Міністерство надзвичайних ситуацій України

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

А.Д. Кузик
О.В. Меньшикова
О.Ю. Чмир

Серія
"Математична статистика"

Теорія ймовірностей та математична статистика

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Львів-2011

УДК 519.22(075.8)
ББК 22.172.073
К 89

Кузик, Андрій Данилович.
Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст] : [навчальний посібник] / Кузик А.Д., Меньшикова О.В., Чмир О.Ю. – Львів : ЛДУ БЖД, 2011. – 188 с.

Рецензенти: ***М.М. Притула*** – доктор фізико-математичних наук, професор, Львівський національний університет ім. І.Франка;

В.М. Комяк – доктор технічних наук, професор, Національний університет цивільного захисту України;

М.М. Семерак – доктор технічних наук, професор, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності.

У навчальний посібник увійшли основні теоретичні відомості теорії ймовірностей та математичної статистики. Теоретичний матеріал ілюструється прикладами, запропоновано задачі для самостійного розв'язування.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних загладів, які навчаються за напрямом підготовки «Транспортні технології» (Лист №1/11-1661 від 01. 03. 2011.)

Зміст

Перелік умовних позначень 6
РОЗДІЛ І. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ 8
Вступ 8
1. Основні поняття теорії ймовірностей 10
1.1. Випадкова подія. Простір подій 10
1.2. Алгебра випадкових подій 13
1.3. Означення та властивості ймовірності 16
Контрольні запитання 19
2. Основні теореми теорії ймовірностей 20
2.1. Ймовірність суми подій 20
2.2. Умовна ймовірність 22
2.3. Ймовірність добутку довільних подій 23
2.4. Незалежні події 23
2.5. Ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій 25
2.6. Формула повної ймовірності 27
2.7. Формула Байєса 28
Контрольні запитання 31
3. Повторні незалежні випробування 32
3.1. Послідовність незалежних випробувань. Формула Бернуллі 32
3.2. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа 35
Контрольні запитання 38
4. Випадкові величини та їх числові характеристики 39
4.1. Дискретні випадкові величини та функція розподілу 39
4.2. Неперервні випадкові величини 42
4.3. Числові характеристики випадкових величини 45
Контрольні запитання 47
5. Основні закони розподілу випадкових величин та їх числові характеристики 48
5.1. Біноміальний закон розподілу 48
5.2. Закон розподілу Пуассона 48
5.3. Геометричний закон розподілу 49
5.4. Рівномірний закон розподілу 49
5.5. Показниковий закон розподілу 50
5.6. Нормальний закон розподілу 51
5.7. Закон розподілу Вейбулла 54
Контрольні запитання 55
6. Закони розподілу та числові характеристики двовимірних випадкових величин 56

6.1. Закон та функція розподілу ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини 56
6.2. Диференціальна функція розподілу двовимірної випадкової величини 59
6.3. Залежні та незалежні випадкові величини 60
6.4. Числові характеристики двовимірної випадкової величини 60
6.5. Умовні закони розподілу двовимірної випадкової величини та їх числові характеристики 64
Контрольні запитання 69
7. Коваріація і коефіцієнт кореляції 70
7.1. Лінійна кореляція 70
7.2. Коваріаційна матриця 75
Контрольні запитання 75
8. Закон великих чисел 76
8.1. Нерівність Чебишова 76
8.2. Теорема Чебишова 77
8.3. Теорема Бернуллі 77
Контрольні запитання 78
Задачі до розділу І 79
РОЗДІЛ ІІ. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА 88
Вступ 88
1.Основні поняття математичної статистики 90
1.1. Джерела даних у статистиці 90
1.2. Генеральна та вибіркова сукупності 91
1.3. Способи відбору 92
1.4. Організація даних: статистичний розподіл вибірки 93
1.5. Емпірична функція розподілу 99
Контрольні запитання 103
2. Числові характеристики варіаційних рядів 104
2.1. Числові характеристики дискретного статистичного розподілу 104
2.2. Числові характеристики інтервального статистичного розподілу 106
Контрольні запитання 109
3. Інтервальні та точкові статистичні оцінки для параметрів генеральної сукупності 110
3.1. Визначення точкових та інтервальних статистичних оцінок 110
3.2. Точність та надійність точкових оцінок 111
3.3. Поняття про похибки вибірки 112

3.4. Довірчі інтервали 113
Контрольні запитання 115
4. Статистична перевірка гіпотез 116
4.1. Статистичні гіпотези та їх різновиди 116
4.2. Помилки перевірки гіпотез 117
4.3. Статистичний критерій перевірки основної гіпотези 118
4.4. Критична область 118
4.5. Порядок дій при перевірці статистичних гіпотез 120
Контрольні запитання 121
5. Параметричні статистичні гіпотези 122
5.1. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність генерального середнього гіпотетичному значенню 122
5.2. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність генеральних середніх 126
5.3. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність генеральних дисперсій 133
5.4. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність невідомої генеральної дисперсії гіпотетичному значенню 136
Контрольні запитання 138
6. Перевірка правильності непараметричних статистичних гіпотез 139
6.1. Емпіричні та теоретичні частоти 139
6.2. Критерій Пірсона 141
Контрольні запитання 145
7. Елементи кореляційного та регресійного аналізу 146
7.1. Основні поняття 146
7.2. Вибірковий коефіцієнт кореляції 147
7.3. Рівняння лінійної регресії 149
Контрольні запитання 153
8. Елементи дисперсійного аналізу 154
8.1. Поняття про дисперсійний аналіз 154
8.2. Однофакторний дисперсійний аналіз при однаковій кількості випробувань на всіх рівнях 155
8.3. Однофакторний дисперсійний аналіз при різній кількості випробувань на різних рівнях 159
Контрольні запитання 159
Задачі до розділу II 160
Додаток 1. Елементи комбінаторики 170
Додаток 2. Таблиці 173
Література 188

Перелік умовних позначень

A, B, …	– випадкові події.
$\overline{A}$	– протилежна до A подія.
$P(A)$	– ймовірність події A.
$P(A \mid B)$	– умовна ймовірність (ймовірність події A за умови, що B відбулася).
U	– вірогідна подія; простір елементарних подій.
V, $\varnothing$	– неможлива подія.
$+$, $\bigcup$	– сума (об'єднання) подій.
$\cdot$, $\bigcap$	– добуток (перетин) подій.
$\setminus$	– різниця подій.
$\sum\limits_{i=1}^{n}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}$	– сума (об'єднання) n подій.
$\prod\limits_{i=1}^{n}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n}$	– добуток (перетин) n подій.
$\supset$, $\subset$	– сприяння подій.
$F(x)$	– функція розподілу випадкової величини X.
$f(x)$	– диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини або щільність розподілу.
$M(X)$	– математичне сподівання випадкової величини X.
$D(X)$	– дисперсія випадкової величини X.
$\sigma(X)$	– середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.
$COV\,(X, Y)$	– коваріація двовимірної випадкової величини (X, Y).
$\rho(X, Y)$	– коефіцієнт кореляції двовимірної випадкової величини (X, Y).
$M(Y \mid X = x_i)$	– умовне математичне сподівання (математичне сподівання випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$).
$D(Y \mid X = x_i)$	– умовна дисперсія (дисперсія випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$).

$\sigma(Y \mid X = x_i)$	– умовне середнє квадратичне відхилення (середнє квадратичне відхилення випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$).
$\bar{x}_{\text{В}}$	– вибіркове середнє.
$D_{\text{В}}$	– вибіркова дисперсія.
$\sigma_{\text{В}}$	– вибіркове середнє квадратичне відхилення.
Mo^*	– мода статистичного розподілу.
Me^*	– медіана статистичного розподілу.
R	– розмах.
V	– коефіцієнт варіації.
S^2	– виправлена дисперсія.
S	– виправлене середнє квадратичне відхилення.

РОЗДІЛ І. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Вступ

Теорія ймовірностей, як і багато інших розділів математики, розвинулася з потреб практики. В абстрактній формі вона відображає закономірності, властиві випадковим подіям масового характеру. Ці закономірності відіграють винятково важливу роль у фізиці та інших галузях природознавства, різноманітних технічних дисциплінах, економіці, військовій справі і т.д. У другій половині XX століття у зв'язку із широким розвитком підприємств, що виробляють масову продукцію, результати теорії ймовірностей використовуються й для організації процесу виробництва (статистичний контроль у виробництві). Велике значення в цьому колі ідей має розробка статистичних методів керування якістю продукції у процесі виробництва. Для всієї інженерної справи важливу роль відіграє теорія надійності, яка широко використовує методи теорії ймовірностей. Тут доречно зауважити, що у свою чергу теорія надійності висунула перед теорією ймовірностей низку нових теоретичних питань. Зв'язок теорії ймовірностей із практичними потребами, як уже було відзначено, був основною причиною бурхливого розвитку її в останні десятиліття.

Я. Бернуллі

А.М. Колмогоров

Не залишається осторонь вивчення та застосування ймовірнісних і статистичних методів і служба цивільного захисту. Сьогодні статистичні дослідження використовують при аналізі пожеж, надзвичайних ситуацій та діяльності підрозділів МНС. Актуальними є також наукові дослідження надійності та довговічності машин, пристроїв та механізмів, моделювання діяльності підрозділів служби цивільного захисту та багато інших, які проводяться із застосуванням методів теорії ймовірностей та математичної статистики.

Перші роботи з теорії ймовірностей, в основному як аналіз азартних ігор, з'явилися вже у XVI-XVII ст. (Д. Кардано, Х. Гюйгенс, Б. Паскаль, П. Ферма та ін.) Подальші успіхи в теорії ймовірностей пов'язані з іменами Я. Бернуллі, К. Гаусса, А. Кетля, К. Пірсона, С. Пуассона та ін. Ґрунтовні дослідження належать вченим П.Л. Чебишову, О.М. Ляпунову, А.А. Маркову, А.М. Колмогорову, завдяки працям яких теорія ймовірностей стала точною математичною наукою.

Цей навчальний посібник містить основний теоретичний матеріал з теорії ймовірностей та математичної статистики, а також таблиці математичної статистики (див. додаток 2). При вивченні кожної з тем необхідно звертати увагу на нові терміни (виділені жирним шрифтом), означення та формулювання теорем (виділені курсивом). Приклади, які наведені практично в кожній темі, ілюструють кожне з нових понять чи тверджень. Рекомендована література містить додаткову інформацію з теорії ймовірностей та математичної статистики, яка не увійшла до навчального посібника.

Для самоперевірки рекомендуємо дати відповідь на запитання, наведені після кожної з тем та розв'язати задачі, наведені в кінці кожного розділу.

Бажаємо всім успіхів у вивченні теорії ймовірностей та математичної статистики.

1. Основні поняття теорії ймовірностей

1.1. Випадкова подія. Простір подій

Дамо визначення теорії ймовірностей та деяких основних понять, якими вона оперує.

Теорія ймовірностей *– наука, що вивчає закономірності масових випадкових подій.*

Під ***подією*** *розуміють будь-яке явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається за певних умов.*

Наприклад, при підкиданні монети може випасти або герб, або число, при пострілі в ціль може бути промах або попадання.

Випробування *– це досліди, які можна реалізувати за певних умов скільки завгодно разів та в результаті яких відбувається подія.*

В процесі випробування маємо справу з випадковими факторами, які ведуть до неоднозначності результату випробувань. Результатом випробування є подія. Подія буває ***вірогідна*** (обов'язково відбудеться в результаті випробування), ***неможлива*** (яка не відбувається в результаті випробування) та ***випадкова*** (може відбутися або не відбутися під час здійснення даного випробування).

Наприклад, при киданні монети неможливою подією є падіння на ребро, вірогідною – поява герба або числа. При киданні однієї гральної кістки вірогідна подія – випадання однієї з граней, неможлива – випадіння десяти очок.

Однорідні *події – це такі події, які відбуваються за однакових умов.*

Масовими *називаються однорідні події, які спостерігаються за певних умов і можуть бути відтворені необмежену кількість разів.*

<u>Приклад.</u> Проводиться стрільба по цілі. Влучення у ціль – масова випадкова подія.

Події позначатимемо великими латинськими літерами. Наприклад, A – подія.

Найбільше нас можуть цікавити випадкові події, на вивченні яких зупинимося детальніше.

Дві події називаються ***несумісними*** (*для деякого випробування*), *якщо поява однієї з них виключає появу іншої. Інакше, події називаються* ***сумісними***.

Приклад. У коробці маємо стандартні та нестандартні деталі. Навмання беремо одну деталь. Події A_1 – “вибрана стандартна деталь” та A_2 – “вибрана нестандартна деталь” є несумісними.

Приклад. Кинуто гральну кістку. Події A_1 – “випало число два” і A_2 – “випало парне число” – сумісні, оскільки поява однієї з них не виключає появи іншої.

*Події A_1, A_2, ..., A_n – називаються **попарно несумісними** у даному випробуванні, якщо будь-які дві з них несумісні.*

Приклад. Проводиться стрільба по мішені. Події A_1 – “два влучення”, A_2 – “одне влучення” і A_3 – “жодного влучення” – попарно несумісні.

Приклад. При киданні монети один раз A_1 – “поява герба”, A_2 – “поява числа” – попарно несумісні події.

*Події A_1, A_2, ..., A_n утворюють **повну систему подій**, якщо в результаті випробування настане хоча б одна з цих подій.*

Приклад. Учень на іспиті отримав білет з двома запитаннями. Подія A_1 – “учень знає обидва запитання”, A_2 – “учень знає перше запитання, але не знає другого”, A_3 – “учень знає друге запитання, але не знає першого”, A_4 – “учень знає лише одне запитання”, A_5 – “учень не знає жодного запитання” утворюють повну систему подій, серед яких є як несумісні (A_1 і A_2, A_1 і A_5) так і сумісні (A_2 і A_4, A_3 і A_4).

Проте найбільшої уваги заслуговує повна система попарно несумісних подій.

*Події A_1, A_2, ..., A_n утворюють **повну систему попарно несумісних подій**, якщо внаслідок випробування обов’язково відбудеться якась подія з цієї системи, причому тільки одна.*

Приклад. З коробки, в якій є стандартні і нестандартні деталі навмання беруть три деталі. Події A_1 – “всі три деталі стандартні”, A_2 – “дві деталі стандартні, а одна – нестандартна”, A_3 – “одна деталь стандартна і дві нестандартні”, A_4 – “всі три деталі нестандартні” утворюють повну систему попарно несумісних подій.

При вивченні випадкових подій будемо розрізняти також події ***елементарні*** та ***складені***.

Елементарна подія *– це результат будь-якого випробування.*

Наприклад, при підкиданні гральної кістки елементарною подією є випадання грані з числом “1”. Сукупність усіх елементарних подій, які можуть виникнути під час випробування (простір елементарних подій) – це випадання усіх можливих варіантів граней: “1”, “2”,..., “6”.

Складеною подією *називається підмножина простору елементарних подій.*

Приклад. При киданні гральної кістки елементарними є події $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$, $A_6 = \{6\}$ – відповідно до числа, яке випало. Події $B_1 = \{1, 3, 5\}$ – “поява непарного числа” $B_2 = \{3, 6\}$ – “поява числа, кратного 3”, $B_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ – “поява числа, меншого за 5” є складеними, оскільки їх можна розкласти відповідно на три, дві та чотири елементарні події.

Зауважимо, що події A_1, ..., A_6 утворюють повну систему попарно несумісних подій, а події B_1, B_2 і B_3 утворюють повну систему, проте попарно сумісні.

Події A_1, A_2, ..., A_n називаються ***рівноможливими****, якщо кожна з них не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.*

Приклад. Поява того чи іншого числа при киданні гральної кістки – події рівноможливі, оскільки гральна кістка виготовлена з однорідного матеріалу і має симетричну форму.

Приклад. При киданні однорідної монети поява числа та поява герба – рівноможливі події.

Приклад. В скриньці 1 біла і 1 чорна кульки. Вибір білої чи чорної кульки – рівноможливі події.

Множина всіх елементарних подій, які пов’язані з деяким випробуванням, називається ***простором елементарних подій***.

Позначимо простір елементарних подій через *U*.

Ті елементарні події з U, при яких настає подія A, називаються ***сприятливими*** *для події A.*

Неможливу подію позначимо через V. Очевидно, що їй не сприяє жодна з елементарних подій, тобто $V = \varnothing$. Вірогідній події сприяють всі події простору U, тому цю подію також позначимо через U.

1.2. Алгебра випадкових подій

Розглянемо події при киданні гральної кістки: $A = \{3\}$ – "поява числа 3", $B = \{1, 3, 5\}$ – "поява непарного числа".

Зрозуміло, що з настанням події A неодмінно настає і B, тобто B є наслідком A, або A сприяє B. Записується це у вигляді $A \subset B$.

Якщо подія A відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія B (*задовольняються умови* $A \subset B$ *і* $B \subset A$)*, то вони називаються* ***рівносильними*** *і записуються* $A = B$.

<u>Приклад.</u> Кинуто монету. Події A – "поява герба" і B – "непоява числа" – рівносильні.

Сумою *або* ***об'єднанням*** *двох подій A і B називається подія C, яка настає при появі хоча б однієї з подій A чи B.* Її можна записати у вигляді $C = A + B$ або $C = A \cup B$. Сума подій розглядається як об'єднання множин (рис. 1).

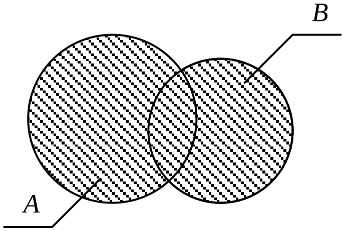


Рис. 1. Сума подій A та B

Сумою декількох подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *називається подія, яка настає з настанням хоча б однієї з подій* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Позначають суму подій

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i \text{ або } C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

Приклад. Знайти суму подій A – "поява одиниці" та B – "поява двійки" при киданні гральної кістки. Сумою $A+B$ буде подія – "випаде одиниця або двійка".

Приклад. Проводиться стрільба по цілі двома пострілами. Нехай подія A –"влучення в ціль з першого пострілу", подія B – "влучення в ціль з другого пострілу", тоді подія $C = A+B$ – "враження цілі".

Добутком *або* ***перетином*** *двох подій A і B називається подія C, яка настає при одночасному настанні подій A і B, тобто $C = AB$, або $C = A \cap B$.*

Добуток розглядатимемо як перетин множин (рис. 2).

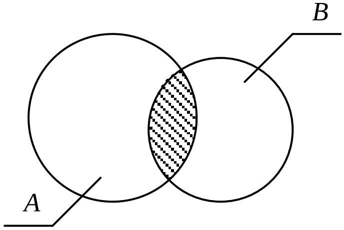


Рис. 2. Добуток подій A та B

Якщо A і B – несумісні, тоді $A \cap B = V = \varnothing$, тобто перетином є неможлива подія.

Добутком *або* ***перетином декількох подій*** A_1, A_2, ..., A_n *називається подія C, яка настає одночасно з настанням всіх подій A_1, A_2, ..., A_n.*

$$C = \prod_{i=1}^{n} A_i \text{ або } C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

Приклад. Знайти добуток подій A – "студент вибрав білет з парним номером" і B – "студент вибрав білет з номером, кратним 5". Добутком AB буде подія – "студент вибрав білет з номером, кратним 10".

Приклад. Два учасники змагань стріляють у ціль. Нехай подія A полягає у тому, що перший учасник змагань влучив у ціль, подія B – другий учасник змагань влучив у ціль. Тоді подія $C = AB$ означає, що в ціль влучили обидва учасники змагань.

Різницею подій *A та B називається подія C = A\B, яка настає разом з настанням події A і при цьому не настає подія B* (*рис. 3*).

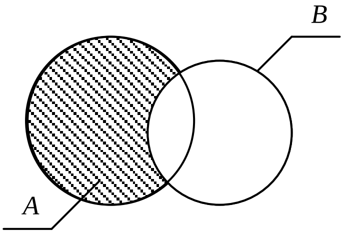


Рис. 3. Різниця подій A та B

Приклад. Кидають гральну кістку. Подія *A* – "випало парне число", подія *B* – "випало число більше за 3". Тоді *A\B* = "випало число 2", *B\A* = "випало число 5".

*Дві випадкові події називаються **протилежними**, якщо одна з них відбувається в тому випадку, коли інша не відбувається.* Подія, протилежна до *A*, позначається $\overline{A}$.

Приклад. При стрільбі по мішені влучення і промах – протилежні події. Якщо *A* – влучення, тоді $\overline{A}$ – промах.

Приклад. При підкиданні монети випадання герба і числа – протилежні події. Якщо *A* – випадання герба, тоді $\overline{A}$ – випадання числа.

Приклад. Кидаємо гральну кістку. Подія *A* – випало парне число, тоді $\overline{A}$ – випало непарне число.

Оскільки при випробуванні обов'язково настане одна з протилежних подій, то протилежні події утворюють повну систему попарно несумісних подій, тобто

$$A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = V = \varnothing .$$

Зрозуміло також, що протилежною до протилежної події буде початкова подія, тобто $\overline{\overline{A}} = A$.

1.3. Означення та властивості ймовірності

1.3.1.Статистичне визначення ймовірності

Нехай *A* – випадкова подія, пов'язана з деяким випробуванням. Повторимо випробування n разів при тих самих умовах і нехай при цьому подія *A* відбулася m разів ($m \le n$).

Відношення $\frac{m}{n}$ *кількості випробувань* m, *у яких подія A відбулася, до загальної кількості випробувань n називається* ***відносною частотою*** *або* ***частотою*** *події A.*

Виявляється, що при багаторазовому повторенні випробування частота набирає значень, близьких до певного сталого числа. Наприклад, при киданні гральної кістки частота появи кожного з чисел від 1 до 6 наближається до $\frac{1}{6}$.

Неодноразово проводилися досліди кидання монети і коли кількість кидань була достатньо великою, частота появи герба мало відрізнялася від $\frac{1}{2}$.

Аналогічна картина спостерігається і при народженні дітей. Частота народження хлопчиків наближається до числа 0,517.

З наведеного можна зробити висновок, що якщо дослід повторюється в однакових умовах достатньо велику кількість разів, тоді частота деякої події *A* стає стійкою, тобто $\frac{m}{n} \to p$ при $n \to \infty$.

Стала p, *до якої прямує частота події A при достатньо великій кількості повторень випробувань, називається* ***статистичною ймовірністю*** *події A і позначається* $p = P(A)$.

На практиці часто за числове значення ймовірності події *A* можна наближено взяти частоту цієї події, обчислену при достатньо великій кількості випробувань. Математичним обґрунтуванням близькості частоти $\frac{m}{n}$ і ймовірності p події *A* є теорема Бернуллі, яку ми розглянемо далі.

1.3.2. Класичне визначення ймовірності

Класичне **визначення ймовірності базується на понятті рівноможливих елементарних подій.**

Розглянемо простір елементарних подій $U = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, де A_1, A_2, ..., A_n – елементарні попарно несумісні та рівноможливі події. Нехай деякій події A сприяють m з n елементарних подій простору U.

Ймовірністю $P(A)$ ***події*** *A називається відношення кількості m елементарних подій, які сприяють появі події A до загальної кількості n рівноможливих подій:*

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

З означення ймовірності випливають такі ***властивості*:**

1. $0 \le P(A) \le 1$, оскільки $0 \le m \le n$.
2. $P(U) = 1$, оскільки $P(U) = \frac{n}{n} = 1$.
3. $P(V) = 0$, оскільки $P(V) = \frac{0}{n} = 0$.

<u>Приклад.</u> В скриньці 3 білі та 9 чорних кульок. Навмання виймають одну кульку. Яка ймовірність того, що вийнята кулька виявиться чорною?

Загальна кількість кульок у скриньці $n = 12$. Оскільки чорних кульок $m = 9$, тоді за означенням ймовірності

$$P(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

<u>Приклад.</u> Підкидають два кубики. Знайти ймовірність того, що в сумі випаде 6 очок (подія A).

При підкиданні кубиків загальна кількість рівноможливих елементарних подій дорівнює числу пар (x, y), де x та y набирають значення 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто $n = 36$. Події A сприяють 5 пар (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), тобто $m = 5$.

Ймовірність події A тоді буде

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

1.3.3. Геометричне визначення ймовірності

Класичне визначення ймовірності дійсне лише тоді, коли числа m та n скінченні. Природним узагальненням та розширенням безпосереднього обчислення ймовірностей у класичній схемі є "геометричний" підхід для означення ймовірностей подій. Його застосовують тоді, коли простір елементарних подій U є незліченною множиною рівноможливих елементарних подій.

Нехай простір елементарних подій U – відрізок числової прямої або область на площині чи у просторі, а події A сприяє лише частина $u \subset U$ цієї області. Припустимо, що U має скінченну міру $m(U)$ (на прямій – довжину, на площині – площу, у просторі – об'єм), а частина u – скінченну міру $m(u)$.

Геометричною ймовірністю $P(A)$ *події* A *називається відношення міри* $m(u)$ *до міри* $m(U)$*, тобто*

$$P(A) = \frac{m(u)}{m(U)}.$$

Зауваження. За класичним означенням ймовірності, $P(A) = 0$ лише для $A = \varnothing$. За геометричним означенням це не так. Справді, нехай U – плоска фігура, область u сприятливих подій для події A – точка або лінія, яка розміщена в U. Тоді $m(u) = 0$, а отже $P(A) = 0$, хоча подія A є можливою, оскільки $u \neq \varnothing$.

Приклад. Двоє студентів A та B домовилися зустрітися в інтервалі часу між 9^{00} і 9^{30}. Той, хто прийде на зустріч першим, чекає іншого 15 хвилин, після чого йде. Яка ймовірність того, що вони зустрінуться?

Нехай x – час приходу студента A (в годинах після 9^{00}), а y – час приходу студента B. Тоді простором елементарних подій експерименту є незліченна множина

$$U = \{(x, y);\ 0 \le x \le 0{,}5,\ 0 \le y \le 0{,}5\}.$$

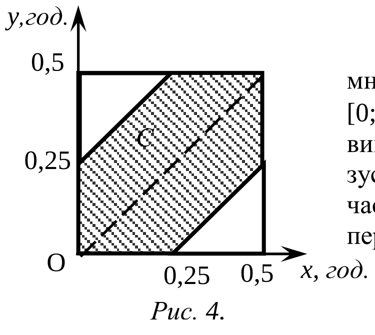


Рис. 4.

Простір U можна розглядати як множину точок (x, y) квадрата $[0; 0{,}5]\times[0; 0{,}5]$ (рис. 4). Розглянемо випадкову подію C, яка полягає в тому, що зустріч відбудеться, тобто різниця між часом приходу студентів не буде перевищувати чверті години. Тоді

$C = \{(x, y)\colon |x - y| \le 0{,}25,\ 0 \le x \le 0{,}5,\ 0 \le y \le 0{,}5\}$ є підмножина множини U. Побудуємо цю область (заштрихована фігура на рис. 4). Відношення площі заштрихованої фігури до площі квадрата дорівнює шуканій ймовірності

$$P(C)=\frac{\left(0,25-2\cdot\frac{0,25\cdot 0,25}{2}\right)}{0,25}=0,75.$$

Контрольні запитання

1. Що таке випадкова подія?
2. Які події називають сумісними, які несумісними?
3. Як додати дві події? кілька подій?
4. Як перемножити кілька подій?
5. Що таке повна система подій?
6. Які існують підходи для визначення поняття ймовірності?
7. Яке класичне визначення ймовірності?
8. Що таке геометрична ймовірність?
9. Які властивості має ймовірність?

2. Основні теореми теорії ймовірностей

2.1. Ймовірність суми подій

Теорема. *Ймовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

► Нехай n – кількість рівноможливих попарно несумісних елементарних подій випробування, в результаті якого може відбутися одна з подій A чи B, m_A – кількість елементарних подій, які сприяють появі події A, m_B – кількість елементарних подій, які сприяють появі події B. Оскільки події A та B несумісні, то події $A + B$ сприяють m_A+m_B елементарних подій з усієї кількості n. Тому

$$P(A+B)=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=P(A)+P(B)\ . \blacksquare$$

Наслідок. *Ймовірність суми скінченної кількості попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Доведення наслідку здійснюється за математичною індукцією.

Теорема. *Ймовірність суми сумісних подій A та B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності добутку цих подій*:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB).$$

► Нехай m_A – кількість рівноможливих елементарних подій, які сприяють події A, m_B – кількість рівноможливих елементарних подій, які сприяють події B. Оскільки події A та B – сумісні, то серед $m_A + m_B$ елементарних подій, які сприяють появі кожної з цих подій існує m_{AB} елементарних подій, які сприяють як події A, так і B. Якщо n – загальна кількість елементарних подій, тоді

$$P(A)=\frac{m_A}{n},\quad P(B)=\frac{m_B}{n},\quad P(AB)=\frac{m_{AB}}{n}\ .$$

Оскільки подія $A+B$ відбувається у тому випадку, коли відбудеться або подія A, або подія B, то її появі сприяють $m_A+m_B-m_{AB}$ елементарних подій. Тоді

$$P(A+B)=\frac{m_A+m_B-m_{AB}}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}-\frac{m_{AB}}{n}=$$

$$= P(A) + P(B) – P(AB). \blacksquare$$

Приклад. У скриньці 50 кульок: 10 червоних, 5 синіх, 15 білих і 20 зелених. Знайти ймовірність того, що навмання витягнута зі скриньки кулька виявиться кольоровою (не білою).

Поява кольорової кульки означає появу або червоної кульки (подія A), або синьої (подія B), або зеленої (подія C).

Ймовірності цих подій

$$P(A) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}; \; P(B) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}; \; P(C) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

Оскільки події A, B та C – попарно несумісні, тоді ймовірність суми цих подій обчислюється як сума ймовірностей:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}.$$

Приклад. Яка ймовірність того, що при киданні двох гральних кісток випаде хоча б раз 6 очок?

Позначимо через A – "випадання 6 очок на першій гральній кістці", B – "випадання 6 очок на другій гральній кістці". Оскільки ці події сумісні, тоді, враховуючи, що

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(AB) = \frac{1}{36},$$

з формули суми сумісних подій одержимо

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Наслідок. *Якщо події A_1, A_2,..., A_n – утворюють повну систему попарно несумісних подій, тоді*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

► Дійсно, оскільки сума попарно несумісних подій, які утворюють повну систему, є вірогідною подією, тоді

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(U) = 1. \blacksquare$$

Наслідок. *Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці*:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

► Протилежні події утворюють повну систему попарно несумісних подій, тому цей наслідок є частковим випадком попереднього. ■

Приклад. Ймовірність влучення в ціль стрільцем дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що стрілець не влучить у ціль.

Події A – "стрілець влучив у ціль" та $\overline{A}$ – "стрілець в ціль не влучив" – протилежні. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1. Тоді

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Приклад. У коробці 30 кульок: 15 чорних, 10 білих та 5 червоних. Знайти ймовірність того, що навмання витягнута кулька не буде червоною.

Позначимо події: A – "витягнута кулька не червона", B – "витягнута кулька чорна", C – "витягнута кулька біла". Подія A наступить тоді і тільки тоді, коли наступлять події B або C. Тоді, оскільки події B та C – несумісні, то за теоремою про ймовірність суми несумісних подій маємо:

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Зауважимо, що задачу можна вирішити й іншим способом. Якщо подія A – "витягнута кулька не червона", то протилежна до неї подія $\overline{A}$ – "витягнута кулька червона". За наслідком про суму ймовірностей протилежних подій маємо

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{30} = \frac{5}{6}.$$

2.2. Умовна ймовірність

Інколи при випробуванні ймовірність деякої події B залежить від настання події A, яка теж зв'язана з цим випробуванням. Тоді наявна ***умовна ймовірність події B за умови A***. Будемо вважати, що умовною ймовірністю події B за умови A буде ймовірність події B, обчислена з розрахунку, що подія A настала. Позначається умовна ймовірність $P(B \mid A)$, або $P_A(B)$.

Приклад. З кошика, у якому міститься 4 білі та 5 чорних куль, послідовно виймають дві кулі. Яка ймовірність того, що друга куля чорна, за умови, що першою була вийнята теж чорна куля.

Позначимо події A – "перша куля чорна", B – "друга куля чорна". Якщо відбулася подія A, тоді в кошику залишилося 8 куль, причому 4 з них чорні. Тому умовна ймовірність

$$P(B\mid A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Можна також дати таке означення умовної ймовірності.

Умовною ймовірністю події *B* ***при умові*** *A називається відношення ймовірності добутку подій A та B до ймовірності події A, якщо* $P(A)\neq 0$.

Таким чином, за означенням

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Аналогічно можна записати умовну ймовірність події A за умови B:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ якщо } P(B)\neq 0.$$

2.3. Ймовірність добутку довільних подій

З формул умовної ймовірності можна записати, що

$$P(AB) = P(A)P(B\mid A) = P(B)P(A\mid B).$$

Таким чином, правильна така

Теорема. *Ймовірність добутку двох довільних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них та умовної ймовірності другої події за умови першої*

$$P(AB) = P(A)P(B\mid A) = P(B)P(A\mid B).$$

Приклад. У майстерні виготовляються деталі на двох верстатах. Ймовірність того, що деталь виготовлена на першому верстаті дорівнює 0,6, ймовірність того, що на першому верстаті виготовлена якісна деталь – 0,8. Знайти ймовірність того, що вибрана якісна деталь виготовлена на першому верстаті.

Позначимо A – "деталь виготовлена на першому верстаті", B – "деталь якісна". Маємо $P(A) = 0{,}6$; $P(B\mid A) = 0{,}8$. Тоді

$$P(AB) = P(A)P(B\mid A) = 0{,}6\cdot 0{,}8 = 0{,}48.$$

2.4. Незалежні події

Нехай події A та B такі, що ймовірність настання події B не залежить від події A. Тоді кажуть, що подія B є незалежною від події A.

Подія B називається ***незалежною від події*** *A, якщо умовна ймовірність події B за умови A дорівнює ймовірності події B, тобто, якщо $P(B \mid A) = P(B)$ ($P(A) \neq 0$).* Якщо рівність не виконується, тоді подія B є залежною від події A.

Теорема. *Якщо подія B не залежить від події A, тоді подія A не залежить від події B, якщо $P(B) \neq 0$.*

► За теоремою про ймовірність добутку подій маємо

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A).$$

Але $P(B \mid A) = P(B)$. Тоді $P(AB) = P(A)P(B)$.

З іншого боку,

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B).$$

З останніх рівностей, прирівнявши праві частини, одержуємо:

$$P(A)P(B) = P(B)P(A \mid B),$$

а тому

$$P(A) = P(A \mid B). \blacksquare$$

Отже, незалежність подій є властивістю взаємною.

Наступна теорема є наслідком наведених міркувань.

Теорема. *Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:*

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Приклад. Ймовірність влучення в ціль при стрільбі з першої гармати дорівнює $P(A) = 0{,}8$, з другої – $P(B) = 0{,}7$. Знайти ймовірність враження цілі при стрільбі з двох гармат.

Влучення в ціль кожною з гармат – події незалежні. Тоді

$$P(AB) = P(A)\,P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

Оскільки події A та B – сумісні (стрільба відбувається одночасно), тоді ймовірність враження цілі

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

Події A_1, A_2, ..., A_n – ***взаємно незалежні****, якщо незалежні будь-які дві з них.*

Події A_1, A_2, ..., A_n – ***незалежні в сукупності****, якщо кожна з цих подій і подія, що дорівнює добутку будь-якої кількості інших – незалежні.*

Для незалежних в сукупності подій A_1, A_2, ..., A_n виконується рівність

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Зауваження. З взаємної незалежності не випливає незалежність в сукупності. Це видно з такого прикладу.

Приклад. У кошику 4 кулі: червона, жовта, зелена і одна куля, що має всі ці три кольори. Дослідити на незалежність події:

A – "витягнута куля має червоний колір",

B – "витягнута куля має зелений колір",

C – "витягнута куля має жовтий колір".

Оскільки всього чотири випадки, а кожній з подій сприяють два, тоді

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Події AB – "витягнута куля має червоний та зелений колір" сприяє лише тільки один випадок, бо лише одна куля має всі три кольори. Тому

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B),$$

тобто події A і B – незалежні. Аналогічно можна довести незалежність й інших подій (A та C, B та C). Тому події A, B та C – взаємно незалежні. Але $P(ABC) = \frac{1}{4}$, а $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$, тому $P(ABC) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$, тобто події A, B, C не є незалежними в сукупності.

2.5. Ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій

Якщо потрібно визначити ймовірність здійснення принаймні однієї з декількох незалежних подій, тоді застосовують таку теорему:

Теорема. *Якщо події A_1, A_2, ..., A_n – незалежні в сукупності, тоді ймовірність здійснення принаймні однієї з них може бути виражена через ймовірність цих подій за формулою*

$$P(A) = 1 - (1 - P(A_1))\,(1 - P(A_2)) \ldots (1 - P(A_n)).$$

► Нехай подія A – "відбувається принаймні одна з подій A_1, A_2, ..., A_n". Тоді за означенням суми подій

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Розглянемо подію $\overline{A}$, протилежну до події A. Вона здійснюється лише тоді, коли не відбувається жодна з подій A_1, A_2, ..., A_n. Тоді можна записати, що

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n .$$

Оскільки події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$ – взаємно незалежні, тоді за теоремою множення незалежних подій

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n) .$$

Враховуючи, що сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1, маємо

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n) =$$

$$= 1 - (1 - P(A_1))\cdot(1 - P(A_2))\cdot \ldots \cdot(1 - P(A_n)). \ \blacksquare$$

Наслідок. *Якщо* $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$, *тоді*

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$$

Приклад. Виріб складається з трьох деталей. Він вважається якісним, якщо жодна з деталей не має відхилень від норми. Ймовірність відхилення від норми першої деталі становить 0,1, другої – 0,05, третьої – 0,08. Знайти ймовірність того, що виріб бракований.

Виріб буде бракованим, коли відбудеться подія A – “принаймні одна деталь бракована”. Позначимо події: A_1 – “перша деталь бракована”, A_2 – “друга деталь бракована”, A_3 – “третя деталь бракована”. Тоді за теоремою про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій

$$P(A) = 1 - (1 - P(A_1))\cdot(1 - P(A_2))\cdot(1 - P(A_3)) =$$

$$= 1 - (1 - 0{,}1)\cdot(1 - 0{,}05)\cdot(1 - 0{,}08) = 0{,}2134.$$

Приклад. Ймовірність влучення в ціль стрільцем дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що при 5 пострілах стрілець принаймні один раз влучить в ціль?

Оскільки кожен постріл – подія незалежна та однаково ймовірна, то використаємо наслідок, за яким

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$$

Маємо $n = 5$, $p = 0{,}9$. Тоді

$$P(A) = 1 - (1 - 0{,}9)^5 = 1 - 0{,}1^5 = 0{,}99999.$$

Приклад. В електричну ланку включені послідовно три елементи, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови першого, другого і третього елементів відповідно дорівнює $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}15$; $p_3 = 0{,}2$. Знайти ймовірність того, що струму в ланці не буде.

Оскільки елементи включені послідовно, то струму в ланці не буде (подія A), якщо не працюватиме хоча б один з елементів. Шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = 1 - (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,15) \cdot (1 - 0,2) = 0,388.$$

2.6. Формула повної ймовірності

<u>**Теорема.**</u> *Нехай подія A може відбутися тільки одночасно з кожною з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну систему попарно несумісних подій. Тоді ймовірність події A обчислюється за* ***формулою повної ймовірності***:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n).$$

► Дійсно, подія A може відбутися одночасно з кожною з подій H_1, $H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну систему, тоді

$$A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n.$$

Якщо події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – попарно несумісні, тоді попарно несумісними будуть і події $A \cdot H_1, A \cdot H_2, ..., A \cdot H_n$. Тому

$$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \ldots + P(A \cdot H_n).$$

Використавши до кожного з доданків правило ймовірностей добутку подій

$$P(A \cdot H_i) = P(H_i) \cdot P(A \mid H_i),\ i = \overline{1, n}\ ,$$

одержуємо формулу повної ймовірності. ■

<u>Приклад.</u> На заводі три бригади виготовляють, відповідно, 25%, 35% і 40% деталей. Брак у роботі цих бригад становить, відповідно, 15%, 12% і 6%. Знайти ймовірність того, що вибрана навмання деталь є бракованою.

Позначимо події:

A – "вибрана деталь бракована",

H_1 – "деталь виготовлена першою бригадою",

H_2 – "деталь виготовлена другою бригадою",

H_3 – "деталь виготовлена третьою бригадою".

Події H_1, H_2 і H_3 утворюють повну систему попарно несумісних подій. Ймовірності цих подій

$$P(H_1) = 0,25, \quad P(H_2) = 0,35, \quad P(H_3) = 0,4.$$

За умови виконання подій H_1, H_2 і H_3, умовні ймовірності події A становлять, відповідно

$$P(A \mid H_1) = 0{,}15, \quad P(A \mid H_2) = 0{,}12, \quad P(A \mid H_3) = 0{,}06.$$

За формулою повної ймовірності одержуємо

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) =$$

$$= 0{,}25 \cdot 0{,}15 + 0{,}35 \cdot 0{,}12 + 0{,}4 \cdot 0{,}06 = 0{,}1035.$$

Приклад. У скриньку, що містить дві кульки, опущено білу кульку, після чого з неї навмання вийнято одну кульку. Знайти ймовірність того, що витягнута кулька виявиться білою, якщо рівноможливі будь-які припущення відносно початкового вмісту скриньки.

