Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Р.М. Тацій, О.Ю. Чмир, І.В. Шевчук

Диференціальні рівняння

Навчальний посібник

Львів 2024

УДК 517.91
ББК 22.161.1 я73

Диференціальні рівняння: Навчальний посібник / Тацій Р.М., Чмир О.Ю., Шевчук І.В. – Львів: ЛДУ БЖД, 2024. – 86 с.

Рецензенти: Кузик А.Д., доктор сільськогосподарських наук, професор, завідувач кафедри екологічної безпеки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності

Процах Н.П., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики і фізики Національного лісотехнічного університету України

Математична освіта сучасного кваліфікованого пожежника, рятувальника чи фахівця з інформаційної безпеки передбачає знання методів теорії звичайних диференціальних рівнянь, вміння застосовувати загальні теоретичні положення до розв’язування задач, які виникають у динамічних математичних моделях пожежно-рятувальної техніки та інших прикладних задачах.

Важливим фактором у засвоєнні розділу «Диференціальні рівняння» курсу «Вища математика» й оволодінні її методами є самостійна робота слухачів. Такій роботі сприятимуть методичні вказівки та завдання, мета яких – організувати і активізувати самостійну роботу слухачів при вивченні цього розділу, допомогти їм закріпити теоретичний матеріал, набути практичні навики розв’язування задач. Система типових розрахунків сприяє більш глибокому вивченню курсу «Вищої математики».

Навчальний посібник містить основні теоретичні відомості з розділу «Диференціальні рівняння» курсу «Вища математика», приклади розв’язування типових завдань та варіанти задач для самостійного розв’язування.

Посібник можна використовувати як довідник, збірник задач чи підручник для самостійного вивчення матеріалу.

Рекомендовано до друку вченою радою
Львівського державного університету безпеки життєдіяльності
(протокол № 2 від “ 2 ” жовтня 2024 р.)

Присвячено світлій пам’яті професора
Михайла СУХОРОЛЬСЬКОГО

ЗМІСТ

§1. Диференціальні рівняння першого порядку

1.1. Поняття диференціального рівняння

Диференціальним рівнянням називають рівняння, що зв'язує шукану функцію, її похідні чи диференціали і незалежну змінну.

Диференціальні рівняння, що містять функцію однієї змінної, називають *звичайними*, а якщо функцію багатьох змінних, то – *диференціальними рівняннями з частинними похідними*.

Найвищий порядок похідної (чи диференціалу) у диференціальному рівнянні називають *порядком* цього рівняння.

Якщо в алгебраїчних рівняннях невідома величина обов'язково присутня в записі рівняння, то в записі диференціального рівняння шукана функція, похідні нижчих порядків і незалежна змінна можуть бути відсутні, але похідна найвищого порядку (старша похідна) повинна бути обов'язково.

Розв'язком диференціального рівняння називають функцію, що перетворює рівняння у тотожність при підстановці в диференціальне рівняння цієї функції та її похідних.

1.2. Диференціальне рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

що зв'язує змінну x, функцію $y = y(x)$ та похідну y'.

Диференціальне рівняння, що неявно виражає похідну y' через змінні, називають *неявним диференціальним рівнянням.* Це диференціальне рівняння виду (1.1).

Диференціальне рівняння, в якому похідна y' виражається через змінні x і y явно та записується у вигляді

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

називають *рівнянням першого порядку в нормальній формі* або *диференціальним рівнянням, розв'язаним відносно похідної*.

Якщо у рівнянні (1.2) замінити y' на $\dfrac{dy}{dx}$, то його можна записати як рівняння $-f(x,y)dx+dy=0$. Помножимо останнє рівняння на деяку функцію $Q(x,y)\neq 0$ і одержимо

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \qquad (1.3)$$

де $P(x,y)=-f(x,y)Q(x,y)$, тобто $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ – відомі функції. Рівняння (1.3) говорить, що змінні x та y є рівноправними, тому кожну з них можна розглядати як функцію іншої.

Розв'язком диференціального рівняння (1.2) на проміжку (a,b) називають диференційовну на (a,b) функцію $y=\varphi(x)$, яка при підстановці її в рівняння (1.2) перетворює його в правильну рівність.

Теорема Коші. *Нехай функція* $f(x,y)$ *і її частинна похідна* $f_x'(x,y)$ *визначені і неперервні в області* $D\in Oxy$ *і точка* $(x_0,y_0)\in D$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $y=\varphi(x)$ *рівняння* (1.2), *що справджує умову*

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0 \text{ або } \varphi(x_0)=y_0. \qquad (1.4)$$

Умову (1.4) називають *початковою умовою* розв'язку диференціального рівняння (1.2) та записують ще таким чином

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \text{ або } y(x_0)=y_0. \qquad (1.5)$$

Задачу знаходження розв'язку рівняння (1.2), що справджує початкову умову (1.4) чи (1.5), називають *задачею Коші*.

Нехай права частина (1.2) справджує умови теореми Коші в області *D*.

Функцію $y=\varphi(x,C)$, що залежить від аргументу x та довільної сталої *C*, називають *загальним розв'язком* (1.2) в *D*, якщо вона справджує умови:

- функція $\varphi(x,C)$ є розв'язком рівняння за довільного значення сталої *C* з деякої множини;

- для довільної точки $(x_0, y_0) \in D$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ справджуватиме умову $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Функція $y = \varphi(x, C_0)$ – *частинний розв'язок рівняння* (1.2).

Якщо загальний розв'язок диференційного рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння (1.1) чи (1.2), а вираз $\Phi(x, y, C_0) = 0$ – *частинним інтегралом* диференціального рівняння (1.1) чи (1.2).

1.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

Рівняння виду

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{1.6}$$

де $f(x)$ і $g(y)$ – неперервні на деякому інтервалі функції, називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Щоб розв'язати рівняння (1.6), треба відокремити змінні. Врахувавши, що $y' = \frac{dy}{dx}$ та припустивши, що $g(y) \neq 0$, поділимо обидві частини (1.6) на $g(y)$

$$\frac{dy}{g(y) \cdot dx} = f(x).$$

А тепер помножимо останнє рівняння на dx

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \tag{1.7}$$

Диференціальне рівняння (1.7) називають *рівнянням з відокремленими змінними*, бо в одній частині (1.7) є множник dy та функція $g(y)$, що залежить тільки від змінної y, а в другій частині є множник dx та функція $f(x)$, що залежить тільки від змінної x. Проінтегруємо обидві частини рівняння (1.7)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C\,.$$

Розглянуте рівняння (1.6) є частинним випадком рівняння

$$f_1(x)\cdot g_1(y)\,dx + f_2(x)\cdot g_2(y)\,dy = 0\,. \qquad (1.8)$$

Рівняння (1.8) розв'язуємо аналогічно (1.6), тобто розділяємо змінні: в одній частині рівняння (1.8) залишаємо функції та диференціал від змінної *x*, а в другій частині – від змінної *y*. Перенесемо доданок $f_2(x)\cdot g_2(y)dy$ в праву частину

$$f_1(x)\cdot g_1(y)\,dx = -f_2(x)\cdot g_2(y)\,dy\,.$$

Поділимо на $g_1(y)$, $f_2(x)$, припустивши, що $g_1(y)\neq 0$, $f_2(x)\neq 0$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy\,.$$

Інтегруємо і одержуємо загальний розв'язок. Враховуємо, що при діленні (1.8) на $g_1(y)$ ми втрачаємо розв'язки. Дійсно, якщо $g_1(y_0)=0$, то стала $y=y_0$ є розв'язком (1.8), оскільки перетворює це рівняння в тотожність.

Розглянемо тепер рівняння виду

$$y' = f(ax+by+c)\,, \qquad (1.9)$$

де *a*, *b*, *c* – числа, $b\neq 0$.

Покажемо, що заміна

$$u = ax+by+c \qquad (1.10)$$

зведе рівняння (1.9) до рівняння з відокремлюваними змінними. Продиференціюємо (1.10) за змінною *x*: $u' = a+by' \Rightarrow y' = \frac{u'-a}{b}$.

Підставляємо заміну (1.10) в рівняння (1.9): $\frac{u'-a}{b} = f(u)$.

Звідси

$$u' = a + bf(u)\,.$$

При умові, що $a+bf(u)\neq 0$, маємо

$$\frac{du}{dx}=a+bf(u)\Rightarrow \frac{du}{a+bf(u)}=dx .$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримуємо загальний інтеграл, замінюючи u на $ax+by+c$. Якщо $a+bf(u)=0$, то $\frac{du}{dx}=0$. Тому згідно з (1.10), рівняння (1.9) може мати розв'язки $ax+by+c=C$.

Приклад 1.1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(x^3-5x+1)\cos^2 y\,dx+x\,dy=0 .$$

Розв'язання.

Відокремимо змінні, поділивши рівняння на вираз $x\cos^2 y$. Отримаємо рівняння

$$(x^2-5+\frac{1}{x})dx+\frac{1}{\cos^2 y}dy=0 .$$

Проінтегрувавши за змінними x та y відповідно, матимемо

$$\int(x^2-5+\frac{1}{x})dx+\int\frac{1}{\cos^2 y}dy=C ,$$

звідки отримуємо загальний інтеграл вихідного рівняння у вигляді

$$\frac{x^3}{3}-5x+\ln x+tg\ y=C .$$

Приклад 1.2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'=3\sqrt[3]{y^2} ,\ \ y(0)=1 .$$

Розв'язання.

Відокремимо змінні, поділивши обидві частини вихідного рівняння на $\sqrt[3]{y^2}$ та врахувавши, що $y'=\frac{dy}{dx}$. Маємо $\frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}}=3dx$.

Проінтегрувавши обидві частини останнього рівняння, отримаємо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння

$$3\sqrt[3]{y}=3x+C.$$

Врахувавши початкову умову, отримаємо, що $C=3$, тому розв’язок вихідної задачі Коші має вигляд

$$y=(x+1)^3.$$

Приклад 1.3. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'=2x+y-3.$$

Розв’язання.

Покажемо, що заміна $u=2x+y-3$ зведе задане рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними. Продиференціюємо заміну по змінній *x*: $u'=2+y'$, звідси $y'=u'-2$.

Підставляємо заміну в рівняння: $u'-2=u$. Звідси отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними $u'=2+u$. Відокремимо змінні, поділивши обидві частини останнього рівняння на $2+u$ та врахувавши, що $u'=\frac{du}{dx}$. Маємо $\frac{du}{2+u}=dx$.

Інтегруючи останнє рівняння, одержуємо загальний інтеграл

$$\ln|2+u|=x+C.$$

Повертаючись до заміни, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\ln|2x+y-1|=x+C.$$

1.4. Диференціальні рівняння з однорідною правою частиною

Функцію $f(x,y)$ називають *однорідною степеня n*, якщо для всіх допустимих значень *x*, *y* і для кожного дійсного *t* виконується рівність

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y). \qquad (1.11)$$

Диференціальне рівняння виду

$$y'=f(x,y) \qquad (1.12)$$

називають *рівнянням з однорідною правою частиною*, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового степеня.

Рівняння

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (1.13)$$

є *однорідним рівнянням* тоді і тільки тоді, коли функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є однорідними функціями одного і того ж степеня.

Диференціальні рівняння вигляду (1.12) чи (1.13) зводяться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$u = \frac{y}{x},\ \ y = ux,\ \ y' = u + xu', \qquad (1.14)$$

де $u = u(x)$ – невідома функція.

Приклад 1.4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(y-x)ydx + x^2dy = 0.$$

Розв'язання.

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}.$$

Отримали диференціальне рівняння вигляду (1.12), у якому функція $f(x,y) = \dfrac{xy - y^2}{x^2}$ є однорідною функцією нульового степеня.

Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то використавши заміну (1.14), прийдемо до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}x = -u^2.$$

Відокремимо змінні, спершу помноживши рівняння на dx, а потім поділивши – на xu^2:

$$\frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо ліву та праву частини диференціального рівняння

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{dx}{x} + C$$

і отримаємо загальний інтеграл цього диференціального рівняння

$$-\frac{1}{u} = -\ln|x| + C .$$

Використовуючи заміну (1.14), отримаємо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння

$$\ln|x| - \frac{x}{y} = C.$$

Зауважимо те, що оскільки відбувалося ділення на xu^2, то $x = 0$ та $y = 0$ можливо будуть розв'язками вихідного диференціального рівняння. Підставивши у задане диференціальне рівняння $x = 0$, $y = 0$, матимемо тотожність. Отже, $x = 0$, $y = 0$ – частинний розв'язок вихідного диференціального рівняння.

Приклад 1.5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^2 + 2x^2 y' = xyy' .$$

Розв'язання.

Використовуючи те, що $y' = \frac{dy}{dx}$, матимемо

$$y^2 + 2x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx} .$$

Домножимо обидві частини рівняння на *dx*: $y^2\, dx + 2x^2 dy = xy\, dy$. Звідси $y^2\, dx + (2x^2 - xy) dy = 0$.

Це рівняння є однорідним диференціальним рівнянням типу (1.13). Тут функції $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = 2x^2 - xy$ мають степінь однорідності 2, тобто рівність (1.11) виконується при $n = 2$. Тоді поділимо обидві частини рівняння на x^2

$$\frac{y^2}{x^2}\, dx + (2 - \frac{y}{x}) dy = 0 .$$

Зробимо заміну (1.14), звідси $y = ux$, $dy = u\,dx + x\,du$. Тоді $u^2 dx + (2-u)(u\,dx + x\,du) = 0$. Таким чином, одержуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$2u\,dx + x(2-u)\,du = 0.$$

Відокремимо змінні, поділивши останнє рівняння на ux

$$2\frac{1}{x}\,dx + \frac{2-u}{u}\,du = 0.$$

Проінтегрувавши ліву та праву частини та підставивши заміну (1.14), одержуємо загальний інтеграл диференціального рівняння

$$2\ln|x| + 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x} = C.$$

Зауважимо те, що оскільки відбувалося ділення на xu, то $x = 0$ та $y = 0$ можливо будуть розв’язками вихідного диференціального рівняння. Підставивши у задане диференціальне рівняння $x = 0$, $y = 0$, матимемо тотожність тільки при $y = 0$. Отже, $y = 0$ – частинний розв’язок вихідного диференціального рівняння.

Приклад 1.6. Знайти розв’язок задачі Коші

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x},\ \ y(1) = 0.$$

Розв’язання.

Оскільки задане рівняння є диференціальним рівнянням з однорідною правою частиною, то використавши заміну (1.14), отримаємо диференціальне рівняння

$$u'x + u = e^{-u} + u$$

або рівняння

$$u'x = e^{-u}.$$

Відокремивши змінні, отримаємо рівняння

$$e^u du = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування отримуємо $e^u = \ln|Cx|$ або $u = \ln\ln|Cx|$.

