

*Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
Представництво "Польська Академія Наук" в Києві
Вінницький національний технічний університет
Центр математичного моделювання ІППММ
ім. Я.С.Підстригача НАН України
AGH науково-технологічний університет
ім. Ст.Сташіца, Польща
Людзький університет, Польща
Інститут кібернетики НАН України
Національний авіаційний університет
Фінансово-економічний інститут Таджикистану
Економічна академія "Д.А.Ценов", Болгарія
Штуттгардський університет, Німеччина
Харківський національний університет радіоелектроніки
НДІ інтелектуальних комп'ютерних систем ТНЕУ та ІК НАН України
Новий університет Лісабона, Португалія
Бакинський державний університет, Азербайджан
Об'єднаний інститут проблем інформатики НАН Білорусі
Інститут інженерів з електротехніки
та електроніки (ІЕЕЕ), Українська секція
Асоціація "Інформаційні технології України"
Громадська організація "Івано-Франківський ІТ кластер"*

"ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ"

**матеріали
міжнародної науково-практичної конференції**

**20-25 травня 2019 року
Івано-Франківськ**

**"INFORMATION TECHNOLOGIES AND COMPUTER MODELLING"
proceedings
of the International Scientific Conference
2019, May, 20th to 25th
Ivano-Frankivsk**

Івано-Франківськ - 2019

УДК (004:004.2/004.9+007):33/37+51+621
ББК 22.17 32.81
I-74 Т

Наукові редактори: докт. техн. наук, проф. **Л.Б. Петришин** (ПНУ, АГН)

Матеріали статей опубліковані в авторській редакції

"Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання"; матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції, м. Івано-Франківськ, 20-25 травня 2019 року. – Івано-Франківськ: п. Голіней О.М., 2019. –с.

Збірка містить матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції з проблем інформаційних технологій в технічних системах, в соціумі, освіті, медицині, економіці та екології; теорії інформації, кодування та перетворення форми інформації; технологій цифрової обробки інформації; захисту інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах; математичного та імітаційного моделювання систем.

УДК
(004:004.2/004.9+007):33/37+51+621
ББК 22.17 32.81
I-74 Т

ISBN

© ПНУ ім. В. Стефаніка та автори, 2019

Прямий Метод Дослідження Теплообміну у Системі – Куля Всередині Багатошарової Сферичної Оболонки

Роман Тацій, Марта Стасюк, Олег Пазен
кафедра прикладної математики та механіки
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
roman.tatsiy@gmail.com, marta_stasiuk@yahoo.com, opazen@gmail.com

Direct Method of Research of the Heat Transfer in the System – Bullet Inside a Multilayered Spherical Shell

Roman Tatsiy, Marta Stasiuk, Oleg Pazen
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
roman.tatsiy@gmail.com, marta_stasiuk@yahoo.com, opazen@gmail.com

Анотація—Запропонована робота присвячена застосуванню прямого методу до дослідження процесів теплообміну в системі – куля всередині багатошарової сферичної оболонки (конструкції). Для розв'язування такої задачі поставлено допоміжну задачу про визначення розподілу нестационарного температурного поля у багатошаровій порожнистій сферичній конструкції з «вилученою» кулею достатньо малого радіуса. Реалізація розв'язку допоміжної задачі проводиться шляхом застосування методу редукції із використанням концепції квазіпохідних. Надалі використовується схема Фур'є із застосуванням модифікованого методу власних функцій. Для знаходження розв'язку вихідної задачі використано ідею граничного переходу шляхом прямування радіусу вилученої кулі до нуля. Встановлено, що при такому підході всі власні функції відповідної задачі на власні значення не мають особливостей в нулі, а це означає, що й розв'язки вихідної задачі є обмеженими у всій конструкції. Для ілюстрації запропонованого методу розв'язано модельний приклад про знаходження розподілу температурного поля у системі семишарових сферичних конструкцій з різними теплофізичними характеристиками матеріалів.

Abstract— The article is devoted to the application of the direct method to the research of heat transfer processes in the system - bullet inside a multilayered spherical shell (construction). To solve

such a problem, an auxiliary problem is proposed to determine the distribution of a unsteady temperature field in a multilayer hollow spherical construction with a "deleted" bullet of sufficiently small radius. The implementation of the solution of the auxiliary problem is carried out by applying a reduction method using the concept of quasi derivatives. In the future, the Fourier scheme is used with the use of the modified eigenfunctions method. To find the solution of the original problem, the idea of the marginal transition is used by passing the radius of the "deleted" bullet to zero. It is established that in this approach all the eigenfunctions of the corresponding problem on the eigenvalues have no singularities at zero, which means that the solutions of the original problem are constrained throughout the design. To illustrate the proposed method, a model example of finding the distribution of a temperature field in a system of seven-layer spherical constructions with different thermophysical properties of materials is solved.

