Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами та стаціонарною неоднорідністю

Пазен О.Ю.[1], Стасюк М.Ф.[2] , Тацій Р.М.[3]

[1]Ад'юнкт кафедри прикладної математики і механіки, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
вул. Клепарівська 35, м. Львів, Україна, opazen@gmail.com
[2]Доц., к.ф-м.н., доцент кафедри прикладної математики і механіки, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
вул. Клепарівська 35, м. Львів, Україна, marta_stasiuk@yahoo.com
3Проф., д.ф-м.н., завідувач кафедри прикладної математики і механіки, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
вул. Клепарівська 35, м. Львів, Україна,

***Анотація* — Запропоновано та обґрунтовано нову схему розв'язування мішаної задачі для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами при загальних умовах третього роду. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні процесу теплопередачі в багатошаровій плиті за умов ідеального теплового контакту між шарами та наявності конвекційного теплообміну на їх поверхнях. В основу цієї схеми покладено метод редукції, концепцію квазіпохідних, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, метод Фур'є та метод власних функцій.**

Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є та власних функцій.

Total third boundary value problem for the heat equation with piecewise continuous coefficients and stationary inhomogeneity

Pazen O.Y.[1], Stasjuk M.F.[2], Tatsij R.M.[3]

[1]Adjunct Department of Applied Mathematics and Mechanics, Lviv State University of Life Safety
Kleparivska str., 35, Lviv, Ukraine, opazen@ gmail.com
[2]Doc., Docent of Department of Applied Mathematics and Mechanics, Lviv State University of Life Safety
Kleparivska str., 35, Lviv, Ukraine, marta_stasiuk@yahoo.com
[3]Prof., Head of Department of Applied Mathematics and Mechanics, Lviv State University of Life Safety
Kleparivska str., 35, Lviv, Ukraine.

***Abstract* —A new scheme and reasonable solution mixed problem for the heat equation with piecewise continuous coefficients in the general conditions of the third kind. The results can be used in the study of the process of heat transfer in multilayer plate under conditions of perfect thermal contact between the layers and the presence of convective heat transfer on their surfaces. The basis of this scheme on the method of reduction, kvazipohidnyh concept, the modern theory of linear differential equations, Fourier method and the method of their own functions.**

Keywords: kvazidyferentsialne equation, boundary problem, the Cauchy matrix, eigenvalue problem, the method of Fourier and Private Functions.

Розглядається мішана задача для рівняння теплопровідності

$$r(x)\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\right)+q_v(x). \qquad (1)$$

з системою крайових умов третього роду:

$$\begin{cases}\alpha_0 t(x_0,\tau)-t^{[1]}(x_0,\tau)=\alpha_0\psi_0(\tau),\\ \alpha_n t(x_n,\tau)+t^{[1]}(x_n,\tau)=\alpha_n\psi_n(\tau),\end{cases} \qquad (2)$$

де позначено $t^{[1]}\overset{df}{=}\lambda t'_x$ (квазіпохідна).
і початковою умовою:

$$t\ \ x,0\ =\varphi\ \ x \qquad (3)$$

Тут $x_0 < x_1 < ... < x_n$ довільне розбиття проміжку x_0, x_n дійсної осі OX на n частин, θ_i - характеристична функція на x_i, x_{i+1}. Покладемо, що $\lambda\ \ x\ =\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\theta_i,\ \ r\ \ x\ =\sum_{i=0}^{n-1}r_i\theta_i,\ \ q_v\ \ x\ =\sum_{i=0}^{n-1}q_{vi}\theta_i,$

Запропоновано та обґрунтовано прямий метод розв'язування задачі (1), (2), (3) за наступною схемою:

1. розв'язок $t\ \ x,\tau$ шукається у вигляді $t\ \ x,\tau\ =u\ \ x,\tau\ +v\ \ x,\tau$ (метод редукції);

2. для однієї з функцій (наприклад для $u\ \ x,\tau$) розв'язується квазістаціонарна крайова задача

$$\lambda u'\ ' = -q_v \qquad (4)$$

з крайовими умовами (2) для функції $u\ \ x,\tau$

Розв'язок задачі (4), (2) зображується у вигляді

$$u\ \ x,\tau\ \ =\ \ 1\ \ \ 0\ \cdot\overline{U}(x,\tau) =\ \ 1\ \ \ 0\ \cdot[(B_i(x,x_i)\times$$
$$\times B(x_i,0)\cdot P_0 - B_i(x,x_i)\cdot\sum_{k=0}^{i}B(x_i,x_k)\cdot\overline{Z_k} - \qquad (5)$$
$$-\int_{x_i}^{x}B_i(x,s)\cdot\overline{R_i}(s)ds)\theta_i]$$

(див. позначення в роботі [1] та літературу там).