Використовуючи (1.14), знайдемо загальний розв'язок вихідного однорідного диференціального рівняння

$$y = x\ln\left|\ln|Cx|\right|.$$

Визначимо сталу C з початкової умови $y(1)=0$. Маємо

$$y(1) = \ln\ln C = 0.$$

Тому $\ln C = 1$, а $C = e$. Отже розв'язок задачі Коші для вихідного диференціального рівняння з однорідною правою частиною має вигляд

$$y = \ln\left|\ln|ex|\right|.$$

1.5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та звідні до них

Лінійним диференціальним рівнянням називають рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1.15}$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – визначені функції.

Якщо в (1.15) $Q(x) \equiv 0$, то таке рівняння набирає вигляду

$$y' + P(x)y = 0, \tag{1.16}$$

яке називають *лінійним однорідним диференціальним рівнянням*. Якщо ж в (1.15) $Q(x) \neq 0$, то рівняння (1.15) називають *лінійним неоднорідним рівнянням*.

Розглянемо два методи розв'язування рівняння (1.15).

<u>I метод – метод варіації сталої (метод Лагранжа)</u>. Цей метод можна описати трьома кроками.

1 крок. Шукаємо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння, тобто (1.16), як диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' + P(x)y = 0,\ \frac{dy}{dx} = -P(x)y.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx,\ \int\frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx,$$

$$\ln y = -\int P(x)\,dx + \ln C.$$

Звідси

$$y_0 = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \qquad (1.17)$$

(1.17) – загальний розв'язок рівняння (1.16), де C – довільна стала.

2 крок. Методом варіації довільної сталої знаходимо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Він полягає у тому, що частинний розв'язок рівняння (1.15) будемо шукати у вигляді (1.17), тобто як розв'язок однорідного рівняння, але при цьому визначимо сталу C, як функцію від x. Тобто цю заміну сталої C на функцію від незалежної змінної $\varphi(x)$ називають *варіацією*, звідки назва методу

$$y_*(x) = \varphi(x)e^{-\int P(x)\,dx}. \qquad (1.18)$$

Вираз (1.18) продиференціюємо за змінною x

$$y_*'(x) = \varphi'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - e^{-\int P(x)\,dx}P(x)\cdot\varphi(x). \qquad (1.19)$$

Підставимо (1.19) та (1.18) в (1.15)

$$\varphi'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - e^{-\int P(x)\,dx}P(x)\cdot\varphi(x) + P(x)\cdot\varphi(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

$$\varphi'(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x).$$

Останнє рівняння – це диференціальне рівняння для функції $\varphi(x)$. Розв'яжемо його

$$\varphi'(x) = Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx},$$

$$\varphi(x) = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}dx + C_1.$$

Оскільки ми шукаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння, то можна покласти $C_1 = 0$. Знайдену функцію $\varphi(x)$ підставляємо в (1.18)

$$y_*(x) = \left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}dx\right)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}$$

та одержуємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.15).

3 крок. Записуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.15) як суму загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (1.16) та частинного розв'язку рівняння (1.15)

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} \cdot \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}\,dx\,.$$

<u>II метод – метод Бернуллі-Фур'є.</u> Він полягає у тому, що шукану функцію знаходитимемо у вигляді добутку двох довільних функцій $u(x)$ та $\upsilon(x)$, тобто

$$y = u(x) \cdot \upsilon(x)\,. \tag{1.20}$$

Оскільки обидві функції $u(x)$ та $\upsilon(x)$ залежать від змінної x, то при диференціюванні (1.20) використовуємо правило добутку похідної. Отже,

$$y' = u'(x) \cdot \upsilon(x) + \upsilon'(x) \cdot u(x)\,. \tag{1.21}$$

Підставимо (1.20) та (1.21) у рівняння (1.15)

$$u'(x) \cdot \upsilon(x) + \upsilon'(x) \cdot u(x) + P(x) \cdot u(x) \cdot \upsilon(x) = Q(x)\,.$$

Згрупуємо доданки із спільним множником $u(x)$ та винесемо його за дужки

$$u'(x) \cdot \upsilon(x) + u(x)\left[\upsilon'(x) + P(x) \cdot \upsilon(x)\right] = Q(x)\,. \tag{1.22}$$

Оскільки функція $\upsilon(x)$ довільна, то виберемо її так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, тобто

$$\upsilon'(x) + P(x) \cdot \upsilon(x) = 0\,.$$

З цього рівняння відокремлюючи змінні x та υ, знаходимо функцію $\upsilon(x)$. Далі знайдену функцію $\upsilon(x)$ підставляємо у рівняння (1.22), тобто

$$u'(x) \cdot \upsilon(x) = Q(x)\,.$$

Звідси, знову відокремлюючи змінні u та x, одержимо функцію $u = u(x) + C$, де C – довільна стала.

Тоді остаточно, підставивши функції u та υ в (1.20), одержуємо

$$y(x) = (u(x) + C) \cdot \upsilon(x)\,. \tag{1.23}$$

(1.23) – загальний розв'язок диференціального рівняння (1.15).

Приклад 1.7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' - \frac{2}{x} y = 2x^3 .$$

Розв'язання.

Розв'яжемо це диференціальне рівняння методом варіації сталої.

1 крок. Шукаємо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y' - \frac{2}{x} y = 0$. Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо його загальний розв'язок

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = 0 , \qquad \frac{dy}{y} - \frac{2}{x} dx = 0 , \qquad y_0 = x^2 C$$

де C – довільна стала.

2 крок. Шукаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3$ методом варіації сталої у вигляді $y_*(x) = \varphi(x) \cdot x^2$. Підставивши $y_*(x)$ у неоднорідне диференціальне рівняння (знайшовши перед цим похідну від $y_*(x)$), знаходимо невідому функцію $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) \cdot x^2 + 2x\varphi(x) - 2x\varphi(x) = 2x^3 , \quad \varphi'(x) = 2x , \quad \varphi(x) = x^2 .$$

Підставляючи знайдену функцію $\varphi(x)$ у вираз $y_*(x)$, записуємо частковий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y_*(x) = x^4$.

3 крок. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння матиме вигляд $y(x) = x^2 C + x^4$.

Приклад 1.8. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y' + y\,tg\,x = \frac{1}{\cos x} , \; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} .$$

Розв'язання.

Для знаходження загального розв'язку цього рівняння застосуємо метод Бернуллі-Фур'є, тобто будемо шукати розв'язок у вигляді (1.20). Тоді маємо

$$u'(x)\upsilon(x)+u(x)\left(\upsilon'(x)+\upsilon(x)\,tg\,x\right)=\frac{1}{\cos x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними, що перетворює в нуль вираз в дужках

$$\upsilon'(x)+\upsilon(x)\,tg\,x=0.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$\frac{d\upsilon(x)}{dx}=-\upsilon(x)\,tg\,x,\quad \frac{dv}{\upsilon(x)}=-tg\,x\,dx,\qquad \int\frac{dv}{\upsilon(x)}=-\int tg\,x\,dx,$$

$$\ln\left|\upsilon(x)\right|=\ln\left|\cos x\right|,\qquad \upsilon(x)=\cos x.$$

Підставляючи знайдену функцію $\upsilon(x)=\cos x$ у задане неоднорідне диференціальне рівняння, прийдемо до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $u(x)$, тобто

$$u'(x)\cos x=\frac{1}{\cos x}.$$

Відокремивши змінні та розв'язавши це рівняння, дістанемо

$$u(x)=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tg\,x+C.$$

Тоді

$$y(x)=u(x)\cdot\upsilon(x)=\left(tg\,x+C\right)\cos x.$$

Загальний розв'язок вихідного лінійного диференціального рівняння має вигляд

$$y(x)=\sin x+C\cos x,\ x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z.$$

Визначимо сталу C з умови Коші $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$. Маємо

$$\sin\frac{\pi}{4}+C\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}+C\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\Rightarrow C=1.$$

Тому розв'язок задачі Коші остаточно запишеться так:

$$y = \sin x + \cos x\,.$$

Розглянемо *рівняння, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь*.

Рівняння виду

$$y' = \frac{R(y)}{P(y)\cdot x + Q(y)},$$

де $R(y)$, $Q(y)$, $P(y)$, $R(y) \neq 0$ – визначені функції, можна звести до лінійного, але за умови, що функцією вважатимемо *x*, а *y* – аргументом (незалежною змінною).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R(y)}{P(y)\cdot x + Q(y)} \quad \text{(оскільки } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}\text{)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(y)\cdot x + Q(y)}{R(y)}, \quad x' = \frac{P(y)}{R(y)}\cdot x + \frac{Q(y)}{R(y)},$$

$$x' + \varphi(y)\cdot x = \psi(y), \qquad (1.24)$$

де $\varphi(y) = -\dfrac{P(y)}{R(y)}$; $\psi(y) = \dfrac{Q(y)}{R(y)}$.

Рівняння (1.24) – лінійне диференціальне рівняння, але відносно функції $x(y)$ та аргументу *y*. Рівняння (1.24) можна розв'язувати як методом варіації сталої (врахувавши, що на другому кроці невідома функція $\varphi = \varphi(y)$), так і методом Бернуллі-Фур'є (зробивши заміну: $x = u(y)\cdot \upsilon(y)$).

Приклад 1.9. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(2e^{y} - x)y' = 1.$$

Розв'язання.

Використовуючи те, що $y' = \dfrac{1}{x'}$, одержуємо рівняння $x' + x = 2e^{y}$, де $x = x(y)$, y – незалежна змінна.

Розв'яжемо останнє рівняння методом Бернуллі-Фур'є. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох функцій $x(y) = u(y)\cdot\upsilon(y)$. Підставимо його у рівняння

$$u'(y)\cdot\upsilon(y) + u(y)\left[\upsilon'(y) + \upsilon(y)\right] = 2e^{y}.$$

Знайдемо функцію $\upsilon(y)$ з рівняння $\upsilon'(y) + \upsilon(y) = 0$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо $\upsilon(y) = C\cdot e^{-y}$. Беручи $C = 1$, матимемо $\upsilon(y) = e^{-y}$.

Підставимо функцію $\upsilon(y)$ у диференціальне рівняння для знаходження функції $u(y)$

$$u'(y)\cdot e^{-y} = 2e^{y}, \qquad u'(y) = 2e^{2y}, \quad u(y) = e^{2y} + C.$$

Знайдені функції $u(y)$ та $\upsilon(y)$ підставляємо у вираз $x(y) = u(y)\cdot\upsilon(y)$ та записуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$x(y) = e^{-y}\cdot(e^{2y} + C).$$

Рівняння виду

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{\alpha}, \ \alpha \in R\setminus\{0;1\}, \qquad (1.25)$$

називають *рівнянням Бернуллі*.

Очевидно, що при $\alpha = 0$ рівняння (1.25) – це лінійне диференціальне рівняння, а при $\alpha = 1$ – це рівняння з відокремлюваними змінними. За умови, що $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $y \neq 0$ поділимо (1.25) на y^{α}

$$y^{-\alpha}y' + P(x)\cdot y^{1-\alpha} = Q(x). \qquad (1.26)$$

Введемо, заміну $y^{1-\alpha} = Z$. Тоді

$$\left(y^{1-\alpha}\right)' = Z' \Rightarrow (1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}y' = Z' \Rightarrow y^{-\alpha}y' = \frac{Z'}{1-\alpha}.$$

Підставляємо в (1.26) та одержуємо

$$\frac{Z'}{1-\alpha} + P(x)\cdot Z = Q(x). \qquad (1.27)$$

Останнє рівняння – це лінійне диференціальне рівняння відносно нової змінної Z. Зауважимо, що при $\alpha > 0$ рівняння

(1.25) має тривіальний розв’язок $y=0$. Хоча на практиці необов’язково перетворювати рівняння Бернуллі до виду (1.27), а зразу ж інтегрувати методом Лагранжа (варіацій сталої) або методом Бернуллі-Фур’є, тобто як лінійне диференціальне рівняння.

Приклад 1.10. Розв’язати рівняння Бернуллі

$$y'+2y=y^2e^x .$$

Розв’язання.

Розв’яжемо останнє рівняння методом Бернуллі-Фур’є. Шукаємо розв’язок рівняння у вигляді (1.20), тобто $y=u(x)\cdot \upsilon(x)$. Підставимо його у рівняння

$$u'(x)\cdot \upsilon(x)+u(x)\left[\upsilon'(x)+2\upsilon(x)\right]=\upsilon^2(x)\cdot u^2(x)\cdot e^x .$$

Знайдемо функцію $\upsilon(x)$ з рівняння $\upsilon'(x)+2\upsilon(x)=0$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо $\upsilon(x)=C\cdot e^{-2x}$. Беручи $C=1$, матимемо $\upsilon(x)=e^{-2x}$.

Підставимо функцію $\upsilon(x)$ у диференціальне рівняння для знаходження функції $u(x)$:

$$u'(x)\cdot e^{-2x}=e^{-4x}\cdot u^2(x)\cdot e^x, \quad u'(x)=e^{-x}\cdot u^2(x), \qquad u(x)=\frac{1}{e^{-x}+C} .$$

Знайдені функції $u(x)$ та $\upsilon(x)$ підставляємо у вираз (1.20) та записуємо загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y(x)=u(x)\cdot \upsilon(x)=\frac{e^{-2x}}{e^{-x}+C} .$$

Зауважимо, що $y=0$ є частинним розв’язком вихідного рівняння.

1.6. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Рівняння виду

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0, \tag{1.28}$$

ліва частина якого є повним диференціалом деякої функції двох змінних, тобто існує функція $F(x,y)$ така, що

$$dF = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{1.29}$$

називають *рівнянням в повних диференціалах*.

З умови (1.29) випливає, що

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y). \end{cases} \tag{1.30}$$

Рівняння (1.28) є рівнянням у повних диференціалах тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{1.31}$$

Розв'язком рівняння в повних диференціалах (1.28) є загальний інтеграл виду $F(x,y) = C$, C – довільна стала.

З'ясуємо шлях відшукання загального інтегралу $F(x,y) = C,$ що є повним диференціалом.

Перевіряємо чи рівняння (1.28) є рівнянням в повних диференціалах, тобто чи виконується умова (1.31). Далі знаходимо функцію $F(x,y)$, використовуючи систему (1.30).

Розглянемо одне з рівнянь системи (1.30), наприклад перше, яке проінтегруємо за змінною x і одержимо

$$F = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{1.32}$$

де функція $\varphi(y)$ – залежить лише від y. Щоб визначити $\varphi(y)$ підставляємо (1.32) в друге рівняння системи (1.30), для цього продиференціюємо (1.32) за змінною y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \varphi'(y).$$

Тоді $Q(x,y) = \int \dfrac{\partial P}{\partial y}\,dx + \varphi'(y)$. Враховуючи умови (1.31), останнє рівняння перепишеться так: $Q(x,y) = \int \dfrac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \varphi'(y)$. Це диференціальне рівняння лише відносно змінної y. Проінтегрувавши його, ми знайдемо функцію $\varphi(y)$. Далі знайдену функцію $\varphi(y)$ підставляємо в (1.32) та записуємо загальний інтеграл рівняння (1.28): $F(x,y)=C$.

Приклад 1.11. Розв'язати диференціальне рівняння

$$2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0.$$

Розв'язання.

