn B.A. Optimization of the Parameters and Motion Control Modes of the Bilegged Walking Robot // J. Automation Information Sci. – 2016. – 48, No. 12. – P. 48-61.

#### JOINED OPTIMIZATION OF BIPEDAL WALKING ROBOT FEET PARAMETERS AND MOVEMENT

*The algorithm and software for joined optimization of the bipedal walking robot gait and its feet sizes are developed. Algorithm is based on parametric optimization methodology (with using cubic smoothing splines) and numerical procedures of nonlinear programming.*

## ДО ПРОБЛЕМИ ПОДОВЖЕННЯ ТЕРМІНІВ ЕКСПЛУАТАЦІЇ КОТЛОАГРЕГАТИВ ЕНЕРГОБЛОКІВ ТЕПЛОВИХ ЕЛЕКТРОСТАНЦІЙ

**Богдан Дробенко, Степан Будз, Володимир Асташкін**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[drobenko@ukr.net](mailto:drobenko@ukr.net); [budz@iapmm.lviv.ua](mailto:budz@iapmm.lviv.ua)

Проблеми забезпечення надійності енергообладнання і подовження термінів його експлуатації належать до найактуальніших в енергетиці. На ТЕС України експлуатується велика кількість енергоблоків різної потужності, зокрема 43 – потужністю 200 МВт. Практично всі вони оснащені котлоагрегатами барабанного типу і 95% з них вичерпало свій парковий ресурс.

Після вичерпання паркового ресурсу котлоагрегат поглиблено діагностують, вимірюють фактичні розміри окремих елементів, досліджують структуру і властивості металу, визначають накопичену пошкоджувальність в металі, досліджують напружено-деформований стан в елементах котлоагрегату за різних режимів його промислової експлуатації тощо. За результатами досліджень встановлюють ресурс кожного елемента. Надійність роботи котлоагрегату забезпечують шляхом розв'язання багатьох задач, з-поміж яких оцінка напружено-деформованого стану його окремих вузлів виходить на перший план. Ці дані використовують при прийнятті рішень про подальшу експлуатацію чи заміну елементів, а також для оцінки впливу ремонтних заходів на можливість подовження термінів їх експлуатації.

Контур циркуляції котлоагрегату складається з барабана, водоопускних труб, розподільчих колекторів, екранних труб, колекторів пароводяної суміші та паровідвідних труб, які замикають циркуляційний контур на барабан (див. рис. 1). Котлоагрегат працює за високої температури і тиску.

Розглянуто загальний підхід до оцінювання міцності і залишкового експлуатаційного ресурсу котлоагрегату на основі загальних співвідношень неізотермічної термoprужно-пластичності, що дає змогу врахувати складну геометричну форму окремих елементів котлоагрегату, нелінійний характер їх деформування, а також термочутливість властивостей матеріалів.

З використанням розробленого на цій основі програмного забезпечення досліджено напружено-деформований стан елементів діючих котлоагрегатів типу ТП-10 та ТП-100, які вичерпали свій парковий ресурс, з метою встановлення можливості продовження їх експлуатації на певні, чітко окреслені терміни. Проаналізовано напружено-деформований стан барабанів, штуцерів, колекторів, екранних труб з пошкодженнями й дефектами.

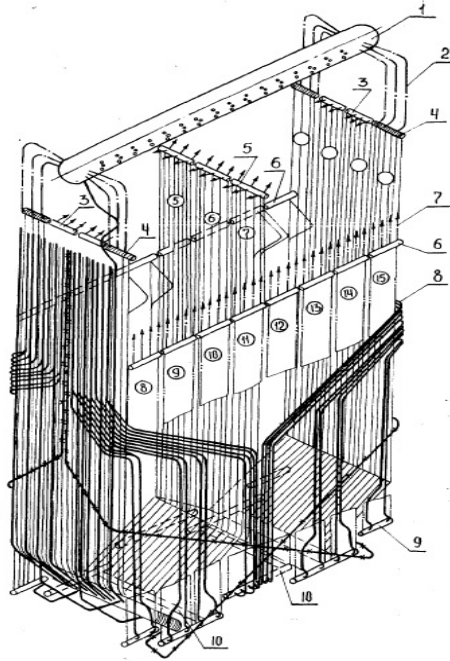


Рис. 1 Схема циркуляції котлоагрегату:

- 1 – барабан, 2 – паропідвідні труби з тильного екрану, 3 – верхні колектори тильного екрану, 4 – верхній колектор соляних відсіків, 5 – верхній колектор двостороннього екрану, 6 – верхній колектор бокового екрану, 7 – паровідвідні труби з верхніх колекторів бокового екрану, 8 – водоопускні труби, 9 – нижній колектор, 10 – нижні колектори двостороннього екрану

На основі результатів обчислювальних експериментів обґрунтовано технологію виконання ремонтних робіт в елементах котлоагрегатів типу ТП-10 та ТП-100 з метою подовження термінів їх експлуатації. Отримано кількісні оцінки залишкового експлуатаційного ресурсу барабанів після виконання відповідних ремонтних робіт і зроблено висновок про можливість подальшої експлуатації котлоагрегатів на конкретні терміни за чітко окреслених режимів їх роботи.

**TO THE PROBLEM OF PROLONGATION OF AN OPERATIONAL LIFE OF POWER PLANT BOILERS WITH DAMAGES**

*The approach for determination of a stress-strength state of boiler units with operational damages to study of a possibility of their further using is considered. The results of the stress-strength state simulation of acting boiler units are presented. The quantitative evaluations for the possibility of their further operation have obtained.*

## ДО ОЦІНЮВАННЯ МІЦНОСТІ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ

**Богдан Дробенко, Дмитро Клименко,  
Володимир Харченко, Володимир Сіренко**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Державне підприємство «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна)*

[drobenko@ukr.net](mailto:drobenko@ukr.net); [yolod.kharchenko@meta.ua](mailto:yolod.kharchenko@meta.ua)

Оцінка експлуатаційного ресурсу тонкостінних конструкцій істотно залежить від точності й достовірності даних про напружено-деформований стан у них за умов експлуатації. Тому надзвичайно важливим є комп'ютерне моделювання процесів деформування таких конструкцій в рамках уточнених математичних моделей.

Тонкостінні конструкції часто мають надзвичайно складну геометричну форму. Внаслідок локального впливу геометричних концентраторів на напружено-деформований стан таких конструкцій кількісний опис процесів деформування в них в рамках теорій оболонок може призводити до значних відхилень отримуваних результатів від фактичних в околах різкої зміни геометричної конфігурації. Тому іноді варто розглядати тонкостінну конструкцію як тривимірне тверде тіло. При проектуванні тонкостінних конструкцій також важливо визначити руйнівне навантаження, що спонукає використовувати геометрично і фізично нелінійні математичні моделі.

З огляду на зазначене, для оцінювання міцності тонкостінних конструкцій використано орієнтований на використання методу скінченних елементів варіант методики розв'язування геометрично нелінійних задач теорії пружно-пластичності в приростах на основі Лагранжевого підходу із застосуванням принципу віртуальних переміщень [1], відповідно до якого розв'язок базових рівнянь, що виражають рівновагу і умови сумісності тіла, отримуємо для дискретних моментів часу  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ . Усі змінні при цьому віднесені до початкової конфігурації тіла (за повного Лагранжевого формулювання), або конфігурації тіла, отриманої в момент часу  $t$  (за адаптованого формулювання), а прирости переміщень  $\mathbf{u}$  вузлів скінченно-елементного поділу тіла на кроці навантаження  $[t, t + \Delta t]$  визначено із рівняння [1]

$$[\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{F}.$$

де  $[\mathbf{K}]$  і  $\mathbf{F}$  отримано шляхом підсумовування відповідних матрично-векторних характеристик окремих скінченних елементів вигляду:

$$[\mathbf{K}]^{(e)} = \int_{0_V} [{}^t_0 \mathbf{B}_L]^T [{}_0 \mathbf{C}] [{}^t_0 \mathbf{B}_L] d^0V + \int_{0_V} [{}^t_0 \mathbf{B}_{NL}]^T [{}^t_0 \mathbf{S}] [{}^t_0 \mathbf{B}_{NL}] d^0V ;$$

$$\mathbf{F}^{(e)} = {}^t_0 \mathbf{F} = \int_{0_V} [{}^t_0 \mathbf{B}_L]^T [{}^t_0 \hat{\mathbf{S}}] d^0V$$

за використання повного Лагранжевого формулювання і

$$[\mathbf{K}]^{(e)} = \int_{t_V} [{}^t_t \mathbf{B}_L]^T [{}_t \mathbf{C}] [{}^t_t \mathbf{B}_L] d^tV + \int_{t_V} [{}^t_t \mathbf{B}_{NL}]^T [{}^t_t \hat{\boldsymbol{\tau}}] [{}^t_t \mathbf{B}_{NL}] d^tV ;$$

$$\mathbf{F}^{(e)} = {}^t_t \mathbf{F} = \int_{t_V} [{}^t_t \mathbf{B}_L]^T [{}^t_t \hat{\boldsymbol{\tau}}] d^tV$$

за адаптованого Лагранжевого формулювання. У цих залежностях  $[\mathbf{B}_L]$ ,  $[\mathbf{B}_{NL}]$  – матриці геометричних співвідношень теорії пружності в скінченно-елементному представленні (враховують відповідно лінійні й нелінійні члени);  $[\mathbf{C}]$  – пружно-пластична матриця стану;  $[\hat{\mathbf{S}}]$  та  $[\hat{\boldsymbol{\tau}}]$  – матриці, скомпоновані з компонент тензорів Піоли-Кірхгофа 2-го роду та Коші [1] (лівий верхній індекс вказує на те, що змінні обчислені в момент часу  $t$ , а лівий нижній – що змінні віднесено до конфігурації в моменти часу 0, або  $t$ ).

Досліджено напружено-деформований стан паливного бака ракетного двигуна за дії внутрішнього тиску. Бак являє собою тонкостінну циліндричну посудину діаметром близько 4 м і довжиною 18 м, яка складається з 11 циліндричних обичайок різних типів. На внутрішніх поверхнях обичайок наявні регулярні системи стрингерів і шпангоутів, що надає їм вафельної структури. На кінцях циліндр закритий сферичними днищами.

Комп'ютерне моделювання процесів деформування паливного бака за дії внутрішнього тиску виконано в рамках різних модельних припущень. Зокрема досліджено його напружено-деформований стан з використанням оболонкової, осесиметричної та тривимірної теорії пружно-пластичності. Розглянуто випадки геометрично лінійного і нелінійного деформування. Визначено найнавантаженіші місця баку, з яких ймовірно і почнеться руйнування. Отримано оцінки для руйнівного навантаження в рамках розглянутих математичних моделей.

1. *Bathe K.J.* Finite Element Procedures Analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995. – 1037 p.

