Вісник ЛДУБЖД

Bulletin of Lviv State University of Life Safety

ISSN 2078-4643
https://journal.ldubgd.edu.ua/index.php/Visnuk/
УДК 614.841.34
DOI: 10.32447/20784643.21.2020.09

Р.М. Тацій д.ф-м.н., професор, М.Ф.Стасюк к.ф-м.н., О.Ю.Пазен к.т.н, Л.С.Шипот
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОГО РАДІУСА ТЕПЛОВОЇ ІЗОЛЯЦІЇ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ТІЛ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТА СФЕРИЧНОЇ ФОРМ

В замкненій формі розв'язано задачі про визначення стаціонарних температурних поліву багатошарових (плоских, циліндричних та сферичних) конструкціях за наявності дискретно-неперервних внутрішніх, а також точкових джерел тепла. Одномірне диференціальне рівняння теплопровідності у різних системах координат подається через одне параметричне сімейство квазідиференціальних рівнянь. Вважається, що коефіцієнти диференціального рівняння теплопровідності є кусково-сталими функціями. До рівняння додається система двох лінійно-незалежних крайових умов, що в загальному випадку є нелокальними. Розв'язки таких задач конструктивніта виражаються виключно через їх вихідні дані. При цьому використовуються основні положення концепції квазіпохідних, положення теорії теплопередачі, теорії узагальнених систем лінійних диференціальних рівнянь, елементи теорії узагальнених функцій.

Для математичної моделі стаціонарної теплопровідності проілюстровано практичне використання концепції квазіпохідних, для ефективної побудови у замкненій формі розв'язків крайових задач з найбільш загальними крайовими умовами. В якості прикладу розв'язано задачі про знаходження критичних радіусів теплової ізоляції багатошарових пустотілих циліндра та куліз урахуванням внутрішніх джерелах тепла у шарах. Крайові умови при цьому першого та третього роду. Встановлено, що значення критичного радіусане залежитьвід кількості шарів та від інтенсивності внутрішніх джерел тепла, а лише від коефіцієнта теплопровідності зовнішнього шару конструкції та коефіцієнта теплообміну між конструкцією та навколишнім середовищем. Виведено формулу для визначення критичного радіуса термоізоляції для багатошарових циліндричної та сферичної конструкцій. Розроблені у роботі методи мають перспективу подальшого розвитку та можуть бути використані в інженерних розрахунках.

Ключові слова: температура, тепловий потік, квазіпохідна, квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші.

R.M.Tatsii, M.F.Stasiyk, O.Y.Pazen, L.S. Shypot *(Lviv State University of Life Safety, Lviv)*

CONCEPTION QUASIDERIVATIVES IN THE PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING OF HEAT TRANSFER

In this paper, in closed form, the problems of determining stationary temperature fields in multilayer (flat, cylindrical and spherical) structures in the presence of discrete-continuous internal and point heat sources are solved. The one-dimensional differential equation of thermal conductivity in different coordinate systems is given through one parametric family of quasi-differential equations. It is assumed that the coefficients of the differential equation of thermal conductivity are piecewise constant functions. A system of two linearly independent boundary conditions is added to the equation, which in the general case are nonlocal. The solutions of such problems are constructive and are expressed exclusively through their initial data. The basic provisions of the concept of quasi-derivatives, the provisions of the theory of heat transfer, the theory of generalized systems of linear differential equations, elements of the theory of generalized functions are used.

For the mathematical model of stationary thermal conductivity, the practical use of the concept of quasi-derivatives is illustrated, for the efficient construction, in a closed form, of solutions of boundary value problems with the most general boundary conditions. As an example, the problem of finding the critical radii of thermal insulation of multilayer hollow cylinders and spheres, taking into account the internal heat sources in the layers. Boundary conditions of the first and third kind. It is established that the value of the critical radius does not depend on the number of layers and the intensity of internal heat sources, but only on the thermal conductivity of the outer layer of the structure and the heat transfer coefficient between the structure and the environment. The formula for determining the critical radius of thermal insulation for a multilayer cylindrical and spherical structure is derived. The methods developed in this work have the prospect of further development and can be used in engineering calculations.

Keywords: temperature, heat flux, quasi-derivative, quasi-differential equation, boundary value problem, Cauchy matrix.

Вступ. Рівняння, що містять вирази вигляду $\left(ay^m\right)^n$, де $y(x)$ – невідома функція, прийнято називати *квазідиференціальними*. Якщо функція $a(x)$ недостатню кількість разів неперервно-диференційована, то виконання у такому виразі операцій *n*-кратного диференціювання може вивести за рамки класичного аналізу. Крім того, така операція часто призводить до проблеми множення узагальнених функцій [1].