Перевіримо виконання умов (1.31): $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x$. Оскільки умови (1.31) виконуються, то задане диференціальне рівняння являється рівнянням у повних диференціалах. Складемо систему (1.30), з якої знайдемо розв'язок рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=2xy, \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x^2-y^2. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо $F(x,y)=\int 2xy\,dx+\varphi(y)=yx^2+\varphi(y)$. Підставляючи цей вираз у друге рівняння системи матимемо $x^2+\varphi'(y)=x^2-y^2$. Звідси $\varphi(y)=-\dfrac{y^3}{3}$. Таким чином, $F(x,y)=yx^2-\dfrac{y^3}{3}$, а загальний інтеграл вихідного рівняння –

$$yx^2-\frac{y^3}{3}=C.$$

Інтегруючий множник $\mu(x,y)$ – це функція, яка після множення на неї диференціального рівняння, перетворює його в рівняння у повних диференціалах, тобто

$$P(x,y)\cdot\mu(x,y)\,dx+Q(x,y)\cdot\mu(x,y)\,dy=0\,.$$

Останнє рівняння з інтегруючим множником – це рівняння у повних диференціалах.

Як знаходити інтегруючий множник? Загального методу немає, він знаходиться в окремих випадках. Згідно з (1.31), маємо

$$\frac{\partial(P(x,y)\cdot\mu(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial Q((x,y)\cdot\mu(x,y))}{\partial x}\,.$$

Враховуючи правила диференціювання добутку двох функцій, маємо

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial\mu}{\partial x}\,.$$

Далі

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$\frac{P}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{Q}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

Звідси

$$\frac{P\cdot\partial\ln\mu}{\partial y}-\frac{Q\cdot\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,. \qquad (1.33)$$

З (1.33) треба знайти μ, а для того треба знайти частинний розв’язок (1.33). Але (1.33) – це диференціальне рівняння з частинними похідними відносно функції μ. В загальному, знайти μ з (1.33) складніше, ніж розв’язання самого рівняння (1.28). Але можна задачу відшукання μ спростити, якщо розглянути функцію μ або лише від *x* або лише від *y*.

Наприклад, нехай $\mu=\mu(y)$ – функція від змінної *y*.

Тоді $P\dfrac{d\ln\mu}{dy}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$, або $\dfrac{d\ln\mu}{dy}=\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$, тобто

$$d\ln\mu=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy\,. \qquad (1.34)$$

Звідси знайдемо $\ln\mu$, а потім μ. Але це можливо за умови, коли вираз $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$ є функцією лише від змінної *y*. Аналогічно, якщо вираз $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ залежить лише від змінної *x*, то $\ln\mu$ та потім μ знаходимо з рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{1.35}$$

Отже, формули (1.34) та (1.35) дають змогу знаходити інтегруючий множник, але якщо він є функцією від *y* або *x*.

Приклад 1.12. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x+\sin y)\,dx+\cos y\,dy=0.$$

Розв'язання.

Перевіримо умову (1.31), виконання якої гарантує, що це рівняння буде рівнянням у повних диференціалах. Оскільки $\dfrac{\partial(x+\sin y)}{\partial y}=\cos y$ та $\dfrac{\partial(\cos y)}{\partial x}=0$, то рівність (1.31) не виконується, тому це рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо інтегруючий множник. Припустимо, що існує функція $\mu=\mu(x)$. Множимо на μ ліву та праву частини диференціального рівняння

$$\mu(x)\cdot(x+\sin y)\,dx+\mu(x)\cdot\cos y\,dy=0.$$

Функцію $\mu(x)$ знаходимо з умови (1.31), тобто

$$\frac{\partial(\mu(x)\cdot(x+\sin y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x)\cdot\cos y)}{\partial x}.$$

Звідси $\mu'-\mu=0$, тобто $\mu(x)=Ce^{x}$. Беручи $C=1$, знаходимо інтегруючий множник $\mu(x)=e^{x}$. Таким чином, помноживши це диференціальне рівняння на функцію $\mu(x)=e^{x}$, одержуємо диференціальне рівняння в повних диференціалах.

Складемо систему (1.30) відносно функції

$$F(x,y):\ \begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = e^x \cdot (x+\sin y), \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^x \cdot \cos y. \end{cases}$$

Інтегруємо друге рівняння системи відносно змінної y:
$\int \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = \int e^x \cdot \cos y\,dy + \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – деяка невідома функція відносно змінної x (оскільки інтегрування відбувалося по змінній y). Звідси $F(x,y) = e^x \cdot \sin y + \varphi(x)$. Отриманий вираз підставляємо у перше рівняння системи, продиференціювавши по змінній x: $e^x \cdot \sin y + \varphi'(x) = e^x \cdot (x+\sin y)$. Звідси $\varphi'(x) = e^x \cdot x$. Для того щоб знайти функцію $\varphi(x)$, проінтегруємо останню рівність по змінній x. Матимемо $\int \varphi'(x)\,dx = \int e^x \cdot x\,dx$. Звідси використовуючи метод інтегрування частинами, одержуємо $\varphi(x) = \int e^x \cdot x\,dx = e^x \cdot x - e^x$. Підставляючи $\varphi(x)$ у вираз для функції $F(x,y)$, записуємо розв'язок заданого диференціального рівняння $e^x \cdot \sin y + e^x \cdot x - e^x = C$.

Приклад 1.13. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^2(x-3y)\,dx + (1-3xy^2)\,dy = 0.$$

Розв'язання.

Перевіримо умову (1.31), виконання якої гарантує, що це рівняння буде рівнянням у повних диференціалах. Оскільки $\dfrac{\partial(xy^2-3y^3)}{\partial y} = 2xy - 9y^2$ та $\dfrac{\partial(1-3xy^2)}{\partial x} = -3y^2$, то рівність (1.31) не виконується, тому це рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо інтегруючий множник. Припустимо, що існує функція $\mu = \mu(y)$. Множимо на μ ліву та праву частини диференціального рівняння

$$\mu(y) \cdot y^2(x-3y)\,dx + \mu(y) \cdot (1-3xy^2)\,dy = 0.$$

Функцію $\mu(y)$ знаходимо з умови (1.31), тобто

$$\frac{\partial(\mu(y)\cdot y^2(x-3y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(y)\cdot(1-3xy^2))}{\partial x}.$$

Звідси $y\mu'+2\mu=0$, тобто $\mu(y)=\frac{C}{y^2}$. Беручи $C=1$, знаходимо інтегруючий множник $\mu(x)=\frac{1}{y^2}$. Таким чином, помноживши це диференціальне рівняння на функцію $\mu(x)=\frac{1}{y^2}$, одержуємо диференціальне рівняння в повних диференціалах. Складемо систему (1.30) відносно функції

$$F(x,y):\ \begin{cases}\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=x-3y\,,\\[2mm] \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\dfrac{1-3xy^2}{y^2}.\end{cases}$$

Інтегруємо перше рівняння системи відносно змінної x: $\int\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx=\int(x-3y)\,dx+\varphi(y)$, де $\varphi(y)$ – деяка невідома функція відносно змінної y (оскільки інтегрування відбувалося по змінній x). Звідси $F(x,y)=\frac{x^2}{2}-3yx+\varphi(y)$. Отриманий вираз підставляємо у друге рівняння системи, продиференціювавши по змінній y: $-3x+\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}-3x$. Звідси $\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}$. Для того щоб знайти функцію $\varphi(y)$, проінтегруємо останню рівність по змінній y. Матимемо $\int\varphi'(y)\,dy=\int\frac{1}{y^2}dy$. Звідси $\varphi(y)=-\frac{1}{y}$. Підставляючи $\varphi(y)$ у вираз для функції $F(x,y)$, записуємо розв'язок заданого диференціального рівняння $\frac{x^2}{2}-3yx-\frac{1}{y}=C$.

Якщо диференціальне рівняння (1.28) не є рівнянням в повних диференціалах і досить складно знайти інтегруючий множник (наприклад, інтегруючий множник залежить від двох змінних x та y), тоді треба провести деякі перетворення так, щоб отримати повний диференціал від деякої функції, тобто $dF(x, y) = 0$. Тоді розв'язок диференціального рівняння матиме вигляд $F(x, y) = C$. При цьому слід використовувати такі формули:

$d\left(x^2\right) = 2x\,dx$;

$d(x \cdot y) = x \cdot dy + y \cdot dx$;

$d\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}$;

$d\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2}$;

$d(\ln x) = \dfrac{1}{x}\,dx$.

Такий метод розв'язування диференціальних рівнянь називається *методом виділення повного диференціала*.

Приклад 1.14. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right) dy = 0.$$

Розв'язання.

Це диференціальне рівняння не справджує умову (1.31). Дійсно, оскільки $\dfrac{\partial\left(1 + \dfrac{y}{x^2}\right)}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2y}{x^2}\right)}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4y}{x^3}$, то рівність (1.31) не виконується, тому це рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Помножимо диференціальне рівняння на функцію x^2:

$(x^2 + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$, $\qquad x^2 dx + y\,dx + x\,dy + 2y\,dy = 0$.

Використовуючи формули, наведені вище, одержуємо

$$d\left(\frac{x^3}{3}+xy+y^2\right)=0.$$

Таким чином, виділено повний диференціал і загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{x^3}{3}+xy+y^2=C$. Зауважимо, що якщо в цьому рівнянні брати за інтегруючий множник функцію $\mu(x)=x^2$, то після домноження на неї, це рівняння стає рівнянням у повних диференціалах.

Приклад 1.15. Розв'язати диференціальне рівняння

$$dx+(x+e^{-y}\cdot y^2)\,dy=0.$$

Розв'язання.

Це диференціальне рівняння не справджує умову (1.31). Дійсно, $\frac{\partial(1)}{\partial y}=0$, $\frac{\partial(x+e^{-y}\cdot y^2)}{\partial x}=1$, то рівність (1.31) не виконується, тому це рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Помножимо диференціальне рівняння на функцію e^y:

$$e^y dx+e^y x dy+y^2\,dy=0\ .$$

Використовуючи формули, наведені вище, одержуємо

$$d(x\cdot e^y+\frac{y^3}{3})=0.$$

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння $x\cdot e^y+\frac{y^3}{3}=C$. Інтегруючим множником для цього диференціального рівняння буде функція $\mu(y)=e^y$, після домноження на яку це рівняння стає рівнянням у повних диференціалах.

Приклад 1.16. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^2 dx - (xy + x^2)\, dy = 0.$$

Розв’язання.

Це диференціальне рівняння не справджує умову (1.31). Оскільки, $\frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial(-xy - x^2)}{\partial x} = -y - 2x$, то рівність (1.31) не виконується, тому це рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Поділимо диференціальне рівняння на функцію *x*:

$$\frac{y^2}{x} dx - (y + x)\, dy = 0.$$

Біля диференціала dy знаходиться змінна *x*. Поділимо останнє рівняння на *x*

$$\frac{y^2}{x^2} dx - \frac{y}{x} dy + dy = 0.$$

Біля диференціала dx знаходиться змінна *y*. Спочатку поділимо останнє рівняння на *y*

$$\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy + \frac{1}{y} dy = 0, \qquad \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{x^2} + \frac{1}{y} dy = 0.$$

Використовуючи формули, наведені вище, одержуємо

$$d\left(-\frac{y}{x} - \ln y\right) = 0.$$

Таким чином, загальний розв’язок диференціального рівняння $\frac{y}{x} + \ln y = C$. Зауважимо, що оскільки відбувалося ділення на $x^2 y$, то при підстановці $x = 0$ та $y = 0$ у задане рівняння, одержуємо ще два частинних розв’язки цього рівняння: $x = 0$ та $y = 0$.

Інтегруючим множником для цього диференціального рівняння буде функція $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 y}$, після домноження на яку, це рівняння стає рівнянням у повних диференціалах.

Теоретичні питання

1. Дати визначення диференціального рівняння.
2. Що називають порядком диференціального рівняння?
3. Що називають розв'язком диференціального рівняння?
4. Дати визначення диференціального рівняння першого порядку.
5. Сформулювати теорему Коші.
6. Що називають загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку?
7. Дати визначення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
8. Яку функцію називають однорідною степеня n?
9. Дати визначення диференціального рівняння з однорідною правою частиною.
10. За допомогою якої заміни змінних однорідного диференціального рівняння зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними?
11. Дати визначення лінійного диференціального рівняння.
12. За яких умов лінійне диференціальне рівняння називають однорідним (неоднорідним)?
13. Описати метод варіації сталої знаходження розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
14. Описати метод Бернуллі-Фур'є знаходження розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
15. Дати визначення рівняння Бернуллі.
16. За допомогою якої заміни змінних рівняння Бернуллі зводиться до лінійного диференціального рівняння?
17. Дати визначення диференціального рівняння в повних диференціалах.
18. Що називають розв'язком рівняння в повних диференціалах?
19. Описати схему знаходження розв'язку рівняння в повних диференціалах.
20. Що називають інтегруючим множником? Як знаходити інтегруючий множник?

21. Описати метод виділення повного диференціалу.

Завдання для самостійної роботи

I. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $(x^2+1)y' - 2xy = 0$;
2. $y^2 + x \cdot \ln x\, y' = 0$;
3. $2x^2 y \cdot y' + y^2 - 2 = 0$;
4. $\frac{1}{y} \cdot \sin(2x+1) + 2e^{y^2} \cdot y' = 0$;
5. $2y \cdot \sin\frac{1}{x^2} + x^3 y' = 0$;
6. $\ln y \cdot y' - \frac{y}{x} = 0$;
7. $\frac{1}{\sin x^3} y' - 3x^2 = 0$;
8. $\sqrt{y^2+1} - xy\, y' = 0$;
9. $2x + e^{x^2} yy' = 0$;
10. $\frac{1}{\cos x^4} y' + 4x^3 = 0$;
11. $2x - y^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\, y' = 0$;
12. $5^{x^2} y' + x = 0$;
13. $\frac{1}{3x^2} y' + e^{x^3} = 0$;
14. $2x\, y' + \sin^2 y \cdot tg\, y = 0$;
15. $\cos\frac{1}{x} - \frac{3x^2}{y} y' = 0$;
16. $(1+e^x)y' + e^x y = 0$;
17. $x^3 \cos^2\frac{1}{x^2} y' - y^2 = 0$;
18. $\frac{e^{\sin x}}{y} y' - \cos x = 0$;
19. $\sin^2\frac{1}{x} \cdot y' - \frac{1}{x^2} = 0$;
20. $e^{tg\, x} y' - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$;
21. $y - x \cdot (1+\ln y)y' = 0$;
22. $(1+x^3)y' - 2x^2 tg\, y = 0$;
23. $\frac{1}{x^2} y' - 3(y^2+1) \cdot tg\, x^3 = 0$;
24. $\sin\frac{1}{x} - x^2 y' = 0$;
25. $2yy' + \sqrt{y^2-1} \cdot \sin 3x = 0$;
26. $xy' - \ln x \cdot e^y = 0$;
27. $(1+x^3)^5 y' + 3x^2 y = 0$;
28. $x^3 \cdot y + \frac{1}{4}(1+x^4) \cdot y' = 0$;
29. $e^{-x^2} \cos^2 y + \frac{1}{x} \cdot y' = 0$;
30. $y^2 \cdot x^2 - \frac{1}{3}\sin^2 x^3 \cdot y' = 0$.

II. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

1. $y' = y \cdot ctgx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^2$;
2. $y' = \frac{e^x + 2}{e^y}$, $y(0) = 0$;
3. $x(1 + y) = y'$, $y(0) = 4$;
4. $y' - xy = 0$, $y(2) = 1$;
5. $\frac{2x}{y} = 3y'$, $y(3) = 2$;
6. $y' = e^x \cos^2 y$ $y(0) = 0$;
7. $y' = y \cdot \sin x$, $y(0) = 1$;
8. $y' = y \cdot tg\, x$ $y(0) = 1$;
9. $y' = y \cdot \cos x$, $y(0) = 1$;
10. $y' = (9 + y^2)x$, $y(2) = 0$;
11. $(1 + x^2)y' = 1$, $y(0) = 1$;
12. $xy' = y^2$, $y(e) = \frac{3}{2}$;
13. $y'(x + 4) = y$, $y(1) = 5$;
14. $1 + \frac{y}{e^x} y' = 0$, $y(0) = 2$;
15. $y' - \frac{ctgx}{y} = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$;
16. $xy' = e^y$, $y(1) = 0$;
17. $y' = 3y^2 x$, $y(2) = 1$;
18. $xy' = ctgy$, $y(1) = 0$;
19. $y' = (4 + y^2)x$, $y(1) = 0$;
20. $xy' = y$ $y(1) = e$;
21. $xy' + y^3 = 0$, $y(2) = e$;
22. $yy' = -2x$, $y(1) = 2$;
23. $y' = x(y - 1)$, $y(0) = 2$;
24. $y' \cdot 3^{x+y} = 1$, $y(-1) = 1$;
25. $tg\, x \cdot y' = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$;
26. $\frac{\sin x}{y} + y' = 0$, $y(0) = 2$;
27. $\frac{\cos x}{y^3} + y' = 0$, $y(0) = 1$;
28. $\frac{2}{4 + e^x} y' = \frac{1}{y}$, $y(0) = 2$;
29. $e^{x+y} y' = 1$ $y(0) = 0$;
30. $x^2 y' = 9 + y^2$, $y(1) = 0$.

III. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння з однорідною правою частиною першого порядку:

1. $xy' - y = x\cos^2 \frac{y}{x}$, $y(3) = 0$;

2. $xy' = y(3 + \ln y - \ln x)$, $y(1) = \frac{1}{e}$;

3. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$, $y\left(\frac{1}{e}\right) = 0$;

4. $2x^3 y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$, $y(1) = 1$;

5. $xy'(\ln y - \ln x) = y$, $y(e) = e^3$;

6. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$, $y(1) = 1$;

7. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$, $y(1) = e$;

8. $5\sqrt{xy} - y + xy' = 0$, $y(1) = 25$;

9. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$, $y(1) = e^2$;

10. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 2$;

11. $(x^2 + xy)y' = x^2 + xy + y^2$, $y(1) = 2$;

12. $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$, $y(e) = 1$;

13. $xy' = y + x\sin\frac{2y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$;

14. $xy' = y + x\cos\frac{2y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$;

15. $y^2 - 2xy = x^2 y'$, $y(1) = -\frac{3}{7}$;

16. $x^2 y' = y^2 + 6xy + 6x^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$;

17. $2x - 3y + xy' = 0$, $y(1) = -1$;

18. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$, $y(1) = 0$;

19. $xy^2 y' = x^2 + y^2$, $y(1) = \sqrt[3]{7}$;

20. $xy' - y = x\,tg\,\dfrac{y}{x}$, $y(1) = \dfrac{\pi}{6}$;

21. $x^2 y' + y^2 = 2xy$, $y(1) = 2$;

22. $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y\sin\dfrac{y}{x}$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;

23. $2x + y + (x + 2y)y' = 0$, $y(1) = 1$;

24. $y + 2(\sqrt{xy} - x)y' = 0$, $y(1) = 1$;

25. $xy' = y\left(\sin\ln\dfrac{y}{x} + 1\right)$, $y(1) = e^{\frac{\pi}{2}}$;

26. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1) = e$;

27. $xy' - y = 2x\cdot ctg\,\dfrac{y}{x}$, $y(1) = \pi$;

28. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$, $y(1) = -1$;

29. $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$, $y(1) = 1$;

30. $(xy' - y)ctg\,\dfrac{y}{x} = x$, $y(1) = \dfrac{\pi}{6}$.

IV. Знайти розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку:

1. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\ln x}{x^3}$, $y(1) = 1$;

2. $y' - \dfrac{2}{x}y = -\dfrac{1}{\sin^2\frac{1}{x}}$, $y\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = \dfrac{4}{\pi^2}$;

3. $y' + 2ctg\;x\cdot y = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

4. $y' + \dfrac{3x^2}{x^3 + 1}\cdot y = (x^3 + 1)^{-1}$, $y(0) = 1$;

5. $y' - \frac{2}{x} y = -\cos\frac{1}{x}$, $y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2}$;

6. $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2$, $y(0) = 1$;

7. $y' + y \cdot tg\ x = \cos^2 x$, $y(0) = 1$;

8. $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^3+1}$, $y(1) = \frac{1}{3}\ln 2 + 1$;

9. $y' - \frac{1}{x+1} y = \ln^2(x+1)$, $y(0) = 1$;

10. $y' + y \cdot tg\ x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$;

11. $y' + y\left(tg\ x + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\cos x}$, $y(\pi) = -\frac{1}{\pi}$;

12. $y' - 2xy = 2xe^{2x^2}$, $y(0) = 2$;

13. $y' + \frac{1}{2} y = 2e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{\ln x}{x}$, $y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$;

14. $y' - \frac{1}{x} y = -\ln x$, $y(1) = 1$;

15. $y' - \frac{2}{x} y = tg\frac{1}{x}$, $y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2}$;

16. $y' - \frac{2}{x+1} y = -\ln\frac{1}{x+1}$, $y(0) = 0$;

17. $y' + \frac{1}{x} y = 3x \cdot \ln x^3$, $y(1) = 2$;

18. $y' + \frac{e^x}{e^x+1} y = 1$, $y(0) = 1$;

19. $y' - \frac{1}{x} y = 3x^3 \cos x^3$, $y(\sqrt[3]{\pi}) = \sqrt[3]{\pi}$;

20. $y' + y \cdot \sin x = \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$;

21. $y' + \frac{1}{x+4} y = \frac{1}{(x+4)^2}, \; y(-3) = 5;$

22. $y' - \frac{2x}{x^2+1} y = \frac{1+x^2}{x}, \; y(1) = 2;$

23. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, \; y\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi};$

24. $y' + y \cdot \cos x = \cos x, \; y(0) = 2;$

25. $y' - y\,ctg\ x = 2x\sin x, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1;$

26. $y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x^2} \cdot \ln x, \; y(1) = 1;$

27. $y' - y \cdot \sin x = -\sin x \cdot e^{\cos x}, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2};$

28. $y' - \frac{2x}{x^2-1} \cdot y = x - 1, \; y(0) = -1;$

29. $y' - \frac{1}{x-1} \cdot y = \frac{2x}{x+1}, \; y\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1;$

30. $y' + 2x \cdot y = -2x \cdot e^{x^2}, \; y(0) = \frac{1}{2}.$

V. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння Бернулі:

1. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2;$
2. $xy' + y = y^2 \ln x;$
3. $yy' - 4x = y^2\sqrt{x};$
4. $y' + xy = (x-1)e^x y^2;$
5. $y' + 2y = y^2 x^2;$
6. $3xy' - 2y = \frac{x^2}{y^3};$
7. $xy' + y = 2y^2 \ln x;$
8. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2};$
9. $y' + 2\frac{y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}};$
10. $3xy' + 5y = (4x-5)y^4;$
11. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^2;$
12. $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^2;$

13. $\dfrac{2xy' - 3y}{y^2} = -20x^2 - 12$;

14. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1}$;

15. $xy^2y' = x^2 + y^3$;

16. $3y' = (1 - 3y^2)y\sin x$;

17. $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2 - 1}$;

18. $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^3$;

19. $8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$;

20. $yy' - 4x - y^2\sqrt{x} = 0$;

21. $(y\ln x - 2)y = xy'$;

22. $y' + 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

23. $y' - 8x\sqrt{y} = \dfrac{4xy}{x^2 - 1}$;

24. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$;

25. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3)$;

26. $xy' + 2y + x^2y^3e^x = 0$;

27. $xy' + y = \dfrac{1}{2}xy^2$;

28. $yy' + \dfrac{1}{2}y^2 = \sin x$;

29. $y'(x-1) - y = y^2$;

30. $y' - y\,tgx = -\dfrac{2}{3}y^4\sin x$.

VI. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

1. $(2x^2y^3 - y)dx + (2x^3y^2 - x)dy = 0$;
2. $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$;
3. $(2x + y^2)dx + (2yx + 5)dy = 0$;
4. $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$;
5. $\left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0$;
6. $(3x^2y^2 + 2y^2 + 6xy)dx + (2x^3y + 4xy + 3x^2)dy = 0$;
7. $\left(2xy + y^2 + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x^2 + 2xy + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$;
8. $(3x^2y + 2xy^2 + 2y + 3y^2)dx + (x^3 + 2x^2y + 2x + 6xy)dy = 0$;

9. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$;

10. $(4x^3y+y^4+e^{x+y})dx+(x^4+4xy^3+e^{x+y})dy=0$;

11. $(2\cos 2x+4y)dx+(4x-2\sin 2y)dy=0$;

12. $2x(1-3y^2)dx+2y(2y^2-3x^2)dy=0$;

13. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$;

14. $(\sin y+2xy^2)dx+(x\cos y+2x^2y)dy=0$;

15. $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$;

16. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0$;

17. $(2x-3y)dx+(2y-3x)dy=0$;

18. $(3x^2y+8xy^2+2y+3y^2)dx+(x^3+8x^2y+2x+6xy)dy=0$;

19. $-\dfrac{y}{x^2}dx+\dfrac{1}{x}dy=0$;

20. $\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}dy=0$;

21. $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 xdy=0$;

22. $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$;

23. $(\cos x+3x^2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$;

24. $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$;

25. $(\cos y+y\cos x)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0$;

26. $\left(2x+y-\dfrac{4}{x}\right)dx+\left(2y+x-\dfrac{10}{y}\right)dy=0$;

27. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$;

28. $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$;

29. $\dfrac{1}{y^2}dx-\dfrac{2x}{y^3}dy=0$;

30. $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$.

§2. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Основні поняття про диференціальні рівняння вищих порядків

Рівняння виду

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.1)$$

називають *диференціальним рівнянням n-го порядку* (*неявним диференціальним рівнянням n-го порядку*), де x – незалежна змінна, $y = y(x)$ – шукана функція, F – функція, що зв'язує змінні x, y та похідні функції $y(x)$.

Рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2.2)$$

називають *диференціальним рівнянням, розв'язаним явно відносно n-ої похідної (нормальним диференціальним рівнянням n-го порядку)*.

Розв'язком диференціального рівняння (2.2) на деякому інтервалі (a, b) називають n разів неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію $\varphi(x)$, яка після підстановки її у рівняння (2.2) перетворює його в тотожність за $x \in (a, b)$.

Умови

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (2.3)$$

називають *початковими умовами* рівнянь (2.1) або (2.2).

Початкові умови (2.3) можна записати також у вигляді

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Сформулюємо задачу Коші для рівняння (2.2): серед усіх розв'язків рівняння (2.2) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, який при $x = x_0 \in (a, b)$ справджує початкові умови (2.3)
.

Теорема Коші (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші). *Якщо функція $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ і її частинні похідні по аргументах y, y', …, $y^{(n-1)}$ неперервні в деякій відкритій області*

$G \subset R^{n+1}$, *то для довільної точки* $(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}) \in G$ *існує єдиний розв'язок* $y = y(x)$ *рівняння* (2.2), *що задовольняє початкові умови* (2.3).

Функцію

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \dots, C_n\right) \tag{2.4}$$

називають *загальним розв'язком рівняння* (2.2), якщо вона має такі властивості:

а) є розв'язком цього рівняння для довільних значень сталих C_1, C_2, …, C_n з деякої множини простору R^n;

б) для довільної точки $(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)})$ з деякої множини простору R^{n+1} існують такі значення сталих C_1^0, C_2^0, …, C_n^0, для яких розв'язок $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0\right)$ задовольняє початкові умови (2.3).

Загальний розв'язок рівняння (2.2), записаний в неявному вигляді

$$\Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0\,, \tag{2.5}$$

називають *загальним інтегралом рівняння* (2.2).

Частинний розв'язок (або *частинний інтеграл*) знаходимо із загального (2.4) (чи (2.5)), якщо у цій рівності кожній довільній сталій C_1, C_2, …, C_n надати конкретне числове значення.

2.2. Види диференціальних рівнянь вищих порядків та знаходження їх розв'язків

Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченого числа інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то кажуть, що *диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах (або зводиться до квадратур).* Зрозуміло, що диференціальне рівняння *n*-го порядку інтегруватися в квадратурах буде не завжди, за винятком лише деяких класів диференціальних рівнянь. Наведемо класи таких рівнянь.

I) Розглянемо рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2.6}$$

де $f(x)$ – задана неперервна функція, яка інтегрується в квадратурах.

Запишемо (2.6) у вигляді

$$\frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{dx} = f(x), \quad d\left(y^{(n-1)}\right) = f(x)dx.$$

Інтегруючи останню рівність, одержуємо $y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1$, де C_1 – стала інтегрування. Далі знайдемо

$$\frac{d\left(y^{(n-2)}\right)}{dx} = \left(\int f(x)\,dx + C_1\right), \qquad d(y^{(n-2)}) = \left(\int f(x)\,dx + C_1\right)dx.$$

Звідки $y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1 x + C_2$, де C_2 – стала інтегрування.

Після *n*-го кроку інтегрування, одержуємо

$$y = \int\left(....\int\left(\int f(x)dx\right)dx...\right)dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + ... + C_n, \tag{2.7}$$

де C_1, C_2, …, C_n – сталі інтегрування; (2.7) – загальний розв’язок рівняння (2.6).

Приклад 2.1. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y^{(4)} = \cos x.$$

Розв’язання.