Нехай подія A – "витягнута кулька біла". Відносно початкового вмісту скриньки є можливі такі випадки H_1 – "у скриньці нема білих кульок", H_2 – "у скриньці є одна біла кулька" та H_3 – "у скриньці дві білі кульки". Ці події утворюють повну систему попарно несумісних подій і є рівноможливими. Тому

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_2) = \frac{1}{3}.$$

Враховуючи випадки початкового вмісту скриньки, знаходимо умовні ймовірності настання події A:

$$P(A \mid H_1) = \frac{1}{3}, \quad P(A \mid H_2) = \frac{2}{3}, \quad P(A \mid H_3) = \frac{3}{3} = 1.$$

Тоді за формулою повної ймовірності маємо

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

2.7. Формула Байєса

З формулою повної ймовірності пов'язана ***формула Байєса***

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n)}.$$

► Доведення формули Байєса можна здійснити з формули ймовірностей добутку довільних подій

$$P(A \cdot H_i) = P(A) \cdot P(H_i \mid A) = P(H_i) \cdot P(A \mid H_i),\ i = \overline{1,n}.$$

Тоді

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

Підставивши у знаменник ймовірність події A, обчислену за формулою повної ймовірності, одержуємо формулу Байєса. ■

Формула Байєса дає можливість переоцінити ймовірності гіпотез, прийняті до випробування за результатами того, що вже відбулося.

Приклад. 60% всіх електроламп, що є в магазині, виготовлені на одному заводі, а 40% – на іншому. Продукція першого заводу містить 85%, а другого – 95% стандартних електроламп. Куплена електролампа виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена: а) першим заводом; б) другим заводом.

Нехай подія A – "куплена електролампа стандартна".

Відносно події A виконуються такі несумісні події, які утворюють повну систему подій: H_1 – "лампа виготовлена на першому заводі", H_2 – "лампа виготовлена на другому заводі". Ймовірності цих подій

$$P(H_1) = 0{,}6, \quad P(H_2) = 0{,}4,$$

Умовні ймовірності події A становлять, відповідно

$$P(A \mid H_1) = 0{,}85, \quad P(A \mid H_2) = 0{,}95.$$

Для застосування формули Байєса знайдемо ймовірність події A за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}85 + 0{,}4 \cdot 0{,}95 = 0{,}89.$$

Тоді за формулою Байєса ймовірність того, що куплена стандартна лампа виготовлена

а) першим заводом – обчислюється

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(A \mid H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}85}{0{,}89} \approx 0{,}57,$$

б) другим заводом – становить

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(A \mid H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}95}{0{,}89} \approx 0{,}43.$$

Приклад. У трьох однакових кошиках є, відповідно, 15 білих куль, 10 білих і 5 чорних; 15 чорних куль. З вибраного навмання кошика витягнули білу кулю. Яка ймовірність того, що кулю витягнули з першого кошика.

Позначимо події:

A – "витягнуто білу кулю",

H_1 – "вибрано перший кошик",

H_2 – "вибрано другий кошик",

H_3 – "вибрано третій кошик".

Оскільки події H_1, H_2, H_3 рівноможливі, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Умовні ймовірності становлять, відповідно,

$$P(A \mid H_1) = \frac{15}{15} = 1, \quad P(A \mid H_2) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad P(A \mid H_3) = \frac{0}{15} = 0.$$

Ймовірність того, що біла куля витягнута з першого кошика, за формулою Байєса становить

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Приклад. Кількість вантажних машин, що проїжджають по шосе, на якому стоїть АЗС, відноситься до кількості легкових автомобілів як 3:2. Ймовірність того, що буде заправлятися вантажівка, дорівнює 0,1; для легкового автомобіля ця ймовірність дорівнює 0,2. На АЗС заправилась машина. Знайти ймовірність того, що ця машина – вантажівка.

Позначимо події:

A – "на АЗС заправилась машина";

H_1 – "повз АЗС проїхала вантажівка";

H_2 – "повз АЗС проїхав легковий автомобіль".

Тоді ймовірність того, що заправляється машина, за умови, що це вантажівка $P(A \mid H_1) = 0,1$. Ймовірність того, що заправляється машина, за умови, що це легковий автомобіль $P(A \mid H_2) = 0,2$. Ймовірність того, що повз АЗС проїхала вантажівка $P(H_1) = \frac{3}{5}$. Ймовірність того, що повз

АЗС проїхав легковий автомобіль $P(H_2)=\frac{2}{5}$. Обчислимо повну ймовірність

$$P(A)=\frac{3}{5}\cdot 0{,}1+\frac{2}{5}\cdot 0{,}2=\frac{7}{50}.$$

Ймовірність того, що на АЗС заправилась вантажівка обчислюємо за формулою Байєса:

$$P(H_1\mid A)=\frac{\frac{3}{5}\cdot 0{,}1}{\frac{7}{50}}=\frac{3}{7}.$$

Контрольні запитання

1. Що таке умовна ймовірність?
2. Як знайти ймовірність добутку незалежних подій?
3. Як обчислити ймовірність добутку залежних подій?
4. Як знайти повну ймовірність?
5. Які події називаються взаємно незалежними, а які незалежними в сукупності?
6. Як обчислюється ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій?
7. Що обчислює формула Байєса?

3. Повторні незалежні випробування

3.1. Послідовність незалежних випробувань. Формула Бернуллі

Нехай відбувається n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися з ймовірністю p, або не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$. Такі випробування називають ***випробуваннями за схемою Бернуллі***. Знайдемо ймовірність, що при n послідовних випробуваннях подія A настане рівно k ($k \le n$) разів. Позначимо шукану ймовірність через $P_n(k)$. Настання події A k разів з n є можливим у таких випадках, які описуються подіями

$$B_1 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \overline{A}_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n ,$$
$$B_2 = \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot A_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n ,$$
$$\ldots$$
$$B_r = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{n-k} \cdot A_{n-k+1} \cdot \ldots \cdot A_n ,$$

де A_i ($i = \overline{1,n}$) – подія “в i-му випробуванні сталася подія A”.

Кількість r таких подій дорівнює кількості підмножин, що містять k елементів у множині з n елементів, тобто кількості комбінацій $r = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (додаток 1). Оскільки події A_i – незалежні в сукупності і $P(A_i) = p$, $P(\overline{A}_i) = q$, тоді ймовірність кожної з подій B_j ($j = \overline{1,r}$) за теоремою про ймовірність добутку незалежних подій дорівнює $p^k q^{n-k}$. Крім того, події B_j ($j = \overline{1,r}$) попарно несумісні. Тому за теоремою про ймовірність суми несумісних подій шукана ймовірність

$$P_n(k) = P(B_1 + B_2 + \ldots + B_r) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_r) =$$
$$= r \cdot P(B_1) = C_n^k \cdot P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \overline{A}_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} .$$

Таким чином, отримали ***формулу Бернуллі:***

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{1.1}$$

Приклад. У кошику 20 куль: 15 білих і 5 чорних. Виймають підряд 5 куль, причому кожна куля після виймання повертається в корзину, після чого кулі перемішуються. Знайти ймовірність того, що з п’яти вийнятих куль буде дві білі.

Ймовірність появи білої кулі в кожному випробуванні дорівнює $p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, а ймовірність її непояви (появи чорної) $q = \frac{1}{4}$. За формулою Бернуллі отримуємо

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^{5-2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{45}{512}.$$

<u>Приклад.</u> Вироби вищої якості становлять 70% всієї продукції. Для перевірки вибрано навмання 8 виробів. Довести, що серед відібраних виробів ймовірніше виявити 5 високоякісних, ніж 7.

За умовою задачі ймовірність того, що виріб високої якості, $p = 0{,}7$. Тоді ймовірність виробу не вищої якості

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

За формулою Бернуллі (1.1)

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot p^5 \cdot q^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \ 0{,}7^{\ 5} \cdot \ 0{,}3^{\ 3} \approx 0{,}254$$

та

$$P_8(7) = C_8^7 \cdot p^7 \cdot q^1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \ 0{,}7^{\ 7} \cdot \ 0{,}3^{\ 1} \approx 0{,}198.$$

Отже, серед 8 вибраних виробів виявити 5 високоякісних більш ймовірно, ніж 7.

<u>Приклад.</u> Ймовірність хибного виклику, що надходить до пожежно-рятувальної служби, дорівнює $p = 0{,}7$. Яка ймовірність того, що серед $n = 10$ викликів кількість хибних буде 7?

За схемою Бернуллі матимемо

$$P_{10}(7) = C_{10}^7 \cdot 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^3 \approx 0{,}2668.$$

<u>Зауваження.</u> Ймовірність появи події A в n випробуваннях за схемою Бернуллі меншу, ніж m разів знаходять за формулою

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1).$$

Ймовірність появи події A не менше, ніж m разів можна знайти за формулою

$$P_n(k \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n).$$

Ймовірність появи події A хоча б один раз у n випробуваннях доцільно знаходити за формулою

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n.$$

Найбільш ймовірне значення m_0 кількості появ події A при n випробуваннях за схемою Бернуллі визначається співвідношеннями

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A з'явиться хоча б один раз, знаходять за формулою

$$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}.$$

При великих n, обчислення $P_n(k)$ складне, тому використовують наближені формули. Зокрема, враховуючи, що

$$\frac{C_n^k \cdot k!}{n^k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

маємо $\frac{C_n^k \cdot k!}{n^k} \to 1$ при $n \to \infty$ та обмеженому k.Тому формулу Бернуллі можна переписати

$$P_n\ k\ = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx \frac{n^k}{k!}\cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{np}{q}\right)^k \cdot q^n.$$

Справедлива така ***теорема Пуассона.***

<u>**Теорема.**</u> *Якщо* $p = p_n \to 0$ *та* $np_n \to \alpha$ *при* $n \to \infty$ $(0 < \alpha < \infty)$, *тоді*

$$P_n(k) \to \frac{\alpha^k}{k!}\cdot e^{-\alpha},\ k = 0,1,\ldots,\ n \to \infty.$$

► Оскільки $n \to \infty$, то за розглянутим припущенням, взявши $p_n = \frac{\alpha}{n}$, маємо

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \lim_{n\to\infty} C_n^k \cdot \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^k\ k!}{n^k}\cdot\frac{\alpha^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-k} = \frac{\alpha^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n = \frac{\alpha^k}{k!}\cdot e^{-\alpha}. \blacksquare$$

На практиці теорему Пуассона використовують у вигляді наближеної рівності

$$P_n(k) \approx \frac{\alpha^k}{k!} \cdot e^{-\alpha}, \; k = 0,1,\dots . \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) дає досить точне наближення при p < 0,1 і при n не меншому кількох десятків, причому має виконуватися нерівність $\alpha = np \le 10$.

<u>Приклад</u>. Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює p = 0,001. Визначити ймовірність того, що за час t з n = 1000 приладів вийде з ладу рівно 2 прилади.

Оскільки ймовірність виходу з ладу деякого приладу менша за 0,1 та кількість випробувань велика і $\alpha = np = 1 < 10$, то скористаємось теоремою Пуассона

$$P_{1000}(2) \approx \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} \approx 0{,}184.$$

3.2. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа

Недоліком теореми Пуассона є те, що p повинно бути малим. Розглянемо випадки, коли $p \ne 0$, $p \ne 1$ та кількість випробувань є великою. Справедлива така ***локальна теорема Муавра-Лапласа***:

<u>**Теорема.**</u> *Якщо* $n \to \infty$, p *– стала* $(0 < p < 1)$, *а* $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$**,** *тоді*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n(k)}{\dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}} = 1.$$

Доведення теореми не наводимо.

Згідно з локальною теоремою Муавра-Лапласа, обчислення ймовірності $P_n(k)$ здійснюється за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ***функція Гаусса*** (***або локальна функція Лапласа*** (***рис. 5***)).

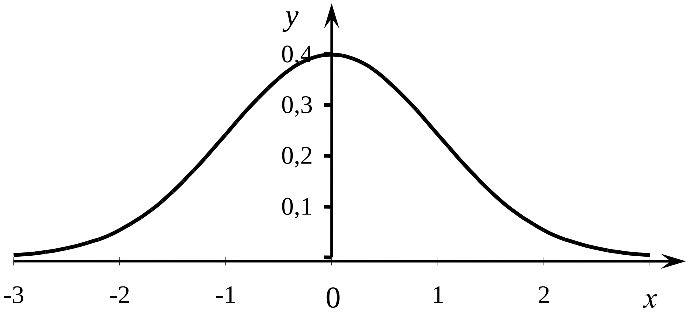


Рис. 5. Графік функції Гаусса (локальної функції Лапласа)

Функція Гаусса є важливою у теорії ймовірностей і математичній статистиці. Опишемо її основні ***властивості:***

– $\varphi(x)$ *визначена для всіх* $x \in (-\infty, \infty)$ *і* $\varphi(x) > 0$;
– $\varphi(x)$ *є парною функцією, тобто* $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
– $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$, *тобто вісь Ох є асимптотою графіка функції* $\varphi(x)$;
– $\varphi(x)$ *має максимум у точці* $x = 0$ *і* $\max\limits_{x\in(-\infty;+\infty)} \varphi(x) = \varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Значення функції Гаусса наведені в таблиці (додаток 2, табл. 2).

Приклад. Досліджують 400 проб руди. Ймовірність промислового вмісту заліза у кожній пробі дорівнює p = 0,7. Визначити ймовірність того, що кількість проб з промисловим вмістом заліза буде 250.

Для визначення ймовірності того, що серед 400 проб руди буде 250 проб з промисловим вмістом заліза, скористаємось локальною теоремою Муавра-Лапласа. В нашому випадку n = 400, p = 0,7, q = 0,3, k = 250. Обчислимо

$$x = \frac{250 - 400\cdot 0,7}{\sqrt{400\cdot 0,7\cdot 0,3}} = -\frac{30}{\sqrt{84}} \approx -3,27\,.$$

Оскільки $\varphi(-x) = \varphi(x)$, то з додатку 2, таблиці 2 знайдемо, що $\varphi(-3,27) = \varphi(3,27)$ = 0,0019. Отже,

$$P_{400}(250) = \frac{1}{\sqrt{84}}\cdot 0,0019 \approx 0,00021\,.$$

Іноді треба оцінити, що деяка подія з’явиться від k_1 до k_2 разів у n випробуваннях. Для оцінки ймовірності у цьому випадку застосовують ***інтегральну теорему Муавра-Лапласа***:

<u>**Теорема.**</u> *Якщо* $n \to \infty$, *p – стала*, $0 < p < 1$, *тоді*

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ,$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$$

Доведення теореми не наводимо.

Інтегральну формулу Муавра-Лапласа також можна записати через функцію Гаусса:

$$P_n(k_1, k_2) = P(k_1 \le k \le k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\, dt .$$

Введемо ***інтегральну функцію Лапласа (рис. 6)***

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^x \varphi(t)\, dt .$$

Тоді

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Значення інтегральної функції Лапласа наведені у таблиці (додаток 2, табл. 3).

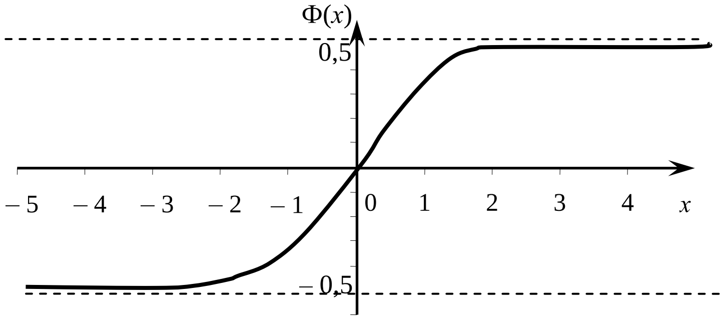


Рис. 6. Графік інтегральної функції Лапласа $\Phi(x)$

Основні ***властивості*** інтегральної функції Лапласа:

- *інтегральна функція Лапласа* $\Phi(x)$ *є непарною функцією, тобто* $\Phi(-x) = -\Phi(x)$*;*
- $\Phi(0) = 0$*;*
- $\Phi(x) \approx 0,5$ *для* $x > 5$.

Отже, вказані теореми дають змогу знайти ймовірності під час випробувань за схемою Бернуллі.

Приклад. Підприємство випускає 99,2% стандартних виробів. Яка ймовірність того, що серед 5000 навмання вибраних виробів цього підприємства кількість нестандартних виробів не більша за 60?

Ймовірність вибору нестандартного виробу $p = 1 - 0,992 = 0,008$. Якщо через k позначити кількість нестандартних виробів серед n = 5000 виробів, то за інтегральною теоремою Муавра-Лапласа маємо

$$P(0 \le k \le 60) = \Phi\left(\frac{60 - 5000 \cdot 0,008}{\sqrt{5000 \cdot 0,008 \cdot 0,992}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 5000 \cdot 0,008}{\sqrt{5000 \cdot 0,008 \cdot 0,992}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{20}{6,3}\right) - \Phi\left(-\frac{40}{6,3}\right) \approx \Phi(3,16) + \Phi(6,32) = 0,4992 + 0,5 = 0,9992.$$

Контрольні запитання

1. Що таке схема Бернуллі?
2. Для чого застосовується формула Бернуллі?
3. Як обчислюється ймовірність появи події певну кількість разів при великій кількості випробувань?
4. Сформулюйте локальну теорему Муавра-Лапласа. Для чого застосовується ця теорема?
5. У яких випадках застосовують інтегральну теорему Муавра-Лапласа?

4. Випадкові величини та їх числові характеристики

4.1. Дискретні випадкові величини та функція розподілу

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття ***випадкової величини***. Прикладом випадкової величини можуть бути число очок, які випали при одному підкиданні гральної кістки, число влучень в ціль при n пострілах, час безвідмовної роботи приладу, кількість надзвичайних ситуацій та ін.

Випадковою величиною *називають таку величину, яка внаслідок випробування може прийняти лише одне числове значення, яке заздалегідь невідоме і зумовлене випадковими причинами.*

Випадкові величини будемо позначати великими літерами X, Y, Z, а їх можливі значення – відповідними малими літерами з індексами. Наприклад,

$$X: x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad Z: z_1, z_2, \ldots, z_n.$$

Випадкові величини бувають ***дискретними*** та ***неперервними***.

Дискретною випадковою величиною *називають таку випадкову величину, яка може приймати відокремленні* (*ізольовані*) *одне від одного числові значення* x_i (*їх можна пронумерувати).*

Події “X приймає значення x_1”, “X приймає значення x_2”, ..., “X приймає значення x_n” утворюють повну систему попарно несумісних подій, тому виконується умова нормування

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

Наприклад, кількість влучень у мішень при трьох пострілах буде X: 0, 1, 2, 3. Звідси випливає, що X може набувати чотири різних значення з різними ймовірностями. Отже, X – дискретна випадкова величина.

Для опису випадкової величини необхідно навести не тільки множину її можливих значень, а й вказати з якими ймовірностями ця величина набуває того чи іншого можливого значення. З цією метою вводять поняття закону розподілу випадкової величини.

Законом розподілу випадкової величини *називають таке співвідношення, яке встановлює зв’язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними до них ймовірностями.*

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна подати у вигляді таблиці, у якій містяться розташовані у порядку зростання значення дискретної випадкової величини та відповідні ймовірності:

$X=x_i$	x_1	…	x_n
p_i	p_1	…	p_n

Приклад. Умовами лотереї передбачено: один виграш – 100 гривень, два – 50 гривень, вісім – 10 гривень, дев'ятнадцять – 1 гривня. Знайти закон розподілу суми виграшу власником одного лотерейного білета, якщо продано 1000 білетів.

Дискретна випадкова величина X – "сума виграшу власником одного лотерейного білета" може мати такі значення: 100, 50, 10, 1 та 0, якщо білет без виграшу. Ймовірність виграти 100 гривень – $\frac{1}{1000}$, 50 гривень – $\frac{2}{1000}$, 10 гривень – $\frac{8}{1000}$, 1 гривню – $\frac{19}{1000}$. Кількість білетів без виграшу $970 = 1000 - (1+2+8+19)$, тому ймовірність нічого не виграти – $\frac{970}{1000}$. Отримали такий закон розподілу дискретної випадкової величини X:

$X = x_i$	100	50	10	1	0
p_i	0,001	0,002	0,008	0,019	0,97

Зауваження. Якщо дискретна випадкова величина може мати нескінченну кількість значень, то її закон розподілу (таблиця) буде мати нескінченну кількість елементів (стовпчиків) у кожному рядку. У цьому випадку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ повинен бути збіжним, а його сума повинна дорівнювати 1.

Функцією розподілу випадкової величини X *називається функція, яка кожному значенню аргумента x ставить у відповідність ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення, меншого за x:*

$$F(x) = P(X < x).$$

Яких би значень не набувала випадкова величина, її функція розподілу визначена на всій дійсній осі. Оскільки функція розподілу випадкової величини є ймовірністю, то вона має такі ***властивості***:

– *значення функції розподілу змінюються в межах* $0 \le F(x) \le 1$*;*
– *функція розподілу монотонно неспадна, тобто для будь-яких дійсних чисел* x_1 *та* x_2 *таких, що* $x_2 > x_1$*, виконується нерівність* $F(x_2) \ge F(x_1)$*;*

– *ймовірність потрапляння значень випадкової величини в інтервал* $[x_1; x_2)$ *обчислюється за формулою*

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1);$$

– *оскільки подія* $x < -\infty$ *є неможливою, а подія* $x < +\infty$ *– вірогідною, то* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, *а* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$*;*

– *функція розподілу* F *є неперервною зліва у кожній точці своєї області визначення, тобто* $\lim\limits_{x \to a-0} F(x) = F(a)$.

<u>Приклад.</u> Побудувати функцію розподілу дискретної випадкової величини, якою є кількість очок, що випадає при підкиданні гральної кістки.

Закон розподілу заданої випадкової величини має вигляд

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Побудуємо функцію розподілу цієї величини. Оскільки при киданні гральної кістки не може випасти число менше ніж 1, то для $x \in (-\infty;1]$ маємо $F(x) \equiv 0$. Для проміжку $x \in (1;2]$ подія $X < x$ полягатиме у випаданні одиниці, тому для цього проміжку $F(x) \equiv \frac{1}{6}$. Для проміжку $x \in (2;3]$ подія $X < x$ полягатиме у випаданні одиниці або двійки, тому для цього проміжку $F(x) \equiv \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Аналогічно, отримаємо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1/6, & 1 < x \le 2, \\ 1/3, & 2 < x \le 3, \\ 1/2, & 3 < x \le 4, \\ 2/3, & 4 < x \le 5, \\ 5/6, & 5 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Графік цієї функції розподілу показано на рис. 7.

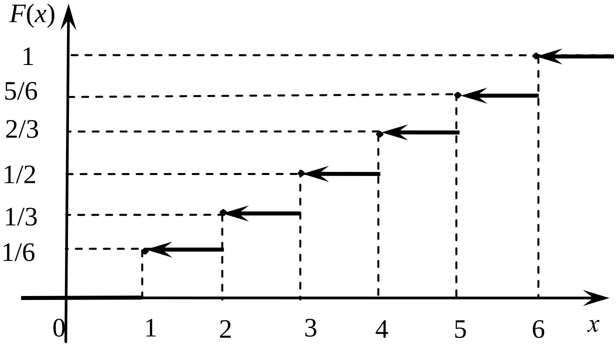


Рис. 7. Графік функції розподілу

4.2. Неперервні випадкові величини

Неперервною випадковою величиною *називають таку випадкову величину, яка може приймати будь-яке числове значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу. Кількість можливих значень такої величини нескінченна.*

Наприклад, величина похибки, яка може виникати при вимірюванні відстані, час безвідмовної роботи приладу, зріст людини, розмір деталі – неперервні випадкові величини.

Очевидно, що неперервна випадкова величина може набувати незліченну кількість значень, і тому ми можемо говорити лише про ймовірність потрапляння цих значень у деякий інтервал, а не про ймовірність набуття неперервною випадковою величиною конкретного значення (вона завжди дорівнює нулю).

Поняття функції розподілу ймовірностей має місце й для неперервної випадкової величини X, тільки в цьому випадку вона є неперервною та кусково-диференційовною.

Разом з поняттям функції розподілу $F(x)$ для неперервної випадкової величини вводимо поняття диференціальної функції розподілу $f(x)$.

Диференціальною функцією розподілу або щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини *називають похідну першого порядку від її функції розподілу і позначають*

$$f(x) = F'(x) .$$

Відповідно, функція розподілу $F(x)$ є первісною для щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ неперервної випадкової величини X.

Надалі замість повної назви “щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини” будемо вживати скорочений термін “щільність розподілу випадкової величини”.

<u>Теорема.</u> *Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з інтервалу (a, b), можна знайти за формулою*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Доведення теореми випливає з означення функції розподілу та щільності розподілу.

<u>Наслідок.</u> *Якщо щільність розподілу $f(x)$ відома, то функцію розподілу $F(x)$ можна описати за формулою*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Щільність розподілу випадкової величини $X \in (a, b)$ має такі ***властивості***:

– $f(x) \geq 0$, *оскільки це похідна неспадної функції;*

– $f(x) = 0$ *при* $x < a$ *та* $x \geq b$;

– $\int_a^b f(x)dx = 1$ *оскільки подія* “$a < X < b$” *– вірогідна.*

Графік щільності розподілу $f(x)$ називають ***кривою розподілу.***

<u>Приклад.</u> Дано щільність розподілу випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2, & 0 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Визначити число a. Знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$. Обчислити ймовірність $P(-1 < X < 2)$.

З запису щільності розподілу робимо висновок, що можливі значення випадкової величини X зосереджені на проміжку $(0, 3)$. На підставі властивостей щільності розподілу маємо:

$$\int_0^3 a \cdot x^2 dx = 1 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = 1 \Rightarrow \frac{a}{3} \cdot 27 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}.$$

При знайденому значенні a щільність розподілу перепишемо у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{9}x^2, & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Графік функції $f(x)$ зображено на рис. 8.

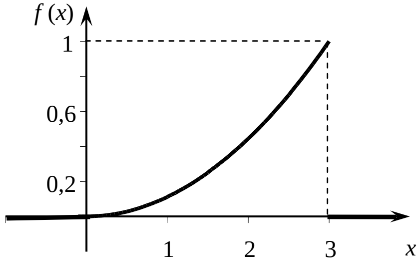


Рис. 8

За властивостями функції розподілу $F(x) = 0$ при $x \le 0$ і $F(x) = 1$ при $x > 3$. Якщо $0 < x \le 3$, то

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{9}t^2\,dt = \frac{1}{9} \cdot \frac{t^3}{3}\bigg|_0^x = \frac{1}{27}x^3.$$

Отже, функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{27}x^3, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 9.

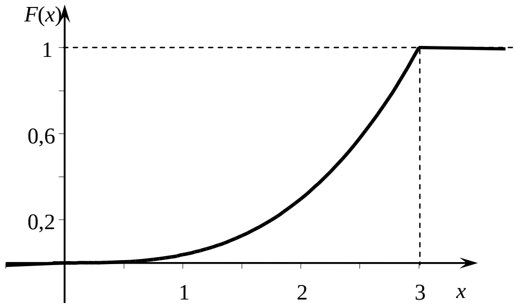


Рис. 9

Ймовірність того, що випадкова величина X потрапить до інтервалу (– 1; 2), обчислюється за формулою (1.3)

$$P(-1 < X < 2) = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{9}x^2\,dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{27}.$$

4.3. Числові характеристики випадкових величини

4.3.1. Математичне сподівання (середнє значення) випадкової величини

Нехай X – дискретна випадкова величина, яка набуває значень x_i з ймовірностями p_i (i = 1, 2,…).

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини *X називається сума*

$$M(X) = \sum_i x_i p_i\,. \tag{1.5}$$

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини *X називається число M (X), яке визначається рівністю*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx\,, \tag{1.6}$$

де f (x) – щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X.

Властивості математичного сподівання випадкової величини:

- *математичне сподівання сталої величини дорівнює сталій величині* $M(C) = C$, *(C – стала);*
- $M(a\,X + b) = a\,M(X) + b$, *де a та b – деякі сталі.*

4.3.2. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення випадкової величини

Дисперсією випадкової величини *називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання*

$$D(X) = M(X - M(X))^2 . \tag{1.7}$$

Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини в околі її математичного сподівання. На практиці зручніше використовувати таку формулу

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \tag{1.8}$$

З врахуванням визначення математичного сподівання формула (1.8) набуде вигляду:

− для дискретної випадкової величини

$$D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - M(X)^2 ;$$

− для неперервної випадкової величини

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - M(X)^2 .$$

Властивості дисперсії випадкової величини:

- $D(C) = 0$;
- $D(X) \geq 0$;
- $D(CX) = C^2 D(X)$;
- $D(X \pm C) = D(X)$; *C – стала.*

У більшості випадків випадкова величина X має розмірність, наприклад, метр, міліметр, грам, тому її дисперсія $D(X)$ буде вимірюватись у квадратних одиницях цієї розмірності.

На практиці доцільно знати величину розсіювання випадкової величини в розмірності цієї величини. Для цього використовують ***середнє квадратичне відхилення***, яке дорівнює квадратному кореню з дисперсії і позначається

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Приклад. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X, якщо задано її закон розподілу:

$\boldsymbol{X = x_i}$	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{p_i}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

За формулою (1.5)

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2},$$

$$M(X^2) = 1\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{6} + 16\cdot\frac{1}{6} + 25\cdot\frac{1}{6} + 36\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6},$$

тоді

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}7 .$$

Контрольні запитання

1. Дати означення випадкової величини.
2. Яка випадкова величина називається дискретною?
3. Яка випадкова величина називається неперервною?
4. Що таке закон розподілу випадкової величини?
5. Дати означення функції розподілу випадкової величини.
6. Що називається щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини?
7. Як знаходити математичне сподівання та дисперсію випадкових величин (дискретної та неперервної)?

5. Основні закони розподілу випадкових величин та їх числові характеристики

Найважливішими законами розподілу дискретних випадкових величин є *біноміальний, геометричний* та *закон Пуассона*. Для неперервних випадкових величин найважливішими є *рівномірний, показниковий*, *нормальний та закон розподілу Вейбула*.

5.1. Біноміальний закон розподілу

Нехай здійснюємо випробування за схемою Бернуллі. Ймовірність того, що подія A відбудеться, дорівнює p, не відбудеться $q = 1 - p$. Розглянемо в ролі дискретної випадкової величини X – кількість появ події A у випробуваннях за схемою Бернуллі. Знайдемо закон розподілу цієї випадкової величини. Для цього потрібно визначити можливі значення X та їх ймовірності.

При n випробуваннях випадкова величина X – “кількість появ події A” може набувати таких значень $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, ..., $x_{n+1} = n$.

Залишається знайти ймовірності цих можливих значень, скориставшись формулою Бернуллі

$$p_k = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

яка є аналітичним виразом *біноміального закону розподілу*. Запишемо біноміальний закон у вигляді таблиці:

$X = k$	0	...	k	...	$n-1$	n
p_k	q^n	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$np^{n-1}q$	p^n

Скориставшись формулами (1.5) та (1.7), одержуємо числові характеристики біноміального закону розподілу

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}\ .$$

5.2. Закон розподілу Пуассона

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p. Для визначення ймовірності k появ події A у цих випробуваннях користуються формулою Бернуллі. Якщо n велике, а p мале, тоді використовують теорему Пуассона.

Отже, ***закон розподілу Пуассона*** ймовірностей масових (n велике) рідкісних (p мале) подій описується такою формулою

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}, \quad k = 0, 1, \ldots, \; \alpha = np .$$

$X = k$	0	1	2	…	$n-1$	n	…
p_k	$e^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{1!}e^{-\alpha}$	$\frac{\alpha^2}{2!}e^{-\alpha}$	…	$\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha}$	$\frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}$	…

Цей розподіл використовують у задачах статистичного контролю якості, в теорії надійності, теорії масового обслуговування та ін.

Числовими характеристиками закону Пуассона є

$$M(X) = \alpha ; \quad D(X) = \alpha ; \quad \sigma(X) = \sqrt{\alpha} .$$

5.3. Геометричний закон розподілу

Нехай проводяться незалежні випробування до першої появи випадкової події A. Ймовірність того, що подія A відбудеться в одному експерименті дорівнює p, не відбудеться $q = 1 - p$. Кількість проведених випробувань буде цілочисельною випадковою величиною $X = \{1, 2, 3, ...\}$. Ймовірності цих можливих значень:

$$p_k = pq^{k-1}.$$

$X = k$	1	2	3	4	...
p_k	p	pq	pq^2	pq^3	...

Отриманий закон називається ***геометричним законом розподілу ймовірностей*** (оскільки при перевірці умови нормування використовується формула суми нескінченної геометричної прогресії).

Числові характеристики геометричного закону розподілу виражаються формулами:

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p} .$$

5.4. Рівномірний закон розподілу

Неперервна випадкова величина X розподілена ***рівномірно*** *на проміжку* (a, b), *якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність її розподілу ймовірностей на цьому проміжку стала* (*рис. 10*), *тобто*

$$f(x) = \begin{cases} C = \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases}$$

Величина сталої $C = \dfrac{1}{b-a}$ визначається з ***умови нормування***

$$P(a < X < b) = C(b - a) = 1.$$

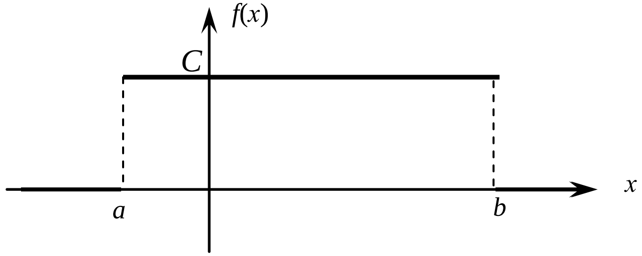


Рис. 10. Графік щільності розподілу ймовірностей рівномірного розподілу неперервної випадкової величини X

Якщо випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку (a, b), то ймовірність того, що вона належить будь-якому інтервалу $(x_1, x_2) \in (a, b)$, є пропорційною до довжини цього інтервалу

$$P(x_1 < X < x_2) = C(x_2 - x_1) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$

Іншими словами, ймовірність того, що X належить інтервалу (x_1, x_2) дорівнює відношенню довжини цього інтервалу до довжини усього проміжку (a, b).

Цей розподіл задовольняють, наприклад, похибки округлення різноманітних розрахунків.

Числовими характеристиками неперервної випадкової величини X, що розподілена за рівномірним законом, будуть

$$M(X) = \frac{b+a}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(X) = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}.$$

5.5. Показниковий закон розподілу

Неперервну випадкову величину X називають розподіленою за ***показниковим законом****, якщо щільність розподілу її ймовірностей має вигляд*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

де $\lambda > 0$ *– параметр*.

Показниковому розподілу задовольняють такі випадкові величини: час телефонної розмови, час ремонту техніки, час безвідмовної роботи комп’ютера.

Графік щільності розподілу ймовірностей показникового закону розподілу неперервної випадкової величини X при $\lambda = 0{,}5$ зображено на рис. 11.

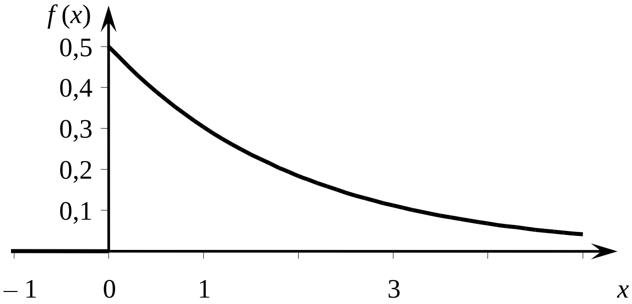


Рис. 11. Графік щільності показникового закону розподілу, λ = 0,5

Числовими характеристиками показникового закону розподілу будуть

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

<u>Зауваження.</u> Якщо випадкова величина розподілена за показниковим законом, то її функція розподілу має вигляд $F(x)=1-e^{-\lambda x}$. Тому

$$P(a<X<b)=e^{-a\lambda}-e^{-b\lambda}.$$

5.6. Нормальний закон розподілу

Неперервну випадкову величину X *називають* ***нормально розподіленою****, якщо щільність розподілу її ймовірностей має вигляд*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де а та σ – параметри розподілу.

Графік цієї функції $f(x)$ називають ***нормальною кривою*** або ***кривою Гаусса***.

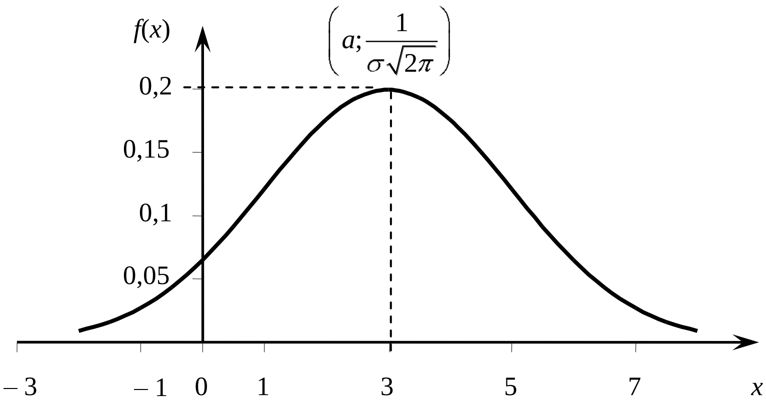


Рис. 12. Графік щільності нормального закону розподілу, а = 3, σ = 2.

Повне дослідження цієї функції методами диференціального числення дозволяє побудувати графік нормальної кривої (рис. 12).

При $a = 0$ та $\sigma = 1$ нормальну криву називають ***нормованою***, її рівняння буде

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Остання формула описує локальну функцію Лапласа (функцію Гаусса), про яку згадувалося раніше і яка табульована. Нормальний закон розподілу позначають $N(a;\sigma^2)$, а нормований нормальний закон – $N(0;1)$.

Числові характеристики нормально розподіленої випадкової величини X:

$$M(X)=a;\quad D(X)=\sigma^2;\quad \sigma(X)=\sigma.$$

Зауваження. Якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами a та σ, то випадкова величина

$Z = \dfrac{X-a}{\sigma}$ буде розподілена за нормованим нормальним законом і $M(Z) = 0$, $D(Z) = 1$, $\sigma(Z) = 1$.

Інтегральною функцією нормального закону розподілу буде

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz,$$

яка для випадку нормованого нормального закону $N(0;1)$ набуде вигляду

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,5 + \Phi(x),$$

де $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа.

Ймовірність потрапляння в інтервал (c, d) нормально розподіленої випадкової величини X знаходять за формулою

$$P(c < X < d) = \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right). \tag{1.9}$$

Приклад. Зріст курсантів розподілено за нормальним законом. Математичне сподівання зросту студентів дорівнює 175 см, а середнє квадратичне відхилення – 6 см. Визначити ймовірність того, що хоча б один із п’яти викликаних навмання курсантів буде мати зріст від 170 до 180 см.

Зріст курсанта X – випадкова величина, яка за умовою задачі розподілена нормально з математичним сподіванням $M(X) = 175$ см та середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 6$ см.

Позначимо події: A – із 5 вибраних курсантів зріст хоча б одного належить проміжку (170; 180); $\overline{A}$ – зріст усіх 5 вибраних курсантів не належать проміжку (170; 180). Величина X розподілена нормально, тому за формулою (1.9) знайдемо ймовірність того, що зріст одного викликаного курсанта належить проміжку (170; 180):

$$P(170 < X < 180) = \Phi\left(\frac{180-175}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-175}{6}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{5}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{6}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{6}\right) = 2\Phi\ 0,833\ = 2 \cdot 0,2967 = 0,5934.$$

Ймовірність того, що зріст одного викликаного студента не належить проміжку (170; 180), буде

$$P(X \notin [170;180]) = 1 - P(170 < X < 180) = 1 - 0,5934 = 0,4066.$$

Застосовуючи теорему множення ймовірностей незалежних подій, знайдемо ймовірність події $\overline{A}$

$$P(\overline{A}) = (0{,}4066)^5 \approx 0{,}01111.$$

Отже, ймовірність шуканої події A буде

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 1 - 0{,}01111 \approx 0{,}98889.$$

5.7. Закон розподілу Вейбулла

Неперервну випадкову величину X називають розподіленою за ***законом Вейбулла****, якщо щільність розподілу її ймовірностей має вигляд*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\theta^a} x^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^a}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

де a, θ – параметри розподілу.

Розподіл названий на честь шведського інженера В.Вейбулла (W. Weibull). Цей закон є універсальним, оскільки при відповідних значеннях параметрів перетворюється у нормальний, показниковий та інші види розподілів. Закон розподілу Вейбулла описує напрацювання до відмови підшипників, елементів радіоелектронної апаратури, його використовують для оцінки надійності деталей та вузлів машин, зокрема автомобілів, а також для оцінки надійності машин в процесі їх припрацювання.

Інтегральна функція розподілу Вейбулла має вигляд

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^a}.$$

Графіки функції щільності розподілу для різних значень параметрів a та $\theta = 1$ зображені на рис.13.

