Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Р.М. Тацій, М.І Кусій., Чмир О.Ю.

Елементи лінійної й векторної алгебри та аналітичної геометрії

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

За загальною редакцією д-ра фіз.-мат. наук, проф. Р.М. Тація

Львів 2017

УДК
ББК
С

Елементи лінійної й векторної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посібник / Р.М. Тацій, М.І. Кусій, О.Ю. Чмир – Л. : ЛДУ БЖД, 2017. – 126 с.

Рецензенти: Кузик А.Д., доктор сільськогосподарських наук, професор, учений секретар Львівського державного університету безпеки життєдіяльності
Процах Н.П., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Національного лісотехнічного університету України

Важливим фактором у засвоєнні вищої математики й оволодінні її методами є самостійна робота слухачів. Система типових розрахунків сприяє більш глибокому вивченню курсу вищої математики.

Навчальний посібник є першою частиною серії "Математичний практикум" і не зв'язаний з програмами конкретних навчальних закладів. Він містить основні теоретичні відомості з курсу "Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія", приклади розв'язування типових завдань та варіанти задач для самостійного розв'язування.

Посібник можна використовувати як довідник, збірник задач чи підручник для самостійного вивчення матеріалу.

Рекомендовано до друку вченою радою
Львівського державного університету безпеки життєдіяльності
(протокол № _____ від "__" ___________ 2017 р.)

Присвячено світлій пам'яті професора Михайла СУХОРОЛЬСЬКОГО.

ЗМІСТ

§1. Лінійна алгебра

1.1. Визначники другого, третього та *n*-го порядку. Властивості визначників

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.1)$$

називають *визначником (детермінантом) другого порядку*.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \qquad (1.2)$$

називають *визначником (детермінантом) третього порядку*.

Символи a_{ij} називають *елементами визначника*, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть заданий елемент.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1.1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (1.2) складають *головну діагональ визначника*, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} у тих самих визначниках – *побічну діагональ*.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюють за *правилом трикутників*: перші три доданки в правій частині формули (1.2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Наступні три доданки, які беруть зі знаком "–", є добутками елементів, що стоять на побічній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна побічній діагоналі (рис 1.1).

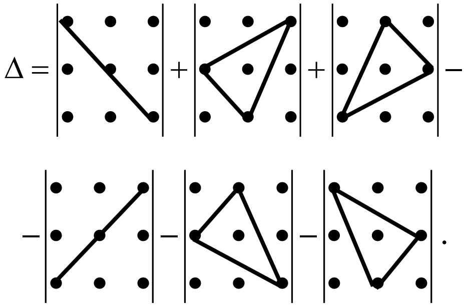


Рис. 1.1. Правило трикутника

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називають визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називають його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \tag{1.3}$$

Розглянемо визначник n-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Теорема. Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad i = \overline{1, n} , \tag{1.4}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad j = \overline{1, n} . \tag{1.5}$$

Запис визначника за будь-якою з формул (1.4) чи (1.5) називають *розкладом визначника за елементами відповідного рядка чи стовпця.*

Властивості визначників:

1. *Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.*
2. *Якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.*
3. *Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.*
4. *Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.*
5. *Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника.*
6. *Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.*
7. *Якщо кожен елемент* n*-го рядка (*n*-го стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, в одного з яких* n*-ий рядок (*n*-ий стовпець) складається з перших доданків, а у другого – з других доданків; інші елементи усіх трьох визначників однакові.*
8. *Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.*

Приклад 1.1. Для заданого визначника знайдіть мінори та алгебраїчні доповнення елементів a_{i3}, a_{2j}. Обчисліть визначник:

а) розклавши його за елементами i-го рядка;

б) розклавши його за елементами j-го стовпця;

в) зробивши нулі в i-тому рядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$i = 4, \ j = 3.$$

Розв’язання.

З означення мінора випливає, що

$$M_{43}=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&4\\3&-1&1\end{vmatrix}, \qquad M_{23}=\begin{vmatrix}1&1&2\\3&-1&1\\-2&3&2\end{vmatrix}.$$

Утворилися визначники третього порядку, які обчислюють за формулою (1.2). Отже,

$$M_{43}=1\cdot4\cdot1+1\cdot4\cdot3+2\cdot(-1)\cdot2-2\cdot4\cdot3-1\cdot2\cdot1-4\cdot(-1)\cdot1=-10,$$

$$M_{23}=1\cdot(-1)\cdot2+1\cdot1\cdot(-2)+3\cdot3\cdot2-2\cdot(-1)\cdot(-2)-1\cdot3\cdot2-1\cdot3\cdot1=1.$$

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} знаходимо за формулою (1.3). Отже,

$$A_{43}=(-1)^{4+3}M_{43}=10, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-1.$$

а) З теореми про розклад визначника за елементами рядка чи стовпця матимемо

$$\begin{vmatrix}1&1&-3&2\\2&4&-1&4\\3&-1&0&1\\-2&3&-2&2\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&-3&2\\4&-1&4\\-1&0&1\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1&-3&2\\2&-1&4\\3&0&1\end{vmatrix}+$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&4\\3&-1&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&4&-1\\3&-1&0\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot21+3\cdot(-25)+2\cdot(-10)+2\cdot38=23.$$

б) З теореми про розклад визначника за елементами рядка чи стовпця отримаємо

$$\begin{vmatrix}1&1&-3&2\\2&4&-1&4\\3&-1&0&1\\-2&3&-2&2\end{vmatrix}=-3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&4&4\\3&-1&1\\-2&3&2\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1&2\\3&-1&1\\-2&3&2\end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&4\\-2&3&2\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&4\\3&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$= -3\cdot(-14)+1\cdot 1+0\cdot 12+2\cdot(-10)=23\,.$$

в) У четвертому рядку перетворимо всі елементи, крім першого, на нулі. Для цього, залишаючи перший стовпець без змін, до другого стовпця додаємо перший, помножений на $\frac{3}{2}$, до третього – перший, помножений на (– 1), до четвертого – третій. Матимемо

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & 3 \\ 3 & \frac{7}{2} & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами четвертого рядка, дістанемо

$$-2\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -4 & -1 \\ 7 & -3 & 3 \\ \frac{7}{2} & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\left(-\frac{15}{2}-42+21-\frac{21}{2}+28+\frac{45}{2}\right)=23\,.$$

Зауважимо: якщо в рядку, у якому потрібно утворити нулі, один з елементів дорівнює одиниці, то варто робити нулями решту елементів. При тому не слід домножувати на певне число рядок (стовпець), який змінюємо, інакше потрібно буде поділити весь визначник на те саме число.

1.2. Матриці

Матрицею називають упорядкований набір елементів a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, розташованих у m рядках та n стовпцях:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Коротко матрицю позначають так: $A=(a_{ij})$, де a_{ij} – елементи матриці, причому індекс i означає номер рядка, а j – номер стовпця, на перетині яких стоїть заданий елемент.

Символічний добуток кількості рядків m на кількість стовпців n називають *розміром матриці* і позначають $m \times n$. Якщо хочуть вказати розмір $m \times n$ матриці A, то пишуть $A_{m \times n}$.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називають *квадратною:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будь-якій квадратній матриці A можна поставити у відповідність певне число, яке називають *визначником (детермінантом) цієї матриці* і позначають символом

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Матрицю, у якої всього один рядок, називають *матрицею-рядком*, а матрицю, яка складається з одного стовпця, називають *матрицею-стовпцем*.

Матрицю, у якої рядки змінено зі стовпцями, називають *транспонованою матрицею* $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Квадратну матрицю називають *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що розташовані на головній діагоналі, дорівнюють нулю, тобто $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Діагональну матрицю, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називають *одиничною* і позначають буквою E або I, тобто $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Нульовою називають матрицю, у якої всі елементи дорівнюють нулю. Позначають таку матрицю буквою O, тобто $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Дві матриці однакових розмірів $A_{m\times n} = (a_{ij})$ та $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називають *рівними*, якщо вони мають рівні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$.

Квадратну матрицю вигляду $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називають *верхньою трикутною матрицею*.

Дії над матрицями:

1. Операцію *додавання матриць* виконують тільки над матрицями однакового розміру. Сумою двох матриць $A_{m\times n}=(a_{ij})$ та $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називають матрицю $C_{m\times n}=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$, тобто елементи матриці *C* дорівнюють сумам відповідних елементів матриць, які додаються.
2. *Добутком матриці* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* $k\neq 0$ називають матрицю $C_{m\times n}=(ka_{ij})$, тобто елементи матриці *C* дорівнюють добуткові відповідних елементів цієї матриці на число k.
3. *Різницю матриць* $A-B$ визначають як суму матриці *A* й матриці *B*, помноженої на -1.
4. Операцію *множення двох матриць* вводять лише для узгоджених матриць.

Матрицю *A* називають *узгодженою з матрицею B*, якщо кількість стовпців першої матриці *A* дорівнює кількості рядків другої матриці *B*.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці *неузгоджені*, то множення таких матриць неможливе.

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на матрицю* $B_{n\times l}=(b_{ij})$ називають таку матрицю $C=AB$, у якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj},$$

$$C=C_{m\times l}=(c_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,l}.$$

Це означення називають *правилом множення рядка на стовпець.* Наприклад, щоб визначити елемент c_{14}, що стоїть у першому рядку й четвертому стовпці матриці C, потрібно знайти суму добутків елементів першого рядка матриці A на відповідні елементи четвертого стовпця матриці B.

Під час множення матриць не можна міняти місцями множники, тобто $AB \neq BA$. Наприклад,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 1 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що одинична матриця відіграє роль одиниці у множині матриць, тобто $A\cdot E = E\cdot A = A$, де A – квадратна матриця, а для довільної матриці C дійсна рівність $E\cdot C = C$.

Матрицю A^{-1} називають *оберненою до квадратної матриці* A, якщо виконується умова $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Квадратну матрицю A називають *виродженою*, якщо $\det A = 0$, *невиродженою* – якщо $\det A \neq 0$.

Теорема. *Для існування оберненої матриці* A^{-1} *необхідно й достатньо, щоб матриця A була невиродженою, причому*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.6)$$

де A_{ij} *– алгебраїчні доповнення елементів* a_{ij} *матриці A.*

Приклад 1.2. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -6\\ 7 & -8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 8\\ -4 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Обчислити $AB-5C^T$.

Розв'язання.

Розмір матриці A – 3×2, а матриці B – 2×2. Оскільки кількість стовпців першої матриці співпадає з кількістю рядків другої матриці, то матриця A є узгодженою з матрицею B і множення матриці A на B є правомірним. Тоді

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -6\\ 7 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot(-1)+1\cdot 4\\ 5\cdot 2+(-6)\cdot 3 & 5\cdot(-1)+(-6)\cdot 4\\ 7\cdot 2+(-8)\cdot 3 & 7\cdot(-1)+(-8)\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 1\\ -8 & -29\\ -10 & -39\end{pmatrix};$$

$$AB-5C^T=\begin{pmatrix}9 & 1\\ -8 & -29\\ -10 & -39\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1 & 3 & 8\\ -4 & 2 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}9 & 1\\ -8 & -29\\ -10 & -39\end{pmatrix}-$$

$$-5\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 2\\ 8 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 21\\ -23 & -39\\ -50 & -34\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3. Обчислити значення многочлена $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-5x+6$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Підставимо у вираз для многочлена замість змінної x матрицю A. Тоді $f(A) = A^2 - 5A + 6E$, де E – одинична матриця. Використовуючи означення добутку двох матриць, обчислимо

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 7 \\ 10 & 7 & 5 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи дії над матрицями, матимемо

$$f(A) = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 7 \\ 10 & 7 & 5 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -8 \\ -5 & 3 & 10 \\ 11 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

1.3. Системи лінійних рівнянь

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь називають систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.7}$$

де $a_{ij} \in \boldsymbol{R}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, – коефіцієнти, $b_i \in \boldsymbol{R}$, $i = \overline{1, m}$, – вільні члени, а $x_1, x_2, ... , x_n$ – змінні.

Числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ біля невідомих називають *коефіцієнтами*, а числа b_i, $i = \overline{1, m}$ – *вільними членами системи* (1.7), *або коефіцієнтами правої частини системи* (1.7).

Набір n чисел $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ називають *розв'язком системи* (1.7), якщо за підстановки цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Нехай задано n лінійних рівнянь з n невідомими. A – матриця, складена з коефіцієнтів системи, і визначник $\Delta = \det A \neq 0$.

I. *Метод Крамера.*

Обчислимо Δ_{x_i}, $i = \overline{1, n}$, – визначники, які утворюються з визначника Δ відповідно заміною стовпців при невідомих x_i на стовпець правої частини системи. Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь знаходимо за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}. \tag{1.8}$$

II. *Матричний метод.*

Матричний метод розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь зводиться до знаходження матриці, оберненої до матриці з коефіцієнтів системи, і множення її на стовпець вільних членів:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Зауважмо, що два попередні методи знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовують лише у випадку системи, у якій кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих, та коли визначник матриці, складеної з коефіцієнтів системи, відмінний від нуля.

III. *Метод Гаусса.*

Для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь найбільш універсальним є *метод Гаусса*, відомий також як *метод зведення до східчастого вигляду*. Цей метод можна використовувати й у випадку, коли кількість рівнянь не збігається з кількістю невідомих, а також якщо визначник матриці складеної з коефіцієнтів системи, дорівнює нулю.

Розглянемо *розширену матрицю* системи (1.7), тобто матрицю, утворену приєднанням до матриці її коефіцієнтів стовпця вільних членів

$$A_B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Основна ідея методу Гаусса: за допомогою елементарних перетворень над рядками матриці та властивостей матриць звести матрицю A_B до східчастого вигляду. Далі повертаємося до системи й знаходимо її розв'язок. Під елементарними перетвореннями над рядками матриці розуміють:

а) заміну місцями двох рядків матриці;

б) множення кожного елемента рядка матриці на один і той самий відмінний від нуля множник;

в) додавання до елементів рядка матриці відповідних елементів іншого рядка, помноженого на одне й те саме число;

г) відкидання нульового рядка матриці.

Приклад 1.4. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 2x + y + z = 5, \\ 2y - z = 3 \end{cases} \qquad (1.10)$$

а) методом Крамера;
б) матричним методом;
в) методом Гаусса.

Розв'язання.

а) Обчислюємо послідовно визначники системи (1.10)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18, \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -9,$$

де визначники Δ_{x_1}, Δ_{x_2} та Δ_{x_3} утворені з визначника Δ заміною відповідно першого, другого та третього стовпця на стовпець, який складається з елементів правої частини цієї системи.

Тоді, за формулами Крамера, маємо

$$x = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1, \; y = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 2, \; z = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 1.$$

Перевірка. Переконаємося, що розв’язок правильний, підставивши його в кожне з рівнянь системи (1.10). Отримаємо тотожності

$$\begin{cases} 3 - 2 \cdot 2 + 1 = 0, \\ 2 \cdot 1 + 2 + 1 = 5, \\ 2 \cdot 2 - 1 = 3. \end{cases}$$

б) Запишемо систему (1.10) в матричній формі

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки A – невироджена матриця $(\det A = \Delta = -9)$, то існує обернена до неї матриця A^{-1}. Тоді, як відомо, єдиний розв’язок системи лінійних рівнянь (1.10) можна знайти у вигляді (1.9). Шукаємо обернену матрицю A^{-1} за формулою (1.6).

Маємо

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=7,$$

тому

$$A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3 & 0 & -3\\ 2 & -3 & -1\\ 4 & -6 & 7\end{pmatrix}.$$

Отже, за формулою (1.9) остаточно отримуємо

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3 & 0 & -3\\ 2 & -3 & -1\\ 4 & -6 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-9\\ -18\\ -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix},$$

тобто трійка чисел $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$, як і в попередньому разі, є розв'язком системи лінійних рівнянь (1.10).

в) Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи (матриця, яка складається з коефіцієнтів системи та правої частини системи)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 3\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 1 & 15\\ 0 & 1 & 7 & 9\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 7 & 9\\ 0 & 7 & 1 & 15\end{array}\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 7 & 9\\ 0 & 0 & -48 & 48\end{array}\right).$$

Ці перетворення не змінюють розв’язків системи (1.10), тобто є еквівалентними й позначаються символом «$\leftrightarrow$». У цьому прикладі їх можна описати так:

перше перетворення:

- перший рядок матриці залишаємо без змін;
- другий рядок множимо на 3 й додаємо до першого рядка, який помножений на (– 2);
- третій рядок множимо на 3 й додаємо до першого рядка, який помножений на (– 2);

друге перетворення:

- міняємо місцями другий і третій рядок;

третє перетворення:

- до третього рядка додаємо другий, помножений на (– 7).

За останньою розширеною матрицею складаємо еквівалентну до (1.10) систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ y+7z=9, \\ -48z=-48. \end{cases} \qquad (1.11)$$

З системи (1.11) послідовно виключаємо невідомі: $z = 1$, $y=9-7\cdot 1=2$, $x=\frac{1}{3}\cdot(2\cdot 2-1)=1$. Отже, трійка чисел $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ – єдиний розв’язок системи (1.11), а отже, і (1.10).

Як бачимо, розв’язок, отриманий попередніми двома методами, співпадає з розв’язком, що отриманий методом Гаусса.

Приклад 1.5. Знайти розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=5, \\ 3x_1-6x_2+5x_3=6 \end{cases} \qquad (1.12)$$

методом Гаусса.

Розв'язання.

Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right).$$

Ці перетворення не змінюють розв'язків системи (1.12), тобто є еквівалентними й позначаються символом «$\leftrightarrow$». У цьому прикладі їх можна описати так:

перше перетворення:

- перший рядок матриці залишаємо без змін;
- до другого рядка додаємо перший, помножений на (-2);
- від третього рядка віднімаємо перший рядок;
- до четвертого рядка додаємо перший, помножений на (-3);

друге перетворення:

- до четвертого рядка додаємо другий, помножений на (-3);

третє перетворення:

- до четвертого рядка додаємо третій, помножений на (-5).

За останньою розширеною матрицею складаємо еквівалентну до (1.12) систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_2 - x_3 = -9, \\ x_3 = -1, \\ 0 = 20. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Як бачимо, останнє рівняння в системі (1.13) містить неправильну рівність, а це означає, що ця система рівнянь (1.13), а отже, і (1.12) – розв'язку немає.

Приклад 1.6. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 = 5 \end{cases} \tag{1.14}$$

методом Гаусса.

Розв'язання.

Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

У цьому прикладі їх можна описати так:

перше перетворення:

- перший рядок матриці залишаємо без змін;
- до другого рядка додаємо перший рядок;
- до третього рядка додаємо перший, помножений на (– 2);
- від четвертого рядка віднімаємо перший рядок;

друге перетворення:

- до третього рядка додаємо другий рядок;
- від четвертого рядка віднімаємо другий рядок.

Система (1.14) еквівалентна системі

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

і має безліч розв'язків. Візьмемо $x_3 = t$, t – довільне число. Тоді знаходимо $x_2 = 1 - \frac{t}{3}$, $x_1 = \frac{5}{3}t$. Отже, розв'язки вихідної системи мають такий вигляд: $x_1 = \frac{5}{3}t$, $x_2 = 1 - \frac{t}{3}$, $x_3 = t$, де t – довільне число.

Теоретичні питання

1. Що називають визначником матриці? Сформулюйте основні властивості визначника матриці.
2. Дайте означення матриці.
3. Які дії можна виконувати над матрицями?
4. Як розв'язувати систему лінійних рівнянь методом Крамера?
5. Як розв'язувати систему лінійних рівнянь матричним методом?
6. Опишіть метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь.

Завдання для самостійної роботи

I. Для заданого визначника знайдіть мінори та алгебраїчні доповнення елементів a_{i3}, a_{2j}. Обчисліть визначник:

а) розклавши його за елементами *i*-го рядка;
б) розклавши його за елементами *j*-го стовпця;
в) зробивши нулі в *i*-тому рядку.

1.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$
$i = 2$, $j = 3$

2.
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$i = 3$, $j = 3$

3.
$$\begin{vmatrix} 12 & 7 & 0 & 10 \\ 11 & 1 & -1 & 20 \\ 30 & 4 & 0 & 12 \\ 10 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$
$i = 1$, $j = 3$

4.

$$\begin{vmatrix} 14 & -5 & -1 & 0 \\ 13 & -2 & 8 & 12 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \\ 12 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$

$i=4$, $j=1$

5.

$$\begin{vmatrix} -3 & 15 & 30 & 2 \\ 0 & 14 & 10 & 0 \\ 11 & -2 & 12 & 1 \\ -5 & 10 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=2$, $j=4$

6.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 10 & -5 \\ 14 & 0 & -5 & 10 \\ 11 & 0 & -2 & -3 \\ 10 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$i=1$, $j=2$

7.

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 & 10 \\ 13 & 14 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 11 \\ 10 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$i=2$, $j=3$

8.

$$\begin{vmatrix} -3 & 12 & 0 & -2 \\ 10 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 10 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$i=3$, $j=1$

9.

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$i=4$, $j=3$

10.

$$\begin{vmatrix} 10 & -2 & 11 & -7 \\ -4 & -8 & -2 & -3 \\ 10 & 11 & 0 & -4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=4$, $j=2$

11.

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 20 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 14 \end{vmatrix}$$

$i=3$, $j=4$

12.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & 14 & 10 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$i=1$, $j=2$

13.

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$i=1$, $j=4$

14.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$i=2$, $j=4$

15.

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$i=1$, $j=3$

16.

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=2$

17.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 10 & -3 \\ 3 & 20 & 10 & -1 \\ 1 & 20 & -1 & -3 \\ 4 & 10 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=1$

18.

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$i=2,\ j=4$

19.

$$\begin{vmatrix} -6 & -2 & -10 & 0 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 20 & -4 & -2 & -6 \\ 30 & 10 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=2,\ j=4$

20.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 30 & 0 & 6 \\ 20 & -2 & 1 & 4 \\ 30 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=4,\ j=3$

21.

$$\begin{vmatrix} -1 & 20 & -3 & 4 \\ -2 & 10 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=1,\ j=2$

22.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 10 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 20 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=2$

23.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 20 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$i=4,\ j=4$

24.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 10 \\ -5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=2$

25.

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & -3 \\ 10 & 4 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=2,\ j=3$

26.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 10 & -2 \\ 0 & 10 & -1 & -2 \\ 3 & 10 & -3 & 0 \\ 1 & 20 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=4,\ j=1$

27.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1- & -3 \\ 3 & 20 & 10 & -1 \\ 1 & 10 & -2 & 10 \\ 0 & -4 & -4 & 10 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=4$

28.
$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 10 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$i = 1,\ j = 2$

29.
$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 20 & 10 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 10 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$i = 4,\ j = 4$

30.
$$\begin{vmatrix} -4 & 10 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 10 & 1 & 1 \\ 20 & 10 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$i = 2,\ j = 2$

II. Дано матриці *A*, *B*, *C*. Знайти матрицю *D*, якщо

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

   $D = (AB)^T + 7C$.

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

   $D = C^T - 6AB$.

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

   $D = AB - 3C^T$.

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$,

   $D = AB - 6C^T$.

5. $A = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = (4A + B^T)C$.

6. $A=\begin{pmatrix}-5\\6\\1\\-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1 & 1\\5 & 2 & 2 & -3\\6 & -2 & 3 & -4\end{pmatrix}$,

$D=(AB)^T+4C$.

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\3 & 7\\-9 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & -3\\1 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}10 & -5 & 3\\2 & -7 & -2\end{pmatrix}$,

$D=(AB)^T+3C$.

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\-3 & -5\\3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\-3 & 5\\-1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\-3 & 5\end{pmatrix}$, $D=(-4A+B)C^T$.

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & 5\\-3 & 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -1\\-3 & 2 & -5\\1 & 2 & -3\\6 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\-3 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}$,

$D=4AB-C^T$.

10. $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\8 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-9 & -4\\-2 & -3\\7 & -6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 9\\-6 & 1\end{pmatrix}$,

$D=(AB)^T-3C$.

11. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -4 & -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-5 & -2 & 4\end{pmatrix}$,

$D=(3A-B)^T C$.

12. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$D=(AB)^T-8C$.

13. $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -9 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$D=\left(AB+7C^T\right)^T$.

14. $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$,

$D=(A+4B)C^T$.

15. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & -6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$D=(AB)^T-3C$.

16. $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$D=(AB)^T+8C$.

17. $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix}$,

$D=(A-3B)C^T$.

18. $A=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\\-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\-5\\1\\-6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}$, $D=(3A-B)C^T$.

19. $A=\begin{pmatrix}1&5\\3&-7\\8&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-3\\2&-7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&7&3\\-5&8&2\end{pmatrix}$,

$D=(AB)^T+5C$.

20. $A=\begin{pmatrix}5&-2&1\\-3&4&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&4&-3\\-2&2&-5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$,

$D=C^T(-3A+2B)$.

21. $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-3&-5\\6&-2\\1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-3&4\\-5&-3\\2&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&-3\\-1&2\\-5&3\\6&1\end{pmatrix}$,

$D=(3A+B)^TC$.

22. $A=\begin{pmatrix}2&-3&3\\-2&4&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4&3&6\end{pmatrix}$,

$D=\left(AB+7C^T\right)^T$.

23. $A=\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3&4\\-5&3\\6&1\end{pmatrix}$, $D=C^T(-3A+2B)$.

24. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$D=C(3A+B)^T$.

25. $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -7 \end{pmatrix}$,

$D=5(AB)^T-6C$.

26. $A=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $D=(3A-B)C^T$.

27. $A=\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$, $D=(4A-2B)^T C$.

28. $A=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$,

$D=(AB)^T-4C$.

29. $A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$D=(3A-5B)^T C$.

30. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $D=C(3A+4B)^T$.

III. Обчислити значення многочлена $f(x)$, якщо $x = A$.

1. $f(x)=x^2-3x+2$, $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $f(x)=x^2+4x-3$, $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $f(x)=x^2-2x+4$, $A=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$;

4. $f(x)=x^2+3x-2$, $A=\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

5. $f(x)=x^2-4x+6$, $A=\begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

6. $f(x)=x^2+5x-3$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & -7 \end{pmatrix}$;

7. $f(x)=x^2-5x+2$, $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

8. $f(x)=x^2+6x-3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

9. $f(x)=x^2-7x+4$, $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

10. $f(x)=x^2+5x-7$, $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

11. $f(x)=x^2-8x+9$, $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

12. $f(x)=x^2+5x-8$, $A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

13. $f(x)=x^2-6x+7$, $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

14. $f(x)=x^2+4x-7$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

15. $f(x)=x^2-3x+9$, $A=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

16. $f(x)=x^2+10x-3$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 6 & -5\\ -2 & 1 & 3\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$;

17. $f(x)=x^2-2x+12$, $A=\begin{pmatrix}-8 & 5 & 6\\ -2 & 3 & -1\\ -3 & -1 & -2\end{pmatrix}$;

18. $f(x)=x^2+9x-3$, $A=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 7\\ -2 & 3 & 4\\ -1 & -2 & -5\end{pmatrix}$;

19. $f(x)=x^2-6x+13$, $A=\begin{pmatrix}-7 & 3 & 1\\ -2 & 3 & -4\\ 1 & -5 & -2\end{pmatrix}$;

20. $f(x)=x^2+5x-7$, $A=\begin{pmatrix}7 & -3 & 1\\ -2 & 4 & -5\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$;

21. $f(x)=x^2-2x+14$, $A=\begin{pmatrix}5 & -3 & 4\\ -2 & 2 & -1\\ 6 & 1 & -2\end{pmatrix}$;

22. $f(x)=x^2+3x-11$, $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ -5 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

23. $f(x)=x^2-7x+12$, $A=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

24. $f(x)=x^2+6x-6$, $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -4\\ -2 & 3 & -1\\ -3 & -1 & -2\end{pmatrix}$;

25. $f(x)=x^2-3x+17$, $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 6\\ -2 & 4 & -1\\ 2 & 5 & -2\end{pmatrix}$;

26. $f(x)=x^2+8x-7$, $A=\begin{pmatrix}-7 & 4 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ -2 & -3 & 5\end{pmatrix}$;

27. $f(x)=x^2-13x+10$, $A=\begin{pmatrix}6 & -4 & -2\\ 5 & -1 & 2\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix}$;

28. $f(x)=x^2+4x-12$, $A=\begin{pmatrix}7 & -3 & 4\\ 2 & 5 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

29. $f(x)=x^2-9x+2$, $A=\begin{pmatrix}8 & -2 & 4\\ -3 & 1 & -2\\ 1 & -4 & -2\end{pmatrix}$;

30. $f(x)=x^2+9x-15$, $A=\begin{pmatrix}-7 & 4 & 5\\ -2 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

IV. Розв’язати системи рівнянь

а) методом Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases}3x+4y+5z=26,\\ 6x+9y+11z=57,\\ 3x+7y+9z=44.\end{cases}$

2. $\begin{cases}4x+3y+4z=23,\\ 4x+6y+8z=38,\\ 12x+15y+19z=96.\end{cases}$

3. $\begin{cases} x+3y+4z=19, \\ 2x+4y+3z=19, \\ 5x-2y-z=-2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-3y+5z=11, \\ 3x+4z=15, \\ x-y+2z=5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x-3y+z=4, \\ -x+4y-2z=1, \\ 3x-4y-z=-8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 12x-2y-z=5, \\ x+2y-z=2, \\ x+y+z=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 9x+2y-3z=4, \\ 2x+3y+4z=20, \\ 4x-y-z=-1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} -6x+3y-2z=-6, \\ 7x+2y-z=8, \\ -x-y+z=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -4x+2y+3z=9, \\ 4x+7y-z=15, \\ 5x+y-2z=1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+4y-5z=-4, \\ y-z=-1, \\ 2x+3y+z=11. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x-2z=-3, \\ 4x-3y+z=1, \\ 2x-4y+4z=6. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x+4y+5z=6, \\ 6x-2y+z=4, \\ x-y+z=3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -4x+5y+3z=1, \\ 2x-2y+z=4, \\ 5x+3y+z=-1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 16x+2y+5z=8, \\ 4x-3y+z=5, \\ 2x-y+z=3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 7x-7y+7z=21, \\ 2x-y+5z=11, \\ x+2y-3z=-8. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y-z=-3, \\ x-y+z=3, \\ 3x+5y+6z=7. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - z = -2, \\ 3x + 6y + 5z = 4, \\ y + 2z = 3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 13, \\ 5x + 2y - 3z = -8, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x + 5y - 3z = -11, \\ x - z = -2, \\ y + 3z = 5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 9x + 9y + z = -7, \\ 3x + 2y - 2z = -6, \\ 5x + 4y + z = -2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -5x + 3y + 6z = 9, \\ 15x + 5y + 7z = 9, \\ 3x + 4y + 2z = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 3x - y + 4z = 12, \\ 5x + 5y - 7z = 6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3y + 5z = 16, \\ -x + 2y + z = 4, \\ x + z = 4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ -x + 3z = 4, \\ x - y + 5z = 10. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 15x - 15y + 2z = 4, \\ 5x + 4y - z = 16, \\ 6x + 4y + 5z = 30. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x - 7y + 3z = -4, \\ x + y + z = 6, \\ 5x + 3y + 2z = 20. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -7x + 2y - 3z = -16, \\ 4x + 3y - z = 12, \\ 3x + 2y + z = 12. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 16x + 3y + 4z = 46, \\ 3x + 7y + 7z = 34, \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 14x - 11y + 7z = 20, \\ 8x + y - 5z = 8, \\ x + 3y - 8z = -8. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 7x + y + z = 18, \\ x + 5y + 5z = 22, \\ 14x + 3y - 5z = 24. \end{cases}$

V. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 13x_2 + 2x_3 = 8, \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 = 10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 12, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 11x_2 + 8x_3 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -5, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 - 5x_3 = -11, \\ -2x_1 + 9x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 11, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 18, \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 4x_3 = -11, \\ 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 = -16, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 6, \\ 8x_1 - x_2 - 6x_3 = 9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6, \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 6x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -5, \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3, \\ -x_1 + x_2 + 8x_3 = -8, \\ -3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -6, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 2, \\ 9x_1 + 5x_2 + 12x_3 = 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = -5. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 13, \\ 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -5, \\ 8x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ -4x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -21, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = -10, \\ -5x_1 - 9x_2 + 6x_3 = -32. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -9, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 10x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -9, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -13. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 - 7x_2 - 12x_3 = -3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9, \\ -3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 + 11x_3 = 5. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -6, \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -9, \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ -3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 1, \\ -2x_1 + 11x_2 + 8x_3 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -4, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -6, \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -10, \\ 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 = -7. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7, \\ 6x_1 - x_2 + 6x_3 = -14, \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -12, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 14, \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ -5x_1 + 7x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 11. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ -4x_1 + 6x_2 - 7x_3 = -20, \\ -5x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -19, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ -6x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

§2. Векторна алгебра

2.1. Вектори. Поділ відрізка у заданому відношенні. Координати центра мас

Вектором (*геометричним вектором*) називають напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ з початковою точкою *A* та кінцевою точкою *B*.

Нехай $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ – координати початку та кінця вектора $\overrightarrow{AB}$. Різниці $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$ називають *координатами вектора* $\overrightarrow{AB}$. Тоді пишуть $\overrightarrow{AB} = (a_x, a_y, a_z)$.

Зауважимо, що вектори часто позначають малими буквами латинського алфавіту: $\vec{a}$, $\vec{b}$, … .

Довжину відрізка *AB* називають *довжиною* (*нормою*) *вектора* $\overrightarrow{AB}$ й позначають $|\overrightarrow{AB}|$. Довжину вектора обчислюють за формулою $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним* (*ортом*).

Вектор, початок якого збігається з кінцем, називають *нульовим* і позначають $\vec{0}$. Напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю.

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають ортогональними (перпендикулярними), якщо їх напрямки взаємно перпендикулярні. Ці вектори позначають $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Вектор $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ можна подати у вигляді

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – упорядкована трійка одиничних попарно перпендикулярних векторів.

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути однаково або протилежно напрямлені, їх позначають $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені й мають рівні довжини.

Три вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Зокрема, вектори компланарні, якщо два з них або всі три є колінеарними.

Нехай задано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ і дійсне число λ, тоді

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z); \; \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z).$$

Вказані вище операції називають *лінійними операціями над векторами*.

Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ рівні, тоді випливає, що $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Для того щоб вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно й достатньо, щоб їхні координати були пропорційні, тобто $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

Нехай задано відрізок AB з точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Тоді координати точки $M(x, y, z)$, яка лежить на цьому відрізку та ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $|\overrightarrow{AM}| : |\overrightarrow{MB}| = \lambda$, знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (2.1)$$

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл ($\lambda = 1$), знаходять за формулами $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Запишемо формулу центра маси $C(x_C, y_C, z_C)$ системи n матеріальних точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=\overline{1,n}$, у яких зосереджено маси m_i відповідно:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \quad (2.2)$$

Приклад 2.1. Задано точки $M(-5; 2; 3)$, $N(-4; -3; 1)$, $P(4; 1; -6)$, $Q(-5; -4; 8)$. Обчислити довжину вектора $\vec{c} = 2\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{PQ}$ та координати точки A, яка ділить відрізок MN у відношенні 2:3.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{MN}$ та $\overrightarrow{PQ}$, оскільки відомі координати точок початку та кінця цих векторів

$$\overrightarrow{MN} = (1; -5; -2), \ \overrightarrow{PQ} = (-9; -5; 14).$$

Використовуючи основні дії над векторами, знайдемо координати вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c} = 2\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{PQ} = 2(1; -5; -2) - 3(-9; -5; 14) = (29; 10; -44).$$

Обчислимо довжину вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{29^2 + 10^2 + (-44)^2} = \sqrt{2877} \approx 53,64.$$

Використовуючи формули (2.1), знайдемо координати точки A, яка ділить відрізок MN у відношенні 2:3:

$$x_A = \frac{-5 + \frac{2}{3}\cdot(-4)}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{23}{5}, \ y_A = \frac{2 + \frac{2}{3}\cdot(-3)}{1 + \frac{2}{3}} = 0, \ z_A = \frac{3 + \frac{2}{3}\cdot 1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{11}{5}.$$

Приклад 2.2. У трьох точках $A_1(6; 1,5)$, $A_2(5; 7)$ і $A_3(1; 4)$ розміщено маси відповідно по 6, 10 і 4 одиниці. Знайти центр мас цієї системи.

Розв'язання.

З формули (2.2) випливає, що центр маси є в точці C з координатами

$$x_C = \frac{6\cdot 6 + 5\cdot 10 + 1\cdot 4}{6+10+4} = 4{,}5, \qquad y_C = \frac{1{,}5\cdot 6 + 7\cdot 10 + 4\cdot 4}{6+10+4} = 4{,}75.$$

2.2. Проекція вектора на вісь

Віссю називають напрямлену пряму. Напрям прямої позначають стрілкою. Заданий на осі напрям уважають додатним, а протилежний йому – від'ємним.