Запишемо диференціальне рівняння у вигляді

$$\frac{d\left(y^{(3)}\right)}{dx} = \cos x, \qquad d\left(y^{(3)}\right) = \cos x\,dx.$$

Інтегруючи останню рівність, матимемо $y^{(3)} = \sin x + C_1$. Звідси запишемо $\dfrac{dy''}{dx} = \sin x + C_1$, тобто $d\left(y''\right) = (\sin x + C_1)\, dx$. Тоді $y'' = -\cos x + C_1 x + C_2$. Проводячи подібні міркування, матимемо $y' = -\sin x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$. Загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння матиме вигляд

$$y = \cos x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

II) Розглянемо рівняння виду

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{2.8}$$

Припустимо, що рівняння (2.8), яке записане в неявній формі, звести до вигляду (2.6) не можна. Нехай рівняння (2.8) можна розв'язати відносно змінної x

$$x = f(y^{(n)}). \tag{2.9}$$

Після заміни $z = y^{(n)}$ рівняння (2.9) набере вигляду $x = f(z)$, звідки $dx = f'(z)\, dz$. Відомо, що $d(y^{(n-1)}) = y^{(n)} dx$, тому маємо

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = z \cdot f'(z)\, dz,$$

$$y^{(n-1)} = \int z \cdot f'(z)\, dz + C_1. \tag{2.10}$$

Інтегруючи рівняння (2.10) тим самим методом, що й рівняння (2.6) і враховуючи щоразу, що $dx = f'(z)\, dz$, дістанемо розв'язок рівняння (2.8) в параметричній формі.

Приклад 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y'')^2 + 2y'' = x.$$

Розв'язання.

Оскільки це рівняння є вигляду (2.8), то зробимо заміну змінних $z = y''$. Тоді $x = z^2 + 2z$. Звідси $dx = (2z + 2)\, dz$.

Оскільки $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, тобто $dy' = y''dx$, то підставляючи заміну, матимемо $dy' = z(2z+2)dz$. Інтегруючи останню рівність, одержуємо

$$y' = \int (2z^2 + 2z)\, dz + C_1 \Rightarrow y' = \frac{2}{3}z^3 + z^2 + C_1 .$$

Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, тобто $dy = y'dx$, то

$$dy = \left(\frac{2}{3}z^3 + z^2 + C_1 \right)(2z+2)\, dz .$$

Відкриваючи дужки та зводячи подібні доданки, одержуємо

$$dy = \left(\frac{4}{3}z^4 + \frac{10}{3}z^3 + 2z^2 + 2C_1 z + 2C_1 \right) dz .$$

Звідси $y = \displaystyle\int \left(\frac{4}{3}z^4 + \frac{10}{3}z^3 + 2z^2 + 2C_1 z + 2C_1 \right) dz + C_2$. Тоді розв’язок диференціального рівняння записуємо в параметричній формі

$$\begin{cases} x = z^2 + 2z, \\ y = \dfrac{4}{15}z^5 + \dfrac{5}{6}z^4 + \dfrac{2}{3}z^3 + C_1 z^2 + 2C_1 z + C_2. \end{cases}$$

2.3. Диференціальні рівняння другого порядку зі змінними та сталими коефіцієнтами

2.3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами

Рівняння виду

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{2.11}$$

або

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{2.12}$$

називають *диференціальними рівняннями другого порядку* у випадку (2.11) – *однорідним*, у випадку (2.12) – *неоднорідним*, де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на (a,b).

Розглянемо рівняння (2.11). Функція $y=0$ є для нього розв'язком, який називають *тривіальним* або *нульовим.* Знайдемо нетривіальні розв'язки рівняння (2.11).

Теорема 2.1. *Якщо функції* $y_1(x)$ *та* $y_2(x)$ *– розв'язки рівняння* (2.11)*, то функція*

$$y(x)=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x) \tag{2.13}$$

є також розв'язком рівняння (2.11)*, де* C_1, C_2 *– довільні сталі.*

Введемо поняття лінійної залежності та незалежності функцій.

Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називають *лінійно незалежними на проміжку* (a,b), якщо тотожність

$$\alpha\,y_1(x)+\beta\,y_2(x)=0 \tag{2.14}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha=\beta=0$, де α, β – дійсні числа.

Якщо (2.14) виконується, коли хоча б одне з чисел α, β не дорівнює нулю, то функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називають *лінійно залежними.*

Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – неперервні та диференційовні разом із своїми похідними за змінною *x*, то визначник виду

$$W(y_1(x),y_2(x))=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

назвемо *визначником Вронського цих функцій.*

Теорема 2.2. *Якщо функції* $y_1(x)$ *та* $y_2(x)$ *– диференційовні і лінійно залежні на проміжку* (a,b)*, то їх визначник Вронського дорівнює нулю.*

Теорема 2.3. *Якщо функції* $y_1(x)$ *та* $y_2(x)$ *– лінійно незалежні розв'язки рівняння* (2.11) *на проміжку* (a,b), *то їх визначник Вронського в жодній точці цього проміжку не дорівнює нулю.*

Теорема 2.4. *Якщо функції* $y_1(x)$ *та* $y_2(x)$ *– лінійно незалежні на проміжку* (a,b) *розв'язки рівняння* (2.11), *то функція* (2.13) *є загальним розв'язком рівняння* (2.11).

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.11).

Нехай $y_1 = y_1(x)$ – ненульовий розв'язок рівняння (2.11). Цей розв'язок можна знайти шляхом підбору у вигляді $y = e^{ax}$, або $y = ax + b$, або $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c – невідомі сталі, які знаходимо після підстановки цих функцій у рівняння (2.11).

Розв'язок рівняння (2.11) – функцію $y_2(x)$ знаходимо з формули Остроградського – Ліувілля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{B(x)},\ B(x) = -\int a_1(x)\,dx .$$

Звідси $y_2(x) = y_1(x) \cdot \left(\int \frac{e^{B(x)}}{y_1^2(x)} dx \right)$. Тоді з теореми 2.4 загальний розв'язок рівняння (2.11) записується у вигляді (2.13), де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ знайдено вище. Зауважимо, що в рівнянні (2.11) біля найвищої похідної повинна стояти одиниця.

Приклад 2.3. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y'' + \frac{4x}{2x+1} y' - \frac{4}{2x+1} y = 0 .$$

Розв'язання.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння у вигляді $y_1(x) = ax + b$, де a, b – довільні сталі. Підставимо $y_1(x)$ в диференціальне рівняння, знайшовши першу та другу похідні. Тоді $b = 0$, a – довільна стала. Нехай $a = 1$, то $y_1(x) = x$.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння $y_2(x)$, використовуючи формулу Остроградського – Ліувілля. Оскільки $B(x) = -\int \frac{4x}{2x+1}\,dx = -2\int\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)dx = \ln\frac{2x+1}{e^{2x}}$, тоді

$$y_2(x) = x\left(\int \frac{e^{\ln\frac{2x+1}{e^{2x}}}}{x^2}\,dx\right) = x\left(\int \frac{2x+1}{e^{2x}x^2}\,dx\right) = x\left(\int \frac{2}{e^{2x}x}\,dx + \int \frac{1}{e^{2x}x^2}\,dx\right) =$$

$$= x\left(\int \frac{2}{e^{2x}x}\,dx - \int \frac{1}{e^{2x}}\,d\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(\int \frac{2}{e^{2x}\cdot x}\,dx - \frac{1}{e^{2x}}\cdot\frac{1}{x} - 2\int \frac{1}{e^{2x}}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{e^{2x}}.$$

Таким чином, $y = C_1 x - \frac{C_2}{e^{2x}}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

2.3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Нехай в рівнянні (2.11) $a_1(x)$, $a_2(x)$ – не функції, а сталі числа. Позначимо $a_1(x) = p$, $a_2(x) = q$, де $p, q \in R$. Тоді рівняння (2.11) набере вигляду

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.15}$$

яке називають *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.* Для розв'язання рівняння (2.15) застосовують метод Ейлера, який полягає в тому, що для цього рівняння складають *характеристичне рівняння*

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{2.16}$$

В результаті розв'язання квадратного рівняння (2.16) матимемо такі випадки:

I) Нехай дискримінант рівняння (2.16) додатний, тоді матимемо два різні та дійсні корені k_1, k_2. Тоді частинні розв'язки рівняння (2.15) матимуть вигляд

$$y_1(x)=e^{k_1x} \text{ та } y_2(x)=e^{k_2x}$$

і згідно з теоремою 2.4, загальний розв'язок (2.15) запишемо у вигляді

$$y(x)=C_1\, e^{k_1 x}+C_2\, e^{k_2 x}\,. \qquad (2.17)$$

Приклад 2.4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y''-8y'+15y=0,\ y(0)=0\,,\, y'(0)=2\,.$$

Розв'язання.

Запишемо відповідне характеристичне рівняння

$$k^2-8k+15=0\,,$$

яке за теоремою Вієта має дійсні та різні корені $k_1=3$, $k_2=5$. Тоді, за формулою (2.17), загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння має вигляд

$$y(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{5x}\,.$$

Знайдемо його похідну: $y'=3C_1e^{3x}+5C_2e^{5x}$.

Справджуючи умови Коші, для визначення сталих C_1, C_2 отримуємо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} y(0)=C_1e^0+C_2e^0=0, \\ y'(0)=3C_1e^0+5C_2e^0=2, \end{cases}$$

звідки знаходимо, що $C_1=-1$ $C_2=1$.

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y(x)=-e^{3x}+e^{5x}.$$

II) Нехай дискримінант рівняння (2.16) від'ємний, тоді матимемо два корені k_1, k_2, які є комплексно-спряжені, тобто $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$. Тоді частинні розв'язки рівняння (2.15) матимуть вигляд

$$y_1(x)=e^{(\alpha+\beta\, i)x} \text{ та } y_2(x)=e^{(\alpha-\beta\, i)x}\,.$$

Враховуючи формулу Ейлера $e^{it}=\cos t+i\sin t$ та теорему 2.4, загальний розв'язок (2.15) матиме вигляд

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2\, e^{\alpha x} \sin \beta x\,. \qquad (2.18)$$

Приклад 2.5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$5y'' + 6y' + 5y = 0\,.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння має вигляд $5k^2 + 6k + 5 = 0$. Звідси $k_1 = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, $k_2 = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$. Використовуючи (2.18), запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння у вигляді $y(x) = C_1 e^{-\frac{3}{5}x} \cos\frac{4}{5}x + C_2 e^{-\frac{3}{5}x} \sin\frac{4}{5}x$.

III) Нехай дискримінант рівняння (2.16) дорівнює нулю, тоді матимемо два корені, які є однакові, тобто $k_1 = k_2 = k$ (кратний корінь). Частинні розв'язки у цьому випадку матимуть вигляд

$$y_1(x) = e^{kx} \text{ та } y_2(x) = x\, e^{kx}\,.$$

Згідно з теоремою 2.4 загальний розв'язок рівняння (2.15) матиме вигляд

$$y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 x\, e^{kx}\,. \qquad (2.19)$$

Приклад 2.6. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + 10y' + 25y = 0\,.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 10k + 25 = 0$. Звідси $k_1 = k_2 = -5$. Згідно з (2.19), загальний розв'язок диференціального рівняння матиме вигляд $y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}$.

2.3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{2.20}$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на (a,b).

Пригадаємо, що рівняння виду

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{2.21}$$

називається відповідним *однорідним диференціальним рівнянням.*

Встановимо структуру загального розв'язку рівняння (2.20).

Теорема 2.5. *Загальним розв'язком* (2.20) *є сума його довільного частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння* (2.21).

Нехай $y_*(x)$ – частинний розв'язок рівняння (2.20), $y_0(x)$ – загальний розв'язок рівняння (2.21). Тому, згідно з теоремою 2.5, маємо

$$y(x) = y_0(x) + y_*(x). \tag{2.22}$$

Отже, щоб знайти загальний розв'язок рівняння (2.20) у вигляді (2.22) треба насамперед знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2.21) та довільний частинний розв'язок рівняння (2.20). Як знаходити загальний розв'язок однорідного рівняння (2.21) говорилось вище. Щодо відшукання частинного розв'язку $y_*(x)$ рівняння (2.20) – питання складніше. Наведемо методи, згідно з якими можна його спростити.

Частинний розв'язок $y_*(x)$ лінійного неоднорідного рівняння (2.20) шукатимемо за допомогою *методу варіації довільних сталих* (*методу Лагранжа*). Згідно з цим методом, частинний розв'язок $y_*(x)$ шукатимемо із загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (2.21), але замість сталих C_1, C_2 будемо писати невідомі функції від незалежної змінної *x*, тобто

$$y_*(x) = \varphi_1(x) \cdot y_1(x) + \varphi_2(x) \cdot y_2(x), \tag{2.23}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (2.21).

Функція (2.23) є частинним розв'язком рівняння (2.20), для якої функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)\cdot y_1(x)+\varphi_2'(x)\cdot y_2(x)=0, \\ \varphi_1'(x)\cdot y_1'(x)+\varphi_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x). \end{cases}$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського відносно функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$. Оскільки функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ є лінійно незалежними, то визначник Вронського не дорівнює нулю, а система рівнянь має єдиний розв'язок $\varphi_1'(x)=-\dfrac{y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)}$, $\varphi_2'(x)=\dfrac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}$, який знайдено за допомогою методу Крамера. Функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ знайдемо після інтегрування відносно змінної *x*. Підставивши знайдені $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ у (2.23), отримаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_*(x)$.

Приклад 2.7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}.$$

Розв'язання.

1 крок. Знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y''-2y'+y=0$. Складемо характеристичне рівняння $k^2-2k+1=0$. Звідси $k_1=k_2=1$. Тоді, згідно з формулою (2.19), загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння матиме вигляд $y_0(x)=C_1e^x+C_2xe^x$.

2 крок. Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$, використовуючи метод варіації довільної сталої. Складемо систему

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(x+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^x}{x} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формули Крамера, знайдемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(x+1) \end{vmatrix} = e^{2x}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{x} & e^x(x+1) \end{vmatrix} = -e^{2x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}.$$

Звідси $\varphi_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -1$, $\varphi_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{x}$. Тоді $\varphi_1(x) = -x$, $\varphi_2(x) = \ln x$. Таким чином, частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння матиме вигляд $y_*(x) = -xe^x + xe^x \ln x$.

3 крок. Використовуючи формулу (2.22), запишемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + xe^x \ln x$.

Нехай у рівнянні (2.20) функції $a_1(x)$, $a_2(x)$ – сталі. Позначимо: $a_1(x) = p$, $a_2(x) = q$, де $p, q \in R$. Тоді рівняння (2.20) перепишемо:

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{2.24}$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.24) <u>*методом невизначених коефіцієнтів*</u>. Відшукання розв'язку рівняння (2.24) можна спростити, якщо функція $f(x)$ має *спеціальний вигляд*.

Розглянемо такі випадки:

<u>**I)**</u> Нехай функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = e^{\mu x}P_n(x), \tag{2.25}$$

де $\mu \in R$, $P_n(x)$ – многочлен степеня *n*, тоді можуть бути такі варіанти:

а) число μ не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2+pk+q=0. \qquad (2.26)$$

Тоді рівняння (2.24) має частинний розв'язок вигляду

$$y_*(x)=R_n(x)e^{\mu x}=(a_0+a_1x+...+a_nx^n)e^{\mu x}, \qquad (2.27)$$

де $R_n(x)$ – многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами a_0, a_1, ..., a_n. Оскільки (2.27) є розв'язком рівняння (2.24), то підставляючи (2.27) у рівняння (2.24) з правою частиною вигляду (2.25) та прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях x у лівій та правій частинах, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів многочлена $R_n(x)$, з якої визначаємо коефіцієнти a_0, a_1, ..., a_n.

