

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
Представництво "Польська Академія Наук" в Києві
Вінницький національний технічний університет
Центр математичного моделювання ІПММ
ім. Я.С.Підстригача НАН України
AGH науково-технологічний університет
ім. Ст.Сташіца, Польща
Інститут кібернетики НАН України
Харківський національний університет радіоелектроніки
Національний авіаційний університет
Національний університет «Львівська політехніка»
Фінансово-економічний інститут Таджикистану
Економічна академія "Д.А.Ценов", Болгарія
Штутгартський університет, Німеччина
НДІ інтелектуальних комп'ютерних систем ТНЕУ та ІК НАН України
Інститут інженерів з електротехніки
та електроніки (IEEE), Українська секція
Громадська організація "Івано-Франківський ІТ кластер"

"ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ"

**матеріали
міжнародної науково-практичної конференції**

**5-10 липня 2021 року
Івано-Франківськ**

**"INFORMATION TECHNOLOGIES AND COMPUTER MODELLING"
proceedings
of the International Scientific Conference
2021, July, 5th to 10th
Ivano-Frankivsk**

Івано-Франківськ - 2021

УДК (004:004.2/004.9+007):33/37+51+621
ББК 22.17 32.81
I-74 Т

Науковий редактор: докт. техн. наук, проф. **Л.Б. Петришин** (ПНУ, АГН)

Матеріали статей опубліковані в авторській редакції

"Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання"; матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції, м. Івано-Франківськ, 5-10 липня 2021 року. – Івано-Франківськ: п. Голіней О.М., 2021. –с.

Збірка містить матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції з проблем інформаційних технологій в технічних системах, в соціумі, освіті, медицині, економіці та екології; теорії інформації, кодування та перетворення форми інформації; технологій цифрової обробки інформації; захисту інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах; математичного та імітаційного моделювання систем.

УДК (004:004.2/004.9+007):33/37+51+621
ББК 22.17 32.81
I-74 Т

ISBN

© ПНУ ім. В. Стефаніка та автори, 2021

Математичне Моделювання Теплообміну В Системі «Суцільний Циліндр В Багатошаровій Оболонці»

Роман Тацій

кафедра прикладної математики і механіки
Львівський державний університет безпеки
життєдіяльності
Львів, Україна
roman.tatsiy@gmail.com

Олег Пазен

кафедра наглядово-профілактичної діяльності та
пожежної автоматики
Львівський державний університет безпеки
життєдіяльності
Львів, Україна
opazen@gmail.com

Mathematical Modeling Of Heat Transfer In The System "Solid Cylinder In A Multilayer Shell"

Roman Tatsiy

dept. of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
roman.tatsiy@gmail.com

Oleg Pazen

dept. of Supervision-Preventive Activity and Fire
Automatics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
opazen@gmail.com

Анотація—Запропонована робота присвячена застосуванню прямого методу до дослідження процесів теплообміну в системі – «суцільний циліндр в багатошаровій оболонці» з урахуванням наявності внутрішніх джерел тепла та неідеального теплового контакту між окремими шарами. Для розв'язування такої задачі поставлено допоміжну задачу про визначення розподілу нестационарного температурного поля у багатошаровій порожнистій циліндричній конструкції з «вилученим» циліндром достатньо малого радіуса. Реалізація розв'язку допоміжної задачі проводиться шляхом застосування методу редукції із використанням концепції квазіпохідних. Надалі використовується схема Фур'є із застосуванням модифікованого методу власних функцій. Для знаходження розв'язку вихідної задачі використано ідею граничного переходу шляхом прямування радіуса вилученого циліндра до нуля. Встановлено, що при такому підході всі власні функції відповідної задачі на власні значення не мають особливостей в нулі, а це означає, що й розв'язки вихідної задачі є обмеженими у всій конструкції. Для ілюстрації запропонованого методу розв'язано модельний приклад про знаходження розподілу температурного поля у системі чотиришарових циліндричних конструкцій з різними теплофізичними характеристиками матеріалів.