Під *концепцією квазіпохідних* розуміємо основи лінійної теорії квазідиференціальних рівнянь, що тісно пов'язана з теорією еквівалентних їм систем диференціальних рівнянь першого порядку (див. напр. [2]і літературу там).

У цій роботі для математичної моделі стаціонарної теплопровідності проілюстровано практичне використання концепції квазіпохідних, для ефективної побудови, у замкненій формі, розв'язків крайових задач з найбільш загальними крайовими умовами.

Загалом нестаціонарні крайові задачі для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами детально вивчені в роботі [3] (див. також [4-7]).

1. Постановка задачі. Розглянемо одновимірне диференціальне рівняння

$$div(\lambda gradt)+f=0, \qquad (1)$$

яке моделює процеси стаціонарної теплопровідності може бути записане у різних системах координат. Коефіцієнт теплопровідності $\lambda(r)$ вважаємо кусково-сталим, а функцію інтенсивності внутрішніх джерел $f(r)$ такою, що містить як кусково-сталу, так і дискретну компоненти.

Поставимо у відповідність рівнянню (1) одне параметричне сімейство квазідиференціальних рівнянь

$$\left(r^l\lambda(r)t'\right)'=-r^l f(r), \quad r>0, \quad l=0,1,2. \qquad (2)$$

(значення параметра $l=0$ відповідає декартовим координатам, $l=1$ – циліндричним, а $l=2$ – сферичним).

Якщо коефіцієнт теплопровідності $\lambda(r)$ – недостатньо гладкий, то диференціювання виразу $r^l\lambda(r)t'$ виводить нас за межі класичних функцій. Щоб обійти цю неприємну процедуру диференціювання, введемо поняття квазіпохідної[1]

$$t^{[1]}\overset{df}{=}r^l\lambda(r)t' \qquad (3)$$

З допомогою квазіпохідної (3) зведемо диференціальне рівняння (2) до системи диференціальних рівнянь

$$\mathbf{T}'\overset{df}{=}\begin{pmatrix} t \\ t^{[1]}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{r^l\lambda(r)} \\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t \\ t^{[1]}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ r^l f(r)\end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Введемо такі позначення:

• нехай $r_0<r_1<r_2<...<r_{n-1}<r_n$ – довільне розбиття відрізка $[r_0,r_n]$ на *n*частин;

• $\Theta_k(r)$ – характеристична функція проміжку $[r_k,r_{k+1})$

$$\Theta_k(r)=\begin{cases}1, & r\in[r_k,r_{k+1}),\\ 0, & r\notin[r_k,r_{k+1});\end{cases} \qquad (5)$$

• $\delta_k=\delta(r-r_k)$ – функція Дірака з носієм в точці $r=r_k$,

та задамо коефіцієнти диференціального рівняння (3), використовуючи позначення (4), (5):

$$\lambda(r)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\Theta_k(r), \quad f(r)=r^{l}\sum_{k=0}^{n-1}g_k\Theta_k(r)+\sum_{k=0}^{n-1}s_k r_k{}^l\delta_k, \qquad (6)$$

де $\lambda_k,g_k,s_k\subset\mathbb{R}$ і $\lambda_k>0$ $\left(\forall k=\overline{1,n-1}\right)$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що точки зосереджень інтенсивності джерел s_k, $k=\overline{1,n-1}$збігаються з точками розривів коефіцієнтів $\lambda(r)$та $f(r)$.

Тоді система диференціальних рівнянь (4) за початкової умови

$$\mathbf{T}_l(r_0)=\left(t_l(r_0);\quad t_l^{[1]}(r_0)\right)^T=\mathbf{T}_l^0, \quad l=0,1,2 \qquad (7)$$

має [1] єдиний розв'язок $\mathbf{T}(r)$ на проміжку $[r_0,r_n]$. При цьому перша компонента $t_l(r)$вектора $\mathbf{T}(r)$ – неперервна на $[r_0,r_n]$функція, а друга компонента $t_l^{[1]}(r)$ має розриви 1-го роду в точках r_k:

$$\Delta t_l^{[1]}(r_k)=t_l^{[1]}(r_k)-t_l^{[1]}(r_k-0)=r_k^l s_k, \quad k=\overline{1,n-1}.$$