Ключові слова—багатошарова куля, квазіпохідна, прямий метод, граничний перехід

Keywords— multilayer sphere, quasi derivative, direct method, marginal transition

I. ВСТУП

Багатошарові конструкції набули широкого застосування у різних галузях індустрії: будівництві, нафтогазовій, аерокосмічній, енергетичній та інших сферах.

Характерною особливістю таких елементів є поєднання різного роду механічних та теплофізичних характеристик шарів, що робить їх більш досконалими. Проте, такий підхід зумовлює значні труднощі при розробці аналітичних методів їх дослідження.

Розв'язуванню проблеми теплообміну присвячені численні публікації. Основні методи дослідження задач про визначення розподілу нестационарного температурного поля у багатопарових конструкціях умовно поділяються на три види: а) прямі або класичні, які базуються на методі відокремлення змінних [1, 2]; б) операційні, що використовують різного роду інтегральні перетворення [3, 4]; в) наближені аналітичні та числові методи [5, 6].

Так, зокрема, за останні роки в роботах [7, 8] розглядаються багатопарові порожнисті циліндричні та сферичні конструкції. В основу цих публікацій покладено пряму (класичну) схему дослідження, що базується на методі редукції, концепції квазіпохідних, сучасній теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, модифікованому методі власних функцій Фур'є.

II. ПОСТАНОВКА ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ

В початковий момент часу $\tau = 0$, куля радіусом $r = r_0$ вкладається в багатопарову порожнисту конструкцію радіусами $r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < r_n$ з однаковою початковою температурою $T = T_0$, яка співпадає з температурою навколишнього середовища. Між кулями існує ідеальний тепловий контакт (рис. 1).

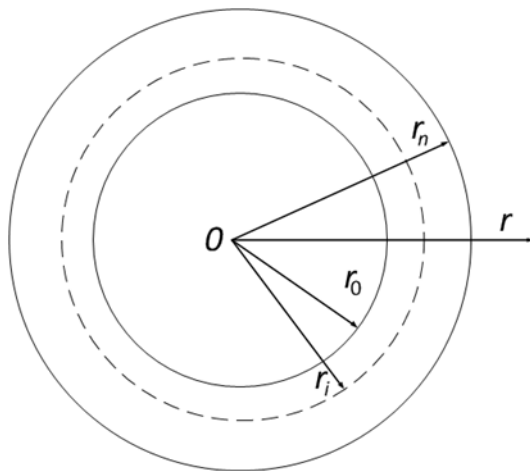


Рис. 1. Схема системи багатопарових сферичних куль (діаметральний переріз)

На зовнішній поверхні багатопарової порожнистої кулі існує конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються крайові умови третього роду. Температура навколишнього середовища змінюється за деяким законом $\psi(\tau)$, тобто залежить від часу τ . Необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля $T(r, \tau)$ у будь який момент часу τ у такій складній системі.

Така постановка задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності [3][3]

$$\tilde{n}\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$r \in (0, r_n), \quad \tau > 0,$$

з початковою умовою

$$T(r, 0) = T_0, \quad (2)$$

крайовою умовою

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha(T(r_n, \tau) - \psi(\tau)), \quad (3)$$

та умовою симетрії

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(0, \tau) = 0. \quad (4)$$

III. ДОПОМІЖНА ЗАДАЧА

У системі, куля всередині багатопарової оболонки, «вилучимо» кулю радіусом $r = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < r_0$ та розглянемо мішану задачу теплопровідності для багатопарової порожнистої сферичної конструкції зображеної на рис. 2.