Abstract—The proposed work is devoted to the application of a direct method to the study of heat transfer processes in the system - "solid cylinder in a multilayer shell" taking into account the presence of internal heat sources and imperfect thermal contact between the individual layers. To solve this problem, the auxiliary problem of determining the distribution of a nonstationary temperature field in a multilayer hollow cylindrical structure with a "removed" cylinder of sufficiently small radius is set. The solution of the auxiliary problem is realized by applying the method of reduction using the concept of quasi-derivatives. The Fourier scheme is then used using a modified method of eigenfunctions. To find the solution of the original problem, we used the idea of a boundary transition by directing the radius of the removed cylinder to zero. It is established that with this approach all eigenfunctions of the corresponding problem have no singularities at zero, which means that the solutions of the original problem are limited in the whole construction. To illustrate the proposed method, a model example of finding the temperature field distribution in a system of four-layer cylindrical structures with different thermophysical characteristics of materials is solved.

Ключові слова—компонент; багатошаровий суцільний циліндр, квазіпохідна, прямий метод, граничний перехід

Keywords—paper; component; multilayer solid cylinder, quasi derivative, direct method, marginal transition

I. ВСТУП

Розв'язуванню проблеми теплообміну в багатошарових конструкціях присвячено численний ряд робіт. Переважна більшість з них обмежується випадком ідеального теплового контакту між шарами та випадком відсутності внутрішніх джерел тепла. Проте недостатньо вивченими є задачі теплопровідності багатошарових конструкцій з урахуванням неідеального теплового контакту. Кількість таких досліджень є достатньо обмеженою. Так, наприклад, у роботі [1] розглянуто задачу про визначення температурного поля двошарової плоскої конструкції при неідеальному тепловому контакті між шарами та граничними умовами третього роду. В [2] проведено математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. У [3] розв'язано осесиметричну температурну задачу для системи двох контактуючих шарів з урахуванням неідеального теплового контакту. Однак в цитованих роботах автори обмежуються двома шарами. Це зумовлено тим фактором, що збільшення кількості шарів (з огляду на вибір методів практичної реалізації) призводить до певних обчислювальних труднощів. Тому проблема побудови ефективної аналітичної схеми дослідження процесів теплообміну в багатошарових конструкціях, зокрема циліндричних, при наявності неідеального теплового контакту між шарами та з урахуванням наявності внутрішніх джерел тепла залишається актуальною задачею.

II. ПОСТАНОВКА ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо суцільний необмежений циліндр радіусом $r = r_1$, який в подальшому називатимемо ядром, всередині багатошарової циліндричної оболонки радіусами $r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < r_n$. Між шарами існує неідеальний тепловий контакт, а у початковий момент часу $\tau = 0$, така циліндрична конструкція має однакову початкову температуру $T = T_0$, яка співпадає з температурою навколишнього середовища. На зовнішній поверхні конструкції відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого змінюється за деяким законом $\psi(\tau)$, тобто виконується крайова умова третього роду. Крім цього, у ядрі та шарах оболонки передбачено наявність джерела тепла інтенсивності q_v . Вважатимемо, що температура середовища $\psi(\tau)$ рівномірно розподілена по поверхні циліндричної оболонки так, що ізотерми всередині цієї конструкції являють собою коаксiальні поверхні, а це значить, що температура $T(r, \tau)$ залежить лише від радіуса r та часу τ і задача є симетричною. Необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля $T(r, \tau)$ такої конструкції у будь-який момент часу τ .

Така постановка задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності з умовами

спряження, крайовою умовою третього роду, умовою симетрії та початковою умовою відповідно [4]

$$c\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right) + q_v, \quad r \in (0, r_n), \quad \tau > 0, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r}(r_{i+1}, \tau) - \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r}(r_{i+1}, \tau) = 0, \\ T_{i+1}(r_{i+1}, \tau) - T_i(r_{i+1}, \tau) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r}(r_{i+1}, \tau), \end{cases} \quad (5)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha(T(r_n, \tau) - \psi(\tau)), \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, \tau) = 0, \quad (7)$$

$$T(r, 0) = T_0. \quad (8)$$

Тут позначено: c — питома масова теплоємність, Дж/(кг·°C); r — координата, м; T — температура, °C; α — коефіцієнт теплообміну, Вт/(м²·°C); λ — коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·°C); ρ — густина, кг/м³; q_v — інтенсивність внутрішнього джерела тепла, Вт/м³; τ — час, с; $\psi(\tau)$ — закон зміни температури навколишнього середовища, °C.