2. Розв'язок початкової задачі

Використовуючи подання коефіцієнтів диференціального рівняння (2) $\lambda(r)$ і $f(r)$ у вигляді (6) та вираз для початкового вектора (7), запишемо систему(4) з початковою умовою у вигляді

$$\mathbf{T}_l' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_k \Theta_k\right)\mathbf{T}_l - \sum_{k=0}^{n-1} r^l \mathbf{G}_k \Theta_k - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{S}_k r_k^l \delta_k, \quad l = 0,1,2. \quad (8)$$

$$\mathbf{T}_l\left(r_0\right) = \mathbf{T}_l^0, \quad (9)$$

де

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{r^l \lambda_k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ r^l g_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ r_k^l s_k \end{pmatrix} \quad (10)$$

Як відомо [1, 8] розв’язок задачі Коші (8), (9) з коефіцієнтами (10) подається у вигляді сплайна

$$\mathbf{T}_l\left(r\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{T}_{k,l}\left(r\right)\Theta_k, \quad l = 0,1,2, \quad (11)$$

де компоненти сплайна $\mathbf{T}_{k,l}\left(r\right)$ виражені формулою

$$\mathbf{T}_{k,l}\left(r\right) = \mathbf{B}_{k,l}\left(r, r_k\right)\mathbf{B}_l\left(r_k, r_0\right)\mathbf{T}^0 +$$

$$+\mathbf{B}_{k,l}\left(r, r_k\right)\sum_{i=1}^{k} \mathbf{B}_l\left(r_k, r_i\right) + \int_{r_k}^{r} \mathbf{B}_{k,l}\left(r, s\right) s^l \mathbf{G}_k ds, \quad (12)$$

$$l = 0,1,2$$

Вкажемо структуру елементів зображення (12):

$$\mathbf{B}_{k,1}\left(r, s\right) = \begin{pmatrix} 1 & K_{k,1}\left(r, s\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l = 0,1,2, \quad (13)$$

де

$$K_{k,0}\left(r, s\right) = \frac{r - s}{\lambda_k}, \quad K_{k,1}\left(r, s\right) = \frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{r}{s}, \quad K_{k,2}\left(r, s\right) = \frac{r - s}{\lambda_k r s};$$

$$\mathbf{B}_l\left(r_k, r_0\right) = \begin{pmatrix} 1 & K_l\left(r_k, r_0\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l = 0,1,2, \quad (14)$$

де

$$K_0\left(r_k, r_0\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{r_{i+1} - r_i}{\lambda_i}, \quad K_1\left(r_k, r_0\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{r_{i+1}}{r_i},$$

$$K_2\left(r_k, r_0\right) == \sum_{i=0}^{k-1} \frac{r_{i+1} - r_i}{\lambda_i r_{i+1} r_i};$$

$$\mathbf{Z}_{i,0} = -\begin{pmatrix} \dfrac{g_{i-1}}{2\lambda_{i-1}}\left(r_i - r_{i-1}\right)^2 \\ g_{i-1}\left(x_i - x_{i-1}\right) + s_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{i,0} \\ z_{i,0}^{[1]} + s_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$\mathbf{Z}_{i,1} = -\begin{pmatrix} \dfrac{g_{i-1}}{\lambda_{i-1}}\left[\dfrac{1}{4}\left(r_i^2 - r_{i-1}^2\right) - \dfrac{r_{i-1}}{2}\ln\dfrac{r_i}{r_{i-1}}\right] \\ \dfrac{g_{i-1}}{2}\left(r_i^2 - r_{i-1}^2\right) + s_i r_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,1}^{[1]} + s_i r_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}; (15)$$

$$\mathbf{Z}_{i,2} = -\begin{pmatrix} \dfrac{g_{i-1}}{\lambda_{i-1}}\left(\dfrac{r_i^2}{6} - \dfrac{r_{i-1}^2}{2} + \dfrac{r_{i-1}^3}{3r_i}\right) \\ \dfrac{g_{i-1}}{3}\left(r_i^3 - r_{i-1}^3\right) + s_i r_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{i,2} \\ z_{i,2}^{[1]} + s_i r_i^2 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$\int_{r_k}^{r} \mathbf{B}_{k,0}\left(r, s\right)\mathbf{G}_k ds = -\begin{pmatrix} \dfrac{g_k}{2\lambda_k}\left(r - r_k\right)^2 \\ g_k\left(r - r_k\right) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$\int_{r_k}^{r} \mathbf{B}_{k,1}\left(r, s\right)\mathbf{G}_k s ds = -$$

$$-\begin{pmatrix} \dfrac{g_k}{\lambda_k}\left[\dfrac{1}{4}\left(r^2 - r_k^2\right) - \dfrac{r_k}{2}\ln\dfrac{r}{r_k}\right] \\ \dfrac{g_k}{2}\left(r^2 - r_k^2\right) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$\int_{r_k}^{r} \mathbf{B}_{k,2}\left(r, s\right)\mathbf{G}_k s^2 ds = -$$

$$-\begin{pmatrix} \dfrac{g_k}{\lambda_k}\left(\dfrac{r^2}{6} - \dfrac{r_k^2}{2} + \dfrac{r_k^3}{3r}\right) \\ \dfrac{g_k}{3}\left(r^3 - r_k^3\right) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (16)$$