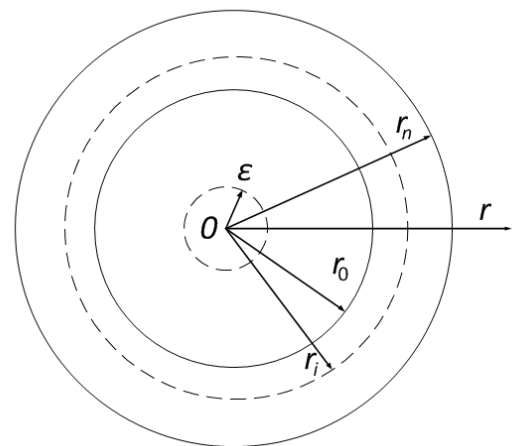


Рис. 2. Схема багатопарової порожнистої сферичної конструкції

Нехай θ_i – характеристична функція [9] на проміжках $[\varepsilon, r_n)$ тобто

$$\theta_0(r) = \begin{cases} 1, & r \in [\varepsilon, r_0), \\ 0, & r \notin [\varepsilon, r_0), \end{cases}$$

$$\theta_{i+1}(r) = \begin{cases} 1, & r \in [r_i, r_{i+1}), \\ 0, & r \notin [r_i, r_{i+1}), \end{cases} \quad i = 0, n-1.$$

Позначимо, $\lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i$, $c(r) \rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \theta_i$, $\lambda_i > 0$, $c_i \rho_i > 0$, $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$, $\lambda_i, c_i, \rho_i \in \mathbb{R}$.

Для знаходження розподілу нестационарного температурного поля у цій багатошаровій порожнистій сферичній конструкції необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності [8]

$$\tilde{n}\rho \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right), r \in (\varepsilon, r_n), \tau > 0, \quad (5)$$

з початковою умовою

$$t(r, 0) = t_0, \quad (6)$$

та крайовими умовами

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial t}{\partial r}(\varepsilon, \tau) = 0, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha(T(r_n, \tau) - \psi(\tau)). \end{cases} \quad (7)$$

Ввівши позначення $t^{[1]} \stackrel{df}{=} r^2 \lambda t'_r$, та помноживши крайові умови (7) на r^2 отримаємо

$$\begin{cases} t^{[1]}(\varepsilon, \tau) = 0, \\ \alpha r_n^2 t(r_n, \tau) + t^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha r_n^2 \psi(\tau). \end{cases} \quad (8)$$

Розв'язок задачі (5)-(6) шукатимемо за допомогою методу редукції [10], [11]

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau), \quad (9)$$

де одна з функцій ($u(r, \tau)$ або $v(r, \tau)$) вибирається спеціальним чином, а інша вже визначається однозначно.

A. Крайова задача для $u(r, \tau)$ та мішана задача для $v(r, \tau)$.

Введемо позначення $r^2 \lambda u'_r \stackrel{df}{=} u^{[1]}$. Визначимо функцію $u(r, \tau)$ як розв'язок крайової (квазістационарної) задачі:

$$(r^2 \lambda u'_r)' = 0, \quad (10)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u^{[1]}(\varepsilon, \tau) = 0, \\ \alpha r_n^2 u(r_n, \tau) + u^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha r_n^2 \psi(\tau). \end{cases} \quad (11)$$

Підставляючи (9) у рівняння (5), з урахування (10), послідовно отримуємо мішану задачу для функції $v(r, \tau)$

$$\begin{aligned} \tilde{n}\rho \frac{\partial}{\partial \tau} (u+v) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial}{\partial r} (u+v) \right) \Rightarrow \\ \tilde{n}\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \tilde{n}\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{n}\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \tilde{n}\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки крайові умови (8) для функції $u(r, \tau)$ справджують крайові умови (7) для функції $t(r, \tau)$,

отримаємо нульові крайові умови для визначення функції $v(r, \tau)$, тобто

$$\begin{cases} v^{[1]}(\varepsilon, \tau) = 0, \\ \alpha r_n^2 v(r_n, \tau) + v^{[1]}(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

а початкова умова набуде вигляду

$$v(r, 0) = t_0 - u(r, 0) = t_0. \quad (14)$$

IV. Розв'язування крайової задачі (10)-(11).

Структура розв'язування крайової задачі (10)-(11) детально описана у роботах [8], [12], [13]. Встановлено, що на кожному з проміжків розв'язок задачі (10)-(11) має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(r, \tau) &= B_0(r, \varepsilon) \cdot \mathbf{P}_0, \\ \mathbf{u}_i(r, \tau) &= B_i(r, r_0) \cdot B(r_i, r_0) \cdot B(r_0, \varepsilon) \cdot \mathbf{P}_0, \end{aligned} \quad (15)$$

де \mathbf{P}_0 – початковий вектор, який визначається наступною формулою:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= (P + Q \cdot B(r_n, \varepsilon))^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_n^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(1 \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r_0} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \right) \right) \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha r_n^2 \psi(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Відповідно, розв'язок задачі (10)-(11) на кожному з проміжків $[\varepsilon, r_0]$ та $[r_{i-1}, r_i]$ зображується так:

$$\mathbf{u}_0(r) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{u}_i(r) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=1}^i \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{1}{r_{k-1}} - \frac{1}{r} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \quad (18)$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r_0} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язок крайової задачі (10)-(11) $u(r, t) \equiv \psi(\tau)$, тобто не залежить від радіуса r .