III. ПОСТАНОВКА ДОПОМІЖНОЇ ЗАДАЧІ

Для того, щоб розв'язати поставлену задачу (4)-(8) «вилучимо» з середини ядра циліндр радіусом $r = r_0$, причому $0 < r_0 < r_1$. Розглянемо тепер мішану задачу теплопровідності для багатошарової порожнистої циліндричної конструкції. Для того, щоб розрізнити функцію розподілу температурного поля $T(r, \tau)$ вихідної задачі від функції розподілу допоміжної задачі, позначатимемо останню через $t(r, \tau)$.

Для знаходження розподілу нестационарного температурного поля у багатошаровій порожнистій циліндричній конструкції необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності [6]

$$c(r)\rho(r) \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda(r) \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right) + q_v(r), \quad (9)$$

з умовами спряження [7]

$$\begin{cases} \lambda_{i+1} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial r}(r_{i+1}, \tau) - \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r}(r_{i+1}, \tau) = 0, \\ t_{i+1}(r_{i+1}, \tau) - t_i(r_{i+1}, \tau) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r}(r_{i+1}, \tau). \end{cases} \quad (10)$$

Умову симетрії (7) змінимо на нульову крайову умову другого роду, тоді одержимо крайові умови для рівняння (9) разом з початковою умовою

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial r}(r_0, \tau) = 0, \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha(t(r_n, \tau) - \psi(\tau)), \end{cases} \quad (11)$$

$$t(r, 0) = \varphi(r). \quad (12)$$

Зауважмо, що розв'язок вихідної задачі (4)-(8) буде отримано з розв'язку задачі (9)-(12) шляхом граничного переходу при $r_0 \rightarrow 0$.

Введемо позначення [6]: θ_i – характеристична функція напіввідкритого проміжку $[r_i, r_{i+1})$, тобто

$$\theta_i(r) = \begin{cases} 1, & r \in [r_i, r_{i+1}), \\ 0, & r \notin [r_i, r_{i+1}). \end{cases} \quad \text{Позначимо } t^{(1)}(r, \tau) \stackrel{df}{=} r\lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} -$$

$$\text{квазіпохідна, } \lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i, \quad c(r)\rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \theta_i,$$

$$q_v(r) = \sum_{i=0}^{n-1} q_{vi} \theta_i, \quad \varphi(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \theta_i, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i, \alpha_i > 0,$$

$$\forall i = 0, n-1.$$

Ввівши позначення квазіпохідної ($t^{(1)} \stackrel{df}{=} r\lambda t'_r$), та помноживши умови спряження (10) та крайові умови (11) на r , відповідно отримаємо еквівалентні до них умови

$$\begin{cases} t_{i+1}^{(1)}(r_{i+1}) - t_i^{(1)}(r_{i+1}) = 0, \\ t_{i+1}(r_{i+1}) - t_i(r_{i+1}) = \frac{1}{r_{i+1}\alpha_{i+1}} t_i^{(1)}(r_{i+1}). \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} t^{(1)}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n r_n t(r_n, \tau) + t^{(1)}(r_n, \tau) = \alpha_n r_n \psi_n(\tau), \end{cases} \quad (14)$$

IV. МЕТОД РЕДУКЦІЇ

Розв'язок задачі (9)-(12) шукатимемо (див. напр. [6], [7]) у вигляді суми двох невідомих, але взаємозв'язаних функцій

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau). \quad (15)$$

Одну з них можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

Визначимо, наприклад, функцію $u(r, \tau)$ як розв'язок крайової квазістаціонарної задачі:

$$(r\lambda u')' + q_v = 0 \quad (16)$$

$$\begin{cases} u_{i+1}^{(1)}(r_{i+1}) - u_i^{(1)}(r_{i+1}) = 0, \\ u_{i+1}(r_{i+1}) - u_i(r_{i+1}) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} u_i^{(1)}(r_{i+1}), \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} u^{(1)}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n r_n u(r_n, \tau) + u^{(1)}(r_n, \tau) = \alpha_n r_n \psi_n(\tau), \end{cases} \quad (18)$$

де $u^{(1)} \stackrel{df}{=} \lambda \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r}$ а також (у подальшому) $v^{(1)} \stackrel{df}{=} \lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r}$ – квазіпохідні.

