НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

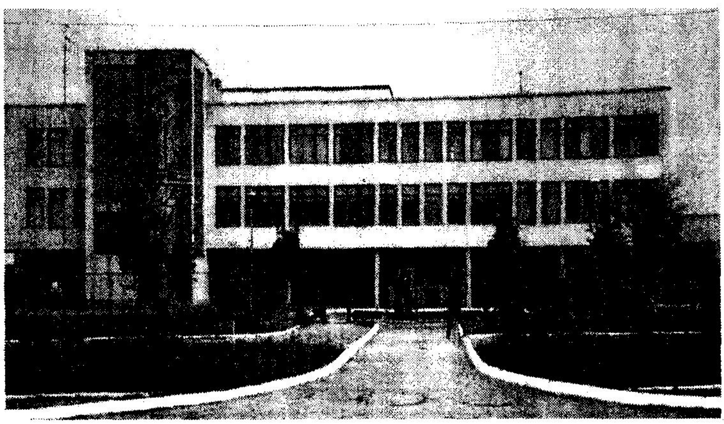
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВАНА ФРАНКА

ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МАТЕРІАЛИ

XIX міжвузівської науково-практичної конференції

"Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах"



ЛЬВІВ – 2015

Відповідальні за випуск:

к.ф.-м.н. Мохонько Валентина Дмитрівна (Технічний коледж НУ “Львівсь
політехніка”)
к.пед.н. Васіна Людмила Степанівна (Технічний коледж НУ “Львівсь
політехніка”)
Терехов Віктор Володимирович (Технічний коледж НУ “Львівська політехніка”)

**Матеріали XIX міжвузівської науково-практичної конференції “Методич
проблеми викладання математики у вищих навчальних закладах” / “Українсь**
технології”, Методичні проблеми.: – Львів, 2015. – 61 с.

ISBN 966-666-068-7

До збірника увійшли матеріали XIX міжвузівської науково-практичн
конференції “Методичні проблеми викладання математики у вищих навчальни
закладах”, яка проходила 25 лютого 2015 року у Технічному коледжі Національного
університету “Львівська політехніка”.

ISBN 966-666-068-7

ЗМІСТ

Зарічний М.М. доктор ф.-м.н., професор, декан механіко-математичного факультету Львівського національного університету ім. І.Франка
Теорія чисел і мотивації для вивчення математики 4

Притула Я.Г. к.ф.-м.н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка
Фрагменти з історії математики у Львівській Політехніці 5

Г.І .Чуйко к.ф.-м.н., Львівський національний університет імені Івана Франка
Теореми про нерухомі точки та їх застосування 7

Мохонько В.Д., к.ф.-м. н., Технічний коледж НУ "Львівська політехніка",
Мохонько А.З. доктор ф.-м. н., професор Національного університету "Львівська політехніка"
Доведення нерівностей методом математичної індукції 12

Черемних Є. В. доктор ф.-м. н., професор Національного університету "Львівська політехніка" Методика викладання вищої математики і уроки Сухомлинського 13

СтасюкМ.Ф., к.ф.-м.н., *Тацій Р.М.* доктор ф.-м. н., Львівський державний університет безпеки життєдіяльності МНС України
Деякі геометричні застосування теорії груп 16

Бохонова Т.Ю., ст. викл., *Гроза В.А.*, к.ф.-м.н., доцент, *Лещинський О.Л.*, к.ф.-м.н., доцент,*Тихонова В.В* , к.пед.н., доцент, *Томащук О.П.* ст. викл., Національний авіаційний університет, м. Київ
Система пропедевтичних вправ елементарної алгебри тригонометричних підстановок 19

Мохонько В.Д., к.ф.-м. н., *Васіна Л.С.* к.пед.н., Технічний коледж Національного університету "Львівська політехніка"
Про авторське бачення можливостей використання "Практикуму з математики" 22

О. О. Карабин, доцент, к.ф.-м.н., *О. Ю.Чмир* к.ф.-м.-н., Львівський державний університет безпеки життєдіяльності МНС України
Про диференціальні операції векторного поля, як необхідний інструмент в математичному моделюванні 23

В.І. Нестерук к.ф.-м.н., Медичний коледж Львівського національного медичного університету імені Данила Галицького
Роль схем, таблиць і малюнків при вивченні математики 28