Проекцією точки A на вісь u називають основу A_1 перпендикуляра AA_1, проведеного з точки A на цю вісь (рис. 2.1).

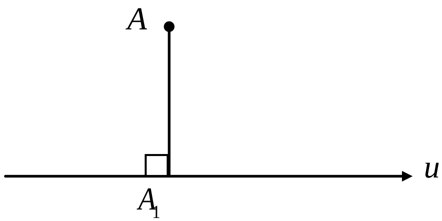


Рис. 2.1. Проекцією точки A на вісь u

Нехай задано вісь u й вектор $\overrightarrow{AB}$. Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь u відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь u називають додатне число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u однаково напрямлені, і від'ємне число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u протилежно напрямлені. Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь u позначають $пр_u\vec{a}$ (рис. 2.2). Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то $пр_u\vec{a} = 0$.

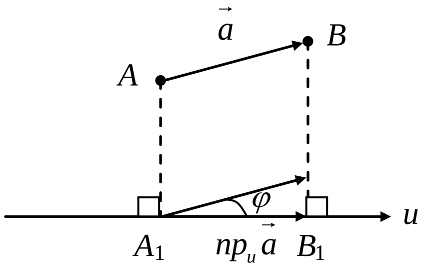


Рис 2.2. Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь u

Кутом φ між вектором $\vec{a}$ і віссю u (або між двома векторами) називають кут між їх напрямами: $\varphi = (\vec{a};u)$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь *u* дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором і віссю, тобто $np_u\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$.

2.3. Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi .$$

Якщо вектори задані своїми координатами: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то скалярний добуток обчислюють за формулою

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z . \qquad (2.3)$$

Косинус кута між векторами обчислюють за формулою

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} . \qquad (2.4)$$

Властивості скалярного добутку:

1. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$.
2. Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $(\vec{a},\vec{b}) > 0$, якщо кут $(\vec{a};\vec{b})$ – гострий; $(\vec{a},\vec{b}) < 0$, якщо кут $(\vec{a};\vec{b})$ – тупий.
3. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.
4. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$, звідки $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.
5. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добуткові довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

З фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ у разі переміщення матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α, дорівнює $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\alpha$ (рис. 2.3), або

$$A = (\vec{F},\vec{S}). \qquad (2.5)$$

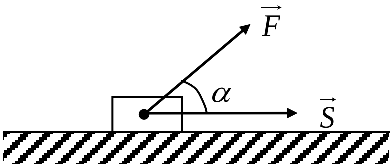


Рис 2.3.

Приклад 2.3. Задано точки $M(1; -3; 0)$, $N(-2; 0; 0)$, $P(-4; 1; -2)$, $Q(-3; -2; -7)$. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$ за координатами їх початку і кінця:

$$\overrightarrow{MN}=\left(-3;3;0\right),\ \overrightarrow{PQ}=\left(1;-3;-5\right).$$

Обчислимо довжини цих векторів

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(-3)^2+3^2+0^2}=\sqrt{18},\ |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{35}$$

і їх скалярний добуток за формулою (2.3)

$$(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ})=-3\cdot 1+3\cdot(-3)+0\cdot(-5)=-12.$$

З означення скалярного добутку векторів з формули (2.4) отримуємо

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ})}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{-12}{\sqrt{18}\sqrt{35}}=-\frac{2\sqrt{70}}{35}\approx-0,48,$$

де φ – кут між векторами $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$. Отже,

$$\varphi=\pi-\arccos\frac{2\sqrt{70}}{35}.$$

Приклад 2.4. Задано точки $A(-1;3;-3)$, $B(4;3;6)$, $C(2;0;3)$, $D(4;3;-3)$. Обчислити $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CD}$ за відомими координатами точок початку та кінця цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}=(5;0;9),\qquad \overrightarrow{CD}=(2;3;-6).$$

Обчислимо скалярний добуток цих векторів за (2.3)

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=5\cdot 2+0\cdot 3+9\cdot(-6)=-44$$

та знайдемо довжину вектора $\overrightarrow{CD}$

$$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=7.$$

Використовуючи властивість 5 скалярного добутку, одержуємо

$$np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}=\frac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{CD}|}=-\frac{44}{7}.$$

Зауважимо, що проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$ – від'ємна. Це означає, що кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CD}$ – тупий.

Приклад 2.5. Дано силу $\vec{F}=(7;-4;5)$, яка прикладена до точки. Обчислити роботу, яку виконує ця сила, коли точка прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилася з точки $A(4;\ 2;\ -8)$ у точку $B(3;\ -2;\ -5)$.

Розв'язання.

Знайдемо вектор переміщення $\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(-1;-4;3)$. За формулою (2.5), використовуючи (2.3), одержуємо

$$A=7\cdot(-1)-4\cdot(-4)+5\cdot 3=24.$$

2.4. Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}=[\vec{a}\times\vec{b}]$, який визначається трьома умовами:

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
- якщо $\vec{c}\neq\vec{0}$, тоді трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є такою, що з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки;
- довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$.

Якщо $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ та $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то в координатній формі векторний добуток обчислюють за формулою

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}. \quad (2.6)$$

Властивості векторного добутку:

1. $[\vec{a}\times\vec{b}]=-[\vec{b}\times\vec{a}]$.
2. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли ці вектори колінеарні.
3. Модуль $|[\vec{a}\times\vec{b}]|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, що виходять з однієї точки, тобто

$$S=|[\vec{a}\times\vec{b}]|. \tag{2.7}$$

Нехай у точці A прикладена сила $\vec{F}$ і O – деяка фіксована точка.

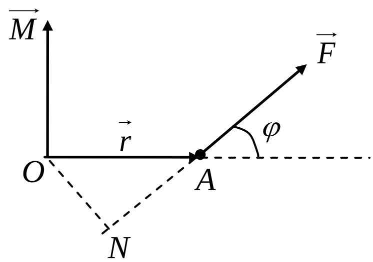


Рис. 2.4.

Як відомо з фізики, моментом сили $\vec{F}$ стосовно точки O називають вектор $\vec{M}$, довжина якого дорівнює добутку сили на плече і який напрямлений по осі обертання так, що коли дивитися з його кінця, то обертання тіла відбувається проти руху стрілки годинника (рис. 2.4). Оскільки $|\vec{M}|=|\vec{F}|\cdot ON=|\vec{F}|\cdot|\vec{r}|\sin\varphi$, то момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці A, відносно точки O визначається векторним добутком

$$\vec{M}=[\overrightarrow{OA}\times\vec{F}]. \tag{2.8}$$

Приклад 2.6. Задано точки $M(1;-3;0)$, $N(-2;0;0)$, $P(-4;1;-2)$, $Q(-3;\ -2;\ -7)$. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a}=\overrightarrow{MP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{NQ}$.

Розв'язання.

Площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, обчислюють з допомогою векторного добутку за формулою (2.7).

Знайдемо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{MP}$, $\vec{b} = \overrightarrow{NQ}$

$$\vec{a} = \left(-5; 4; -2\right),\ \vec{b} = \left(-1; -2; -7\right)$$

та векторний добуток $[\vec{a} \times \vec{b}]$ у координатній формі за формулою (2.6)

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -32\vec{i} - 33\vec{j} + 14\vec{k} = (-32; -33; 14).$$

Обчисливши довжину векторного добутку $[\vec{a} \times \vec{b}]$, за формулою (2.7) маємо

$$S = \sqrt{(-32)^2 + (-33)^2 + 14^2} = \sqrt{2309} \approx 48 \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад 2.7. Силу $\vec{F} = (2; -4; 5)$ прикладено до точки $A(4; -2; 3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $O(3; 2; -1)$.

Розв'язання.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{OA} = (1; -4; 4)$. Тоді за формулою (2.8), використовуючи (2.6), одержуємо

$$\overrightarrow{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} =$$

$$= (-4; 3; 4).$$

2.5. Мішаний добуток трьох векторів

Якщо результат векторного добутку $[\vec{a}\times\vec{b}]$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перемножити скалярно на вектор $\vec{c}$, то отримаємо *мішаний добуток векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задані своїми координатами:

$$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \vec{b}=(b_x,b_y,b_z),\ \vec{c}=(c_x,c_y,c_z).$$

Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ обчислюють за формулою:

$$([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

<u>Властивості мішаного добутку:</u>

1. $([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=-(\vec{c}\cdot[\vec{b}\times\vec{a}])$.
2. У разі циклічної перестановки множників мішаний добуток не змінюється:
$$([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=([\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{a})=([\vec{c}\times\vec{a}]\cdot\vec{b}).$$
3. У мішаному добутку знаки векторного й скалярного добутків можна міняти місцями: $([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}])$. У зв'язку з цим мішаний добуток позначають $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.
4. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.
5. Модуль мішаного добутку $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ зі спільним початком, тобто
$$V=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|. \tag{2.10}$$

Приклад 2.8. Задано точки $M(1;-3;0)$, $N(-2;0;0)$, $P(-4;1;-2)$, $Q(-3;\ -2;\ -7)$. З'ясувати компланарність векторів $\vec{a}=\overrightarrow{MP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{NQ}$, $\vec{c}=[\overrightarrow{MQ}\times\overrightarrow{NP}]$ та знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, де $\vec{d} = [\vec{a} \times \vec{b}]$.

Розв'язання.

Вектори $\vec{a} = \overrightarrow{MP}$, $\vec{b} = \overrightarrow{NQ}$ мають координати

$$\vec{a} = (-5; 4; -2),\ \vec{b} = (-1; -2; -7).$$

Знайдемо координати вектора $\vec{c} = [\overrightarrow{MQ} \times \overrightarrow{NP}]$, де $\overrightarrow{MQ} = (-4; 1; -7)$, $\overrightarrow{NP} = (-2; 1; -2)$. За формулою (2.6), маємо

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k} = (5; 6; -2).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ в координатній формі за формулою (2.9):

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -7 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -386 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарні.

Як відомо, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{d}$, обчислюють за формулою (2.10).

Обчислимо мішаний добуток:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -7 \\ -32 & -33 & 14 \end{vmatrix} = 2309.$$

Тому за формулою (2.10) маємо $V = 2309$ (куб. од).

Приклад 2.9. Задано координати вершин піраміди $M_1M_2M_3M_4$: $M_1(8;\ 10;\ 7)$, $M_2(10;\ 5;\ 5)$, $M_3(5;\ 6;\ 8)$, $M_4(8;\ 6;\ 4)$ (рис. 2.5). Знайти:

1) площу грані $M_1M_2M_3$;

2) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

3) кут між ребрами M_1M_2 і M_1M_4;
4) довжину висоти, опущеної з вершини M_4 на грань $M_1M_2M_3$.

Розв'язання.

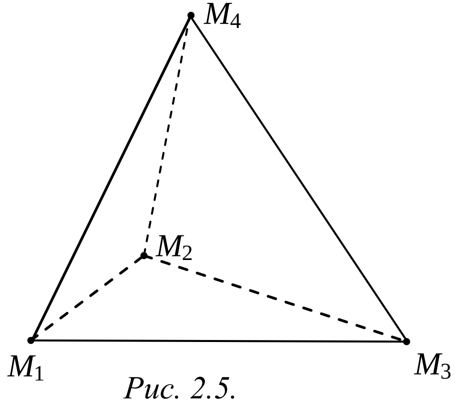


Рис. 2.5.

1) Площа грані $M_1M_2M_3$ – це площа трикутника $M_1M_2M_3$, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$, обчислюється за допомогою векторного добутку, тобто $S_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\right]\right|$.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ за координатами їх початку й кінця

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (2;-5;-2),\ \overrightarrow{M_1M_3} = (-3;-4;1)$$

та векторний добуток $\left[\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\right]$ у координатній формі за формулою (2.6)

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= -13\vec{i} + 4\vec{j} - 23\vec{k} = (-13;4;-23).$$

Обчисливши довжину векторного добутку $\left[\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right]$, маємо

$$S_{M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\sqrt{(-13)^2+4^2+(-23)^2}=\frac{\sqrt{714}}{2}\approx 13,4 \text{ (кв. од.)}.$$

Як відомо, об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ і $\overrightarrow{M_1M_4}$. Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_4}$:

$$\overrightarrow{M_1M_4}=(0;-4;-3).$$

Обчислимо об'єм паралелепіпеда за формулою (2.10):

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M_4})=\begin{vmatrix}2 & -5 & -2\\ -3 & -4 & 1\\ 0 & -4 & -3\end{vmatrix}=53.$$

Тому об'єм піраміди $V_{пір}=\frac{1}{6}\cdot 53\approx 8,8$ (куб. од).

3) Кут між ребрами M_1M_2 і M_1M_4 – це кут між векторами $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_4}$. Обчислимо довжини векторів

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{2^2+(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{33},$$

$$|\overrightarrow{M_1M_4}|=\sqrt{0^2+(-4)^2+(-3)^2}=5$$

і їх скалярний добуток за формулою (2.3)

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_4})=2\cdot 0+(-5)\cdot(-4)+(-2)\cdot(-3)=26.$$

З означення скалярного добутку векторів з формули (2.4) отримуємо:

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_4})}{|\overrightarrow{M_1M_2}|\cdot|\overrightarrow{M_1M_4}|}=\frac{26}{\sqrt{33}\cdot 5}=\frac{26\cdot\sqrt{33}}{165}\approx 0,91,$$

де φ – кут між векторами $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_4}$. Отже,

$$\varphi=\arccos\frac{26\cdot\sqrt{33}}{165}.$$

4) З курсу геометрії відомо, що

$$V_{пір} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H,$$

де H – висота піраміди, яка проведена до основи піраміди. Оскільки $V_{пір} = \frac{53}{6}$, $S_{осн} = S_{M_1M_2M_3} = \frac{\sqrt{714}}{2}$, то

$$H = \frac{3 \cdot V_{пір}}{S_{осн}} = \frac{53}{\sqrt{714}} = \frac{53\sqrt{714}}{714} \approx 1,98.$$

Теоретичні питання

1. Що називають вектором? Сформулюйте лінійні дії над векторами.
2. Як знайти проекцію вектора на вісь?
3. Дайте означення скалярного добутку двох векторів, опишіть його властивості.
4. Дайте означення векторного добутку двох векторів та опишіть його властивості.
5. Дайте означення мішаного добутку трьох векторів та опишіть його властивості.

Завдання для самостійної роботи

I. Задано координати вершин піраміди $M_1M_2M_3M_4$. Знайти:

а) площу грані $M_1M_2M_3$;

б) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

в) кут між ребрами M_1M_2 і M_1M_4;

г) довжину висоти, проведеної з вершини M_4 на грань $M_1M_2M_3$.

1. $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;2;3)$, $M_3(1;4;-2)$, $M_4(2;-3;1)$.

2. $M_1(-1;1;1)$, $M_2(2;0;3)$, $M_3(4;1;-2)$, $M_4(-3;1;2)$.

3. $M_1(1;-1;1)$, $M_2(3;2;0)$, $M_3(-2;4;-1)$, $M_4(1;-3;2)$.

4. $M_1(1;1;-1)$, $M_2(2;3;0)$, $M_3(1;-2;4)$, $M_4(-3;2;1)$.

5. $M_1(3;-4;5)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(0;-2;3)$, $M_4(2;6;0)$.

6. $M_1(-4;3;5)$, $M_2(0;1;1)$, $M_3(0;3;-2)$, $M_4(2;0;6)$.

7. $M_1(-4;5;3)$, $M_2(1;1;0)$, $M_3(-2;0;3)$, $M_4(6;2;0)$.

8. $M_1(3;5;-4)$, $M_2(1;1;0)$, $M_3(-2;3;0)$, $M_4(6;0;2)$.

9. $M_1(3;-4;5)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(0;-2;3)$, $M_4(2;6;0)$.

10. $M_1(5;-4;3)$, $M_2(0;1;1)$, $M_3(3;-2;0)$, $M_4(0;6;2)$.

11. $M_1(7;3;-2)$, $M_2(1;-1;3)$, $M_3(3;-1;-2)$, $M_4(3;-2;1)$.

12. $M_1(7;-2;3)$, $M_2(1;3;-1)$, $M_3(3;-2;-1)$, $M_4(3;1;-2)$.

13. $M_1(3;7;-2)$, $M_2(-1;1;3)$, $M_3(-1;3;-2)$, $M_4(-2;3;1)$.

14. $M_1(3;-2;7)$, $M_2(-1;3;1)$, $M_3(-1;-2;3)$, $M_4(-2;1;3)$.

15. $M_1(-2;7;3)$, $M_2(3;1;-1)$, $M_3(-2;3;-1)$, $M_4(1;3;-2)$.

16. $M_1(-2;3;7)$, $M_2(3;-1;1)$, $M_3(-2;-1;-3)$, $M_4(1;-2;3)$.

17. $M_1(1;9;-6)$, $M_2(4;5;6)$, $M_3(1;7;0)$, $M_4(7;8;9)$.

18. $M_1(1;-6;9)$, $M_2(4;6;5)$, $M_3(1;0;7)$, $M_4(7;9;8)$.

19. $M_1(9;1;-6)$, $M_2(5;4;6)$, $M_3(7;1;0)$, $M_4(8;7;9)$.

20. $M_1(9;-6;1)$, $M_2(5;6;4)$, $M_3(7;0;1)$, $M_4(8;9;7)$.

21. $M_1(-6;1;9)$, $M_2(6;4;5)$, $M_3(0;1;7)$, $M_4(9;7;8)$.

22. $M_1(-6;9;1)$, $M_2(6;5;4)$, $M_3(0;7;1)$, $M_4(9;8;7)$.

23. $M_1(0;1;-3)$, $M_2(1;5;3)$, $M_3(1;2;-5)$, $M_4(-4;3;0)$.

24. $M_1(0;-3;1)$, $M_2(1;3;5)$, $M_3(1;-5;2)$, $M_4(-4;0;3)$.

25. $M_1(1;0;-3)$, $M_2(5;1;3)$, $M_3(2;1;-5)$, $M_4(3;-4;0)$.

26. $M_1(1;-3;0)$, $M_2(5;3;1)$, $M_3(2;-5;1)$, $M_4(3;0;-4)$.

27. $M_1(-3;0;1)$, $M_2(3;1;5)$, $M_3(-5;1;2)$, $M_4(0;-4;3)$.

28. $M_1(-3;1;0)$, $M_2(3;5;1)$, $M_3(-5;2;1)$, $M_4(0;3;-4)$.

29. $M_1(1;7;1)$, $M_2(1;2;1)$, $M_3(0;3;0)$, $M_4(6;4;5)$.

30. $M_1(1;-7;1)$, $M_2(1;-2;1)$, $M_3(3;0;3)$, $M_4(4;5;6)$.