Встановлено [4], [6], що на кожному з проміжків задача (16)-(18) має єдиний розв'язок та зображується у вигляді вектор-функції $\mathbf{u}_i(r)$, де першою координатою є шукана функція $u_i(r, \tau)$, а другою – її квазіпохідна

$$\mathbf{u}_i(r) = \mathbf{B}_i(r, r_i) \cdot \mathbf{B}_i(r_i, r_0) \cdot \mathbf{P}_0 - \mathbf{B}_i(r, r_i) \cdot \sum_{k=0}^i \mathbf{B}_i(r_i, r_k) \cdot \mathbf{Z}_k - \int_{r_i}^r \mathbf{B}_i(r, s) \cdot \mathbf{R}_i(s) ds \quad (19)$$

де \mathbf{P}_0 – початковий вектор, що обчислюється за формулою

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_0^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$p_0 = \psi(\tau) +$$

$$\left[\frac{q_{vi-1}}{\lambda_{i-1}} \left[\frac{1}{4} (r_i^2 - r_{i-1}^2) - \frac{r_{i-1}^2}{2} \ln \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \left[\frac{q_{vi-1}}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \sum_{k=i}^n \left(\frac{\ln \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)}{\lambda_k} + \frac{1}{r_k \alpha_k} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha r_n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{vi-1}}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \right) \right],$$

Аналогічно, як у роботі [6] на основі зображення (15) з формули (9) отримуємо:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial}{\partial \tau} (u+v) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial}{\partial r} (u+v) \right) q_v \Rightarrow \\ \Rightarrow c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) q_v. \end{aligned}$$

Оскільки в формулі (16) $\frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial u}{\partial r} \right) + q_v \equiv 0$, отримуємо неоднорідну мішану задачу для визначення функції $v(r, \tau)$:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (20)$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} v_{i+1}^{(1)}(r_{i+1}, \tau) - v_i^{(1)}(r_{i+1}, \tau) = 0, \\ v_{i+1}(r_{i+1}, \tau) - v_i(r_{i+1}, \tau) = \frac{I}{r_{i+1}\alpha_{i+1}} v_i^{(1)}(r_{i+1}, \tau), \end{cases} \quad (21)$$

нульовими крайовими умовами

$$\begin{cases} v^{(1)}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n r_n v(r_n, \tau) + v^{(1)}(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

та початковою умовою (одержаною з формули (12) на основі зображення (15))

$$v(r, 0) = \varphi(r) - u(r, 0) \equiv f(r, 0). \quad (23)$$

Встановлено, що розв'язок мішаної задачі (20)-(23) записуємо у вигляді ряду [6],[9]:

$$v(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_k(r, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(r, \tau) \cdot \theta_i,$$

де $v_i(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k)$, де f_k – коефіцієнти Фур'є розвинення початкової умови, u_k – коефіцієнти Фур'є розвинення функції $\frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau}$, ω_k – власні значення, $R_k(r, \omega_k)$ – власні функції.

V. ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ПРИ $r_0 \rightarrow 0$ ТА ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ

На основі методу редукції розв'язок вихідної задачі зображується у вигляді

$$T(r, \tau) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (u(r, \tau) + v(r, \tau)).$$

Перед реалізацією граничного переходу при $r_0 \rightarrow 0$ слід виокремити ті складові у відповідних сумах (рядах), де фігурує змінна r_0 .