#### TO ESTIMATION OF THE STRENGTH OF A THIN-WALLED STRUCTURES

*The stress-strain state of a thin-walled structure of complex geometric shape under pressure is studied within the model of a geometrically and physically non-linear three-dimensional solid. The destructive pressure is determined. The results obtained within the theory of shells and the approach of an axisymmetric body are also given. The comparative analysis of obtained results is fulfilled.*

УДК 539.3

## **МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ТРИМКОЇ ЗДАТНОСТІ КОМБІНОВАНОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО БАЛОНА ВИСОКОГО ТИСКУ**

**Тетяна Дяченко, Дмитро Клименко, Анатолій Скочко**

*Державне підприємство «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна)*

[klymenko\\_dv@hotmail.com](mailto:klymenko_dv@hotmail.com)

У пропонованій роботі розроблено підхід до визначення тримкої здатності комбінованого композиційного балона високого тиску при тривалому навантаженні внутрішнім надлишковим тиском. Балон є тонкостінною двошаровою сферичною оболонкою. Його внутрішній шар забезпечує герметичність, а зовнішній шар є несучою оболонкою, яка сприймає діючі навантаження. Наведено опис запропонованої методики, а також: результати дослідження напружено-деформованого стану, оптимальні кути армування для багатозонного намотування армуючих шарів і їх товщин. Для заданих геометрії балона, параметрів армування, фізико-механічних характеристик застосовуваних матеріалів, рівнів експлуатаційного, випробувального і руйнівного тиску визначені: мінімальна товщина несучої армуючої оболонки з вуглепластика, меридіональні й кільцеві зусилля, напруження та коефіцієнти запасу міцності.

### **THE METHODOQUE OF DETERMINING THE PERMANENT ABILITY OF THE COMBINED COMPOSITION HIGH PRESSURE BALLOON**

*In the present work, an approach is developed to determine the holding capacity of a combined balloon under prolonged internal excess pressure loading.*

**МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ МАЛОГАБАРИТНОГО РАКЕТНОГО  
ДВИГУНА ТВЕРДОГО ПАЛИВА**

**Ольга Журавльова, Володимир Харченко**

*Державне підприємство «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна)*

[olgataran717@gmail.com](mailto:olgataran717@gmail.com); [kharchenkovm@science.yuzhnoye.com.ua](mailto:kharchenkovm@science.yuzhnoye.com.ua)

На початковій ділянці траєкторії польоту ракети вона зазнає різноманітних збурюючих впливів. Для їх компенсації використовуються двигуни блоків імпульсної кореляції. Вони розміщуються у хвостовому відсіку ракети блоками із семи двигунів у чотирьох площинах стабілізації. Їхній запуск відбувається за командами бортової системи керування ракетою. Міцність і надійність вказаних двигунів є одним із найважливіших факторів, що забезпечує проходження ракетою заданої траєкторії.

Складність будови конструкції двигуна та необхідність урахування контактної взаємодії деталей зумовлює застосування для розрахунку його міцності метод скінченних елементів, зокрема його реалізацію у програмному комплексі ANSYS.

При розробленні розрахункової моделі двигуна врахована симетричність його будови, що дало можливість розглядати половину конструкції у тривимірній постановці. Скінченноелементне розбиття об'єму двигуна побудоване на основі восьмивузлових шестигранних просторових елементів. Контактна взаємодія деталей врахована шляхом використання контактних скінченних елементів типу поверхня-поверхня.

Визначення напружено-деформованого стану конструкції ракетного двигуна здійснено в нелінійній постановці при роботі двигуна на максимальному режимі. Отримано розподіли компонент тензорів деформацій і напружень у конструкції, що дає можливість оцінити її міцність.

З метою верифікації отриманих числових результатів було проведено наземне експериментальне відпрацювання вказаного ракетного двигуна. Отримана достатньо добра збіжність розрахункового значення руйнівного навантаження з даними експериментальних статичних випробувань, що підтверджує правильність запропонованого методичного підходу.

**METHOD OF CALCULATION OF SMALL-SIZED SOLID FUEL ROCKET ENGINES**

*By verifying the numerical results, a ground-based experimental test of the missile rocket engine was carried out. A sufficiently good convergence of the calculated value of the fracture load was obtained with the experimental static test data, which confirms the correctness of the proposed methodological approach. A sufficiently good convergence of the calculated value of the fracture load was obtained with the experimental static test data, which confirms the correctness of the proposed methodological approach.*

УДК 539.3

## НЕОБХІДНІ УМОВИ ВІДСУТНОСТІ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНОМУ ДОВГОМУ СТЕРЖНІ З ПРЯМОКУТНИМ ПЕРЕРІЗОМ І МОЖЛИВІСТЬ ЇХ РЕАЛІЗАЦІЇ

Богдан Калиняк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[b-kalynyak@litech.net](mailto:b-kalynyak@litech.net)

Отримано умови відсутності термонапружень у довгому неоднорідному прямокутному у перерізі стержні, викликаних плоским стаціонарним полем. Умову  $\alpha(z)(T(z)-T_0)=const$ , яка забезпечує відсутність напружень та сталу деформацію у перерізі, перпендикулярному до довжини стержня, використано для визначення температурного поля. Це температурне поле, отримане з умови відсутності напружень, повинно задовольняти рівняння теплопровідності та умови конвективного теплообміну на межах прямокутника. Тому температури гріючих середовищ, коефіцієнти теплообміну і характеристики матеріалів повинні бути узгодженими.

Отримані вирази для розподілів температур на поверхні, коефіцієнтів теплообміну, теплових джерел, які забезпечують відсутність термонапружень. Розрахунки з характеристиками існуючих матеріалів вказують на можливість досягнення стану з нульовими напруженнями, навіть при перепаді температур між поверхнями в декілька сотень градусів Кельвіна. Для окремих випадків функціональної залежності коефіцієнтів теплопровідності та теплового лінійного розширення від координат можна забезпечити відсутність напружень без внутрішніх джерел тепла.

Вихідними положеннями є задача незв'язаної термопружності у напруженнях, стаціонарна задача теплопровідності з коефіцієнтом теплопровідності та умовами конвективного теплообміну, залежними від двох координат.

### NECESSARY CONDITIONS OF THE ABSENCE OF THERMAL STRESSES IN INFINITE BEAM WITH RECTANGULAR CROSS-SECTION AND THE POSSIBILITY OF THEIR REALIZATION

*The necessary conditions of absence of thermal stresses induced by thermal field in a long inhomogeneous beam with rectangular cross-section in conditions of convective heat exchange with environment have been determined. In the case of constant axial strain accordance conditions under thermomechanical characteristics of material, parameters of heat exchange have been formulated. The temperature field and distribution of environment heat exchange on the sides of rectangle which guarantee the absence of stresses in the beam have been numerically calculated for real functionally graduated material.*



**МОДЕЛЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕХРЕСНО АРМОВАНИХ КОМПОЗИТИВ  
З УРАХУВАННЯМ ПРОСТОРОВОГО ХАРАКТЕРУ  
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ**

**Михайло Марчук, Володимир Харченко,  
Микола Хом'як, Віра Пакош**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Національний університет «Львівська політехніка» МОН України;  
Державне підприємство «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна);*

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

[mv\\_marchuk@ukr.net](mailto:mv_marchuk@ukr.net)

Ефективне використання полімерних композиційних матеріалів в конструкціях ракетно-космічної техніки потребує наявності детальної інформації про їх фізико-механічні характеристики [2, 4, 5]. При розрахунках на міцність конструкцій із шаруватих полімерних композиційних матеріалів за допомогою пакетів скінченно-елементного аналізу таких, як ANSYS, з використанням звичайних об'ємних скінченних елементів є необхідність у побудові моделі матеріалу зі зведеними фізико-механічними характеристиками [1].

На основі даних про термопружні властивості шарів побудована тривимірна модель з урахуванням просторового характеру напружено-деформованого стану для знаходження фізико-механічних характеристик перехресно армованого полімерного композитного матеріалу.

Використання матричної форми співвідношень термопружності Дюамеля-Неймана дало змогу отримати уточнені формули для визначення ефективних пружних констант і коефіцієнтів температурного розширення. Виявлено, що у випадку симетричного перехресного армування в межах двошарової моделі композит є ортотропним матеріалом.

У пропонованій роботі показана адекватність відображення побудованою моделлю специфічних ефектів при деформуванні сучасних композитів, зокрема, можливість визначити діапазон кутів армування, при яких проявляються ауксентичні властивості [3]. Побудована структурна модель шаруватого композиційного матеріалу дозволяє шляхом розрахунків на міцність в повній мірі показати переваги композиційних матеріалів у порівнянні з традиційними.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень” КПКВК 6541230.

1. *Немировский Ю.В., Янковский А.Н.* Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – **13**, № 1. – С. 3-32.
2. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of Composite Structural Elements: Second Edition. – Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2018. – 503 p.
3. *Rana S., Figueiro R.* Advanced Composite Materials for Aerospace Engineering: Processing, Properties and Applications. – Woodhead Publishing, 2016. – 474 p.
4. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, 2nd ed. – CRC Press LLC, 2004. – 832 p.
5. *Vasiliev V.V., Morozov E.V.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures: Fourth Edition. – Elsevier, 2018. – 856 p.

**MODEL FOR DETERMINATION OF PHYSICAL-MECHANICAL CHARACTERISTICS OF THE CROSS-REINFORCED COMPOSITES TAKING INTO ACCOUNT THE SPATIAL NATURE OF THE STRESS-STRAIN STATE**

*The constructed structural model of layered composite material allows, by calculating strengths, to fully show the advantages of composite materials in comparison with traditional ones.*

**ВПЛИВ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ПОШАРОВОГО  
ФОРМУВАННЯ ВИРОБІВ З ТИТАНОВОГО СПЛАВУ ВТ6  
З ВИКОРИСТАННЯМ ЕЛЕКТРОННО-ПРОМЕНЕВОГО  
НАПЛАВЛЕННЯ НА ЕКСПЛУАТАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

**Олег Махненко, Степан Кандаля,  
Андрій Бабенко, Нікіта Ананченко**

*Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України;  
НТУУ «КПІ» ім. Сікорського (Україна)*

[makhnenko@paton.kiev.ua](mailto:makhnenko@paton.kiev.ua)

У даний час адитивні технології у виробництві конструкційних елементів з титанових сплавів є напрямом що стрімко розвивається, у першу чергу в аерокосмічній індустрії. В Україні успішно розробляється технологічний процес електронно-променевого наплавлення (ЕПН) xBeam 3D MetalPrinter [1]. Для оптимізації технологічних параметрів цього процесу доцільним є використання математичного моделювання [2].

Для чисельного аналізу кінетики температурних розподілів при пошаровому формуванні виробу шляхом ЕПН використовувався скінченно-елементний розв'язок тривимірного нестационарного рівняння теплопровідності. Також була розроблена 3D модель кінетики пружно-пластичних деформацій при наплавленні для визначення залишкових деформацій та напружень. Для скорочення часових витрат на розв'язок задачі була також розроблена 2D модель температурної задачі.