Васильків І.М. к.ф-м.н., Львівська державна фінансова академія
Формування нової свідомості на заняттях з математики 29

Довгань Д.Ю. викладач-методист, голова Оргкомітету Всеукраїнської олімпіади з математики серед студентів ВНЗ 1-2 р.а., заст. директора Вінницького технічного коледжу, м.Вінниця
Організація, підготовка та проведення обласних конкурсів з фахової майстерності та олімпіад 30

$3f(-2)-2g(3)$; 2) Записати рівняння функції $y=\frac{k}{x}$, яка проходить через точку $A(0,5;-6)$; 3) Серед даних функцій знайти парну (непарну, загального вигляду); 4) Для функції $y=\frac{2x+1}{x-1}$ знайти множину значень. Розв'язання останньої задачі потребує вміння знайти обернену функцію і знання її властивостей.

Із завдань підвищеної складності звертаємо увагу на розв'язування рівнянь виду $f(x)=g(x)$, де $f(x)$ – зростаюча, а $g(x)$ – спадна функція. Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{1}{x^2}=\sqrt{x}$ (можна і так $\frac{1}{(x-3)^2}=\sqrt{x-3}$ ....). Такого типу завдання зустрічаються в завданнях ЗНО.

Розділ "Геометрія" крім класичних тем планіметрії – трикутники, чотирикутники, многокутники (правильні, опуклі), коло, круг та їх частини, включає тему "Вектори, дії з векторами", якому мало приділяється уваги в основній школі, хоча він є у програмі. Дії з векторами розглядаються у Практикумі як у геометричній, так і у алгебраїчній формі. Наприклад: 1) Знайти значення x при якому вектори $5x\vec{a}$ та $(10-x)\vec{a}$ спів напрямлені, протилежно напрямлені; 2) Нехай точка O є точкою перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Виразити вектор $\vec{OD}$ через вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AD}$; 3) Знайти $|\vec{p}|$, якщо $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\alpha=120^\circ$, де α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; 4) Знайти косинус кута між векторами $\vec{k}=\vec{a}+3\vec{b}$ та $\vec{m}=2\vec{a}-\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\alpha=60^\circ$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; 5) Завдання на умови колінеарності або перпендикулярності векторів тощо.

Практикум містить не тільки довідковий матеріал і взірці розв'язання типових прикладів, але й відповіді до всіх завдань 2-го та 3-го рівнів складності, що забезпечує самоконтроль при роботі з Практикумом.

Можна було б збільшити кількість прикладів з однотипними ідеями, але ми вважаємо, що в процесі роботи викладач або учень може самостійно скласти завдання, в основі яких лежать певні властивості навчального матеріалу. Бажано з боку викладача і запропонувати це учням. Така робота безумовно покращує засвоєння навчального матеріалу.

Вважаємо, робота з Практикумом буде ефективною, якщо довідковий матеріал учень перенесе в блокнот-довідник, а розібравши взірець розв'язання прикладу, закриє підручник і ще раз розв'яже даний приклад самостійно, а потім знайде подібний серед запропонованих і подолає його.

Даний Практикум допоможе учням повторити розділи математики за програмою основної школи і підготуватись до ЗНО по відповідних темах, ДПА та до вступних випробувань у коледжі та технікуми.

Література

1. Мохонько В.Д., Васіна Л.С. Практикум з математики. Частина 1. – Львів.: СПОЛОМ, 2015. –262с.

Про диференціальні операції векторного поля, як необхідний інструмент в математичному моделюванні

О. О. Карабин, О. Ю. Чмир

З метою удосконалення фізико - математичної підготовки майбутніх фахівців важливою є повноцінна реалізація міжпредметних зв'язків математики з фізикою та іншими науками. Вища математика, як навчальна дисципліна, виконує одну з головних функцій в процесі навчання, оскільки її поняття дозволяють чітко сформулювати закони і закономірності інших наук, а її методи дають можливість приймати обґрунтовані рішення [2].

Жодне наукове дослідження не є повноцінним без побудови відповідної математичної моделі. Тому велику увагу в процесі викладання вищої математики слід приділити вивченню понять і теорем математичного та векторного аналізу, які використовуються в математичному моделюванні.