Числовими характеристиками розподілу Вейбулла є

$$M(X) = \theta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right),$$

$$D(X) = \theta^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)\right)^2 \right),$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\theta^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)\right)^2 \right)},$$

де $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-функція.

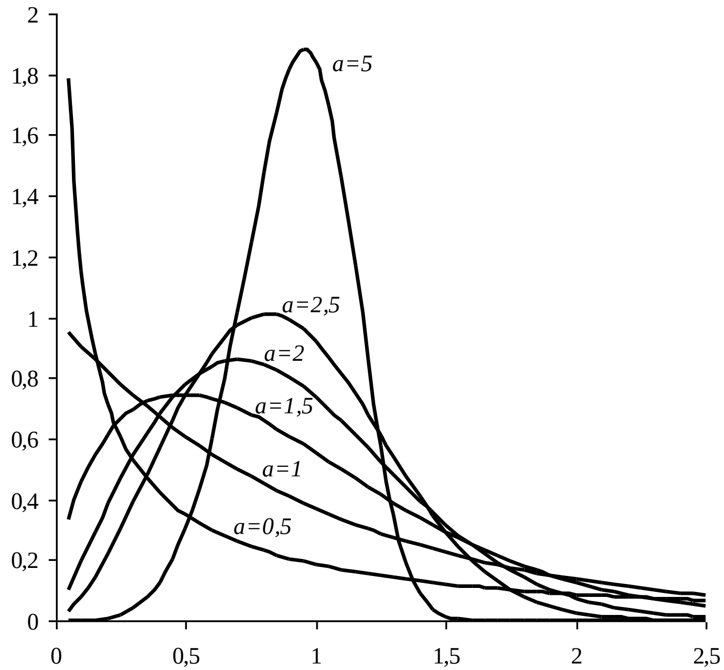


Рис. 13. Графіки щільності розподілу Вейбулла при $\theta = 1$ та деяких значеннях a

Контрольні запитання

1. Які закони найчастіше використовуються для опису випадкової величини?
2. Яка функція щільності нормального закону розподілу?
3. Наведіть формули обчислення числових характеристик біноміального закону розподілу; геометричного закону розподілу.
4. Для якого закону розподілу математичне сподівання дорівнює середньому квадратичному відхиленню?
5. Побудуйте (схематично) криву Гаусса.
6. Яка інтегральна функція розподілу Вейбулла?

6. Закони розподілу та числові характеристики двовимірних випадкових величин

Вище розглянуті випадкові величини X, які при кожному випробуванні визначались одним можливим числовим значенням. Тому таку випадкову величину X називають одновимірною. Якщо можливі значення випадкової величини визначаються у кожному випробуванні двома, трьома, ..., n числами, то такі величини називають дво, три, ..., n-вимірними відповідно.

Двовимірну випадкову величину будемо позначати (X, Y), де X та Y при цьому будуть її компонентами. Величини X та Y, що розглядаються одночасно, утворюють систему двох випадкових величин. Аналогічно можна розглядати систему n випадкових величин.

Сукупність n випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *називають* ***системою випадкових величин або n-вимірною випадковою величиною***.

Систему випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ можна розглядати як випадкову точку в n-вимірному просторі з координатами $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Багатовимірні випадкові величини бувають ***дискретними*** та ***неперервними*** (компоненти цих величин відповідно будуть дискретними та неперервними).

6.1. Закон та функція розподілу ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини

Законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини *називають перелік можливих значень цієї величини* (x_i, y_j) *та їх ймовірностей* $p(x_i, y_j)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Найчастіше закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини задають у вигляді таблиці $m \times n$. У першому рядку таблиці записують усі можливі значення компоненти Y. У першому стовпчику таблиці записують усі можливі значення компоненти X. На перетині i -го рядка та j -го стовпчика записують ймовірність $p(x_i, y_j) = p_{ij}$ того, що двовимірна випадкова величина (X, Y) прийме значення (x_i, y_j), $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$:

$X = x_i$	$Y = y_j$					
	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1m}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{im}
…	…	…	…	…	…	…

x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nj}	…	p_{nm}

Сума ймовірностей з таблиці дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 .$$

Закон розподілу двовимірної випадкової величини дозволяє отримати закони розподілу кожної компоненти окремо.

Дійсно, оскільки події (x_i, y_1), (x_i, y_2),…, (x_i, y_m) несумісні, тому ймовірність $P(x_i)$ того, що X прийме значення x_i за теоремою додавання ймовірностей буде

$$P(x_i) = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + ... + p(x_i, y_m), \tag{1.10}$$

тобто дорівнює сумі ймовірностей, розташованих в i-тому рядку таблиці розподілу.

Аналогічно, додаванням ймовірностей j-го стовпця таблиці, одержимо ймовірність

$$P(y_j) = p(x_1, y_j) + p(x_2, y_j) + ... + p(x_n, y_j). \tag{1.11}$$

Приклад. Знайти закони розподілу компонент двовимірної випадкової величини, закон розподілу якої заданий таблицею

$X = x_i$	$Y = y_j$		
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,3	0,2
x_2	0,06	0,18	0,16

Ймовірності відповідних значень X та Y знаходимо так:

$$P(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + p(x_1, y_3) = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}6;$$

$$P(x_2) = p(x_2, y_1) + p(x_2, y_2) + p(x_2, y_3) = 0{,}06 + 0{,}18 + 0{,}16 = 0{,}4;$$

$$P(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = 0{,}1 + 0{,}06 = 0{,}16;$$

$$P(y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}48;$$

$$P(y_3) = p(x_1, y_3) + p(x_2, y_3) = 0{,}2 + 0{,}16 = 0{,}36.$$

Закони розподілу X та Y будуть мати вигляд

$X = x_i$	x_1	x_2
$P(x_i)$	0,6	0,4

$Y = y_j$	y_1	y_2	y_3
$P(y_j)$	0,16	0,48	0,36

Функцією розподілу двовимірної випадкової величини **(*X, Y*)** *називають функцію двох змінних* $F(x, y)$, *яка визначає для кожної пари чисел* (X, Y) *ймовірність виконання нерівностей* $X < x;\ Y < y$, *тобто*

$$F(x, y) = P(X < x;\ Y < y).$$

Аналогічно визначають функцію розподілу системи n випадкових величин.

Властивості ймовірності та означення функції розподілу дозволяють довести такі ***властивості функції розподілу двовимірної випадкової величини***:

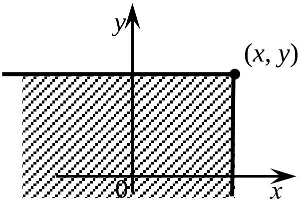
– $0 \le F(x, y) \le 1$;

– *$F(x, y)$ неспадна функція за кожним аргументом, тобто $F(x_2, y) > F(x_1, y)$, якщо $x_2 > x_1$; $F(x, y_2) > F(x, y_1)$, якщо $y_2 > y_1$;*

– *існують граничні співвідношення $F(-\infty, y) = 0$;*
$$F(x, -\infty) = 0;\ F(-\infty, -\infty) = 0;\ F(\infty, \infty) = 1;$$

– *ймовірність знаходження випадкової точки у прямокутнику $\{x_1 \le X \le x_2;\ y_1 \le Y \le y_2\}$ можна знайти за формулою*

$$P(x_1 < X < x_2; y_1 < Y < y_2) =$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1). \qquad (1.12)$$



Геометричний зміст функції розподілу $F(x, y)$ полягає у ймовірності того, що випадкова точка (X, Y) потрапить у прямий кут з вершиною в точці (x, y) і розміщений нижче та лівіше від цієї вершини (див. рисунок).

Приклад. Знайти ймовірність знаходження випадкової точки (X, Y) у прямокутнику, обмеженому лініями

$$x = \frac{\pi}{6};\ x = \frac{\pi}{2};\ y = \frac{\pi}{3};\ y = \frac{\pi}{4};$$

якщо задана функція розподілу вигляду

$$F(x, y) = \sin x \cdot \sin y;\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Використовуючи формулу (1.12), одержуємо ймовірність того, що випадкова величина потрапляє у заданий прямокутник

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) -$$
$$-\left(F\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3} -$$

$$-\left(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\approx 0,08\,.$$

6.2. Диференціальна функція розподілу двовимірної випадкової величини

Неперервну двовимірну випадкову величину можна задавати функцією розподілу $F(x, y) = P(X < x;\ \ Y < y)$ або диференціальною функцією розподілу.

Диференціальною функцією розподілу (***двовимірною щільністю розподілу ймовірностей***) $f(x, y)$ *неперервної двовимірної випадкової величини* (X, Y) *називають мішану частинну похідну другого порядку від функції розподілу* $F(x, y)$

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}\,.$$

Аналогічно визначають щільність ймовірностей n-вимірної неперервної випадкової величини.

Таким чином, якщо функція розподілу $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини відома, то можна знайти диференціальну функцію розподілу $f(x, y)$ цієї випадкової величини.

Якщо відома щільність розподілу ймовірностей $f(x, y)$ двовимірної випадкової величини, то її функцію розподілу знаходять за формулою

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,dudv\,,$$

тобто з використанням невласного двократного інтеграла.

Ймовірність влучення випадкової точки (X, Y) в довільну область D знаходять за формулою

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)\,dxdy\,.$$

Диференціальна функція розподілу ймовірностей $f(x, y)$ задовольняє ***властивості:***

– $f(x, y) \geq 0$*, тобто вона невід’ємна;*
– *виконується умова нормування*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1. \qquad (1.13)$$

6.3. Залежні та незалежні випадкові величини

Дві випадкові величини ***незалежні****, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина.*

Випадкові величини ***залежні****, якщо закон розподілу однієї величини залежить від того, які значення прийняла друга величина.*

Теорема. *Щоб випадкові величини X та Y були незалежні, необхідно і достатньо, щоб функція розподілу системи випадкових величин (X, Y) дорівнювала добутку функцій розподілу кожної з них $F(x, y) = F_1(x)\cdot F_2(y)$.*

Доведення теореми не наводимо.

Зауважимо, якщо X та Y незалежні випадкові величини, то

$$M(XY) = M(X)\cdot M(Y),$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

6.4. Числові характеристики двовимірної випадкової величини

Числові характеристики складових X і Y двовимірної випадкової величини (X, Y) визначають за формулами, які є аналогами для одновимірної випадкової величини. Специфічні властивості деяких числових характеристик двовимірної випадкової величини пов'язані з залежністю її компонент.

Основні числові характеристики складових для дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y) виражаються формулами:

– *математичні сподівання:*

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \cdot p(x_i, y_j), \qquad (1.14)$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot P(y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(x_i, y_j). \qquad (1.15)$$

– *дисперсії:*

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2\cdot P(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i-M(X)\right)^2\cdot p(x_i,\,y_j),$$

$$D(Y)=\sum_{j=1}^{m}\left(y_j-M(Y)\right)^2\cdot P(y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_j-M(Y)\right)^2\cdot p(x_i,\,y_j),$$

або

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot P(x_i)-\left(M(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i^2\cdot p(x_i,\,y_j)-\left(M(X)\right)^2,$$

$$D(Y)=\sum_{j=1}^{n}y_j^2\cdot P(y_j)-\left(M(Y)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j^2\cdot p(x_i,\,y_j)-\left(M(Y)\right)^2,$$

– *середні квадратичні відхилення:*

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,,\qquad \sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}\,.$$

Приклад. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано таблицею:

$Y = y_j$	$X = x_i$		
	– 2	4	6
3	1,7a	2,2a	2,1a
5	0,3a	1,8a	1,9a

Визначити число a і обчислити числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

Використовуючи умову нормування, маємо

$$1{,}7a + 2{,}2a + 2{,}1a + 0{,}3a + 1{,}8a + 1{,}9a = 1.$$

Звідси a = 0,1.

Із знайденим числом a і доповненими ймовірностями $p(x_i)$ і $p(y_j)$ таблиця набуває такого вигляду:

$Y = y_j$	$X = x_i$			$P(y_j)$
	–2	4	6	
3	0,17	0,22	0,21	0,6
5	0,03	0,18	0,19	0,4
$P(x_i)$	0,2	0,4	0,4	1

Величини $P(x_i)$ та $P(y_j)$ знаходимо з формул (1.10) та (1.11) відповідно.

Обчислюємо числові характеристики:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot P(x_i)=(-2)\cdot 0,2+4\cdot 0,4+6\cdot 0,4=3,6\,;$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot P(x_i)=(-2)^2\cdot 0,2+4^2\cdot 0,4+6^2\cdot 0,4=21,6\,;$$

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=21,6-3,6^2=8,64\,;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{8,64}\approx 2,94\,;$$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{2}y_j\cdot P(y_j)=3\cdot 0,6+5\cdot 0,4=3,8\,;$$

$$M(Y^2)=\sum_{j=1}^{2}y_j^2P(y_j)=3^2\cdot 0,6+5^2\cdot 0,4=15,4;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-\left[M(Y)\right]^2=15,4-3,8^2=0,96\,;$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{0,96}\approx 0,98\,.$$

Математичне сподівання двовимірної неперервної випадкової величини знаходять за формулами

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)\,dxdy\,,$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)\,dxdy\,. \qquad (1.16)$$

Дисперсії двовимірної неперервної випадкової величини $D(X)$ та $D(Y)$ характеризують розсіювання випадкової точки (X, Y) вздовж координатних осей Ox та Oy, відповідно. Їх знаходять за формулами

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x,y)\,dxdy-\left[M(X)\right]^2,$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f(x,y)\,dxdy-\left[M(Y)\right]^2. \qquad (1.17)$$

<u>Приклад.</u> Двовимірна неперервна випадкова величина (X, Y) задана щільністю розподілу ймовірностей.

$$f(x,y)=\begin{cases} a, & (x,y)\in Q, \\ 0, & (x,y)\notin Q, \end{cases}$$

де Q = {(x, y): – 1 < x < 3; 2 < y < 4}.

Знайти a. Обчислити числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

Сталу величину a знаходимо з умови (1.13). Оскільки функція $f(x, y) = a$ при $(x, y) \in Q$, то

$$\int_{-1}^{3}\int_{2}^{4} a\, dxdy = 1 \Rightarrow a\int_{-1}^{3} dx\int_{2}^{4} dy = 1.$$

Звідси $a = \frac{1}{8}$.

Отже,

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{8}, & (x,y)\in Q, \\ 0, & (x,y)\notin Q. \end{cases}$$

Для обчислення математичного сподівання неперервної випадкової величини, скористаємось формулою (1.16)

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{3}\int_{2}^{4}\frac{1}{8}x\,dxdy=\frac{1}{8}\int_{-1}^{3}x\,dx\int_{2}^{4}dy=\frac{2}{16}x^2\Big|_{-1}^{3}=1;$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{3}\int_{2}^{4}\frac{1}{8}y\,dxdy=\frac{1}{8}\int_{-1}^{3}dx\int_{2}^{4}y\,dy=\frac{4}{8}\frac{y^2}{2}\Big|_{2}^{4}=3.$$

Обчислимо

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{3}\int_{2}^{4}\frac{1}{8}x^2\,dxdy=\frac{1}{8}\int_{-1}^{3}x^2\,dx\int_{2}^{4}dy=\frac{7}{3};$$

$$M(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{3}\int_{2}^{4}\frac{1}{8}y^2\,dxdy=\frac{1}{8}\int_{-1}^{3}dx\int_{2}^{4}y^2dy=\frac{28}{3}.$$

Тоді

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3};\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$D(Y)=M(Y^2)-\left(M(Y)\right)^2=\frac{28}{3}-9=\frac{1}{3};\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

6.5. Умовні закони розподілу двовимірної випадкової величини та їх числові характеристики

6.5.1. Умовний закон розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини

Якщо випадкові величини, які утворюють систему, залежні, то для знаходження їх двовимірного розподілу недостатньо знати закони розподілу складових, а потрібно ще знати так званий умовний закон розподілу однієї з них. Це питання тісно пов'язане з поняттям ймовірності події A за умови, що відбулася подія B, тобто з умовною ймовірністю події A, яка виражається формулою:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Нехай (x_i, y_j) – можливі значення дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Через $p(x_i \mid y_j)$ позначимо умовну ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення x_i за умови, що випадкова величина Y набула значення y_j, а через $p(y_j \mid x_i)$ – умовну ймовірність того, що випадкова величина Y набуде значення y_j за умови, що випадкова величина X набула значення x_i.

Ймовірності $p(x_i \mid y_j)$ і $p(y_j \mid x_i)$ обчислюємо за формулами, які випливають з формули для обчислення умовної ймовірності події:

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{P(y_j)}, \qquad p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{P(x_i)},$$

де $p(x_i, y_j) = p_{ij}$.

Умовним законом розподілу складової X двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) ***за фіксованого значення складової*** $Y = y_j$ *називається перелік можливих значень* x_i *випадкової величини X та їх умовних ймовірностей* $p(x_i \mid y_j)$.

Умовним законом розподілу складової Y двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) ***за фіксованого значення складової*** $X = x_i$ *називається перелік можливих значень* y_j *випадкової величини Y та їх умовних ймовірностей* $p(y_j \mid x_i)$.

Умовні закони розподілу складових X і Y двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) записують, відповідно, у формі таких таблиць:

$\boldsymbol{X = x_i}$	x_1	x_2	…	x_n
$\boldsymbol{p(x_i \mid y_j)}$	$p(x_1 \mid y_j)$	$p(x_2 \mid y_j)$	…	$p(x_n \mid y_j)$

$Y = y_j$	y_1	y_2	…	y_m
$p(y_j \mid x_i)$	$p(y_1 \mid x_i)$	$p(y_2 \mid x_i)$	…	$p(y_m \mid x_i)$

Зрозуміло, що $\sum_{i=1}^{n} p(x_i \mid y_j) = 1$ та $\sum_{j=1}^{m} p(y_j \mid x_i) = 1$.

Отже, знаючи безумовні закони розподілу складових X і Y та умовний закон розподілу однієї з них, можемо скласти закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) і ймовірності $p(x_i, y_j)$ можливих її значень (x_i, y_j) обчислюємо за формулами:

$$p(x_i, y_j) = P(y_j)\cdot p(x_i \mid y_j) \quad \text{або} \quad p(x_i, y_j) = P(x_i)\cdot p(y_j \mid x_i).$$

Для дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y) умовні числові характеристики обчислюють за формулами:

– умовні математичні сподівання:

$$M(X \mid Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i \mid y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{p(x_i, y_j)}{P(y_j)} =$$

$$= \frac{1}{P(y_j)} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i, y_j),$$

$$M(Y \mid X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(y_j \mid x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot \frac{p(x_i, y_j)}{P(x_i)} =$$

$$= \frac{1}{P(x_i)} \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(x_i, y_j);$$

– умовні дисперсії:

$$D(X \mid Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i \mid y_j) - (M(X \mid Y = y_j))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{p(x_i, y_j)}{P(y_j)} - (M(X \mid Y = y_j))^2 =$$

$$= \frac{1}{P(y_j)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i, y_j) - (M(X \mid Y = y_j))^2,$$

$$D(Y \mid X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \cdot p(x_i \mid y_j) - (M(Y \mid X = x_i))^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \cdot \frac{p(x_i, y_j)}{P(x_i)} - (M(Y \mid X = x_i))^2 =$$

$$= \frac{1}{P(x_i)} \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \cdot p(x_i, y_j) - (M(Y \mid X = x_i))^2;$$

– умовні середні квадратичні відхилення:

$$\sigma(X \mid Y = y_j) = \sqrt{D(X \mid Y = y_j)},$$

$$\sigma(Y \mid X = x_i) = \sqrt{D(Y \mid X = x_i)}.$$

Приклад. Закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) задано таблицею:

$Y = y_j$	**$X = x_i$**				**$P(y_j)$**
	10	20	30	40	
–8	0,01	0,03	0,02	0,04	0,1
–4	0,07	0,1	0,07	0,06	0,3
–2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,6
$P(x_i)$	0,18	0,33	0,19	0,3	1

Записати умовні закони розподілу випадкової величини X при $Y = -4$ та випадкової величини Y при $X = 40$. Знайти $M(X \mid Y = -4)$, $D(X \mid Y = -4)$.

Запишемо закон розподілу випадкової величини X за фіксованого значення $Y = -4$. Для цього обчислимо умовні ймовірності:

$$p(x_1 \mid y_2) = \frac{p(x_1, y_2)}{P(y_2)} = \frac{0,07}{0,3} = \frac{7}{30}; \quad p(x_2 \mid y_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{P(y_2)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3};$$

$$p(x_3 \mid y_2) = \frac{p(x_3, y_2)}{P(y_2)} = \frac{0,07}{0,3} = \frac{7}{30}; \quad p(x_4 \mid y_2) = \frac{p(x_4, y_2)}{P(y_2)} = \frac{0,06}{0,3} = \frac{1}{5}.$$

Умовний закон розподілу випадкової величини X при $Y = -4$:

$X = x_i$	10	20	30	40
$p(x_i \mid y_2)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$

Зробимо перевірку:

$$\sum_{i=1}^{4} p(x_i \mid y_2) = \frac{7}{30} + \frac{1}{3} + \frac{7}{30} + \frac{1}{5} = 1.$$

Знайдемо умовне математичне сподівання та умовну дисперсію:

$$M(X \mid Y = -4) = 10 \cdot \frac{7}{30} + 20 \cdot \frac{1}{3} + 30 \cdot \frac{7}{30} + 40 \cdot \frac{1}{5} = 24,$$

$$D(X \mid Y=-4)=10^2\cdot\frac{7}{30}+20^2\cdot\frac{1}{3}+30^2\cdot\frac{7}{30}+40^2\cdot\frac{1}{5}-24^2=110{,}7.$$

Запишемо закон розподілу випадкової величини Y за фіксованого значення X = 40. Для цього обчислимо ймовірності:

$$p(y_1 \mid x_4)=\frac{p(y_1,x_4)}{P(x_4)}=\frac{0{,}04}{0{,}3}=\frac{2}{15}; \qquad p(y_2 \mid x_4)=\frac{p(y_2,x_4)}{P(x_4)}=\frac{0{,}06}{0{,}3}=\frac{1}{5};$$

$$p(y_3 \mid x_4)=\frac{p(y_3,x_4)}{P(x_4)}=\frac{0{,}2}{0{,}3}=\frac{2}{3}.$$

Умовний закон розподілу випадкової величини Y при $X=40$:

$\boldsymbol{Y = y_j}$	– 8	– 4	– 2
$\boldsymbol{p(y_j \mid x_4)}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$

Перевірка: $\sum\limits_{j=1}^{3} p(y_j \mid x_4)=\frac{2}{15}+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=1.$

6.5.2. Умовний закон розподілу та числові характеристики неперервної випадкової величини

Нехай (X, Y) – двовимірна неперервна випадкова величина і $f(x, y)$ – щільність ймовірностей її двовимірного розподілу. Щільності розподілу складових X і Y визначаються рівностями:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \qquad f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx,$$

а закони розподілу складових

$$F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,dydu, \qquad F_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dxdv.$$

Умовною щільністю $\varphi(x \mid y)$ ***розподілу ймовірностей складової X двовимірної неперервної величини (X, Y) за фіксованого значення Y = y*** *називається відношення щільності $f(x, y)$ її двовимірного розподілу до щільності $f_2(y)$ складової Y:*

$$\varphi(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}.$$

Умовною щільністю $\psi(y \mid x)$ ***розподілу ймовірностей складової Y двовимірної неперервної величини (X, Y) за фіксованого значення***

X = x *називається відношення щільності* $f(x, y)$ *її двовимірного розподілу до щільності* $f_1(x)$ *складової X:*

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} .$$

Умовна щільність розподілу ймовірностей відповідної складової двовимірної неперервної випадкової величини визначає її ***умовний закон розподілу****.*

Звідси маємо аналогічний, як у дискретному випадку, ***висновок:*** *знаючи щільності розподілів складових X* і *Y та умовну щільність розподілу однієї з них, можемо обчислити щільність розподілу ймовірностей двовимірної неперервної випадкової величини* (*X*, *Y*) *за формулами:*

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot \varphi(x \mid y), \quad f(x, y) = f_1(x) \cdot \psi(y \mid x) .$$

Для неперервної двовимірної випадкової величини (*X*, *Y*) умовні числові характеристики обчислюють за формулами:

– *умовні математичні сподівання:*

$$M(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x \mid y)\, dx \text{ (функція, яка залежить від змінної } y\text{);}$$

$$M(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \psi(y \mid x)\, dy \text{ (функція, яка залежить від змінної } x\text{).}$$

– *умовні дисперсії:*

$$D(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \varphi(x \mid y)\, dx - (M(X \mid Y = y))^2 ;$$

$$D(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \psi(y \mid x)\, dy - (M(Y \mid X = x))^2 .$$

– *умовні середні квадратичні відхилення:*

$$\sigma(X \mid Y = y) = \sqrt{D(X \mid Y = y)} ;$$

$$\sigma(Y \mid X = x) = \sqrt{D(Y \mid X = x)} .$$

У загальному випадку незалежність складових *X* і *Y* двовимірної випадкової величини (*X*, *Y*) рівносильна виконанню рівності

$$P(X < x ; Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y) ,$$

або

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) ,$$

а критерії незалежності окремо для дискретного і неперервного випадків визначаються співвідношеннями

$$p(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j)\ ,\ i = \overline{1,n}\ ,\ \ j = \overline{1,m}\ ,$$

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)\ .$$

Звідси випливає, зокрема, що коли величини X і Y незалежні та неперервні, то їх умовні щільності розподілів $\varphi(x|y)$ і $\psi(y|x)$ збігаються з безумовними щільностями розподілів $f_1(x)$ і $f_2(y)$:

$$\varphi(x|\,y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f_1(x)\ \cdot\ f_2(y)}{f_2(y)} = f_1(x)\,,$$

$$\psi(y|\,x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f_1(x)\ \cdot\ f_2(y)}{f_1(x)} = f_2(y)\,.$$

Очевидно, що подібний висновок про рівність відповідних умовних і безумовних розподілів двох незалежних випадкових величин можна зробити і в дискретному випадку.

Зауважимо також, що поняття *залежності випадкових величин* не можна змішувати зі звичною для нас у математиці функціональною залежністю. У разі існування функціональної залежності між величинами X і Y кожному значенню $X = x$ за певним законом відповідає одне і тільки одне значення $Y = y$. Якщо ж ми маємо справу із залежними випадковими величинами, то, в загальному випадку, знаючи значення однієї, можна тільки вказати *закон розподілу* іншої. Така залежність називається *ймовірнісною* (або *стохастичною*).

Контрольні запитання

1. Що називається законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини?
2. Що таке функція розподілу двовимірної випадкової величини?
3. Які властивості має функція розподілу двовимірної випадкової величини та який її геометричний зміст?
4. Наведіть формули обчислення числових характеристик дискретної та неперервної двовимірних випадкових величини.
5. Як обчислюються умовні числові характеристики дискретної та неперервної двовимірних випадкових величини?

7. Коваріація і коефіцієнт кореляції

Нехай маємо дві випадкові величини X та Y. Як встановити чи існує між ними зв'язок?

Перш за все, може існувати деяка ***функціональна*** залежність однієї величини від іншої. Наприклад, $y = f(x)$, де f – деяка функція з областю визначення X та множиною значень Y. Проте, не завжди ця функція має властивості, зручні для опису. Найпростішим є випадок, коли це деяка монотонна функція (лінійна, квадратична, показникова тощо). Тоді можна говорити, що ці величини залежні між собою, та вказати характер залежності. Проте це не завжди так. Для випадкових величин іноді важко встановити тип залежності. Тому цікавим буде встановлення факту зв'язку між ними. Це можна здійснити з допомогою ***теорії кореляції***, розглянувши лише одне число – коефіцієнт кореляції, яке вказує на міру зв'язку між величинами X та Y. Слово кореляція (лат. *correlatio* – співвідношення) означає наявність взаємозв'язку.

7.1. Лінійна кореляція

Нехай дано дві послідовності випадкових величин X та Y. Розглянемо їх як координати точок на площині. Побудуємо ці точки. Якщо точки розміщені хаотично (рис. 14 *а*), то між ними немає взаємозв'язку. Проте можливі випадки (рис. 14 *б, в*), коли можна провести деяку лінію, яка проходить поблизу кожної з точок, тобто сума відстаней від кожної з точок до цієї лінії мінімальна. Тоді така лінія називається ***апроксимаційною***.

Найпростіший випадок залежності між випадковими величинами буде тоді, коли ця лінія – пряма. Така пряма називається ***прямою регресії*** (Рис. 14 *г*), а її кутовий коефіцієнт називається ***коефіцієнтом регресії***. Випадки ***нелінійної регресії***, коли маємо не пряму регресії, а деяку криву, є складними і використовуються рідше.

У випадку лінійної залежності між величинами будемо розглядати лінійну кореляцію, яка описується за допомогою коефіцієнта кореляції.

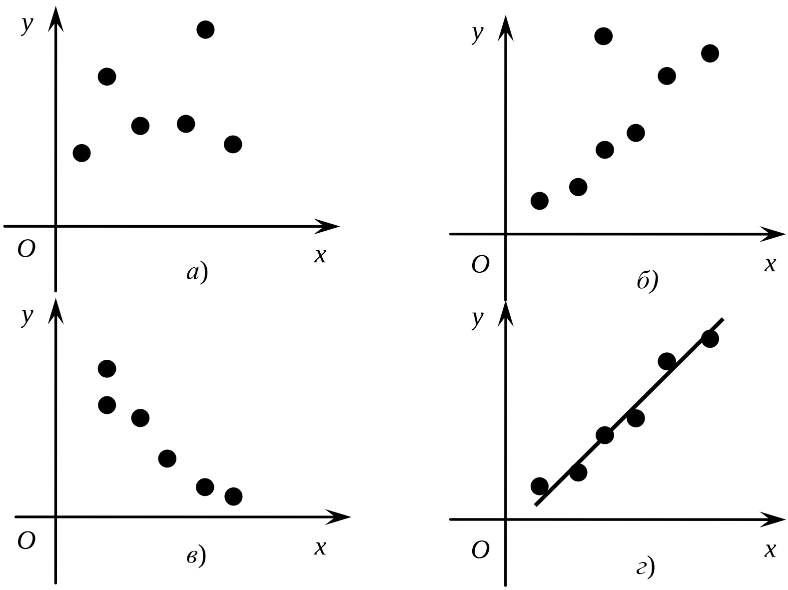


Рис. 14. Приклади послідовностей випадкових величин X та Y

Коваріацією (або *кореляційним моментом*) *двовимірної випадкової величини* (X, Y) *називають математичне сподівання добутку відхилень кожної з компонент від свого математичного сподівання*

$$COV(X, Y) = M[(X - M(X))\cdot(Y - M(Y))].$$

Зокрема, для дискретного випадку

$$COV(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(x_i - M(X)\right) \cdot \left(y_j - M(Y)\right) \cdot p_{ij} \ ,$$

або

$$COV(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} - M(X)\cdot M(Y),$$

а для неперервного

$$COV(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right) \cdot \left(y - M(Y)\right) \cdot f(x,y)\, dxdy \ ,$$

або

$$COV(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot f(x,y)\,dxdy - M(X)\cdot M(Y)\ .$$

Якщо X та Y незалежні випадкові величини, то коваріація $COV(X, Y)$ дорівнює нулю. Якщо коваріація випадкової величини (X, Y) відмінна від нуля, то компоненти X та Y є стохастично залежними випадковими величинами. Обернене твердження не справджується, тобто якщо X та Y залежні випадкові величини, то їх коваріація може дорівнювати нулеві, а може й не дорівнювати нулеві.

Коваріацію можна розглядати як міру залежності випадкових величин, які є компонентами двовимірної випадкової величини, однак вона враховує не тільки рівень залежності величин, а й їхнє розсіювання навколо точки $(M(X), M(Y))$ на площині. Тому для оцінки залежності між випадковими величинами X та Y використовують нормовану міру

$$\rho(X,Y)=\frac{COV(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}\ ,$$

яку називають ***коефіцієнтом лінійної кореляції або коефіцієнтом кореляції.***

Очевидно, що ***коефіцієнт лінійної кореляції незалежних випадкових величин дорівнює нулю.***

Дві випадкові величини називають ***некорельованими****, якщо коефіцієнт лінійної кореляції дорівнює нулю, і* ***корельованими*** *у протилежному випадку.*

Із незалежності двох величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості ще не випливає незалежність цих величин. У випадку нормального розподілу величин із некорельованості випливає їх незалежність.

Коефіцієнт лінійної кореляції задовольняє нерівність $|\rho(X, Y)| \leq 1$. Якщо коефіцієнт кореляції близький до 1, то випадкові величини X та Y сильно пов’язані між собою, тобто зі зростанням однієї величини зростає й інша (рис. 14 *б*). Зокрема, якщо $|\rho(X, Y)| = 1$, то величини X і Y лінійно залежні. Якщо коефіцієнт кореляції наближається до – 1, то випадкові величини контраваріантні, тобто зі зростанням однієї інша спадає (рис. 14 *в*). При коефіцієнті кореляції близькому до нуля можна стверджувати, що між величинами немає лінійного зв’язку (величини некорельовані) (рис. 14 *а*).

На відміну від коваріації, коефіцієнт лінійної кореляції не залежить від ступеня розсіювання випадкових величин і характеризує лише міру їхньої залежності.

Вивчення кореляції випадкових величин виділено в окремий напрямок – ***кореляційний аналіз***. Зауважимо, що вивчати взаємозв’язок можемо не тільки для близьких за походженням величин, а і для величин, що мають зовсім різну природу. Наявність кореляції може вказувати також на те, що обидві величини залежать від деякої третьої.

Прикладом корельованих величин може бути кількість пожеж, що виникають за добу, та середньодобова температура повітря.

Для практичних досліджень немає потреби у високому коефіцієнті кореляції. У деяких випадках цей коефіцієнт може бути і невисоким, проте свідчитиме про істотність зв’язку однієї величини з іншою.

Приклад. У продукції заводу брак через дефект α становить 3%, а через дефект β – 4,5%. Придатна продукція становить 95%. Знайти коефіцієнт кореляції дефектів α, β.

Введемо випадкові величини:

X – індикатор браку через дефект α,

Y – індикатор браку через дефект β.

Випадкові величини X, Y набувають значення 1, якщо є дефект та значення 0, якщо дефекту немає.

Запишемо закони розподілу випадкових величин X та Y:

$X = x_i$	0	1
$P(x_i)$	0,97	0,03

$Y = y_j$	0	1
$P(y_j)$	0,955	0,045

З умови задачі випливає, що

$$p_{11} = P\{X_1 = 0,\ Y_1 = 0\} = 0{,}95.$$

Запишемо закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) у вигляді таблиці

$X = x_i$	$Y = y_j$		$P(x_i)$
	0	1	
0	0,95		0,97
1			0,03
$P(y_j)$	0,955	0,045	1

Заповнюємо порожні клітинки

$$p_{12} = P\{X_1 = 0,\ Y_2 = 1\} = 0{,}97 - 0{,}95 = 0{,}02;$$
$$p_{21} = P\{X_2 = 1,\ Y_1 = 0\} = 0{,}955 - 0{,}95 = 0{,}005;$$
$$p_{22} = P\{X_2 = 1,\ Y_1 = 1\} = 0{,}03 - 0{,}005 = 0{,}025.$$

Таким чином,

$X = x_i$	$Y = y_j$		$P(x_i)$
	0	1	
0	0,95	0,02	0,97
1	0,005	0,025	0,03
$P(y_j)$	0,955	0,045	1

Знайдемо математичне сподівання випадкових величин X та Y відповідно:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot P(x_i) = 0 \cdot 0,97 + 1 \cdot 0,03 = 0,03;$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{2} y_j \cdot P(y_j) = 0 \cdot 0,955 + 1 \cdot 0,045 = 0,045.$$

Знайдемо математичне сподівання квадрату випадкових величин X та Y відповідно:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \cdot P(x_i) = 0^2 \cdot 0,97 + 1^2 \cdot 0,03 = 0,03;$$

$$M(Y^2) = \sum_{j=1}^{2} y_j^2 \cdot P(y_j) = 0^2 \cdot 0,955 + 1^2 \cdot 0,045 = 0,045.$$

Тоді дисперсія

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0,03 - (0,03)^2 = 0,0291;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 0,045 - (0,045)^2 = 0,042975.$$

Коваріацію знаходимо за формулою

$$COV(X,Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(x_i - M(X))(y_j - M(Y))\,p_{ij} =$$

$$= (0-0,03)(0-0,045)\cdot 0,95 + (0-0,03)(1-0,045)\cdot 0,02 +$$

$$+(1-0,03)(0-0,045)\cdot 0,005 + (1-0,03)(1-0,045)\cdot 0,025 =$$

$$= 0,03(0,045\cdot 0,95 - 0,955\cdot 0,02) + 0,97(-0,045\cdot 0,005 +$$

$$+0,955\cdot 0,025) = 0,02365.$$

Тоді коефіцієнт кореляції

$$\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}} = \frac{0,02365}{\sqrt{0,0291\cdot 0,042975}} \approx 0,669.$$

7.2. Коваріаційна матриця

Коваріаційною матрицею n-вимірного випадкового вектора $X = (X_1, X_2,\ldots, X_n)$ *називатимемо квадратну матрицю розмірності n, елементи якої дорівнюють* $COV(X_i, X_j)$.

Коваріаційна матриця симетрична (оскільки $COV(X_i, X_j) = COV(X_j, X_i)$), а елементами головної діагоналі є дисперсії відповідних компонент випадкового вектора. Справді,

$$COV(X_i, X_i) = M[(X_i - M(X_i))\,(X_i - M(X_i))] = M(X_i - M(X_i))^2 = D(X_i).$$

Оскільки коваріація двох незалежних компонент вектора дорівнює нулю, то коваріаційна матриця відображає структуру залежності компонент випадкового вектора *X*. Зокрема, якщо всі компоненти випадкового вектора стохастично незалежні, то коваріаційна матриця діагональна.

Контрольні запитання

1. Що називається коваріацією двовимірної випадкової величини?
2. Чому дорівнює коваріація вектора з незалежними компонентами?
3. Коли можна стверджувати, що компоненти випадкового вектора є стохастично залежними?
4. Як обчислюється коефіцієнт лінійної кореляції?
5. Що таке корельовані та некорельовані випадкові величини?
6. Які висновки щодо залежності випадкових величин можна зробити, обчисливши їх коефіцієнт кореляції?

8. Закон великих чисел

8.1. Нерівність Чебишова

Оскільки випадкова величина може набувати значень випадковим чином, то наперед визначити її значення неможливо. Поява того чи іншого значення залежить від багатьох умов. Але якщо розглянути велику кількість величин, то можливо спрогнозувати те чи інше явище. Це можна здійснити за допомогою ***закону великих чисел***. Цей закон базується на ***теоремах Чебишова*** та ***Бернуллі***.

Перша нерівність Чебишова: Якщо випадкова величина X може приймати лише невід'ємні значення і має скінченне математичне сподівання, тоді

$$P\ \ X \ge \varepsilon\ \ \le \frac{M(X)}{\varepsilon}, \text{ де } \varepsilon > 0.$$

<u>Приклад.</u> Середнє значення річної кількості опадів у даній місцевості дорівнює 55 см. Оцінити ймовірність того, що в цій місцевості випаде за рік не менше 175 см опадів.

За першою нерівністю Чебишова матимемо

$$P\ \ X \ge 175\ \ \le \frac{M(X)}{175} = \frac{55}{175} \approx 0,31\,.$$

Друга нерівність Чебишова: Нехай випадкова величина X має скінченне математичне сподівання і скінченну дисперсію. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$P\ \ |X - M(X)| < \varepsilon\ \ \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

<u>Приклад.</u> При визначенні курсу літака середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання дорівнює $2'$. Вважаючи математичне сподівання похибки вимірювання рівним нулю, оцінити ймовірність того, що похибка при вимірюванні курсу літака буде не меншою за $5'$.

З умови задачі відомо, що $\sigma = 2$, $M(X) = 0$. Тоді дисперсія $D(X) = \sigma^2 = 4$. Потрібно знайти $P(|X| > 5)$.

Використовуючи другу нерівність Чебишова, одержуємо

$$P\ \ |X - 0| < 5\ \ \ge 1 - \frac{4}{25} \Rightarrow P\ \ |X| < 5\ \ \ge \frac{21}{25}\,.$$

Відомо, що $P\ \ |X| \ge 5\ \ + P\ \ |X| < 5\ \ = 1$. Звідси

$$P(|X|\geq 5)=1-P(|X|<5)\leq 1-\frac{21}{25}=\frac{4}{25}=0{,}16 .$$

Таким чином, ймовірність того, що похибка при вимірюванні курсу літака буде не меншою за $5'$ дорівнює 0,16.

8.2. Теорема Чебишова

Теорема Чебишова. *Нехай X_1, $X_2, \dots$, X_n – попарно незалежні випадкові величини, дисперсії яких обмежені однією і тією ж сталою: $D(X_i)\leq C,\ i=\overline{1,n}$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right|\geq\varepsilon\right)=0 .$$

Наслідок. *Якщо виконуються умови теореми Чебишова і математичне сподівання випадкових величин однакове, тобто $M(X_i) = a$, $i=\overline{1,n}$, то*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-a\right|\geq\varepsilon\right)=0 \text{, або } \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-a\right|<\varepsilon\right)=1 .$$

Отже, з теореми Чебишова випливає, що якщо випадкових величин є велика кількість, то середнє значення перестає бути випадковим числом. На цьому базується використання при вимірюваннях замість істинного значення середньої величини.