Різниця швидкості охолодження матеріалу ВТ6 у різних шарах при формуванні таврового зразка довжиною 70 мм на підкладці товщиною 8 мм і товщиною стінки 3 мм викликає суттєву нерівномірність розміру зерна та кількості мартенситної  $\alpha'$  фази у  $\alpha+\beta$  сплаві, відповідно механічних властивостей матеріалу. Запропоновані оптимізовані параметри наплавлення, а саме, час затримки  $\Delta t$  між наплавленням матеріалу у перерізі і температура попереднього підігріву підкладки. Найбільш оптимальні механічні характеристики, а також більш рівномірна структура матеріалу зразка на верхніх шарах отримані при  $\Delta t=29$  с (рис. 1). Попередній підігрів підкладки при оптимізованому часі затримки між наплавленням валиків робить більш рівномірною структуру на нижніх шарах і суттєво покращує пластичність матеріалу. Також було проведено порівняння залишкових прогинів (рис. 2а) і напружень

(рис. 2б) зразка при різному часі затримки  $\Delta t$  (табл. 1).

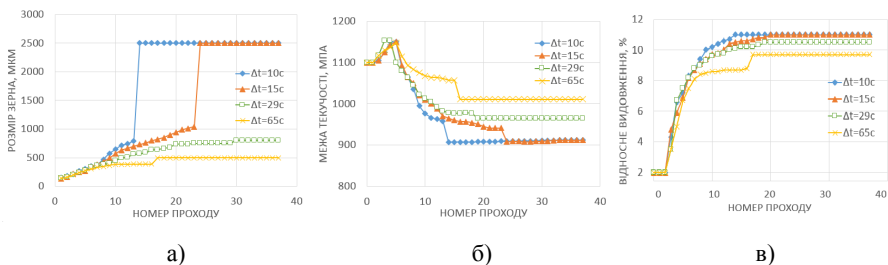


Рис. 1

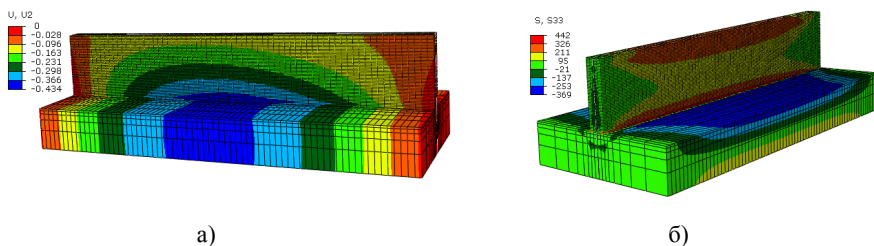


Рис. 2

Таблиця 1 Залишкові прогини і напруження в залежності від часу  $\Delta t$  затримки між проходами наплавлення.

$\Delta t$ , сек.	Залишковий прогин, мм	Залишкові напруження, МПа		
		Повздовжні	Поперечні	По товщині
10	0.39	483/-325	350/-189	175/-180
29	0.43	505/-364	360/-286	193/-183
65	0.48	423/-411	420/-288	234/-184

**Висновки:** Експлуатаційні характеристики деталей, виготовлених з титанового сплаву ВТ6 за допомогою адитивної технології ЕПН, значно залежать від режимів охолодження матеріалу при наплавленні. На основі математичного моделювання проведена оптимізація технології для отримання рівномірної структури та механічних властивостей. На основі розробленої математичної моделі кінетики НДС при пошаровому формуванні виробів отримані результати щодо залишкових напружень і деформацій.

1. Ковальчук Д.В., Мельник В.И., Мельник И.В. Новые возможности аддитивного производства с технологией xBeam 3D Metal Printing / Сб. трудов VIII межд.

конф. «Лучевые технологии в сварке и обработке материалов». – Киев, 2017. – С. 45-52.

2. Махненко О.В., Миленин А.С., Великоиваненко Е.А. и др. Моделирование температурных полей для различных типов трехмерных образцов при их послойном формировании на оборудовании электронно-лучевой наплавки xBeam 3D Metal Printer / Сб. трудов VIII межд. конф. «Лучевые технологии в сварке и обработке материалов». – Киев, 2017. – С. 63-68.

**THE INFLUENCE OF TECHNOLOGICAL PARAMETERS OF THE LAYER FORMATION BY EBW OF STRUCTURE ELEMENTS FROM TITANIUM ALLOY VT6 ON OPERATING CHARACTERISTICS**

*The operating characteristics of structure elements made of titanium alloy BT6 using additive EBW technology depend significantly on the cooling rates of the material upon cladding. Based on mathematical modeling technology optimization was performed to obtain a uniform structure and mechanical properties. The results of residual stresses and deflections were obtained by using the developed FE model of the kinetics of stress strain state during the layer-by-layer forming of structure elements.*

УДК 621.791.052:539.4

## РОЗРОБКА ЗВАРНИХ КОНСТРУКЦІЙ НЕСУЧИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВІЗКА ВАНТАЖНОГО ВАГОНУ З ПІДВИЩЕНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОПОРУ ВТОМІ ТА ЖИВУЧОСТІ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Олег Махненко, Антон Пустовой, Галина Саприкіна

*Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України*

[makhnenko@paton.kiev.ua](mailto:makhnenko@paton.kiev.ua)

Останніми роками на залізницях простору 1520 мм часто трапляються аварії, пов'язані з руйнуванням литих несучих елементів трьохелементних візків вантажних вагонів. Якість і довговічність таких елементів візків як бічна рама і надресорна балка, які традиційно виготовляються за технологією лиття, має недостатній рівень, тому доцільним є пошук альтернативи – можливості використання зварювальної технології при виготовленні зазначених деталей із листового прокату з метою підвищення характеристик опору втомі.

В Інституті електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України проведений великий обсяг робіт з розробки нової суцільнозварної конструкції бічної рами трьохелементного візка вантажного вагону. Розробка проводилась на основі широкого застосування математичного моделювання для визначення напружено-деформованого стану зварних елементів візка під дією регламентованих навантажень (рис. 1) та оцінки міцності згідно діючих стандартів та сучасних світових підходів [1].

Проведений розрахунок опору втомі посиленої конструкції суцільнозварної бічної рами візка відповідно до Норм [2] за коефіцієнтами опору втомі для різних оціночних зон (основного металу і зварних швів) з урахуванням розподілу коефіцієнта вертикальної динаміки за діапазонами швидкостей експлуатації (спектр навантаження), а також з урахуванням додаткового спектру навантаження від поздовжніх стискаючих сил через автозчеплення показав, що розроблена суцільнозварна конструкція бічної рами є працездатною при змінних навантаженнях і задовольняє вимогам Норм [2] з коефіцієнтом опору втомі  $[n] = 2$  як за умовою неперевищення розрахунковими напруженнями величин амплітуд напружень, що допускаються, так і за умовою накопичення пошкоджуваності.

Додатково проведений розрахунок опору втомі суцільнозварної конструкції бічної рами візка відповідно до Рекомендацій ІІW [3] за умовою зародження втомного руйнування (макротріщини) в різних оціночних зонах конструкції (зонах зварних з'єднань) з урахуванням заданого спектру навантаження при експлуатації [2] показав, що розроблений варіант суцільнозварної конструкції бічної рами має достатній рівень опору втомі зварних з'єднань з коефіцієнтом безпеки  $\gamma_M = 1,1-1,4$ . У найбільш навантаженій зоні внутрішнього радіуса R55 буксового прорізу для забезпечення необхідного рівня опору

втомі доцільно виконати додаткову (механічну ударну) обробку зони переходу поздовжнього таврового зварного з'єднання.

Виготовлені дослідні зразки і проведені прискорені випробування на втому (рис. 2) за вимогами діючих в Україні стандартів. Після  $N=8,8$  млн. циклів вертикального навантаження (амплітуда  $P_{ai}=245$  кН=25 тс, постійне середнє навантаження циклу  $P_m=363$  кН=37 тс) утворилась макротріщина на боковій стінці між нижнім поясом і опорною поверхнею пружин. Таким чином, зразок зварної бічної рами показав високе значення довговічності, яке у десятки разів перевищує проектний термін експлуатації литої конструкції бічної рами з осьовим навантаженням 23,5 тс. Після  $N=13$  млн. циклів відбулося руйнування по зоні поперечного зварного з'єднання бокової стінки (причина – неповне проплавлення). При цьому зразок зварної бічної рами показав високе значення відносної живучості  $J=(N_i-N_i^{TP})/N_i=0,32$ , а за абсолютною величиною живучість перевищує у кілька разів проектний термін експлуатації литої конструкції бічної рами.

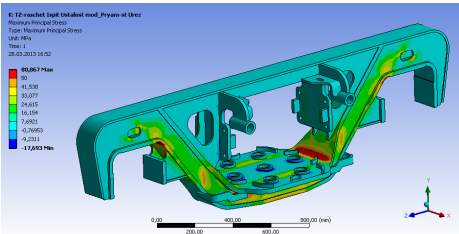


Рис. 1

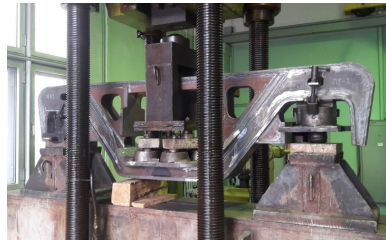


Рис. 2

1. *Махненко О.В., Сапрыкина Г.Ю., Мирзов И.В., Пустовой А.Д.* Перспективы создания сварных конструкций несущих элементов тележки грузового вагона // Автоматическая сварка. – 2014. – № 3. – С. 36-42.
2. *Нормы для расчета и проектирования вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных).* – М.: ГосНИИВ-ВНИИЖТ, 1995. – 317 с.
3. *Recommendations for Fatigue Design of Welded Joints and Components* // IIW Doc XIII-1965κ14-03/XV-1127κ14-03, Update 2006-07-10. – 147 p.