Приклад 2.8. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''-3y'+2y=e^{3x}(2x+7).$$

Розв'язання.

1 крок. Знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$y''-3y'+2y=0.$$

Складемо характеристичне рівняння (2.26), тобто $k^2-3k+2=0$. Звідси $k_1=2$, $k_2=1$. Тоді, враховуючи (2.17), загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння записуємо у вигляді $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2 крок. Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y''-3y'+2y=e^{3x}(2x+7)$$

методом невизначених коефіцієнтів.

Оскільки права частина $f(x)=e^{3x}(2x+7)$, де $\mu=3$ (не є коренем характеристичного рівняння), $P_1(x)=2x+7$ – многочлен першого степеня, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $y_*(x)=(ax+b)e^{3x}$, де a, b – невідомі коефіцієнти. Невідомі коефіцієнти знаходимо, підставляючи y_*, y_*' та y_*'' в неоднорідне

диференціальне рівняння та прирівнюючи коефіцієнти зліва та справа при відповідних величинах

xe^{3x} : $\quad 9a-9a+2a=2,$

e^{3x} : $\quad 9b+6a-9b-3a+2b=7.$

Звідси $a=1$, $b=2$. Тоді $y_*(x)=(x+2)e^{3x}$.

3 крок. Використовуючи формулу (2.22), запишемо загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+(x+2)e^{3x}$.

б) число μ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння (2.26), тобто є простим коренем цього рівняння, тоді частинний розв’язок рівняння (2.24) будемо шукати у вигляді

$$y_*(x)=x\,R_n(x)e^{\mu x}. \tag{2.28}$$

Приклад 2.9. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y''-3y'+2y=5e^{2x}.$$

Розв’язання.

1 крок. Знайдемо загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння

$$y''-3y'+2y=0.$$

Складемо характеристичне рівняння $k^2-3k+2=0$. Звідси $k_1=2$, $k_2=1$. Тоді загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2 крок. Знайдемо частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y''-3y'+2y=5e^{2x}.$$

Оскільки права частина $f(x)=5e^{2x}$, де $\mu=2$ (є коренем характеристичного рівняння), $P_1(x)=5$ – многочлен нульового степеня, то частинний розв’язок шукатимемо у вигляді $y_*(x)=xe^{2x}a$, де a – невідомий коефіцієнт. Невідомий коефіцієнт знаходимо, підставляючи y_*, y_*' та y_*'' в неоднорідне

диференціальне рівняння та прирівнюючи коефіцієнти зліва та справа при відповідних величинах

$xe^{2x}: \quad 4a - 6a + 2a = 0,$

$e^{2x}: \qquad 4a - 3a = 5.$

Звідси $a = 5$. Тоді $y_*(x) = 5xe^{2x}$.

3 крок. Запишемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + 5xe^{2x}$.

в) число μ – двократний корінь характеристичного рівняння (2.26), тоді частинний розв'язок рівняння (2.24) будемо шукати у вигляді

$$y_*(x) = x^2\ R_n(x)e^{\mu x}. \qquad (2.29)$$

Приклад 2.10. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 7e^{2x}.$$

Розв'язання.

1 крок. Знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$. Звідси $k_1 = k_2 = 2$. Тоді, враховуючи (2.19), загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння записуємо у вигляді $y_0(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

2 крок. Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 7e^{2x}.$$

Оскільки права частина $f(x) = 7e^{2x}$, де $\mu = 2$ (є двократним коренем характеристичного рівняння), $P_1(x) = 7$ – многочлен нульового степеня, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $y_*(x) = x^2e^{2x}a$, де a – невідомий коефіцієнт. Невідомий коефіцієнт знаходимо, підставляючи y_*, y_*' та y_*'' в неоднорідне

диференціальне рівняння та прирівнюючи коефіцієнти зліва та справа при відповідних величинах

$x^2e^{2x}: \quad 4a-8a+4a=0,$

$xe^{2x}: \quad 8a-8a=0,$

$e^{2x}: \quad 2a=7.$

Звідси $a=3,5$. Тоді $y_*(x)=3,5x^2e^{2x}$.

3 крок. Запишемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+3,5x^2e^{2x}$.

<u>II)</u> Нехай функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x), \qquad (2.30)$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлен степеня n та m відповідно, α, β – дійсні числа.

Тоді частинний розв'язок (2.24) шукатимемо у вигляді

$$y_*(x)=x^se^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x+T_k(x)\sin\beta x), \quad (2.31)$$

де $R_k(x)$, $T_k(x)$ – многочлени степеня k з невизначеними коефіцієнтами, k – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$, $Q_m(x)$, тобто $k=\max\{n,m\}$, s – кратність $\alpha+\beta i$, як кореня характеристичного рівняння (2.26).

Приклад 2.11. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''-2y'+2y=6e^x\cos x.$$

Розв'язання.

1 крок. Знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$y''-2y'+2y=0.$$

Складемо характеристичне рівняння $k^2-2k+2=0$. Звідси $k_1=1+i$, $k_2=1-i$. Тоді, враховуючи (2.18), загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y_0(x)=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$.

2 крок. Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = 6e^x \cos x.$$

Оскільки права частина має вигляд (2.30), тобто $f(x) = 6e^x \cos x$, де $\mu = 1 + i$ (є коренем характеристичного рівняння), $P_1(x) = 6$ – многочлен нульового степеня, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді (2.31), тобто $y_*(x) = x(ae^x \cos x + be^x \sin x)$, де a, b – невідомі коефіцієнти. Невідомі коефіцієнти знаходимо, підставляючи y_*, y_*' та y_*'' в неоднорідне диференціальне рівняння та прирівнюючи коефіцієнти зліва та справа при відповідних величинах

$xe^x \cos x$: $\quad 2a - 2b - 2a + b + a + b - a = 0,$

$xe^x \sin x$: $\quad 2b - 2b + 2a - b - a + b - a = 0,$

$e^x \cos x$: $\quad -2a + a + b + a + b = 6,$

$e^x \sin x$: $\quad -2b - a + b + b - a = 0.$

Звідси $a = 0$, $b = 3$. Тоді $y_*(x) = 3xe^x \sin x$.

3 крок. Запишемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + 3xe^x \sin x$.

Зауважимо, що метод підбору частинного розв'язку рівняння (2.24) можна застосувати до тих рівнянь, що є лінійними із сталими коефіцієнтами та спеціальною функцією $f(x)$. Для інших рівнянь користуються методом Лагранжа (варіації сталих).

Частинний розв'язок $y_*(x)$ лінійного неоднорідного рівняння (2.20) можна також шукати за допомогою *методу Коші*, згідно з яким частинний розв'язок $y_*(x)$ неоднорідного рівняння (2.20) подається у вигляді

$$y_*(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s) f(s) ds, \qquad (2.32)$$

де $K(x,s)$ – функція Коші однорідного диференціального рівняння (2.21), яка має такі властивості:
а) функція $K(x,s)$ є розв'язком диференціального рівняння (2.21) за змінною *x*;
б) $K(x,s)$ для $x=s$ справджує умови: $K(s,s)=0$, $K'_x(s,s)=1$.

Якщо фундаментальна система розв'язків $y_1(x)$ $y_2(x)$ однорідного диференціального рівняння (2.21) відома, то функцію Коші $K(x,s)$ можна подати у вигляді

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x), \qquad (2.33)$$

де коефіцієнти $C_1(s)$, $C_2(s)$ підбирають так, щоб виконувались властивості функції Коші.

Зауважимо, що для неоднорідного диференціального рівняння вигляду (2.24), де функція $f(x)$ – неперервна на деякому інтервалі дійсної осі, розв'язок $y_*(x)$ можна подати в замкненій формі. При цьому слід розглянути три випадки:

- $p^2-4q<0$. Тоді

$$K(x,s)=\frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)}\sin\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}(x-s)}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}} \qquad (2.34)$$

і частинний розв'язок $y_*(x)$ рівняння (2.24) має вигляд:

$$y_*(x)=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{p}{2}(x-s)}\sin\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}(x-s)\cdot f(s)ds, \qquad (2.35)$$

де x_0 – довільна точка з інтервалу дійсної осі;

- $p^2-4q>0.$ Тоді

$$K(x,s)=\frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)}sh\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}(x-s)}{\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}}, \qquad (2.36)$$

а частинний розв'язок диференціального рівняння (2.24) в цьому випадку має вигляд:

$$y_*(x) = \frac{2}{\sqrt{p^2-4q}} \int_{x_0}^{x} e^{-\frac{p}{2}(x-s)} sh \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}(x-s) \cdot f(s)ds . \qquad (2.37)$$

- $p^2 - 4q = 0$. В цьому випадку

$$K(x,s) = (x-s)e^{-\frac{p}{2}(x-s)} \qquad (2.38)$$

і частинний розв'язок диференціального рівняння (2.24) матиме вигляд:

$$y_*(x) = \int_{x_0}^{x} (x-s)e^{-\frac{p}{2}(x-s)} \cdot f(s)ds . \qquad (2.39)$$

Приклад 2.12. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$$

методом Коші.

Розв'язання.

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ для цього диференціального рівняння має корені $k_1 = k_2 = 1$. Тому функції $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного диференціального рівняння.

Використовуючи (2.33), запишемо функцію $K(x,s)$:

$$K(x,s) = C_1(s)e^x + C_2(s)xe^x ,$$

де коефіцієнти $C_1(s)$, $C_2(s)$ підбирають так, щоб виконувались властивості функції Коші, а саме:

$$K(s,s) = 0: \qquad C_1(s)e^s + C_2(s)se^s = 0,$$

$$K'_x(s,s) = 1: \quad C_1(s)e^s + C_2(s)(e^s + se^s) = 1.$$

Розв'язавши цю лінійну відносно невідомих функцій $C_1(s)$, $C_2(s)$ систему рівнянь, отримаємо єдиний розв'язок:

$$C_1(s) = -se^{-s},\ C_2(s) = e^{-s}.$$

Отже, функцію $K(x,s)$ можна подати у вигляді

$$K(x,s) = -se^{x-s} + xe^{x-s} = (x-s)e^{x-s}. \quad (2.40)$$

Покладаючи у формулі (2.32) $x_0 = 0$, запишемо розв'язок $y_*(x)$ у вигляді формули (2.39), тобто

$$y_*(x) = \int_0^x (x-s)e^{x-s} \cdot \frac{e^s}{s^2+1} ds = \int_0^x \frac{x-s}{s^2+1} e^x ds =$$

$$= e^x \left(\int_0^x \frac{x}{s^2+1} ds - \int_0^x \frac{s}{s^2+1} ds \right) = e^x \left(x \cdot arctg\ s - \frac{1}{2} \ln\left(s^2+1\right) \right)\Bigg|_0^x =$$

$$= e^x \left(x \cdot arctg\ x - \frac{1}{2} \ln\sqrt{x^2+1} \right).$$

В прикладі 2.12 можна використати формулу (2.38), за якою функція Коші однорідного диференціального рівняння має вигляд $K(x,s) = (x-s)e^{x-s}$, оскільки $p = -2$, тобто збігається з (2.40), яку ми знаходили, розв'язуючи систему лінійних відносно змінних $C_1(s)$, $C_2(s)$ рівнянь, що є, взагалі кажучи, трудомісткою процедурою. Тому застосування формули (2.38) для знаходження функції Коші – доцільніше.

Зауважимо, що методом Коші можна отримати той самий частинний розв'язок, що і методом Лагранжа. Тому вибір методу відшукання частинного розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння – це справа індивідуального вподобання.

Приклад 2.13. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y = \cos x.$$

Розв'язання.

Оскільки $p=0$, $q=4$, $p^2-4q=-16<0$, то функція $K(x,s)$ для відповідного однорідного рівняння $y''+4y=0$ за формулою (2.34) має вигляд

$$K(x,s)=\frac{\sin 2(x-s)}{2},$$

а частинний розв’язок $y_*(x)$ вихідного неоднорідного диференціального рівняння можна подати у формі (2.35), тобто

$$y_*(x)=\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin 2\left(x-s\right)}{2}\cdot\cos s\,ds=\frac{1}{8}\int_0^x (\sin(2x-3s)+\sin(2x-s))\,ds=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\cos\left(2x-3s\right)+\cos\left(2x-s\right)\right)\Bigg|_0^x=\frac{2}{3}(\cos x-\cos 2x).$$

Теоретичні питання

1. Дати визначення диференціального рівняння *n*-го порядку.
2. Що називають розв’язком диференціального рівняння *n*-го порядку?
3. Сформулювати задачу Коші для диференціального рівняння *n*-го порядку.
4. Сформулювати теорему Коші для диференціального рівняння *n*-го порядку.
5. Що називають загальним розв’язком диференціального рівняння *n*-го порядку?
6. Описати схему розв’язування диференціального рівняння виду $y^{(n)}=f(x)$.
7. Описати схему розв’язування диференціального рівняння виду $x=f(y^{(n)})$.
8. Описати структуру загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння.
9. Дати визначення лінійно незалежних (лінійно залежних) функцій.
10. Що називають визначником Вронського?
11. Як визначник Вронського пов’язаний з поняттями лінійної

незалежності (лінійної залежності) функцій.

12. Навести формулу Остроградського – Ліувілля.
13. Як знаходити загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадку дійсних різних коренів відповідного характеристичного рівняння?
14. Як знаходити загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадку дійсних кратних коренів відповідного характеристичного рівняння?
15. Як знаходити загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадку комплексно-спряжених коренів відповідного характеристичного рівняння?
16. Як знаходити частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом варіації сталих (метод Лагранжа)?
17. Як знаходити частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів?
18. Як знаходити частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом Коші?

Завдання для самостійної роботи

I. Знайти загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, понизивши степінь цього рівняння:

1. $y'' = 2 + \sin 5x$;
2. $y'' = e^{4x} - 3$;
3. $y'' = (2x+3)^5 - 7$;
4. $y'' = \cos 7x - 7$;
5. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{3x+4}} - 2$;
6. $y'' = 6^{4x-2} + 8$;
7. $y'' = \dfrac{1}{(2x+5)^4} - 2$;
8. $y'' = -3 + \sin(3x-2)$;
9. $y'' = e^{1-2x} + 2$;
10. $y'' = (-x+5)^3 + 3$;

11. $y'' = 4\cos 4x + 2$;

12. $y'' = \dfrac{1}{(2x+4)^3} + 5$;

13. $y'' = 5^{3x+5} - 7$;

14. $y'' = \dfrac{36}{\sqrt{6x-1}} + 3$;

15. $y'' = -2 - \dfrac{1}{6}\cos 6x$;

16. $y'' = 2^{-2x+3} + 9$;

17. $y'' = (-3x-2)^4 + 1$;

18. $y'' = 6 - 4\sin(2x+3)$;

19. $y'' = \dfrac{7}{\sqrt{7x+5}} - 2$;

20. $y'' = e^{-5-3x} - 4$;

21. $y'' = \dfrac{1}{(3x-5)^4} - 2$;

22. $y'' = -3 - \dfrac{1}{3}\sin 6x$;

23. $y'' = e^{2-3x} + 5$;

24. $y'' = 12(-3x+4)^2 + 7$;

25. $y'' = \dfrac{4}{\sqrt{-2x+5}} + 10$;

26. $y'' = \cos(2x-5) + 4$;

27. $y'' = 4^{-2x+5} - 3$;

28. $y'' = -\dfrac{6}{(3x-4)^5} + 3$;

29. $y'' = -3 - 64e^{2+8x}$;

30. $y'' = 5 - 9\sin(3x-4)$.

II. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння третього порядку:

1. $2y''' - 6y'' + 17y' = 0$;
2. $2y''' - 2y'' + y' = 0$;
3. $5y''' - 6y'' + 5y' = 0$;
4. $5y''' - 2y'' + y' = 0$;
5. $5y''' - 4y'' + 4y' = 0$;
6. $2y''' - 2y'' + 5y' = 0$;
7. $18y''' - 6y'' + y' = 0$;
8. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$;
9. $5y''' - 12y'' + 20y' = 0$;
10. $100y''' - 12y'' + y' = 0$;
11. $5y''' - 8y'' + 5y' = 0$;
12. $y''' - 12y'' + 100y' = 0$;
13. $5y''' - 8y'' + 4y' = 0$;
14. $y''' - 8y'' + 20y' = 0$;
15. $8y''' - 4y'' + y' = 0$;
16. $10y''' - 2y'' + y' = 0$;
17. $y''' - 4y'' + 5y' = 0$;
18. $y''' - 2y'' + 10y' = 0$;
19. $y''' - 2y'' + 5y' = 0$;
20. $5y''' - 4y'' + y' = 0$;

21. $y''' + 4y'' + 29y' = 0$;
22. $y''' - 4y'' + 8y' = 0$;
23. $y''' + 6y'' + 13y' = 0$;
24. $y''' - 4y'' + 13y' = 0$;
25. $y''' + 6y'' + 10y' = 0$;
26. $y''' - 8y'' + 17y' = 0$;
27. $y''' + 4y'' + 20y' = 0$;
28. $y''' - 6y'' + 25y' = 0$;
29. $y''' + 2y'' + 50y' = 0$;
30. $4y''' + 8y'' + 5y' = 0$.

III. Знайти розв'язок задачі Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

1. $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 8$, $y'(0) = -12$.
2. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$.
3. $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 24$.
4. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 7$.
5. $y'' - 8y' + 15y = 0$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 40$.
6. $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
7. $y'' + 7y' - 8y = 0$, $y(0) = 10$, $y'(0) = -35$.
8. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.
9. $y'' - 6y' + 8y = 0$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 30$.
10. $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.
11. $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$.
12. $y'' - 12y' + 36y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 31$.
13. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.
14. $9y'' - 6y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{7}{3}$.
15. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 10$.
16. $4y'' - 4y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{3}{2}$.
17. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -6$.
18. $16y'' - 8y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \dfrac{5}{2}$.
19. $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.

20. $y''-14y'+49y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=25$.

21. $y''-9y'+14y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=9$.

22. $25y''-10y'+y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=\frac{17}{5}$.

23. $y''-8y'+12y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=24$.

24. $36y''+12y'+y=0$, $y(0)=-3$, $y'(0)=-\frac{5}{2}$.

25. $y''+y'-12y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=-3$.

26. $y''-16y'+64y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=29$.

27. $y''+5y'-14y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=-15$.

28. $y''+18y'+81y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=11$.

29. $y''-6y'-7y=0$, $y(0)=8$, $y'(0)=24$.

30. $49y''+14y'+y=0$, $y(0)=-3$, $y'(0)=-\frac{25}{7}$.

IV. Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

1.	$y''+2y'-3y=12e^{-3x}$;	2.	$y''+2y'=4e^{-2x}$;
3.	$y''-5y'+6y=3e^{3x}$;	4.	$y''-3y'=9e^{3x}$;
5.	$y''+4y'-5y=30e^{-5x}$;	6.	$y''-25y=50e^{-5x}$;
7.	$y''+4y'=16e^{-4x}$;	8.	$y''-100y=200e^{10x}$;
9.	$y''-8y'-9y=10e^{-x}$;	10.	$y''-5y'=25e^{5x}$;
11.	$y''-6y'+8y=8e^{4x}$;	12.	$y''-16y=32e^{4x}$;
13.	$y''+6y'=36e^{-6x}$;	14.	$y''+6y'-7y=56e^{-7x}$;
15.	$y''-36y=72e^{6x}$;	16.	$y''-7y'=49e^{7x}$;
17.	$y''+2y'-8y=12e^{2x}$;	18.	$y''-4y=8e^{-2x}$;
19.	$y''+8y'=64e^{-8x}$;	20.	$y''-9y'=81e^{9x}$;
21.	$y''+3y'-4y=20e^{-4x}$;	22.	$y''-49y=98e^{-7x}$;
23.	$y''-3y'+2y=2e^{2x}$;	24.	$y''-64y=128e^{8x}$;

25. $y'' + 10y' = 100e^{-10x}$; 26. $y'' - 9y = 18e^{3x}$;

27. $y'' - 7y' + 6y = 30e^{6x}$; 28. $y'' - y = 2e^{x}$;

29. $y'' - 7y' + 10y = 15e^{5x}$; 30. $y'' - 81y = 162e^{-9x}$.

V. Знайти розв'язок задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

1. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
2. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
3. $y'' - 2y' + y = 4(\sin x + \cos x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
4. $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
5. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
6. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
7. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
8. $y'' + 64y = 2\sin 8x + \cos 8x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
9. $y'' + 2y' + y = -2\sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
10. $y'' + 225y = 2\sin 15x + 3\cos 15x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
11. $y'' + y = 3\sin 4x + 2\cos 4x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
12. $y'' + 169y = \sin 13x + \cos 13x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
13. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
14. $2y'' - 10y' + 13y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
15. $y'' + 324y = 18\sin 18x$, $y\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$;
16. $y'' + 81y = -\sin 9x + 3\cos 9x$, $y\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$;
17. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

18. $y''+9y=\cos 3x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

19. $y''+36y=24\sin 6x-12\cos 6x$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$;

20. $y''-25y=25(\sin 5x+\cos 5x)$, $y\left(\frac{\pi}{10}\right)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{10}\right)=2$;

21. $y''-4y'+15y=\sin x+2\cos x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

22. $2y''-10y'+13y=\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

23. $y''+y=\sin x+\cos x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

24. $y''+y'=\sin 2x+\cos 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{2}{5}$;

25. $y''-y=-\sin x+2\cos x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

26. $y''-5y'+6y=3\cos 3x$, $y(0)=-\frac{1}{20}$, $y'(0)=\frac{11}{26}$;

27. $y''+9y=\sin 3x$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$;

28. $y''+4y'+3y=\sin 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

29. $y''+16y=16\cos 4x$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$;

30. $y''+25y=\sin 5x$, $y(0)=1$, $y'(0)=5$.

VI. Знайти розв'язок задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку методом варіації сталих або методом Коші:

1. $y''+4y=8ctgx$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=5$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$;

2. $y''-6y'+8y=\frac{4}{1+e^{-2x}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

3. $y''-9y'+18y=\frac{9e^{3x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

4. $y''+\pi^2 y=\frac{\pi^2}{\sin x}$, $y(0,5)=1$, $y'(0,5)=\frac{\pi^2}{2}$;

5. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 - e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$;

6. $y'' + y = 4ctgx$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$;

7. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$;

8. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

9. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + \ln 2$, $y'(0) = 14\ln 2$;

10. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\pi$;

11. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 5\ln 3$;

12. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi$;

13. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{x}}{1 + e^{-x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

14. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

15. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3 - 3\ln 2$;

16. $y'' + \dfrac{1}{4}y = \dfrac{1}{4}ctg\,\dfrac{x}{2}$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = \dfrac{1}{2}$;

17. $y'' + \dfrac{1}{\pi^2}y = \dfrac{1}{\pi^2 \cos\dfrac{\pi}{x}}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

18. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

19. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$;

20. $y'' + 4y' = 4ctg2x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$;

21. $y'' - 6y' + 8y = 4\frac{e^{2x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

22. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

23. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

24. $y'' + 16y = \frac{8}{\cos 4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

25. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}}$, $y(0) = 1 + \ln 2$, $y'(0) = 14\ln 2$;

26. $y'' + y = 2ctgx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$;

27. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$;

28. $y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}ctg\frac{x}{2}$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = \frac{1}{2}$;

29. $y'' + 4y = 8ctg2x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$;

30. $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-4x}}{2+e^{4x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

§3. Системи звичайних диференціальних рівнянь

3.1. Основні поняття про системи звичайних диференціальних рівнянь

Нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь (НСЗДР) називають систему виду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, ..., y_n), \\ ...., \\ y_n' = f_n(x, y_1, ..., y_n). \end{cases} \tag{3.1}$$

тобто, якщо в лівій частині рівнянь системи (3.1) стоять похідні першого порядку, а праві частини рівнянь не містять похідних.

Розв'язком НСЗДР (3.1) називають набір функцій

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots,\ y_n = \varphi_n(x),$$

який після підстановки його у всі рівняння системи перетворює їх у тотожність.

Розв'язок НСЗДР у багатьох випадках отримують у неявному вигляді

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \\ ...., \\ \Phi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0. \end{cases}$$

Таку систему співвідношень називають *інтегралом системи рівнянь* (3.1).

Набір функцій

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, ..., C_n),\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, ..., C_n), \ldots,\ y_n = \varphi_n(x, C_1, ..., C_n),$$

називають *загальним розв'язком НСЗДР* (3.1), якщо:

а) при кожному допустимому наборі значень сталих C_1, C_2, …, C_n отримуємо розв'язок системи рівнянь;

б) будь-який розв'язок системи рівнянь отримується з цього набору функцій при певним чином вибраних значеннях сталих C_1, C_2, …, C_n.

Теорема Коші (про існування та єдиність розв'язку). *Якщо в деякій області G функції* $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = \overline{1,n}$, *системи* (3.1) *неперервні разом з усіма своїми похідними* $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = \overline{1,n}$, *то для будь-якої точки* $(x^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0) \in G$ *існує єдиний розв'язок* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, *який справджує початкові умови:*

$$y_1(x^0) = y_1^0,\ y_2(x^0) = y_2^0, ...,\ y_n(x^0) = y_n^0. \qquad (3.2)$$

Задача Коші для НСЗДР (3.1) формулюється так: знайти розв'язок НСЗДР (3.1), що справджує початкові умови (3.2).

Систему співвідношень виду

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ ...., \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \qquad (3.3)$$

називають *нормальною лінійною системою диференціальних рівнянь n-го порядку (НЛСДР)*.

Використавши позначення

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix},\ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},\ A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

систему (3.3) можна записати у матричному вигляді

$$y' = A(x)y + f(x). \qquad (3.4)$$

Розв'язок системи (3.4) будемо записувати у векторній формі

$$y = \varphi(x), \text{ де } \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}.$$

Якщо $f(x) \equiv 0$, то систему рівнянь (3.4) називають *нормальною лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь (НЛОСДР)*, якщо ж $f(x) \neq 0$ – *нормальною лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь (НЛНСДР)*.

Теорема (про структуру загального розв'язку НЛОСДР). *Нехай $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$ – сукупність n лінійно незалежних розв'язків НЛОСДР n-го порядку. Тоді загальний розв'язок такої системи рівнянь має вигляд*

$$y = C_1 y^1(x) + C_2 y^2(x) + \ldots + C_n y^n(x), \tag{3.5}$$

де C_1, C_2, …, C_n – довільні сталі.

Теорема (про структуру загального розв'язку НЛНСДР). *Нехай $y_0(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ – загальний розв'язок НЛОСДР n-го порядку, а $y_*(x)$ – частинний розв'язок відповідної НЛНСДР n-го порядку. Тоді загальний розв'язок НЛНСДР n-го порядку має вигляд*

$$y = y_0(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) + y_*(x).$$

3.2. Нормальні лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь (НЛОСДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Система співвідношень виду

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2, \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2. \end{cases} \tag{3.6}$$

називають *нормальною лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Знайдемо загальний розв'язок такої системи. Першим етапом знаходження загального розв'язку цієї системи є розв'язування, так званого, характеристичного рівняння, що будується за елементами матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Алгебраїчне співвідношення вигляду

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0\,, \qquad (3.7)$$

де I – одинична матриця, називають *характеристичним рівнянням*, що відповідає системі рівнянь (3.6). Корені рівняння (3.7) називають *власними значеннями матриці А*.

Розв'язуючи рівняння (3.7), знаходимо власні значення λ матриці A, відповідні їм власні вектори v знаходимо із співвідношення

$$(A-\lambda I)v=0\,. \qquad (3.8)$$

Можливі такі випадки:

1. Якщо λ_j, $j=\overline{1,2}$ – дійсні та різні корені рівняння (3.7), то їм відповідають розв'язки виду $y^j=v^j e^{\lambda_j x}$ системи (3.6), де v^j – власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню λ_j. Знайшовши для кожного власного значення розв'язок системи (3.6) у зазначеному вигляді та просумувавши отримані розв'язки за формулою (3.5), одержимо загальний розв'язок системи (3.6).
2. Якщо $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ – комплексно спряжені власні значення матриці A, то їм відповідають розв'язки $y^1=\mathrm{Re}(v^1 e^{\lambda_1 x})$ та $y^2=\mathrm{Im}(v^1 e^{\lambda_1 x})$, де v^1 – власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню λ_1. Знайшовши для кожного власного значення розв'язок системи (3.6) у зазначеному вигляді та просумувавши отримані розв'язки за формулою (3.5), одержимо загальний розв'язок системи (3.6).
3. Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ корінь рівняння (3.7), то йому відповідає розв'язок системи (3.6) виду

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right]\cdot e^{\lambda x}\,. \qquad (3.9)$$

Невідомі коефіцієнти шукаємо, підставивши (3.9) у систему (3.6). Два коефіцієнти у формулі (3.9) будуть довільними.

Приклад 3.1. Знайти загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 9y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо власні значення матриці системи

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 9 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (2-\lambda)^2 - 9 = 0,$$

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5.$$

Знайдемо відповідні власні вектори.

Для $\lambda_1 = -1$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді із співвідношення (3.8) матимемо $v_{11} + 3v_{12} = 0$, тобто $v_{11} = -3v_{12}$. Якщо $v_{12} = 1$, то власний вектор, що відповідає λ_1, набуде виду $v^1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 5$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді із співвідношення (3.8) матимемо $v_{21} - 3v_{22} = 0$, тобто $v_{21} = 3v_{22}$. Якщо $v_{22} = 1$, то власний вектор, що відповідає λ_2, набуде виду $v^2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Звідси $y^1 = e^{-x}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y^2 = e^{5x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Отже, з формули (3.5) загальний розв'язок системи матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 3.2. Знайти загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 6y_2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо власні значення матриці системи

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 5 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm 3i.$$

Знайдемо відповідні власні вектори.