II. Задано точки *A*, *B*, *C*. Знайти:

а) проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$;

б) координати точки *M*, яка ділить відрізок *I* у відношенні $\alpha:\beta$.

1. $A(4;6;3)$, $B(-5;2;6)$, $C(4;-4;-3)$, $\vec{a}=4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=AB$, $\alpha=5$, $\beta=4$.

2. $A(4;3;-2)$, $B(-3-1;4)$, $C(2;2;1)$, $\vec{a}=-5\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=BC$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

3. $A(-2;-2;4)$, $B(1;3;-2)$, $C(1;4;2)$, $\vec{a}=2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $I=BA$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

4. $A(2;4;3)$, $B(3;1;-4)$, $C(-1;2;2)$, $\vec{a}=2\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $I=BA$, $\alpha=1$, $\beta=4$.

5. $A(2;4;5)$, $B(1;-2;3)$, $C(-1;-2;4)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $I=AB$, $\alpha=1$, $\beta=3$.

6. $A(-1;-2;4)$, $B(-1;3;5)$, $C(1;4;2)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=AC$, $\alpha=1$, $\beta=6$.

7. $A(1;3;2)$, $B(-2;4;-1)$, $C(1;3;-2)$, $\vec{a}=2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $I=BA$, $\alpha=1$, $\beta=4$.

8. $A(2;-4;3)$, $B(-3;-2;4)$, $C(1;0;-2)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=AC$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

9. $A(3;4;-4)$, $B(-2;1;2)$, $C(2;-3;1)$, $\vec{a}=5\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $I=BA$, $\alpha=3$, $\beta=5$.

10. $A(0;2;5)$, $B(2;-3;4)$, $C(3;2;-5)$, $\vec{a}=-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $I=AC$, $\alpha=3$, $\beta=2$.

11. $A(-2;-3;-4)$, $B(2;-4;0)$, $C(1;4;5)$, $\vec{a}=4\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=AB$, $\alpha=4$, $\beta=5$.

12. $A(-2;-3;-2)$, $B(1;4;2)$, $C(1;-3;3)$, $\vec{a}=2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=BC$, $\alpha=1$, $\beta=3$.

13. $A(5;6;1)$, $B(-2;4;-1)$, $C(3;-3;3)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $I=BC$, $\alpha=3$, $\beta=2$.

14. $A(10;6;3)$, $B(-2;4;5)$, $C(3;-4;-6)$, $\vec{a}=5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $I=CB$, $\alpha=1$, $\beta=5$.

15. $A(3;2;4)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-2;-1)$, $\vec{a}=4\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $I=AC$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

16. $A(-2;3;-4)$, $B(3;-1;2)$, $C(4;2;4)$, $\vec{a}=7\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=AB$, $\alpha=3$, $\beta=5$.

17. $A(4;5;3)$, $B(-4;2;3)$, $C(5;-6;-2)$, $\vec{a}=9\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $I=BC$, $\alpha=5$, $\beta=3$.

18. $A(2;4;6)$, $B(-3;5;1)$, $C(4;-5;-4)$, $\vec{a}=-6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $I=BC$, $\alpha=1$, $\beta=3$.

19. $A(-4;-2;-5)$, $B(3;7;2)$, $C(4;6;-3)$, $\vec{a}=9\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $I=BA$, $\alpha=4$, $\beta=3$.

20. $A(5;4;4)$, $B(-5;2;3)$, $C(4;2;-5)$, $\vec{a}=11\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $I=BC$, $\alpha=4$, $\beta=5$.

21. $A(3;4;6)$, $B(-4;6;4)$, $C(5;-2;-3)$, $\vec{a}=-7\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $I=BA$, $\alpha=5$, $\beta=3$.

22. $A(-5;-2;-6)$, $B(3;4;5)$, $C(2;-5;4)$, $\vec{a}=8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=AC$, $\alpha=3$, $\beta=4$.

23. $A(3;4;1)$, $B(5;-2;6)$, $C(4;2;-7)$, $\vec{a}=-7\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $I=AB$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

24. $A(4;3;2)$, $B(-4;-3;5)$, $C(6;4;-3)$, $\vec{a}=8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $I=BC$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

25. $A(-5;4;3)$, $B(4;5;2)$, $C(2;7;-4)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $I=BC$, $\alpha=2$, $\beta=7$.

26. $A(6;4;5)$, $B(-7;1;8)$, $C(2;-2;-7)$, $\vec{a}=5\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=AB$, $\alpha=3$, $\beta=2$.

27. $A(6;5;-4)$, $B(-5;-2;2)$, $C(3;3;2)$, $\vec{a}=6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $I=BC$, $\alpha=1$, $\beta=5$.

28. $A(-3;-5;6)$, $B(3;5;-4)$, $C(2;6;4)$, $\vec{a}=4\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$, $I=BA$, $\alpha=4$, $\beta=3$.

29. $A(3;5;4)$, $B(4;2;-3)$, $C(-2;4;7)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $I=BA$, $\alpha=2$, $\beta=7$.

30. $A(4;6;7)$, $B(2;-4;1)$, $C(-3;-4;2)$, $\vec{a}=5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $I=AB$, $\alpha=3$, $\beta=4$.

III. Сила $\vec{F}$ прикладена в точці *А*. Обчислити:

а) роботу сили $\vec{F}$ у разі, коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується в точку *В*;

б) модуль момента сили $\vec{F}$ відносно точки *В*.

1. $\vec{F}=(5;-3;9)$, $A(3;4;-6)$, $B(2;6;5)$.

2. $\vec{F}=(-3;1;-6)$, $A(-2;3;5)$, $B(3;-3;-2)$.

3. $\vec{F}=(2;3;-4)$, $A(5;3;4)$, $B(6;-4;-1)$.

4. $\vec{F}=(-2;8;-7)$, $A(4;-2;3)$, $B(7;0;-3)$.

5. $\vec{F}=(4;1;-6)$, $A(3;5;1)$, $B(4;-2;-3)$.

6. $\vec{F}=(3;-5;7)$, $A(2;3;-5)$, $B(0;4;3)$.

7. $\vec{F}=(5;4;11)$, $A(-6;1;-5)$, $B(4;2;-6)$.

8. $\vec{F}=(-3;5;7)$, $A(1;2;-3)$, $B(4;-3;5)$.

9. $\vec{F}=(6;5;-7)$, $A(5;-6;4)$, $B(4;-3;-6)$.

10. $\vec{F}=(-3;1;4)$, $A(3;6;-5)$, $B(2;-4;1)$.

11. $\vec{F}=(4;7;-3)$, $A(5;-4;2)$, $B(8;5;-4)$.

12. $\vec{F}=(2;2;9)$, $A(4;2;-3)$, $B(2;4;0)$.

13. $\vec{F}=(-5;2;7)$, $A(-3;1;-6)$, $B(-2;2;1)$.

14. $\vec{F}=(5;3;2)$, $A(-3;2;-6)$, $B(5;-6;3)$.

15. $\vec{F}=(4;5;2)$, $A(1;-2;-6)$, $B(1;3;5)$.

16. $\vec{F}=(10;1;9)$, $A(-5;4;-2)$, $B(4;6;-5)$.

17. $\vec{F}=(-8;0;-6)$, $A(7;1;-5)$, $B(2;-3;-6)$.

18. $\vec{F}=(-4;-2;-3)$, $A(-3;5;6)$, $B(-5;6;-3)$.

19. $\vec{F}=(3;2;9)$, $A(-4;5;-3)$, $B(4;7;-5)$.

20. $\vec{F}=(-3;1;-4)$, $A(-2;3;5)$, $B(1;6;-3)$.

21. $\vec{F}=(-4;-2;5)$, $A(-1;0;-4)$, $B(-1;5;2)$.

22. $\vec{F}=(7;-1;0)$, $A(-4;1;3)$, $B(4;6;-1)$.

23. $\vec{F} = (5; -6; 2)$, $A(-2; 3; 0)$, $B(-1; 2; -4)$.

24. $\vec{F} = (4; -2; -7)$, $A(0; -3; 2)$, $B(-2; -8; -5)$.

25. $\vec{F} = (3; 2; -1)$, $A(-3; 4; 7)$, $B(-1; 2; -3)$.

26. $\vec{F} = (5; -2; 3)$, $A(2; -3; -5)$, $B(-1; -6; 3)$.

27. $\vec{F} = (-3; -5; 4)$, $A(-3; 1; 1)$, $B(2; -4; 3)$.

28. $\vec{F} = (-6; 1; 2)$, $A(2; -3; -1)$, $B(0; -6; 2)$.

29. $\vec{F} = (5; 8; 1)$, $A(2; -4; -1)$, $B(3; 0; 4)$.

30. $\vec{F} = (5; -2; 5)$, $A(0; -4; 2)$, $B(-1; 3; 7)$.

§3. Аналітична геометрія

3.1. Пряма на площині

Різним способам задавати пряму відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

I. Канонічне рівняння прямої (рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору).

Нехай пряма на площині проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s} = (m; n)$, який називається *напрямним вектором прямої.* Позначимо через $M(x, y)$ довільну точку прямої. Тоді рівняння прямої матиме вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3.1}$$

II. Параметричне рівняння прямої.

З рівняння (3.1) одержуємо *параметричне рівняння прямої*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + m\,t \\ y &= y_0 + n\,t, \end{aligned} \tag{3.2}$$

де t – довільний параметр.

III. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y = kx + b. \tag{3.3}$$

Відношення $k = tg\alpha$, де α – кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox, називають *кутовим коефіцієнтом прямої,* а величину b – *ординатою точки перетину прямої з віссю* Oy.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка проходить через точку (x_0, y_0)

$$y-y_0=k(x-x_0)\,. \tag{3.4}$$

IV. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$, має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\,. \tag{3.5}$$

V. Рівняння прямої у відрізках на осях.

Якщо пряма проходить через точки $A(a,0)$ та $B(0,b)$, тобто відтинає на осях відрізки a та b, то з рівняння (3.5) маємо

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{3.6}$$

Рівняння (3.6) називають *рівнянням прямої у відрізках на осях*.

VI. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1,y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n}=(A,B)$, який називають *нормальним вектором прямої*, має вигляд

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0\,. \tag{3.7}$$

VII. Загальне рівняння прямої.

Загальне рівняння прямої має вигляд

$$Ax+By+C=0 \tag{3.8}$$

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами.

а) Нехай прямі l_1 та l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$$

і φ – кут між цими прямими: $\varphi = (l_1, l_2)$, $0 < \varphi < \pi$, $\overrightarrow{s_1} = (m_1; n_1)$, $\overrightarrow{s_2} = (m_2; n_2)$. Тоді φ знаходимо з формули

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (3.9)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ є умовою паралельності двох прямих.

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ є умовою перпендикулярності двох прямих.

б) Нехай тепер прямі l_1 та l_2 задано загальними рівняннями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

тоді кут φ між ними дорівнює куту між їхніми нормальними векторами й одержуємо

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (3.10)$$

Звідси одержуємо умови паралельності двох прямих $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ та перпендикулярності прямих $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

в) Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2 відповідно, тоді

$$tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (3.11)$$

Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів, тобто $k_1 = k_2$. А умова перпендикулярності прямих має вигляд $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$.

Нехай задано пряму l загальним рівнянням (3.8) і точку $M_0(x_0, y_0)$. Відстань d точки M_0 від прямої l дорівнює

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.12)$$

Приклад 3.1. Задано точки: $A(-3;4)$, $B(5;-7)$, $C(1;-3)$. Знайти:

а) рівняння сторони АВ;

б) рівняння висоти СН;

в) рівняння медіани АМ;

г) точку К перетину медіани АМ і висоти СН;

ґ) рівняння прямої, яка проходить через точку С, паралельно стороні АВ;

д) відстань від точки C до прямої AB.

Розв'язання.

а) Рівняння сторони AB запишемо, використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки (3.5)

$$\frac{x+3}{5+3} = \frac{y-4}{-7-4},$$

звідки $\frac{x+3}{8} = \frac{y-4}{-11}$.

Виконавши перетворення $-11(x+3) = 8(y-4)$, отримаємо рівняння сторони AB

$$11x + 8y + 1 = 0.$$

б) Запишемо рівняння сторони AB у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, використовуючи формулу (3.3) $y = -\frac{11}{8}x - \frac{1}{8}$. Тоді кутовий коефіцієнт $k_1 = -\frac{11}{8}$.

Оскільки прямі AB і CH перпендикулярні, то, використовуючи умову перпендикулярності двох прямих $k_1 \cdot k_2 = -1$, маємо, що кутовий коефіцієнт висоти CH: $k_2 = \frac{8}{11}$.

Тому, використовуючи формулу (3.4), рівняння висоти CH матиме вигляд

$$y + 3 = \frac{11}{8}(x-1) \text{ або } 11x - 8y - 35 = 0.$$

в) Оскільки *AM* – медіана, то точка *M* – середина сторони *BC*. Використовуючи формули координат середини відрізка $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, знайдемо координати точки *M*: $x=\frac{8+1}{2}=4,5$; $y=\frac{-7-3}{2}=-5$.

Тепер, маючи координати точок *A*(– 3;4) і *M*(4,5; – 5) й використовуючи формулу (3.5), запишемо рівняння медіани *AM*:

$$\frac{x+3}{4,5+3}=\frac{y-4}{-5-4},$$

звідки $9x+7,5y-3=0$.

г) Для знаходження точки перетину медіани *AM* і висоти *CH* розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}9x+7,5y-3=0,\\ 11x-8y-35=0.\end{cases}$$

У результаті отримаємо координати точки *K*: $x=1\frac{88}{103}$; $y=-1\frac{85}{103}$.

ґ) Оскільки пряма, що проходить через вершину *C*, паралельна прямій *AB*, то їх кутові коефіцієнти рівні. Тобто $k_1=-\frac{11}{8}$. Використавши формулу (3.4) рівняння прямої, що проходить через точку з відомим кутовим коефіцієнтом, одержимо:

$$y+3=-\frac{11}{8}(x-1),$$

або $11x+8y+13=0$ – рівняння шуканої прямої.

д) Відстань від точки *C* до прямої *AB* знайдемо за формулою (3.12)

$$d=|CH|=\frac{|11\cdot 1-8\cdot 3+1|}{\sqrt{11^2+8^2}}=\frac{12}{\sqrt{185}}\approx 0,9.$$

3.2. Рівняння площини

Розглянемо різні види рівнянь площини:

I. Загальне рівняння площини.

Нехай задано площину π точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярним до цієї площини. Цей вектор називають *нормальним вектором площини.* Візьмемо на площині точку $M(x, y, z)$, тоді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (3.13)$$

або

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3.14)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Рівняння (3.13) називають *рівнянням площини, яка проходить через точку* M_0 *перпендикулярно до вектора* $\vec{n}$, а рівняння (3.14) – *загальним рівнянням площини*.

II. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Нехай на площині π задано три точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій. Візьмемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$, тоді матимемо *рівняння площини, що проходить через три точки*:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.15)$$

III. Рівняння площини у відрізках на осях.

Нехай площина відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки a, b, c. Підставляючи координати цих точок у формулу (3.15) і розкриваючи визначник, дістанемо *рівняння площини у відрізках на осях*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3.16)$$

Нехай задано дві площини π_1 і π_2 відповідно рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Тоді кут між площинами

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.17)$$

Якщо площини π_1 і π_2 перпендикулярні, то рівність $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ є умовою перпендикулярності цих площин.

Якщо площини π_1 і π_2 паралельні, то умовою паралельності площин є рівність $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Якщо задано загальне рівняння площини $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ і точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M_0 до площини π знаходять за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.18)$$

3.3. Пряма в просторі

Нехай у просторі задано пряму точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s}=(m,n,p)$. Візьмемо довільну точку $M(x,y,z)$ цієї прямої. Тоді аналогічно до випадку розгляду прямої на площині дістаємо:

I. Параметричне рівняння прямої в просторі

$$\begin{aligned} x&=x_0+m\,t,\\ y&=y_0+n\,t,\\ z&=z_0+pt; \end{aligned} \qquad (3.19)$$

ІІ. Канонічне рівняння прямої в просторі

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}; \qquad (3.20)$$

ІІІ. Рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.21)$$

Розглянемо тепер випадок, коли пряма в просторі задана перетином двох площин. Отже, система рівнянь двох площин

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \qquad (3.22)$$

нормальні вектори яких $\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ і $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$ неколінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

Рівняння (3.22) називають *загальними рівняннями прямої в просторі.*

Щоб від загального рівняння (3.22) перейти до канонічного рівняння (3.20), потрібно знайти точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на прямій і її напрямний вектор $\vec{s}=(m,n,p)$. Для знаходження точки M_0 одну з її координат беруть довільною, а дві інші визначають із системи (3.22).

Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ використовують формулу

$$\vec{s}=[\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (3.23)$$

Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$; $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Тоді формула для знаходження *кута* φ *між прямими* l_1 і l_2

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (3.24)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ є умовою перпендикулярності двох прямих.

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то умовою паралельності прямих є рівність відношень: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Нехай площина π і пряма l задані рівняннями $Ax + By + Cz + D = 0$ і $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. *Тоді кут між прямою і площиною знаходять* за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (3.25)$$

Якщо пряма l паралельна площині π, то $Am + Bn + Cp = 0$ *– умова паралельності прямої і площини.*

Якщо пряма l перпендикулярна до площини π, то $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ є *умовою перпендикулярності прямої і площини.*

Приклад 3.2. Задано точки: $M(1; -3; 0)$, $N(-2; 0; 0)$, $P(-4; 1; -2)$, $Q(-3; -2; -7)$. Написати:

а) рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно до вектора $\overrightarrow{NP}$;

б) рівняння площини π_1, що проходить через точку N перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{PQ}$;

в) рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до площини π_1;

г) рівняння площини π_2, що проходить через точки N, P,Q;

ґ) знайти кут ϕ між площинами π_1, π_2;

д) знайти кут між прямою MN і площиною π_2;

е) якщо $\phi \neq 0$, знайти канонічне рівняння прямої, що утворюється в результаті перетину площин π_1, π_2.

Розв’язання.

а) Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ паралельно до вектора $\vec{s}=(m;n;p)$, має вигляд (3.20).

Оскільки $M_0=M(1;-3;0)$ і $\overrightarrow{NP}=\vec{s}=(-2;1;-2)$, то шукане рівняння запишемо так:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-2}.$$

б) Запишемо рівняння площини π_1, використовуючи рівність нулю скалярного добутку взаємно перпендикулярних векторів $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{NL}$, де $L(x;y;z)$ – довільна точка площини π_1. Маємо

$$\overrightarrow{PQ}=(1;-3;-5),\ \overrightarrow{NL}=(x+2;y;z).$$

Тоді

$$(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{NL})=1(x+2)-3y-5z=0.$$

Отже, $x-3y-5z+2=0$ – загальне рівняння площини π_1.