Зауважимо,що перша компонента векторного розв’язку (11) – це скалярна сплайн-функція $t_l\left(r\right) = \sum_{k=0}^{n-1} t_{k,l}\left(r\right)\Theta_k, \quad l = 0,1,2,$ яка є розв’язком задачі Коші для квазідиференціального рівняння (2) за початкової умови $t_l\left(r_0\right) = t_l^0, \quad l = 0,1,2,$ а друга компонента – її квазіпохідна (3).

2.1. Розв’язок крайової задачі. Розглянемо диференціальне рівняння (2) за крайових умов:

$$\begin{aligned} p_{11}t\left(r_0\right) + p_{12}t^{[1]}\left(r_0\right) + q_{11}t\left(r_n\right) + q_{12}t^{[1]}\left(r_n\right) = \psi_0, \\ p_{12}t\left(r_0\right) + p_{22}t^{[1]}\left(r_0\right) + q_{21}t\left(r_n\right) + q_{22}t^{[1]}\left(r_n\right) = \psi_n, \end{aligned} \quad (17)$$

де $p_{ij}, q_{ij}, \psi_0, \psi_n, \lambda_n \subset \mathbb{R}, \quad i, j = 1,2.$

Крайові умови (17) можна подати у матричному вигляді:

$$\mathbf{PT}\left(r_0\right) + \mathbf{QT}\left(r_n\right) = \mathbf{\Gamma}, \quad (18)$$

де

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t\left(r\right) \\ t^{[1]}\left(r\right) \end{pmatrix}.$$

Тоді крайова задача (2), (17) еквівалентна крайовій задачі для векторної функції (8), (18).

Як відомо [1]розв’язок задачі Коші (8), (9) є розв’язком крайової задачі (8), (18) якщо початковий вектор T^0 набуває вигляду

$$\mathbf{T}^0 = \left[\mathbf{P} + \mathbf{QB}\left(r_n, r_0\right)\right]^{-1} \cdot \left[\mathbf{\Gamma} - \mathbf{Q}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}\left(r_n, r_i\right)\mathbf{Z}_i\right] \quad (19)$$

за умови, що $\left[\mathbf{P} + \mathbf{QB}\left(r_n, r_0\right)\right]^{-1}$ існує.

Розглянемо частинний випадок крайових умов (17):

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0^l t_l(r_0) - t_l^{[1]}(r_0) = \alpha_0 r_0^l \psi_0, \\ \alpha_n r_n^l t_l(r_n) + t_l^{[1]}(r_n) = \alpha_n r_n^l \psi_n, \end{cases} \quad l = 0,1,2, \qquad (20)$$

де $\alpha_0, \alpha_n, \psi_0, \psi_n \subset \mathbb{R}$ (крайові умови 3-го роду).

Умови (20) можна записати у вигляді (18), де

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha_0 r_0^l & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n r_n^l & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \alpha_0 r_0^l \psi_0 \\ \alpha_n r_n^l \psi_n \end{pmatrix}, \quad l = 0,1,2. \quad (21)$$

Знаходження вектора (19) у цьому випадку здійснимо поступово:

1) знайдемо матрицю $\left[\mathbf{P} + \mathbf{QB}(r_n, r_0)\right]^{-1}$, використовуючи (21)

$$\left[\mathbf{P} + \mathbf{QB}(r_n, r_0)\right]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_n r_n^l K_{n,l}(r_n, r_0) & 1 \\ -\alpha_n r_n^l & \alpha_0 r_0^l \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$K_{n,0}(r_n, r_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{r_{i+1} - r_i}{\lambda_i},$$

де $$K_{n,1}(r_n, r_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i},$$

$$K_{n,2}(r_n, r_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{r_{i+1} - r_i}{\lambda_i r_n r_{i+1}},$$

$$\Delta = \alpha_0 r_0^l + \alpha_0 \alpha_n r_0^l r_n^l K_{n,l}(r_n, r_0) + \alpha_n r_n^l;$$

2) знайдемо вектор $\mathbf{B}_l(r_n, r_i)\mathbf{Z}_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad l = 0,1,2.$