V. Розв'язування мішаної неоднорідної задачі для функції $v(r, \tau)$

Оскільки функція $u(r, \tau)$ вже є відомою, то задача (12) для функції $v(r, \tau)$ набуде вигляду

$$\tilde{n}\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \tilde{n}\rho \psi'(\tau), \quad (19)$$

з нульовими крайовими умовами (13), при початковій умові (14).

A. Метод Фур'є та задача на власні значення.

Нетривіальні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$\tilde{n}\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (20)$$

з крайовими умовами (13) шукатимемо у вигляді [10]

$$v(r, \tau) = e^{-\omega \tau} \cdot R(r), \quad (21)$$

де ω – параметр, а $R(r)$ – невідома функція.

Підставляючи праву частину (21) у рівняння (20) отримуємо квазидиференціальне рівняння [8]

$$(r^2 \lambda R')' + \omega c \rho r^2 R = 0, \quad (22)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} R^{[1]}(\varepsilon) = 0, \\ \alpha r_n^2 R(r_n) + R^{[1]}(r_n) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Задача (22), (23) є класичною задачею на власні значення, у якій необхідно знайти значення ω_k (власні значення) при яких існують відповідні їм нетривіальні розв'язки $R_k(r, \omega_k)$ (власні функції) задачі (22), (23). Як відомо [10], всі власні значення цієї задачі є додатними та різними.

B. Конструктивна побудова власних функцій.

Ввівши квазіпохідну $R^{[1]} \stackrel{df}{=} r^2 \lambda R'$, вектор $\mathbf{R} = (R, R^{[1]})^T$ та матрицю

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda(r)} \\ -\omega c(r) \rho(r) r^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{зведемо}$$

квазидиференціальне рівняння (22) до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathbf{R}' = A\mathbf{R}. \quad (24)$$

Відповідну систему на проміжках $[\varepsilon, r_0]$ та $[r_{i-1}, r_i]$ запишемо у вигляді

$$\mathbf{R}'_0 = A_0 \cdot \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{R}'_i = A_i \cdot \mathbf{R}_i, \quad (25)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda_0} \\ -\omega c_0 \rho_0 r^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda_i} \\ -\omega c_i \rho_i r^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння (22) можна переписати у вигляді

$$(r^2 R')' + \beta_i^2 r^2 R = 0, \quad (26)$$

де позначено $\beta_i = \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}} \quad i = 0, 1$.

У роботі [8] встановлено, що матриця Коші системи (25) має вигляд

$$B_i(r, s, \omega) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$b_{11}^i = \frac{\beta_i s \cos(\beta_i(r-s)) + \sin(\beta_i(r-s))}{\beta_i r},$$

$$b_{12}^i = \frac{\sin(\beta_i \cdot (r-s))}{\lambda_i \beta_i r s},$$

$$b_{21}^i = \frac{\beta_i \cos(\beta_i \cdot (r-s))[r-s] - \sin(\beta_i(r-s))[1 + \beta_i^2 r s]}{\beta_i} \lambda_i,$$

$$b_{22}^i = \frac{\beta_i r \cos(\beta_i(r-s)) - \sin(\beta_i(r-s))}{\beta_i s},$$

$$i = 0, n-1.$$

Нетривіальні розв'язки $\mathbf{R}(r, \omega)$ системи (25) шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{R}(r, \omega) = B(r, \varepsilon, \omega) \cdot \mathbf{C}, \quad (28)$$

де

$$B(r, \varepsilon, \omega) = B_0(r, \varepsilon, \omega) \Theta_0 + B_1(r, r_0, \omega) B_0(r_0, \varepsilon, \omega) \Theta_1 + \dots + B_n(r, r_{n-1}, \omega) \prod_{i=1}^{n-1} B_i(r, r_{i-1}, \omega) B_0(r_0, \varepsilon, \omega) \Theta_n,$$

а $\mathbf{C} = (1, 0)^T$.