в) Оскільки шукана пряма перпендикулярна до заданої площини $x-3y-5z+2=0$, то нормальний вектор $\vec{n}$ площини π_1 одночасно є напрямним вектором $\vec{s}$ прямої, тобто

$$\vec{s}=\vec{n}=(A;B;C)=(1;-3;5).$$

Підставляючи координати точки $M(1;-3;0)$ у канонічне рівняння прямої за формулою (3.20), отримаємо рівняння шуканої прямої $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z}{-5}$.

г) Рівняння площини π_2, що проходить через три точки $N(-2;0;0)$, $P(-4;1;-2)$, $Q(-3;-2;-7)$, як відомо (з (3.15)), має вигляд

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}=0. \qquad (3.26)$$

Зауважимо, що рядками визначника (3.26) є координати векторів $\overrightarrow{NL}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$ відповідно, де $L(x; y; z)$ – довільна точка площини π_2. Розкривши визначник у лівій частині рівності (3.26) за елементами першого рядка, прийдемо до загального рівняння площини π_2

$$-11(x+2)-12y+5z=0,$$

або остаточно

$$11x+12y-5z+22=0.$$

ґ) Кут між площинами π_1 і π_2 – це кут між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ цих площин. Знайдемо ці вектори:

$$\overrightarrow{n_1}=(1;-3;-5),\ \overrightarrow{n_2}=(11;12;-5).$$

Використовуючи скалярний добуток векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$, отримуємо

$$\cos\phi=\frac{11-36+25}{\sqrt{35}\sqrt{290}}=0,$$

тобто $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ і площини π_1, π_2 – взаємно перпендикулярні.

д) Рівняння прямої, що проходить через дві точки M і N, запишемо за формулою (3.21). Оскільки $M(1; -3;0)$, $N(-2;0;0)$, то рівняння прямої MN матиме вигляд

$$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y+3}{0+3}=\frac{z-0}{0},$$

звідки $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{0}$.

Синус кута між прямою MN і площиною π_2: $11x+12y-5z+22=0$, знайдемо за формулою (3.25)

$$\sin\varphi=\frac{|11\cdot(-3)+12\cdot 3+(-5)\cdot 0|}{\sqrt{11^2+12^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+0^2}}=\frac{3}{\sqrt{290}\cdot\sqrt{18}}\approx 0,04.$$

е) Щоб записати канонічне рівняння лінії l перетину площин π_1 і π_2, потрібно знайти:

- напрямний вектор $\vec{s}$ прямої l;

- яку-небудь точку перетину цих площин (прямої l).

За напрямний вектор $\vec{s}$ можна взяти векторний добуток векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ (див. пункт г). Знайдемо вектор $\vec{s}$ у координатній формі за формулою (3.23):

$$\vec{s}=[\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 11 & 12 & -5\end{vmatrix}=-19\vec{i}+32\vec{j}+35\vec{k}=(-19;32;35).$$

Спільною точкою площин π_1 і π_2 є, наприклад, точка $N(-2;0;0)$.

Тому канонічним рівнянням прямої l (див. задачу а) є таке рівняння:

$$\frac{x+2}{-19}=\frac{y}{32}=\frac{z}{35}.$$

3.4. Деякі задачі на взаємне розташування точок, прямих і площини

Розглянемо задачі на взаємне розташування точок, прямих і площини.

Задача 1. Через задану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і пряму l, задану рівнянням $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, провести площину π.

Розв'язання.

Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка площини π, а $M_1(x_1,y_1,z_1)$ – задана точка прямої l.

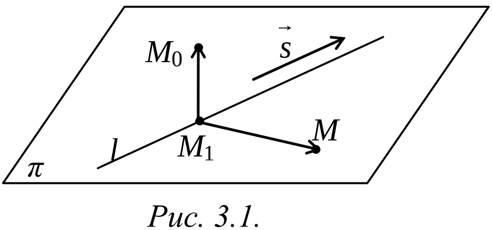


Рис. 3.1.

Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ і напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ прямої l – компланарні (рис. 3.1). Відомо, що мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_0}, \vec{s}) = 0$, тому рівняння площини π має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 .$$

Задача 2. Знайти точку перетину прямих l_1 та l_2 заданих рівняннями

$$\begin{cases} x = x_1 + m_1\, t, \\ y = y_1 + n_1\, t, \\ z = z_1 + p_1 t \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = x_2 + m_2\, t, \\ y = y_2 + n_2\, t, \\ z = z_2 + p_2 t \end{cases}$$

відповідно.

Розв'язання.

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка перетину заданих прямих. За деякого значення t_1 параметра t її координати задовольнятимуть рівняння прямої l_1, а за певного значення t_2 – рівняння прямої l_2, тобто

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + m_1\, t_1, \\ y_0 = y_1 + n_1\, t_1, \\ z_0 = z_1 + p_1 t_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = x_2 + m_2\, t_2, \\ y_0 = y_2 + n_2\, t_2, \\ z_0 = z_2 + p_2 t_2. \end{cases}$$

Прирівнюючи праві частини цих систем, дістаємо систему трьох лінійних рівнянь з двома невідомими t_1 і t_2, яку можна розв'язати, наприклад, методом Гаусса. Якщо ця система має один розв'язок, то прямі перетинаються, якщо безліч розв'язків – прямі збігаються, якщо система не має розв'язків, то прямі мимобіжні.

Задача 3. Знайти точку перетину прямої l, заданої рівнянням $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$, і площини π, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$.

Розв'язання.

Оскільки шукана точка перетину належить як прямій l, так і площині π, то координати цієї точки задовольняють і рівняння прямої, і рівняння площини (рис. 3.2).

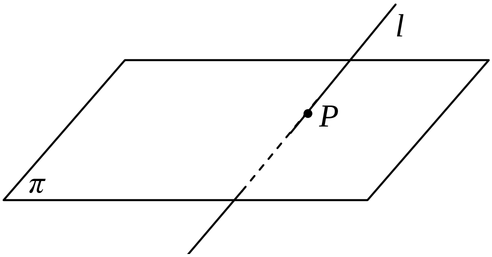


Рис. 3.2.

Отже, координати точки перетину прямої і площини знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Задача 4. Знайти відстань від заданої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямої l, заданої рівнянням $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$.

Розв'язання.

Відстань d від точки M_0 до прямої l дорівнює відстані між точкою M_0 та її проекцією P на цю пряму: $d = M_0P$ (рис. 3.3).

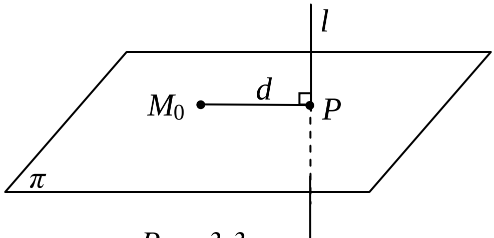


Рис. 3.3.

Щоб знайти точку $P(x_2, y_2, z_2)$, досить через точку M_0 провести площину π, перпендикулярну до прямої l, і знайти точку її перетину з прямою l. Рівняння такої площини π матиме вигляд $m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$, оскільки напрямний вектор прямої l: $\vec{s}=(m,n,p)$, буде нормальним вектором площини π.

Оскільки точка P належить площині π і прямій l, то координати точки P знаходимо з системи рівнянь, записавши пряму l у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} m(x_2-x_0)+n(y_2-y_0)+p(z_2-z_0)=0, \\ x_2=x_1+mt, \\ y_2=y_1+nt, \\ z_2=z_1+pt. \end{cases}$$

Знайшовши з системи координати точки P, обчислюємо відстань $d=|M_0P|=\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2}$.

Цю задачу можна розв'язати іншим методом, використовуючи елементи векторної алгебри.

Побудуємо паралелограм на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – задана точка прямої, $\vec{s}=(m,n,p)$ – напрямний вектор прямої. Тоді відстань d дорівнює висоті цього паралелограма, яка опущена з точки M_0 на пряму l. Знайдемо цю висоту з формули для обчислення площі перелелограма:

$$d=h=\frac{S}{|\vec{s}|}=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{s}]|}{|\vec{s}|}.$$

Задача 5. Знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 та l_2, що задані відповідно канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ та $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$.

Розв'язання.

Побудуємо паралелепіпед на векторах $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – задані точки відповідно прямих l_1 та l_2, $\vec{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$ – напрямні вектори цих прямих (рис. 3.4).

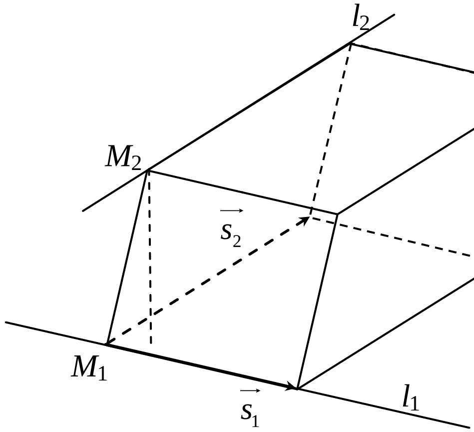


Рис. 3.4.

Тоді об'єм такого паралелепіпеда $V = |(\vec{s_1}, \vec{s_2}, \overrightarrow{M_1M_2})|$. Площа основи паралелепіпеда $S = |[\vec{s_1} \times \vec{s_2}]|$. Відстань між мимобіжними прямими знаходимо як висоту паралелепіпеда

$$h = \frac{V}{S} = \frac{|(\vec{s_1}, \vec{s_2}, \overrightarrow{M_1M_2})|}{|[\vec{s_1} \times \vec{s_2}]|}.$$

Задача 6. Знайти точку, симетричну точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$ відносно прямої $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.

Розв'язання.

Знайдемо проекцію точки M_1 на пряму l – точку $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ (рис. 3.5).

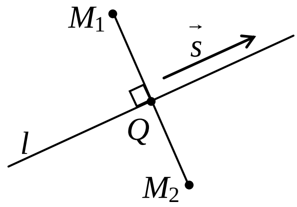


Рис. 3.5.

Вектор $\overrightarrow{M_1Q} = (x_Q - x_1, y_Q - y_1, z_Q - z_1)$ є перпендикулярний до прямої *l*, а отже, і до напрямного вектора $\vec{s} = (m, n, p)$ прямої *l*. Тому скалярний добуток $(\overrightarrow{M_1Q}, \vec{s}) = 0$.

Точка *Q* належить прямій *l*, тобто її координати задовольняють рівняння прямої. Отже, координати точки *Q* знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} m(x_Q - x_1) + n(y_Q - y_1) + p(z_Q - z_1) = 0, \\ x_Q = x_0 + mt, \\ y_Q = y_0 + nt, \\ z_Q = z_0 + pt. \end{cases}$$

Оскільки точка *Q* – середина відрізка M_1M_2, то координати точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$, яка симетрична точці M_1 відносно прямої *l*, знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} x_Q = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y_Q = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \\ z_Q = \dfrac{z_1 + z_2}{2}. \end{cases}$$

Задача 7. Знайти точку, симетричну точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$ відносно площини π, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$.

Розв'язання.

Знайдемо проекцію точки M_1 на площину π – точку $P(x_P, y_P, z_P)$ (рис. 3.6).

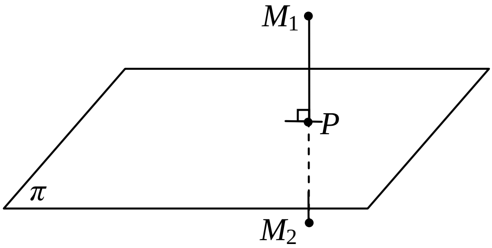


Рис. 3.6.

Вектор $\overrightarrow{M_1P} = (x_P - x_1, y_P - y_1, z_P - z_1)$ є перпендикулярним до площини π, а отже, паралельним до нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ цієї площини. Тому їхні координати пропорційні $\frac{x_P - x_1}{A} = \frac{y_P - y_1}{B} = \frac{z_P - z_1}{C} = t$, t – коефіцієнт пропорційності.

Точка P належить площині π, тобто її координати задовольняють рівняння площини. Отже, координати точки P знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} x_P - x_1 = At, \\ y_P - y_1 = Bt, \\ z_P - z_1 = Ct, \\ Ax_P + By_P + Cz_P + D = 0. \end{cases}$$

Оскільки точка P є серединою відрізка M_1M_2, то координати точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$, яка симетрична точці M_1 відносно площини π, знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y_P = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \\ z_P = \dfrac{z_1 + z_2}{2}. \end{cases}$$

3.5. Криві другого порядку

Кривою другого порядку називають множину точок, координати яких задовольняють рівняння виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

де коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} відмінне від нуля. Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола.

3.5.1. Еліпс

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок цієї площини, які називають фокусами, є величиною сталою й більшою від відстані між фокусами (рис. 3.7).

Відстань між фокусами, яку називають *фокальною*, позначимо через $2c$. Тоді фокуси мають такі координати: $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$.

Канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.27}$$

де $b^2 = a^2 - c^2$, причому $a > b$.

Еліпс перетинає осі координат у точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$. Ці точки називають *вершинами еліпса.*

Величини $|A_1A_2|=2a$ та $|B_1B_2|=2b$ називають відповідно *великою* та *малою осями еліпса.*

Ексцентриситет еліпса дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $0 \le c < a$, то $0 < \varepsilon < 1$.

Директрисами еліпса називають дві прямі, паралельні малій осі еліпса й віддалені від неї на відстань, рівну $\frac{a}{\varepsilon}$. Рівняння директрис еліпса

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$$

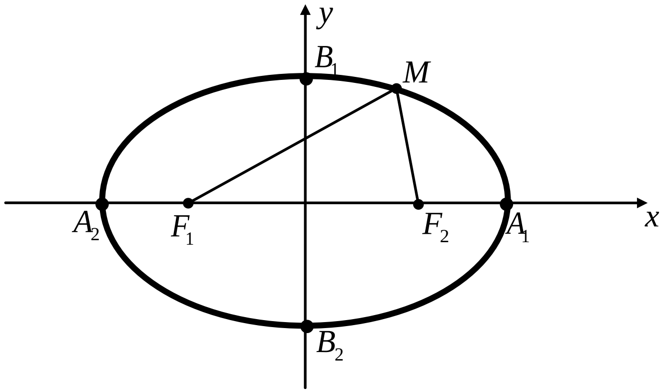


Рис. 3.7. Еліпс при a > b

<u>Зауваження.</u> Якщо в еліпса $a < b$, то канонічне рівняння еліпса набуде вигляду (3.27), в якому $a^2 = b^2 - c^2$, фокуси матимуть координати $F_1(0; -c)$ і $F_2(0; c)$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b}$, директриси еліпса $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ (рис. 3.8).

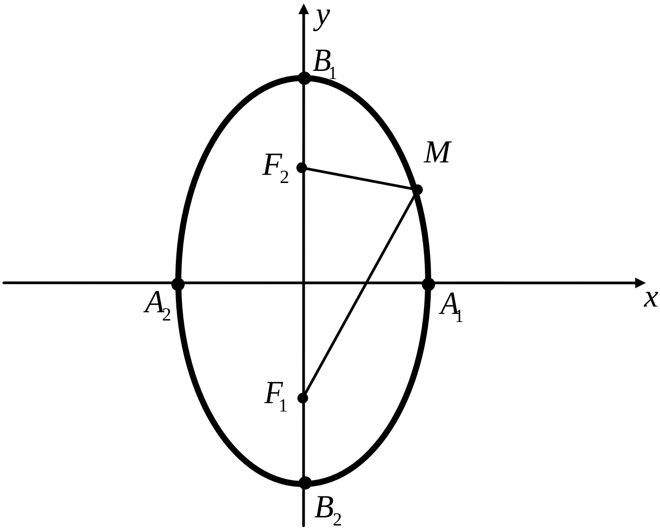


Рис. 3.8. Еліпс при $a < b$

3.5.2. Гіпербола

Гіперболою називають множину всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох заданих точок цієї площини, що називають фокусами, є величиною сталою й меншою, ніж відстань між фокусами (рис. 3.9).

Відстань між фокусами позначимо через $2c$. Тоді фокуси мають такі координати: $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$.

Канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.28}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$, причому $a > b$.

Гіпербола складається з двох гілок (лівої і правої) й має дві асимптоти

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Осі симетрії називають *осями гіперболи*, а точку перетину осей – *її центром*. Вісь Ox перетинає гіперболу в двох точках $A_1(a, 0)$ і $A_2(-a, 0)$, які називають *вершинами гіперболи*. *Дійсною віссю* називають відрізок A_1A_2, який сполучає вершини гіперболи і довжина якого $|A_1A_2|=2a$. Відрізок B_1B_2, який сполучає точки $B_1(0, b)$ і $B_2(0, -b)$, називають *уявною віссю*.

Ексцентриситет гіперболи визначається як відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Директрисами гіперболи називають дві прямі, перпендикулярні до фокальної осі й віддалені від центра на відстань, рівну $\frac{a}{\varepsilon}$. Рівняння директрис гіперболи

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

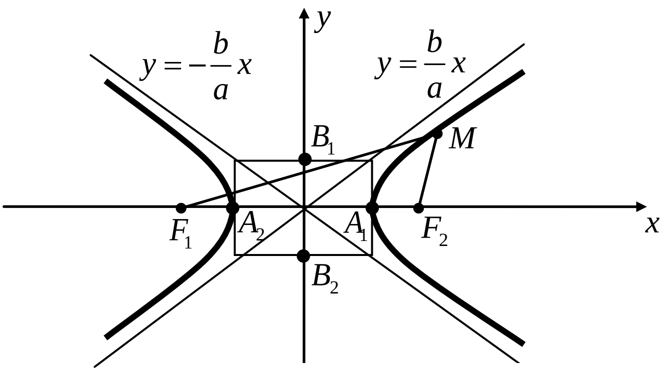


Рис. 3.9. Гіпербола при a > b

Зауваження. Якщо в гіперболі $a < b$, то канонічне рівняння гіперболи набуде вигляду $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, в якому $a^2 = c^2 - b^2$, фокуси матимуть координати $F_1(0; -c)$ і $F_2(0; c)$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b}$, директриси гіперболи $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ (рис. 3.10).