Маємо

$$\mathbf{B}_l(r_n, r_i)\mathbf{Z}_{i,l} = -\begin{pmatrix} z_{i,l} + K_l(r_n, r_i)\left(z_{i,l}^{[1]} + s_i r_i^l\right) \\ z_{i,l}^{[1]} + s_i r_i^l \end{pmatrix}; \quad (23)$$

3) використовуючи (23), знайдемо матрицю $\mathbf{\Gamma} - \mathbf{Q}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_l(r_n, r_i)\mathbf{Z}_{i,l} = (A \quad B)^T$, $l = 0,1,2,$ де

$$A = \alpha_0 x_0^l \psi_0,$$

$$B = \alpha_n r_n^l \psi_n + \alpha_n r_n^l \left[\sum_{i=1}^{n-1} z_{i,l} + K_l(r_n, r_i)\left(z_{i,l}^{[1]} + s_i r_i^l\right) + z_{n,l} + z_{n,l}^{[1]}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}\left(z_{i,l}^{[1]} + s_i r_i^l\right) + z_{n,l}^{[1]}.$$

Тоді з використанням (22), (23) вектор (19) можна записати у вигляді

$$\mathbf{T}^0 = \frac{1}{\Delta}\left(A\left[1 + \alpha_n r_n^l K_{n,l}(r_n, r_0)\right]; \quad -\alpha_n r_n^l A + \alpha_0 r_0^l B\right)^T. \quad (24)$$

3. Застосування. У практичній діяльності людини виникає потреба в енергозбереженні, тобто зменшенні теплопередачі між внутрішнім середовищем, що має форму багатошарової конструкції, та навколишнім середовищем. Для цього використовують теплову ізоляцію.

Покриття, яке збільшує термічний опір, називається тепловою ізоляцією. Для теплової ізоляції використовують матеріал з низьким коефіцієнтом теплопровідності.

Виникає питання про визначення критичних розмірів ізоляційного шару, тобто таких його розмірів, за яких спостерігається мінімальний витік тепла через ізоляційну поверхню в навколишнє середовище.

У зв'язку з цим, було введено поняття критичного радіуса [9,10] для одношарового порожнистого циліндра без урахування внутрішніх джерел тепла. Тут ми розглянемо питання про визначення критичних радіусів для багатошарових порожнистих циліндра та кулі з урахуванням внутрішніх джерел. На рис. (1) зображено поперечний (осьовий) переріз циліндра та кулі відповідно.

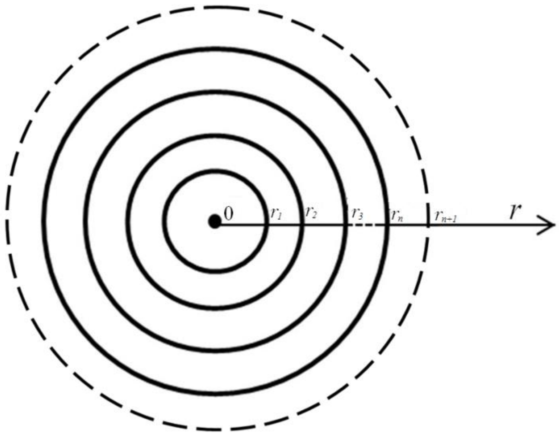

Рисунок 1–Поперечний (осьовий) переріз циліндра та кулі

3.1. Постановка задачі. Розглядається багатошаровий циліндр (куля) з крайовою умовою 1-го роду в точці $r = r_n$ і умовою 3-го роду в точці $r = r_{n+1}$:

$$\left(r^l \lambda_n t_l'\right)' = 0, l = 1,2 \qquad (25)$$

$$\begin{cases} t_l(r_n) = t_l^n, \\ \alpha_{n+1} r_{n+1}^l t_l(r_{n+1}) + t_l^{[1]}(r_{n+1}) = \alpha_{n+1} r_{n+1}^l \psi_{n+1}, \end{cases} \quad l = 1,2 \ (26)$$

В даному випадку матриці $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, і $\mathbf{\Gamma}$ з (18) мають вигляд (26)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_{n+1} r_{n+1}^l & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} t_l^n \\ \alpha_{n+1} r_{n+1}^l \psi_{n+1} \end{pmatrix}. (27)$$

Тут ψ_{n+1} – температура навколишнього середовища, α_{n+1} – коефіцієнт теплообміну між поверхнею кулі та навколишнім середовищем.