Так, початковий вектор \mathbf{P}_0 запишемо у вигляді

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \Psi(\tau) + \frac{q_{v0}}{\lambda_0} \left[\frac{I}{4} (r_1^2 - r_0^2) - \frac{r_0^2}{2} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) \right] + \\ + \frac{q_{v0}}{2} (r_1^2 - r_0^2) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\ln \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)}{\lambda_k} + \frac{I}{r_k \alpha_k} \right) + \\ \left[\frac{q_{vi-1}}{\lambda_{i-1}} \left[\frac{I}{4} (r_i^2 - r_{i-1}^2) - \frac{r_{i-1}^2}{2} \ln \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^n \left[\frac{q_{vi-1}}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \sum_{k=i}^n \left(\frac{\ln \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)}{\lambda_k} + \frac{I}{r_k \alpha_k} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{I}{\alpha r_n} \left(\frac{q_{v0}}{2} (r_1^2 - r_0^2) + \sum_{i=2}^n \frac{q_{vi-1}}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \right) \right], \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \alpha r_n \frac{q_{v0}}{\lambda_0} \left[\frac{I}{4} r_1^2 \right] + \alpha r_n \frac{q_{v0}}{2} r_1^2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)}{\lambda_k} + \\ \left[\frac{q_{vi-1}}{\lambda_{i-1}} \left[\frac{I}{4} (r_i^2 - r_{i-1}^2) - \frac{r_{i-1}^2}{2} \ln \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \alpha r_n \sum_{i=2}^n \left[\frac{q_{vi-1}}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \sum_{k=i}^n \frac{\ln \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)}{\lambda_k} \right] - \right. \\ \left. - \alpha r_n \Psi(\tau) - \left(\frac{q_{v0}}{2} r_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{q_{vi-1}}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \right) \right], \\ 0 \end{pmatrix}$$

Зуваження! Оскільки (див напр.[10])

$$J_1(\beta_0 r_0) = \frac{\beta_0 r_0}{2} + \dots,$$

$$Y_l(\beta_0 r_0) = \frac{2}{\pi} J_l(\beta_0 r_0) \left(\ln \frac{\beta_0 r_0}{2} + const \right) - \frac{2}{\pi \beta_0 r_0} - \\ - \frac{I}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m \frac{\beta_0 r_0}{2}}{m!(m+1)!} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{I}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{I}{k} \right) \right],$$

то

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} (J_1(\beta_0, r_0) Y_0(\beta_0, r_1) - J_0(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0)) = \frac{2J_0(\beta_0, r_1)}{\pi\beta_0}, \quad (24)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} (J_1(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0) - J_1(\beta_0, r_0) Y_1(\beta_0, r_1)) = -\frac{2J_1(\beta_0, r_1)}{\pi\beta_0}.$$

Позначивши

$$B(r_n, r_l, \omega) = B_{n-1}(r_n, r_{n-1}, \omega) \cdot B_{n-2}(r_{n-1}, r_{n-2}, \omega) \cdot \dots \cdot B_1(r_2, r_1, \omega) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

відповідне характеристичне рівняння можна записати наступним чином [10]:

$$(\alpha_n c_{11} + c_{21}) \frac{\pi\beta_0 r_0 (J_1(\beta_0, r_0) Y_0(\beta_0, r_1) - J_0(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0))}{2} + (\alpha_n c_{12} + c_{22}) \frac{\pi\lambda_0 \beta_0^2 r_1 r_0 (J_1(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0) - J_1(\beta_0, r_0) Y_1(\beta_0, r_1))}{2} = 0,$$

а на основі (24) отримуємо характеристичне рівняння після граничного переходу:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \Delta(r_0) = (\alpha_n c_{11} + c_{21}) J_0(\beta_0, r_1) - (\alpha_n c_{12} + c_{22}) \lambda_0 \beta_0 r_1 J_1(\beta_0, r_1) = 0.$$

Відповідні власні вектори після граничного переходу зобразяться так:

$$\mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T = (J_0(\beta_0 \cdot r), -\lambda_0 \beta_0 r J_0(\beta_0 \cdot r))^T,$$

$$\mathbf{R}_{k0}(0, \omega_k) = (1, 0)^T.$$

$$\mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_i, \omega) \cdot (J_0(\beta_0 \cdot r_i), -\lambda_0 \beta_0 r_i J_0(\beta_0 \cdot r_i))^T.$$

На основі вище наведених формул можна зробити висновок, що функція $T(r, \tau)$ є обмеженою у всій конструкції та немає особливостей в точці $r = 0$.

VI. МОДЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

У якості модельного числового прикладу розглянемо систему чотиришарову суцільну циліндричну конструкцію, для якої необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля, якщо температура навколишнього середовища змінюється за законом

$$\psi(\tau) = 345 \lg\left(\frac{8\tau}{60} + 1\right) + 20 \text{ [11]}, \text{ коефіцієнт теплообміну}$$

між поверхнею та середовищем $\alpha = 25$. В початковий момент часу конструкція має температуру 20°C . Теплотехнічні характеристики матеріалів, з яких виготовлені кулі, та вихідні дані для розрахунку, наведено у таблиці 1.

TABLE II. ТЕПЛОТЕХНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

№ шару	Параметр					Коеф. теплооб.
	Радіус, м	Коеф. теплопров.	Питома теплосмість	Густина	Джерело тепла	
1	0-0,05	0,93	837	2000	25000	80
2	0,05-0,08	209	894	2680	0	
3	0,08-0,15	64	389	8000	0	130
4	0,15-0,25	34,6	130	11400	35000	

Використавши запропонований метод розрахунку розподілу нестационарного температурного поля у системі багат шарових сферичних куль та програмне забезпечення Maple 13, отримуємо розв'язок поставленої задачі у рис 1. Слід зауважити, що для одержання результату із заданою точністю при обчисленні було використано перших 50 коренів характеристичного рівняння.

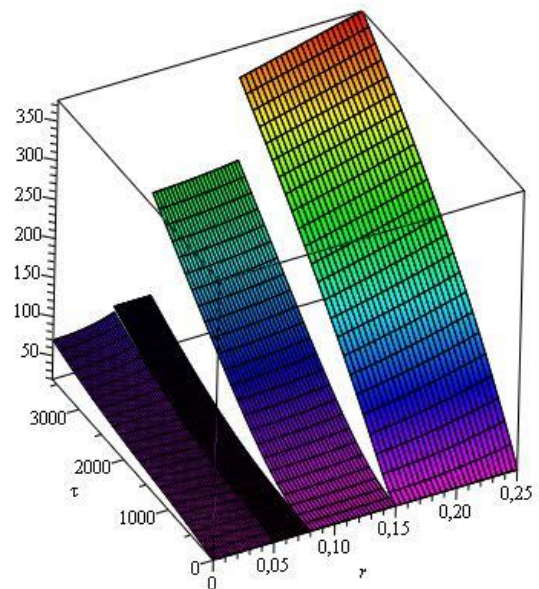


Рис 1. Розподіл нестационарного температурного поля у чотиришаровій циліндричній конструкції

Слід зауважити що поставлена задача є модельною, метою якої є ілюстрація можливостей запропонованого методу.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Кусковець С. Л., Половко А. П., Борис О. П., Величко Л. Д. Розподіл температурного поля в двохшаровій плоскій конструкції при умові неідеального теплового контакту міжшарами та наявності граничних умов третього типу. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. 2011. №54. С. 143-150.
- [2] Гера Б. В. Математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2013. №18. С. 61-72. <http://eadnurt.diit.edu.ua/jspui/handle/123456789/9361>.
- [3] Окрепкий Б. С., Неміш В. М. Осесиметрична температурна задача для системи двох контактуючих шарів з урахуванням неідеального теплового контакту. *Міжвузівський збірник Наукової нотатки*. 2014. №47. С. 131-136.

- [4] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю. Расчет нестационарного температурного поля в многослойной плите при условиях неидеального теплового контакта между слоями. *Вестник Кокшетауского технического института КТИКЧСМВД Республики Казахстан*. 2019. № 2(34). С.40-49.
- [5] Tatsiy R. M., Pazen O. Yu. Rasčet stacionarnogo temperaturnogo polâ v mnogoslujnoj plite s učetom vnutrennih istočnikov tepla pri usloviâh neideal'nogo teplovogo kontakta meždu sloâmi. *Bezpieczeństwo i Technika Pożarnicza. CNOBP-PIB, BiTR*. 2015. № 40. P. 51-59. DOI:[10.12845/bitp.40.4.2015.4](https://doi.org/10.12845/bitp.40.4.2015.4).
- [6] Pazen, O.Yu., & Tatsii, R.M. (2017). Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 91, 1373-1384. <https://doi.org/10.1007/s10891-018-1871-3>.
- [7] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю., Власій О. О. Застосування диференціальних рівнянь з імпульсною дією до розв'язування крайових задач теплопровідності. *Тези доповідей IV Всеукраїнської математичної конференції ім. Б.В. Василюшина «Нелінійні проблеми аналізу»*. Івано-Франківськ. 26-28 вересня 2018. С.58-60.
- [8] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К. : Вища школа, 1987. 288 с.
- [9] Pazen O. Yu., Tatsii R. M. General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2016. vol. 89, no. 2. pp. 357-368. DOI:<https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>.
- [10] Тацій Р.М. Пазен О.Ю., Шипот Л.С. Визначення нестационарного температурного поля в системі двох циліндричних тіл за умов пожежі. *Збірник наукових праць Пожежна безпека*. Львів. № 34. 2019. С. 84-90. DOI: [10.32447/20786662.34.2019.14](https://doi.org/10.32447/20786662.34.2019.14)
- [11] EN 1991-1-2 (2002) (English): Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-2: General actions – Actions on structures exposed to fire. DOI:<https://doi.org/10.1002/9783433601570.ch1>.

КЕРУВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИМ РЕЖИМОМ МАГІСТРАЛЬНОГО АМІАКОПРОВОДУ	152
Ярослав П'янило, Назар Притула, Мирослав Притула	
АНАЛІЗ РЕЖИМІВ РУХУ ГАЗУ В ТРУБОПРОВІДНИХ СИСТЕМАХ ЗА НАЯВНОСТІ ВИТОКІВ	156
Ярослав П'янило, Назар Притула, Мирослав Притула	
ВПЛИВ ПОВЕРХНІ КАТАЛІЗАТОРА НА ТОНКУ СТРУКТУРУ КОЛИВНОЇ РЕАКЦІЇ ОКИСНЕННЯ МОНООКСИДУ ВУГЛЕЦЮ	160
Петро Костробій, Ірина Рижа.....	
ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМИ АВТОМАТИЗОВАНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ ОЧИЩЕННЯ ВОДИ	164
Андрій Сафоник, Ігор Ільків	
СИМЕТРІЯ В КОМБІНАТОРИЦІ, КОМБІНАТОРНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ПРИРОДІ	166
Тимофієва Н.К.....	
ПРО ПОБУДОВУ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ОПЕРАТОРА ПАРАБОЛІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗА МІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ I І II РОДУ	166
Ольга Чернуха, Юрій Білушак, Анастасія Чучвара	
КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЇ ДОМІШКИ У СМУЗІ З ВИПАДКОВО РОЗТАШОВАНИМИ КУЛЬОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ДЕКІЛЬКОХ ХАРАКТЕРНИХ РАДІУСІВ.....	168
Анастасія Чучвара, Ольга Чернуха, Юрій Білушак	
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕПІДЕМІЧНОГО ПРОЦЕСУ COVID-19 В УКРАЇНІ.....	172
Сергій Яковлев, Павло Пирогов, Руслан Бородай, Сергій Кривцов	
APPLICATION OF MACHINE LEARNING METHODS IN CARBON FOOTPRINT OPTIMIZATION: CASE-STUDY	174
PIOTR MILCZARSKI, ZOFIA STAWSKA, ARTUR HŁOBAŹ, BARTOSZ ZIELIŃSKI, PIOTR KOSIŃSKI AND PAWEŁ MAŚLANKA	
СЕКЦІЯ 8. ПРИКЛАДНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ...	
SECTION 8. APPLIED METHODS OF STUDYING DISCRETE-CONTINUOUS MATHEMATICAL MODELS.....	
НОМОГЕНІЗАЦІЯ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ У ПОРОСИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ	180
Gennadiy Sandakov, Andrii Hulianytskyi	
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІНУ В СИСТЕМІ «СУЦІЛЬНИЙ ЦИЛІНДР В БАГАТОШАРОВІЙ ОБОЛОНЦІ» .	182
Роман Тацій, Олег Пазен	
ПРОСТОРОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ COVID-19 В УКРАЇНІ ТА ЄВРОПІ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОНЯТТЯ «ЦЕНТРУ ТЯЖІННЯ»	188
Олена Яворська, Ростислав Бунь	
ПІДХІД ДО ВИРІШЕННЯ ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКУ ТА ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ЗОН ЗАТОПЛЕННЯ ТЕРИТОРІЙ ЗАСОБАМИ ГІС	188
Світлана Кузниченко, Ірина Бучинська, Тетяна Терещенко	
З М І С Т	196