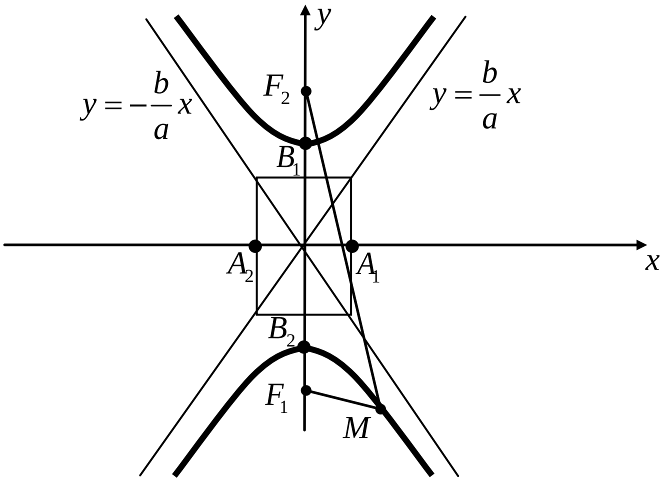


Рис. 3.10. Гіпербола при $a < b$

3.5.3. Парабола

Параболою називають множину всіх точок площини, кожна з яких розташована на однаковій відстані від заданої точки, яку називають фокусом, і від заданої прямої, яку називають директрисою і яка не проходить через фокус (рис. 3.11).

Нехай на площині задано фокус F і директрису, причому відстань фокуса від директриси дорівнює p. Тоді фокус має координати $F(\frac{p}{2}, 0)$, а рівняння директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$.

Канонічне рівняння параболи

$$y^2 = 2px. \qquad (3.29)$$

Вісь симетрії параболи називають її віссю; точку перетину осі з параболою – *вершиною параболи*; число, яке дорівнює відстані фокуса від директриси, – *параметром параболи*. Віссю параболи, заданої рівнянням (3.29), є вісь *Ox*, вершиною – точка $O(0,0)$, і параметром – число *p*.

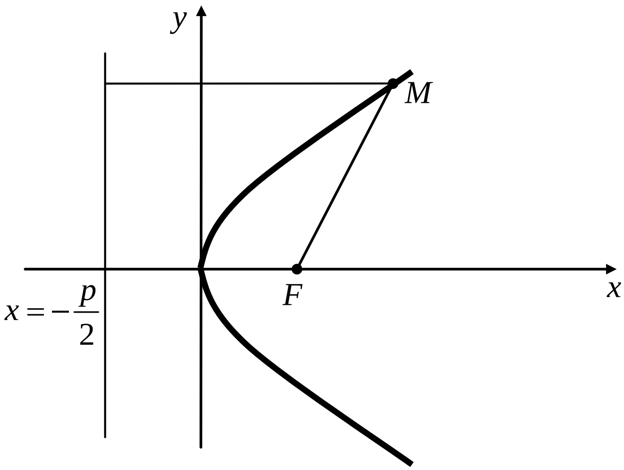


Рис. 3.11. Парабола

Приклад 3.3. Визначити тип кривої, що задана рівнянням $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

Розв'язання.

Згрупуємо доданки зі змінною *x* та змінною *y* і доповнимо одержані вирази до повних квадратів

$$16x^2 - 64x - 9y^2 - 54y - 161 = 0,$$

або

$$16(x^2 - 4x + 4) - 64 - 9(y^2 + 6y + 9) + 81 - 161 = 0,$$

$$16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 - 144 = 0.$$

Звідси

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Отримане рівняння описує гіперболу, у якій точка (2; – 3) – центр гіперболи, дійсна піввісь a = 3, уявна піввісь b = 4.

Приклад 3.4. Побудувати криві

а) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$, б) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$, в) $y^2=8x$.

Знайти координати фокусів та рівняння директрис. Для гіперболи знайти рівняння асимптот.

Розв'язання.

а) Крива $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$ описує канонічне рівняння еліпса. Велика піввісь еліпса a = 7, мала піввісь b = 2.

Знайдемо координати фокусів $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$, де $c^2=a^2-b^2$. Тоді $c^2=49-4=45$. Звідси $F_1(-3\sqrt{5};0)$, $F_2(3\sqrt{5};0)$.

Звідси ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$. Отже, $x=\pm\frac{49\sqrt{5}}{15}$ є директрисами такого еліпса.

б) Крива $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ описує канонічне рівняння гіперболи. Дійсна піввісь гіперболи a = 5, уявна піввісь b = 3.

Знайдемо координати фокусів $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$, де $c^2=b^2+a^2=9+25=34$. Тоді $F_1(-\sqrt{34};0)$, $F_2(\sqrt{34};0)$. Звідси ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{34}}{5}$. Отже, $x=\pm\frac{25\sqrt{34}}{34}$ є директрисами такої гіперболи.

Рівняння асимптот гіперболи мають вигляд $y=\pm\frac{b}{a}x$, тобто $y=\pm\frac{3}{5}x$.

в) Крива $y^2 = 8x$ описує канонічне рівняння параболи, причому параметр $p = 4$. Тоді координати фокуса $F(2;0)$. Рівняння директриси має вигляд $x = -\dfrac{p}{2}$, тобто $x = -2$.

3.5.4. Квадратична форма у двовимірному просторі

Розглянемо симетричну матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, вектор-стовпець $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ та скалярний добуток $(A\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}^T \cdot A\overrightarrow{X} = a_{11}x^2 + 2a_{12}x\,y + a_{22}y^2$.

Квадратичною формою двох змінних називають вираз

$$W(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}x\,y + a_{22}y^2. \qquad (3.30)$$

Позначимо

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{12} - a_{12}^2. \qquad (3.31)$$

Якщо

$\Delta = 0$, то квадратична форма (3.30) належить до *параболічного типу*,

$\Delta > 0$, то квадратична форма (3.30) належить до *еліптичного типу*,

$\Delta < 0$, то квадратична форма (3.30) належить до *гіперболічного типу*.

Розглянемо зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

1. Складаємо матрицю квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

2. Знаходимо власні значення λ_1, λ_2 з рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \qquad (3.32)$$

3. Знаходимо власні вектори $\overrightarrow{X_1}$, $\overrightarrow{X_2}$ такі, що $\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{X_2} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, причому $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Ці вектори ортонормовані, тобто $(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}) = 0$ та $|\overrightarrow{X_1}| = |\overrightarrow{X_2}| = 1$. Координати цих векторів знайдемо, розв'язавши систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0, \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y = 0, \end{cases} \tag{3.33}$$

де λ – один із коренів рівняння (3.32).

4. Складемо ортогональну матрицю $H = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, яка володіє властивостями: $\det H = 1$, $H^{-1} = H^T$.

Формула

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

реалізує перехід від змінних x, y до змінних x_1, y_1, де базисними будуть власні вектори $\overrightarrow{X_1}$ і $\overrightarrow{X_2}$.

Розписавши (3.34) покоординатно, приходимо до формул заміни змінних

$$\begin{cases} x = \alpha x_1 - \beta y_1, \\ y = \beta x_1 + \alpha y_1. \end{cases} \tag{3.35}$$

5. Підставляючи значення (3.35) у загальний вигляд квадратичної форми, отримаємо

$$W(x, y) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2. \tag{3.36}$$

Вигляд рівняння (3.36) називають *канонічним виглядом квадратичної форми*.

Геометрична інтерпретація перетворення (3.34):

Покладемо $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \sin\varphi$. Тоді матриця $H = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ реалізує поворот системи (x, y) навколо початку координат на кут φ.

Приклад 3.5. Звести до канонічного вигляду форму

$$W(x, y) = x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 .$$

Розв'язання.

1. $a_{11} = 1$, $a_{12} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{22} = 2$. За формулою (3.31) матимемо $\Delta = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4} > 0$. Отже, квадратична форма належить до еліптичного типу.

2. Будуємо матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}$ та знаходимо її власні значення з рівняння (3.32), тобто $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - \dfrac{3}{4} = \lambda^2 - 3\lambda + \dfrac{5}{4} = 0$. Звідси $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{5}{2}$.

3. Будуємо відповідні власні вектори, використовуючи систему (3.33).

Для власного значення $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ маємо систему

$$\begin{cases}\left(1-\frac{1}{2}\right)x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\left(2-\frac{1}{2}\right)y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0.\end{cases}$$

З першого рівняння отримуємо $x=\sqrt{3}y$ (якщо друге рівняння помножити на $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, то одержуємо перше рівняння системи).

Отже, $\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}y\\ y\end{pmatrix}$. Оскільки $|\overrightarrow{X_1}|=\sqrt{3y^2+y^2}=1$, то $y=\pm\frac{1}{2}$. Для спрощення обчислень будемо надалі вибирати знак «+», тобто $y=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Остаточно отримуємо $\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

$$\overrightarrow{X_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

4. Формуємо ортогональну матрицю $H=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ і знаходимо формули переходу від системи координат (x,y) до системи координат (x_1,y_1) за формулою (3.34), звідки

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}y_1, \\ y = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y_1. \end{cases}$$

5. Підставляємо знайдені значення x, y у задану квадратичну форму. Отримуємо

$$x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\right)\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1\right) +$$

$$+2\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1\right)^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}y_1^2,$$

канонічний вигляд квадратичної форми $W(x, y)$ у системі координат (x_1, y_1).

Оскільки $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\varphi$, $\beta = \dfrac{1}{2} = \sin\varphi$, то перетворення за допомогою матриці H означає поворот системи (x, y) на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ навколо початку координат проти годинникової стрілки.

<u>**Зауваження.**</u> Визначення кута φ можна замінити, наприклад, знаходженням точки координат кінця власного вектора $\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ в системі (x, y).

Приклад 3.6. Звести до канонічного вигляду форму

$$W(x, y) = 4xy + 3y^2.$$

Розв'язання.

1. $a_{11} = 0$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 3$. За формулою (3.31) матимемо $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$. Отже, квадратична форма належить до гіперболічного типу.

2. Будуємо матрицю $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ та знаходимо її власні значення, розв'язавши рівняння (3.32), тобто $\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(3-\lambda)-4=\lambda^2-3\lambda-4=0$. Звідси $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$.

3. Будуємо відповідні власні вектори з системи (3.33). Для власного значення $\lambda_1=4$ маємо систему $\begin{cases}-4x+2y=0,\\ 2x-y=0.\end{cases}$

З другого рівняння системи отримуємо $y=2x$.

Отже, $\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix}x\\ 2x\end{pmatrix}$. Оскільки $|\overrightarrow{X_1}|=\sqrt{x^2+4x^2}=1$, то $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Вибираємо знак «+», тобто $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Остаточно отримуємо $\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{X_2}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

4. Формуємо ортогональну матрицю $H=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ і знаходимо формули переходу від системи координат (x,y) до системи координат (x_1,y_1) за формулою (3.34), звідки

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x_1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y_1,\\ y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x_1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y_1.\end{cases}$$

5. Підставляємо знайдені значення x, y у задану квадратичну форму. Отримуємо

$$4xy+3y^2=4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1-\frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right)+$$

$$+3\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right)^2=4x_1^2-y_1^2,$$

канонічний вигляд квадратичної форми $W(x,y)$ у системі координат (x_1,y_1).

Оскільки $\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\cos\varphi$, $\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\sin\varphi$, то перетворення за допомогою матриці H означає поворот системи (x,y) на кут $\varphi=arctg2$ навколо початку координат проти годинникової стрілки.

Приклад 3.7. Звести до канонічного вигляду форму

$$W(x,y)=9x^2-24xy+16y^2.$$

Розв'язання.

1. $a_{11}=9,\ a_{12}=-12,\ a_{22}=16$. За формулою (3.31) матимемо $\Delta=9\cdot16-12^2=0$. Отже, квадратична форма належить до параболічного типу.

2. Будуємо матрицю $A=\begin{pmatrix}9 & -12\\ -12 & 16\end{pmatrix}$ та знаходимо її власні значення з рівняння (3.32), тобто $\begin{vmatrix}9-\lambda & -12\\ -12 & 16-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)(16-\lambda)-144=\lambda^2-25\lambda=0$. Звідси $\lambda_1=0$, $\lambda_2=25$.

3. Будуємо відповідні власні вектори з системи (3.33). Для власного значення $\lambda_1=0$ маємо систему $\begin{cases}9x-12y=0,\\ -12x+16y=0.\end{cases}$

З першого рівняння отримуємо $y = \frac{3}{4}x$.

Отже, $\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{4}x \end{pmatrix}$. Оскільки $|\overrightarrow{X_1}| = \sqrt{x^2 + \frac{9}{16}x^2} = 1$, то $x = \pm\frac{4}{5}$. Так, $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$. Остаточно отримуємо $\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{X_2} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

4. Формуємо ортогональну матрицю $H = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ і знаходимо формули переходу від системи координат (x, y) до системи координат (x_1, y_1) за формулою (3.34), звідки

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1, \\ y = \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1. \end{cases}$$

5. Підставляємо знайдені значення x, y у задану квадратичну форму. Отримуємо

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 = 9\left(\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1\right)^2 - 24\left(\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1\right)\left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1\right) +$$

$$16\left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1\right)^2 = 25y_1^2,$$

канонічний вигляд квадратичної форми $W(x,y)$ у системі координат (x_1, y_1).

Оскільки $\beta = \frac{3}{5} = \sin\varphi$, $\alpha = \frac{4}{5} = \cos\varphi$, то перетворення за допомогою матриці H означає поворот системи (x,y) на кут $\varphi = arctg\,\frac{3}{4}$ навколо початку координат проти годинникової стрілки.

3.5.5. Зведення загального рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду на основі теорії квадратичних форм

Розглянемо зведення до канонічного вигляду загального рівняння кривої другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \qquad (3.37)$$

де коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22}, *a*, *b*, *c* – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} відмінне від нуля.

Сума членів другого степеня у лівій частині рівняння (3.37) – це квадратична форма з симетричною матрицею $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Перейдемо до нової системи координат Ox_1y_1, осі якої спрямовані по напрямках власних векторів матриці *A*. Квадратична форма набуває вигляду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2,$$

де λ_1, λ_2 – власні значення матриці *A*, тобто корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Рівняння (3.37) у нових координатах матиме вигляд

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2a_1 x_1 + 2b_1 y_1 + c_1 = 0, \qquad (3.38)$$

де a_1, b_1, c_1 – деякі нові коефіцієнти.

I. Нехай $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Виділимо в рівнянні (3.38) повні квадрати

$$\lambda_1\left(x_1^2+\frac{2a_1}{\lambda_1}x_1+\frac{a_1^2}{\lambda_1^2}\right)+\lambda_2\left(y_1^2+\frac{2b_1}{\lambda_2}y_1+\frac{b_1^2}{\lambda_2^2}\right)+c_1-\frac{a_1^2}{\lambda_1}-\frac{b_1^2}{\lambda_2}=0,$$

або

$$\lambda_1\left(x_1+\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_1+\frac{b_1}{\lambda_2}\right)^2=D, \qquad (3.39)$$

де $D=\dfrac{a_1^2}{\lambda_1}+\dfrac{b_1^2}{\lambda_2}-c_1$. Надалі припускатимемо, що $D \neq 0$.

Переносимо початок координат у точку $O_1\left(-\dfrac{a_1}{\lambda_1};-\dfrac{b_1}{\lambda_2}\right)$ за допомогою формул

$$\begin{cases} x_2 = x_1+\dfrac{a_1}{\lambda_1}, \\ y_2 = y_1+\dfrac{b_1}{\lambda_2}. \end{cases}$$

У результаті рівняння (3.39) набуде вигляду

$$\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 y_2^2=D. \qquad (3.40)$$

Оскільки $D \neq 0$, то поділивши рівняння (3.40) на D, отримаємо

$$\frac{x_2^2}{\dfrac{D}{\lambda_1}}+\frac{y_2^2}{\dfrac{D}{\lambda_2}}=1. \qquad (3.41)$$

Якщо обидві величини $\dfrac{D}{\lambda_1}$, $\dfrac{D}{\lambda_2}$ додатні, то рівняння (3.41), а отже, і рівняння (3.37), зображає еліпс.

Якщо одна з цих величин додатна, а інша – від’ємна, то рівняння (3.37) зображає гіперболу.

II. Нехай $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тоді рівняння (3.38) матиме вигляд

$$\lambda_2 y_1^2 + 2a_1 x_1 + 2b_1 y_1 + c_1 = 0, \tag{3.42}$$

причому припускатимемо, що $a_1 \neq 0$. Тоді рівняння (3.42) можна розв'язати відносно x_1:

$$x_1 = -\frac{\lambda_2}{2a_1} y_1^2 - \frac{b_1}{a_1} y_1 - \frac{c_1}{2a_1}. \tag{3.43}$$

Рівняння (3.43), а отже, і рівняння (3.37), зображає параболу.

Приклад 3.8. Звести до канонічного вигляду рівняння кривої

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \tag{3.44}$$

та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Знаходимо власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ квадратичної форми $W(x, y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$, розв'язуючи характеристичне рівняння матриці A

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$.

2. Знаходимо власні вектори матриці A з системи рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0, \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

Нехай $\lambda = \lambda_1 = 1$. Тоді координати власного вектора $\overrightarrow{X_1}$, що відповідає цьому власному значенню, визначаємо з системи

$\begin{cases} 4x+4y=0, \\ 4x+4y=0. \end{cases}$ Звідси $y=-x$. Тоді $\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$. Оскільки $|\overrightarrow{X_1}|=\sqrt{x^2+x^2}=1$, то $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, $\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Оскільки власні вектори $\overrightarrow{X_1}$, $\overrightarrow{X_2}$ – ортонормовані, то $\overrightarrow{X_2}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ – одиничний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_2=9$.

Матриця H переходу від системи координат (x,y) до системи координат (x_1,y_1) має вигляд

$$H=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Координати вектора $\overrightarrow{X_1}$ будуть значеннями косинуса та синуса кута φ повороту системи (x,y) навколо початку координат. Тоді $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, тобто $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.

Виразимо змінні x, y через нові змінні x_1, y_1:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x_1 + y_1). \end{cases} \tag{3.45}$$

Підставляючи (3.45) у (3.44), одержуємо

$$x_1^2 + 9y_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 - 7 = 0.$$

Виділивши повний квадрат, перетворимо отримане рівняння

$$x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 2 + 9y_1^2 - 9 = 0,$$

або

$$(x_1 + \sqrt{2})^2 + 9y_1^2 = 9.$$

Здійснюючи паралельне перенесення початку в точку $O'(-\sqrt{2};0)$ за формулами

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \sqrt{2}, \\ y_2 = y_1, \end{cases}$$

і поділивши на 9, одержимо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{1} = 1.$$

4. Будуємо криву. Повертаємо систему координат Oxy на кут $\varphi = -45^0$ і переносимо початок координат у точку $O'(-\sqrt{2};0)$ (рис. 3.12).