Векторний аналіз з'явився в математичній науці завдяки У. Гамільтону, який в 1843 році розглянув поняття кватерніонів, а згодом, в 1853 р., в своїй монографії ввів поняття вектора та вектор-функції. В 1846 р. Гамільтон описав диференціальний оператор «набла», а також визначив скалярний та векторний добутки, як операції над нововведеними об'єктами. Векторна символіка своєю компактністю та інварінтністю зацікавила фізиків, що видно з робіт Максвелла, а сучасного вигляду векторному численню надав Хевісайд в 1903 році [1].

На вивчення понять векторного аналізу у вищій школі, нажаль, приділяється дуже мало часу, або їх вивчення виноситься на самостійне опрацювання. При цьому не акцентується увага на застосуванні цих понять в таких дисциплінах, як фізика, механіка, термодинаміка та теплопередача та ін., а тому студенти сприймають ці поняття, як формальність, не бачачи перспектив їх використання.

Складовими частинами диференціального рівняння є диференціальні операції. До них належать градієнт, дивергенція, ротор (вихор). Вивчення цих понять вимагає розуміння понять скалярного та векторного добутку з аналітичної геометрії.

Оскільки градієнтом поля $u(x; y; z)$ в точці M називають вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції в точці M, то в процесі викладання слід наголосити на тому, що саме в напрямку градієнта поле має найбільшу швидкість зміни, а в напрямку, перпендикулярному до градієнта швидкість зміни поля рівна 0, оскільки саме ця властивість має широке практичне застосування.

Тепер акцентуємо увагу на фізичному змісті градієнта, який випливає з самого означення. Вектор $grad\, u$ не залежить від вибору системи координат, а його модуль і напрям у кожній точці визначається самою функцією $u(M)$. Наприклад, якщо з'єднати точки тіла, що мають однакову температуру, то отримаємо так звану ізотермічну поверхню. Температура в тілі змінюється тільки в напрямках, що перетинають ізотермічні поверхні. При цьому найбільший перепад температури на одиницю довжини відбувається в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні і є не чим іншим, як градієнтом температури.

З поняттям градієнта тісно пов'язане поняття векторного поля. Якщо векторне поле співпадає в області G з полем градієнта деякого скалярного поля $u(M)$

$$\vec{a} = grad\, u, \qquad (1)$$

то таке векторне поле $\vec{a}(M)$ називається потенціальним в області G.

Функція $u(M)$ називається скалярним потенціалом векторного поля $\vec{a}(M)$. Якщо $\vec{a} = (P, Q, R)$, то із рівності (1) випливає, що

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\quad Q = \frac{\partial u}{\partial y},\quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Інколи потенціалом векторного поля $\vec{a}$ називають таку функцію u, що $\vec{a} = -grad\, u$.

Розглянемо приклади, які ілюструють взаємозв'язок понять векторного аналізу та можливості їх реалізації технічними засобами навчання, зокрема програмою Maple.

Поле тяжіння точкової маси m, розміщеної в початку координат описується вектор-функцією

$$\vec{F}(M) = -\gamma \frac{m}{r^3}\vec{r},$$

γ – гравітаційна стала, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. З такою силою діє це поле на одиничну масу, розміщену в точці $M(x, y, z)$. Поле тяжіння є потенціальним. Його можна подати у вигляді градієнта скалярної функції $u(M) = \frac{\gamma m}{r}$, яка називається ньютонівським потенціалом поля тяжіння точкової маси m. Дійсно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \gamma m\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\gamma m}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = -\gamma m \frac{x}{r^3}.$$

Аналогічно, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\gamma m \frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma m \frac{z}{r^3}$, звідси

$$grad\ u = -\frac{\gamma m}{r^3}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = -\gamma \frac{m}{r^3}\vec{r} = \vec{F}(M).$$

Тепер розглянемо, як можна здійснити подібні обчислення за допомогою програми Maple. Нехай дано функцію $u(M) = \frac{\gamma m}{r}$, де γ – гравітаційна стала, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Обчислимо її градієнт. Для цього потрібно підключити бібліотеку **linalg**, тобто введемо операцію

> restart: with(linalg):

у діалоговому вікні програми та натискаємо ↵. Далі вводимо функцію, градієнт якої шукаємо

> u:=gamma*m/sqrt(x^2+y^2+z^2);

та натискаємо ↵. Одержуємо

$$u := \frac{\gamma m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Знайдемо градієнт функції u. Для цього використаємо команду

> grad(u,[x,y,z]);

та натискаємо ↵. Таким чином одержуємо

$$\left[-\frac{\gamma m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{\gamma m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{\gamma m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right].$$

За допомогою програми Maple можна також побудувати зображення векторного поля, яке задає градієнт функції u. Для цього задамо параметри $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² та m = 1 кг.