**DEVELOPMENT OF WELDED STRUCTURES OF THE RAILWAY CAR BOGIE WITH INCREASED CHARACTERISTICS OF FATIGUE RESISTANCE AND SURVIVABILITY BY USING OF MATHEMATICAL MODELING**

*In last years railroad accidents have often occurred due to the destruction of the casting elements of three-element freight car bogie. The quality and durability of load-bearing elements, which is traditionally made by casting technology, is insufficient. The development of new welded designs of the load-bearing elements were carried out in the E.O. Paton Electric Welding Institute of the NAS of Ukraine on the basis of wide use of mathematical modeling to determine the stress-strain state of the welded elements under the action of regulated loads and to make the assessment of strength according to Ukrainian standards and current world approaches. The accelerated fatigue tests on prototypes were carried out, which showed that the service life of the welded structure of the side frame is ten times longer than the design life of the cast structure, and its survivability is longer in several times.*

## ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА БІМЕТАЛЕВИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ ЗА НЕСТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ДІЙ

**Роман Мусій, Наталія Мельник, Богдан Бандирський,  
Любомир Гошко, Стефан Моринь**

*Національний університет «Львівська політехніка» МОН України;  
Політехніка Опольська (Польща)*

[musiy@lp.edu.ua](mailto:musiy@lp.edu.ua); [melnyk.n.pz@gmail.com](mailto:melnyk.n.pz@gmail.com); [s.moryn@po.opole.pl](mailto:s.moryn@po.opole.pl)

У сучасних пристроях для зняття чужорідних нашарувань застосовують нестационарні електромагнітні поля імпульсного характеру. Для отримання алюмінію та різних сплавів на його основі використовують електролізери, зокрема, циліндричної форми. На їх стінках, що виготовлені з термостійкої нержавної сталі, для підвищення ефективності виплавлення алюмінію наносять мідні покриття. У процесі експлуатації таких електролізерів на їх внутрішніх стінках виникають небажані чужорідні електропровідні покриття, наявність яких зменшує ефективність роботи електролізерів. Для зняття таких нашарувань використовують технологію магнітно-імпульсної обробки електролізерів.

Запропоновано математичну модель [1, 2] для розрахунку параметрів імпульсної електромагнітної дії, яка створювала би відповідні величини інтенсивностей напружень як у чужорідному нашаруванні, так і в основі, якою є внутрішня стінка циліндричного електролізера.

Розглядувану систему «нашарування-стінка електролізера» математично моделюємо довгим біметалевим порожнистим циліндром, віднесеним до циліндричної системи координат  $(r, \phi, z)$ , вісь  $Oz$  якої співпадає з віссю симетрії циліндра. Приймаємо, що розподіл чужорідного нашарування постійний по кутовій координаті  $\phi$ , а залежить лише від радіальної координати  $r$  та часу  $t$ . Матеріали нашарування та стінки електролізера однорідні, неферомагнітні та ізотропні, а їх фізико-механічні характеристики сталі в розглядуваному діапазоні зміни температури  $T$ .

Імпульсну електромагнітну дію задаємо значеннями осьової компоненти  $H_z^{(n)}(r, t)$  на зовнішній поверхні нашарування  $r=r_0$  та зовнішній стінці  $r=r_2$  електролізера. Тут  $n=1,2$ , де  $n=1$  відповідає нашаруванню, а  $n=2$  – основі (стінці електролізера).



Дія нестационарного електромагнітного поля імпульсного характеру створює в нашаруванні та основі джерела тепла Джоуля  $Q^{(n)}$  і пондеромоторні сили  $F^{(n)}$ . Тепло Джоуля  $Q^{(n)}$  зумовлює виникнення температурного поля  $T^{(n)}$  в нашаруванні та основі. Відповідно пондеромоторні сили  $F^{(n)}$  та температурне поле  $T^{(n)}$  зумовлюють виникнення механічних напружень, що описуються компонентами  $\sigma_{ik}^{(n)}$  тензора напружень  $\hat{\sigma}^{(n)}$  в нашаруванні та основі. Якщо виконується умова, що максимальні значення інтенсивностей напружень  $\sigma_i^{(n)}$  перевищують межу міцності  $\sigma_M$  контактної з'єднання нашарування та основи, тобто  $\max \sigma_i^{(n)} > \sigma_M$ , то чужорідне нашарування «відліпає» від стінки електролізера.

На основі запропонованої математичної моделі чисельно проаналізовано термомеханічну поведінку довгих біметалевих циліндрів за дії поодиноких електромагнітних імпульсів [3]. Встановлено граничні параметри імпульсної електромагнітної дії, за яких відбувається зняття небажаного чужорідного нашарування. Запропонована методика може бути використана для побудови раціональних режимів магнітно-імпульсної обробки біметалевих порожнистих циліндрів та прогнозування надійності їх функціонування як конструктивних елементів.

1. *Hachkevych O., Musiy R.* Mathematical modeling in thermomechanics of electroconductive bodies under the action of the pulsed electromagnetic fields with modulation of amplitude // *Mathematical modeling and computing.* - 2019. - **6**, No. 1. – P. 30-36.
2. *Musiy R., Melnyk N., Dmytruk V.* Thermoelastic processes analyzer for piecewise homogeneous conductive structures subjected to pulsed electromagnetic action // *Journal of Thermal Stresses.* – 2018. – **41**, No. 9. – P. 1125-1135.
3. *Мусій Р.С., Мельник Н.Б., Дрогомирецька Х.Т.* Термонапружений стан електропровідного циліндра з тонким електропровідним покриттям за нестационарної електромагнітної дії // *Вісник ХНТУ. Інженерні науки.* – 2016. – № 3 (58). – С. 129-133.

**THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF BIMETALLY EMPTY CYLINDERS UNDER NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC ACTIONS**

*A mathematical model is proposed to calculate the limit values of the pulse electromagnetic action parameters at which the contact junction of bimetallic hollow cylinders made of non-ferromagnetic conductive materials is destroyed.*

## БАГАТОШАРОВІ МЕРЕЖЕВІ СТРУКТУРИ ТА СИСТЕМИ

**Олександр Поліщук**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[od\\_polishchuk@ukr.net](mailto:od_polishchuk@ukr.net)

Будь-яка реальна система є відкритою, тобто вона взаємодіє з іншими системами [3]. Одним із різновидів міжсистемних взаємодій є так звані мультиплекси [2], у яких вузли однієї мережі можуть одночасно бути вузлами багатьох інших мереж. Так кожна країна є об'єктом (або вузлом) міжнародного політичного, економічного, військового, безпекового, культурного, спортивного співробітництва і т. ін. Кожне місто країни є вузлом кількох транспортних мереж різних типів, мереж державного та місцевого управління, економічних та фінансових мереж тощо. Кожна людина також є вузлом багатьох мереж (родинної, професійної, соціальної, релігійної і т.д.). Кожна мережа, яка є складовою мультиплексу, називається шаром. Наведені вище приклади показують, що між вузлами окремих мережевих шарів існують різні види взаємодій. Ці взаємодії можуть мати різну природу, призначення та матеріальний носій. Оскільки кожна мережа є структурою певної мережевої системи [1], то один і той же вузол мультиплексу є елементом багатьох систем, реалізуючи в них різні функції.

Мультиплекси є динамічними структурами. Поява нового виду взаємодій між вузлами мереж, які входять до складу мультиплексу, породжує новий його шар. Навпаки, якщо якийсь вид взаємодій зникає, то зникає і відповідний шар. Часто новий шар та відповідний вид взаємодій розширює можливість існуючих зв'язків у мультиплексі (стаціонарний та мобільний телефонний зв'язок, пошта та E-mail). З наведених прикладів слідує, що у більшості випадків різні мережеві шари мультиплексу мають різний склад вузлів та структуру зв'язків. Тому, узагальнюючи відоме визначення [2], мультиплексом або М-структурою називатимемо поєднання кількох взаємодіючих мереж, перетин множин вузлів яких є непорожнім.

Під час дослідження М-структур виникає багато важливих проблем: існування шляху з довільного вузла одного шару у довільний вузол іншого шару, побудова найкоротших шляхів руху через мультиплекс (зміна видів транспорту може суттєво прискорити час руху пасажирів та вантажів); пошук альтернативних шляхів через інші мережеві шари під час ізоляції певної зони в окремому мережевому шарі (використання метрополітену у великих містах під час виникнення заторів на автошляхах); протидія розповсюдженню епіде-

мій, комп'ютерних вірусів і т. ін., які через мультиплексні взаємодії можуть поширюватися значно швидше, ніж в одному шарі. Здатність переходу з одного мережевого шару на інший та зворотно розширює можливості доступу до вузлів, недосяжних в окремих шарах-мережах та дозволяє здійснювати зв'язок між незв'язними складовими таких шарів. Окремим питанням є явище «тісного світу» у мультиплексі, оскільки більшість реальних складних мереж володіють цією властивістю. Мережі тісного світу характеризуються малою середньою довжиною шляху  $l$  між вузлами та високим ступенем кластеризації  $C$ . Загалом залежно від типу мережі параметр  $l$  є обернено пропорційний, а параметр  $C$  є прямо пропорційний деякій додатній монотонно зростаючій функції від середньої кількості зв'язків вузла мережі [4]. Навіть не вважаючи міжшарові взаємодії додатковими зв'язками вузла та відкидаючи дублюючі його зв'язки у тих шарах мультиплексу, до яких він належить, отримуємо, що середня кількість зв'язків вузла у  $M$ -структурі є більшою, ніж в окремо взятому шарі. Це означає, що ефект «тісного світу» у мультиплексі лише посилюється.

В роботі визначаються матриця суміжності та основні структурні локальні та глобальні характеристики вузлів та шарів мультиплексу. Вводиться поняття та досліджуються властивості ядра багатошарової мережевої структури, як утворення до складу якого входять вузли та зв'язки мультиплексу, що належать усім його шарам. Визначається потокова матриця суміжності та основні функціональні локальні та глобальні характеристики (параметри впливу та посередництва) елементів та шарів систем мультиплексного типу. Вводяться інтегральні показники процесу функціонування мультиплекс-систем. Визначаються та досліджуються властивості поточкових серцевин багатошарових мережевих систем. Показується, що введені вище поняття, які описують особливості структури та процесу функціонування мультиплекс-систем, сприяють подоланню проблеми складності системних досліджень.

1. *Поліщук О.Д., Яджак М.С.* Мережеві структури та системи: II. Серцевини мереж та мультиплексів // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2018. – № 3. – С. 38-51.
2. *Boccaletti S. et al.* Structure and Dynamics of Multilayer Networks // Physics Reports. – 2014. – **544**, № 1. – P. 1-122.
3. *Scott W.R., Davis G.F.* Organizations and organizing: Rational, natural and open systems perspectives. – London: Routledge, 2015. – 464 p.
4. *Watts D.J., Strogatz S.H.* Collective dynamics of “small-world” networks // Nature. – 1998. – **393**. – P. 440-442.

#### MULTILAYER NETWORK STRUCTURES AND SYSTEMS

*Peculiarities of multilayer network structures and systems are studied. Notions of multiplex kernel and flow core of the system of multiplex type are introduced. Local and global characteristics of multilayer structures and systems are investigated.*

УДК 539.3

## НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ШТИФТО-ШПИЛЬКОВОГО З'ЄДНАННЯ ВІДСІКІВ РАКЕТИ ПРИ ГРАНИЧНИХ ТЕМПЕРАТУРАХ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

Володимир Харченко, Дмитро Клименко

*Державне підприємство «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна)*

[kharchenkovm@science.yuzhnoye.com.ua](mailto:kharchenkovm@science.yuzhnoye.com.ua); [klymenkovd@science.yuzhnoye.com.ua](mailto:klymenkovd@science.yuzhnoye.com.ua)

Стики є одними з найбільш навантажених елементів ракети. Для надійної роботи стиків в температурному діапазоні експлуатації ракети їх елементи кріплення затягують нормованою силою, яку встановлюють в залежності від діючих навантажень на стик і його елементи при усіх випадках експлуатації ракети, особливостей конструкції стиків і суміжних відсіків, регулярності розміщення кріпильних елементів, схеми кріплення ракети на транспортному засобі чи пусковій установці тощо.