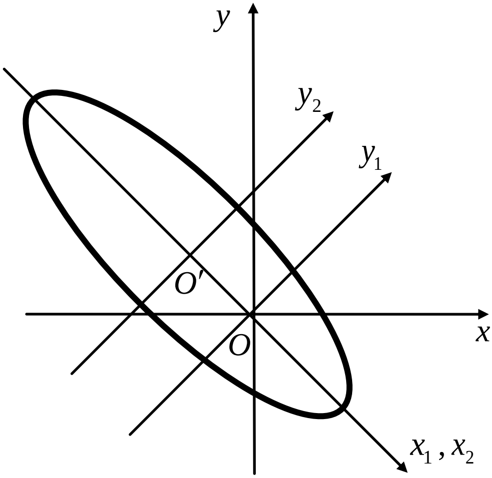


Рис. 3.12.

Приклад 3.9. Звести до канонічного вигляду рівняння кривої

$$3x^2+10xy+3y^2+4x+28y-28=0 \qquad (3.46)$$

та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Власні значення матриці $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ квадратичної форми $W(x,y)=3x^2+10xy+3y^2$ знаходимо, розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 5\\ 5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Звідси $\lambda_1=8$, $\lambda_2=-2$.

2. Складаємо відповідні системи лінійних рівнянь для визначення власних векторів.

Нехай $\lambda_1=8$. Тоді координати власного вектора $\overrightarrow{X_1}$, що відповідає цьому власному значенню, визначаємо з системи

$\begin{cases} -5x+5y=0, \\ 5x-5y=0. \end{cases}$ Звідси $y=x$. Тоді $\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Оскільки $|\overrightarrow{X_1}|=\sqrt{x^2+x^2}=1$, то $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, $\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Оскільки власні вектори $\overrightarrow{X_1}$, $\overrightarrow{X_2}$ – ортонормовані, то $\overrightarrow{X_2}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ – одиничний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_2=-2$.

Матриця H переходу від системи координат (x, y) до системи координат (x_1, y_1) має вигляд

$$H=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Координати вектора $\overrightarrow{X_1}$ будуть значеннями косинуса та синуса кута φ повороту системи (x, y) навколо початку координат. Тоді $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, тобто $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Виразимо змінні x, y через нові змінні x_1, y_1:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

тобто

$$
\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1). \end{cases} \tag{3.47}
$$

Підставляючи (3.47) у (3.46), одержуємо

$$
8x_1^2 - 2y_1^2 + 16\sqrt{2}x_1 - 12\sqrt{2}y_1 - 28 = 0.
$$

Виділивши повний квадрат, перетворимо отримане рівняння

$$
8\left(x_1 + \sqrt{2}\right)^2 - 2\left(y_1 - 3\sqrt{2}\right)^2 = 8.
$$

Здійснюючи паралельне перенесення початку в точку $O'(-\sqrt{2};3\sqrt{2})$ за формулами

$$
\begin{cases} x_2 = x_1 + \sqrt{2}, \\ y_2 = y_1 - 3\sqrt{2}, \end{cases}
$$

і поділивши на 8, одержимо канонічне рівняння гіперболи

$$
\frac{x_2^2}{1} - \frac{y_2^2}{4} = 1.
$$

4. Будуємо криву. Повертаємо систему координат Oxy на кут $\varphi = 45^0$ і переносимо початок координат у точку $O'(-\sqrt{2};3\sqrt{2})$ (рис. 3.13).

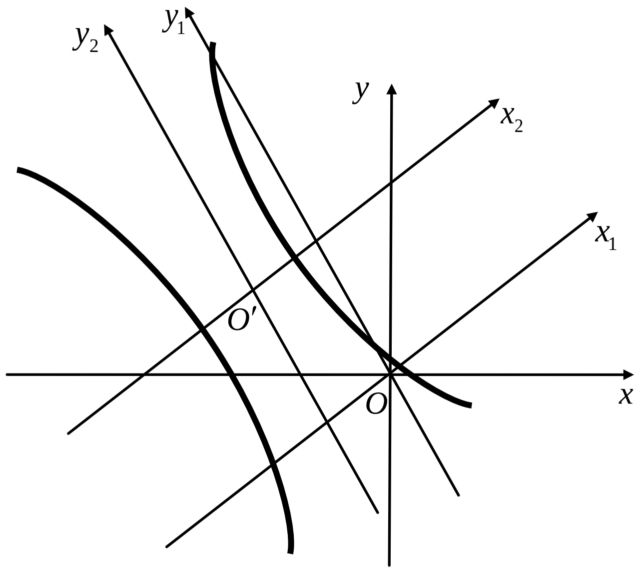


Рис. 3.13.

Приклад 3.10. Звести до канонічного вигляду рівняння кривої

$$4x^2-4xy+y^2+30x+10y+25=0 \tag{3.48}$$

та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Знаходимо власні значення матриці $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ квадратичної форми $W(x,y)=4x^2-4xy+y^2$ з характеристичного рівняння $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$. Звідси $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$.

2. Складаємо відповідні системи лінійних рівнянь для визначення власних векторів.

Нехай $\lambda_1 = 0$. Тоді координати власного вектора $\overrightarrow{X_1}$, що відповідає цьому власному значенню, визначаємо з системи $\begin{cases} 4x - 2y = 0, \\ -2x + y = 0. \end{cases}$ Звідси $y = 2x$. Тоді $\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$. Оскільки $|\overrightarrow{X_1}| = \sqrt{x^2 + 4x^2} = 1$, то $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Отже, $\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Оскільки власні вектори $\overrightarrow{X_1}$, $\overrightarrow{X_2}$ – ортонормовані, то $\overrightarrow{X_2} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ – одиничний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 5$.

Матриця H переходу від системи координат (x, y) до системи координат (x_1, y_1) має вигляд

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

3. Координати вектора $\overrightarrow{X_1}$ будуть значеннями косинуса та синуса кута φ повороту системи (x, y) навколо початку координат. Тоді $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тобто $tg\,\varphi = 2$, тобто $\varphi \approx 65^0$.

Виразимо змінні x, y через нові змінні x_1, y_1:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1). \end{cases} \tag{3.49}$$

Підставляючи (3.49) у (3.48), одержуємо

$$5y_1^2 + 10\sqrt{5}x_1 - 10\sqrt{5}y_1 + 25 = 0,$$

або, після виділення повного квадрата,

$$5\left(y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 + 5\right) + 10\sqrt{5}x_1 = 0,$$

тобто

$$\left(y_1 - \sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{5}x_1 = 0.$$

Здійснюючи паралельне перенесення початку в точку $O'(0;\sqrt{5})$ за формулами

$$\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1 - \sqrt{5}, \end{cases}$$

одержимо канонічне рівняння параболи

$$y_2^2 = -2\sqrt{5}x_2.$$

4. Будуємо криву. Повертаємо систему координат Oxy на кут $\varphi \approx 65^0$ і переносимо початок координат в точку $O'(0;\frac{\sqrt{5}}{5})$ (рис. 3.14).

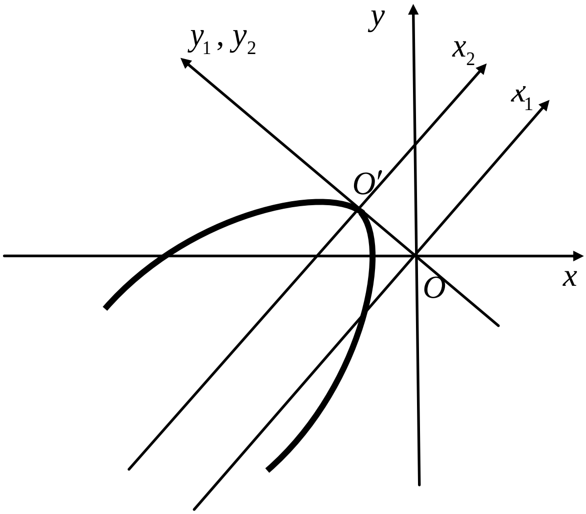


Рис. 3.14.

Теоретичні питання

1. Які є види рівнянь прямої на площині?
2. Як знайти кут між двома прямими на площині?
3. Як знайти відстань від точки до прямої?
4. Які є види рівнянь площини?
5. Як знайти кут між двома площинами?
6. Як знайти відстань від точки до площини?
7. Сформулюйте основні види рівняння прямої в просторі.
8. Як знайти кут між двома прямими в просторі?
9. Поясніть, як знаходять кут між площиною і прямою.
10. Дайте визначення квадратичної форми у двовимірному просторі.
11. Поясніть зведення до канонічного вигляду загального рівняння кривої другого порядку.
12. Що називають кривими другого порядку?

Завдання для самостійної роботи

I. Задано вершини трикутника ABC: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Знайти:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння висоти CH;

в) рівняння медіани AM;

г) точку K перетину медіани AM і висоти CH;

ґ) рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно до сторони AB;

д) відстань від точки C до прямої AB.

1. $A(5;-2)$, $B(-1;3)$, $C(4;-1)$;
2. $A(-7;3)$, $B(-10;-8)$, $C(9;1)$;
3. $A(-5;-7)$, $B(3;12)$, $C(-5;-8)$;
4. $A(10;-3)$, $B(-10;-4)$, $C(-8;2)$;
5. $A(-6;-4)$, $B(12;-6)$, $C(4;1)$;
6. $A(-3;8)$, $B(0;-5)$, $C(7;-9)$;
7. $A(-1;-6)$, $B(5;8)$, $C(-3;7)$;
8. $A(0;-10)$, $B(6;-4)$, $C(-7;3)$;
9. $A(-8;-6)$, $B(-2;0)$, $C(-6;5)$;
10. $A(-9;-1)$, $B(4;-8)$, $C(0;11)$;
11. $A(-3;-8)$, $B(-5;-9)$, $C(14;-2)$;
12. $A(11;-4)$, $B(0;7)$, $C(-1;-10)$;
13. $A(3;2)$, $B(-7;8)$, $C(-4;6)$;
14. $A(3;7)$, $B(-6;0)$, $C(-11;7)$;
15. $A(-1;0)$, $B(4;7)$, $C(9;-3)$;
16. $A(6;5)$, $B(-3;10)$, $C(4;0)$;
17. $A(-6;-2)$, $B(-9;5)$, $C(1;3)$;
18. $A(4;0)$, $B(-12;4)$, $C(-1;11)$;

19. $A(-2;7)$, $B(6;-3)$, $C(-5;-8)$;

20. $A(1;4)$, $B(-8;7)$, $C(-5;-2)$;

21. $A(5;7)$, $B(-2;6)$, $C(-10;-3)$;

22. $A(4;-4)$, $B(-7;-5)$, $C(1;8)$;

23. $A(-3;0)$, $B(-10;4)$, $C(-2;6)$;

24. $A(5;-1)$, $B(7;4)$, $C(-8;-1)$;

25. $A(4;-6)$, $B(8;1)$, $C(-7;-3)$;

26. $A(5;12)$, $B(-3;-5)$, $C(0;3)$;

27. $A(6;-1)$, $B(-9;-4)$, $C(-1;8)$;

28. $A(6;-4)$, $B(9;3)$, $C(-5;-3)$;

29. $A(7;-1)$, $B(8;4)$, $C(-3;-5)$;

30. $A(4;-4)$, $B(0;-7)$, $C(10;1)$.

II. Задано точки M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання I з параграфа 2). Написати:

а) рівняння прямої, що проходить через точку M_1 паралельно до вектора $\overrightarrow{M_2M_3}$;

б) рівняння площини π_1, що проходить через точку M_2 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_3M_4}$;

в) рівняння прямої, що проходить через точку M_1, перпендикулярно до площини π_1;

г) рівняння площини π_2, що проходить через точки M_2, M_3, M_4;

ґ) знайти кут ϕ між площинами π_1, π_2;

д) знайти кут між прямою M_1M_2 і площиною π_2;

е) якщо $\phi \neq 0$, знайти канонічне рівняння прямої, що утворюється в результаті перетину площин π_1, π_2.

III. Задано точку M_0, прямі l_1, l_2, l_3 та площину π. Знайти:

а) рівняння площини, що проходить через задану точку M_0 і пряму l_2;

б) точку перетину прямих l_1 та l_2;
в) точку перетину прямої l_3 і площини π;
г) відстань від заданої точки M_0 до прямої l_2;
ґ) відстань між мимобіжними прямими l_2 та l_3;
д) точку, симетричну точці M_0 відносно прямої l_2;
е) точку, симетричну точці M_0 відносно площини π.

1. $M_0(-2;3;5)$, $l_1: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-4}{-9}$, $l_2: \dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+5}{2}$,
$l_3: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-4}{1}$, $\pi: 25x - 38y - 7z + 129 = 0$;

2. $M_0(10;-8;-7)$, $l_1: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$, $l_2: \dfrac{x+6}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{0}$,
$l_3: \dfrac{x+1}{11} = \dfrac{y+5}{-3} = \dfrac{z-2}{-9}$, $\pi: 2x - 3y - 5z - 3 = 0$;

3. $M_0(-4;-13;6)$, $l_1: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{3}$, $l_2: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{-8} = \dfrac{z-5}{-14}$,
$l_3: \dfrac{x}{-4} = \dfrac{y+1}{-12} = \dfrac{z+1}{7}$, $\pi: 4x + 5y - 2z + 3 = 0$;

4. $M_0(-3;-6;-8)$, $l_1: \dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{7}$, $l_2: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z-7}{-3}$,
$l_3: \dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{-1}$, $\pi: 6x - 8y + 6z - 14 = 0$;

5. $M_0(14;-3;7)$, $l_1: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{3}$, $l_2: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-7}$,
$l_3: \dfrac{x-2}{12} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{9}$, $\pi: 3x - y + 2z - 3 = 0$;

6. $M_0(-6;5;5)$, $l_1: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+4}{5}$, $l_2: \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{z-1}{-3}$,
$l_3: \dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+4}{9}$, $\pi: 5x + 4y - z + 6 = 0$;

7. $M_0(-13;-8;10)$, $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-3}$, $l_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-2}$,

$l_3: \frac{x-1}{-7} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z}{5}$, $\pi: 7x + y + 4z - 9 = 0$;

8. $M_0(-1;-8;-7)$, $l_1: \frac{x-14}{-19} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z-5}{-3}$,

$l_2: \frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-5}$, $l_3: \frac{x-14}{-5} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-5}{-4}$,

$\pi: 41x - 98y - 31z - 27 = 0$;

9. $M_0(-3;1;8)$, $l_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-6}$, $l_2: \frac{x-3}{-5} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{2}$,

$l_3: \frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{4}$, $\pi: -4x + 7y + 4z - 15 = 0$;

10. $M_0(10;1;8)$, $l_1: \frac{x-7}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{2}$, $l_2: \frac{x-7}{-12} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{1}$,

$l_3: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{4}$, $\pi: x - 8y + 4z - 7 = 0$;

11. $M_0(5;-4;5)$, $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-6}{-5}$, $l_2: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{0}$,

$l_3: \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-6}{-1}$, $\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$;

12. $M_0(-3;2;7)$, $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{0}$, $l_2: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{2}$,

$l_3: \frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}$, $\pi: 2x - y + z - 5 = 0$;

13. $M_0(2;1;8)$, $l_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-3}{-3}$, $l_2: \frac{x-5}{-2} = \frac{y+6}{3} = \frac{z}{-1}$,

$l_3: \frac{x-2}{0} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{5}$, $\pi: 11 + 9y + 5z - 1 = 0$;

14. $M_0(3;6;15)$, $l_1:\frac{x+3}{5}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-6}{-10}$, $l_2:\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+4}{3}$,

$l_3:\frac{x+3}{6}=\frac{y+5}{11}=\frac{z-6}{9}$, $\pi:-22x+5y-8z+7=0$;

15. $M_0(-21;1;7)$, $l_1:\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{3}$, $l_2:\frac{x}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{-6}$,

$l_3:\frac{x+2}{-19}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{8}$, $\pi:-18x+21y-16z-31=0$;

16. $M_0(4;3;0)$, $l_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z}{2}$, $l_2:\frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$,

$l_3:\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{0}$, $\pi:2x+y-z-5=0$;

17. $M_0(-3;4;-5)$, $l_1:\frac{x}{-4}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{1}$, $l_2:\frac{x+4}{6}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$,

$l_3:\frac{x}{-3}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-1}{-6}$, $\pi:7x+9y-8z+35=0$;

18. $M_0(-2;3;9)$, $l_1:\frac{x+1}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{-2}$, $l_2:\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+4}{3}$,

$l_3:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{5}$, $\pi:x-8y+4z+1=0$;

19. $M_0(-6;7;-10)$, $l_1:\frac{x-3}{-5}=\frac{y-10}{-7}=\frac{z+1}{-4}$,

$l_2:\frac{x+2}{-4}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+5}{2}$, $l_3:\frac{x-3}{-3}=\frac{y-10}{-1}=\frac{z+1}{-3}$,

$\pi:2x-2y+z+15=0$;

20. $M_0(-12;11;5)$, $l_1:\frac{x+4}{6}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-6}{-6}$, $l_2:\frac{x-2}{-3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{2}$,

$l_3:\frac{x+4}{-8}=\frac{y-2}{9}=\frac{z-6}{-1}$, $\pi:2x+6y-3z+14=0$;

21. $M_0(-5;-9;1)$, $l_1:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$, $l_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+1}{2}$,

$l_3:\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y}{-9}=\dfrac{z-2}{-1}$, $\pi:-8x-3y-2z+12=0$;

22. $M_0(2;-1;7)$, $l_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{3}$, $l_2:\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$,

$l_3:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{7}$, $\pi:5x-4y-z+3=0$;

23. $M_0(-12;7;-1)$, $l_1:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+7}{3}$,

$l_2:\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y-5}{-7}=\dfrac{z+4}{4}$, $l_3:\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+7}{2}$,

$\pi:25x-34y-22z+57=0$;

24. $M_0(1;-6;-5)$, $l_1:\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{3}$, $l_2:\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$,

$l_3:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$, $\pi:3x+9y+4z-3=0$;

25. $M_0(0;0;-5)$, $l_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-5}{-6}$, $l_2:\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+1}{5}$,

$l_3:\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-5}{-10}$, $\pi:-35x+19y-9z+58=0$;

26. $M_0(2;-3;1)$, $l_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $l_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$,

$l_3:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-1}{0}$, $\pi:3x+y+z-5=0$;

27. $M_0(-3;1;2)$, $l_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, $l_2:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-5}$,

$l_3:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$, $\pi:3x+19y+5z-21=0$;

28. $M_0(1;-3;2)$, $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$, $l_2:\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$,

$l_3:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, $\pi: x-7y-19z+11=0$;

29. $M_0(-3;2;1)$, $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$, $l_2:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z}{4}$,

$l_3:\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, $\pi: 13x-5y-3z-11=0$;

30. $M_0(2;-1;0)$, $l_1:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-5}{-4}$, $l_2:\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$,

$l_3:\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-5}{-5}$, $\pi: 2x+6y+z+15=0$.