8.3. Теорема Бернуллі

Теорема Бернуллі *Нехай проведено n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p, m – кількість появ події A (частота події) в n випробуваннях. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0 .$$

Послідовність випадкових величин X_1, $X_2, \dots$, $X_n, \dots$ називається ***збіжною за ймовірністю при*** $n\to\infty$ ***до випадкової величини*** *X, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n-X\right|<\varepsilon\right)=0 .$$

За теоремою Бернуллі можна зробити хибний висновок, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p$, тобто збіжності класичної ймовірності до статистичної немає. Проте збіжність за ймовірністю присутня, що видно з теореми Бернуллі.

Контрольні запитання

1. У чому полягає зміст закону великих чисел?
2. Сформулюйте нерівності Чебишова. Що можна з допомогою них оцінити?
3. Які умови теореми Чебишова щодо випадкових величин?
4. Чи вірна теорема Чебишова у випадку нескінченної кількості випадкових величин?
5. Що таке збіжність за ймовірністю?
6. Сформулюйте теорему Бернуллі.
7. Чи збігається класична ймовірність до статистичної?

Задачі до розділу І

1. Скількома способами можуть розміститись 7 чоловік у черзі до каси?
   Відповідь: 5040.
2. Скількома способами можна розсадити чотирьох курсантів на 25 місцях?
   Відповідь: 303600.
3. В ящику міститься 20 ламп, серед яких вісім браковані. Скільки разів з 20 ламп можна вийняти шість так, щоб серед них було дві браковані?
   Відповідь: 13860.
4. Вивчається десять предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять по три пари на один день, якщо один предмет займає не більше, ніж одну пару?
   Відповідь: 720.
5. Лотерея складається з 1000 білетів, серед яких 120 виграшних. Навмання виймається білет. Знайти ймовірність того, що він виграшний.
   Відповідь: 0,12.
6. В ящику міститься 10 однакових деталей, помічених номерами 1, 2, 3, ..., 10. Вийнято 6 деталей. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих деталей виявляться деталі з № 1 та № 2.
   Відповідь: $\frac{1}{3}$.
7. З ящика, в якому є 7 білих і 8 чорних куль, вийняли 2 кулі по одній без повернення. Знайти ймовірність того, що обидві кулі – білі.
   Відповідь: 0,2.
8. Пристрій містить п’ять елементів, з яких два неякісні. При ввімкненні пристрою вмикаються випадковим чином два елементи. Знайти ймовірність того, що ввімкненими виявляться якісні елементи.
   Відповідь: 0,3.
9. При дослідженні партії вогнегасників відносна частота справних вогнегасників дорівнює 0,9. Знайти число справних вогнегасників, якщо всього їх було перевірено 200 штук.
   Відповідь: 180.

10. На сигналізатор надходять сигнали з двох пристроїв, причому надходження кожного із сигналів рівноможливе в довільний момент проміжку часу довжиною 30 хв. Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менша за 15 хв. Знайти ймовірність того, що сигналізатор спрацює за 30 хв, якщо від кожного пристрою надійде по одному сигналу.
Відповідь: 0,75.

11. Для кожної з трьох телевізійних камер ймовірність того, що вона ввімкнена в даний час, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний час:
    а) увімкнена принаймні одна камера;
    б) увімкнені дві камери;
    в) увімкнені всі три камери;
    г) не ввімкнена жодна камера.
Відповідь: а) 0,936; б) 0,432; в) 0,216; г) 0,064.

12. Ведеться стрільба по літакові, вразливими частинами якого є два двигуни та кабіна пілота. Щоб вивести з ладу літак, досить уразити обидва двигуни разом або кабіну пілота. За даних умов стрільби ймовірність влучення в перший двигун $p_1 = 0{,}1$, у другий двигун $p_2 = 0{,}2$, у кабіну пілота $p_3 = 0{,}15$. Частини літака вражаються незалежно одна від одної. Знайти ймовірність того, що літак буде виведено з ладу.
Відповідь: 0,167.

13. На станцію зв’язку надійшло 20 телеграм, адресованих у чотири різних пункти (по п’ять у кожний пункт). З усіх телеграм вибираються навмання чотири. Знайти ймовірність того, що усі телеграми адресовані в один пункт.
Відповідь: 0,00431.

14. В скриньці міститься десять білих, сім чорних і три червоні кулі. Знайти ймовірність того, що принаймні дві з трьох вийнятих навмання куль будуть одного кольору.
Відповідь: $\frac{31}{38}$.

15. Радіолокаційна станція, спостерігаючи за двома об’єктами, може втратити зв’язок з першим об’єктом з ймовірністю 0,12, а з другим – 0,14. Знайти ймовірність того, що з обома об’єктами зв’язок не буде втрачено.
Відповідь: 0,7568.

16. Для повідомлення про аварію встановлено два незалежні сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізація спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює тільки один сигналізатор.
Відповідь: 0,14.

17. В електричному колі послідовно з'єднані три елементи, які працюють незалежно один від іншого. Ймовірності відмови першого, другого та третього елемента відповідно становлять: 0,1, 0,15 та 0,2. Знайти ймовірність того, що струму в колі не буде.
Відповідь: 0,388.

18. Для сіяння пшениці заготовлено насіння: 95% першого сорту, 3% другого сорту, 2% третього сорту. Ймовірність того, що насіння проросте, становить для першого сорту 0,5, для другого сорту – 0,2, а для третього – 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання висаджене насіння проросте.
Відповідь: 0,483.

19. На трьох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі, причому 30% на першій лінії, 25% – на другій та 45% – на третій. Ймовірність виготовлення стандартної деталі першою лінією дорівнює 0,99, другою – 0,988, третьою – 0,98. Виготовлені протягом доби деталі надходять до складу. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь не відповідає стандарту.
Відповідь: 0,015.

20. У трьох скринях маємо однакові деталі з різних заводів:
у першій – 20 стандартних та 5 нестандартних деталей;
у другій – 15 стандартних та 3 нестандартні деталі;
у третій –14 стандартних та 2 нестандартні деталі.
Із навмання взятої скрині навмання взято деталь, яка виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь вийняли з другої скрині.
Відповідь: $\frac{100}{301}$.

21. У рибалки є три улюблених місця, куди він приходить з однаковою ймовірністю. Ймовірність кльову на першому місці дорівнює $\frac{1}{3}$, на другому – $\frac{1}{2}$, на третьому – $\frac{1}{4}$. Рибалка закинув вудку у навмання вибраному місці і риба клюнула. Знайти ймовірність того, що рибалка закинув вудку у першому місці.

Відповідь: $\frac{4}{13}$.

22. Партія деталей виготовлена двома робітниками. Перший робітник виготовив $\frac{2}{3}$ партії, а другий – $\frac{1}{3}$ партії. Ймовірність браку для першого робітника дорівнює 1%, а для другого – 10%. Яка ймовірність того, що навмання вилучена деталь буде якісною? Яка ймовірність того, що ця деталь виготовлена першим робітником?
Відповідь: 0,96;   0,6875.

23. У родині десятеро дітей. Будемо вважати, що ймовірність народження хлопця дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що в родині:
   а) тільки хлопці чи тільки дівчата;
   б) половина хлопців і половина дівчат;
   в) чотири хлопці і шість дівчат;
   г) не більше як три хлопці;
   д) принаймні одна дівчина.

   Відповідь: а) $\frac{1}{1024}$; б) $\frac{252}{1024}$; в) $\frac{210}{1024}$; г) $\frac{176}{1024}$; д) $\frac{1023}{1024}$.

24. Ймовірність того, що на сторінці книжки можуть виявитись помилки, дорівнює 0,002. Перевіряється книжка, яка містить 500 сторінок. Знайти ймовірність того, що з помилками виявиться:
   а) 5 сторінок;
   б) від 3 до 5 сторінок.

   Відповідь: а) $\frac{1}{120e}$; б) $\frac{13}{60e}$.

25. Для одного баскетболіста ймовірність влучити м’ячем у корзину під час одного кидання дорівнює 0,4. Зроблено десять кидків. Знайти найімовірніше число влучень і відповідну ймовірність.
Відповідь: 4; $\approx 0,2508$.

26. Ймовірність хибного виклику пожежної команди 0,7. Яка ймовірність того, що серед 18 викликів хибних буде:
   а) 8;
   б) від 6 до 9;
   в) хоча б один;
   г) не менше 16.

   Обчислити найімовірніше число хибних викликів.
   Відповідь: а) $\approx 0,0149$; б) $\approx 0,1333$; в) $\approx 1-(0,3)^{18}$; г) $\approx 0,05995$;

найімовірніше число хибних викликів дорівнює 13.

27. Ймовірність того, що навмання куплений електричний прилад за час гарантійного терміну вийде з ладу, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що з 1000 приладів за час гарантійного терміну вийде з ладу рівно 2 прилади.
Відповідь: 0,22404.

28. Ймовірність “перебою” у роботі пожежного насоса при кожному застосуванні дорівнює 0,01. Його було застосовано п’ять разів. Знайти ймовірність того, що трапиться:
а) два “перебої”;
б) не більше одного “перебою”.
Відповідь: а) $\approx 0,00097$; б) $\approx 0,999$.

29. Ймовірність спотворення кожного повідомлення, що передається по каналу зв’язку однакова і дорівнює 0,01. По каналу зв’язку передано чотири повідомлення. Яка ймовірність того, що при цьому буде спотворено:
а) рівно два повідомлення;
б) не більше одного повідомлення.
Відповідь: а) $\approx 0,0006$; б) $\approx 0,9994$.

30. По мішені здійснено три постріли. Ймовірність влучення в мішень внаслідок першого пострілу 0,1, другого – 0,2, третього – 0,3. Знайти закон розподілу кількості влучень при трьох пострілах. Побудувати графік функції розподілу.

31. Зі скрині, в якій міститься 20 стандартних деталей і 4 нестандартних, виймають 5 деталей. Знайти закон розподілу кількості вийнятих нестандартних деталей.

32. На шляху руху автомобіля 6 світлофорів, кожен з яких дозволяє або забороняє рух автомобіля з ймовірністю 0,5. Знайти закон розподілу і побудувати функцію розподілу випадкової величини X – кількості світлофорів, які автомобіль минув без зупинки. Чому дорівнює математичне сподівання та дисперсія цієї випадкової величини?
Відповідь: $M(X)=\frac{63}{64}$; $D(X)=\frac{7359}{4096}$.

33. В партії з 15-и виробів є шість бракованих. Навмання вибирають чотири вироби для перевірки якості. Знайти закон розподілу і побудувати функцію розподілу випадкової величини X – кількості бракованих виробів серед відібраних. Чому дорівнює математичне сподівання та дисперсія цієї випадкової величини?

Відповідь: $M(X) = 1{,}6$; $D(X) = 0{,}96$.

34. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X, яка може приймати лише два значення: x_1 з ймовірністю 0,4 та x_2 ($x_1 < x_2$), якщо $M(X) = 3{,}2$, $D(X) = 0{,}96$.

35. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом, якщо $n = 30$, $p = 0{,}1$.
Відповідь: $M(X) = 3$; $D(X) = 2{,}7$.

36. Випадкова величина X розподілена за законом Пуассона з параметрами $a = 1{,}7$, випадкова величина Y розподілена за тим же законом з параметром $b = 2{,}1$. Ці випадкові величини незалежні. Знайти математичне сподівання та дисперсію їх суми.
Відповідь: $M(X + Y) = 3{,}8$; $D(X + Y) = 3{,}8$.

37. Задана щільність ймовірності величини X

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sin 3x, & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right], \\ 0, & x \notin \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу та знайти ймовірність того, що X набуде значення із $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 3x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$

$P\left(\dfrac{\pi}{6} < X < \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

38. Випадкова величина має щільність $f(x) = \dfrac{a}{e^x + e^{-x}}$. Знайти:

а) сталу a;
б) функцію розподілу $F(x)$;
в) обчислити $P\{X \ge 1\}$.

Відповідь: а) $a = \dfrac{2}{\pi}$; б) $F(x) = \dfrac{2}{\pi} arctg\, e^x$;

в) $P(X \geq 1) = 1 - \dfrac{2}{\pi} arctg\ e$.

39. Функція розподілу випадкової величини X задана у вигляді

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^3, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a та щільність розподілу випадкової величини X.

Відповідь: a = 1; $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in\ 0,1\ , \\ 0, & x \notin\ 0,1\ . \end{cases}$

40. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Відповідь: $D(X) = \dfrac{4}{3}$; $\sigma(X) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

41. За яким законом розподілена випадкова величина X та чому дорівнюють її математичне сподівання та дисперсія, якщо щільність ймовірності цієї величини має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Відповідь: $M(X) = \dfrac{1}{2}$; $D(X) = \dfrac{1}{4}$.

42. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, розподіленої рівномірно в інтервалі (3; 9).

Відповідь: $M(X)$ = 6; $D(X)$ = 3; $\sigma(X) = \sqrt{3}$.

43. Математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює 3, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 2. Записати диференціальну функцію випадкової величини X.

Відповідь: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$.

44. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, яка розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), що дорівнює 50 мм. Фактично довжина виготовлених деталей не менша за 32 мм і не більша за 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина взятої деталі менша за 40 мм.
Відповідь: $P(32 < X < 40) \approx 0,0026$.

45. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X прийме значення з інтервалу (15; 25).
Відповідь: $P(15 < X < 25) = 0,6826$.

46. Верстат-автомат виготовляє валики, причому контролюється їх діаметр X. Вважаючи, що X – нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням a = 10 мм і середнім квадратичним відхиленням σ = 0,1 мм, знайти інтервал, в якому з ймовірністю 0,9973 будуть міститися діаметри виготовлених валиків.
Відповідь: $9,7 < X < 10,3$.

47. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням a = 10 і середнім квадратичним відхиленням σ = 5. Знайти інтервал, в який з ймовірністю 0,9973 потрапляє випадкова величина X в результаті випробування.
Відповідь: $-4,9 < X < 24,9$.

48. Двовимірна випадкова величина (X, Y) має щільність ймовірності $f(x,y) = \frac{A}{\pi^2(16+x^2)\cdot(25+y^2)}$. Знайти величину A та функцію розподілу $F(x, y)$, а також ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник з вершинами $A(1;1)$, $B(\sqrt{3};1)$, $C(1;0)$, $D(\sqrt{3};0)$.
Відповідь: A = 20; $F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(arctg\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(arctg\frac{y}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$;

$$P(1 \le X \le \sqrt{3}; 0 \le Y \le 1) = \frac{1}{\pi^2}\left(arctg\frac{\sqrt{3}}{4} - arctg\frac{1}{4}\right)\cdot arctg\frac{1}{5}.$$

49. Дано таблицю, що визначає закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y)

$X = x_i$	$Y = y_j$		
	20	40	60
10	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	0
20	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
30	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$

Знайти математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$, коефіцієнт кореляції $\rho(X, Y)$.

Відповідь: $M(X) = 22$; $M(Y) = 41$; $D(X) = 56$; $D(Y) = 259$; $\rho(X, Y) \approx 0{,}5646$.

50. Дві скрині містять в собі по шість куль. У першій скрині лежать одна куля з № 1, дві кулі з № 2, три кулі з № 3. У другій скрині є дві кулі з № 1, три кулі з № 2, одна куля з № 3. Нехай X – номер кулі, вийнятої з першої скрині, Y – номер кулі, вийнятої з другої скрині. З кожної скрині вийняли по одній кулі. Скласти таблицю для визначення закону розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y). Знайти математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$, коваріацію $COV(X, Y)$ та коефіцієнт кореляції $\rho(X, Y)$.

Відповідь: $M(X) = \frac{7}{3}$; $M(Y) = \frac{11}{6}$; $D(X) = \frac{5}{9}$; $D(Y) = \frac{17}{36}$; $COV(X, Y) = 0$; $\rho(X, Y) = 0$.

РОЗДІЛ ІІ. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Вступ

Першопочатково статистика була “державною арифметикою”. Слово “статистика” походить від латинського status – держава. З давнини статистику використовували для того щоб інформувати правителів країн про обсяги податків, які можна зібрати з підлеглих, або про кількість солдатів, на яких можна розраховувати у воєнний час. Статистика стала наукою лише у XVII ст. Її засновниками вважаються Джон Граунт (1620-1674 рр.) та сер Уільям Петті (1623-1687 рр). З розвитком капіталізму статистичними даними стали цікавитися не тільки державні діячі, але й капіталісти. Для обробки даних використовувалися все більш складні математичні розрахунки, при цьому зростала користь від їх застосування, наприклад, у страховій справі. Математична статистика поступово розвинулась в самостійну науку. Своїм розвитком вона зобов’язана П.Л. Чебишову, А.А. Маркову, О.М. Ляпунову, а також К. Гаусу, Ф. Гальтону, К. Пірсону та іншим. У XX ст. найбільший вклад у математичну статистику зробили В.І. Романовський, Е.Е. Слуцький, А.Н. Колмогоров, Стьюдент (псевдонім У. Госсета), Е. Пірсон, Ю. Нейман, А. Вальд, А.В. Скороход, В.С. Королюк та інші вчені.

Дж. Граунт

У. Петті

Методи математичної статистики ефективно використовують при розв’язанні багатьох наукових, технічних та економічних задач науки, організації технологічного процесу, планування, управління та ціноутворення.

Сучасна ***математична статистика – це наука про ухвалення рішень в умовах невизначеності***.

Вкажемо ***основні задачі***, які розв’язує математична статистика:

– вказати способи збору та групування (якщо даних дуже багато) статистичних відомостей;

– визначити закон розподілу випадкової величини або системи випадкових величин за статистичними даними;
– визначити невідомі параметри розподілу;
– перевірити правдоподібність припущень про закон розподілу випадкової величини, про форму зв'язку між випадковими величинами або про значення параметра, який оцінюють.

Можна сказати, що основна задача математичної статистики – це розробка методів аналізу статистичних даних залежно від мети дослідження.

1.Основні поняття математичної статистики

1.1. Джерела даних у статистиці

Дослідники і менеджери отримують дані, необхідні для прийняття рішення, в основному з трьох джерел:

- вибіркові дослідження,
- спеціально поставлені експерименти,
- дані, які є результатом повсякденної роботи.

Розглянемо приклади застосування вищезгаданих джерел.

При вибірковому дослідженні засобами збирання даних вибірки можуть бути індивідуальні опитування (інтерв'ю), опитування поштою, телефонні інтерв'ю та інше. Наприклад, у ВНЗ проводяться так звані «зрізи» знань, коли для вибраної групи студентів проводиться контрольна робота з певної дисципліни. За результатами виконання цієї роботи можна робити висновок про загальний рівень підготовки фахівців у ВНЗ, про об'єктивність оцінювання знань та ефективність методик викладання.

Найчастіше джерелом даних є дані, які збираються у повсякденній, рутинній роботі.

<u>Приклад.</u> Нормативно - технічний відділ фіксує інформацію за кожним фактом пожежі. В подальшому отримані дані аналізують з метою збільшення ефективності гасіння пожеж, виявлення найбільш розповсюджених причин виникнення пожежі, для оптимізації функціонування пожежних підрозділів.

Іншим прикладом джерела такого роду даних є різноманітні офіційні джерела статистичних даних.

<u>Приклад.</u> Книга: «Статистичний щорічник України 2010», сайт <u>http://www.ukrstat.gov.ua/</u>

Джерела даних бувають ***первинними і вторинними.***

Первинні дані збираються спеціально для статистичного дослідження. Для цих даних є відомості про методи збирання, точність даних та ін.

Вторинними є дані, що використовуються у статистиці, але спочатку збиралися для інших цілей.

Очевидно, що рутинні записи обліку успішності, дані про пацієнтів лікарні, про діяльність фірм, офіційні статистичні звіти є вторинними даними.

1.2. Генеральна та вибіркова сукупності

Нехай потрібно вивчити сукупність об’єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки, яка характеризує ці об’єкти. Кожен об’єкт, який спостерігають, має декілька ознак. Розглядаючи лише одну ознаку кожного об’єкта, ми припускаємо, що інші ознаки рівноправні, або що множина об’єктів однорідна.

Такі множини однорідних об’єктів називають ***статистичною сукупністю.***

Наприклад, якщо досліджують партію деталей, то якісною ознакою може бути стандартність або нестандартність кожної деталі, а кількісною ознакою – розмір деталі. Кількісні ознаки бувають ***неперервними*** та ***дискретними.***

Зрозуміло, що повний опис закону розподілу випадкової величини X можна отримати, з’ясувавши значення ознаки для всіх без винятку представників даної статистичної сукупності. В окремих ситуаціях так і роблять: наприклад, дані про поділ мешканців тієї чи іншої країни щодо статі, віку і т.д. отримують за результатами загальних переписів населення, які проводяться один раз на кілька десятиліть. Але найчастіше дослідження всієї сукупності замінюють дослідженням невеликої (до того ж вибраної навмання) її частини. Таку частину генеральної сукупності називають вибіркою.

Вибірковою сукупністю (***вибіркою***) *називають сукупність випадково взятих об’єктів.*

Генеральною *називають* ***сукупність*** *об’єктів, з яких зроблено вибірку.*

Об’ємом сукупності (***вибіркової або генеральної***) *називають кількість об’єктів цієї сукупності.*

Наприклад, якщо з 1000 курсантів для аналізу залишкових знань з вищої математики взято 50 чоловік, тоді об’єм генеральної сукупності $N = 1000$, а об’єм вибірки $n = 50$.

Вибірку можна ефективно використовувати для вивчення відповідної ознаки генеральної сукупності лише тоді, коли дані вибірки вірно відображають цю ознаку. Коротко ця умова формулюється таким чином – вибірка повинна бути *репрезентативною*, тобто *представницькою*.

Вибірка є ***репрезентативною****, якщо*

- *кожен елемент генеральної сукупності може потрапити у вибірку з однаковою ймовірністю,*
- *усі об’єкти, які потрапили у вибірку, вибрані випадково* (*мають однакову ймовірність потрапити у вибірку*).

1.3. Способи відбору

У практичній діяльності використовують різноманітні способи відбору об'єктів із генеральної сукупності. Усі способи відбору можна поділити на два види:

1. Відбір, який не потребує розділення генеральної сукупності на частини. До цього виду вибору відносять:
   - простий випадковий безповторний відбір;
   - простий випадковий повторний відбір.
2. Відбір, при якому генеральна сукупність розділяється на частини (розшарований випадковий відбір). До цього виду вибору відносять:
   - типовий відбір;
   - механічний відбір;
   - серійний відбір.

Типовим *називають відбір, при якому об'єкти відбирають не з усієї генеральної сукупності, а лише з її типових частин.* Наприклад, якщо вироби виготовлені на різних верстатах, то відбір проводять лише з виробів окремо для кожного верстата.

Типовий відбір доцільно використовувати тоді, коли однакові вироби виготовляють на верстатах, серед яких є більш та менш досконалі, або у випадку виготовлення однакових виробів різними підприємствами.

Механічним *називають відбір, при якому генеральна сукупність механічно поділяється на стільки частин, скільки має бути об'єктів у вибірці.* З кожної частини випадковим чином відбирають один об'єкт. Наприклад, якщо потрібно перевірити стан 25% усіх наявних вогнегасників на підприємстві, то відбирають кожен четвертий. Щоб механічний відбір був репрезентативним, треба враховувати специфіку об'єктів, що досліджуються.

Серійним *називають відбір, при якому об'єкти із генеральної сукупності відбирають не по одному, а серіями, які і досліджують.* Серійний відбір використовують тоді, коли ознака, яку досліджують, мало змінюється у різних серіях.

При дослідженнях іноді використовують ***комбінований відбір***. Наприклад, спочатку поділяють генеральну сукупність на серії однакового об'єму, випадковим чином відбирають декілька серій і, нарешті, з кожної серії випадковим чином беруть окремі об'єкти.

1.4. Організація даних: статистичний розподіл вибірки

Дані у статистиці, отримані за допомогою спеціальних досліджень або із звичайних робочих (рутинних) записів, надходять до дослідника чи менеджера у вигляді неорганізованої маси, незалежно від того, чи є вони вибірковими даними, чи даними з генеральної сукупності. У математичній статистиці замість слова “*дані*” вживається термін “*варіанти*”. Числову характеристику кожної варіанти при цьому називають *ознакою.*

Нехай з генеральної сукупності зроблено вибірку значень x_1, x_2,…, x_n величини *X*. Цю сукупність значень випадкової величини *X* часто називають ***статистичним рядом***, останній відіграє роль вхідного числового матеріалу, який підлягає подальшій обробці та аналізу. Першим етапом обробки статистичного ряду є впорядкування варіант, тобто побудова ***варіаційного ряду***. Його отримують з елементів наявної вибірки, розмістивши x_i ($i = \overline{1,n}$) у порядку зростання (спадання) їх значень.

Приклад. Вибірка суми збитків (у тис. грн) від 100 пожеж, що сталися у м. Львові наведена у таблиці :

0,20	0,20	1,10	3,00	0,58	1,50	1,00	5,00	0,30	6,00
0,20	1,00	0,47	0,60	0,80	1,00	1,00	0,20	1,00	0,70
0,00	0,00	0,20	0,80	0,20	1,30	0,00	0,60	3,00	0,00
0,70	0,70	3,86	18,50	0,00	18,00	0,00	8,00	10,00	2,00
0,50	0,00	8,62	1,00	0,30	1,25	5,00	1,00	1,00	0,50
1,00	8,77	2,00	0,40	0,12	0,95	1,00	3,00	0,40	0,90
0,85	0,25	1,10	2,50	2,30	1,50	47,00	13,00	5,00	0,00
2,00	2,00	1,05	0,00	0,20	0,60	0,40	0,45	0,00	2,00
0,30	0,25	0,80	4,50	0,20	2,30	5,00	7,00	1,00	2,00
0,30	1,00	2,00	1,00	1,00	2,50	1,00	3,00	1,50	1,50

У нашому прикладі ознакою є число, що виражає суму збитків. Отже, у таблиці наведено 100 значень варіант. Розмістимо дані таблиці у порядку зростання:

0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,12	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,25
0,25	0,30	0,30	0,30	0,30	0,40	0,40	0,40	0,45	0,47
0,50	0,50	0,57	0,60	0,60	0,60	0,70	0,70	0,70	0,80
0,80	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

1,05	1,10	1,10	1,25	1,30	1,50	1,50	1,50	1,50	2,00
2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,30	2,30	2,50	2,50
3,00	3,00	3,00	3,00	3,80	4,50	5,00	5,00	5,00	5,00
6,00	7,00	8,00	8,62	8,77	10,00	13,00	18,00	18,50	47,00

*Варіанти, що записані до таблиці у зростаючому (спадному) порядку, називають **варіаційним рядом.***

Тобто, остання наведена таблиця є варіаційним рядом, який налічує 100 варіант. Після упорядкування можна отримати більше інформації, наприклад, про межі зміни збитків.

Наступний етап обробки вихідного статистичного ряду – побудова ***статистичного*** (***емпіричного***) ***закону розподілу***. Форма його запису залежить від характеру досліджуваної випадкової величини X.

Нехай X – дискретна випадкова величина. Тоді найбільш природною формою статистичного закону розподілу вибірки є опис за допомогою ***згрупованого варіаційного ряду***.

Нехай у вибірці із m різних варіант $x_1, x_2, ..., x_m$ ознака X прийняла n_1 разів значення x_1, n_2 разів значення x_2, ..., n_m разів значення x_m.

*Додатне число, що вказує, скільки разів та чи інша варіанта зустрічається у статистичному ряді, називається **частотою.***

Зауважимо, що сума усіх частот повинна дорівнювати об’єму вибірки $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.

Відносною частотою *називається відношення частоти до об’єму вибірки* $w_i = \dfrac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,m}$. Очевидно, $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$.

Дискретним статистичним розподілом вибірки *називається відповідність між варіантами та їх частотами або відносними частотами.*

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати у формі таблиць:

– *дискретний статистичний розподіл частот*:

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_m
$\boldsymbol{n_i}$	n_1	n_2	...	n_m

– *дискретний статистичний розподіл відносних частот*:

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_m
$\boldsymbol{w_i}$	w_1	w_2	...	w_m

Приклад. Для вивчення потреб у певних розмірах взуття власник магазину спостерігає, які розміри взуття продано протягом дня: 40, 35, 37, 39, 40, 41, 36, 42, 40, 39, 36, 43, 43, 41, 38, 37, 36, 42, 40, 38.

Статистичний розподіл цієї вибірки (розподіл частоти розміру взуття) буде мати такий вигляд

Розмір взуття x_i	35	36	37	38	39	40	41	42	43
Кількість n_i	1	3	2	2	2	4	2	2	2

Сума частот (другий рядок) має дорівнювати об'єму вибірки. В нашому випадку було продано 20 пар взуття, тобто $n = 20$. Дійсно: 1+3 + 2 + 2 + 2 + 4+ 2 + 2 + 2 = 20.

Подальший крок в обробці даних, що призводить до суттєвого спрощення дослідження, є їх згрупування.

Для цього весь діапазон зміни ознаки від найменшої ($x_{\min}$) до найбільшої ($x_{\max}$) розбивають на певне число інтервалів (частіше однакової довжини) $[z_1, z_2],\ldots,(z_{m-1}, z_m]$ і збирають в окремі групи елементи сукупності, для яких величина X набуває значень у кожному з проміжків. Кожний інтервал називається *класом інтервалів* або *класом*.

Частота n_i події $X \in (z_i, z_{i+1}]$ обчислюється як число дослідів, в яких значення випадкової величини X потрапило в i-ий проміжок, а відносна частота цієї події $w_i = \dfrac{n_i}{n}$.

В результаті утворюється ***інтервальний варіаційний ряд***. При цьому частоти відповідають вже не окремому значенню ознаки, як у випадку дискретного ряду, а всьому інтервалу.

Інтервальним статистичним розподілом (***інтервальним варіаційним рядом***) ***вибірки*** *називається відповідність між проміжками варіаційного ряду та їх частотами або відносними частотами.*

Інтервальний статистичний розподіл вибірки, як і дискретний, також записують у формі таблиць.

Інтервальним варіаційним рядом можна задати розподіл як неперервної ознаки, так і дискретної. Для вибору найбільш оптимальної довжини інтервалу, тобто при якій варіаційний ряд буде достатньо компактним і не втратить основних особливостей явища, яке вивчається, рекомендують формулу:

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,2 \cdot \lg n},$$

де $x_{\max} - x_{\min}$ – різниця між найбільшим і найменшим значенням ознаки, n – кількість варіант в статистичній сукупності (обсяг вибірки).

Довжини інтервалів необов'язково брати однаковими, трапляються випадки, коли на тих ділянках числової осі, де спостережувані значення розміщені густіше, зручніше брати інтервали більш вузькими, а там де рідше, – більш широкими (або ж об'єднати два чи більше рівних за довжиною проміжків в один). Початок першого проміжку z_0 і кінець останнього проміжку z_m не обов'язково збігаються з, відповідно, $x_{\min}$ і $x_{\max}$ вимагається лише, щоб $z_1 < x_{\min}$ і $z_m > x_{\max}$.

Так, для даних з прикладу на стор. 102 отримаємо такий інтервальний статистичний розподіл

Збитки (у тис. грн.)	[0; 0,5]	(0,5; 1]	(1; 2]	(2; 3]	(3; 5]	(5; 10]	> 10
Частота n_i	32	28	16	8	6	6	4

Статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно полігоном або гістограмою частот (відносних частот).

Полігон розподілу вибірки використовується для зображення як дискретних, так і інтервальних варіаційних рядів, а гістограма – лише для інтервальних рядів.

Полігоном частот *називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки* $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$,..., $(x_m; n_m)$ *координатної площини* (*рис. 15*).

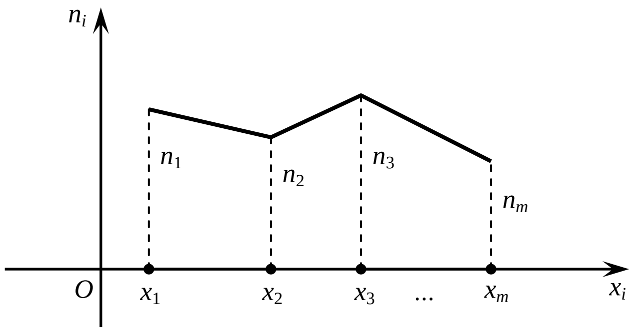


Рис. 15. Полігон частот дискретного статистичного розподілу

Полігоном відносних частот *називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки* $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$,..., $(x_m; w_m)$ (*рис. 16*).

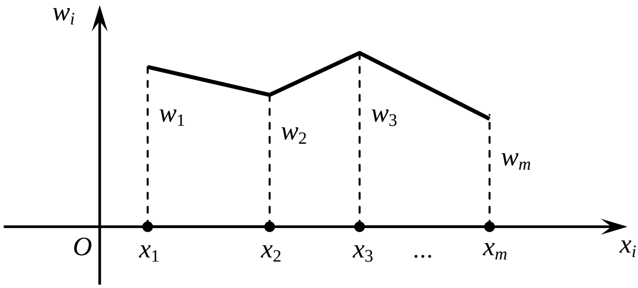


Рис. 16. Полігон відносних частот дискретного статистичного розподілу

Гістограмою частот *називається східчаста фігура, яка складена з прямокутників, основами яких є проміжки* $(z_i; z_{i+1})$*, а їх висоти* $h_i = \dfrac{n_i}{z_{i+1} - z_i}$ (*щільність частоти*).

Гістограмою відносних частот *називається східчаста фігура, яка складена з прямокутників, основами яких є частинні проміжки* $(z_i; z_{i+1})$*, а їх висоти* $h_i = \dfrac{w_i}{z_{i+1} - z_i}$ (*щільність відносної частоти*) *(рис. 17).*

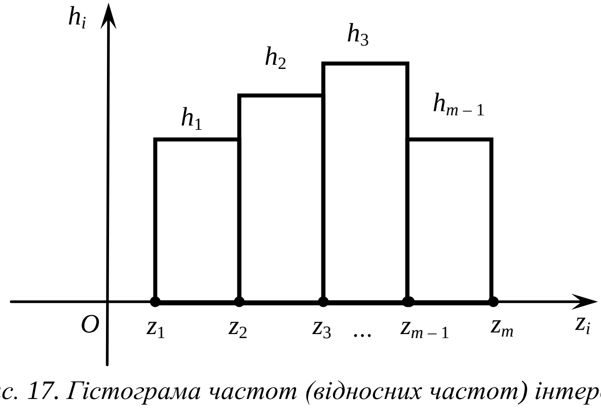


Рис. 17. Гістограма частот (відносних частот) інтервального статистичного розподілу

Від способу обрання ширини інтервалів залежить виразність гістограми. Якщо ширина досить мала, то гістограма містить багато випадкового, якщо – велика, то в гістограмі зникають індивідуальні особливості.

Приклад. Інтервальний статистичний розподіл часу виклику пожежних підрозділів може мати такий вигляд:

Інтервал, год.	0 – 3	3 – 6	6 – 9	9 – 12	12 – 15	15 – 18	18 – 21	21 – 24
К-сть виїздів n_i	5	4	0	3	7	10	12	15
$h_i = \dfrac{n_i}{z_{i+1} - z_i}$	1,7	1,3	0	1	2,3	3,3	4	5

Для заданого інтервального статистичного розподілу побудуємо гістограму частот (рис. 18).

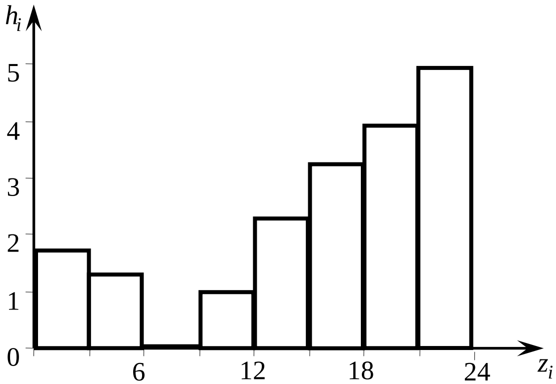


Рис. 18. Гістограма частот години виклику пожежних підрозділів

Для побудови полігону частот інтервального статистичного розподілу над серединою кожного інтервалу варіант відкладається точка на висоті $h_i = \dfrac{n_i}{z_{i+1} - z_i}$, що відповідає частоті цього інтервалу.

Після цього точки сполучаються відрізками. Таку ламану називають *полігоном щільності частот* (щільності відносних частот), який є приблизним зображенням функції щільності розподілу ймовірностей генеральної сукупності (рис. 19).

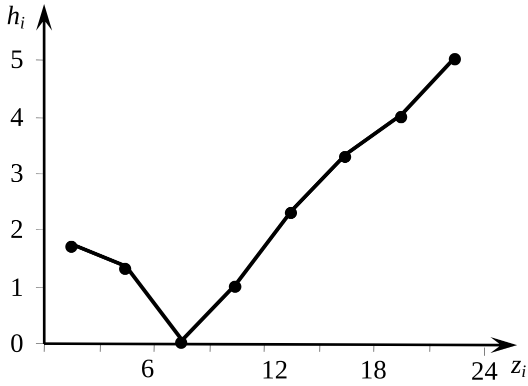


Рис. 19. Полігон щільності частот

1.5. Емпірична функція розподілу

Нагадаємо, що *функція розподілу* $F(x)$ випадкової величини X визначається рівністю

$$F(x) = P(X < x),$$

тобто функція розподілу $F(x)$ дорівнює ймовірності події $X < x$. Її називають ще *теоретичною функцією розподілу* випадкової величини X.

Позначимо через $\tilde{n}(x)$ суму частот тих значень випадкової величини X, які менші за дійсне число x.

Емпіричною функцією розподілу *$F^*(x)$ випадкової величини X називається функція, яка для кожного дійсного числа x дорівнює відношенню $\tilde{n}(x)$ до об'єму вибірки n, тобто:*

$$F^*(x) = \frac{\tilde{n}(x)}{n}.$$

Отже, емпірична функція розподілу виражає для кожного дійсного числа x відносну частоту події $X < x$, тобто $F^*(x) = w_n\ (X < x)$.

Приклад. За результатами екзамену з вищої математики серед 50 курсантів другого курсу побудовано такий дискретний статистичний розподіл відносних частот

Оцінка	0	2	3	4	5
Відносна частота	0,06	0,12	0,44	0,26	0,12

Побудувати емпіричну функцію розподілу та її графік.

Користуючись означенням емпіричної функції розподілу, отримаємо аналітичний запис функції $F^*(x)$:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}06, & 0<x\le 2,\\ 0{,}06+0{,}12=0{,}18, & 2<x\le 3,\\ 0{,}06+0{,}12+0{,}44=0{,}62, & 3<x\le 4,\\ 0{,}06+0{,}12+0{,}44+0{,}26=0{,}88, & 4<x\le 5,\\ 0{,}06+0{,}12+0{,}44+0{,}26+0{,}12=1, & x>5.\end{cases}$$

Графік отриманої емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ зображено на рис. 20.

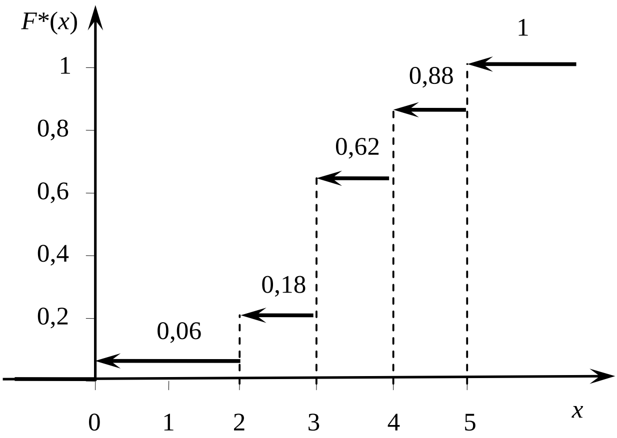


Рис. 20. Графік емпіричної функції розподілу

Якщо маємо у своєму розпорядженні згрупований інтервальний статистичний ряд, то можемо лише наближено побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$. За значення x, для яких обчислюється $F^*(x)$, природно взяти межі частинних проміжків. У всіх інших точках $F^*(x)$ визначається за допомогою лінійного інтерполювання. Це означає, що геометрично $F^*(x)$ буде зображена неперервною ламаною лінією (рис. 21), яка з’єднує послідовно точки $(x_i, \frac{\tilde{n}(x_i)}{n})$ і записується у вигляді

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ \dfrac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} w_1, & x_1 < x \le x_2, \\ \dfrac{(x - x_2)}{x_3 - x_2} w_2 + w_1, & x_2 < x \le x_3, \\ \dfrac{(x - x_3)}{x_4 - x_3} w_3 + w_1 + w_2, & x_3 < x \le x_4, \\ \dots \\ 1, & x > x_m. \end{cases}$$

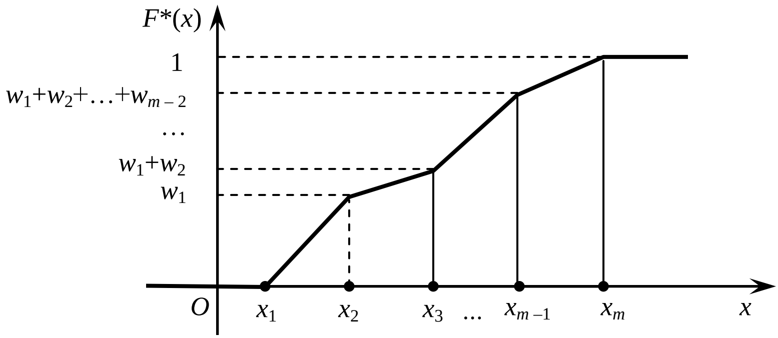


Рис. 21. Графік емпіричної функції інтервального статистичного розподілу F(x)*

Приклад. Для аналізу успішності з вищої математики на факультеті вибрано 30 студентів та записано їх середній бал:

2,42; 3,24; 4,18; 3,80; 3,05; 5,00; 4,25; 3,55; 4,05; 2,35;
2,75; 3,88; 4,20; 4,35; 3,36; 2,80; 3,60; 3,75; 4,80; 4,20;
3,15; 3,45; 3,45; 5,00; 4,00; 3,25; 3,90; 4,75; 4,00; 4,70.