Розглянуто стик корпусу ракетного двигуна твердого палива (РДТП) з композиційного матеріалу з суміжним металевим відсіком ракети, скріплених за допомогою штифто-шпилькового з'єднання (ШШЗ). При дослідженні напружено-деформованого стану (НДС) використовувалась параметрична скінченно-елементна модель ШШЗ, побудована в автоматичному режимі за допомогою мас-файлів на мові програмування ANSYS APDL, які сформовані програмою-оболонкою, розробленою в системі програмування Delphi [1].

З використанням розрахункового комплексу ANSYS досліджено НДС ШШЗ при нормованій зтяжці шпильок ШШЗ стика РДТП з суміжним відсіком для діапазону температур в складальному цеху. Розглянуто НДС зтягнутого ШШЗ при зміні температури стика в граничному діапазоні додатних та від'ємних температур експлуатації ракети.

Одержані залежності параметрів НДС ШШЗ та сили зтяжки шпильок від складальної температури і граничних температур експлуатації ракети.

1. Харченко В.М. Моделювання та визначення напруженого стану стиків ракетних конструкцій із композиційних матеріалів // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15 – С. 185-190.

### THE STRESS-STRAIN STATE OF PIN-STUD JOINT OF MISSILE BAYS AT THE ULTIMATE OPERATIONAL TEMPERATURES

*By using the finite-elements analysis system ANSYS the influence of temperature conditions of assembly and operation on stress-strain state of pin-stud joint of missile bays and on tightening force of these studs was investigation.*

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ МОНІТОРИНГУ ЦІЛІСНОСТІ ДОВГОГО ГАЗОПРОВОДУ

**Ольга Химко, Василь Чекурін**

*Національний університет «Львівська політехніка» МОН України;  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[olgakhymko@ukr.net](mailto:olgakhymko@ukr.net); [chekurin@iapmm.lviv.ua](mailto:chekurin@iapmm.lviv.ua)

Розгерметизація газопроводу спричиняє перехідні процеси у газі. Внаслідок цього параметри газового потоку (тиск, густина, швидкість руху) змінюються. Вимірюючи їхні значення на вході та виході трубопроводу, можна отримати апостеріорну інформацію про його цілісність.

Застосовуючи математичну модель динаміки газу в довгому трубопроводі, побудовано функціонали, які в інтегральній формі визначають відхилення від законів збереження маси та імпульсу газу в трубі [1]. Функціонали залежать від функцій, які визначають зміну в часі параметрів потоку на вході та виході трубопроводу, а також – від розв’язків прямих задач динаміки газу в довгому трубопроводі. На цій основі сформульовано критерії його цілісності. Із використанням методів обчислювального експерименту досліджено чутливість запропонованих критеріїв до швидкості витoku газу, спричиненого локальною розгерметизацією. Як вхідні дані для цього використовували результати числового розв’язування прямих задач, сформульованих в рамках моделі динаміки газу в довгому трубопроводі за локальної розгерметизації [2].

Обговорюються можливості застосування запропонованих критеріїв для розроблення методології моніторингу цілісності газопроводу на основі даних вимірювання параметрів потоку на його вході та виході.

Робота частково виконана за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень” КПКВК 6541230.

1. *Чекурін В.Ф., Химко О.М.* Математична модель для контролю цілісності лінійної частини магістрального газопроводу // *Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки.* – 2019. – **30** (69), № 1. – Ч. 1. – С. 158-164.
2. *Чекурін В., Химко О.* Чисельне дослідження перехідних процесів у довгому газопроводі, спричинених розгерметизацією // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* – 2017. – Вип. 26. – С. 100-111.

### **MATHEMATICAL MODEL FOR INTEGRITY MONITORING OF A LONG GAS PIPELINE**

*Applying the mathematical model of gas dynamics in a long pipeline, functionals which determine deviations from the laws of mass and momentum conservation of gas in the pipe has been constructed.*

## ОПТИМІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ ПІД ЧАС ПОПЕРЕДНЬОГО ОПРАЦЮВАННЯ ВХІДНИХ ДАНИХ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Михайло Яджак

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

[yadzhak\\_ms@ukr.net](mailto:yadzhak_ms@ukr.net)

Складні системи (СС) функціонують та використовуються у різних сферах людської діяльності [1]. Прикладами таких систем є транспортні системи, системи зв'язку, системи газо-, електро-, водопостачання окремих міст або регіонів країни, торговельні мережі, мережі банківських установ тощо. Для забезпечення зростання рівня життя громадян і розвитку країни загалом, потрібно покращувати якість функціонування СС, а для цього необхідно розробляти ефективні методи їх дослідження. У праці [2] запропонована методика комплексного оцінювання стану та якості функціонування СС. Однією із важливих складових цієї методики є аналіз та попереднє опрацювання великих масивів вхідних даних [3], які вона використовує. Зазвичай таку процедуру потрібно здійснювати в режимі реального часу. З цієї метою необхідно розв'язувати задачі цифрової фільтрації (ЗЦФ) різної вимірності з використанням паралельних алгоритмів. Зараз засоби реалізації паралельних обчислень є майже у всіх основних мовах високого рівня, що використовують об'єктно-орієнтований підхід (C++, C#, Java тощо). Загальнодоступними для широкого кола користувачів є багатоядерні комп'ютери і кластери.

У цій роботі зроблено огляд одержаних автором результатів, які стосуються розробки та аналізу паралельних алгоритмів розв'язання ЗЦФ різної вимірності на апаратних засобах універсального призначення. Ці результати ґрунтуються на використанні трьох схем обчислень: звичайної (последовної), синхронної та асинхронної.

За звичайної схеми обчислень для переобчислення значення деякої змінної  $x_j$  (одновимірна задача) на заданому кроці використовуються значення  $x_{j-m}, x_{j-m+1}, \dots, x_{j-1}$ , переобчислені на цьому ж кроці. Тут  $(2m+1)$  – розмір рухомого вікна. Стосовно последовного алгоритму фільтрації, що реалізує цю схему, використовуємо метод гіперплощин для розпаралелювання циклів. Унаслідок цього одержуємо паралельний алгоритм [4], орієнтований на реалізацію на багатоядерних комп'ютерах.

Використовуючи синхронну схему, для переобчислення значення деякої змінної  $x_j$  на заданому кроці беруться значення  $x_{j-m}, x_{j-m+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+m}$ , переобчислені виключно на попередньому кроці. Для відповідного послідовного алгоритму, що реалізує цю схему, використовуємо метод пірамід для розпаралелювання циклів. Унаслідок цього одержуємо паралельний алгоритм з автономними гілками, орієнтований на реалізацію на кластерах [5]. Згаданий послідовний алгоритм можна також розпаралелити, використовуючи SIMD-режим, а відповідний паралельний алгоритм буде зорієнтований на реалізацію на графічних процесорах.

У разі застосування асинхронної схеми обчислень, для переобчислення значення  $x_j$  на заданому кроці використовуються поточні значення  $x_{j-m}, x_{j-m+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+m}$ , які можуть бути переобчислені на різних кроках [6]. Паралельний алгоритм, який реалізує цю схему, орієнтований на реалізацію на багатоядерних комп'ютерах.

Отже, нами запропоновано чотири типи паралельних алгоритмів розв'язання ЗЦФ різної вимірності на обчислювальних засобах універсального призначення. Одержано оцінки складності та прискорення, які підтверджують високу ефективність цих алгоритмів.

1. *Поліщук Д.О., Поліщук О.Д., Яджак М.С.* Порівняння методів оцінювання складних систем // Відбір і обробка інформації. – 2010. – Вип. 32 (108). – С. 110-118.
2. *Поліщук Д.О., Поліщук О.Д., Яджак М.С.* Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережкових систем. Частина I. Опис методики // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 1. – С. 21-31.
3. *Яджак М.С., Поліщук О.Д., Тютюнник М.І.* Оптимізація методики комплексного оцінювання складних систем на підставі паралельних обчислень // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2016. – 6, № 4. – С. 347-356.
4. *Яджак М.С., Тютюнник М.І.* Оптимальный алгоритм решения задачи цифровой фильтрации с использованием адаптивного сглаживания // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 3. – С. 142-151.
5. *Яджак М.С.* Паралельні алгоритми розв'язання просторової задачі цифрової фільтрації даних // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2017. – 7, № 3. – С. 234-239.
6. *Яджак М.С.* Проблема організації асинхронних обчислень під час розв'язання задач цифрової фільтрації // Матеріали VII-ї Українсько-польської наук.-практ. конф. «Електроніка та інформаційні технології», Львів-Чинадієво, 27-30 серпня 2015 р. – С. 10-13.

#### OPTIMIZATION OF COMPUTATIONS DURING PREPROCESSING OF INPUT DATA USED FOR THE INVESTIGATE OF COMPLEX SYSTEMS

*In this paper the parallel algorithms of data digital filtering are proposed. This algorithms on different types of computational systems architectures are oriented.*

## ПРОБЛЕМА ОПТИМІЗАЦІЇ КВАЗИСИСТОЛІЧНИХ СИСТЕМ

**Михайло Яджак, Марія Тютюнник**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Львівський національний університет ім. І. Франка МОН України*

[yadzhak\\_ms@ukr.net](mailto:yadzhak_ms@ukr.net)

Квазисистолічні системи (КСС) [5] є обчислювальними засобами спеціального призначення. На реалізацію на таких системах зорієнтовані зокрема високопаралельні алгоритми розв'язання задач цифрової фільтрації (ЗЦФ) та багаторазової каскадної фільтрації різної вимірності [2]. КСС відрізняються від чисто систолічних [3] тим, що дозволяють передачу даних від однієї інстанції одразу в декілька точок прийому, дещо порушуючи при цьому локальність зв'язків між функціональними елементами (ФЕ). Однак, технічно це можна легко усунути, використовуючи для передачі даних оптоелектронні елементи [1]. Слід зазначити, що КСС можна розглядати як блоки виконання спеціалізованих обчислень у сучасних обчислювальних системах кластерного типу, які є системами універсального призначення і широко зараз використовуються в наукових дослідженнях.

Під час проектування та розробки архітектури КСС виникає проблема їх оптимізації. У цій роботі ми розглянемо два шляхи вирішення цієї проблеми: перший – це оптимізація структури обчислювальної системи, а другий – оптимізація роботи її ФЕ на бітовому рівні.