Підключимо пакет, за допомогою якого можна побудувати зображення векторного поля. Для цього введемо команду в діалоговому вікні Maple

> restart: with(plots):

та натискаємо ↵. Вводимо функцію u

> u:= 6.672*10^(-11)*1/sqrt(x^2+y^2+z^2);

та натискаємо ↵. Одержуємо

$$u := \frac{.6672000000\,10^{-10}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Далі вводимо команду графічної побудови

> gradplot3d(u, x = -3..3, y = -4..4, z = -6..6, axesfont = [TIMES,ITALIC,10], color = black, labelfont = [TIMES,BOLD,14], labels = [x, y, z], thickness=2, scaling = CONSTRAINED ,style = patch, axes = frame);

та натискаємо ↵. Тоді одержуємо зображення векторного поля (Рис. 1.)

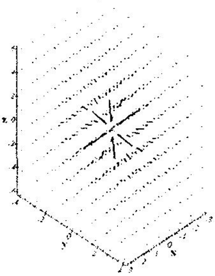


Рис. 1. Графічне зображення векторного поля

Дивергенцію можна розглядати як скалярний добуток вектора ∇ та векторного поля $\overline{U}(M)$. Слово дивергенція означає розбіжність. Дивергенція характеризує густину джерел даного векторного поля в розглянутій точці. Нехай двовимірним векторним полем є сукупність напрямків найшвидшого спуску на земній поверхні, то на місцезнаходження вершин та улоговин вкаже дивергенція, яка буде додатною у вершинах і від'ємною в улоговинах. Якщо $\overline{U} = \vec{v}$ є полем швидкостей під час протікання газу або потоку рідини, то $div\,\overline{U}$ дорівнює швидкості збільшення нескінченно малого об'єму. Якщо $\overline{U} = \overline{F}$ є силою, то $div\,\overline{U}$ є роботою (потужністю потоку).

Якщо розглянути векторний добуток символічного вектора ∇ і вектора $\overline{U}$:

$$\nabla \times \overline{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix},$$

то отримаємо вектор, який називають ротором векторного поля $\overline{U}$ і позначають $rot\,\overline{U}$. З механічної точки зору векторний добуток – це момент вектора. Під дією цього моменту векторне поле може обертатись. При цьому $rot\,\overline{U}$ є вектором подвоєної кутової швидкості обертання поля.

Команда **curl (*u*, [*x*, *y*, *z*])** у програмі Maple визначає ротор тривимірного вектора $\vec{u}$. Знайдемо ротор вектора $\vec{v} = (-\omega y, \omega x, 0)$. Підключимо бібліотеку **linalg**, ввівши операцію

> restart: with(linalg):

та натиснувши ↵. Далі вводимо вектор $\vec{v}$, ротор якого шукаємо

> v:=vector([-omega*y, omega*x, 0]);

та натискаємо ↵. Одержуємо вектор *v*, а саме $v := [-\omega y, \omega x, 0]$. Знаходимо ротор вектора $\vec{v}$ за допомогою операції

> curl(*v*,[*x*, *y*, *z*]);

Отримуємо координати вектора $[0,0,2\omega]$.

Описані диференціальні операції векторного поля фігурують в математичних моделях фізичних процесів. Так, в основній гіпотезі математичної теорії теплопровідності, величина теплового потоку через будь-яку ізотермічну поверхню дорівнює $-K\dfrac{\partial v}{\partial n}$, де K – коефіцієнт теплопровідності речовини, а $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ – похідна від швидкості вздовж зовнішньої нормалі до поверхні, а це не що інше, як $grad\,v$. Операція дивергенції виникає в диференціальному рівнянні теплопровідності $\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = a\,div(grad\,t) + f(x,y,z,\tau)$, де t – шукана функція температури, τ – час, a – коефіцієнт, який характеризує середовище, $f(x,y,z,\tau)$ – функція, що описує внутрішні джерела тепла.