Записати інтервальний статистичний розподіл, побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу.

Оскільки значення варіант знаходяться між 2 і 5, розіб’ємо цей інтервал на інтервали шириною 1 та обчислимо частоти потрапляння в ці інтервали значень варіант. Результати запишемо у таблицю:

$z_i..z_{i+1}$	[2, 3]	(3, 4]	(4, 5]
n_i	4	15	11

Гістограма частот буде мати такий вигляд, як на рис. 22.

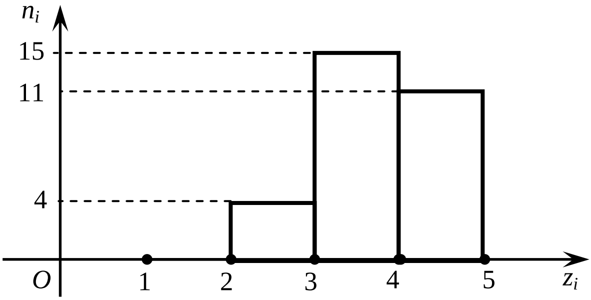


Рис. 22. Гістограма частот інтервального статистичного розподілу

Емпірична функція розподілу буде такою:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \dfrac{(x-2)}{1}\cdot\dfrac{4}{30}, & 2<x\le 3,\\ \dfrac{(x-3)}{1}\cdot\dfrac{15}{30}+\dfrac{4}{30}, & 3<x\le 4,\\ \dfrac{(x-4)}{1}\cdot\dfrac{11}{30}+\dfrac{4}{30}+\dfrac{15}{30}, & 4<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Після обчислень ця функція набуде вигляду:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \dfrac{2}{15}x - \dfrac{4}{15}, & 2 < x \le 3, \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{41}{30}, & 3 < x \le 4, \\ \dfrac{11}{30}x - \dfrac{25}{30}, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Графік емпіричної функції заданого інтервального розподілу має такий вигляд, як на рис. 23.

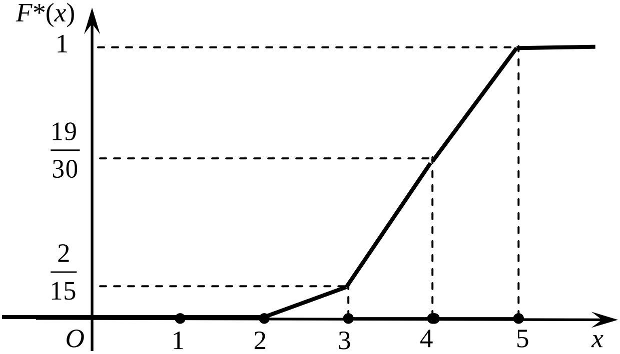


Рис. 23. Емпірична функція інтервального статистичного розподілу

Контрольні запитання

1. Що таке генеральна сукупність та вибірка з генеральної сукупності?
2. Що таке об’єм вибірки?
3. Вкажіть способи одержання вибірок.
4. Що таке варіаційний ряд? З яких елементів він складається?
5. Які є види варіаційних рядів? Як вони зображаються?
6. Що таке емпірична функція розподілу?
7. Що таке полігон частот (полігон відносних частот)? Як його будувати? Як задається інтервальний статистичний розподіл вибірки?
8. Як будувати гістограму частот (відносних частот)?

2. Числові характеристики варіаційних рядів

Для аналізу та порівняння вибірок використовують низку числових характеристик. Оскільки їх обчислення дещо різниться для дискретного та інтервального статистичних розподілів, розглянемо ці характеристики для кожного виду окремо.

2.1. Числові характеристики дискретного статистичного розподілу

До основних числових характеристик, які характеризують дискретний статистичний розподіл, відносять вибіркове середнє $\bar{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\text{В}}$, моду *Mo**, медіану *Me**, розмах *R* та коефіцієнт варіації *V*.

***Вибіркове середнє** – це середнє арифметичне значення елементів варіаційного ряду.* Для визначення вибіркового середнього використовується формула

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \ , \qquad (2.1)$$

де k – кількість різних елементів варіаційного ряду.

Без урахування частот цю величину обчислюють за такою формулою:

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

***Відхиленням варіант** називається різниця між значенням варіанти та вибірковим середнім, тобто* $x_i - \bar{x}_{\text{В}}$. Сума відхилень усіх варіант варіаційного ряду вибірки завжди дорівнює нулю.

***Вибіркова дисперсія** – це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант.* Обчислюється вибіркова дисперсія за формулою

$$D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_{\text{В}})^2 n_i \ ,$$

або, розкривши дужки та здійснивши перетворення,

$$D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - (\bar{x}_{\text{В}})^2 \ .$$

При обчисленні вибіркової дисперсії без урахування частот варіант використовуються такі формули:

$$D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_{\text{В}})^2 ,$$

або

$$D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x}_{\text{В}})^2 .$$

На відміну від вибіркового середнього, вибіркова дисперсія завжди набуває додатних значень. Вибіркова дисперсія використовується для визначення розсіювання вибірки. Якщо значення вибіркової дисперсії близьке до 0, то це означає, що варіанти розташовані близько одна біля одної. Якщо дисперсія велика, то варіанти розсіяні між максимальним та мінімальним значеннями.

Вибіркове середнє квадратичне відхилення також використовується для оцінювання розсіювання елементів вибірки та обчислюється за формулою

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}} .$$

Коефіцієнт варіації використовується для порівняння вибірок з різними значеннями вибіркового середнього, яке повинне бути ненульовим. Виражається коефіцієнт варіації у відсотках та обчислюється за такою формулою

$$V = \frac{\sigma_{\text{В}}}{\overline{x}_{\text{В}}} \cdot 100\% .$$

Розмахом *називається різниця між найбільшим та найменшим значеннями варіант вибірки.* Обчислюється розмах за формулою

$$R = x_{\max} - x_{\min} .$$

Модою *Mo* дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.* Мод може бути декілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається ***одномодальним***, коли має дві моди – ***двомодальним*** і т. д.

Медіаною *Me* дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант, при непарному об'ємі вибірки; при парному об'ємі вибірки, медіана – це середнє арифметичне двох серединних елементів варіаційного ряду.*

Приклад. За даним статистичним розподілом вибірки потрібно обчислити числові характеристики $\overline{x}_{\text{В}}$, $D_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{В}}$, *Mo*, Me*, R, V*.

x_i	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

Об'єм вибірки $n=\sum_i n_i = 100$.

Вибіркове середнє

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{2,5\cdot10+4,5\cdot20+6,5\cdot30+8,5\cdot30+10,5\cdot10}{100}=6,7\,;$$

$$\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i = \frac{2,5^2\cdot10+4,5^2\cdot20+6,5^2\cdot30+8,5^2\cdot30+10,5^2\cdot10}{100}=50,05\,;$$

вибіркова дисперсія

$$D_{\text{В}} = 50,05-6,7^2=5,16\,;$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_{\text{В}}=\sqrt{5,16}\approx 2,27\,;$$

статистичний розподіл є двомодальним

$$Mo^*=6,5; \qquad Mo^*=8,5;$$

медіана

$$Me^*=6,5;$$

розмах

$$R = 10,5-2,5=8;$$

коефіцієнт варіації

$$V=\frac{\sigma_{\text{В}}}{\overline{x}_{\text{В}}}\cdot100\%=\frac{2,27}{6,7}\cdot100\%=33,88\%\,.$$

2.2. Числові характеристики інтервального статистичного розподілу

Для визначення числових характеристик $\overline{x}_{\text{В}}$, $D_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{В}}$ інтервального розподілу перейдемо до дискретного, варіантами якого є середини проміжків варіаційного ряду $x_i^*=x_{i-1}+\frac{h}{2}=x_i-\frac{h}{2}$ і який має такий вигляд:

$\boldsymbol{x_i^*}$	x_1^*	x_2^*	x_3^*	…	x_k^*
$\boldsymbol{n_i}$	n_1	n_2	n_3		n_k

Тоді $\overline{x}_{\text{В}}$, $D_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{В}}$ обчислюють за формулами

$$\overline{x}_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\ x_i^* ,$$

$$D_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i^*)^2 n_i - (\overline{x}_В)^2 ,$$

$$\sigma_В = \sqrt{D_В} .$$

Для визначення ***медіани*** інтервального статистичного розподілу вибірки необхідно визначити ***медіанний інтервал***. Якщо, наприклад, на i-му інтервалі $[x_{i-1}; x_i]$ емпірична функція $F^*(x_{i-1}) < 0,5$ і $F^*(x_i) > 0,5$, то беручи до уваги, що досліджувана ознака X є неперервною і при цьому $F^*(x)$ є неспадною функцією, всередині інтервалу $[x_{i-1}; x_i]$ неодмінно існує таке значення $X = Me^*$, де $F^*(Me^*) = 0,5$. Тоді

$$Me^* = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} \cdot h ,$$

де $h = x_i - x_{i-1}$ – ширина інтервалу.

Для визначення ***моди*** інтервального статистичного розподілу вибірки необхідно визначити ***модальний інтервал***, тобто такий інтервал, якому відповідає найбільша частота появи.

Моду обчислюємо за формулою

$$Mo^* = x_{i-1} + \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}} \cdot h ,$$

де x_{i-1} – початок модального інтервалу, h – ширина інтервалу, n_{Mo} – частота модального інтервалу, n_{Mo-1} – частота домодального інтервалу, n_{Mo+1} – частота післямодального інтервалу.

Приклад. Середня тривалість обслуговування одного виклику пожежним підрозділом наведена у таблиці. Знайти числові характеристики $\overline{x}_В$, $D_В$, $\sigma_В$, Mo^*, Me^*.

інтервал тривалості год., *h* = 0,5	[0; 0,5]	(0,5; 1,0]	(1,0; 1,5]	(1,5; 2,0]	(2,0; 2,5]
частота	45	52	23	9	2

Перейдемо до дискретного розподілу:

$$x_i^* = x_{i-1} + \frac{h}{2}.$$

x_i^*	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25
n_i	45	52	23	9	2

Об'єм вибірки $n = \sum_i n_i = 131$.

Вибіркове середнє

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{0,25 \cdot 45 + 0,75 \cdot 52 + 1,25 \cdot 23 + 1,75 \cdot 9 + 2,25 \cdot 2}{131} = 0,76;$$

$$\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i = \frac{0,25^2 \cdot 45 + 0,75^2 \cdot 52 + 1,25^2 \cdot 23 + 1,75^2 \cdot 9 + 2,25^2 \cdot 2}{131} = 0,81;$$

вибіркова дисперсія

$$D_{\text{В}} = 0,81 - 0,76^2 = 0,23;$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{0,23} \approx 0,48.$$

Побудуємо $F^*(x)$. Для цього обчислимо відносні частоти:

інтервал тривалості год., (h = 0,5)	[0; 0,5]	(0,5; 1,0]	(1,0; 1,5]	(1,5; 2,0]	(2,0; 2,5]
$w_i = \frac{n_i}{n}$	0,34	0,39	0,18	0,07	0,02

Обчислимо накопичені відносні частоти $\tilde{w}_i = \frac{\tilde{n}_i}{n}$ та запишемо значення емпіричної функції розподілу у кінцях інтервалів.

$F^*(x)$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$\tilde{w}_i = \frac{\tilde{n}_i}{n}$	0,0	0,34	0,73	0,91	0,98	1,0

Побудуємо графік емпіричної функції розподілу (рис. 24).

Як бачимо, медіанним інтервалом (інтервалом, на якому $F^*(x)$ набуває значення 0,5) є (0,5;1] = $(x_{i-1}; x_i]$. Тому

$$Me^* = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} \cdot h = 0,5 + \frac{0,5 - F^*(0,5)}{F^*(1) - F^*(0,5)} \cdot 0,5 =$$

$$= 0,5 + \frac{0,5 - 0,34}{0,73 - 0,34} \cdot 0,5 \approx 0,705\,.$$

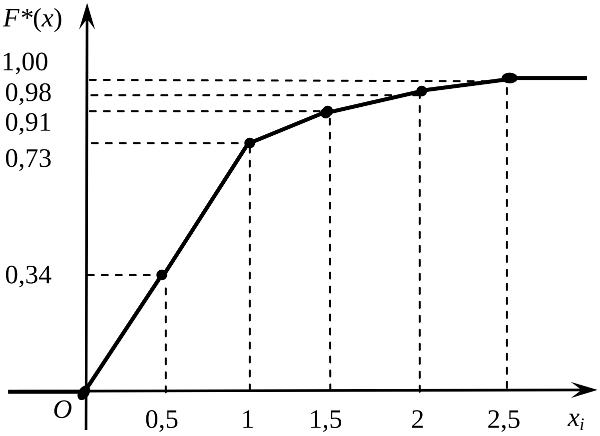


Рис. 24. Графік емпіричної функції розподілу F(x)*

Знайдемо моду Mo^*. Модальним інтервалом, тобто інтервалом, який має найбільшу частоту появи є (0,5;1] = $(x_{i-1}; x_i]$. Тому

$$Mo^* = x_{i-1} + \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}} \cdot h = 0,5 + \frac{52 - 45}{2 \cdot 52 - 45 - 23} \cdot 0,5 \approx 0,597.$$

Контрольні запитання

1. Наведіть формули для обчислення основних числових характеристик дискретного статистичного розподілу.
2. Чи може дисперсія мати від'ємні значення?
3. Коли дисперсія дорівнює нулю?
4. Як обчислити основні числові характеристики інтервального статистичного розподілу?
5. Наведіть формули для знаходження медіани та моди інтервального статистичного розподілу.

3. Інтервальні та точкові статистичні оцінки для параметрів генеральної сукупності

3.1. Визначення точкових та інтервальних статистичних оцінок

Нехай генеральна сукупність має розподіл з деяким невідомим параметром θ. Наприклад, у випадку нормального закону функція розподілу

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt ,$$

залежить від параметрів a та σ (математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності).

Для оцінки невідомого значення параметра θ розподілу генеральної сукупності єдине, що нам відоме, та єдине, за допомогою чого ми можемо визначати θ – це значення вибірки x_1, x_2, …, x_k. Це означає, що для оцінювання параметра θ необхідно задати функцію, яка за заданими значеннями вибірки знаходить хоча б наближено значення параметра θ.

Будь-яку функцію випадкових величин, що входять до вибірки $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *називають* ***статистикою.***

Оцінкою параметра розподілу генеральної сукупності θ* *називають статистику, значення якої приймають за невідоме значення величини θ.*

Зрозуміло, що не кожна статистика може слугувати такою оцінкою. Оскільки результати експерименту є випадковими, то будь-яка статистика є випадковою величиною. Для того, щоб статистика θ^* могла бути оцінкою θ, потрібно, щоб її розподіл був зосереджений достатньо близько до невідомого значення θ. Тоді при багатократному застосуванні такої статистики її середнє значення буде досить доброю оцінкою значення θ.

Оцінка θ буде* ***придатною*** *оцінкою параметра θ, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = 1$.

Оцінка θ буде* ***незміщеною*** *оцінкою параметра θ, якщо* $M(\theta^*) = \theta$.

Оцінка θ буде* ***ефективною*** *оцінкою параметра θ, якщо вона має мінімальну дисперсію серед усіх статистик від* x_1, x_2, ..., x_k.

Практичну цінність мають незміщені, придатні та ефективні оцінки.

Основними методами відшукання оцінок параметрів розподілу є метод моментів, метод найбільшої правдоподібності та метод найменших квадратів.

Нехай необхідно за даними вибірки оцінити (наближено знайти) невідому дисперсію генеральної сукупності $D_{\text{Г}}$. Якщо в ролі оцінки генеральної дисперсії прийняти вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, то ця оцінка є зміщеною, оскільки математичне сподівання $D_{\text{В}}$

$$M(D_{\text{В}}) = \frac{n-1}{n} D_{\text{Г}}$$

і буде призводити до статистичних помилок.

Щоб цього уникнути, достатньо $D_{\text{В}}$ помножити на дріб $\frac{n}{n-1}$. Отримаємо ***виправлену дисперсію***

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{В}}.$$

Зауваження. Порівнюючи формули $D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{В}})^2$ та $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{В}})^2$ бачимо, що вони відрізняються тільки знаменниками. Очевидно, що при достатньо великих об'ємах вибірки ($n > 30$) вибіркова і виправлена дисперсії відрізняються мало.

Точковими оцінками параметрів розподілу генеральної сукупності *називають такі оцінки, які визначаються одним числом.*

Інтервальними оцінками параметрів розподілу генеральної сукупност *називають такі оцінки, які визначаються двома числами – кінцями інтервалу.*

3.2. Точність та надійність точкових оцінок

Нехай за даними вибірки знайдена певна статистична характеристика θ^*, яка є оцінкою (наближеним значенням) невідомого параметра θ генеральної сукупності, тобто $\theta^* \approx \theta$. Очевидно, що статистика θ^* тим точніше визначає параметр θ, чим меншою є величина $|\theta^* - \theta|$.

Припустимо, що відоме число ε, таке, що $|\theta^* - \theta| < \varepsilon$. Зрозуміло, що чим менше ε, тим оцінка точніша. Отже, ε характеризує ***точність*** оцінки θ^*. Але випадковий характер величини θ^* не дозволяє категорично стверджувати, що завжди $|\theta^* - \theta| < \varepsilon$, оскільки виконання цієї нерівності є випадковою подією, що характеризується певною статистичною стійкістю. Тому можна говорити лише про ймовірність γ, з якою ця нерівність виконується:

$$P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = \gamma .$$

Як правило приймають γ = 0,95 або γ = 0,99. Можна сказати, що збільшення точності ознаки ε зменшує її ***надійність*** γ, а збільшення надійності пов'язане з зменшенням точності. Але при заданій надійності γ можна дещо підвищити точність ε, збільшуючи об'єм вибірки n.

У теорії математичної статистики відомі формули вигляду $n = F(N, \varepsilon, \gamma)$, що дозволяють визначити об'єм вибірки, якщо відомі значення об'єму генеральної сукупності N, а також ε та γ.

Зауважимо ще раз, що зміст надійності γ = 0,95 полягає в тому, що якщо буде оброблено достатньо велику кількість вибірок, то в 95% з них буде виконуватися нерівність $|\theta^* - \theta| < \varepsilon$, де ε – задана точність, але в 5% випадків нерівність може не виконуватися, тобто задана точність не буде досягнута.

Вираз $P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = \gamma$ можна переписати у вигляді $P(\theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon) = \gamma$. З цього випливає, що реальне значення θ з надійністю γ знаходиться в інтервалі ($\theta^* - \varepsilon$; $\theta^* + \varepsilon$). Цей інтервал називають ***довірчим інтервалом***, а ймовірність γ – ***довірчою ймовірністю***.

3.3. Поняття про похибки вибірки

Інформація про ознаку генеральної сукупності, яку одержали на основі обробки вибірки, завжди міститиме певні похибки, оскільки вибірка становить лише її незначну частину, тобто обсяг вибірки n значно менший від обсягу генеральної сукупності N. Похибка вибірки для параметра θ обчислюється

$$\Delta = |\theta^* - \theta|.$$

Виникає питання, як оцінити величину Δ?

По-перше, очевидно, що чим більший об'єм вибірки, тим ближчими є значення вибіркових характеристик до генеральних (при $n \to N$, $\theta^* \to \theta$). Таким чином, похибка вибірки зменшується із збільшенням її об'єму ($\Delta \sim \frac{1}{n}$).

По-друге, похибка вибірки залежить від однорідності генеральної сукупності, ступеня мінливості ознаки в сукупності. Оскільки одним з показників мінливості є середнє квадратичне відхилення σ, то можна сказати, що похибка вибірки буде тим більшою, чим більшим є середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності σ_Γ ($\Delta \sim \sigma_\Gamma$).

По-третє, статистична оцінка має бути незміщеною. Використання зміщеної оцінки приводить до систематичних (одного знаку) похибок.

Враховуючи, що числові характеристики вибірки є випадковими величинами і значення їх змінюються від вибірки до вибірки, можна зробити висновок, що похибки вибірки мають випадковий характер, тобто можуть коливатися за абсолютним значенням.

3.4. Довірчі інтервали

3.4.1. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання а нормального розподілу при відомому генеральному середньому квадратичному відхиленні σ_Γ

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, тобто її щільність розподілу ймовірностей має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

причому середнє квадратичне відхилення σ цього розподілу є відомим $\sigma = \sigma_\Gamma$. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання $\bar{x}_\Gamma$ (генеральне середнє) генеральної сукупності за вибірковим середнім $\bar{x}_B$. Знайдемо довірчі інтервали, які покривають параметр $\bar{x}_\Gamma$, з надійністю γ, тобто

$$P(|\bar{x}_B - \bar{x}_\Gamma| < \varepsilon) = \gamma .$$

Нашим завданням є знайти ε. Можна довести, що $\varepsilon = t\frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$, де t визначається з рівності $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ за таблицею функції Лапласа (додаток 2, табл. 3).

Таким чином, інтервал

$$\left(\bar{x}_B - t\frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + t\frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}\right) \qquad (2.2)$$

є довірчим інтервалом з надійністю γ для оцінки математичного сподівання *a* нормального розподілу.

Приклад. Для 30 пожежних сповіщувачів виміряні чутливості x_i. Результати вимірювання подано як дискретний статистичний розподіл

$\boldsymbol{x_i}$	200	250	300	350	400	450	500
$\boldsymbol{n_i}$	2	7	6	8	4	2	1

З надійністю γ = 0,99 побудувати довірчий інтервал для $\overline{x}_{\Gamma}$, якщо σ_{Γ} = 4.

Знайдемо t:

$$\Phi(t) = \frac{0,99}{2} = 0,495 .$$

З таблиці 3 додатку 2 маємо $t \approx 2,6$. Отже

$$\varepsilon = 2,6 \cdot \frac{4}{\sqrt{30}} \approx 1,899 .$$

Знайдемо

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{200 \cdot 2 + 250 \cdot 7 + 300 \cdot 6 + 350 \cdot 8 + 400 \cdot 4 + 450 \cdot 2 + 500 \cdot 1}{2 + 7 + 6 + 8 + 4 + 2 + 1} = 325 .$$

Тому

$$325 - \varepsilon < \overline{x}_{\Gamma} < 325 + \varepsilon, \quad 323,1 < \overline{x}_{\Gamma} < 326,9.$$

Зауваження. Якщо необхідно оцінити математичне сподівання з наперед заданою точністю ε і надійністю γ, то мінімальний об’єм вибірки, який забезпечить цю точність, знаходять за формулою

$$n = \frac{t^2 \sigma_{\Gamma}^2}{\varepsilon^2} .$$

3.4.2. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомому генеральному середньому квадратичному відхиленні σ_{Γ}

Довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомому σ_{Γ} з надійністю γ знаходять за формулою

$$\left(\overline{x}_{\text{В}} - t_{\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \overline{x}_{\text{В}} + t_{\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} \right),$$

де $\overline{x}_{\text{В}}$ – вибіркове середнє; n – об'єм вибірки; t_γ – критичне значення розподілу Стьюдента з $n-1$ ступенем свободи (додаток 2, табл. 6); $S=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}D_{\text{В}}}$ – виправлене середнє квадратичне відхилення.

Зауваження. Ця формула ефективна при $n > 30$.

Контрольні запитання

1. Які точкові статистичні оцінки ви знаєте? Які з них незміщені, а які зміщені?
2. Яка відмінність між середнім генеральної сукупності та вибірковим середнім?
3. Що таке виправлена дисперсія? У яких випадках можна застосовувати невиправлену дисперсію?
4. Що таке довірчий інтервал?
5. Як знайти довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання нормального розподілу?

4. Статистична перевірка гіпотез

4.1. Статистичні гіпотези та їх різновиди

Часто необхідно знати закон розподілу генеральної сукупності. Якщо закон розподілу невідомий, але є міркування щодо його певного вигляду $F(x)$, наприклад, розподіл рівномірний, показниковий або нормальний, тоді висувають гіпотезу: *генеральна сукупність розподілена за законом* $F(x)$.

У цій гіпотезі йде мова про вигляд невідомого розподілу. Такі гіпотези називають непараметричними.

Іноді закон розподілу генеральної сукупності відомий, але його параметри (числові характеристики) невідомі. Якщо є міркування припустити, що невідомий параметр θ дорівнює певному значенню θ^*, то висувають гіпотезу: $\theta = \theta^*$. Ця гіпотеза вказує припущену величину параметра відомого розподілу (параметричні статистичні гіпотези).

Можливі також інші гіпотези: про рівність параметрів двох різних розподілів, про незалежність вибірок та багато інших.

Статистичними *називають гіпотези про вигляд розподілу генеральної сукупності або про параметри відомих розподілів.*

Наприклад, статистичними будуть гіпотези:

– генеральна сукупність розподілена за нормальним законом;
– дисперсії двох сукупностей, розподілених за законом Пуассона, рівні між собою.

Нестатистичними будуть гіпотези про стан погоди на завтрашній день, про курси валют, про кількість надзвичайних ситуацій в наступному році.

Основною (***нульовою***) *називають припущену гіпотезу і позначають* H_0.

Разом з припущеною гіпотезою завжди можна розглядати альтернативну їй гіпотезу, яка заперечує твердження нульової гіпотези. Якщо припущена гіпотеза була відхилена, тоді має місце альтернативна гіпотеза.

Альтернативною (***конкурентною***) *називають гіпотезу, що суперечить основній, та позначають* H_α.

Наприклад, якщо H_0: $\overline{x}_Г = 6$, то альтернативною може бути така гіпотеза H_α: $\overline{x}_Г > 6$.

Гіпотези можуть містити одне або більше одного припущення.

Гіпотезу називають ***простою,*** *якщо вона містить лише одне припущення.*

Наприклад, якщо λ – параметр показникового розподілу, то гіпотеза H_0: $\lambda = 5$ буде проста.

*Гіпотезу називають **складною,** якщо вона складається із скінченної або нескінченної кількості простих гіпотез.*

Складна статистична гіпотеза є неоднозначною. Вона може стверджувати, що значення параметра генеральної сукупності належить певній області ймовірних значень, яка може бути як дискретною, так і неперервною.

Наприклад, H_0: $\bar{x}_{Г} \in \; 2; 2{,}1; 2{,}2$ або H_0: $\bar{x}_{Г} \in [2; 4]$.

4.2. Помилки перевірки гіпотез

Статистична гіпотеза, яка висувається, може бути правильною або неправильною, тому виникає необхідність її перевірки.

*Перевірку гіпотези за даними вибірки називають **статистичною перевіркою.***

При перевірці статистичної гіпотези за даними випадкової вибірки можна зробити хибний висновок. При цьому можуть виникати помилки першого та другого роду.

*Якщо за висновком буде відкинута правильна гіпотеза, то кажуть, що це **помилка першого роду**.*

*Якщо за висновком буде прийнята неправильна гіпотеза, то кажуть, що це **помилка другого роду.***

Відмітимо, що наслідки цих помилок можуть бути різними. Наприклад, якщо відкинути правильну нестатистичну гіпотезу «обвинувачуваний винен», то ця помилка першого роду дозволить злочинцеві уникнути покарання. Якщо прийняти неправильну гіпотезу «обвинувачуваний винен», то внаслідок цієї помилки буде засуджена невинна людина.

Нульову гіпотезу ми вибираємо самі із сукупності всіх гіпотез. За основну (нульову) гіпотезу потрібно вибирати ту, для якої важливіше уникнути помилки, що полягає у відхиленні цієї гіпотези, коли вона справджується. Помилка першого роду – це помилка, якої важливіше уникнути, ціна якої вища.

*Ймовірність здійснити похибку першого роду позначають α і називають **рівнем значущості.***

Найчастіше рівень значущості приймають рівним 0,05 або 0,01. Якщо прийнято рівень значущості рівним 0,05, то це означає, що в п'яти випадках із 100 ми ризикуємо одержати похибку першого роду (відкинути правильну гіпотезу).

Зауваження. При контролі якості продукції ймовірність признати нестандартними стандартні вироби називають ***ризиком виробника,*** а ймовірність признати придатними браковані вироби називають ***ризиком споживача***.

Статистичні рішення мають ймовірнісний характер, тобто завжди існує ймовірність того, що прийняті рішення будуть помилковими. Головна цінність прийняття статистичних рішень полягає в тому, що в межах ймовірнісних категорій можна об'єктивно виміряти ступінь ризику, який відповідає тому чи іншому рішенню.

4.3. Статистичний критерій перевірки основної гіпотези

Перевірку статистичної гіпотези можна здійснити лише з використанням даних вибірки. Для цього слід обрати деяку випадкову статистику (вибіркову функцію), точний або наближений розподіл якої відомий, і за допомогою цієї характеристики перевірити основну гіпотезу.

Статистичним критерієм узгодження перевірки гіпотези (*або просто* ***критерієм***) *називають випадкову величину K, розподіл якої* (*точний або наближений*) *відомий і яка застосовується для перевірки основної гіпотези.*

Якщо критерій K розподілений нормально, то його позначають z, якщо має розподіл Фішера-Снедекора, то F, якщо закон розподілу Стьюдента – t.

Спостереженим (***емпіричним***) ***значенням критерію*** *називають значення відповідного критерію, обчислене за даними вибірки.*

4.4. Критична область

Після обрання певного критерію узгодження множину усіх його можливих значень поділяють на дві підмножини A і $\overline{A}$, що не перетинаються. Одна з них містить значення критерію, при яких основна гіпотеза приймається, а друга – ті, при яких вона відхиляється.

Критичною областю *називають сукупність значень критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється.*

Областю допустимих значень (***областю прийняття гіпотези***) *називають множину значень критерію, при яких гіпотезу приймають.*

Критерій узгодження K – одновимірна випадкова величина, усі можливі значення якої належать деякому інтервалу. Тому критична область та область прийняття гіпотези також будуть інтервалами, а це означає, що існують точки, які ці інтервали відокремлюють.

Критичними точками (***межами***) ***критерію К*** *називають точки* $K_{кр}$, *які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.*

Розрізняють однобічну (правобічну та лівобічну) та двобічну критичні області.

Правобічною *називають критичну область, яка визначається нерівністю* $K > K_{кр}$ *(рис. 25).*

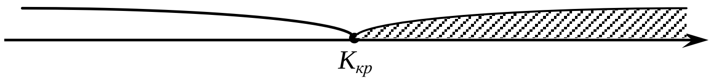


Рис. 25. Правобічна критична область

Лівобічною *називають критичну область, яка визначається нерівністю* $K < K_{кр}$ *(рис. 26).*

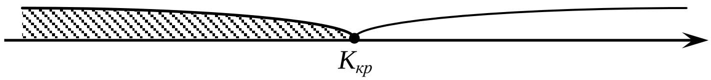


Рис. 26. Лівобічна критична область

Двобічною *називають критичну область, що визначається нерівностями* $K < K'_{кр}$ *та* $K > K''_{кр}$ *(рис. 27).*

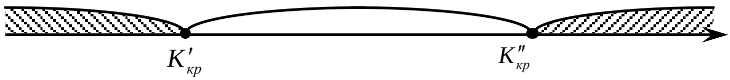


Рис. 27. Двобічна критична область

Щоб знайти однобічну критичну область, треба знайти критичну точку $K_{кр}$. Для цього задають достатньо малу ймовірність – ***рівень значущості*** α, а потім шукають критичну точку з врахуванням вимоги

$$P(K > K_{кр}) = \alpha$$

у випадку правобічної критичної області або

$$P(K < K_{кр}) = \alpha$$

у випадку лівобічної критичної області.

У випадку двобічної критичної області повинна виконуватись тотожність

$$P(K < K'_{кр}) + P(K > K''_{кр}) = \alpha.$$

Для кожного критерію узгодження є відповідні таблиці, які дозволяють знайти таку точку $K_{кр}$, яка задовольняє потрібну умову.

При знаходженні критичної області доцільно враховувати потужність критерію.

Потужністю критерію *називають ймовірність належності критерію критичній області за умови, що правильною є альтернативна гіпотеза.*

Іншими словами, потужністю критерію є ймовірність того, що основна гіпотеза буде відхилена, якщо альтернативна гіпотеза правильна.

Якщо рівень значущості α вже обрано, то критичну область доцільно будувати так, щоб потужність критерію була максимальною. Виконання цієї вимоги забезпечує мінімальну ймовірність похибки другого роду.

Зауваження. Єдиний спосіб одночасного зменшення ймовірностей похибок першого та другого роду це – збільшення об'єму вибірки.

4.5. Порядок дій при перевірці статистичних гіпотез

Для перевірки правильності нульової статистичної гіпотези H_0 необхідно:

1) визначити гіпотезу H_α, альтернативну до гіпотези H_0;
2) обрати статистичну характеристику перевірки;
3) задати допустиму ймовірність похибки першого роду, тобто рівень значущості;
4) знайти за відповідною таблицею критичну область (критичну точку) для обраної статистичної характеристики;
5) за результатами вибірки обчислити спостережуване значення критерію K^*;
6) відхилити чи прийняти нульову гіпотезу на підставі таких міркувань: у разі коли $K^* \in \overline{A}$, а це є малоймовірною випадковою подією з ймовірністю $P(K^* \in \overline{A}) = \alpha$ і, незважаючи на це, вона відбулась, то в цьому разі H_0 відхиляють.

Критичній області належать такі значення статистичної характеристики, при яких гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної гіпотези H_α.

Зауважимо, що між рівнем значущості α та критичною областю існує такий зв'язок: *якщо гіпотеза H_0 правильна, то з ймовірністю α значення вибіркової функції будуть належати критичній області.*

Контрольні запитання

1. Дати визначення нульової та альтернативної гіпотези.
2. Що називають простою та складною статистичними гіпотезами?
3. Що називається статистичним критерієм?
4. Що називається емпіричним значенням критерію?
5. Що називають областю прийняття гіпотези, критичною областю, критичною точкою?
6. Що таке потужність критерію?
7. Який порядок дій при статистичній перевірці гіпотези?

5. Параметричні статистичні гіпотези

5.1. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність генерального середнього гіпотетичному значенню

Нехай маємо вибірку з нормально розподіленої генеральної сукупності. Висуваємо гіпотезу про рівність генерального середнього $\overline{x}_{Г}$ деякому гіпотетичному значенню a_0

$$H_0\colon\ \overline{x}_{Г} = a_0 .$$

Ця гіпотеза може мати альтернативні гіпотези H_α, для яких:

- при H_α: $\overline{x}_{Г} \neq a_0$ будується двобічна критична область (рис. 27);
- при H_α: $\overline{x}_{Г} > a_0$ будується правобічна критична область (рис. 25);
- при H_α: $\overline{x}_{Г} < a_0$ будується лівобічна критична область (рис. 26).

Лівобічна та правобічна критичні області визначаються однією критичною точкою, двобічна – двома критичними точками, розташованими симетрично відносно нуля.

Залежно від того чи відоме значення дисперсії генеральної сукупності, можливі такі випадки.

<u>Випадок 1.</u> Значення дисперсії генеральної сукупності $\sigma_{Г}^2$ відоме.

Критерієм для цього типу задач є випадкова величина

$$z = \frac{\overline{x}_{В} - a_0 \ \sqrt{n}}{\sigma_{Г}},$$

де n – об'єм вибірки; $\overline{x}_{В}$ – вибіркове середнє, $\sigma_{Г}$ – генеральне середнє квадратичне відхилення. Випадкова величина z має нормований нормальний закон розподілу ймовірностей N (0; 1).

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\overline{x}_{Г} = a_0$ про рівність генерального середнього $\overline{x}_{Г}$ гіпотетичному значенню a_0 <u>*при заданому значенні генеральної дисперсії*</u> $\sigma_{Г}^2$ потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$z^* = \frac{\overline{x}_{В} - a_0 \ \sqrt{n}}{\sigma_{Г}}$$

і використовуючи таблицю інтегральної функції Лапласа Ф(z) (додаток 2, табл. 3) відповідно до альтернативної гіпотези побудувати критичну область.

Правило 1.

- Для двобічної критичної області критичні точки дорівнюють $\pm z_{кр}$, де $z_{кр}$ – розв'язок рівняння

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Якщо $|z^*| < z_{кр}$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше – відхиляємо.

- У випадку правобічної критичної області критична точка дорівнює $z_{кр}$, де $z_{кр}$ – розв'язок рівняння

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

Якщо $z^* < z_{кр}$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше – відхиляємо.

- У випадку лівобічної критичної області критична точка дорівнює $-z_{кр}$, яке є розв'язком рівняння

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

Якщо $z^* > -z_{кр}$, то нульову гіпотезу приймаємо, в протилежному випадку – відхиляємо.

Випадок 2. Значення дисперсії генеральної сукупності $\sigma_{Г}^2$ невідоме.

Тоді значення середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності $\sigma_{Г}$ заміняють його статистичною оцінкою $S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B}$. За статистичний критерій вибирається випадкова величина

$$t = \frac{(\overline{x}_{В} - a_0)\sqrt{n}}{S},$$

яка має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи.

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\overline{x}_{Г} = a_0$ про рівність генерального середнього $\overline{x}_{Г}$

гіпотетичному значенню a_0 <u>*при невідомому значенні генеральної дисперсії*</u> σ_{Γ}^2 потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$t^* = \frac{\left(\bar{x}_{\text{В}} - a_0\right)\sqrt{n}}{S}$$

та за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента $t(\alpha; k)$ (додаток 2, табл. 6) за заданим рівнем значущості α та числом ступенів свободи $k = n - 1$ знайти критичну точку. Критичну область будуємо відповідно до альтернативної гіпотези за таким правилом.

<u>Правило 2.</u>

- У випадку двобічної критичної області критичні точки дорівнюють $\pm t_{кр}$, де $t_{кр} = t(\alpha, k)$. Якщо $|t^*| < t_{кр}$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше – відхиляємо.
- У випадку правобічної критичної області $t_{кр} = t(\alpha, k)$. Якщо $t^* < t_{кр}$, то нульову гіпотезу приймаємо, в протилежному випадку – відхиляємо.
- У випадку лівобічної критичної області $t_{кр} = -t(\alpha, k)$. Якщо $t^* > t_{кр}$, то нульову гіпотезу приймаємо, в протилежному випадку – відхиляємо.

<u>Приклад.</u> Для того щоб дослідити ефект від використання добрива, 10 ділянок землі підживили і 10 не підживлювали, а потім порівняли одержаний врожай. 20 ділянок однакової площі були поділені попарно, причому пару становили суміжні ділянки. Питання про те, яка з двох суміжних ділянок мала оброблятися добривами, вирішувалося підкиданням монети. У таблиці подано різниці врожаїв з пар суміжних ділянок, підживлених і звичайних.

Номер пари	**Різниця врожаїв**	**Номер пари**	**Різниця врожаїв**
1	2,4	6	1,6
2	1,0	7	– 0,4
3	0,7	8	1,1
4	0,0	9	0,1
5	1,1	10	0,7

Чи підтверджують наведені дані наявність ефекту від використання добрив, інакше кажучи, чи дають вони надбавку врожаю?

У термінах перевірки статистичних гіпотез задачу можна сформулювати так. Маємо 10 незалежних спостережень випадкової величини різниці врожаїв (див. таблицю), яка нормально розподілена (припущення відносно нормального розподілу результатів вимірювань, як правило, завжди справджується). Стосовно генерального середнього висувається гіпотеза H_0: $\bar{x}_\Gamma = 0$. Невідхилення гіпотези H_0: $\bar{x}_\Gamma = 0$ будемо трактувати як відсутність ефекту від використання добрива. Як альтернативну гіпотезу будемо розглядати гіпотезу H_α: $\bar{x}_\Gamma > 0$, оскільки за постановкою задачі, якщо $\bar{x}_\Gamma \neq 0$, то $\bar{x}_\Gamma > 0$. Відхилення нульової гіпотези на користь альтернативної будемо інтерпретувати як наявність ефекту від використання добрива. Виберемо рівень значущості $\alpha = 0{,}025$.