Для $\lambda_1 = -2 + 3i$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 4-3i & -5 \\ 5 & -4-3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -4-3i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді із співвідношення (3.8) матимемо $5v_{11} + (-4-3i)v_{12} = 0$, тобто $v_{11} = \dfrac{4+3i}{5} v_{12}$. Якщо $v_{12} = 5$, то $v_{11} = 4 + 3i$. Тоді власний вектор, що відповідає λ_1, набуде виду $v^1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \end{pmatrix}$.

Крім того, за формулою Ейлера

$$v^1 e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{(-2+3i)x} = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{-2x} (\cos 3x + i \sin 3x) =$$

$$= e^{-2x} \begin{pmatrix} 4\cos 3x - 3\sin 3x \\ 5\cos 3x \end{pmatrix} + i e^{-2x} \begin{pmatrix} 4\sin 3x + 3\cos 3x \\ 5\sin 3x \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$y^1 = e^{-2x} \begin{pmatrix} 4\cos 3x - 3\sin 3x \\ 5\cos 3x \end{pmatrix}, \ y^2 = e^{-2x} \begin{pmatrix} 4\sin 3x + 3\cos 3x \\ 5\sin 3x \end{pmatrix}.$$

Отже, з формули (3.5) загальний розв’язок системи матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 4\cos 3x - 3\sin 3x \\ 5\cos 3x \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 4\sin 3x + 3\cos 3x \\ 5\sin 3x \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 3.3. Знайти загальний розв’язок однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2, \\ y_2' = -2y_1 + y_2. \end{cases}$$

Розв’язання.

Знайдемо власні значення матриці системи

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (\lambda+1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Такому власному значенню відповідає розв’язок виду (3.9), тобто

$$y^1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right] \cdot e^{-x}.$$

Звідси $y_1 = (a_1 x + b_1)e^{-x}$, $y_2 = (a_2 x + b_2)e^{-x}$.

Підставляємо y_1 та y_2 у вихідну систему

$$\begin{cases} (a_1 - a_1 x - b_1)e^{-x} = -3(a_1 x + b_1)e^{-x} + 2(a_2 x + b_2)e^{-x}, \\ (a_2 - a_2 x - b_2)e^{-x} = -2(a_1 x + b_1)e^{-x} + (a_2 x + b_2)e^{-x}. \end{cases}$$

Невідомі коефіцієнти знаходимо прирівнюючи коефіцієнти зліва та справа при відповідних величинах

$xe^{-x}: \quad -a_1 = -3a_1 + 2a_2,$

$e^{-x}: \quad a_1 - b_1 = -3b_1 + 2b_2,$

$xe^{-x}: \quad -a_2 = -2a_1 + a_2,$

$e^{-x}: \quad a_2 - b_2 = -2b_1 + b_2.$

Звідси $a_1 = a_2$, $a_1 + 2b_1 - 2b_2 = 0$. Оскільки два коефіцієнти будуть довільними, то візьмемо $b_1 = C_2$, $a_1 = 2C_1$, де C_1, C_2 – довільні сталі. Тоді $a_2 = 2C_1$, $b_2 = C_1 + C_2$.

Отже, з формули (3.9) загальний розв’язок системи матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1x + C_2 \\ 2C_1x + C_1 + C_2 \end{pmatrix} e^{-x},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

3.3. Нормальні лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь (НЛНСДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Система співвідношень виду

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x). \end{cases} \tag{3.10}$$

називають *нормальною лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Знайдемо загальний розв’язок такої системи методом виключення, тобто зведенням системи (3.10) до одного лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Опишемо **алгоритм методу виключення** знаходження загального розв’язку системи (3.10). Продиференціюємо перше рівняння системи (3.10)

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + f_1'(x). \tag{3.11}$$

Підставимо в (3.11) вираз y_2' з другого рівняння системи (3.10), маємо

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x)) + f_1'(x). \tag{3.12}$$

Виразимо y_2 з першого рівняння системи (3.10) і підставимо цей вираз в (3.12), маємо

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}(y_1' - a_{11}y_1 - f_1(x)) + a_{12}f_2(x) + f_1'(x).$$

Звівши подібні члени, прийдемо до диференціального рівняння другого порядку для функції y_1

$$y_1'' - (a_{11} + a_{22})y_1' - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})y_1 = -a_{22}f_1(x) + a_{12}f_2(x) + f_1'(x). \tag{3.13}$$

За теоремою 2.5 знайдемо загальний розв'язок y_1 рівняння (3.13). Підставивши загальний розв'язок y_1 та його похідну в перше рівняння системи (3.10), отримаємо розв'язок y_2. Пара функцій y_1 та y_2 і є загальним розв'язком системи (3.10).

Приклад 3.4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - \cos x, \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + \cos x + \sin x, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$y_1(0) = 1, \; y_2(0) = -2.$$

Розв'язання.

Знайдемо загальний розв'язок системи методом виключення. Продиференціюємо перше рівняння системи

$$y_1'' = y_1' + y_2' + \sin x. \tag{3.15}$$

Підставимо y_2' з другого рівняння системи (3.14) у (3.15), маємо

$$y_1'' = y_1' - 2y_1 - y_2 + \cos x + 2\sin x. \tag{3.16}$$

Виразимо y_2 з першого рівняння системи (3.14) і підставимо цей вираз в (3.16)

$$y_1'' = y_1' - 2y_1 - (y_1' - y_1 + \cos x) + \cos x + 2\sin x.$$

Звівши подібні члени, прийдемо до диференціального рівняння другого порядку відносно функції y_1

$$y_1'' + y_1 = 2\sin x. \tag{3.17}$$

Згідно з теоремою 2.5, загальний розв'язок рівняння (3.17) є сума його довільного частинного розв'язку $y_*(x)$ та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $y_0(x)$, тобто

$$y_1(x) = y_0(x) + y_*(x).$$

Використовуючи формулу (2.18) пункту 2.3.2, знаходимо загальний розв’язок однорідного рівняння

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Використовуючи формулу (2.31) пункту 2.3.3, знаходимо частинний розв’язок неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y_*(x) = x(a\cos x + b\sin x),$$

де a, b – невідомі коефіцієнти.

Невідомі коефіцієнти знаходимо, підставляючи y_* та y_*'' в неоднорідне диференціальне рівняння та прирівнюючи коефіцієнти зліва та справа при відповідних величинах

$$\begin{aligned}
&x\cos x: \quad a - a = 0,\\
&x\sin x: \quad b - b = 0,\\
&\cos x: \quad 2b = 0,\\
&\sin x: \quad -2a = 2.
\end{aligned}$$

Звідси $a = -1$, $b = 0$. Тоді $y_*(x) = -x\cos x$.

Отже,

$$y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x.$$

Звідси $y_1'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x + x\sin x.$

Виразимо y_2 з першого рівняння (3.14), підставивши розв’язок y_1 та його похідну

$$y_2(x) = C_1(-\sin x - \cos x) + C_2(\cos x - \sin x) + x(\cos x + \sin x).$$

Пара функцій

$$\begin{aligned}
&y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x,\\
&y_2(x) = C_1(-\sin x - \cos x) + C_2(\cos x - \sin x) + x(\cos x + \sin x).
\end{aligned} \qquad (3.18)$$

є загальним розв’язком системи (3.14).

Для знаходження розв’язку задачі Коші використаємо початкові умови, підставивши їх у (3.18). Маємо

$$\begin{aligned} y_1(0) &= C_1 = 1, \\ y_2(0) &= -C_1 + C_2 = -2, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_1 &= 1, \\ C_2 &= -1. \end{aligned}$$

Отже, розв'язком задачі Коші системи (3.14) є пара функцій

$$y_1(x) = (1-x)\cos x - \sin x,$$

$$y_2(x) = (x-2)\cos x + x\sin x.$$

Теоретичні питання

1. Дати визначення нормальної системи диференціальних рівнянь.
2. Що називають розв'язком нормальної системи диференціальних рівнянь?
3. Що називають загальним розв'язком нормальної системи диференціальних рівнянь?
4. Сформулювати задачу Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь.
5. Описати структуру загального розв'язку нормальної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь.
6. Описати структуру загального розв'язку нормальної лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь.
7. Дати визначення нормальної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
8. Як знаходити загальний розв'язок нормальної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку дійсних різних коренів відповідного характеристичного рівняння?
9. Як знаходити загальний розв'язок нормальної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку комплексно-спряжених коренів відповідного характеристичного рівняння?
10. Як знаходити загальний розв'язок нормальної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами на випадок збігу коренів відповідного характеристичного рівняння?

11. Дати визначення лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
12. Описати алгоритм методу виключення знаходження загального розв’язку лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Завдання для самостійної роботи

I. Знайти загальний розв’язок нормальної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

1. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 + y_2; \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + y_2; \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2, \\ y_2' = y_1 + 4y_2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 5y_2, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2; \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 9y_2, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2; \end{cases}$

7. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2; \end{cases}$

8. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2; \end{cases}$

9. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2; \end{cases}$

10. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + y_2; \end{cases}$

11. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2; \end{cases}$

12. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 + y_2; \end{cases}$

13. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 8y_2, \\ y_2' = y_1 + 4y_2; \end{cases}$

14. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2, \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2; \end{cases}$

15. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + 4y_2; \end{cases}$

16. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 7y_1 + 3y_2; \end{cases}$

17. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 5y_2, \\ y_2' = 5y_1 + 3y_2; \end{cases}$

18. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 + 5y_2; \end{cases}$

19. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 6y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 2y_2; \end{cases}$

20. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 4y_2; \end{cases}$

21. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + 6y_2; \end{cases}$

22. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2; \end{cases}$

23. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 7y_2, \\ y_2' = 7y_1 + 3y_2; \end{cases}$

24. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2; \end{cases}$

25. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 8y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2; \end{cases}$

26. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 6y_2, \\ y_2' = 6y_1 + 4y_2; \end{cases}$

27. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 4y_2; \end{cases}$

28. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 8y_1 + 4y_2; \end{cases}$

29. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 6y_2, \\ y_2' = 6y_1 + 5y_2; \end{cases}$

30. $\begin{cases} y_1' = 12y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 10y_2. \end{cases}$

II. Знайти розв’язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

1. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 - e^{2x}, \\ y_2' = -2y_1 + y_2 + e^{2x}, \end{cases}$
$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$;

2. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 2\sin x, \\ y_2' = y_1 + 4y_2, \end{cases}$
$y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$;

3. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2 + e^{x}, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 + xe^{x}, \end{cases}$
$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$;

4. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 - 5\cos x, \\ y_2' = 3y_1 + y_2 + \sin x, \end{cases}$
$y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$;

5. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 8y_2 + e^{-2x}, \\ y_2' = y_1 + 4y_2, \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 5y_2 + e^{3x}, \\ y_2' = 7y_1 + 3y_2 - 2e^{3x}, \end{cases}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$;

7. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 2e^x, \\ y_2' = y_1 + 4y_2 + 3e^x, \end{cases}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$;

9. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 + \sin x, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 - \cos x, \end{cases}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$;

11. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - 3e^{4x}, \\ y_2' = 8y_1 + y_2 + e^{4x}, \end{cases}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$;

13. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 9y_2 + 1, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + x^2, \end{cases}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$;

15. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_2 + x, \\ y_2' = y_1 - y_2 - e^x, \end{cases}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$;

17. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 6y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 2y_2 - e^x, \end{cases}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$;

19. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 5y_2 + 2x, \\ y_2' = y_1 + 3y_2, \end{cases}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$;

$y_1(0)=1$, $y_2(0)=0$;

8. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 6y_2 - 2e^{2x}, \\ y_2' = 4y_1 + 2y_2 + e^{2x}, \end{cases}$

$y_1(0)=1$, $y_2(0)=0$;

10. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 8y_2 + e^x, \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 + 5e^x, \end{cases}$

$y_1(0)=1$, $y_2(0)=0$;

12. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 + 2e^{4x}, \\ y_2' = 10y_1 + y_2 - e^{4x}, \end{cases}$

$y_1(0)=1$, $y_2(0)=0$;

14. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 5y_2 - 2\sin x, \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + \cos x, \end{cases}$

$y_1(0)=1$, $y_2(0)=0$;

16. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 2\sin x, \\ y_2' = -4y_1 - 3y_2 + \cos x, \end{cases}$

$y_1(0)=1$, $y_2(0)=0$;

18. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 + x, \\ y_2' = 8y_1 + y_2, \end{cases}$

$y_1(0)=1$, $y_2(0)=0$;

20. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 - 4y_2, \\ y_2' = -2y_1 - 3y_2 - e^x, \end{cases}$

$y_1(0)=1$, $y_2(0)=0$;

21. $\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 3y_2 + x + 2, \\ y_2' = -8y_1 - 5y_2, \end{cases}$
$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$;

22. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 + 8y_2 - e^{2x}, \end{cases}$
$y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$;

23. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + x + 3, \\ y_2' = 2y_1 + 5y_2, \end{cases}$
$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$;

24. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 2y_2 + \sin x, \\ y_2' = y_1 + 6y_2 + \cos x, \end{cases}$
$y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$;

25. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 + e^{2x}, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 + 1, \end{cases}$
$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$;

26. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 2y_2 + 2\sin x, \\ y_2' = 3y_1 + 6y_2, \end{cases}$
$y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$;

27. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 + 4y_2 + e^{3x}, \end{cases}$
$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$;

28. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 5y_2 - \cos x, \end{cases}$
$y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$;

29. $\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 2y_2 + 3x, \\ y_2' = y_1 + 7y_2, \end{cases}$
$y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$;

30. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + \sin x, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 - \cos x, \end{cases}$
$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

Література

1. А.Д. Кузик, О.О. Карабин, О.М. Трусевич. Вища математика: навч. пос. Ч. 1. Львів: Видавництво ЛДУБЖД, 2014. 400 с.
2. А.Д. Кузик, О.О. Карабин, О.М. Трусевич. Вища математика: навч. пос. Ч. 2. Львів: Видавництво ЛДУБЖД, 2014. 200 с.
3. Т.П. Гой, О.В. Махней. Диференціальні рівняння: навч. пос. Вид. 2-ге, випр. та доп. Тернопіль: Навчальна книга. Богдан, 2014. 360 с.
4. О.М. Бугрій, Н.П. Процах, Н.В. Бугрій. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі. Львів: Видавець І. Чижиков, 2011. 348 с.
5. О.М. Бугрій. Диференціальні рівняння. Методичні вказівки. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006. 47 с.
6. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. Вища математика: навч. пос. Київ: А.С.К., 2006. 648 с.
7. Г.П. Лопушанська. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. 165 с.
8. Ю.К. Рудавський, П.І. Каленюк, Р.М. Тацій та інші. Збірник задач з диференціальних рівнянь: навч. пос. Львів: Видавництво НУ «Львівська політехніка», 2001. 244 с.
9. П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. Вища математика. Частини 1, 2. Київ: Техніка, 2000.
10. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ: Вища школа, 1994. 455 с.
11. Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: навч. пос. Ч. 1. Київ: Либідь, 1992. 288 с.
12. І.П. Васильченко, В.Я. Данилов, А.І. Лобанів. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: навч. пос. Ч. 2. Київ: Либідь, 1992. 256 с.