На основі (22) знаходимо початковий вектор в точці $r = r_n$:

$$\mathbf{T}_l(r_n) \overset{df}{=} \begin{pmatrix} t_l(r_n) \\ r_l^{[1]}(r_n) \end{pmatrix} = \left(\mathbf{P} + \mathbf{QB}_l(r_{n+1}, r_n)\right)^{-1} \mathbf{\Gamma} =$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_{n+1} r_{n+1}^l & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & K_l(r_{n+1}, r_n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} t_l^n \\ \alpha_{n+1} r_{n+1}^l \psi_{n+1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{n+1} r_{n+1}^l & \Delta_l \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_l^n \\ \alpha_{n+1} r_{n+1}^l \psi_{n+1} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\Delta_l}\begin{pmatrix} \Delta_l & 0 \\ -\alpha_{n+1} r_{n+1}^l & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_l^n \\ \alpha_{n+1} r_{n+1}^l \psi_{n+1} \end{pmatrix} = \tag{28}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\alpha_{n+1} r_{n+1}^l}{\Delta_l} & \frac{1}{\Delta_l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_l^n \\ \alpha_{n+1} r_{n+1}^l \psi_{n+1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} t_l^n \\ \left(\psi_{n+1} - t_l^n\right)\frac{\alpha_{n+1} r_{n+1}^l}{\Delta_l} \end{pmatrix},$$

де позначено $\Delta_l = \alpha_{n+1} r_{n+1}^l K_l(r_{n+1}, r_n) + 1$.

Тоді

$$\mathbf{T}_l(r_{n+1}) = \mathbf{B}_l(r_{n+1}, r_n)\mathbf{T}_l(r_n) = \begin{pmatrix} 1 & K_l(r_{n+1}, r_n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_l^n \\ \left(\psi_{n+1} - t_l^n\right)\frac{\alpha_{n+1} r_{n+1}^l}{\Delta_l} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} t_l^n + \left(\psi_{n+1} - t_l^n\right)\frac{\alpha_{n+1} r_{n+1}^l K_l(r_{n+1}, r_n)}{\Delta_l} \\ \left(\psi_{n+1} - t_l^n\right)\frac{\alpha_{n+1} r_{n+1}^l}{\Delta_l} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Отже $t_l^{[1]}(r_{n+1}) = \left(\psi_{n+1} - t_l^n\right)\dfrac{\alpha_{n+1} r_{n+1}^l}{\Delta_l}$ (30)

Кількість тепла Q, що витікає через ізоляційну поверхню $r = r_{n+1}$ обчислюється за формулою [9]:

$$Q = 2^l \pi r_{n+1}^l q_l(r_{n+1}) \tau, \tag{31}$$

де $q_l = -\lambda_n t_n'(r_{n+1})$ – густина теплового потоку на поверхні $r = r_{n+1}$[9]. Густина теплового потоку може бути виражена через квазіпохідну таким чином

$$q_l = -\frac{r_{n+1}^l \lambda_n t_l'(r_{n+1})}{r_{n+1}^l} = -\frac{t_l^{[1]}(r_{n+1})}{r_{n+1}^l}. \tag{32}$$

Тоді $Q = 2^l \pi \left(t_l^n - \psi_{n+1}\right)\dfrac{\alpha_{n+1} r_{n+1}^l}{\Delta_l}\tau.$ (33)

Дослідимо кількість теплоти Q на екстремум, вважаючи її функцією змінної r_{n+1}. Оскільки множник $2^l \pi \left(t_l^n - \psi_{n+1}\right)\alpha_{n+1}\tau > 0$ і від r_{n+1} не залежать, то це еквівалентно дослідженню на екстремум функції

$$f_l(r_{n+1}) = \frac{r_{n+1}^l}{\Delta_l} = \frac{r_{n+1}^l}{\alpha_{n+1} r_{n+1}^l K_l(r_{n+1}, r_n) + 1} = \frac{1}{\alpha_{n+1} K_l(r_{n+1}, r_n) + \frac{1}{r_{n+1}^l}} \tag{34}$$

Маємо

$$f_l'(r_{n+1}) = \frac{df_l(r_{n+1})}{dr_{n+1}} = \frac{-\frac{d}{dr_{n+1}}\left(\alpha_{n+1} K_l(r_{n+1}, r_n) + \frac{1}{r_{n+1}^l}\right)}{\left(\alpha_{n+1} K_l(r_{n+1}, r_n) + \frac{1}{r_{n+1}^l}\right)^2} = \frac{-\left(\alpha_{n+1} K_l'(r_{n+1}, r_n) - \frac{l}{r_{n+1}^{l+1}}\right)}{\left(\alpha_{n+1} K_l(r_{n+1}, r_n) + \frac{1}{r_{n+1}^l}\right)^2} \tag{35}$$