У розглядуваному випадку $n = 10$;

$$\bar{x}_\text{В} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i = \frac{2,4+1,0+0,7+0,0+1,1+1,6-0,4+1,1+0,1+0,7}{10} = 0,83;$$

$$\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i = \frac{2,4^2+1,0^2+0,7^2+0,0^2+1,1^2+1,6^2}{10} +$$

$$+\frac{(-0,4)^2+1,1^2+0,1^2+0,7^2}{10} = \frac{12,89}{10} = 1,289;$$

$$D_\text{В} = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i - \left(\bar{x}_\text{В}\right)^2 = 1,289-(0,83)^2 = 0,600;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1}D_B = \frac{10}{9}\cdot 0,600 \approx 0,667.$$

Обчислюємо спостережуване значення згідно з критерієм Стьюдента

$$t^* = \frac{\left(\bar{x}_\text{В} - a_0\right)\sqrt{n}}{S} = \frac{(0,83-0)\sqrt{10}}{\sqrt{0,667}} \approx 3,21.$$

Для альтернативної гіпотези H_α: $\bar{x}_\Gamma > 0$ будуємо правобічну критичну область. Для цього за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента $t(\alpha; k)$ (додаток 2, табл. 6) за заданим рівнем значущості $\alpha = 0{,}025$ та числом ступенів свободи $k = 10-1 = 9$ знаходимо критичну точку $t_{кр} = t(0,025;9) = 2,26$.

Оскільки $t^* = 3,21 > t_{кр} = 2,26$, то гіпотеза H_0: $\bar{x}_\Gamma = 0$ на рівні значущості $\alpha = 0{,}025$ відхиляється. Таким чином, різниця отриманих урожаїв свідчить про наявність ефекту від використання добрива.

5.2. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність генеральних середніх

Нехай маємо дві незалежні вибірки, зроблені з нормальних генеральних сукупностей X та Y. Об'єми вибірок дорівнюють n та m відповідно. Висуваємо гіпотезу про рівність генеральних середніх цих сукупностей

$$H_0:\ \bar{x}_{\Gamma} = \bar{y}_{\Gamma}.$$

Ця гіпотеза може мати альтернативні гіпотези H_α:

- при H_α: $\bar{x}_{\Gamma} \neq \bar{y}_{\Gamma}$ будується двобічна критична область (рис. 27);
- при H_α: $\bar{x}_{\Gamma} > \bar{y}_{\Gamma}$ будується правобічна критична область (рис. 25);
- при H_α: $\bar{x}_{\Gamma} < \bar{y}_{\Gamma}$ будується лівобічна критична область (рис. 26).

Для кожної вибірки будують статистичні розподіли

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	…	x_k
$\boldsymbol{n_i}$	n_1	n_2	…	n_k

$\boldsymbol{y_j}$	y_1	y_2	…	y_s
$\boldsymbol{m_j}$	m_1	m_2	…	m_s

Тут $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $m = \sum_{j=1}^{s} m_j$.

Обчислюють значення вибіркових середніх

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i, \qquad \bar{y}_{\text{В}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{s} y_j m_j.$$

Залежно від об'єму вибірок та від того, чи відомі значення генеральних дисперсій, будемо розрізняти такі випадки.

<u>Випадок 1.</u> Обсяги вибірок n та m великі (n, m >40) і відомі значення дисперсій генеральних сукупностей $\sigma_{\Gamma}^2(X)$ і $\sigma_{\Gamma}^2(Y)$.

За статистичний критерій береться випадкова величина

$$z = \frac{\bar{x}_{\text{В}} - \bar{y}_{\text{В}}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_{\Gamma}^2(X)}{n} + \dfrac{\sigma_{\Gamma}^2(Y)}{m}}},$$

яка має нормальний нормований закон розподілу N (0; 1).

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\bar{x}_{\Gamma} = \bar{y}_{\Gamma}$ про рівність середніх значень двох нормально розподілених генеральних сукупностей *з відомими генеральними дисперсіями (у випадку великих вибірок)* потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$z^* = \frac{\overline{x}_{\text{В}} - \overline{y}_{\text{В}}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_{\Gamma}^2(X)}{n} + \dfrac{\sigma_{\Gamma}^2(Y)}{m}}}$$

і за правилом 1 залежно від формулювання альтернативної гіпотези H_α прийняти або відхилити нульову H_0: $\overline{x}_{\Gamma} = \overline{y}_{\Gamma}$.

Приклад. У двох партіях містяться однотипні підшипники, виготовлені двома заводами. Вимірювання їх діаметрів дали результати, які наведені у вигляді двох статистичних розподілів:

x_i, **мм**	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0
n_i	5	15	20	8	2

y_j, **мм**	6,1	6,3	6,5	6,7	6,9
m_j	8	12	26	10	4

Припускаючи, що ознаки X і Y – “розміри діаметрів підшипників” мають нормальний закон розподілу і незалежні між собою, при рівні значущості α = 0,01 перевірити гіпотезу

$$H_0:\ \overline{x}_{\Gamma} = \overline{y}_{\Gamma},$$

якщо альтернативна гіпотеза

$$H_\alpha:\ \overline{x}_{\Gamma} > \overline{y}_{\Gamma},$$

коли відомі значення генеральних дисперсій $\sigma_{\Gamma}^2(X) = 10$, $\sigma_{\Gamma}^2(Y) = 15$.

Відомо, що $n = \sum\limits_i n_i = 50$, $m = \sum\limits_j m_j = 60$. Обчислимо $\overline{x}_{\text{В}}$, $\overline{y}_{\text{В}}$:

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i = \frac{6,2\cdot 5 + 6,4\cdot 15 + 6,6\cdot 20 + 6,8\cdot 7 + 7,0\cdot 2}{50} = \frac{327,4}{50} \approx 6,548;$$

$$\overline{y}_{\text{В}} = \frac{1}{m}\sum_j y_j m_j = \frac{6,1\cdot 8 + 6,3\cdot 12 + 6,5\cdot 26 + 6,7\cdot 10 + 6,9\cdot 4}{60} = \frac{388}{50} \approx 6,467$$

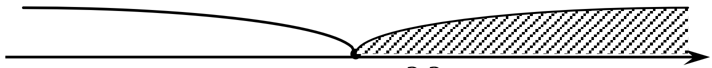
Обчислимо спостережуване значення критерію

$$z^* = \frac{\overline{x}_{\text{В}} - \overline{y}_{\text{В}}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_{\Gamma}^2(X)}{n} + \dfrac{\sigma_{\Gamma}^2(Y)}{m}}} = \frac{6,548 - 6,467}{\sqrt{\dfrac{10}{50} + \dfrac{15}{60}}} = \frac{0,081}{\sqrt{0,45}} \approx 0,121.$$

Для альтернативної гіпотези H_α: $\overline{x}_Г > \overline{y}_Г$ будується правобічна критична область. За правилом 1 критичну точку $z_{кр}$ знаходимо з рівності

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0,01}{2} = \frac{0,98}{2} = 0,49.$$

Звідси за таблицею 3 додатку 2 одержуємо $z_{кр} = 2,3$.



$z_{кр} = 2,3$

Рис. 28

Оскільки $z^* = 0,121 < z_{кр} = 2,3$, тобто не належить критичній області (рис. 28), то гіпотезу H_0: $\overline{x}_Г = \overline{y}_Г$ про рівність генеральних середніх приймаємо. Отже, можна вважати, що середні значення діаметрів підшипників, виготовлених на двох заводах, є рівними.

<u>Випадок 2.</u> Обсяги вибірок n та m малі, значення дисперсій генеральних сукупностей $\sigma_Г^2(X)$ і $\sigma_Г^2(Y)$. невідомі та рівні між собою. У цьому випадку застосовують точкові незміщені статистичні оцінки дисперсії генеральної сукупності $S^2(X)$, $S^2(Y)$. За статистичний критерій береться випадкова величина

$$t = \frac{\overline{x}_В - \overline{y}_В}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2(X)+(m-1)S^2(Y)}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}},$$

яка має розподіл Стьюдента.

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\overline{x}_Г = \overline{y}_Г$ про рівність середніх значень двох нормально розподілених генеральних сукупностей <u>*з невідомими рівними дисперсіями (у випадку малих вибірок)*</u>, потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$t^* = \frac{\overline{x}_В - \overline{y}_В}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2(X)+(m-1)S^2(Y)}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$$

та за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента $t(\alpha;\ k)$ (додаток 2, табл. 6) за заданим рівнем значущості α та числом ступенів свободи $k = n + m - 2$ знайти критичну точку. Критичну область будуємо відповідно до альтернативної гіпотези за правилом 2.

<u>Приклад.</u> Пружність вимірювалась на зразках, виготовлених з однієї і тієї ж марки сталі та вибраних з двох партій. Результати вимірювання подано двома статистичними розподілами:

x_i	34,2	38,2	42,2	46,2	50,2
n_i	2	5	10	4	4

y_j	36,8	38,8	40,8	42,8	44,8
m_j	2	4	6	5	3

Вважаючи, що ознаки X і Y є незалежними і мають нормальний закон розподілу, при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність нульової гіпотези

$$H_0:\ \overline{x}_{\Gamma} = \overline{y}_{\Gamma},$$

якщо альтернативна гіпотеза

$$H_\alpha:\ \overline{x}_{\Gamma} \neq \overline{y}_{\Gamma}.$$

Обсяги вибірок є малими і відповідно дорівнюють $n = \sum\limits_i n_i = 25$, $m = \sum\limits_j m_j = 20$. Обчислимо значення $\overline{x}_{\text{В}}$, $\overline{y}_{\text{В}}$, $S^2(X)$, $S^2(Y)$:

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i = \frac{34{,}2\cdot 2 + 38{,}2\cdot 5 + 42{,}2\cdot 10 + 46{,}2\cdot 4 + 50{,}2\cdot 4}{25} = \frac{1067}{25} = 42{,}68;$$

$$\overline{y}_{\text{В}} = \frac{1}{m}\sum_j y_j m_j = \frac{73{,}6 + 155{,}2 + 244{,}8 + 214 + 134{,}4}{20} = \frac{822}{20} = 41{,}1\,.$$

Обчислимо

$$\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i = \frac{34{,}2^2\cdot 2 + 38{,}2^2\cdot 5 + 42{,}2^2\cdot 10 + 46{,}2^2\cdot 4 + 50{,}2^2\cdot 4}{25} =$$

$$= \frac{46061{,}8}{25} = 1842{,}472;$$

$$D_{\text{В}}(X) = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i - \left(\overline{x}_{\text{В}}\right)^2 = 1842{,}472 - (42{,}68)^2 = 20{,}8896\,;$$

$$S^2(X) = \frac{n}{n-1} D_{\text{В}}(X) = \frac{25}{24}\cdot 20{,}8896 = 21{,}76\,.$$

Аналогічно

$$\frac{1}{m}\sum_{j} y_j^2 m_j = \frac{36,8^2\cdot 2+38,8^2\cdot 4+40,8^2\cdot 6+42,8^2\cdot 5+44,8^2\cdot 3}{20} =$$

$$= \frac{33898,4}{20} = 1694,92\,;$$

$$D_{\text{В}}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{j} y_j^2 m_j - \left(\bar{y}_{\text{В}}\right)^2 = 1694,92-(41,1)^2 = 5,71\,;$$

$$S^2(Y) = \frac{m}{m-1}D_{\text{В}}(Y) = \frac{20}{19}\cdot 5,71 \approx 6,01\,.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$t^* = \frac{\bar{x}_{\text{В}}-\bar{y}_{\text{В}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2(X)+(m-1)S^2(Y)}{n+m-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \approx$$

$$\approx \frac{42,68-41,1}{\sqrt{\frac{24\cdot 21,76+19\cdot 6,01}{43}}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{20}}} \approx \frac{1,58}{1,15} \approx 1,37\,.$$

Для альтернативної гіпотези H_α: $\bar{x}_{\Gamma} \neq \bar{y}_{\Gamma}$ будується двобічна критична область. Враховуючи, що статистичний критерій має розподіл Стьюдента з $k = n + m - 2 = 25 + 20 - 2 = 43$ та рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$, за таблицею 6 додатку 2 знаходимо критичну точку $t_{кр} = t(0,01;\,43) = 2,7$ (отримали як середнє арифметичне значень $t(0,01;\,30)$ та $t(0,01;\,50)$). Критична область матиме вигляд (рис. 29)

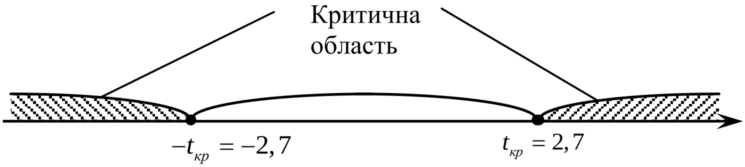


Рис. 29

Оскільки $|t^*| = 1,37 < t_{кр} = 2,7$, тобто не належить критичній області, то гіпотезу H_0: $\bar{x}_{\Gamma} = \bar{y}_{\Gamma}$ приймаємо, тобто можемо вважати, що пружність зразків в двох партіях є однаковою.

Випадок 3. Обсяги вибірок n та m великі, значення дисперсій генеральних сукупностей $\sigma_{\Gamma}^2(X)$ і $\sigma_{\Gamma}^2(Y)$ невідомі та рівні між собою.

За статистичний критерій береться випадкова величина

$$z = \frac{\overline{x}_{\text{В}} - \overline{y}_{\text{В}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2(X)+(m-1)S^2(Y)}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}},$$

закон розподілу якої при великих обсягах вибірок асимптотично наближається до нормованого нормального закону $N(0; 1)$. Тому для визначення критичних точок застосовується інтегральна функція Лапласа.

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\overline{x}_{\Gamma} = \overline{y}_{\Gamma}$ про рівність середніх значень двох нормально розподілених генеральних сукупностей *з невідомими рівними дисперсіями (у випадку великих вибірок)*, потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$z^* = \frac{\overline{x}_{\text{В}} - \overline{y}_{\text{В}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2(X)+(m-1)S^2(Y)}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$$

і за правилом 1 залежно від формулювання альтернативної гіпотези H_α прийняти або відхилити нульову H_0: $\overline{x}_{\Gamma} = \overline{y}_{\Gamma}$.

Приклад. Протягом року визначалася продуктивність праці X і Y (в тис. грн/працівн.) у двох транспортних фірмах. Результати вимірювання подано статистичними розподілами:

x_i	120	150	180	210	240	270
n_i	10	20	30	20	15	5

y_i	90	130	170	210	250	290
m_i	10	20	40	20	5	5

Вважаючи, що ознаки X і Y є незалежними, мають нормальний закон розподілу та рівні дисперсії, при рівні значущості $\alpha = 0{,}001$ перевірити правильність нульової гіпотези

$$H_0\text{: } \overline{x}_{\Gamma} = \overline{y}_{\Gamma},$$

якщо альтернативна гіпотеза

$$H_\alpha\text{: } \overline{x}_{\Gamma} < \overline{y}_{\Gamma}.$$

Маємо вибірки великих об'ємів $n = \sum_i n_i = 100$, $m = \sum_j m_j = 100$.

Значення дисперсій генеральних сукупностей невідомі. Для обчислення спостережуваного значення критерію необхідно обчислити $\overline{x}_\text{В}$, $\overline{y}_\text{В}$, $S^2(X)$, $S^2(Y)$:

$$\overline{x}_\text{В} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i = \frac{120\cdot 10 + 150\cdot 20 + 180\cdot 30 + 210\cdot 20}{100} +$$

$$+\frac{240\cdot 15 + 270\cdot 5}{100} = 187,5;$$

$$\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i = \frac{120^2\cdot 10 + 150^2\cdot 20 + 180^2\cdot 30 + 210^2\cdot 20}{100} +$$

$$+\frac{240^2\cdot 15 + 270^2\cdot 5}{100} = \frac{3676500}{100} = 36765;$$

$$D_\text{В}(X) = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i - \overline{x}_\text{В}^{\,2} = 36765 - (187,5)^2 = 1608,75;$$

$$S^2(X) = \frac{n}{n-1} D_\text{В}(X) = \frac{100}{99}\cdot 1608,75 = 1625.$$

Аналогічно

$$\overline{y}_\text{В} = \frac{1}{m}\sum_j y_j m_j = \frac{90\cdot 10 + 130\cdot 20 + 170\cdot 40 + 210\cdot 20}{100} +$$

$$+\frac{250\cdot 5 + 290\cdot 5}{100} = 172;$$

$$\frac{1}{m}\sum_j y_j^2 m_j = \frac{90^2\cdot 10 + 130^2\cdot 20 + 170^2\cdot 40 + 210^2\cdot 20}{100} +$$

$$+\frac{250^2\cdot 5 + 290^2\cdot 5}{100} = \frac{3190000}{100} = 31900;$$

$$D_\text{В}(Y) = \frac{1}{m}\sum_j y_j^2 m_j - \overline{y}_\text{В}^{\,2} = 31900 - (172)^2 = 2316;$$

$$S^2(Y) = \frac{m}{m-1} D_\text{В}(Y) = \frac{100}{99}\cdot 2316 \approx 2339,39.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$z^* = \frac{\overline{x}_{\text{В}} - \overline{y}_{\text{В}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2(X)+(m-1)S^2(Y)}{n+m-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \approx$$

$$\approx \frac{187,5-172}{\sqrt{\frac{99\cdot 1625+99\cdot 2339,39}{198}} \cdot \sqrt{\frac{1}{100}+\frac{1}{100}}} \approx \frac{15,5}{6,2963} \approx 2,462 .$$

Для побудови критичної області використовуємо правило 1. При альтернативній гіпотезі H_α: $\overline{x}_\Gamma < \overline{y}_\Gamma$ будуємо лівобічну критичну область (рис. 30). Для цього критичну точку знаходимо з рівності:

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0,001}{2} = \frac{0,998}{2} = 0,499 ,$$

звідки за таблицею 3 додатку 2, враховуючи, що критична область лівобічна, одержуємо, що критична точка дорівнює $-3,2$.

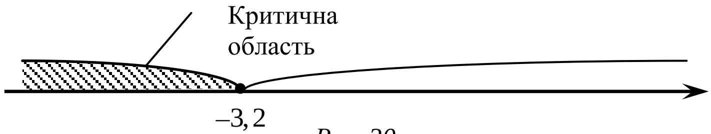


Рис. 30

Оскільки z^* = 2,462 > $-z_{кр} = -3,2$, тобто не належить критичній області (рис. 30), то нульову гіпотези H_0: $\overline{x}_\Gamma = \overline{y}_\Gamma$ приймаємо. Отже, середня продуктивність праці на двох заданих фірмах є однаковою.

5.3. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність генеральних дисперсій

Одним із важливих завдань математичної статистики є порівняння двох або кількох дисперсій, яке дає можливість визначити, чи можна вважати вибіркові дисперсії статистичними оцінками однієї і тієї самої дисперсії генеральної сукупності. Таке порівняння застосовується передусім при обчисленні дисперсій за результатами технологічних вимірювань.

Нехай перша вибірка здійснена з генеральної сукупності з ознакою X, дисперсія якої дорівнює $\sigma^2_\Gamma(X)$, друга – з генеральної сукупності з ознакою Y, дисперсія якої дорівнює $\sigma^2_\Gamma(Y)$. Необхідно перевірити правильність нульової гіпотези

$$H_0:\ \sigma^2_\Gamma(X) = \sigma^2_\Gamma(Y).$$

Ця гіпотеза може мати альтернативні гіпотези H_α:

- при H_α: $\sigma^2_\Gamma(X) \neq \sigma^2_\Gamma(Y)$ будується двобічна критична область (рис. 27);
- при H_α: $\sigma^2_\Gamma(X) > \sigma^2_\Gamma(Y)$ будується правобічна критична область (рис. 25);
- при H_α: $\sigma^2_\Gamma(X) < \sigma^2_\Gamma(Y)$ будується лівобічна критична область (рис. 26).

За статистичний критерій береться випадкова величина

$$F = \frac{S^2(X)}{S^2(Y)},$$

яка має розподіл Фішера-Снедекора з $k_1 = n - 1$, $k_2 = m - 1$ ступенями свободи, де n та m – обсяги першої та другої вибірок відповідно.

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\sigma^2_\Gamma(X) = \sigma^2_\Gamma(Y)$ про рівність дисперсій двох нормально розподілених генеральних сукупностей потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$F^* = \frac{S^2(X)}{S^2(Y)}$$

і за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора $F(\alpha; k_1; k_2)$ (при $\alpha = 0{,}01$ додаток 2, табл. 7) за заданим рівнем значущості α та числом ступенів свободи $k_1 = n - 1$, $k_2 = m - 1$ знаходимо критичну область.

- Межами двобічної критичної області є критичні точки $F_{кр.ліва} = \dfrac{1}{F\left(\dfrac{\alpha}{2}, k_2, k_1\right)}$, $F_{кр.права} = F\left(\dfrac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$.

Якщо $F^* \in (F_{кр.ліва}, F_{кр.права})$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше – відхиляємо.

- У випадку правобічної критичної області $F_{кр} = F(\alpha, k_1, k_2)$.

Якщо $F^* < F_{кр}$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше – відхиляємо.

• У випадку лівобічної критичної області $F_{кр} = \dfrac{1}{F(\alpha, k_2, k_1)}$. Якщо $F^* > F_{кр}$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше – відхиляємо.

Приклад. Норми витрат на технічне обслуговування і ремонт нових пожежних автомобілів визначалась у пожежних підрозділах двох областей. Результати показані двома статистичними розподілами:

x_i	0,56	0,6	0,64	0,7	0,74
n_i	4	6	3	2	1

y_j	0,58	0,6	0,62	0,64	0,66
m_j	2	3	10	4	1

Ознаки X і Y (норми витрат) є незалежними випадковими величинами, які мають нормальний закон розподілу. При рівні значущості α = 0,01 перевірити правильність нульової гіпотези

$$H_0\text{: } \sigma_\Gamma^2(X) = \sigma_\Gamma^2(Y),$$

якщо альтернативна гіпотеза

$$H_\alpha\text{: } \sigma_\Gamma^2(X) > \sigma_\Gamma^2(Y).$$

Обсяги вибірок відповідно дорівнюють $n = \sum_i n_i = 16$, $m = \sum_j m_j = 20$. Обчислимо виправлені вибіркові дисперсії $S^2(X)$, $S^2(Y)$:

$$\overline{x}_\text{В} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i = \frac{0,56\cdot 4 + 0,6\cdot 6 + 0,64\cdot 3 + 0,7\cdot 2 + 0,74\cdot 1}{16} = \frac{9,9}{16} = 0,61875;$$

$$\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i = \frac{0,56^2\cdot 4 + 0,6^2\cdot 6 + 0,64^2\cdot 3 + 0,7^2\cdot 2 + 0,74^2\cdot 1}{16} =$$

$$= \frac{6,1708}{16} = 0,385675;$$

$$D_\text{В}(X) = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i - \overline{x}_\text{В}^{\ 2} = 0,385675 - (0,61875)^2 \approx 0,00282;$$

$$S^2(X) = \frac{n}{n-1} D_\text{В}(X) = \frac{16}{15}\cdot 0,00282 \approx 0,003008;$$

$$\overline{y}_{В} = \frac{1}{m}\sum_{j} y_j m_j = \frac{0,58\cdot 2 + 0,6\cdot 3 + 0,62\cdot 10 + 0,64\cdot 4 + 0,66\cdot 1}{20} =$$

$$= \frac{12,38}{20} = 0,619\,;$$

$$\frac{1}{m}\sum_{j} y_j^2 m_j = \frac{0,58^2\cdot 2 + 0,6^2\cdot 3 + 0,62^2\cdot 10 + 0,64^2\cdot 4 + 0,66^2\cdot 1}{20} =$$

$$= \frac{7,6708}{20} = 0,38354\,;$$

$$D_{В}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i} y_i^2 n_i - \left(\overline{y}_{В}\right)^2 = 0,38354 - (0,619)^2 = 0,000379\,;$$

$$S^2(Y) = \frac{m}{m-1}D_{В}(Y) = \frac{20}{19}\cdot 0,000379 \approx 0,000399\,.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$F^* = \frac{S^2(X)}{S^2(Y)} = \frac{0,003008}{0,000399} \approx 7,5388\,.$$

Кількість ступенів свободи дорівнює $k_1 = n - 1 = 15$, $k_2 = m - 1 = 19$. Для альтернативної гіпотези H_α: $\sigma_{Г}^2(X) > \sigma_{Г}^2(Y)$ будуємо правобічну критичну область. Знайдемо за таблицею 7 додатку 2 критичну точку $F_{кр} = F(\alpha = 0,01;\ k_1 = 15;\ k_2 = 19) = 3,15$.

Оскільки $F^* > F_{кр}$, тобто спостережуване значення потрапило у критичну область, то нульова гіпотеза H_0: $\sigma_{Г}^2(X) = \sigma_{Г}^2(Y)$ відхиляється.

5.4. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність невідомої генеральної дисперсії гіпотетичному значенню

Нехай маємо вибірку з нормально розподіленої генеральної сукупності. Висуваємо гіпотезу про рівність генеральної дисперсії $\sigma_{Г}^2(X)$ деякому гіпотетичному значенню a_0

$$H_0:\ \sigma_{Г}^2(X) = a_0\,.$$

Ця гіпотеза може мати альтернативні гіпотези H_α:

- при H_α: $\sigma_{Г}^2(X) \neq a_0$ будується двобічна критична область (рис. 27);

- при H_α: $\sigma_\Gamma^2(X) > a_0$ будується правобічна критична область (рис. 25);
- при H_α: $\sigma_\Gamma^2(X) < a_0$ будується лівобічна критична область (рис. 26).

За статистичний критерій береться випадкова величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2(X)}{a_0},$$

яка має відомий закон розподілу χ^2 (хі-квадрат) з n – 1 ступенями свободи. Тут n – об'єм вибірки, $S^2(X) = \frac{n}{n-1} D_\text{В}(X)$ – виправлена дисперсія.

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\sigma_\Gamma^2(X) = a_0$ про рівність дисперсій нормально розподіленої генеральної сукупності гіпотетичному значенню, потрібно обчислити спостережуване (емпіричне) значення критерію

$$\chi_{емп}^2 = \frac{(n-1)S^2(X)}{a_0}$$

і за таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток 2, табл. 5) за заданим рівнем значущості α та числом ступенів свободи $k = n-1$ знайти критичну область.

- Межами двобічної критичної області є $\chi_{кр.ліва}^2 = \chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, k\right)$,

$\chi_{кр.права}^2 = \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$. Якщо $\chi_{емп}^2 \in (\chi_{кр.ліва}^2, \chi_{кр.права}^2)$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше – відхиляємо.

- У випадку правобічної критичної області $\chi_{кр}^2 = \chi^2(\alpha, k)$.

Якщо $\chi_{емп}^2 < \chi_{кр}^2$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше – відхиляємо.

- У випадку лівобічної критичної області $\chi_{кр}^2 = \chi^2(1-\alpha, k)$.

Якщо $\chi_{емп}^2 > \chi_{кр}^2$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше – відхиляємо.

Приклад. Партія виробів приймається, якщо дисперсія контрольного параметра (розмір, вага тощо) не перевищує 0,2.

Виправлена дисперсія, знайдена для вибірки об'єму $n = 25$, дорівнює $S^2(X) = 0,3$. Чи можна прийняти партію при рівневі значущості 0,01?

Висуваємо гіпотезу

$$H_0:\ \sigma_\Gamma^2(X) = 0,2 .$$

В ролі альтернативної виберемо гіпотезу

$$H_\alpha:\ \sigma_\Gamma^2(X) > 0,2 .$$

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$\chi_{емп}^2 = \frac{(n-1)S^2(X)}{a_0} = \frac{(25-1)\cdot 0,3}{0,2} = 36 .$$

Кількість ступенів свободи дорівнює $k = n - 1 = 24$. Для альтернативної гіпотези H_α: $\sigma_\Gamma^2(X) > 0,2$ будуємо правобічну критичну область. Знайдемо за таблицею 5 додатку 2 критичну точку $\chi_{кр}^2 = \chi^2(0,01; 24) = 42,98$.

Оскільки $\chi_{емп}^2 < \chi_{кр}^2$, тобто спостережуване значення потрапило у допустиму область, то нульова гіпотеза H_0: $\sigma_\Gamma^2(X) = 0,2$ приймається. Партію виробів приймаємо.

Контрольні запитання

1. Як здійснюють перевірку гіпотези про значення генерального середнього?
2. Як здійснюють перевірку гіпотези про рівність генеральних середніх?
3. Як здійснюється перевірка гіпотези про рівність генеральних дисперсій?

6. Перевірка правильності непараметричних статистичних гіпотез

6.1. Емпіричні та теоретичні частоти

Усі перевірки параметричних статистичних гіпотез ґрунтувались на припущенні, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу ймовірностей. Якщо ж розподіл інший, то висновки щодо статистичних гіпотез можуть бути хибними. Тому використання наведених методів перевірки гіпотез можливе у разі достатньої упевненості, що спостережувана ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу або близький до нормального.

Основою для висунення гіпотези про закон розподілу ознаки генеральної сукупності може бути наявність теоретичних передумов про характер зміни ознаки. Інколи підґрунтям для висновків про характер гіпотетичного розподілу можуть бути форми полігону, гістограми.

Приклад. Вимірювалось зношення автошин за місяць. Результати вимірювання наведено у вигляді інтервального статистичного розподілу. Визначити гіпотетично закон розподілу ознаки генеральної сукупності.

$x_i \cdot\cdot x_{i+1}$ $(10^{-2}$ *мм*$)$	[0; 2]	(2; 4]	(4; 6]	(6; 8]	(8; 10]	(10; 12]	(12; 14]	(14; 16]
n_i	48	30	19	14	10	8	6	4

Гістограма частот має вигляд

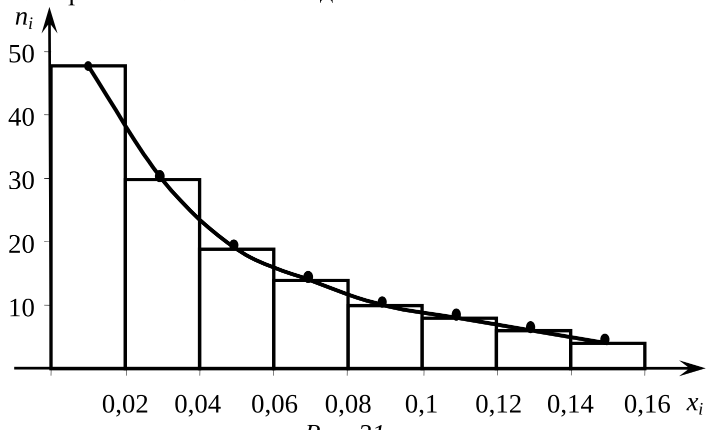


Рис. 31

Якщо з’єднати лінією середини кожного прямокутника гістограми, то дістанемо криву, яка в деякому наближенні подібна до графіка щільності ймовірностей для показникового закону розподілу (рис. 11). Це дає нам підстави для висунення гіпотези про показниковий закон розподілу ознаки генеральної сукупності, яку необхідно перевірити на правильність.

Для перевірки правильності висунутої гіпотези щодо закону розподілу генеральної сукупності потрібно порівняти значення емпіричних та теоретичних частот.

Емпіричними *називають* ***частоти****, які спостерігають при реалізації вибірки, а* ***теоретичними*** n_i' *– які обчислюють згідно з формулою*

$$n_i' = np_i ,$$

де n – обсяг вибірки, p_i – ймовірність спостережуваного значення $X = x_i$ (або ймовірність того, що випадкова величина X потрапить у i-ий інтервал), яка обчислюється за умови, що ознака X має обраний за припущенням закон розподілу ймовірностей.

Приклад. За результатами вибірки, реалізованої з генеральної сукупності, отримано такий інтервальний статистичний розподіл

$x_i .. x_{i+1}$	[80; 90]	(90; 100]	(100; 110]	(110, 120]	(120; 130]
n_i	2	14	60	20	4

Обчислити теоретичні частоти на підставі припущення, що ознака X генеральної сукупності має нормальний закон розподілу.

Теоретичні частоти в цьому випадку обчислюються за формулами

$$n'_i = n\left(\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}_\text{В}}{\sigma_\text{В}}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_\text{В}}{\sigma_\text{В}}\right)\right),$$

де $\Phi(t)$ – інтегральна функція Лапласа.

Значення $\overline{x}_\text{В}$, $\sigma_\text{В}$ обчислюємо за дискретним статистичним розподілом

x_i^*	85	95	105	115	125
n_i	2	14	60	20	4

Отримаємо $\overline{x}_В$ = 106; $D_В$ = 57; $\sigma_В$ = 7,55.

Обчислення теоретичних частот показано в таблиці

x_i	x_{i+1}	n_i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	n_i'
80	90	2	– 3,44	– 2,12	– 0,4997	– 0,4830	2
90	100	14	– 2,12	– 0,79	– 0,4830	– 0,2852	20
100	110	60	– 0,79	0,53	– 0,2852	0,2019	49
110	120	20	0,53	1,85	0,2019	0,4678	27
120	130	4	1,85	3,17	0,4678	0,4992	3

де $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_В}{\sigma_В}$, $z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x}_В}{\sigma_В}$, $\Phi(z_i)$, $\Phi(z_{i+1})$ знаходимо з таблиці 3 додатку 2.

Результати обчислень дають можливість зробити висновок, що ознака генеральної сукупності гіпотетично має нормальний закон розподілу, оскільки розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами є, але вони порівняно незначні. Однак, це твердження необхідно перевірити, скориставшись відповідними методами математичної статистики.

Очевидно, що сума відхилень емпіричних частот від теоретичних не повинна перевищувати певної межі. Для перевірки гіпотези про узгодженість розподілів (порівняння отриманого емпіричного розподілу з деяким теоретичним чи порівняння двох емпіричних розподілів) найчастіше використовують χ^2 – критерій Пірсона.

6.2. Критерій Пірсона

Критерій χ^2 Пірсона застосовують як для перевірки узгодженості емпіричного розподілу із заданим теоретичним, так і для перевірки узгодженості емпіричних розподілів. Критерій є непараметричним.

У першому випадку критерій слугує для перевірки таких гіпотез:

H_0: розподіл ознаки збігається із заданим теоретичним;

H_α: ознака розподілена за відмінним від заданого законом.

Якщо n_i *– емпірична частота варіанти* x_i $(i=\overline{1,m})$*, а* $n_i' = np_i$ *– теоретична частота варіанти* x_i*,* $n=\sum_{i=1}^{m} n_i$ *– об'єм вибірки, то величину*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

називають ***емпіричним значенням*** χ^2 ***– критерію Пірсона****.*

Критичну точку $\chi^2_{кр}$ для заданого рівня значущості α і k ступенів свободи визначають з таблиць критичних значень розподілу χ^2 (додаток 2, табл. 5).

Кількість ступенів свободи k обчислюють так:

$$k = m - q - 1,$$

де m – кількість інтервалів (варіант); q – кількість незалежних параметрів розподілу, які визначають за вибіркою.

Так, наприклад, для нормального закону $q = 2$, оскільки цей закон визначається двома параметрами a та σ.

Якщо всі емпіричні частоти збігаються з теоретичними, то $\chi^2 = 0$, у протилежному випадку $\chi^2 > 0$. Визначивши при заданому рівні значущості α і числі ступенів свободи критичну точку, будують правобічну критичну область. Якщо $\chi^2 \le \chi^2_{кр}$ для рівня значущості α, то приймають гіпотезу H_0, у випадку, коли $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, гіпотезу відхиляють.

Приклад. За даним інтервальним статистичним розподілом випадкової величини X – маса новонародженої дитини при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити гіпотезу H_0 про нормальний закон розподілу ознаки X – маси новонародженої дитини.

x_i .. x_{i+1}	[1; 1,5]	(1,5; 2]	(2; 2,5]	(2,5; 3]	(3; 3,5]	(3,5; 4]	(4; 4,5]
n_i	10	20	50	35	28	15	12

Значення $\overline{x}_В$, $\sigma_В$ обчислюємо за відповідним дискретним статистичним розподілом

x_i^*	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25
n_i	10	20	50	35	28	15	12

Одержуємо: $n = 170$, $\overline{x}_В = 2{,}67$; $\sigma_В = 0{,}79$.

Обчислення теоретичних частот подано в таблиці:

x_i	x_{i+1}	n_i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	n'_i
1	1,5	10	– 2,11	– 1,48	– 0,4827	– 0,4307	9
1,5	2	20	– 1,48	– 0,85	– 0,4307	– 0,3018	22
2	2,5	50	– 0,85	– 0,22	– 0,3018	– 0,0852	37
2,5	3	35	– 0,22	0,42	– 0,0852	0,1619	42
3	3,5	28	0,42	1,05	0,1619	0,3533	33
3,5	4	15	1,05	1,68	0,3533	0,4539	17
4	4,5	12	1,68	2,32	0,4539	0,4897	6

Обчислення спостережуваного значення статистичного критерію χ^2 подано в таблиці:

n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
10	9	1	1	0,11
20	22	– 2	4	0,18
50	37	13	169	4,57
35	42	– 7	49	1,17
28	33	– 5	25	0,76
15	17	– 2	4	0,24
12	6	6	36	6,00

Отже, маємо $\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 13,02$.

За таблицею 5 додатку 2 значень критерію Пірсона при $\alpha = 0,01$ та $k = 7 - 2 - 1 = 4$, $\chi^2_{кр} = 13,28$.

Оскільки $\chi^2 \le \chi^2_{кр}$, то приймаємо гіпотезу про нормальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності X.

<u>Приклад.</u> Отримано такі виміри зросту курсантів першого курсу

x_i .. x_{i+1}	[150; 154]	(154; 158]	(158; 162]	(162; 166]	(166; 170]	(170; 174]	(174; 178]	(178; 182]	(182; 186]	(186; 190]
n_i	2	5	10	14	20	15	10	8	5	1

Визначити закон розподілу генеральної сукупності.

Побудуємо гістограму частот для заданого статистичного розподілу (рис. 32). Якщо з'єднати лінією середини кожного прямокутника гістограми, то дістанемо криву, яка певною мірою подібна до графіка щільності для нормального закону розподілу. Це може бути підставою для висунення гіпотези про нормальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності.

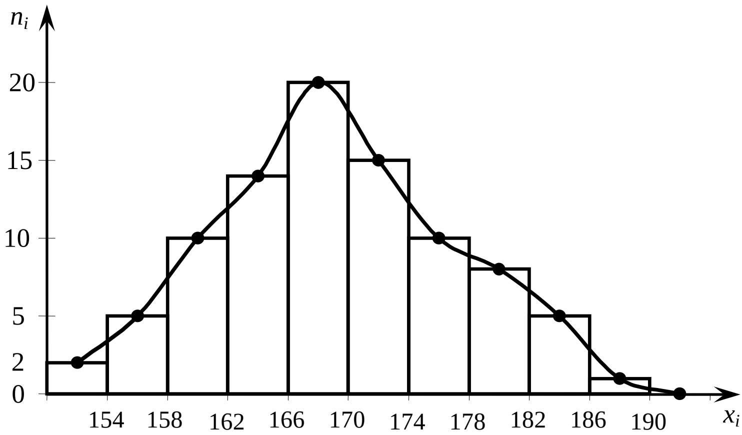


Рис. 32

Визначимо такі статистичні характеристики наведених статистичних даних: n = 90, $\bar{x}_В$ = 169,2, $\sigma_В$ = 7,94.

Обчислення теоретичних частот подано в таблиці:

x_i	x_{i+1}	n_i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	n_i'
150	154	2	– 2,42	– 1,91	– 0,4922	– 0,4719	2
154	158	5	– 1,91	– 1,41	– 0,4719	– 0,4207	5
158	162	10	– 1,41	– 0,91	– 0,4207	– 0,3186	9
162	166	14	– 0,91	– 0,40	– 0,3186	– 0,1554	15

166	170	20	– 0,40	0,10	– 0,1554	0,0398	18
170	174	15	0,10	0,60	0,0398	0,2257	17
174	178	10	0,60	1,11	0,2257	0,3665	13
178	182	8	1,11	1,61	0,3665	0,4463	7
182	186	5	1,61	2,12	0,4463	0,4830	3
186	190	1	2,12	2,62	0,4830	0,4956	1

Обчислення спостережуваного значення статистичного критерію χ^2 подано в таблиці:

n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
2	2	0	0	0,00
5	5	0	0	0,00
10	9	1	1	0,11
14	15	– 1	1	0,07
20	18	2	4	0,23
15	17	– 2	4	0,24
10	13	– 3	9	0,71
8	7	1	1	0,14
5	3	2	4	1,21
1	1	0	0	0,00

Отже, маємо $\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 2,71$.

За таблицею 5 додатку 2 значень критерію Пірсона при α = 0,01 та k = 10 – 2 – 1 = 7, $\chi^2_{кр}$ = 18,48.

Оскільки $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то гіпотезу про нормальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності X приймаємо.

Контрольні запитання

1. Як гіпотетично можна визначити закон розподілу ознаки генеральної сукупності?
2. Що таке теоретичні та емпіричні частоти?
3. Як знаходять емпіричне та критичне значення критерію Пірсона?

7. Елементи кореляційного та регресійного аналізу

7.1. Основні поняття

При сумісній появі двох і більшої кількості величин у результаті проведення експерименту дослідник має підстави для встановлення певної залежності між ними. У реальному світі строгої функціональної залежності між величинами не існує, оскільки вони перебувають під впливом різних факторів, наслідки яких передбачити неможливо. Така залежність у математичній статистиці дістала назву *статистичної залежності*.