Як бачимо, диференціальні операції векторного поля несуть в собі глибокий фізичний зміст і поряд з тим мають символічний математичний характер. В процесі викладання вищої математики студентам та курсантам технічних вузів слід особливо акцентувати увагу на цх поняттях, показувати на прикладах, де саме ці поняття виникають у фізиці та техніці, звертати увагу на символічний характер цих понять, а також поряд з традиційними методами викладання використовувати сучасні інформаційні засоби, що дозволить активізувати навчальний процес, покращити його якість, сприятиме глибшому засвоєнню матеріалу.

Література

1. Александрова Н. В. Формирование основных понятий векторного исчисления / Н. В. Александрова // Историко-математические исследования – М.: Наука, 1982. – № 26. – С. 205-234.

2. Деркач М.И. Проблема совершенствования преподавания математики/ М.И. Деркач, Ю. Е. Обжерин, А.Ф. Хрусталёв. – Севастополь: СевНТУ, 2010. – Вып. 105. – С. 27-34.
3. Скатецкий В.Г. Математическое моделирование физико-химических процессов/ В.Г. Скатецкий. – Минск: Высшая школа, 1981. – 141 с.
4. Крилова Т.В. Проблеми навчання математики в технічному вузі/ Т.В. Крилова. – К.: Вища школа, 1998. – 438 с.
5. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел/ Г. Карслоу, Д. Егер. – Москва: Наука, 1964. – 464 с.
6. Исаченко В.П. Теплопередача/ В.П. Исаченко. – Москва: Энергия, 1975. – 488 с.
7. Овчинников П.Ф. Вища математика, ч. 1./ П.Ф. Овчинников. – Київ: Техніка, 2000. – 552 с.

Роль схем, таблиць і малюнків при вивченні математики

В.І. Нестерук

Математика є важливою основою при вивченні різних дисциплін, зокрема і медичних. Від того як подається матеріал залежить майбутній рівень знань студентів, їхня зацікавленість при вивченні даної дисципліни. Традиційно таблиці та малюнки використовували у навчальному процесі. Однак при сучасному вивченні математики доцільно поєднувати таблиці та малюнки, пов'язуючи їх зв'язками. Це спрощує процес сприйняття та розуміння матеріалу, підвищує рівень знань студентів. Саме цим обґрунтовується актуальність теми дослідження.

Мета дослідження полягає у визначенні впливу схем, таблиць та малюнків (СТМ) на виникнення у студентів логічного мислення, формування правильності встановлення зв'язків, вміння співставляти вивчені факти і закономірності між об'єктами [1].

Дослідження показало, що поєднання СТМ при вивченні математики сприяє швидкому, ефективному вивченні матеріалу, швидкому поновленню вивчених тем при підготовці до самостійних, контрольних робіт та екзаменів. Особливо це важливо врахувати, коли розглядаються складні теми. Розглянемо переваги використання СТМ. Схеми дозволяють:

- логічно встановлювати зв'язки між об'єктами, темами;
- прослідковувати закономірності між темами;
- встановлювати існуючі та нові залежності.

Таблиці, малюнки дають можливість:

- логічно та раціонально класифікувати об'єкти;
- покращити візуальне сприйняття нових фактів матеріалу;
- за короткі проміжки часу вивчити, закріпити та повторити матеріал;
- сконструювати власні, подібні таблиці та малюнки.

Потрібно залучати студентів до створення СТМ на початку та в кінці теми, оскільки при створенні СТМ студенти ефективніше засвоюють новий матеріал. При проведенні занять доцільно задавати студентам створювати СТМ до проведених занять у позааудиторний час, а вже на наступному занятті важливо їх обговорювати та корегувати, що сприятиме ефективнішому вивченні тем, які виносяться на самостійну роботу.

Висновки. Результати досліджень показали, що СТМ відіграють важливу роль у процесі навчання математики та підвищують результативність студентів в середньому на 25% і сам процес вивчення математики викликає у студентів зацікавленість.

Література

1. Нестерук В.І. Короткий математичний атлас в схемах, таблицях, рисунках [Ілюстрації]: навч. посібн. – Львів: СПОЛОМ, 2013. – 60 с.: іл.