Оскільки [11] $K_l(r_{n+1}, r_n) = \dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{dz}{z^l}$, то, застосувавши теорему про похідну інтеграла за змінною верхньою границею r_{n+1}, отримуємо, що

$$K_l'(r_{n+1}, r_n) = \frac{1}{\lambda_n r_{n+1}^l} \tag{36}$$

Для визначення критичної точки, прирівнюємо чисельник (35) до нуля:

$$\alpha_{n+1}\frac{1}{\lambda_n r_{n+1}^l} - \frac{l}{r_{n+1}^{l+1}} = 0,$$

або $\dfrac{\frac{\alpha_{n+1}}{\lambda_n} r_{n+1}^l - l}{r_{n+1}^{l+1}} = 0.$

Звідси $r_{n+1кр} = \dfrac{l\lambda_n}{\alpha_{n+1}}, l = 1, 2.$ (37)

Оскільки при переході через цю критичну точку похідна (35) змінює знак з «+» на «–», то $r_{n+1кр}$ – точка локального максимуму.

При $l = 1$ (багатошарова циліндрична конструкція)

$$r_{кр} = \frac{\lambda_{іш}}{\alpha_{нс}}. \quad (38)$$

При $l = 2$ (багатошарова сферична конструкція)

$$r_{кр} = \frac{2\lambda_{іш}}{\alpha_{нс}}. \quad (39)$$

В формулах (38) і (39) $\lambda_{іш}$ позначає коефіцієнт теплопровідності ізоляційного шару, а $\alpha_{нс}$ – коефіцієнт теплообміну з навколишнім середовищем.

Слід підкреслити, що моделі процесів теплопровідності в багатошарових структурах з урахуванням внутрішніх джерел тепла викладені в запропонованій роботі з єдиної точки зору (рівняння теплопровідності (2) розглядається як в декартових, так і в циліндричних та сферичних координатах при різних $l = 0,1,2$) і вирішальну роль при цьому відіграє концепція квазіпохідних.

Висновки. Наявність параметра *l*у квазідиференціальному рівнянні (2) дозволяє розв'язати задачу Коші (8), (9) та крайову задачу (2), (17) з єдиної точки зору.

Покладаючи послідовно в остаточному розв'язку значення цього параметра 0, 1, 2, отримуємо результати для багатошарових стінок порожнистого циліндра та порожнистої кулі відповідно.

Вперше отримано значення критичного радіуса теплоізоляції для багатошарових циліндричної та сферичної конструкцій з урахуванням внутрішніх джерел тепла (формули (38), (39)). Слід підкреслити, що формула (39) була невідомою навіть для одношарової сферичної конструкції.

Список літератури:

1. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко О.В., Власій О.О.. Узагальнені квазідиференціальні рівняння.Дрогобич: "Коло", 2011. – 301 с.

2. Тацій Р.М.,Стасюк М.Ф., Мазуренко О.В.Моделювання дискретно-континуальних систем. Основи концепції квазіпохідних.*Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. – 2009. – №10. – С. 7-37.

3. Таций Р.М.,Пазен О.Ю. Общие краевые задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами. *Инженерно-физический журнал*. – 2016. – Том89, №2. – С. 350-361.

4. Семерак М.М., Таций Р.М., Пазен О.Ю. Теплоизолирующая способность многослойных строительных конструкций с учётом разрушения произвольного слоя.*Вестник Кокшетауского технического института Министерства по чрезвычайным ситуациям республики Казахстан : Сб. науч. тр. – Кокшетау : КТИ КЧС МВД РК*, 2015. – № 4 (20). – С. 8–17.

5. Тацій Р.М., Власій О.О., Стасюк М.Ф. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтам. *Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки*. – 2014. – № 804. – С. 64–69.

6.Тацій Р.М., Ушак Т.І., Пазен О.Ю. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла .*Пожежна безпека: зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД*, 2015. – № 27. – С. 120-126.

7. Тацій Р.М.,Пазен О.Ю.Прямий метод розрахунку нестаціонарного температурного поля за умов пожежі. *Пожежна безпека : зб. наук.пр. – Львів : ЛДУ БЖД,* 2015. – № 26. – С. 135-141.

8.Тацій Р.М., Стасюк М.Ф.,Пазен О. Ю. Концепція квазіпохідних в задачах математичного моделювання. *Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця : матер. IV Всеукр. наук. конф. (1-2 грудня).* – Суми, 2016. – С. 44–47.

9.Величко Л.Д., Лозинський Р.Я., Семерак М.М.. Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі – Л: "Сполом", 2011. – 497 с.

10.Исаченко В.П., Осипова В.А.,Сукомел А.С. Теплопередача. – М: Энергия, 1975. – 488 с.