Загалом структура КСС, орієнтованих на реалізацію оптимальних за швидкістю та використанням пам'яті паралельноконверсних алгоритмів (ПКА) фільтрації точно копіює потактові схеми цих алгоритмів. Тобто кількість ФЕ в таких системах залежить від розмірності масиву вхідних даних, значення яких переобчислюються, розміру рухомого вікна та кількості виконуваних переобчислень згладжування [2]. Тут слід зазначити, що під час побудови цих КСС здійснюється оптимізація за кількістю типів ФЕ. При цьому енергоспоживання в даному випадку зменшується унаслідок зменшення кількості ФЕ, які реалізують арифметичні операції. Структуру таких обчислювальних систем можна оптимізувати до вигляду, що відповідає потактовій схемі виконання одного переобчислення згладжування згідно з відповідним ПКА фільтрації. Унаслідок цього одержимо КСС з меншою кількістю ФЕ, яка буде визначатися лише розмірністю масиву вхідних даних, значення яких переобчислюються, та розміром рухомого вікна. Очевидно, що в цьому випадку потрібно передбачити певні засоби синхронізації для передавання ре-



зультатів кожного переобчислення згладжування на вхід оптимізованої системи. Таку структурну оптимізацію КСС розглянуто в [6] для реалізації ПКА розв'язання одновимірної ЗЦФ з використанням процедури адаптивного згладжування. Цей підхід до оптимізації дозволяє не лише зменшити обсяг обладнання, але і скоротити час виготовлення обчислювального засобу, тобто його вартість, та вартість обслуговування.

Після оптимізації структури КСС для виконання ПКА фільтрації подальшого прискорення обчислень можна досягти шляхом реалізації ФЕ системи засобами клітинних автоматів з використанням оптоелектронної елементної бази. З цією метою можна використати просту модель оптоелектронного процесора для реалізації арифметичних операцій додавання та множення. Значимо, що ФЕ системи реалізують одну із операцій: додавання, множення або транспортування даних. Такий підхід до оптимізації було використано в [4] стосовно розглянутих там систем. Очевидно, що його можна застосувати і для КСС, описаних в [6] і зорієнтованих на реалізацію ПКА фільтрації з адаптивним згладжуванням.

Отже, нами розглянуто два шляхи вирішення проблеми оптимізації стосовно КСС, орієнтованих на реалізацію оптимальних за швидкодією ПКА розв'язання різних варіантів ЗЦФ. Унаслідок цього запропоновано схеми компактних спеціалізованих обчислювальних систем з використанням сучасної швидкодіючої елементної бази.

1. *Анисимов А.В., Завадский И.А., Марченко А.А.* Исследование эффективности использования оптической элементной базы в синхронной арифметике // Упр. системы и машины. – 2006. – № 1. – С. 49-58.
2. *Анисимов А.В., Яджак М.С.* Построение оптимальных алгоритмов массовых вычислений в задачах цифровой фильтрации // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 4. – С. 3-14.
3. *Вальковский В.А., Малышкин В.Э.* Синтез параллельных программ и систем на вычислительных моделях. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – 129 с.
4. *Вальковский В.А., Яджак М.С.* Специализированные средства реализации оптимальных алгоритмов массовых вычислений // Докл. междунар. науч. конф. «Суперкомпьютерные системы и их применение», Минск, 26-28 октября 2004 г. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – С. 12-17.
5. *Яджак М.С.* Квазисистолічні обчислювальні структури та їх застосування // Академический вестник. – 2007. – № 20. – С. 53-57.
6. *Яджак М.С., Тютюнник М.И.* Оптимальный алгоритм решения задачи цифровой фильтрации с использованием адаптивного сглаживания // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 3. – С. 142-151.

#### OPTIMIZATION PROBLEM OF QUASISYSTOLIC SYSTEMS

*The paper considers two ways to solve the optimization problem with respect to quasisystolic computing systems. The first way is optimization the structure of the system, and the second is optimization its functional elements.*

УДК 539.3

## ОПТИМІЗАЦІЯ ДВОВИМІРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ТА НАПРУЖЕНЬ ПІВПРОСТОРУ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗОВНІШНЬОГО ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Анатолій Ясінський, Людмила Токова

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

[yasinskyy.anatoliy@gmail.com](mailto:yasinskyy.anatoliy@gmail.com); [tokova@gmail.com](mailto:tokova@gmail.com)

Для забезпечення надійного функціонування елементів мікроелектронних пристроїв, що нагріваються внутрішніми джерелами тепла, індуковане тепло необхідно відвести. З цією метою часто використовують конвективний теплообмін із довкіллям. Ефективність такого тепловідведення можна підвищити шляхом керованої зміни температури середовища чи коефіцієнта теплообміну із цим середовищем. При цьому для забезпечення міцнісних та функціональних властивостей таких елементів слід враховувати обмеження на параметри їх термонапруженого стану (максимальні значення переміщень та напружень).

В роботі сформульовано двовимірні математичні постановки задач оптимального керування стаціонарними вертикальними температурними переміщеннями та окремими компонентами тензора напружень плоскодеформованого півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла. За функцію керування вибрано розподіл температури довкілля, з яким за законом Ньютона відбувається конвективний теплообмін півпростору. За умов існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності сформульовані задачі оптимізації зведено до обернених задач термопружності, що описуються інтегральними рівняннями Фредгольма першого роду. Побудовано та досліджено розв'язки отриманих інтегральних рівнянь. Для конкретних законів теплового навантаження півпростору проведено числовий аналіз поведінки розв'язків задач оптимізації у залежності від характерних параметрів.

### OPTIMIZATION OF TWO-DIMENSIONAL THERMAL DISPLACEMENTS AND STRESSES IN A HALF-SPACE BY MEANS OF OUTER THERMAL LOADING

*Two-dimensional steady-state problems on the optimization of vertical thermal displacements and stress-tensor components in a plane-deformed half-space are analyzed when the half-space is heated by inner heat sources. A distribution of the ambient temperature is assumed to be a control function under the Newton heat-exchange condition between the half-space and its surrounding.*

**TOWARDS OPTIMAL DESIGN OF ENGINEERING SYSTEMS****Viktor Berbyuk***Chalmers University of Technology (Sweden)*[viktor.berbyuk@chalmers.se](mailto:viktor.berbyuk@chalmers.se)

The paper presents a review on methods, algorithms and tools available for optimal design of engineering systems. The focus primarily is put on methods and algorithms for global sensitivity analysis (GSA) and solution of Pareto optimization problems (POP) for multidimensional nonlinear mechanical systems. The computer code SAMO, developed at Mechanical Systems, Division of Dynamics, Chalmers University of Technology, is presented as an efficient toolbox for optimal design of engineering systems with different applications. The toolbox SAMO includes two modules: SAMO-GSA and SAMO-POP.

The module SAMO-GSA is developed based on the multiplicative version of the dimensional reduction method. In the SAMO-GSA an efficient approximation is employed to simplify the computation of variance-based sensitivity indices associated with a general function of  $n$ -random variables. The GSA results are presented as a mapping of the design parameters of the engineering system in question and total sensitivity indices of the objective functions. These results might be used as an input to the SAMO-POP for multi-objective optimization.

The module SAMO-POP works based on genetic algorithm. The genetic algorithm setting includes lower and upper bounds for variation of the design parameters, population size, number of generations, elite count, and Pareto fraction settings. The results of SAMO-POP are presented in terms of Pareto fronts and corresponding Pareto sets for further analysis and decision making by the user.

The efficiency of the proposed algorithms and developed toolbox is illustrated, first on scholar applications (thermally induced stress intensity factor and quarter car vehicle model), and second by the GSA and solutions of several multi-objective optimization problems for nonlinear multidimensional mechanical systems which represent high-speed train bogie suspension [2, 3], hand-held impact machines [4], drivetrain systems [1], others.

The computational model of bogie suspension of a high-speed train developed for optimal design of stiffness-damping suspension components to enhance vehicle safety and comfort as well as to minimize wear is presented in fig. 1, (left). The results of GSA of bogie suspension is depicted in fig. 1, (right), as mapping between

the sensitivity indices of comfort, safety and wear and fourteen design parameters of the system in question. Details of the results obtained can be find in [2, 3].

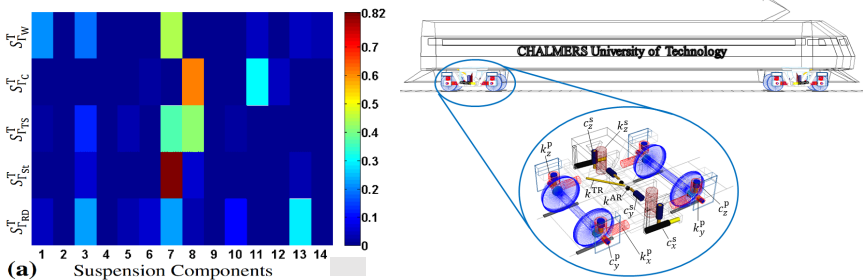


Fig. 1 Model of bogie suspension (left) and results of the GSA (right) [1, 2]

1. *Asadi S., Berbyuk V., Johansson H.* Global Sensitivity Analysis of High Speed Shaft Subsystem of a Wind Turbine Drive Train // Int. J. of Rotating Machinery. – 2018. – Vol. 2018, (ID 9674364). – P. 1-20.
2. *Mousavi Bideleh S.M., Berbyuk V.* Global sensitivity analysis of bogie dynamics with respect to suspension components // Multibody System Dynamics. – 2016. – 37, No. 2. – P. 145-174.
3. *Mousavi Bideleh S.M., Berbyuk V.* Multiobjective optimisation of bogie suspension to boost speed on curves // Vehicle System Dynamics, 2016. – 54, No. 1. – P. 58-85.
4. *Mousavi Bideleh S.M., Berbyuk V.* Pareto Optimization of a Nonlinear Tuned Mass Damper to Control Vibrations in Hand Held Impact Machines / in Nonlinear Dynamics, Vol. 1. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, G. Kerschen, Editor, 2019, Springer: Cham. – P. 27-44.

#### ДО ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ІНЖЕНЕРНИХ СИСТЕМ

*Представлено огляд методів та алгоритмів для оптимального проектування інженерних систем. Основна увага приділяється методам і алгоритмам глобального аналізу чутливості і розв'язанню задач Парето оптимізації для багатовимірних нелінійних механічних систем. Комп'ютерний код SAMO, розроблений у відділі Механічних систем, Chalmers University of Technology, представлений як ефективний інструментарій для оптимального проектування інженерних систем різноманітного призначення.*

**EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF DUCTILE FRACTURE  
OF ELEMENTS WITH NOTCHES UNDER ELEVATED TEMPERATURE****Łukasz Derpeński, Andrzej Seweryn***Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*[l.derpenski@pb.edu.pl](mailto:l.derpenski@pb.edu.pl); [a.seweryn@pb.edu.pl](mailto:a.seweryn@pb.edu.pl)

The paper presents the experimental results of ductile fracture of axisymmetric specimens with different circumferential notches under elevated temperature. EN-AW 2024 aluminum alloy was subjected to investigation. Specimens were subjected to uniaxial monotonic loads under temperature 20°C, 100°C, 200°C and 300°C. In order to this, the MTS 651 environmental chamber and the Messtician ME46 video extensometer were used. The relations between tensile force and elongation of the measuring base for different temperature have been obtained for specimens with notches. It has been pointed out that the effect of elevated temperature is a decrease in the material properties, including its hardening. It was noticed that the increasing of temperature even to 300 °C does not cause significant differences in the shape and location of the fracture surface. Also attention is drawn to the influence of the notch shape and the set temperature on the value of the critical force and the maximum displacement of the measuring base. The results of fractographic observation of fracture surfaces carried out in order to determine the effect of elevated temperature. The obtained results made it possible to carry out numerical calculations allowing to determine the stress and strain fields at the moment of fracture initiation.