Для двовимірного статистичного розподілу вибірки ознак X та Y поняття статистичної залежності між ними має таке визначення.

***Статистичною залежністю** X **від** Y називають залежність, за якої при зміні значень ознаки $Y = y_i$ змінюється умовний статистичний розподіл ознаки X.*

Показником, що вимірює статистичну залежність між величинами, є *коефіцієнт кореляції*, який свідчить наскільки зв'язок між ними близький до строгої лінійної залежності. Значно збільшується цінність коефіцієнта кореляції для випадкових величин, що мають закон розподілу ймовірностей, близький до нормального. Для таких величин відсутність кореляції одночасно означає і відсутність будь-якої залежності між ними.

У разі зміни умовних статистичних розподілів змінюватимуться і умовні числові характеристики. Звідси випливає визначення кореляційної залежності між величинами X та Y.

***Умовним середнім** $\overline{y}_x$ називається середнє арифметичне значень Y, які відповідають значенню $X = x$.*

***Кореляційною залежністю** величини Y від X називається функціональна залежність умовного середнього $\overline{y}_x$ від аргумента x, тобто*

$$\overline{y}_x = f(x)\,. \tag{2.3}$$

Рівняння (2.3) називають ***рівнянням регресії** Y **на** X,* функцію $f(x)$ називають ***регресією** Y **на** X,* а її графік – ***лінією регресії** Y **на** X.*

Між величинами X та Y може існувати статистична залежність і за відсутності кореляційної. Але коли існує кореляційна залежність між величинами X та Y, то обов'язково між ними існуватиме і статистична залежність.

Отже, *кореляційний аналіз* досліджує наявність і характер зв'язків між випадковими величинами X та Y – ознаками генеральної сукупності.

За наявності кореляційного зв’язку між величинами можна також встановити форму функціональної залежності – лінійну $Y = a X + b$ чи нелінійну (наприклад, $Y = a X^2 + b X + c$).

Таким чином, *регресійний аналіз* встановлює аналітичну форму залежності між випадковими величинами X та Y – ознаками генеральної сукупності.

7.2. Вибірковий коефіцієнт кореляції

Нехай X та Y – випадкові величини, зв’язок між якими треба вивчити. В результаті n випробувань одержали вибірку n пар значень цих величин (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_n, y_n).

З теорії ймовірностей відомо, що ступінь зв’язку між випадковими величинами X та Y визначається такими числовими характеристиками їхнього сумісного розподілу як *коваріація* $COV(X, Y)$ та *коефіцієнт кореляції* $\rho(X, Y)$, які обчислюються за формулами

$$COV(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y),$$

$$\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Нагадаємо, що коли випадкові величини X і Y незалежні, то $COV(X, Y) = 0$. Якщо $COV(X, Y) \neq 0$, то випадкові величини X і Y – залежні. Але, якщо $COV(X, Y) = 0$, то це не означає, що випадкові величини X і Y є незалежними. Якщо залежність між X та Y є строго лінійною, тобто існують такі числа a та b, що $Y = a X + b$, то $|\rho(X, Y)| = 1$. Якщо $\rho(X, Y) = 0$, то випадкові величини X і Y називаються *некорельованими*, а якщо $\rho(X, Y) \neq 0$, то випадкові величини X і Y – *корельовані*.

Основна задача кореляційного аналізу – дослідження наявності кореляційного зв’язку між величинами X та Y – може бути розв’язана шляхом побудови точкових та інтервальних оцінок коефіцієнта кореляції.

Точкову оцінку $\rho^*(X,Y)$ для коефіцієнта кореляції $\rho(X, Y)$ обчислюємо за формулою:

$$\rho^*(X,Y) = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y})^2\right)}}, \quad (2.4)$$

де $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – вибіркове середнє добутку XY; $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ – вибіркові середні значення випадкових величин X та Y відповідно; $\sigma(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2$, $\sigma(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\overline{y})^2$ – вибіркові середні квадратичні відхилення випадкових величин *X* та *Y* відповідно.

Точкова оцінка $\rho^*(X,Y)$ *коефіцієнта кореляції випадкових величин X* та *Y, яка обчислюється за формулою* (2.4)*, називається* ***вибірковим коефіцієнтом кореляції***.

Вибірковий коефіцієнт кореляції $\rho^*(X,Y)$, який задовольняє нерівність $|\rho^*(X,Y)| \leq 1$, характеризує зв'язок між випадковими величинами *X* та *Y*, причому чим ближче $|\rho^*(X,Y)|$ до одиниці, тим зв'язок сильніший; чим ближче $|\rho^*(X,Y)|$ до нуля, тим зв'язок слабший:

– якщо $\rho^*(X,Y) > 0$, то зв'язок між X і Y додатний і вони зменшуються або збільшуються одночасно;

– якщо $\rho^*(X,Y) < 0$, то зв'язок між X і Y від'ємний і зі збільшенням однієї з них друга зменшується або навпаки;

– якщо $\rho^*(X,Y) = 0$, то випадкові величини *X* і *Y* некорельовані і це означає лише відсутність лінійного зв'язку між ними.

Нехай вибірковий коефіцієнт кореляції, обчислений на основі вибірки за формулою (2.4), не дорівнює нулю. Оскільки вибірка є випадковою, то звідси ще не можна робити висновок, що коефіцієнт кореляції генеральної сукупності також не дорівнює нулю. Таким чином, виникає необхідність перевірити гіпотезу про те, *чи коефіцієнт кореляції генеральної сукупності не дорівнює нулю*. Якщо гіпотеза про рівність нулю коефіцієнта кореляції генеральної сукупності буде відкинута, то коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю (випадкові величини *X* та *Y* корельовані); якщо названа гіпотеза буде прийнята, то коефіцієнт кореляції близький до нуля (випадкові величини *X* та *Y* некорельовані).

Якщо компоненти двовимірної генеральної сукупності (*X*, *Y*) розподілені нормально, то за критерій перевірки нульової гіпотези $H_0 : \rho(X,Y) = 0$ про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції вибирають випадкову величину

$$t = \rho^*(X,Y) \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(\rho^*(X,Y))^2}},$$

де $\rho^*(X,Y)$ – вибірковий коефіцієнт кореляції, n – обсяг вибірки.

Випадкова величина t має розподіл Стьюдента з $k = n - 2$ ступенями свободи. Нульову гіпотезу $H_0 : \rho(X,Y) = 0$ за альтернативної гіпотези $H_\alpha : \rho(X,Y) \neq 0$, перевіряємо таким чином:

а) обчислюємо спостережене значення критерію

$$t^* = \rho^*(X,Y) \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(\rho^*(X,Y))^2}};$$

б) для заданого рівня значущості α і числа ступенів свободи $k = n - 2$ за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (додаток 2, табл. 6) визначаємо критичну точку $t_{кр}$ двосторонньої критичної області:

- якщо $|t^*| \leq t_{кр}$, то нульову гіпотезу H_0 приймаємо;
- якщо $|t^*| \geq t_{кр}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляємо.

Якщо обсяг вибірки є достатньо великим і добре відображає генеральну сукупність (вибірка є репрезентативною), то висновок про характер лінійної залежності між випадковими величинами X та Y, одержаний на основі вибірки, може бути поширений і на генеральну сукупність. При цьому для інтервальної оцінки коефіцієнта кореляції $\rho(X, Y)$ нормально розподіленої генеральної сукупності можна використати формулу (якщо $n \geq 100$):

$$\left|\rho(X,Y) - \rho^*(X,Y)\right| \leq t_{кр} \cdot \frac{1-(\rho^*(X,Y))^2}{\sqrt{n}},$$

де $t_{кр}$ – розв’язок рівняння $\Phi(t_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

7.3. Рівняння лінійної регресії

Нехай між випадковими величинами X та Y теоретично існує певна лінійна залежність $Y = aX + b$ та (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_n, y_n) – незгрупована вибірка обсягу n, причому різні значення x_i випадкової величини X і відповідні їм значення y_i випадкової величини Y спостерігались по одному разу. Необхідно визначити параметри a та b. Істинні значення цих параметрів одержати неможливо, оскільки використовується інформація, здобута від вибірки обмеженого обсягу. Тому знайдені значення параметрів будуть лише статистичними оцінками істинних (невідомих) параметрів a та b. Позначимо їх a^* та b^*.

Щоб знайти параметри a^* та b^* використовують метод найменших квадратів. Ідея цього методу полягає в тому, що за статистичні (точкові) оцінки a^* та b^* параметрів a та b вибирають такі числа, для яких пряма $Y = a^*X + b^*$ є найближчою до точок (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_n, y_n). Відповідно до цього методу рівняння лінійної регресії $Y = a^*X + b^*$ необхідно вибирати так, щоб сума квадратів відхилень спостережуваних значень від лінії регресії була б мінімальною, тобто

$$S(a^*,b^*) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a^* x_i + b^*) \right]^2 \to \min ,$$

де y_i – спостережуване значення ознаки Y, яке дістали внаслідок реалізації вибірки; $a^* x_i + b^*$ – значення ознаки Y, обчислене за умови, що $X = x_i$. З необхідної умови існування мінімуму функції $S(a^*,b^*)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(a^*,b^*)}{\partial a^*} = 0, \\ \dfrac{\partial S(a^*,b^*)}{\partial b^*} = 0, \end{cases}$$

одержуємо систему лінійних рівнянь відносно параметрів a^* та b^*, а саме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(a^*,b^*)}{\partial a^*} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a^* x_i + b^*) \right] \cdot (-x_i) = 0, \\ \dfrac{\partial S(a^*,b^*)}{\partial b^*} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a^* x_i + b^*) \right] = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} a^* \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) + b^* \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i , \\ a^* \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + b^* \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i . \end{cases} \tag{2.5}$$

Оскільки $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, то

$$\begin{cases} a^{*}\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)+b^{*}\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \qquad\qquad a^{*}\overline{x}+b^{*}=\overline{y} \end{cases} \tag{2.6}$$

Розв'язавши систему (2.6) відносно параметрів a^{*} та b^{*}, одержуємо:

$$\begin{cases} \qquad b^{*}=\overline{y}-a^{*}\overline{x}, \\ a^{*}=\dfrac{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)-\ \overline{x}\ ^{2}}=\dfrac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma^2(X)}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Помноживши ліву і праву частини другого рівняння системи (2.7) на $\dfrac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}$, матимемо:

$$\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}a^{*}=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\rho^{*}(X,Y)\Rightarrow a^{*}=\rho^{*}(X,Y)\cdot\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}.$$

Тоді

$$b^{*}=\overline{y}-a^{*}\overline{x}=\overline{y}-\rho^{*}(X,Y)\cdot\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\cdot\overline{x}.$$

Підставивши у рівняння $Y=a^{*}X+b^{*}$ знайдені значення a^{*} та b^{*}, дістанемо шукане вибіркове рівняння лінійної регресії *Y* на *X*

$$Y=\rho^{*}(X,Y)\cdot\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\cdot\ X-\overline{x}\ +\overline{y}.$$

Аналогічно, можна отримати рівняння лінійної регресії *X* на *Y*

$$X=\rho^{*}(X,Y)\cdot\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}\cdot\ Y-\overline{y}\ +\overline{x}.$$

Приклад. Зв'язок між ознаками *X* та *Y* генеральної сукупності задається таблицею

X	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Y	21	22	25	26	29	30	33	34	37	38

Записати вибіркове рівняння лінійної регресії *Y* на *X*.

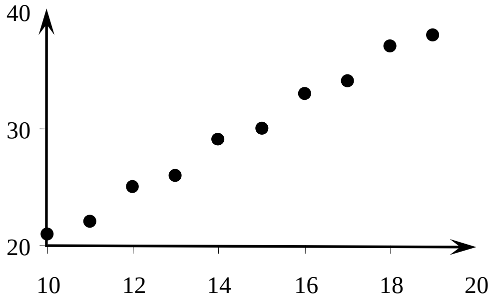


Рис. 33

Геометричне розташування точок (x_i, y_i) (рис. 33) підтверджує, що залежність між X та Y є близька до лінійної.

Щоб переконатись в тому, що наше припущення про лінійність зв'язку між X і Y є правильним, обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції за формулою (2.4):

$$\rho^*(X,Y) = \frac{\frac{1}{10}\cdot 4440 - \frac{1}{100}\cdot 145\cdot 295}{\sqrt{\left(\frac{1}{10}\cdot 2185 - 14{,}5^2\right)\cdot\left(\frac{1}{10}\cdot 9025 - 29{,}5^2\right)}} = \frac{16{,}25}{\sqrt{8{,}25\cdot 32{,}25}} \approx 0{,}996 .$$

Оскільки вибірковий коефіцієнт кореляції $\rho^*(X,Y)$ є досить близьким до одиниці, то припущення про лінійність зв'язку між X і Y є правильним. Крім того, $\rho^*(X,Y) > 0$, тому зв'язок між X і Y є додатний і ці випадкові величини збільшуються одночасно.

Для запису системи рівнянь (2.5), з якої визначаємо точкові оцінки для коефіцієнтів a та b, складемо таблицю:

№	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	10	21	100	441	210
2	11	22	121	484	242
3	12	25	144	625	300
4	13	26	169	676	338
5	14	29	196	841	406
6	15	30	225	900	450
7	16	33	256	1089	528
8	17	34	289	1156	578
9	18	37	324	1369	666

10	19	38	361	1444	722
$\sum_{i=1}^{10}$	145	295	2185	9025	4440

Тоді система рівнянь (2.5) набуває вигляду

$$\begin{cases} 2185 \cdot a^* + 145 \cdot b^* = 4440, \\ 145 \cdot a^* + 10 \cdot b^* = 295. \end{cases}$$

Звідси $a^* = \dfrac{1625}{825} \approx 1,97$, $b^* = \dfrac{31}{33} \approx 0,94$.

Отже, вибіркове рівняння лінійної регресії

$$Y = 1,97X + 0,94 .$$

Контрольні запитання

1. Що таке статистична залежність між випадковими величинами?
2. Що таке кореляційна залежність між випадковими величинами?
3. Записати формулу вибіркового коефіцієнта кореляції.
4. Основні властивості вибіркового коефіцієнта кореляції.
5. Дати означення вибіркового рівняння регресії *Y* на *X*.

8. Елементи дисперсійного аналізу

8.1. Поняття про дисперсійний аналіз

Нехай генеральні сукупності $X_1, X_2, ..., X_p$ розподілено за нормальним законом та мають однакову невідому дисперсію, математичні сподівання невідомі, але можуть бути різними. Потрібно при заданому рівні значущості за вибірковим середнім перевірити нульову гіпотезу

$$H_0 : M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_p)$$

про рівність всіх математичних сподівань даних генеральних сукупностей. Іншими словами, потрібно встановити істотно чи неістотно відрізняються генеральні середні. Здається, що для перевірки даної гіпотези порівняння декількох середніх ($p > 2$) можна проводити попарно. Але зі зростанням кількості середніх зростає й найбільша відмінність між ними. Тому для порівняння декількох середніх користуються іншим методом, який базується на порівнянні дисперсій і тому називається *дисперсійним аналізом*.

Дисперсійний аналіз (в основному розвинутий англійським статистиком Р.А. Фішером) був створений спочатку для статистичної обробки агрономічних дослідів. Наприклад, щоб з'ясувати, який вид добрива найефективнішний для отримання найбільшого врожаю. В загальному дисперсійний аналіз застосовують, щоб встановити чи впливає деякий якісний фактор F, який має p рівнів $F_1, F_2, ..., F_p$, на досліджувану величину X. Основна ідея дисперсійного аналізу полягає у порівнянні "факторної дисперсії", яка виникає під час дії фактора, і "залишкової дисперсії", яка зумовлена випадковими величинами. Якщо відмінність між цими дисперсіями є значною, стверджують, що фактор F суттєво впливає на величину X. Якщо вже встановлено, що фактор істотно впливає на величину X, а потрібно з'ясувати, який з рівнів F_i впливає найбільше, тоді додатково проводять попарне порівняння середніх. Іноді дисперсійний аналіз використовують для того, щоб встановити однорідність декількох сукупностей, дисперсії яких однакові за припущенням. Якщо дисперсійний аналіз покаже, що математичні сподівання однакові, то в цьому сенсі сукупності однорідні. Однорідні сукупності можна об'єднати в одну й тим самим отримати більш повну інформацію про неї, а отже й більш надійні висновки.

В більш складних випадках досліджують вплив декількох факторів на декількох постійних чи випадкових рівнях і з'ясовують вплив окремих рівнів або їх комбінацій (багатофакторний аналіз).

8.2. Однофакторний дисперсійний аналіз при однаковій кількості випробувань на всіх рівнях

Нехай на кількісно нормально розподілену ознаку X діє якісний фактор F, який має p сталих рівнів $F_1, F_2, ..., F_p$. На кожному з рівнів проведено q випробувань. Результати спостережень – числа x_{ij} записують у вигляді таблиці (тут i – номер випробування, j – номер рівня фактора), $i = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, p}$

Номер випр. *i*	**Рівні фактора**			
	F_1	F_2	$\cdots$	F_p
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2p}
$\vdots$			$\cdots$	
q	x_{q1}	x_{q2}	$\cdots$	x_{qp}
Групові середні	$\overline{x}_{\text{гр}1}$	$\overline{x}_{\text{гр}2}$	$\cdots$	$\overline{x}_{\text{гр}\,p}$

На рівні значущості α потрібно перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх за припущенням, що групові генеральні дисперсії хоча й невідомі, але однакові.

Для розв’язання цієї задачі необхідно визначити факторну (міжгрупову) дисперсію, зумовлену впливом досліджуваного фактора на ознаку X, і залишкову (внутрішньогрупову) дисперсію, зумовлену впливом інших випадкових факторів. Для цього вводять:

- *загальну суму* як суму квадратів відхилень спостережуваних значень ознаки від загального середнього $\overline{x} = \dfrac{1}{pq}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} x_{ij}$:

$$S_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij} - \overline{x}\right)^2; \qquad (2.8)$$

- *факторну суму як* суму квадратів відхилень групових середніх $\overline{x}_{\text{гр}\,j} = \dfrac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} x_{ij}$, $j = \overline{1, p}$ від загального середнього:

$$S_{\text{факт}} = q\sum_{j=1}^{p} \left(\bar{x}_{\text{гр}\,j} - \bar{x}\right)^2 ; \tag{2.9}$$

- *залишкову суму* як суму квадратів відхилень спостережуваних значень групи від свого групового середнього

$$S_{\text{залиш}} = \sum_{i=1}^{q} \left(x_{i1} - \bar{x}_{\text{гр}1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{q} \left(x_{i2} - \bar{x}_{\text{гр}2}\right)^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{q} \left(x_{ip} - \bar{x}_{\text{гр}\,p}\right)^2 . \tag{2.10}$$

На практиці залишкову суму знаходять за формулою

$$S_{\text{залиш}} = S_{\text{заг}} - S_{\text{факт}} . \tag{2.11}$$

Для обчислення загальної та факторної сум зручніше користуватися формулами

$$S_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^{p} P_j - \frac{1}{pq}\left(\sum_{j=1}^{p} R_j\right)^2 , \tag{2.12}$$

$$S_{\text{факт}} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{p} R_j^2 - \frac{1}{pq}\left(\sum_{j=1}^{p} R_j\right)^2 , \tag{2.13}$$

де $P_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$, $R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}$, $j = \overline{1, p}$.

Якщо спостережувані значення ознаки – порівняно великі числа, то для спрощення обчислень віднімають від кожного спостережуваного значення число *C*, яке приблизно дорівнює загальному середньому $\bar{x}$:

$$y_{ij} = x_{ij} - C ,$$

тоді

$$S_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^{p} Q_j - \frac{1}{pq}\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2 , \quad S_{\text{факт}} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{p} T_j^2 - \frac{1}{pq}\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2 ,$$

де $Q_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2$, $T_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$, $j = \overline{1, p}$.

Знайдемо факторну та залишкову виправлені дисперсії:

$$s_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{p-1} , \quad s_{\text{залиш}}^2 = \frac{S_{\text{залиш}}}{p(q-1)} . \tag{2.14}$$

Порівняємо за критерієм Фішера-Снедекора факторну та залишкову дисперсії. Для цього обчислимо спостережуване значення критерію

$$F^* = \frac{s_{\text{факт}}^2}{s_{\text{залиш}}^2} . \tag{2.15}$$

Число ступенів свободи факторної дисперсії $k_1 = p - 1$, залишкової дисперсії $k_2 = p\ (q - 1)$. За таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора $F(\alpha; k_1; k_2)$ (при $\alpha = 0{,}01$ додаток 2, табл. 7) за заданим рівнем значущості α та числом ступенів свободи k_1 та k_2 знаходимо критичну область.

Якщо $F^* \le F_{кр}$, то групові середні відрізняються неістотно (нульова гіпотеза приймається), тобто стверджуємо, що вплив фактора F неістотний. Якщо ж $F^* > F_{кр}$, то групові середні значно відрізняються, вплив фактора F істотний (нульову гіпотезу відхиляємо).

Зауваження. Якщо $s^2_{\text{факт}} < s^2_{\text{залиш}}$, то із нерівності безпосередньо випливає справедливість нульової гіпотези, тому подальша перевірка за допомогою критерію Фішера-Снедекора не потрібна.

Приклад. Експериментально досліджувався вплив на зносостійкість колінчастих валів технології їх виготовлення – вплив фактора F, який має три рівні, тобто застосовувалися три технології виготовлення валів. Одержані результати наведено в таблиці:

Номер випр. *i*	**Кількість відпрацьованих місяців**		
	F_1	F_2	F_3
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34

При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ з’ясувати вплив технологій на зносостійкість валів.

Маємо $p = 3$ рівні фактора F та $q = 4$ випробувань на кожному рівні. Знайдемо загальне середнє:

$$\overline{x} = \frac{1}{3 \cdot 4} \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 29\,.$$

Для спрощення розрахунків віднімемо від кожного спостережуваного значення x_{ij} загальне середнє $\overline{x} = 29$. Обчислення наведемо у вигляді таблиці:

Номер випроб.	Рівні фактора						
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	9	81	– 9	81	– 8	64	
2	7	49	– 5	25	– 7	49	
3	6	36	– 3	9	2	4	
4	2	4	1	1	5	25	
$Q_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2,$		170		116		142	$\sum_{j=1}^{p} Q_j$ =428
$T_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij},$	24		– 16		– 8		$\sum_{j=1}^{p} T_j$ = 0
T_j^2	576		256		64		$\sum_{j=1}^{p} T_j^2$ =896

Отримаємо

$$S_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^{p} Q_j - \frac{1}{pq}\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2 = 428 - 0 = 428,$$

$$S_{\text{факт}} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{p} T_j^2 - \frac{1}{pq}\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2 = \frac{896}{4} - 0 = 224,$$

$$S_{\text{залиш}} = S_{\text{заг}} - S_{\text{факт}} = 428 - 224 = 204.$$

Обчислюємо відповідні дисперсії

$$s_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{p-1} = \frac{224}{3-1} = 112,\; s_{\text{залиш}}^2 = \frac{S_{\text{залиш}}}{p(q-1)} = \frac{204}{3\cdot(4-1)} \approx 22,67.$$

Порівняємо за критерієм Фішера-Снедекора факторну та залишкову дисперсії. Обчислимо спостережуване значення критерію

$$F^* = \frac{s_{\text{факт}}^2}{s_{\text{залиш}}^2} \approx \frac{112}{22,67} \approx 4,94.$$

За таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора $F(\alpha; k_1; k_2)$ (додаток 2, табл. 7) за заданим рівнем значущості $\alpha = 0,01$ та числом ступенів свободи $k_1 = p - 1 = 2$ та $k_2 = p(q-1) = 9$ знаходимо критичну точку

$$F_{кр}(\alpha = 0{,}01;\, k_1 = 2;\, k_2 = 9) = 8{,}02 .$$

Оскільки $F^* < F_{кр}$, то звідси робимо висновок, що групові середні відрізняються несуттєво, тобто вплив технологій на зносостійкість валів є неістотним.

8.3. Однофакторний дисперсійний аналіз при різній кількості випробувань на різних рівнях

Якщо кількість випробувань на різних рівнях є неоднаковою, а саме: на рівні F_1 – q_1, F_2 – q_2,…, F_p – q_p, то загальну суму $S_{заг}$ обчислюють за формулою (2.8) або (2.12), а факторну суму – за формулою

$$S_{факт} = \frac{R_1^2}{q_1} + \frac{R_2^2}{q_2} + \ldots \frac{R_p^2}{q_p} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p} R_j^2 ,$$

де $R_j = \sum_{i=1}^{q_j} x_{ij}$, $j = \overline{1, p}$, а $n = q_1 + q_2 + \ldots + q_p$ – загальна кількість випробувань.

Решту обчислень проводять, як і в попередньому випадку:

$$S_{залиш} = S_{заг} - S_{факт} ,$$

$$s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{p-1} ,\quad s^2_{залиш} = \frac{S_{залиш}}{n-p} .$$

Контрольні запитання

1. Що вивчає дисперсійний аналіз?
2. Записати математичну модель для однофакторного дисперсійного аналізу.
3. Що називають внутрішньогруповою дисперсією?
4. Що називають міжгруповою дисперсією?
5. Як обчислюється виправлена дисперсія, що характеризує розсіювання всередині групи?
6. Як обчислюється виправлена дисперсія, що характеризує вплив фактора?
7. Який статистичний критерій використовується для перевірки істотності впливу фактора на досліджувану ознаку *X*?

Задачі до розділу II

1. Знайти емпіричну функцію заданого розподілу вибірки та побудувати її графік:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

2. Побудувати полігон частот та відносних частот заданого розподілу вибірки:

x_i	32	4	5	7
n_i	20	5	10	15

3. Побудувати гістограму частот та відносних частот заданого розподілу вибірки:

Інтервали	[1; 5]	(5; 9]	(9; 13]	(13; 17]	(17; 21]
Частоти	10	20	50	12	8

4. Для заданої вибірки із генеральної сукупності скласти розподіли частот, відносних частот та побудувати полігони частот, відносних частот:

   а) 7, 4, 4, 8, 12, 12, 12, 7, 8, 12, 8, 12, 4, 12, 12, 4, 12, 4, 12, 12;
   б) 7, 3, 10, 4, 7, 7, 3, 4, 10, 3, 7, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 7, 7.

5. Дано результати досліджень кількості викликів пожежної служби за день протягом ста днів у деякому районному центрі:

106	105	108	101	101	105	105	103	104	100
100	104	105	104	102	103	102	102	107	102
104	104	105	107	108	102	104	103	102	101
103	103	104	106	106	103	103	103	105	102
103	103	106	105	107	104	103	103	102	106

   Побудувати:
   а) варіаційний ряд, статистичні розподіли частот (відносних частот);
   б) полігон частот (відносних частот);
   в) гістограму частот (відносних частот), розбивши вибірку на 5 рівних інтервалів;
   г) записати емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

6. Після вимірювання діаметрів 30 підшипників отримали дані:

85,1	86,9	85,9	85,3	85,2	84,6
85,1	85,5	86,1	85,1	84	84,6
85,4	85,4	84,3	84,5	84,7	86,4
83,9	85,6	85	85,3	84,2	84,9
86,2	84,7	86	85,8	85,8	84,2

Записати інтервальний статистичний розподіл та побудувати гістограму частот.

7. В результаті спостереження над 30 лампами отримали такий час горіння (діб):

63	48	51	72	55	56
63	51	51	54	48	55
63	56	55	72	51	48
48	63	51	55	72	56
55	72	48	48	72	51

Записати таблицю частот, побудувати полігон, гістограму частот, знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

8. В наступній таблиці наведено згрупований розподіл частоти кількості курсантів університету в залежності від часу, що вони затратили на підготовку до виклику у секундах:

Кількість секунд	[50; 60]	(60; 70]	(80; 90]	(90; 100]	(100; 110]	(110; 120]	(120; 130]
Число курсантів	11	22	40	74	43	8	2

Побудувати гістограму та полігон частот (відносних частот).

9. П'ятдесят абітурієнтів на вступних іспитах з математики дістали таку кількість балів (за 20 - бальною шкалою):

12	17	19	15	14	18	13	16	12	14
20	14	15	13	17	16	20	14	13	17
17	15	15	19	16	15	18	17	14	16
16	16	15	18	15	15	19	14	18	15
18	14	15	17	15	16	16	14	17	15

Побудувати дискретний статистичний розподіл, полігон частот та $F^*(x)$; обчислити $\overline{x}_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{В}}$. Знайти Mo^*, Me^*.

Відповідь: $\overline{x}_{\text{В}} = 15,78$; $\sigma_{\text{В}} \approx 1,93$; $Mo^* = 15$; $Me^* = 16$.

10. Із партії однотипних сталевих болтів, виготовлених заводом, була здійснена вибірка обсягом 200 шт. Результати вимірювання їх діаметрів x_i наведено у вигляді статистичного розподілу:

***x*, мм, *h* = 2 мм**	[14,40; 14,42]	(14,42; 14,44]	(14,44; 14,46]	(14,46; 14,48]	(14,48; 14,50]	(14,50; 14,52]	(14,52; 14,54]	(14,54; 14,56]	(14,56; 14,58]	(14,58; 14,60]	(14,60; 14,62]	(14,62; 14,64]
n_i	2	2	8	9	9	14	41	76	21	11	4	3

Побудувати гістограму частот і $F^*(x)$; обчислити $\overline{x}_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{В}}$. Знайти *Mo**, *Me**.

Відповідь: $\overline{x}_{\text{В}} = 14,5407$; $\sigma_{\text{В}} \approx 0,039$; *Mo** ≈ 14,55; *Me** ≈ 14,54.

11. У відділі технічного контролю було виміряно діаметри 200 валиків із партії, виготовленої одним верстатом-автоматом. Відхилення виміряних діаметрів від номіналу наведено як інтервальний статистичний розподіл, де *x* вимірюється у мікронах:

***x*, мм, *h* = 5 мм**	[– 20; – 15]	(– 15; – 10]	(– 10; – 5]	(– 5; 0]	(0; 5]	(5; 10]	(10; 15]	(15; 20]	(20; 25]	(25; 30]
n_i	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Побудувати гістограму частот і $F^*(x)$; обчислити $\overline{x}_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{В}}$. Знайти *Mo**, *Me**.

Відповідь: $\overline{x}_{\text{В}} = 4,3$; $\sigma_{\text{В}} \approx 9,7088$; *Mo** ≈ 4,39; *Me** ≈ 0,76.

12. 200 однотипних деталей після шліфування були піддані контрольним вимірюванням, результати яких наведено у таблиці:

x_i, **мм**	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2	4,3	4,4
n_i	1	22	40	79	27	26	4	1

Обчислити $\overline{x}_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{В}}$. Знайти *Mo**, *Me**.

Відповідь: $\overline{x}_{\text{В}} = 4,004$; $\sigma_{\text{В}} \approx 0,126$; *Mo** = 4; *Me** = 4,05.

13. З допомогою лазерного далекоміра було здійснено 16 вимірювань однієї і тієї ж відстані. Результати вимірювання в

метрах наведено у вигляді статистичного ряду: 201, 195, 207, 203, 191, 208, 198, 210, 204, 192, 195, 211, 206, 196, 208, 197. Обчислити $\overline{x}_В$, $\sigma_В$. Знайти *Mo**, *Me**.

Відповідь: $\overline{x}_В = 201{,}375$; $\sigma_В \approx 13{,}852$; *Mo** = 195,208; *Me** = 202.

14. Проводилось 5 вимірювань довжини стержня одним приладом (без систематичних помилок), внаслідок чого отримані такі результати: $x_1 = 90$, $x_2 = 92$, $x_3 = 101$, $x_4 = 103$, $x_5 = 104$. Знайти: а) вибіркову середню довжину стержня; б) вибіркову і виправлену дисперсії помилок приладу.
Відповідь:а) 98; б) 34; 42,5.

15. Зроблено 5 рівноточкових вимірів відстані зброї до цілі одним приладом із середнім квадратичним відхиленням випадкових помилок вимірювання $\sigma = 40$ м. Знайти довірчий інтервал для оцінки справжньої відстані *a* до цілі з надійністю $\gamma = 0{,}95$, знаючи середнє арифметичне результатів вимірів $\overline{x}_В = 2000$ м.
Відповідь: $1964{,}9 < a < 2035{,}1$.

16. Вибірка з великої партії електроламп містить 100 ламп. Середній час горіння лампи вибірки виявився рівним 1000 год. Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал для середнього часу *a* горіння лампи всієї партії, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення часу горіння лампи $\sigma = 40$ год.
Відповідь: $992{,}16 < a < 1007{,}84$.

17. За заданими 9 незалежними рівноточковими вимірами деякої фізичної величини знайдено середнє арифметичне результатів вимірів $\overline{x}_В = 30{,}1$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 6$. Оцінити справжнє значення виміряної величини за допомогою довірчого інтервалу з надійністю $\gamma = 0{,}99$.
Відповідь: $23{,}38 < a < 36{,}82$.

18. Проведено 10 вимірювань одним приладом (без систематичних помилок) деякої фізичної величини, причому виправлене середнє квадратичне відхилення випадкових помилок вимірювань дорівнює 0,8. Знайти точність приладу з надійністю $\gamma = 0{,}95$.
Відповідь: $0{,}28 < \sigma < 1{,}32$.

19. Із нормально розподіленої генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0{,}5$ одержано вибірку обсягом $n = 25$ і за нею знайдено вибіркове середнє $\overline{x}_В = 78{,}11$. Для

рівня значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити гіпотезу H_0: $\bar{x}_Г = a_0 = 78$ за наявності альтернативної гіпотези H_α: $\bar{x}_Г \neq a_0$.

Відповідь: нульову гіпотезу приймаємо.

20. Із нормально розподіленої генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 2{,}4$ одержано вибірку обсягом $n = 9$ і за нею знайдено вибіркове середнє $\bar{x}_В = 72$. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити гіпотезу H_0: $\bar{x}_Г = a_0 = 72{,}2$ за наявності альтернативної гіпотези H_α: $\bar{x}_Г < a_0$.

    Відповідь: нульову гіпотезу приймаємо.

21. За вибіркою обсягу $n = 16$ з нормально розподіленої генеральної сукупності знайдено вибіркове середнє $\bar{x}_В = 89{,}22$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 0{,}6$. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу H_0: $\bar{x}_Г = a_0 = 89$ за наявності альтернативної гіпотези H_α: $\bar{x}_Г > a_0$.

    Відповідь: нульову гіпотезу приймаємо.

22. За вибіркою об'єму $n = 100$ знайдено середній розмір $\bar{x}_В = 20{,}1$ мм діаметрів валиків, виготовлених першим автоматом, за вибіркою об'єму $n = 100$ знайдено середній розмір $\bar{y}_В = 19{,}8$ мм діаметрів валиків, виготовлених другим автоматом. Генеральні дисперсії відомі $\sigma^2_Г(X) = 1{,}75$ мм^2, $\sigma^2_Г(Y) = 1{,}375$ мм^2. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $\bar{x}_Г = \bar{y}_Г$ при альтернативній гіпотезі H_α: $\bar{x}_Г > \bar{y}_Г$. Випадкові величини X та Y розподілені нормально і вибірки незалежні.

    Відповідь: нульову гіпотезу про рівність генеральних середніх приймаємо, тобто можна вважати, що середні значення діаметрів валиків, які виготовлені на двох автоматах, є рівними.

23. За двома вибірками об'єму $n = 10$ та $m = 17$, які вилучені з нормальних генеральних сукупностей X та Y, знайдено вибіркове середнє: $\bar{x}_В = 31{,}2$, $\bar{y}_В = 29{,}2$, а також відомі виправлені дисперсії: $S^2(X) = 0{,}84$, $S^2(Y) = 0{,}4$. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $\bar{x}_Г = \bar{y}_Г$ за наявності альтернативної гіпотези H_α: $\bar{x}_Г \neq \bar{y}_Г$.

    Відповідь: нульову гіпотезу відхиляємо.

24. За двома незалежними вибірками об'єму $n = 9$ та $m = 6$, які вилучені з нормальних генеральних сукупностей X та Y, знайдено вибіркові дисперсії: $\sigma^2_В(X) = 14{,}4$, $\sigma^2_В(Y) = 20{,}5$. Для

рівня значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $\sigma_\Gamma^2(X) = \sigma_\Gamma^2(Y)$ за наявності альтернативної гіпотези H_α: $\sigma_\Gamma^2(X) > \sigma_\Gamma^2(Y)$.

Відповідь: нульову гіпотезу приймаємо.

25. Нижче наведено дані про появу цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 серед перших 800 знаків числа π. Тут k – цифра в десятковому записі числа, n_k – кількість появи цифри серед перших 800 знаків числа π. Чи узгоджується гіпотеза про рівноймовірність появи кожної цифри в десятковому запису числа з наведеними даними?

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_k	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

Відповідь: нульову гіпотезу при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ приймаємо.

26. У таблиці наведено розподіл кількості пожеж у житлових приміщеннях за днями тижня (за 2 роки). Чи узгоджується з наведеними даними гіпотеза про рівномірний розподіл кількості пожеж за днями тижня?

день тижня	пн	вт	ср	чт	пт	сб	нд
кількість пожеж	203	240	220	207	241	228	271

Відповідь: нульову гіпотезу при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ приймаємо.

27. Нижче наведено частотний розподіл кількостей порушень правил дорожнього руху водіями лондонських автобусів, що вони здійснили протягом року. Чи можна вважати, що кількість порушень, які сталися за участю водіїв протягом року має закон розподілу Пуассона?

кількість порушень	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 і більше
кількість водіїв	45	36	40	19	12	8	3	2	1	0

Відповідь: нульову гіпотезу про те, що кількість порушень, які сталися за участю водіїв протягом року має закон розподілу Пуассона, при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ приймаємо.

28. У результаті перевірки 500 контейнерів зі скляними виробами були одержані такі дані про кількість пошкоджених виробів

кількість пошкоджених виробів	0	1	2	3	4	5	6	7	8 і більше
кількість контейнерів	199	169	87	31	9	3	1	1	0

Перевірити гіпотезу про те, що кількість пошкоджених виробів у контейнерах має розподіл Пуассона.

Відповідь: нульову гіпотезу при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ відхиляємо.

29. За даним статистичним розподілом вибірки висунути гіпотезу про закон розподілу ознаки генеральної сукупності і при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити цю гіпотезу.

$h = 40$	0-40	40-80	80-120	120-160	160-200	200-240
n_i	168	102	61	37	21	11

Відповідь: приймаємо нульову гіпотезу про показниковий розподіл генеральної сукупності.

30. За даними Всеукраїнського перепису населення 2001 року віковий склад населення характеризувався такими даними

вік	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80 і старші
кількість млн. осіб	4,5	7,3	6,9	6,6	7,3	5,2	5,5	3,7	1,1

При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити гіпотезу про те, що вік населення країни має нормальний розподіл.

Відповідь: нульову гіпотезу відхиляємо.

31. Залежність розчинності y_i тіосульфату натрію від температури x_i наведено у вигляді таблиці:

x_i	33,5	37,0	41,2	46,1	50,0	52,9	56,8	64,3	69,9
y_i	0	10	20	30	40	50	60	70	80

Знайти рівняння лінійної регресії *Y* на *X* та побудувати її графік.

Відповідь: $Y = 2{,}233X - 72{,}096$.

32. Середня температура взимку вимірювалась протягом 13 років у двох містах. Результати вимірювання наведено в таблиці:

X	– 19,2	– 14,8	– 19,6	– 11,1	– 9,4	–16,9	– 13,7	– 4,9	– 13,9	– 9,4	– 8,3	– 7,9	– 5,3
Y	– 21,8	– 15,4	– 20,8	– 11,3	– 11,6	– 19,2	– 13,0	– 7,4	– 15,1	– 14,4	– 11,1	– 10,5	– 7,2

Знайти рівняння лінійної регресії *Y* на *X* та побудувати її графік.
Відповідь: $Y = 0,9114X - 2,9297$.

33. Конденсатор було заряджено до повної напруги в певний момент часу *t*, після цього він починає розряджатися. Залежність напруги *Y* від часу розряджання *X* наведено в таблиці:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Y	100	85	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	22	20

Знайти рівняння лінійної регресії *Y* на *X* та побудувати її графік.
Відповідь: $Y = -5,622X + 86,686$.

34. Залежність величини зносу різця довжиною *Y* від тривалості роботи *X* показано в таблиці:

***Y*, мм**	30,0	29,1	28,4	28,1	28,0	27,7	27,5	27,2	27,0
***X*, мм**	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Знайти рівняння лінійної регресії *Y* на *X* та побудувати її графік.
Відповідь: $Y = -0,332X + 31,428$.

35. Залежність кров'яного тиску *Y* людини (в умовних одиницях) від довжини руки *X* наведена в таблиці:

***Y*, умов. од.**	115	116	117	118	119	120	121	122	123
***X*, см**	62,1	61,1	61,0	60,5	60,0	59,0	58,5	58,0	57,5

Знайти рівняння лінійної регресії *Y* на *X* та побудувати її графік.
Відповідь: $Y = -1,729X + 222,288$.

36. Залежність пружності *Y* сталевих болтів від вмісту в них нікелю *X* наведена в таблиці:

Y, %	35,4	35,0	35,8	36,2	36,7	36,9	37,3	37,8	38,2
X, %	2,20	2,35	2,42	2,58	2,65	2,69	2,74	2,88	2,91

Знайти рівняння лінійної регресії Y на X та побудувати її графік.
Відповідь: $Y = 4,336X + 25,306$.