IV. Побудувати криві. Знайти координати фокусів, рівняння директрис. Для гіперболи знайти рівняння асимптот.

1. а) $\dfrac{x^2}{289}-\dfrac{y^2}{16}=1$, б) $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=37x$;

2. а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$, б) $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{81}=1$, в) $y^2=27x$;

3. а) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{256}=1$, б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=43x$;

4. а) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{64}=1$, б) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{169}=1$, в) $y^2=33x$;

5. а) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{81}=1$, б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{144}=1$, в) $y^2=15x$;

6. а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{81}=1$, б) $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=29x$;

7. а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, б) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=31x$;

8. а) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{49}=1$, б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=17x$;

9. а) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$, б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=19x$;

10. а) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{256}=1$, в) $y^2=35x$;

11. а) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, в) $y^2=7x$;

12. а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=1$, б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$, в) $y^2=23x$;

13. а) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{121}=1$, в) $y^2=25x$;

14. а) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{144}=1$, в) $y^2=9x$;

15. а) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{36}=1$, б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{121}=1$, в) $y^2=21x$;

16. а) $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{81}=1$, б) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$, в) $y^2=41x$;

17. а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{81}=1$, в) $y^2=3x$;

18. а) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{169}=1$, б) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{121}=1$, в) $y^2=59x$;

19. а) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{64}=1$, б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$, в) $y^2=5x$;

20. а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{64}=1$, в) $y^2=57x$;

21. а) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$, в) $y^2=13x$;

22. а) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{121}=1$, б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, в) $y^2=45x$;

23. а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{121}=1$, в) $y^2=61x$;

24. а) $\frac{x^2}{256}-\frac{y^2}{25}=1$, б) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$, в) $y^2=51x$;

25. а) $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, в) $y^2=53x$;

26. а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$, б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, в) $y^2=39x$;

27. а) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$, б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$, в) $y^2=11x$;

28. а) $\frac{x^2}{121}-\frac{y^2}{36}=1$, б) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}=1$, в) $y^2=47x$;

29. а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$, б) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{64}=1$, в) $y^2=63x$;

30. а) $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{144}=1$, б) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{81}=1$, в) $y^2=55x$;

V. Визначити тип кривої, що задана рівнянням:

1. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$;
2. $5x^2+9y^2+10x-36y-4=0$;
3. $9x^2-2y^2+18x+8y-27=0$;
4. $y^2-6x-4y+4=0$;
5. $x^2+y^2-4x+6y-3=0$;
6. $7x^2+8y^2-28x+48y+44=0$;
7. $4x^2-7y^2-16x-42y-75=0$;
8. $y^2-4x-6y+9=0$;
9. $x^2+y^2+6x-16y=0$;
10. $4x^2+3y^2+24x-24y+72=0$;
11. $8x^2-3y^2+48x+24y=0$;
12. $y^2-10x+8y+16=0$;
13. $x^2+y^2-8x+10y+5=0$;
14. $7x^2+6y^2-56x+60y+220=0$;
15. $6x^2-5y^2-48x-50y-59=0$;
16. $y^2-12x+10y+25=0$;
17. $x^2+y^2-2x+6y+6=0$;
18. $6x^2+5y^2-12x+30y+21=0$;
19. $7x^2-6y^2-14x-36y-89=0$;
20. $y^2-14x-12y+36=0$;
21. $x^2+y^2+6x-10y+9=0$;
22. $8x^2+3y^2+48x-30y+123=0$;
23. $4x^2-3y^2+24x+30y-51=0$;
24. $y^2-16x-14y+49=0$;
25. $x^2+y^2-8x+12y+36=0$;
26. $4x^2+7y^2-32x+84y+288=0$;

27. $7x^2-8y^2-56x-96y-232=0$;

28. $y^2-18x+16y+64=0$;

29. $x^2+y^2+14x-16y+49=0$;

30. $9x^2+2y^2+126x-32y+551=0$.

VI. Визначити тип квадратичної форми:

1. $W(x,y)=7x^2+2xy+7y^2$;
2. $W(x,y)=2x^2-6xy+2y^2$;
3. $W(x,y)=25x^2-20x+4y^2$;
4. $W(x,y)=5x^2+4xy+5y^2$;
5. $W(x,y)=3x^2+8xy+3y^2$;
6. $W(x,y)=25x^2-10xy+y^2$;
7. $W(x,y)=9x^2+2xy+9y^2$;
8. $W(x,y)=4x^2+12xy+4y^2$;
9. $W(x,y)=4x^2-28xy+49y^2$;
10. $W(x,y)=27x^2+10xy+3y^2$;
11. $W(x,y)=x^2-18xy+y^2$;
12. $W(x,y)=4x^2+12xy+9y^2$;
13. $W(x,y)=9x^2-12xy+9y^2$;
14. $W(x,y)=3x^2-18xy+3y^2$;
15. $W(x,y)=x^2+6xy+9y^2$;
16. $W(x,y)=5x^2+8xy+5y^2$;
17. $W(x,y)=x^2-8xy+y^2$;
18. $W(x,y)=16x^2+8xy+y^2$;
19. $W(x,y)=6x^2-8xy+6y^2$;

20. $W(x,y)=4x^2+18xy+4y^2$;

21. $W(x,y)=2x^2-4xy+2y^2$;

22. $W(x,y)=5x^2-2xy+5y^2$;

23. $W(x,y)=x^2-6xy+y^2$;

24. $W(x,y)=16x^2-40xy+25y^2$;

25. $W(x,y)=7x^2-4xy+7y^2$;

26. $W(x,y)=-x^2+4xy-y^2$;

27. $W(x,y)=6x^2-12xy+6y^2$;

28. $W(x,y)=7x^2-8xy+7y^2$;

29. $W(x,y)=5x^2-12xy+5y^2$;

30. $W(x,y)=x^2+2xy+y^2$.

VII. Звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду й побудувати її графік:

1. $5x^2+6xy+5y^2+16x+16y+8=0$;
2. $4x^2+10xy+4y^2-16x-20y+7=0$;
3. $9x^2-6xy+y^2+36x+88y+1=0$;
4. $13x^2+10xy+13y^2+36x+36y-36=0$;
5. $15x^2+34xy+15y^2-60x-68y+28=0$;
6. $16x^2-8xy+y^2-119x+102y+289=0$;
7. $17x^2+30xy+17y^2+64x+64y+32=0$;
8. $35x^2+74xy+35y^2-140x-148y+68=0$;
9. $9x^2-12xy+4y^2-104x+13y+169=0$;
10. $37x^2+70xy+37y^2-4x+4y-68=0$;
11. $2x^2+5xy+2y^2+10x+8y-10=0$;
12. $25x^2-20xy+4y^2+232x-261y+841=0$;

13. $25x^2+48xy+25y^2-2x+2y-47=0$;

14. $7x^2+50xy+7y^2-100x-28y-260=0$;

15. $16x^2-24xy+9y^2-75x+250y+625=0$;

16. $41x^2+80xy+41y^2-164x-160y+83=0$;

17. $9x^2+82xy+9y^2+36x+164y-764=0$;

18. $49x^2-28xy+4y^2-848x-159y+2809=0$;

19. $13x^2+24xy+13y^2-2x+2y-98=0$;

20. $8x^2+34xy+8y^2+68x+32y-193=0$;

21. $25x^2-30xy+9y^2+442x-34y+1156=0$;

22. $61x^2+120xy+61y^2-2x+2y-119=0$;

23. $3x^2+10xy+3y^2-20x-12y-60=0$;

24. $25x^2-40xy+16y^2-246x+533y+1681=0$;

25. $65x^2+126xy+65y^2-4x+4y-124=0$;

26. $21x^2+58xy+21y^2+84x+116y-116=0$;

27. $25x^2-10xy+y^2+234x-182y+676=0$;

28. $85x^2+168xy+85y^2-2x+2y-167=0$;

29. $20x^2+58xy+20y^2+80x+116y-361=0$;

30. $64x^2-16xy+y^2-975x+650y+4225=0$.

Відповіді:

1. $\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{1}=1$;

2. $\frac{x_2^2}{1}-\frac{y_2^2}{9}=1$;

3. $y_2^2=-3\sqrt{10}x_2$;

4. $\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{4}=1$;

5. $\frac{x_2^2}{1}-\frac{y_2^2}{16}=1$;

6. $y_2^2=-\sqrt{17}x_2$;

7. $\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{1}=1$;

8. $\frac{x_2^2}{1}-\frac{y_2^2}{25}=1$;

9. $y_2^2 = \sqrt{13}x_2$;

10. $\frac{x_2^2}{36} + \frac{y_2^2}{1} = 1$;

11. $\frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{36} = 1$;

12. $y_2^2 = \sqrt{29}x_2$;

13. $\frac{x_2^2}{49} + \frac{y_2^2}{1} = 1$;

14. $\frac{x_2^2}{9} - \frac{y_2^2}{16} = 1$;

15. $y_2^2 = -5x_2$;

16. $\frac{x_2^2}{81} + \frac{y_2^2}{1} = 1$;

17. $\frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{25} = 1$;

18. $y_2^2 = \sqrt{53}x_2$;

19. $\frac{x_2^2}{100} + \frac{y_2^2}{4} = 1$;

20. $\frac{x_2^2}{9} - \frac{y_2^2}{25} = 1$;

21. $y_2^2 = -\sqrt{34}x_2$;

22. $\frac{x_2^2}{121} + \frac{y_2^2}{1} = 1$;

23. $\frac{x_2^2}{9} - \frac{y_2^2}{36} = 1$;

24. $y_2^2 = -\sqrt{41}x_2$;

25. $\frac{x_2^2}{64} + \frac{y_2^2}{1} = 1$;

26. $\frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{25} = 1$;

27. $y_2^2 = \sqrt{26}x_2$;

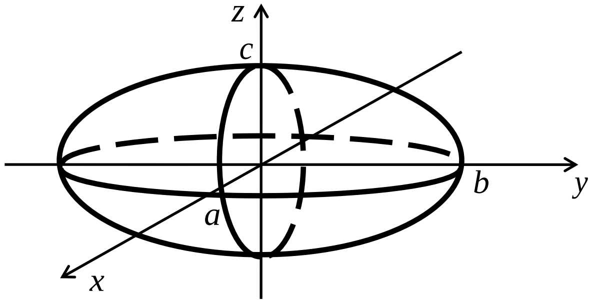
28. $\frac{x_2^2}{169} + \frac{y_2^2}{1} = 1$;

29. $\frac{x_2^2}{9} - \frac{y_2^2}{49} = 1$;

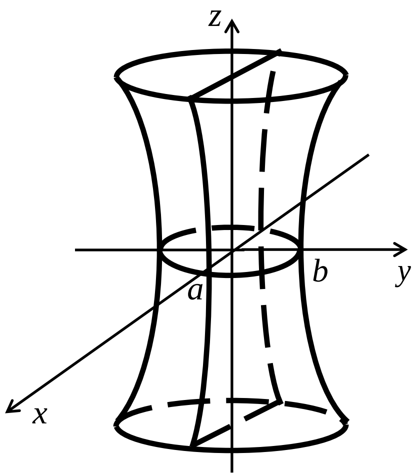
30. $y_2^2 = -\sqrt{65}x_2$.

Додаток. Поверхні другого порядку

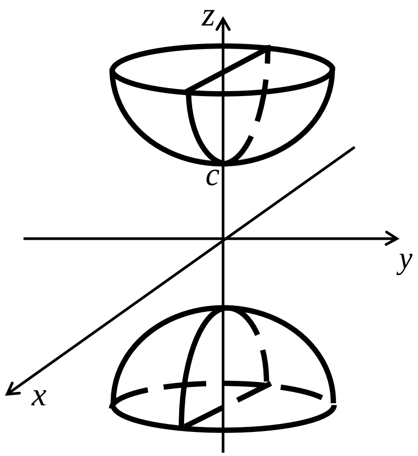
1. Дійсний еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.



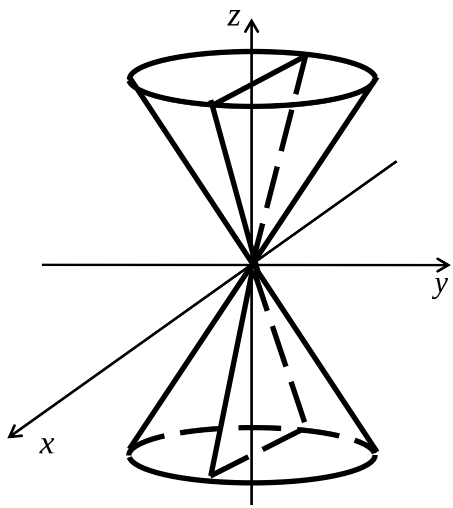
2. Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.



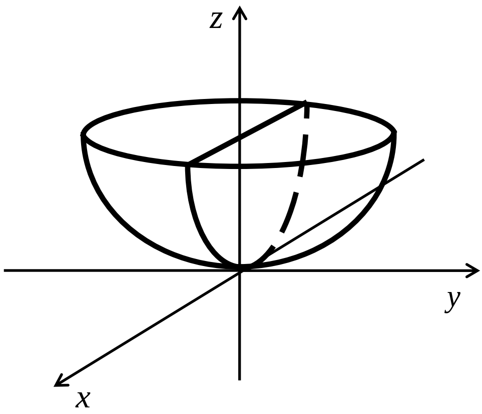
3. Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.



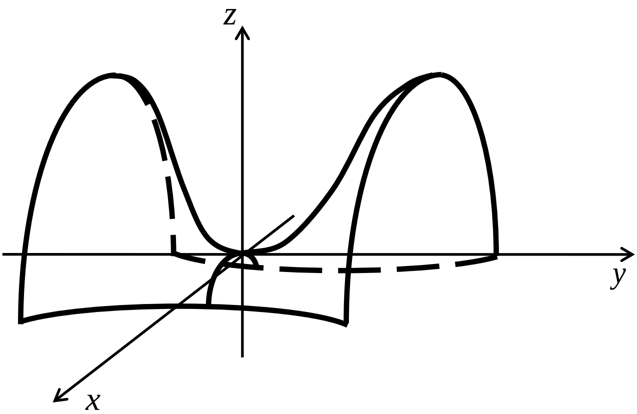
4. Дійсний конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.



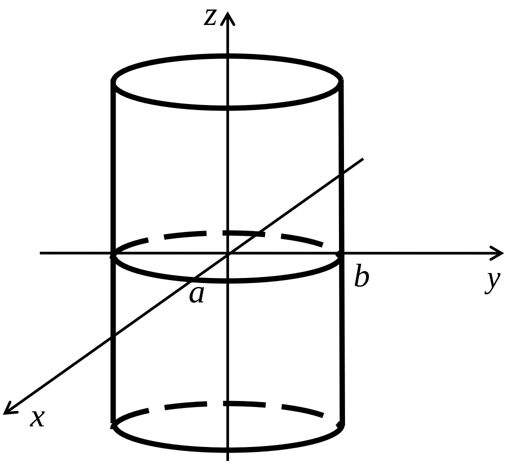
5. Еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$.



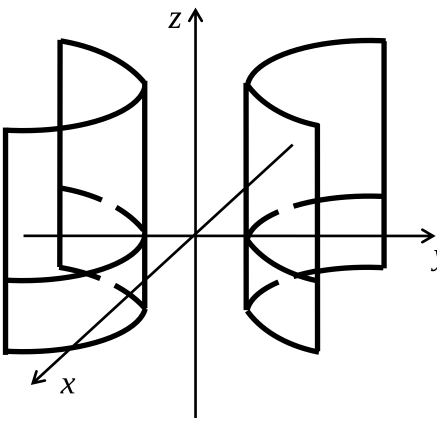
6. Гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.



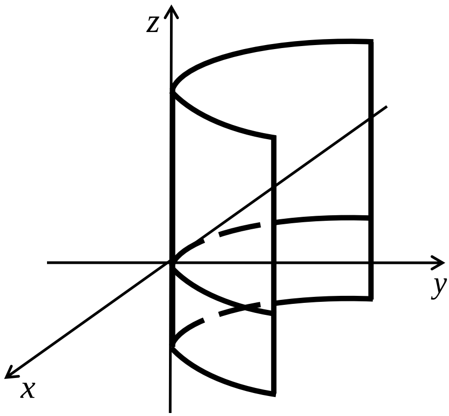
7. Дійсний еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



8. Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$.



9. Параболічний циліндр $x^2 = \pm 2py$.



Література.

1. *Кузик А.Д.* Вища математика : навч. посібник. Частина 1 / А.Д. Кузик, О.О. Карабин, О.М. Трусевич – Л. : ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.

2. *Кузик А. Д.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2 / А.Д. Кузик, О.О. Карабин, О.М. Трусевич. – Л. : ЛДУ БЖД, 2014. – 200 с.

3. *Дубовик В.П.* Вища математика : навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик – К. : АСК., 2001. – 648 с.

4. *Дубовик В.П.* Вища математика: зб. задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик – К. : АСК., 2001. – 479 с.

5. *Овчинников П.П.* Вища математика / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – Ч. 1, 2. – К. : Техніка, 2000.

6. *Овчинников П.П.* Вища математика: зб. задач / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – Ч. 1, 2. – К. : Техніка, 2000.

7. *Кудрявцев В.А.* Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович – М. : Наука, 1989. – 656 с.

8. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Берман Г.Н. – М. : Наука, 1977. – 384 с.

9. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: у 2 ч. / М.І. Шкіль – К. : "Вища школа", 1978.

10. *Фролов С.В., Шостак Р.Я.* Курс высшей математики / С.В. Фролов, Р.Я. Шостак – Т. 1, 2. – М. : "Высшая школа", 1973.

11. *Кулініч Г.Л.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі: навч. посібник. Ч.1 / Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва – К. : Либідь, 1992. – 288 с.

12. *Васильченко І.П., Данилов В.Я., Лобанів А.І.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі: навч. посібник.Ч.2 / І.П. Васильченко, В.Я. Данилов, А.І. Лобанів – К. : Либідь, 1992. – 256 с.

13. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский – М. : Физматлит, 1995. – 872 с.