Позначимо

$$B(r_n, r_0, \omega) = B_n(r_n, r_{n-1}, \omega) \cdot B_{n-1}(r_{n-1}, r_{n-2}, \omega) \cdot \dots \cdot B_1(r_1, r_0, \omega) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння задачі на власні значення (22), (23) має вигляд

$$\det[P + Q \cdot B(r_n, \varepsilon, \omega)] = 0. \quad (29)$$

Нетривіальний розв'язок відповідної до (22) системи можна записати у вигляді

$$\mathbf{R}_k(r, \omega_k) = \tilde{B}(r, \varepsilon, \omega) \cdot (1, 0)^T = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{R}_{ki} \Theta_i \quad (30)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

На проміжках $[\varepsilon, r_0]$ та $[r_{i-1}, r_i]$ власні вектори мають вигляд

$$\mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, \varepsilon, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = (b_{11}^0, b_{21}^0)^T,$$

$$\mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_i(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_0, \omega_k) \cdot \tilde{B}_0(r_0, \varepsilon, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = \tilde{B}_i(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_0, \omega_k) \cdot (b_{11}^0, b_{21}^0)^T.$$

$$(31)$$

C. Розвинення за власними функціями.

Нехай $g(r)$ – кусково-неперервна функція, що має різні аналітичні вирази на проміжках $[\varepsilon, r_0)$ та $[r_{i-1}, r_i)$, тобто має вигляд

$$g(r) = \sum_{i=0}^n g_i \theta_i. \quad (32)$$

Розвинення функції $g(r)$ в ряд Фур'є за власними функціями $R_k(r, \omega_k)$ задачі (22), (23) має вигляд [9]

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot R_k(r, \omega_k), \quad (33)$$

де коефіцієнти Фур'є g_k у розвиненні (33) обчислюються за формулою

$$g_k = \frac{1}{\|R_k\|^2} \int_{\varepsilon}^{r_k} c \rho g(r) R_k(r, \omega_k) r^2 dr \quad (34)$$

Зауважимо, що $\|R_k\|^2$ – квадрат норми власних функцій $R_k(r, \omega_k)$

$$\|R_k\|^2 = \int_{\varepsilon}^{r_k} c \rho r^2 R_k^2(r, \omega_k) dr. \quad (35)$$

D. Побудова розв'язку мішаної задачі для функції $v(r, \tau)$.

Схема побудови розв'язку цієї задачі методом власних функцій детально описана в роботах [7], [8], [12]-[14]. Цей розв'язок зображується у наступному вигляді:

$$v(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_k(r, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(r, \tau) \cdot \theta_i, \quad (36)$$

$$v_i(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k), \quad (37)$$

де f_k та u_k коефіцієнти розвинення початкової умови та функції $\psi(\tau)$ відповідно в ряди Фур'є за системою власних функцій $R_k(r, \omega_k)$.

VI. ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ПРИ $\varepsilon \rightarrow 0$ ТА ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ (1)-(4)

На основі методу редукції розв'язок вихідної задачі зображується у вигляді

$$T(r, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u(r, \tau) + v(r, \tau)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\psi(\tau) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{ki} \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_{ki}(s) ds \right] R_{ki}(r, \omega_k) \right) \Theta_i \quad (38)$$

Зауваження! Характеристичне рівняння (29) задачі на власні значення (22), (23) після граничного переходу, очевидно, матиме вигляд

$$\begin{aligned} & (\alpha r_n^2 c_{11} + c_{21}) \cdot \frac{\sin(\beta_0(r_0))}{\beta_0 r_0} + \\ & (\alpha r_n^2 c_{12} + c_{22}) \cdot \frac{\beta_0 r_0 \cos(\beta_0 \cdot r_0) - \sin(\beta_0 r_0)}{\beta_0} \cdot \lambda_0 = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

а відповідні власні вектори (31) зобразяться так:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) &= \tilde{\mathbf{B}}_0(r, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T = \\ &= \left(\frac{\sin(\beta_0 r)}{\beta_0 r}, \frac{\beta_0 r \cos(\beta_0 \cdot r) - \sin(\beta_0 r)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T, \\ \mathbf{R}_{k0}(0, \omega_k) &= (1, 0)^T \\ \mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) &= \tilde{\mathbf{B}}_i(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(r_{i-1}, r_0, \omega_k) \cdot (b_{11}^0, b_{21}^0)^T = \\ &= \tilde{\mathbf{B}}_i(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(r_{i-1}, r_0, \omega_k) \times \\ &\times \left(\frac{\sin(\beta_0 r_0)}{\beta_0 r_0}, \frac{\beta_0 r_0 \cos(\beta_0 \cdot r_0) - \sin(\beta_0 r_0)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T. \end{aligned} \quad (40)$$