37. Ступінь впливу каталізатора на кінцевий продукт заданої хімічної реакції наведено в таблиці:

Ступінь впливу каталізатора A	**Кінцевий продукт хімічної реакції**
A_1	3,2; 3,1; 3,1; 2,8; 3,3; 3,0
A_2	2,6; 3,1; 2,7; 2,9; 2,7; 2,8
A_3	2,9; 2,6; 3,0; 3,1; 3,0; 2,8
A_4	3,7; 3,4; 3,2; 3,3; 3,5; 3,3
A_5	3,0; 3,4; 3,2; 3,5; 2,9; 3,1

З’ясувати істотність впливу каталізатора на кінцевий продукт хімічної реакції при рівні значущості $\alpha = 0,01$.
Відповідь: вплив каталізатора на кінцевий продукт хімічної реакції є істотним, оскільки $F^* = 9,35 > F_{кр} = 4,18$.

38. Стальні болти з різною добавкою компоненти A в сталі, з якої вони виготовлялися, були піддані випробуванням на міцність. Результати цих випробувань наведено в таблиці:

Ступінь впливу фактора A (відсоткова добавка)	**Міцність, кг/мм^2**
A_1	29; 22; 21; 18
A_2	25; 28; 20; 22
A_3	18; 30; 24; 20
A_4	19; 25; 30; 22

При рівні значущості $\alpha = 0,01$ з’ясувати істотність впливу добавки компоненти на міцність болта.
Відповідь: вплив добавки компоненти на міцність болта є неістотним, оскільки $F^* = 0,09 < F_{кр} = 5,95$.

39. Електролампочки напругою 220 В виготовлялися на трьох заводах із використанням різних технологій. З кожної партії, що надходила в науково-дослідний інститут від кожного заводу, навмання брали по чотири електролампочки і піддавали їх випробуванням на тривалість горіння. Результати цього експерименту наведено в таблиці:

Ступінь впливу фактора A (технології виготовлення)	**Тривалість горіння, год**
A_1	80; 110; 115; 90; 105
A_2	75; 120; 110; 90; 85
A_3	90; 85; 105; 110; 95

При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ з'ясувати істотність впливу технологій виготовлення на тривалість горіння електроламп.

Відповідь: вплив технологій виготовлення на тривалість горіння електроламп є неістотним, оскільки $F^* = 0{,}098 < F_{кр} = 6{,}927$.

40. Проводилось дослідження розподілу числа кров'яних тілець у певній одиниці об'єму крові в людей, що перебували певний період часу у трьох зонах на різній відстані від Чорнобильської АЕС та в зоні, вільній від радіації. Результати досліджень наведено в таблиці:

Фактор A (зони)	**Кількість кров'яних тілець**
A_1 (в зоні ЧАЕС)	6; 8; 3; 2; 6; 9
A_2 (на відстані 50 км)	5; 4; 10; 11; 6; 8
A_3 (на відстані 100 км)	5; 4; 13; 12; 10; 15
A_4 (вільна від радіації зона)	18; 16; 21; 20; 22; 21

При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ з'ясувати істотність впливу перебування людини в певній зоні на кількість кров'яних тілець.

Відповідь: вплив перебування людини в певній зоні на кількість кров'яних тілець є істотним, оскільки $F^* = 23{,}46 > F_{кр} = 4{,}94$.

Додаток 1. Елементи комбінаторики

Під час розв'язування задач з різних галузей науки і практики часто доводиться відповідати на запитання: скількома способами можна виконати ту чи іншу операцію? Виявляється, що для подібних задач, які дістали назву *комбінаторних*, існують загальні методи розв'язування.

Значна кількість теорем і формул комбінаторики ґрунтується на двох правилах, які називаються *правилами суми і добутку*.

Правило суми: *якщо деякий об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b – n способами, причому ніякий вибір a не збігається з жодним з виборів b, то один з об'єктів a або b можна вибрати $m + n$ способами.*

Правило добутку: *якщо деякий об'єкт a можна вибрати m способами і при кожному виборі об'єкта a об'єкт b можна вибрати n способами, то вибір пари (a, b) можна здійснити $m \cdot n$ способами.*

Під час розв'язування комбінаторних задач доводиться розглядати скінченні множини, складені з елементів будь-якої природи, та їх підмножини. Залежно від умови задачі розглядаються скінченні множини, в яких істотним є або *порядок елементів*, або *їх склад*, або *перше і друге одночасно*. Такі скінченні множини (сполуки) дістали певну назву: ***перестановки, розміщення, комбінації***.

*Скінченні множини, для яких істотний порядок елементів називаються **впорядкованими**.*

Приклад.

1. З 15-ти студентів групи треба обрати голову і секретаря зборів. Скількома способами це можна зробити?
2. З тих же 15-ти студентів слід виділити двох для чергування. Скількома способами це можна зробити?

У другій задачі немає значення, в якому порядку будуть названі чергові, тоді як в першій задачі з двох обраних студентів один може бути головою, а другий – секретарем і навпаки.

Вказати порядок розташування елементів в скінченній множині з n елементів означає поставити у відповідність кожному елементу цієї множини певне натуральне число від 1 до n.

Нехай маємо деяку довільну множину, яка складається з n елементів.

***Розміщенням з** n **елементів по** k ($k \le n$) називається будь-яка впорядкована підмножина з k елементів цієї множини.*

Тобто, розміщення відрізняються одне від одного або елементами, або порядком елементів, або і тим і іншим.

Позначимо кількість всіх можливих розміщень з n елементів по k через A_n^k.

Формула для обчислення числа розміщень з n елементів по k

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Вважають, що $0! = 1$.

Приклад. Дано чотири цифри 1, 3, 7, 9. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з них, щоб жодні з них не повторювались.

Першу цифру двоцифрового числа можна вибрати 4-ма способами (з чисел 1, 3, 7, 9). Другу цифру – 3-ма способами, оскільки цифри не можуть повторюватись. Отже, $4 \cdot 3 = 12$. Або $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$.

Розміщення з n елементів даної множини по n називається ***перестановкою з n елементів.***

Тобто це такі впорядковані множини, які відрізняються між собою тільки порядком елементів. Позначимо кількість перестановок з n елементів через P_n.

Формула для обчислення кількості перестановок з n елементів має вигляд

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n.$$

Приклад. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3 без повторень? Записати ці числа.

За умовою задачі дано множину з трьох елементів, які потрібно розташувати в певній послідовності. Отже, потрібно знайти кількість перестановок з трьох елементів: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Можна скласти 6 варіантів: 123, 132, 312, 321, 213, 231.

Приклад. Скількома способами можна розмістити 10 гостей на десяти місцях за святковим столом?

Шукане число способів дорівнює числу перестановок із десяти елементів: $P_{10} = 10! = 3628800$.

Будь-яка підмножина з k елементів даної множини, яка міститься в n-елементній множині ($k \le n$) називається ***комбінацією з n елементів по k.***

Тобто це такі підмножини, які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом, при цьому порядок їх розміщення не береться до уваги. Отже, комбінації на відміну від розміщень – це невпорядковані підмножини заданої множини.

Позначимо кількість всіх можливих комбінацій з n елементів по k через C_n^k.

Формула для обчислення кількості комбінацій з n елементів по k має вигляд

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Наведемо деякі властивості комбінацій, які можуть полегшити обчислення:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}\ (0 \le k \le n)$;
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
3. $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$;
4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k = 2^n$.

<u>Приклад.</u> У групі з 30 студентів вибирають десятьох делегатів студентської конференції з вищої математики. Скількома способами це можна зробити?

В цій задачі немає значення, у якому порядку будуть названі делегати студентської конференції. Отже, десять студентів з 30 можна вибрати такою кількістю способів

$$C_{30}^{10} = \frac{30!}{10!\cdot 20!} = \frac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{10!} = 30045015.$$

Додаток 2. Таблиці

Табл. 1. Значення функції e^{-x}

x	e^{-x}	**x**	e^{-x}	**x**	e^{-x}	**x**	e^{-x}	**x**	e^{-x}
0,00	1,000	**0,26**	0,771	**0,52**	0,595	**0,78**	0,458	**1,40**	0,247
0,01	0,990	**0,27**	0,763	**0,53**	0,589	**0,79**	0,454	**1,50**	0,223
0,02	0,980	**0,28**	0,756	**0,54**	0,583	**0,80**	0,449	**1,60**	0,202
0,03	0,970	**0,29**	0,748	**0,55**	0,577	**0,81**	0,445	**1,70**	0,183
0,04	0,961	**0,30**	0,741	**0,56**	0,571	**0,82**	0,440	**1,80**	0,165
0,05	0,951	**0,31**	0,733	**0,57**	0,566	**0,83**	0,436	**1,90**	0,150
0,06	0,942	**0,32**	0,726	**0,58**	0,560	**0,84**	0,432	**2,00**	0,135
0,07	0,932	**0,33**	0,719	**0,59**	0,554	**0,85**	0,427	**2,10**	0,122
0,08	0,923	**0,34**	0,712	**0,60**	0,549	**0,86**	0,423	**2,20**	0,111
0,09	0,914	**0,35**	0,705	**0,61**	0,543	**0,87**	0,419	**2,30**	0,100
0,10	0,905	**0,36**	0,698	**0,62**	0,538	**0,88**	0,415	**2,40**	0,091
0,11	0,896	**0,37**	0,691	**0,63**	0,533	**0,89**	0,411	**2,50**	0,082
0,12	0,887	**0,38**	0,684	**0,64**	0,527	**0,90**	0,407	**2,60**	0,074
0,13	0,878	**0,39**	0,677	**0,65**	0,522	**0,91**	0,403	**2,70**	0,067
0,14	0,869	**0,40**	0,670	**0,66**	0,517	**0,92**	0,399	**2,80**	0,061
0,15	0,861	**0,41**	0,664	**0,67**	0,512	**0,93**	0,395	**2,90**	0,055
0,16	0,852	**0,42**	0,657	**0,68**	0,507	**0,94**	0,391	**3,00**	0,050
0,17	0,844	**0,43**	0,651	**0,69**	0,502	**0,95**	0,387	**3,10**	0,045
0,18	0,835	**0,44**	0,644	**0,70**	0,497	**0,96**	0,383	**3,20**	0,041
0,19	0,827	**0,45**	0,638	**0,71**	0,492	**0,97**	0,379	**3,30**	0,037
0,20	0,819	**0,46**	0,631	**0,72**	0,487	**0,98**	0,375	**3,40**	0,033
0,21	0,811	**0,47**	0,625	**0,73**	0,482	**0,99**	0,372	**3,50**	0,030
0,22	0,803	**0,48**	0,619	**0,74**	0,477	**1,00**	0,368	**3,60**	0,027
0,23	0,795	**0,49**	0,613	**0,75**	0,472	**1,10**	0,333	**3,70**	0,025
0,24	0,787	**0,50**	0,607	**0,76**	0,468	**1,20**	0,301	**3,80**	0,022
0,25	0,779	**0,51**	0,600	**0,77**	0,463	**1,30**	0,273	**3,90**	0,020

Табл. 1 (*продовження*)

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
4,00	0,018	**4,60**	0,010	**5,20**	0,006	**5,80**	0,003	**6,40**	0,002
4,10	0,017	**4,70**	0,009	**5,30**	0,005	**5,90**	0,003	**6,50**	0,002
4,20	0,015	**4,80**	0,008	**5,40**	0,005	**6,00**	0,002	**6,60**	0,001
4,30	0,014	**4,90**	0,007	**5,50**	0,004	**6,10**	0,002	**7,00**	0,001
4,40	0,012	**5,00**	0,007	**5,60**	0,004	**6,20**	0,002	**7,70**	0,000
4,50	0,011	**5,10**	0,006	**5,70**	0,003	**6,30**	0,002	**8,00**	0,000

Табл. 2. Значення функції Гаусса (локальної функції Лапласа)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	**0,15**	0,3945	**0,30**	0,3814	**0,45**	0,3605	**0,60**	0,3332
0,01	0,3989	**0,16**	0,3939	**0,31**	0,3802	**0,46**	0,3589	**0,61**	0,3312
0,02	0,3989	**0,17**	0,3932	**0,32**	0,3790	**0,47**	0,3572	**0,62**	0,3292
0,03	0,3988	**0,18**	0,3925	**0,33**	0,3778	**0,48**	0,3555	**0,63**	0,3271
0,04	0,3986	**0,19**	0,3918	**0,34**	0,3765	**0,49**	0,3538	**0,64**	0,3251
0,05	0,3984	**0,20**	0,3910	**0,35**	0,3752	**0,50**	0,3521	**0,65**	0,3230
0,06	0,3982	**0,21**	0,3902	**0,36**	0,3739	**0,51**	0,3503	**0,66**	0,3209
0,07	0,3980	**0,22**	0,3894	**0,37**	0,3725	**0,52**	0,3485	**0,67**	0,3187
0,08	0,3977	**0,23**	0,3885	**0,38**	0,3712	**0,53**	0,3467	**0,68**	0,3166
0,09	0,3973	**0,24**	0,3876	**0,39**	0,3697	**0,54**	0,3448	**0,69**	0,3144
0,10	0,3970	**0,25**	0,3867	**0,40**	0,3683	**0,55**	0,3429	**0,70**	0,3123
0,11	0,3965	**0,26**	0,3857	**0,41**	0,3668	**0,56**	0,3410	**0,71**	0,3101
0,12	0,3961	**0,27**	0,3847	**0,42**	0,3653	**0,57**	0,3391	**0,72**	0,3079
0,13	0,3956	**0,28**	0,3836	**0,43**	0,3637	**0,58**	0,3372	**0,73**	0,3056
0,14	0,3951	**0,29**	0,3825	**0,44**	0,3621	**0,59**	0,3352	**0,74**	0,3034

Табл. 2. (*продовження*)

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,75	0,3011	**1,02**	0,2371	**1,29**	0,1736	**1,56**	0,1182	**1,83**	0,0748
0,76	0,2989	**1,03**	0,2347	**1,30**	0,1714	**1,57**	0,1163	**1,84**	0,0734
0,77	0,2966	**1,04**	0,2323	**1,31**	0,1691	**1,58**	0,1145	**1,85**	0,0721
0,78	0,2943	**1,05**	0,2299	**1,32**	0,1669	**1,59**	0,1127	**1,86**	0,0707
0,79	0,2920	**1,06**	0,2275	**1,33**	0,1647	**1,60**	0,1109	**1,87**	0,0694
0,80	0,2897	**1,07**	0,2251	**1,34**	0,1626	**1,61**	0,1092	**1,88**	0,0681
0,81	0,2874	**1,08**	0,2227	**1,35**	0,1604	**1,62**	0,1074	**1,89**	0,0669
0,82	0,2850	**1,09**	0,2203	**1,36**	0,1582	**1,63**	0,1057	**1,90**	0,0656
0,83	0,2827	**1,10**	0,2179	**1,37**	0,1561	**1,64**	0,1040	**1,91**	0,0644
0,84	0,2803	**1,11**	0,2155	**1,38**	0,1539	**1,65**	0,1023	**1,92**	0,0632
0,85	0,2780	**1,12**	0,2131	**1,39**	0,1518	**1,66**	0,1006	**1,93**	0,0620
0,86	0,2756	**1,13**	0,2107	**1,40**	0,1497	**1,67**	0,0989	**1,94**	0,0608
0,87	0,2732	**1,14**	0,2083	**1,41**	0,1476	**1,68**	0,0973	**1,95**	0,0596
0,88	0,2709	**1,15**	0,2059	**1,42**	0,1456	**1,69**	0,0957	**1,96**	0,0584
0,89	0,2685	**1,16**	0,2036	**1,43**	0,1435	**1,70**	0,0940	**1,97**	0,0573
0,90	0,2661	**1,17**	0,2012	**1,44**	0,1415	**1,71**	0,0925	**1,98**	0,0562
0,91	0,2637	**1,18**	0,1989	**1,45**	0,1394	**1,72**	0,0909	**1,99**	0,0551
0,92	0,2613	**1,19**	0,1965	**1,46**	0,1374	**1,73**	0,0893	**2,00**	0,0540
0,93	0,2589	**1,20**	0,1942	**1,47**	0,1354	**1,74**	0,0878	**2,01**	0,0529
0,94	0,2565	**1,21**	0,1919	**1,48**	0,1334	**1,75**	0,0863	**2,02**	0,0519
0,95	0,2541	**1,22**	0,1895	**1,49**	0,1315	**1,76**	0,0848	**2,03**	0,0508
0,96	0,2516	**1,23**	0,1872	**1,50**	0,1295	**1,77**	0,0833	**2,04**	0,0498
0,97	0,2492	**1,24**	0,1849	**1,51**	0,1276	**1,78**	0,0818	**2,05**	0,0488
0,98	0,2468	**1,25**	0,1826	**1,52**	0,1257	**1,79**	0,0804	**2,06**	0,0478
0,99	0,2444	**1,26**	0,1804	**1,53**	0,1238	**1,80**	0,0790	**2,07**	0,0468
1,00	0,2420	**1,27**	0,1781	**1,54**	0,1219	**1,81**	0,0775	**2,08**	0,0459
1,01	0,2396	**1,28**	0,1758	**1,55**	0,1200	**1,82**	0,0761	**2,09**	0,0449

Табл. 2. (*продовження*)

x	$\varphi(x)$	*x*	$\varphi(x)$	*x*	$\varphi(x)$	*x*	$\varphi(x)$	*x*	$\varphi(x)$
2,10	0,0440	**2,37**	0,0241	**2,64**	0,0122	**2,91**	0,0058	**3,18**	0,0025
2,11	0,0431	**2,38**	0,0235	**2,65**	0,0119	**2,92**	0,0056	**3,19**	0,0025
2,12	0,0422	**2,39**	0,0229	**2,66**	0,0116	**2,93**	0,0055	**3,20**	0,0024
2,13	0,0413	**2,40**	0,0224	**2,67**	0,0113	**2,94**	0,0053	**3,21**	0,0023
2,14	0,0404	**2,41**	0,0219	**2,68**	0,0110	**2,95**	0,0051	**3,22**	0,0022
2,15	0,0396	**2,42**	0,0213	**2,69**	0,0107	**2,96**	0,0050	**3,23**	0,0022
2,16	0,0387	**2,43**	0,0208	**2,70**	0,0104	**2,97**	0,0048	**3,24**	0,0021
2,17	0,0379	**2,44**	0,0203	**2,71**	0,0101	**2,98**	0,0047	**3,25**	0,0020
2,18	0,0371	**2,45**	0,0198	**2,72**	0,0099	**2,99**	0,0046	**3,27**	0,0019
2,19	0,0363	**2,46**	0,0194	**2,73**	0,0096	**3,00**	0,0044	**3,29**	0,0018
2,20	0,0355	**2,47**	0,0189	**2,74**	0,0093	**3,01**	0,0043	**3,31**	0,0017
2,21	0,0347	**2,48**	0,0184	**2,75**	0,0091	**3,02**	0,0042	**3,33**	0,0016
2,22	0,0339	**2,49**	0,0180	**2,76**	0,0088	**3,03**	0,0040	**3,35**	0,0015
2,23	0,0332	**2,50**	0,0175	**2,77**	0,0086	**3,04**	0,0039	**3,37**	0,0014
2,24	0,0325	**2,51**	0,0171	**2,78**	0,0084	**3,05**	0,0038	**3,39**	0,0013
2,25	0,0317	**2,52**	0,0167	**2,79**	0,0081	**3,06**	0,0037	**3,45**	0,0010
2,26	0,0310	**2,53**	0,0163	**2,80**	0,0079	**3,07**	0,0036	**3,50**	0,0009
2,27	0,0303	**2,54**	0,0158	**2,81**	0,0077	**3,08**	0,0035	**3,55**	0,0007
2,28	0,0297	**2,55**	0,0154	**2,82**	0,0075	**3,09**	0,0034	**3,60**	0,0006
2,29	0,0290	**2,56**	0,0151	**2,83**	0,0073	**3,10**	0,0033	**3,65**	0,0005
2,30	0,0283	**2,57**	0,0147	**2,84**	0,0071	**3,11**	0,0032	**3,45**	0,0010
2,31	0,0277	**2,58**	0,0143	**2,85**	0,0069	**3,12**	0,0031	**3,50**	0,0009
2,32	0,0270	**2,59**	0,0139	**2,86**	0,0067	**3,13**	0,0030	**3,55**	0,0007
2,33	0,0264	**2,60**	0,0136	**2,87**	0,0065	**3,14**	0,0029	**3,60**	0,0006
2,34	0,0258	**2,61**	0,0132	**2,88**	0,0063	**3,15**	0,0028	**3,65**	0,0005
2,35	0,0252	**2,62**	0,0129	**2,89**	0,0061	**3,16**	0,0027	**3,75**	0,0004
2,36	0,0246	**2,63**	0,0126	**2,90**	0,0060	**3,17**	0,0026	**4,00**	0,0001

Табл. 3. Значення інтегральної функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,24**	0,0948	**0,48**	0,1844	**0,72**	0,2642	**0,96**	0,3315
0,01	0,0040	**0,25**	0,0987	**0,49**	0,1879	**0,73**	0,2673	**0,97**	0,3340
0,02	0,0080	**0,26**	0,1026	**0,50**	0,1915	**0,74**	0,2704	**0,98**	0,3365
0,03	0,0120	**0,27**	0,1064	**0,51**	0,1950	**0,75**	0,2734	**0,99**	0,3389
0,04	0,0160	**0,28**	0,1103	**0,52**	0,1985	**0,76**	0,2764	**1,00**	0,3413
0,05	0,0199	**0,29**	0,1141	**0,53**	0,2019	**0,77**	0,2794	**1,01**	0,3438
0,06	0,0239	**0,30**	0,1179	**0,54**	0,2054	**0,78**	0,2823	**1,02**	0,3461
0,07	0,0279	**0,31**	0,1217	**0,55**	0,2088	**0,79**	0,2852	**1,03**	0,3485
0,08	0,0319	**0,32**	0,1255	**0,56**	0,2123	**0,80**	0,2881	**1,04**	0,3508
0,09	0,0359	**0,33**	0,1293	**0,57**	0,2157	**0,81**	0,2910	**1,05**	0,3531
0,10	0,0398	**0,34**	0,1331	**0,58**	0,2190	**0,82**	0,2939	**1,06**	0,3554
0,11	0,0438	**0,35**	0,1368	**0,59**	0,2224	**0,83**	0,2967	**1,07**	0,3577
0,12	0,0478	**0,36**	0,1406	**0,60**	0,2257	**0,84**	0,2995	**1,08**	0,3599
0,13	0,0517	**0,37**	0,1443	**0,61**	0,2291	**0,85**	0,3023	**1,09**	0,3621
0,14	0,0557	**0,38**	0,1480	**0,62**	0,2324	**0,86**	0,3051	**1,10**	0,3643
0,15	0,0596	**0,39**	0,1517	**0,63**	0,2357	**0,87**	0,3078	**1,11**	0,3665
0,16	0,0636	**0,40**	0,1554	**0,64**	0,2389	**0,88**	0,3106	**1,12**	0,3686
0,17	0,0675	**0,41**	0,1591	**0,65**	0,2422	**0,89**	0,3133	**1,13**	0,3708
0,18	0,0714	**0,42**	0,1628	**0,66**	0,2454	**0,90**	0,3159	**1,14**	0,3729
0,19	0,0753	**0,43**	0,1664	**0,67**	0,2486	**0,91**	0,3186	**1,15**	0,3749
0,20	0,0793	**0,44**	0,1700	**0,68**	0,2517	**0,92**	0,3212	**1,16**	0,3770
0,21	0,0832	**0,45**	0,1736	**0,69**	0,2549	**0,93**	0,3238	**1,17**	0,3790
0,22	0,0871	**0,46**	0,1772	**0,70**	0,2580	**0,94**	0,3264	**1,18**	0,3810
0,23	0,0910	**0,47**	0,1808	**0,71**	0,2611	**0,95**	0,3289	**1,19**	0,3830

Табл. 3. (***продовження***)

x	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)
1,20	0,3849	**1,47**	0,4292	**1,74**	0,4591	**2,01**	0,4778	**2,28**	0,4887
1,21	0,3869	**1,48**	0,4306	**1,75**	0,4599	**2,02**	0,4783	**2,29**	0,4890
1,22	0,3888	**1,49**	0,4319	**1,76**	0,4608	**2,03**	0,4788	**2,30**	0,4893
1,23	0,3907	**1,50**	0,4332	**1,77**	0,4616	**2,04**	0,4793	**2,31**	0,4896
1,24	0,3925	**1,51**	0,4345	**1,78**	0,4625	**2,05**	0,4798	**2,32**	0,4898
1,25	0,3944	**1,52**	0,4357	**1,79**	0,4633	**2,06**	0,4803	**2,33**	0,4901
1,26	0,3962	**1,53**	0,4370	**1,80**	0,4641	**2,07**	0,4808	**2,34**	0,4904
1,27	0,3980	**1,54**	0,4382	**1,81**	0,4649	**2,08**	0,4812	**2,35**	0,4906
1,28	0,3997	**1,55**	0,4394	**1,82**	0,4656	**2,09**	0,4817	**2,36**	0,4909
1,29	0,4015	**1,56**	0,4406	**1,83**	0,4664	**2,10**	0,4821	**2,37**	0,4911
1,30	0,4032	**1,57**	0,4418	**1,84**	0,4671	**2,11**	0,4826	**2,38**	0,4913
1,31	0,4049	**1,58**	0,4429	**1,85**	0,4678	**2,12**	0,4830	**2,39**	0,4916
1,32	0,4066	**1,59**	0,4441	**1,86**	0,4686	**2,13**	0,4834	**2,40**	0,4918
1,33	0,4082	**1,60**	0,4452	**1,87**	0,4693	**2,14**	0,4838	**2,41**	0,4920
1,34	0,4099	**1,61**	0,4463	**1,88**	0,4699	**2,15**	0,4842	**2,42**	0,4922
1,35	0,4115	**1,62**	0,4474	**1,89**	0,4706	**2,16**	0,4846	**2,43**	0,4925
1,36	0,4131	**1,63**	0,4484	**1,90**	0,4713	**2,17**	0,4850	**2,44**	0,4927
1,37	0,4147	**1,64**	0,4495	**1,91**	0,4719	**2,18**	0,4854	**2,45**	0,4929
1,38	0,4162	**1,65**	0,4505	**1,92**	0,4726	**2,19**	0,4857	**2,46**	0,4931
1,39	0,4177	**1,66**	0,4515	**1,93**	0,4732	**2,20**	0,4861	**2,47**	0,4932
1,40	0,4192	**1,67**	0,4525	**1,94**	0,4738	**2,21**	0,4864	**2,48**	0,4934
1,41	0,4207	**1,68**	0,4535	**1,95**	0,4744	**2,22**	0,4868	**2,49**	0,4936
1,42	0,4222	**1,69**	0,4545	**1,96**	0,4750	**2,23**	0,4871	**2,50**	0,4938
1,43	0,4236	**1,70**	0,4554	**1,97**	0,4756	**2,24**	0,4875	**2,51**	0,4940
1,44	0,4251	**1,71**	0,4564	**1,98**	0,4761	**2,25**	0,4878	**2,52**	0,4941
1,45	0,4265	**1,72**	0,4573	**1,99**	0,4767	**2,26**	0,4881	**2,53**	0,4943
1,46	0,4279	**1,73**	0,4582	**2,00**	0,4772	**2,27**	0,4884	**2,54**	0,4945

Табл. 3. (*продовження*)

x	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)
2,55	0,4946	**2,82**	0,4976	**3,09**	0,4990	**3,36**	0,4996	**3,63**	0,4999
2,56	0,4948	**2,83**	0,4977	**3,10**	0,4990	**3,37**	0,4996	**3,64**	0,4999
2,57	0,4949	**2,84**	0,4977	**3,11**	0,4991	**3,38**	0,4996	**3,65**	0,4999
2,58	0,4951	**2,85**	0,4978	**3,12**	0,4991	**3,39**	0,4997	**3,66**	0,4999
2,59	0,4952	**2,86**	0,4979	**3,13**	0,4991	**3,40**	0,4997	**3,67**	0,4999
2,60	0,4953	**2,87**	0,4979	**3,14**	0,4992	**3,41**	0,4997	**3,68**	0,4999
2,61	0,4955	**2,88**	0,4980	**3,15**	0,4992	**3,42**	0,4997	**3,69**	0,4999
2,62	0,4956	**2,89**	0,4981	**3,16**	0,4992	**3,43**	0,4997	**3,70**	0,4999
2,63	0,4957	**2,90**	0,4981	**3,17**	0,4992	**3,44**	0,4997	**3,71**	0,4999
2,64	0,4959	**2,91**	0,4982	**3,18**	0,4993	**3,45**	0,4997	**3,72**	0,4999
2,65	0,4960	**2,92**	0,4982	**3,19**	0,4993	**3,46**	0,4997	**3,73**	0,4999
2,66	0,4961	**2,93**	0,4983	**3,20**	0,4993	**3,47**	0,4997	**3,74**	0,4999
2,67	0,4962	**2,94**	0,4984	**3,21**	0,4993	**3,48**	0,4997	**3,75**	0,4999
2,68	0,4963	**2,95**	0,4984	**3,22**	0,4994	**3,49**	0,4998	**3,76**	0,4999
2,69	0,4964	**2,96**	0,4985	**3,23**	0,4994	**3,50**	0,4998	**3,77**	0,4999
2,70	0,4965	**2,97**	0,4985	**3,24**	0,4994	**3,51**	0,4998	**3,78**	0,4999
2,71	0,4966	**2,98**	0,4986	**3,25**	0,4994	**3,52**	0,4998	**3,79**	0,4999
2,72	0,4967	**2,99**	0,4986	**3,26**	0,4994	**3,53**	0,4998	**3,80**	0,4999
2,73	0,4968	**3,00**	0,4987	**3,27**	0,4995	**3,54**	0,4998	**3,81**	0,4999
2,74	0,4969	**3,01**	0,4987	**3,28**	0,4995	**3,55**	0,4998	**3,82**	0,4999
2,75	0,4970	**3,02**	0,4987	**3,29**	0,4995	**3,56**	0,4998	**3,83**	0,4999
2,76	0,4971	**3,03**	0,4988	**3,30**	0,4995	**3,57**	0,4998	**3,84**	0,4999
2,77	0,4972	**3,04**	0,4988	**3,31**	0,4995	**3,58**	0,4998	**3,85**	0,4999
2,78	0,4973	**3,05**	0,4989	**3,32**	0,4995	**3,59**	0,4998	**3,90**	0,5000
2,79	0,4974	**3,06**	0,4989	**3,33**	0,4996	**3,60**	0,4998	**3,95**	0,5000
2,80	0,4974	**3,07**	0,4989	**3,34**	0,4996	**3,61**	0,4998	**4,00**	0,5000
2,81	0,4975	**3,08**	0,4990	**3,35**	0,4996	**3,62**	0,4999	**5,00**	0,5000

Табл. 4. Значення $p_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$ **(*розподіл Пуассона*)**

k	α								
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003

k	α				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181
11	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082
12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034

Табл. 4 (***продовження***)

k	α				
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

Табл. 5. Критичні точки розподілу $\chi^2(\alpha, k)$

k	α								
	0,99	**0,975**	**0,95**	**0,9**	**0,5**	**0,25**	**0,1**	**0,05**	**0,01**
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,455	1,323	2,706	3,841	6,635
2	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	2,773	4,605	5,991	9,210
3	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	4,108	6,251	7,815	11,345
4	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	5,385	7,779	9,488	13,277
5	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	6,626	9,236	11,070	15,086
6	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	7,841	10,645	12,592	16,812
7	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	9,037	12,017	14,067	18,475
8	1,647	2,180	2,733	3,490	7,344	10,219	13,362	15,507	20,090
9	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666
10	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	12,549	15,987	18,307	23,209
11	3,053	3,816	4,575	5,578	10,341	13,701	17,275	19,675	24,725
12	3,571	4,404	5,226	6,304	11,340	14,845	18,549	21,026	26,217
13	4,107	5,009	5,892	7,041	12,340	15,984	19,812	22,362	27,688
14	4,660	5,629	6,571	7,790	13,339	17,117	21,064	23,685	29,141
15	5,229	6,262	7,261	8,547	14,339	18,245	22,307	24,996	30,578
16	5,812	6,908	7,962	9,312	15,338	19,369	23,542	26,296	32,000
17	6,408	7,564	8,672	10,085	16,338	20,489	24,769	27,587	33,409
18	7,015	8,231	9,390	10,865	17,338	21,605	25,989	28,869	34,805
19	7,633	8,907	10,117	11,651	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191
20	8,260	9,591	10,851	12,443	19,337	23,828	28,412	31,410	37,566
21	8,897	10,283	11,591	13,240	20,337	24,935	29,615	32,671	38,932
22	9,542	10,982	12,338	14,041	21,337	26,039	30,813	33,924	40,289
23	10,196	11,689	13,091	14,848	22,337	27,141	32,007	35,172	41,638
24	10,856	12,401	13,848	15,659	23,337	28,241	33,196	36,415	42,980

Табл. 6. Критичні точки розподілу Стьюдента $t(\alpha; k)$

k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,1	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
1	6,314	12,706	31,821	63,656	127,321	636,578
2	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	31,600
3	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	12,924
4	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	6,869
6	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	5,408
8	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,850
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,646
50	1,676	2,009	2,423	2,678	2,937	3,496
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,0025**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Табл. 7. Критичні точки розподілу Фішера-Снедекора $F(\alpha; k_1; k_2)$
(*рівень значущості* α = 0,01)

k_2	k_1 (*число ступенів свободи чисельника*)									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17

***Табл. 7.* (*продовження*)**

k_2	k_1 (*число ступенів свободи чисельника*)									
	12	**14**	**16**	**18**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**100**
3	27,05	26,92	26,83	26,75	26,69	26,50	26,41	26,35	26,32	26,24
4	14,37	14,25	14,15	14,08	14,02	13,84	13,75	13,69	13,65	13,58
5	9,89	9,77	9,68	9,61	9,55	9,38	9,29	9,24	9,20	9,13
6	7,72	7,60	7,52	7,45	7,40	7,23	7,14	7,09	7,06	6,99
7	6,47	6,36	6,28	6,21	6,16	5,99	5,91	5,86	5,82	5,75
8	5,67	5,56	5,48	5,41	5,36	5,20	5,12	5,07	5,03	4,96
9	5,11	5,01	4,92	4,86	4,81	4,65	4,57	4,52	4,48	4,41
10	4,71	4,60	4,52	4,46	4,41	4,25	4,17	4,12	4,08	4,01
11	4,40	4,29	4,21	4,15	4,10	3,94	3,86	3,81	3,78	3,71
12	4,16	4,05	3,97	3,91	3,86	3,70	3,62	3,57	3,54	3,47
13	3,96	3,86	3,78	3,72	3,66	3,51	3,43	3,38	3,34	3,27
14	3,80	3,70	3,62	3,56	3,51	3,35	3,27	3,22	3,18	3,11
15	3,67	3,56	3,49	3,42	3,37	3,21	3,13	3,08	3,05	2,98
16	3,55	3,45	3,37	3,31	3,26	3,10	3,02	2,97	2,93	2,86
17	3,46	3,35	3,27	3,21	3,16	3,00	2,92	2,87	2,83	2,76
18	3,37	3,27	3,19	3,13	3,08	2,92	2,84	2,78	2,75	2,68
19	3,30	3,19	3,12	3,05	3,00	2,84	2,76	2,71	2,67	2,60
20	3,23	3,13	3,05	2,99	2,94	2,78	2,69	2,64	2,61	2,54
21	3,17	3,07	2,99	2,93	2,88	2,72	2,64	2,58	2,55	2,48
22	3,12	3,02	2,94	2,88	2,83	2,67	2,58	2,53	2,50	2,42
23	3,07	2,97	2,89	2,83	2,78	2,62	2,54	2,48	2,45	2,37
24	3,03	2,93	2,85	2,79	2,74	2,58	2,49	2,44	2,40	2,33

Предметний покажчик

В

випадкові величини 43
дискретні 44
корельовані 82
незалежні 68
некорельовані 82
неперервні 47
випробування 11
за схемою Бернуллі 35
відхилення варіант 119

Г

гіпотеза
альтернативна 133
нульова 133
проста 133
складна 133
статистична 132
гістограма
відносних частот 111
частот 110

Д

дисперсія 52
вибіркова 119
виправлена 127
добуток подій 16
довірчий інтервал 128, 130, 131

З

закон розподілу 44
біноміальний 54
Вейбулла 61
геометричний 56
дискретної двовимірної випадкової величини 64
нормальний 58
показниковий 57
Пуассона 55
рівномірний 56
статистичний 106
умовний 73

Й

ймовірність 19
геометрична 20
статистична 19
умовна 25

К

коваріаційна матриця 85
коваріація 81
коефіцієнт варіації 120
коефіцієнт кореляції 82
вибірковий 170
коефіцієнт регресії 80
кореляційна залежність 168
крива Гаусса 58
критерій
Пірсона 162
критичні точки 136

М

математична статистика 101
математичне сподівання
дискретної випадкової величини 51
неперервної випадкової величини .. 51
медіана 120
мода 120

Н

нерівність Чебишова 86

О

об’єм сукупності 103
область
допустимих значень 136
критична 135
оцінка параметра розподілу генеральної сукупності 126
ефективна 126
інтервальна 127
незміщена 126
придатна 126
точкова 127

П

повна система подій 12
повна система попарно несумісних
подій 13
події 11
випадкові 11
вірогідні 11
елементарні 13
масові 11
незалежні 26
неможливі 11
несумісні 12
однорідні 11
попарно несумісні 12
протилежні 17
рівноможливі 14
рівносильні 15
складені 13
сприятливі 14
сумісні 12
полігон
відносних частот 110
частот 109
помилка
другого роду 134
першого роду 134
потужність критерію 137
простір елементарних подій 14
пряма регресії 80

Р

рівень значущості 134, 137
рівняння регресії 168
різниця подій 17
розмах 120
ряд
варіаційний 105
інтервальний варіаційний 108
статистичний 105

С

середнє
вибіркове 118
умовне 168
середнє квадратичне відхилення 52
вибіркове 119
система випадкових величин 63
статистична перевірка 134
статистичний критерій 135
статистичний розподіл
дискретний 107
інтервальний 108
сукупність
вибіркова 103
генеральна 103
статистична 103
сума подій 15

Т

теорема
Бернуллі 88
інтегральна теорема Муавра-Лапласа
.... 41
локальна теорема Муавра-Лапласа 39
Пуассона 38
Чебишова 87
теорія ймовірностей 11

Ф

формула
Байєса 32
Бернуллі 36
інтегральна формула Муавра-
Лапласа 41
повної ймовірності 30
функція
Гаусса 40
інтегральна функція Лапласа 41
локальна функція Лапласа.............. 40
функція розподілу 45
двовимірної випадкової величини . 65
диференціальна 48
емпірична 113

Ч

частота 18, 107
відносна 107
емпірична 160
теоретична 160

Щ

щільність розподілу 48
умовна 77

Література

1. *Ашмарин Б.А.* Теория и методика педагогических исследований в физическом воспитании. – М.: Физкультура и спорт, 1978. – 223 с.
2. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 424 с.
3. *Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник. – К.: ВД “Професіонал”, 2007. – 560 с.
4. *Виноградська А.В.* Методичні вказівки та учбові завдання до курсу “Теорія ймовірностей” для курсантів Військового інституту. – К.: КНУ, 2001. – 62 с.
5. Вища математика: Основні означення та приклади. Ч.1./ За ред. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1992. – 285 с.
6. *Коваленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Тарасенко О.А.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчальний посібник. – Х.: АПБУ, 2003. – 109 с.
7. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1972. – 368 с.
8. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 2001. – 400 с.
9. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. Посібник. У 2 ч. – Ч. 1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000 – 304 с.
10. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2 ч. – Ч. 2. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.
11. *Копич І.М., Сороківський В.М.* Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики: Теорія та практикум. – Л.: ЛКА, 2001. – 336 с.
12. *Овчинников П.П., Лісіцин Б.М., Михайленко В.М.* Вища математика. – Ч.2. – К.: Техніка, 2000. – 791 с.
13. *Рудавський Ю.К. та ін.* Збірник задач з теорії ймовірностей. – Л.: НУ “Львівська політехніка”, 2000. – 244 с.
14. *Турчин В.М.* Математична статистика. Навчальний посібник.–К.: Видавничий центр “Академія”, 1999. – 240 с.

Навчальний посібник

К у з и к Андрій Данилович
М е н ь ш и к о в а Ольга Володимирівна
Ч м и р Оксана Юріївна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Літературний редактор **Галина Падик**

Різографічний друк **Наталія Дейнеко**

Технічний редактор, верстка
та відповідальний за випуск: **Олександр Хлевной**

Підписано до друку 10.10.2011 р.
Формат 60×84/16. Гарнітура Times New Roman.
Різографічний друк. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 10,8.

Друк ЛДУ БЖД
79007, Україна, м. Львів, вул. Клепарівська, 35
тел./факс: (380-32) 233-32-40, 233-24-79
e-mail: ndr@ ubgd.lviv.ua