11.Тацій Р.М.,Стасюк М.Ф., Власій О.О. Дискретно-неперервні крайові задачі для найпростіших квазідиференціальних рівнянь другого порядку.*Вісник НУ "Львівська політехніка", фізико-математичні науки.* 2011. №718. С. 61–69.

Reference:

1. Tatsii R. M., Stasiuk M.F.,Mazurenko O.V.,Vlasii O.O.Uzahal′neni kvazidyferentsial′ni rivnyannya[Generalized quasi-differential equations]. Drohobych: "Kolo", 2011. – 301 s.

2. Tatsii R. M., Stasiuk M.F.,Mazurenko O.V.Modelyuvannya dyskretno-kontynual′nykh system. Osnovy kontseptsiyi kvazipokhidnykh [Modeling of discrete-continuous systems. Basics of the concept of quasi-derivatives]. *Fizyko-matematychne-modelyuvannya ta informatsiyni tekhnolohiyi*– 2009. – №10. – S. 7-37.

3. Tatsii R. M.,PazenO.Yu.Obshchiyekra-yevyyezadachidlyauravneniyateploprovodnosti s kusochno-nepreryvny mikoeffitsiyentami [General boundary value problems for the heat equation with piecewise continuous coefficients]. *Inzhenerno-fizicheskiyzhurnal*– 2016. – Tom 89, №2. – S. 350-361.

4. Semerak M.M., Tatsii R. M., Pazen O.Yu Teploizoliruyushchaya sposobnost' mnogosloynykh stroitel'nykh konstruktsiy s uchotom razrusheniya proizvol'nogo sloya [The heat-insulating ability of multilayer building structures, taking into account the destruction of an arbitrary layer]. *Vestnik Kokshetauskogo tekhnicheskogo*

instituta Ministerstva po chrezvychaynym situatsiyam respubliki Kazakhstan: Sb. nauch. tr. – Kokshetau: KTI KCHS MVD RK, 2015. – № 4 (20). – S. 8–17.

5. Tatsii R. M., Stasiuk M.F.,Vlasii O.O. Zahal′na persha krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovidnosti z kuskovo-zminnymy koefitsiyentam [General first boundary value problem for the equation of thermal conductivity with piecewise variable coefficients]. *Visnyk Natsional'noho universytetu "L'vivs'ka politekhnika"Fizyko-matematychni nauky*. 2014. № 804. S. 64–69.

6. Tatsii R. M.,PazenO.Yu., Ushak T.I.Zahal′na tretya krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovidnosti z kuskovo-stalymy koefitsiyentamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla [General third boundary value problem for the equation of thermal conductivity with piecewise constant coefficients and internal heat sources]. *Pozhezhna bezpeka: Zb. nauk. pr.* – L′viv : LDU BZHD, 2015. – № 27. – S. 120-126.

7. Tatsii R. M.,PazenO.Yu.Pryamyy metod rozrakhunku nestatsionarnoho temperaturnoho polya za umov pozhezhi [A direct method of calculating a nonstationary temperature field under fire conditions]. *Pozhezhnabezpeka : Zb. nauk. pr.* – L′viv : LDU BZHD, 2015. – № 26. – S. 135-141.

8. Tatsii R. M., Stasiuk M.F.,PazenO.Yu. Kontseptsiya kvazipokhidnykh v zadachakh matematychnoho modelyuvannya [The concept of quasi-derivatives in mathematical modeling problems]. *Naukova diyal'nist' yak shlyakh formuvannyaprofesiynykh kompetentnostey maybutn'oho fakhivtsya : mater. IV Vseukr. nauk. konf. (1-2 hrudnya).* – Sumy, 2016. – S. 44–47.

9. Velychko L.D., LozynskyiR.Ya., Semerak M.M. Termodynamika ta teploperedacha v pozhezhniyspravi [Thermodynamics and Heat Transfer in Fire Business]. – L: "Spolom", 2011. – 497 s.

10. Isachenko V.P., Osipova V.A., Sukomel A.S.Teploperedacha [Heat transfer]. – M: Energiya, 1975. – 488 s.

11. Tatsii R. M., Stasiuk M.F.,Vlasii O.O. Dyskretno-neperervni krayovi zadachi dlyanayprostishykh kvazidyferentsial′nykh rivnyan′ druhoho poryadku [Discrete-continuous boundary value problems for the simplest second-order quasi-differential equations]. *Visnyk NU "L'vivs'kapolitekhnika", fizyko-matematychni nauky*. – 2011. – №718. – S. 61–69.

.

***Науково-методична стаття**