VII. МОДЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

У якості модельного числового прикладу розглянемо систему семишарових ізотропних сферичних куль, для яких необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля, якщо температура навколишнього середовища змінюється за законом $\psi(\tau) = 345 \lg\left(\frac{8\tau}{60} + 1\right) + 20$, коефіцієнт теплообміну між поверхнею та середовищем $\alpha = 25$. В початковий момент часу конструкція має температуру 20 °С. Теплотехнічні характеристики матеріалів, з яких виготовлені кулі, та вихідні дані для розрахунку, наведено у таблиці 1.

TABLE I. ТЕПЛОТЕХНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

№ шару	Параметр			
	Радіус, м	Коеф. теплопровідності	Питома теплоємність	Густина
1	0-0,05	0,93	837	2000
2	0,05-0,08	209	894	2680
3	0,08-0,15	64	389	8000
4	0,15-0,25	34,6	130	11400
5	0,25-0,33	2,93	921	2800
6	0,33-0,39	58	470	7800
7	0,39-0,43	1,55	770	2200

Використавши запропонований метод розрахунку розподілу нестационарного температурного поля у системі багатошарових сферичних куль та програмне забезпечення Maple 13 [14], отримуємо розв'язок поставленої задачі у вигляді таблиці 2. Слід зауважити, що для одержання

результату із заданою точністю при обчисленні було використано перших 50 коренів характеристичного рівняння.

TABLE II. РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ У СИСТЕМІ БАГАТОШАРОВОЇ СФЕРИЧНОЇ КОНСТРУКЦІЇ, °C

Час	Координати шару, м								
	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,43
0 хв.	20	20	20	20	20	20	20	20	20
1 хв.	20	20	20	20	20	20	20	20	52,6
3 хв.	20	20	20	20	20	20	20	20	102
10 хв.	20	20	20	20	20	20	20,3	24,1	210
20 хв.	20	20	20	20	20,1	20,2	25,5	41,2	299
30 хв.	20,0 6	20,5	20,5	20,7	21,1	21,7	36,6	64	353
45 хв.	21,2	24,0	24,2	24,8	26,2	27,8	59,7	100	409
1 год.	25,6	32,1	32,5 2	33,6	36,1	38,8	86,5	137	453
2 год.	85,3	103	104	106	112	117	201	272	582
3 год.	183	205	206	209	215	221	315	389	678

Слід зауважити що поставлена задача є модельною, метою якої є ілюстрація можливостей запропонованого методу.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Singh, Suneet, and Prashant K. Jain. "Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere." *Journal of Heat Transfer* 138.10 (2016): 101301. DOI: 10.1115/1.4033536.
- [2] De Monte, Filippo. "Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46.8 (2003): 1455-1469..
- [3] Lykov, A.V. (1967) *Teoriia teploprovodnosti*, Vysshiaia shkola, Moscow, USSR [in Russian].
- [4] Siegel R. "Transient thermal analysis of parallel translucent layers by using Green's functions" *J. Thermophys. Heat Transfer (AIAA)*. Vol. 13, Issue 1, pp. 10–17, 1999.
- [5] Özişik M. N., Orlande H. R. B., Colaço M. J., Cotta R. M. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, Second Edition. New York: CRC Press, 2017. 580 p.
- [6] Gosz M. R. *Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer*. - New York: CRC Press, 2017. - 400 p..
- [7] O. Y. Pazen and R. M. Tatsii. "Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder". *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 91, no. 6, pp. 1373-1384, November 2018. DOI 10.1007/s10891-018-1871-3.
- [8] R. M. Tatsii, M.F. Stasiuk and O. Y. Pazen. "Pryamoy metod rascheta temperatury polya v mnogosloynnoy poloy sfericheskoy konstruktsii" *Vestnik Kokshetauskogo tekhnicheskogo instituta*, no. 1(29), pp. 9-20, 2018. (In Russian).
- [9] O. Y. Pazen and R. M. Tatsii, "General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients", *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 89, no. 2, pp. 357-368, March 2016. DOI:https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8.
- [10] Arsenin, V.Ya. (1974) *Metody matematicheskoi fizyky*, Nauka, Moscow, USSR [in Russian].
- [11] Tihonov, A.N. and Samarskii, A.A. (1977) *Uravnenie matematicheskoi fizyky*, Nauka, Moscow, USSR [in Russian].