3. для функції $v\ \ x,\tau$ отримується мішана неоднорідна задача

$$r\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right) - r\frac{\partial u}{\partial\tau} \qquad (6)$$

з крайовими нульовими умовами (2) для функції $v\ \ x,\tau$

і початковою умовою

$$v\ \ x,0\ =f\ \ x\ =\varphi\ \ x\ -u\ \ x,0 \qquad (7)$$

Розв'язок задачі (6), (2), (7) зображується у вигляді ряду

$$v\ \ x,\tau\ \ =\sum_{k=1}^{\infty}(f_k\cdot e^{-\omega_k\tau} -$$
$$-\int_0^{\tau}e^{-\omega_k\ \ \tau-s}\ \ u_k\ \ s\ \ ds)\cdot X_k\ \ x,\omega_k \qquad (8)$$

(див. позначення в роботі [2] та літературу там).

Приклад. Розглядається чотиришарова плоска стінка, що складається з бетонної плити перекриття товщиною 0,2м, ніздрюватого бетону - 0,03м, цементно-піщаної стяжки (з підігрівом) - 0,06м, та керамічної плитки – 0,01м. Необхідно знайти розподіл температурного поля цієї стінки, якщо на лівій її стороні температура міняється за законом $\psi_0(\tau)=345\lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right)+20$. В початковий момент часу температура стінки становить: $\varphi_0 = 10+10,38x$, $\varphi_1 = -32,22+221,53x$, $\varphi_2 = 4,61+94,2x-142,86x^2$, $\varphi_2 = 17,52+8,27x$. Коефіцієнти тепловіддачі на повехнях - $\alpha_0 = 160\ ^{Вт}\!/_{м^2К}$, $\alpha_n = 10\ ^{Вт}\!/_{м^2К}$. Інтенсивність внутрішнього джерела тепла - $q_{v2} = 200\ ^{Вт}\!/_{м^3}$. Теплофізичні характеристики матеріалів: Коефіцієнт теплопровідності $\lambda = ^{Вт}\!/_{м\cdot К}$ - $\lambda_0 = 1,92$, $\lambda_1 = 0,09$, $\lambda_2 = 0,7$, λ_3=0,96; питома теплоємність $c = ^{Дж}\!/_{кг\cdot К}$ - $c_0 = 840$, $c_1 = 840$, $c_2 = 840$, $c_3 = 880$; густина $\rho = ^{кг}\!/_{м^3}$ - $\rho_0 = 2500$, $\rho_1 = 300$, $\rho_2 = 1600$, $\rho_3 = 2000$.

Розв'язок задачі отримуємо у вигляді графіка, що зображено на рис. 1

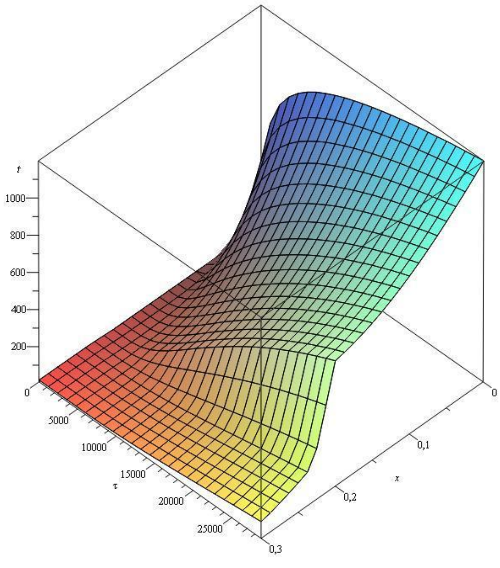

рис.1

[1] Тацій Р.М. Визначення теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом джерел тепла / Р. М. Тацій, М.І. Кусій, О. Ю. Пазен // Збірник наукових праць «Пожежна безпека». - 2012. - № 20. - С. 20-26.

[2] Тацій Р. М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтам / Р. М. Тацій, О. О. Власій, М. Ф. Стасюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки . - 2014. - № 804. - С. 64-69.