This investigation was supported under the program of the Ministry of Science and Higher Education under the name “Regional Initiative of Excellence” in 2019-2022 (project number 011/RID/2018/19; financing amount: 12 million PLN).

5. *Derpeński Ł., Seweryn A., Bartoszewicz J.* Ductile fracture of notched aluminum alloy specimens under elevated temperature. Part 1 Experimental research // *Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – **102**. – P. 70-82.
6. *Derpeński Ł., Seweryn A.* Ductile fracture of notched aluminum alloy specimens under elevated temperature. Part 2 Numerical research // *Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – **102**. – P. 83-97.

UDC 539.3

## NUMERICAL INVESTIGATION OF DUCTILE FRACTURE OF ELEMENTS WITH NOTCHES UNDER ELEVATED TEMPERATURE

**Łukasz Derpeński , Andrzej Seweryn**

*Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*

[l.derpenski@pb.edu.pl](mailto:l.derpenski@pb.edu.pl); [a.seweryn@pb.edu.pl](mailto:a.seweryn@pb.edu.pl)

The results of the numerical modelling of axisymmetric specimens with circumferential notches shown the stress and strain fields in whole specimens with notches. Non-linear calculations were made using an axisymmetric finite element mesh model built of four-node elements with a bilinear shape function. The material's hardening curve, obtained using the hybrid (experimental-numerical) method, was applied. Special attention was paid to influence on distributions of stresses and plastic strains under uniaxial loading, elevated temperature and notch radius. It has been shown that the location of maximum stresses and plastic deformations depends only on the notch radius where their value depends both on the notch radius and on the temperature.

Based on these results, new ductile fracture criterion for notched specimens taking into account elevated temperature and uniaxial loading was proposed. In this criterion assumed that the fracture initiation occurs when the normal stress on this physical plane reaches the critical value, depending on the isotropic damage state variable  $\omega$ , generated by plastic flow of the material (depending on the temperature). This criterion assumes that the normal component of the stress vector on the critical plane is responsible for fracture. The critical value of this stress dependent on the variable of the damage state induced by the material's plastic flow and on temperature.

This investigation was supported under the program of the Ministry of Science and Higher Education under the name "Regional Initiative of Excellence" in 2019-2022 (project number 011/RID/2018/19; financing amount: 12 million PLN).

1. *Derpeński Ł., Seweryn A., Bartoszewicz J.* Ductile fracture of notched aluminum alloy specimens under elevated temperature. Part 1 Experimental research // Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – **102**. – P. 70-82.
2. *Derpeński Ł., Seweryn A.* Ductile fracture of notched aluminum alloy specimens under elevated temperature. Part 2 Numerical research // Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – **102**. – P. 83-97.

UDC 539.3

**FINITE DEFORMATION OF INTERNALLY PRESSURIZED SYNTHETIC  
RUBBER-LIKE MATERIAL**

**Udechukwu Egbuhuzor**

*Mathematics and Statistics Department, Federal University Otuoke,  
Bayelsa State (Federal Republic of Nigeria)*

[egbuhuzorup@fuotuoke.edu.ng](mailto:egbuhuzorup@fuotuoke.edu.ng)

In this work, a finite deformation of internally pressurized compressible hollow sphere and cylinder using strain energy function as proposed by Levinson and Burgess is analyzed. Stresses and displacements are determined from the second order nonlinear ordinary differential equation. This is applied in determining the strain, stresses and displacements in an inflated car tyre using the finite element method with mathematica software (AceFEM).

UDC 539.3

## STUDY ON THE INFLUENCE OF TYPE AND DENSITY OF FILLING ON THE STRENGTH OF MEDICAL DEVICES OBTAINED WITH FDM TECHNOLOGY (FUSED DEPOSITION MODELING)

**Anna Falkowska, Monika Prymak**

*Department of Mechanics and Applied Computer Science,  
Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*

[a.falkowska@pb.edu.pl](mailto:a.falkowska@pb.edu.pl); [m.prymak@wp.pl](mailto:m.prymak@wp.pl)

This work focuses on the study the influence of the type and density of filling on the strength of medical devices obtained in FDM printing technology. ABS material, commonly used for various applications such as orthosis elements, was chosen for the analysis.

Specimens for tests were obtained by incremental method – FDM (Fused Deposition Modeling). This method consists in melting the filament and building subsequent layers. Specimens were printed under certain conditions and made with 5 different type of filling (Linear, Diagonal, Hexagonal, Moroccanstars, Catfill) and 6 degrees of filling density (15 %, 30 %, 45 %, 60 %, 75 % and 90 %).

Experimental tests were carried out on an MTS 858 Mini Bionix strength tester with FlexTest SE digital control. Performance of monotonic tensile testing made it possible to determine the basic mechanical properties of ABS samples printed with different type and density of filling. These tests have enabled the selection of optimal printing parameters, combining low weight with sufficiently good strength properties.

Project financed under the program of the Minister of Science and Higher Education (Poland) under the name "Regional Initiative of Excellence" in the years 2019-2022, project number 011/RID/2018/19, amount of financing 12 000 000 PLN. The work was accomplished under grant No. UMO-2016/23/N/ST8/03519 at the Bialystok University of Technology and financed by the National Science Centre (Poland).

1. *Vishwas M. Basavaraj C.K.* Studies on optimizing process parameters of Fused Deposition Modelling technology for ABS // *Materials Today: Proceedings.* – 2017. – **4.10.** – P. 10994-11003.
2. *Samykan M., Selvamani S.K., Kadirgama K., Ngui W.K., Kanagaraj G., Sudhakar K.* Mechanical property of FDM printed ABS: influence of printing parameters // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology.* – 2019. – P. 1-18.
3. *Atzeni E., Salmi A.* Evaluation of additive manufacturing (AM) techniques for the production of metal-ceramic dental restorations // *Journal of Manufacturing Processes.* – 2015. – P. 40-45.



**EXPERIMENTAL TESTS OF STRENGTH AND FATIGUE LIFE  
OF 3D PRINTED POLYMERS****Anna Falkowska, Andrzej Seweryn***Department of Mechanics and Applied Computer Science,  
Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland)*[a.falkowska@pb.edu.pl](mailto:a.falkowska@pb.edu.pl); [a.seweryn@pb.edu.pl](mailto:a.seweryn@pb.edu.pl)

The additive techniques (incremental techniques) are very popular among the production techniques. They rely on build-ing material in layers "one on top of another" and combining them into one, coherent whole. Materials used in additive technology can be plastics as well as metals.

Poly lactide is gaining more and more applications in medicine, therefore, research into the biocompatibility of this material is under constant research. Due to the fact that PLA is obtained from natural organic raw materials, it is biode-gradable in the environment. It has been also proven that PLA is ideal for replacing natural tissues in the living organism.

The tested material was polylactide (PLA). Samples for testing were created in a multi-stage printing process. The samples were printed in different orientations of the individual layers: 0°/0°, 90°/90°, 0°/90°, 45°/45°, 45°/-45°.

Experimental tests were carried out on the MTS 322 Test Frame testing machine. The INSTRON 2620-601 extensometer with a measuring base of 25 mm and a range of  $\pm 20\%$  was used to measure displacement in the axial direction and to control the load. Both monotonic tensile and fatigue tests of PLA samples were carried out. On the basis of these tests, the basic mechanical properties of the tested polymer were determined. Curves of fatigue life were determined depending on the direction of printed particular layers. A microscopic analysis of the breakthroughs of samples after a monotonic tensile test was also carried out. For this purpose, the Phenon XL scanning electron microscope was used.

Project financed under the program of the Minister of Science and Higher Education (Poland) under the name "Regional Initiative of Excellence" in the years 2019-2022, project number 011/RID/2018/19, amount of financing 12 000 000 PLN. The work was accomplished under grant No. UMO-2016/23/N/ST8/03519 at the Bialystok University of Technology and financed by the National Science Centre (Poland).

1. *Wang L., Gramlich W.M., Garder D.J.* Improving the impact strength of Poly(lactic acid) (PLA) in fused layer modeling // *Polymer*. – 2017. – **114**. – P. 242-248.

UDC 539.4

## ON EXTREME HYSTERETIC PROPERTIES OF DAMPER WITH CUTTED SHELL

**Andrii Velychkovych, Ivan Shatskyi, Vasyi Shopa**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas (Ukraine);*

*Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics  
and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine*

[a\\_velychkovych@ukr.net](mailto:a_velychkovych@ukr.net); [ipshatsky@gmail.com](mailto:ipshatsky@gmail.com); [vasyl.shopa@gmail.com](mailto:vasyl.shopa@gmail.com)

In the vast majority of cases, vibration decreases the strength, reliability and durability of industrial machines, mechanisms and structures. This is why the research and design works and theoretical investigations in the field of development of new means of vibration protection and methods for their analyses are of crucial importance.

The achievements of the authors in the analytical modeling of hysteretic energy dissipation in the cut shells with deformable filler at the expense of dry friction are presented. Based on the one-dimensional models of shells and filler the non-conservative quasi-static problems for the dampers under nonmonotonic loading are formulated and solved. The distribution of the stresses in contact system has been studied for the processes of a cyclic loading. The loop of structural damping (the force-displacement diagram) is constructed too. The last obtained result describes the effect of maximum energy absorption by a shell damper. Importance of tribology settings of contact system, for which the dissipated energy of the external load reaches the maximum, is revealed.

It has been first established that for a fixed ratio of cycle asymmetry with increasing coefficient of friction between the shell and filler, the amount of energy dissipated per cycle grows, reaches an extremum, and then gradually decreases. The maximum capabilities of the shell damper as for the energy absorption have been determined, and the optimal coefficients of friction in the contact pair have been calculated. Therefore, the idea of optimization of shell vibration protecting devices according to the criterion of maximum energy absorption of external influences by providing the desired tribologic properties of the contacting pairs is declared.

### ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНІ ГІСТЕРЕЗИСНІ ВЛАСТИВОСТІ ДЕМПФЕРА З РОЗРІЗАНОЮ ОБОЛОНКОЮ

*Проведено аналітичне моделювання розсіювання енергії в розрізаній оболонці з пружним заповнювачем за рахунок сухого тертя. Виявлено значення трибологічних параметрів демпфера, за яких величина поглинутої за цикл енергії сягає максимуму.*

## АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

<b>А</b>	
Аветісян Ара .....	15
Акімов Дмитро .....	243
Акуленко Леонід .....	94
Ананченко Нікіта .....	262
Андрейків Олександр .....	17, 241
Андрійчук Роман .....	102
Антоненко Ніна .....	96
Асташкін Володимир .....	20, 253

<b>Б</b>	
Бабенко Андрій .....	262
Бабуров Володимир .....	243
Бандирський Богдан .....	267
Бедзір Олександр .....	160, 246
Біда Надія .....	189
Білаш Оксана .....	206
Білушак Юрій .....	236
Благовещенська Тетяна .....	226
Бобилев Дмитро .....	22
Богданов Вячеслав .....	247
Боженко Богдан .....	24
Бойко Василь .....	26
Бойчук Юрій .....	81
Будз Степан .....	253
Буркевич-Янік Ева .....	50
Бутитер Ігор .....	216
Бутрак Іванна .....	218

<b>В</b>	
Вайсфельд Наталя .....	28, 30, 32
Василишин Андрій .....	202
Васильєва Лариса .....	136
Василько Галина .....	124
Васільєв Кирил .....	162
Васюник Зоряна .....	219
Ветров Олег .....	34
Вовк Оксана .....	108
Волчанські Томаш .....	35

<b>Г</b>	
Гаврись Олександр .....	129
Гарматій Галина .....	98

Гарт Етері .....	37, 249
Гачкевич Микола .....	15, 39
Гачкевич Олександр ....	35, 41, 43, 45, 62
Гембара Назар .....	17
Гембара Оксана .....	47
Гембара Тарас .....	47
Голубєва Олена .....	68
Гоменюк Сергій .....	243
Гошко Любомир .....	267
Григоренко Олександр ....	136, 138, 247
Григоренко Ярослав .....	138
Грицина Ольга .....	49
Грищак Віктор .....	243
Гром'як Роман .....	26
Гудрамович Вадим .....	249
Гуменчук Орест .....	41, 50

<b>Д</b>	
Даляк Тарас .....	179
Данієв Юрій .....	249
Дацків Анна .....	164
Дейнека Олег .....	210
Демидов Олександр .....	165
Демидюк Мирослав .....	251
Дзюба Анатолій .....	140
Дівеєв Богдан .....	216, 221
Долінська Ірина .....	241
Дробенко Богдан .....	253, 255
Дудик Михайло .....	167
Дяків Василь .....	198
Дякон Валерій .....	167
Дяченко Тетяна .....	257

<b>Ж</b>	
Жук Ярослав .....	100
Журавльова Ольга .....	258
Журавська Александра .....	50

<b>І</b>	
Івасько Наталія .....	102
Івасько Роман .....	43, 45, 62
Ільчук Наталія .....	204
Ірза Євгеній .....	39, 52, 54

**К**

Казарян Карен .....	70
Казберук Анджей .....	127
Калиняк Богдан .....	259
Камінський Анатолій .....	56
Кандала Степан .....	262
Кваснюк Олексій .....	189
Киричок Іван .....	100
Кіт Григорій .....	102
Клименко Дмитро 243, 249, 255, 257, 271	
Козакевич Тереза .....	35
Козаченко Тетяна .....	94
Козачок Олег .....	169
Козярска Анна .....	52
Колмакова Віра .....	167
Коляно Ярослав .....	104
Кондратюк Ярослав .....	106
Костробій Петро .....	223
Кравець Володимир .....	171
Кравцов Дмитро .....	37
Кривий Олександр .....	174
Крутій Юрій .....	58
Кузьменко Василь .....	74, 176
Кузьменков Дмитро .....	68
Кунець Ярослав .....	225
Куротчин Леся .....	185
Курпа Лідія .....	60, 61, 107
Курташ Ірина .....	178
Кушнір Роман .....	62, 108, 110

**Л**

Ларіонов Ігор .....	243
Лещенко Дмитро .....	94
Литвин Богдан .....	251
Литвин Оксана .....	194
Лобода Володимир .....	164
Лоза Ігор .....	136
Луценко Георгій .....	28
Любицька Катерина .....	107

**М**

Маковійчук Микола .....	179
Максимів Юлія .....	225
Максимович Олеся .....	180
Максимук Олександр .....	76
Мануйленко Роман .....	64

Мариновіч Анджей .....	41
Марченко Олег .....	37
Марченко Ольга .....	226
Марчук Михайло .....	260
Маткова Ада .....	150
Матус Валерій .....	228
Махненко Олег .....	262, 265
Махоркін Ігор .....	110
Махоркін Микола .....	66
Мельник Наталія .....	267
Мельчарек Аніта .....	54
Михайлишин Віра .....	113, 115
Михаськів Віктор .....	230
Мікуліч Олена .....	148
Мішарін Андрій .....	183
Мищенко Віктор .....	228
Можаровський Валентин .....	54, 68
Морачковська Ірина .....	107
Моринь Стефан .....	43, 70, 267
Морозов Юрій .....	174
Мусій Роман .....	70, 267

**Н**

Нагірний Тарас .....	142
Николишин Мирон .....	185

**О**

Онишкевич Володимир .....	187
Онишко Любов .....	24, 189
Онишко Олексій .....	20, 24
Опанасович Віктор .....	185, 206, 208
Орленко Сергій .....	72
Осетров Андрій .....	60
Острик Володимир .....	192

**П**

Пакош Віра .....	260
Пастернак Ярослав .....	204
Пелка Кшиштоф .....	20
Перепічка Василь .....	229
Плашенко Сергій .....	74, 176
Пожиленков Олексій .....	30
Поліщук Тетяна .....	56, 167
Поліщук Олександр .....	269
Попов Всеволод .....	165, 183, 194
Пороховський Василь .....	228

Постолакі Леся .....	126
Прокопишин Ігор .....	196
Процеров Юрій .....	32
Процок Борис .....	116
Пустовой Антон .....	265
П'янило Ярослав .....	118

**Р**

Рабош Роман .....	225
Равска-Скотнічни Анна .....	39
Райтер Орест .....	241
Ревенко Віктор .....	120
Решітник Юлія .....	167
Рижа Ірина .....	223
Рожок Лілія .....	138
Ротко Світлана .....	150
Рябцев Ігор .....	78

**С**

Савицький Олег .....	234
Саврук Михайло .....	127
Самойленко Тетяна .....	226
Саприкіна Галина .....	265
Сапужак Ярослав .....	47
Сасе Тарас .....	104
Сачук Юрій .....	76
Сенченков Ігор .....	78
Сеньків Леся .....	198
Середницька Христина .....	200
Сіренко Володимир .....	140, 249, 255
Скородинський Ігор .....	122
Скочко Анатолій .....	257
Слободян Микола .....	185, 206
Соляр Тетяна .....	108, 180
Станік-Беслер Аніда .....	20, 45
Станкевич Володимир .....	230
Стасюк Богдан .....	144
Стасюк Галина .....	70
Стацук Микола .....	26
Сторожук Євген .....	247
Сулим Георгій ....	162, 202, 204, 206, 208
Сур'янінов Микола .....	58
Сяський Андрій .....	210

**Т**

Тарасов Андрій .....	100
----------------------	-----

Тарлаковський Дмитро .....	15
Терлецький Ростислав .....	41, 50, 62
Тимченко Галина .....	60
Ткаченко Ірина .....	96
Ткачук Антон .....	232
Ткачук Микола (мол.) .....	146
Токова Людмила .....	277
Толкачов Андрій .....	28
Тормахов Микола .....	247
Торський Адріан .....	39
Трищ Богдан .....	15
Трофимчук Олександр .....	234
Тужеляк Ольга .....	239
Турчин Ігор .....	124
Тучапський Роман .....	125
Тютюнник Марія .....	275

**У**

Улітко Ігор .....	79
-------------------	----

**Ф**

Флюд Володимир .....	24
----------------------	----

**Х**

Харченко Володимир .	255, 258, 260, 271
Химко Ольга .....	272
Хом'як Микола .....	260

**Ч**

Чекурін Василь .....	81, 126, 272
Чепіль Ольга .....	47
Червінка Костянтин .....	142
Червінко Ольга .....	78
Чернуха Ольга .....	236
Чернюшок Ольга .....	100
Черчик Геннадій .....	216
Чорненький Андрій .....	127
Чорний Борис .....	43
Чорноіван Юрій .....	56

**Ш**

Шацький Іван .....	178
Шваб'юк Василь .....	148, 150
Шевцова Наталія .....	210
Шевчук Віктор .....	129
Шинкаренко Георгій .....	52

Шматко Тетяна ..... 61  
 Шопа Василь ..... 160, 246  
 Шопа Тетяна ..... 238, 239

**Щ**

Щербініна Тетяна ..... 60

**Я**

Яджак Михайло ..... 273, 275  
 Ясінський Анатолій ..... 277  
 Яцик Ігор ..... 208

**A**

Ajeneza Oleg ..... 93  
 Amirjanyan Harutyun ..... 214  
 Augustyniak Jakub ..... 131, 133

**B**

Belubekyan Mels ..... 83, 85  
 Benslama Achour ..... 134  
 Berbyuk Viktor ..... 278

**D**

Derpeński Łukasz ..... 280, 281  
 Doroszko Michał ..... 152, 153

**E**

Egbuhuzor Udechukwu ..... 282

**F**

Falkowska Anna ..... 283, 284

**G**

Gao Cunfa ..... 158  
 Ghazaryan Karen ..... 83

**H**

Hakobyan Vahram ..... 212, 214

**K**

Kulchytsky-Zhyhailo Roman ..... 154, 156

**M**

Ma Chien-Ching ..... 159  
 Marzocca Pier ..... 83  
 Mousavi Atefeh ..... 87

**P**

Perkowski Dariusz M. .. 131, 133, 154, 156  
 Prymak Monika ..... 283

**R**

Rasoulzadeh Sam ..... 87  
 Rushchitsky Jeremiah ..... 89

**S**

Sahakyan Avetik ..... 214  
 Sarkisyan Samvel ..... 85, 144  
 Sebastianiuk Piotr ..... 154, 156  
 Seweryn Andrzej . 152, 153, 280, 281, 284  
 Shatskyi Ivan ..... 285  
 Shitikova Marina ..... 91, 93  
 Shopa Vasyl ..... 285

**T**

Tokovyy Yuriy ..... 158, 159

**V**

Velychkovych Andrii ..... 285

**Z**

Ziari Fahd A. .... 134

Національна академія наук України  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача

# Математичні проблеми механіки неоднорідних структур

## Випуск 5

Збірник наукових праць

*Комп'ютерна верстка та технічне редагування  
Романа Іваська*

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України  
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060  
тел.: +380 (32) 263-83-77, факс: +380 (32) 263-62-70

**E-mail:** [mpmns2019@gmail.com](mailto:mpmns2019@gmail.com)  
**Web:** [www.iapmm.lviv.ua/mpmns2019](http://www.iapmm.lviv.ua/mpmns2019)