- [12] Tatsiy R. M., O. Yu. Pazen "Pryamyi metod rozrakhunku nestatsionarnoho temperaturnoho polya za umov pozhezhi", *Pozhezhna bezpeka : Zb. nauk. pr.* – Lviv : LDU BZHD, 2015. – № 26. – S. 135-141 [in Ukrainian].
- [13] Tatsiy R. M., Ushak T.I., O.Yu. "Pazen Zahalna tretya krajova zadacha dlya rivnyannya teploprovodnosti z kuskovo-stalymy koefitsiyentamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla", *Pozhezhna bezpeka: Zb. nauk. pr.* – Lviv : LDU BZHD, 2015. – № 27. – S. 120-126 [in Ukrainian].
- [14] O. Y. Pazen "Mathematical modelling and computer simulation of direct method for studying boundary value problem of thermal conductivity" *Problems of Infocommunications. Science and Technology*, pp. 73-76. 2017. DOI:10.1109/INFOCOMMST.2017.8246353.

ІЄРАРХІЧНА САМОПОДІБНА МОДЕЛЬ ПЕРЕРОЗПОДІЛУ ВЛАДИ У СУЧАСНОМУ СУСПІЛЬСТВІ	297
Микола МоргуН.....	297
БІОРТОГОНЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ.....	301
Ярослав П'янило, Валентина Собко	301
ВИБІР ТОЧОК СПОСТЕРЕЖЕННЯ В ЗАДАЧАХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДЕФЕКТІВ В ТОНКОСТІННІЙ СИСТЕМІ	305
Наталія Гук, Наталія Степанова	305
КОМБІНАТОРИКА ТА ЗАДАЧІ СЕМАНТИКИ	309
Тимофієва Н.К.	309
КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ КОНТРОЛЮ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ.....	313
Вадим Яковенко, Юлія Ульяновська	313
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ШАРУВАТИХ СТРУКТУРАХ З УРАХУВАННЯМ СТИБКІВ ФУНКЦІЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ НА ГРАНИЦЯХ КОНТАКТУ.....	317
Ольга Чернуха, Юрій Білуцзяк	317
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДОМІШКОВОЇ ДИФУЗІЇ У СИЛЬНО ПОРИСТОМУ ТІЛІ ЗА ВИПАДКОВОГО РОЗТАШУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ПОР.....	322
Ольга Чернуха, Анастасія Чучвара	322
PROBLEMS OF CALCULATIONS AND CREATION OF UNIVERSAL SYSTEM OF KNOWLEDGE.....	327
PETRO TROKHMICHUCK.....	327
<i>СЕКЦІЯ 8. ПРИКЛАДНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ... 331</i>	
<i>SECTION 8. APPLIED METHODS FOR CONTINUOUS AND DISCRETE MATHEMATICAL MODELS RESEARCH</i>	<i>331</i>
ЗСУВНЕ ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ЖОРСТКОГО ПРЯМОКУТНОГО ВКЛЮЧЕННЯ	332
Василь Кривень, Надія Крива, Андрій Бойко, Наталія Блащак.....	332
КІБЕР-ФІЗИЧНІ СИСТЕМИ: ДОСЯГНЕННЯ ТА ПРОБЛЕМИ	336
Володимир Г. Скобелєв, Володимир В. Скобелєв	336
ПРЯМИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛОБМІНУ У СИСТЕМІ – КУЛЯ ВСЕРЕДИНІ БАГАТОШАРОВОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ	340
Роман Тацій, Марта Стасюк, Олег Пазен.....	340
ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЗДОВЖНИХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ З ДВОХ КУСКІВ КУСКОВО-СТАЛОГО ПЕРЕРІЗУ	346
Р.М. Тацій, О.О. Карабин, О.Ю. Чмир.....	346
ШАБЛОН СТАТТІ МНПК ІТКМ ЗГІДНО ВИМОГ ІЕЕЕ ЗА 2018	352
Любомир Петришин, Артем Ізмайлов	352
З М І С Т.....	356
ДЛЯ НОТАТОК	363