МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ З НЕЧІТКО ВИЗНАЧЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рак Т. Є., Малець І. О., Лясковська С.Є.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська 35, Львів, Україна, 79000
e-mail:malets1@ukr.net

Анотація – пропонується методика розв'язування практичних задач формування областей параметрів та оптимізації багатопараметричних технічних систем з нечітко визначеними параметрами на засадах використання поняття розмитої множини L. A. Zadeh, метрик Кантора і Хаусдорфа.

Ключові слова – багатопараметрична технічна система, нечітко визначені параметри, розмита множина, метрика, геометрична модель.

Постановка проблеми. Підвищення вимог до якості функціонування багатопараметричних технічних систем висуває суттєво нові наукові завдання щодо їх дослідження та аналізу. Через бурхливий розвиток обчислювальних засобів на сьогодні все більш поширені відомі раніше методи розрахунків параметрів технічних систем, такі як метод скінченних елементів, метод найменших квадратів та інші [1]. Практично усі обчислювальні методи передбачають використання заданих з різною точністю визначення числових значень параметрів при комп'ютерному конструюванні поданої багатовидом чи гіперповерхнею *n* – вимірного фазового простору моделі досліджуваної багатометричної технічної системи. Графоаналітичні образи елементів фазового простору різної розмірності побудовані з врахуванням неперервного розташування їх вимірів, які являють числа різної розмірності, на відповідних числових осях. Разом з тим деякі з вимірів, у ролі яких виступають нестрого визначені або важко спостережувані параметри технологічних процесів чи регульованих систем, можуть бути задані в деяких довірчих областях. Тоді їх значення, що займають поінтервально позиції відповідної числової осі, впливають на вигляд відображуваних графоаналітичних залежностей. Використання основних понять теорії нечітких множин, яка уможливлює математичне моделювання і аналіз неточно і неповно визначених множин, зокрема, стосовно теорії прийняття рішень в нечіткій обстановці, біології, медицини доцільне і в процесі досліджень багатопараметричних технічних систем засобами багатовимірної прикладної геометрії. В основу методу покладене поняття "нечіткості" (fuzziness) теорії математичних множин, що характеризує степінь належності об'єкта певній множині. В термінах геометрії цьому відповідає степінь належності точки як миттєвого стану процесу багатовидові чи поверхні, яка моделює процес. Тому природно використати таке поняття і в прикладній геометрії поверхонь, зокрема, шляхом введення довірчих каркасів. Являє інтерес врахування таких довірчих областей параметрів при конструюванні моделей регульованих багатопараметричних технічних систем.

Аналіз останніх досліджень. Широке поширення процесів та систем з нечітко визначеними параметрами вимагає розроблення і використання досконалих комп'ютерних засобів їх дослідження із залученням, зокрема, методів прикладної багатовимірної геометрії. Особливого значення набувають такі методи при конструюванні областей параметрів та оптимізації окремих ланок регульованих систем і процесів. Зазвичай в процесі створення моделі, адекватної досліджуваній системі, та її аналізі оперують числовими значеннями параметрів без урахування точності їх задання чи визначення. В свою чергу нечіткість і неповнота результатів експериментального визначення параметрів потребує використання понять теорії нечітких множин L. A. Zadeh при формуванні геометричних образів обхоплюючих багатовимірних фазових просторів як границь областей параметрів системи чи процесу особливо щодо формування ліній, які виступають елементами каркасів поверхонь точкових, лінійчастих та точково-лінійчастих. При формуванні складових гіперповерхонь, що являють границі областей параметрів, логічним видається використання фундаментальних понять і означень теорії нечітких множин [2,3,4,5]. Тут нечітка множина виступає як множина пар $\{ x, \mu_n(x) \}$, де $\mu_n(x)$ є елементом деякої структури з доповненням, що характеризує степінь належності об'єкта x множині A [3]. В математиці другої половини XX століття все частіше і чіткіше проявляються тенденції відмови від суворо ("жорстко") детермінованих понять і структур. В 1974 р. Chapin побудував аксіоматичну теорію для різних варіантів теорії нечітких множин: предикат належності $\in$ в цій теорії тримісний. Інтуїтивно $\in(x, y, z)$ значить, що x виступає елементом y із степенем членства не менше z [6]. В 1973 р. Lakoff G. розробив і ввів нове поняття степені істинності в математичній логіці, близьке до "небулярної" логіки В.Г.Кулікова [2]. В логічній системі Zadeh L.A. істиностними значеннями виступає зчислене число словесних позначень, кожному з яких відповідає розмита підмножина дійсних чисел з інтервалу (0,1). Її роль виконує функція над цим інтервалом, яка співставляє кожній точці інтервалу деяке число - ймовірність або степінь належності точки підмножині [5].

Підходи до тлумачення понять теорії нечітких множин різні. Так, в [6] основні поняття теорії нечітких множин Zadeh L.A. розглядаються з точки зору класифікації об'єктів, які задані набором ознак. З іншого боку, виходячи з уяви нечітких множин як сімейства множин, що розширюється, в [7] встановлений зв'язок нечітких множин з "флоу"-множинами, визначеними як пари $\tau = (\varepsilon, F)$, де ε- область надійності, а $F/_{\varepsilon}$ - область нечіткості.

Нова теорія, успішно апробована в різних галузях знань, теорії систем, дозволяє виконувати математичне моделювання неточно і неповно визначених множин, елементи якої складають змінні параметри багатопараметричних технічних систем. Тому природним є намагання застосувати її основні поняття в тому числі при геометричному моделюванні регульованих багатопараметричних технічних систем і процесів, зокрема, з параметрами, значення яких визначені у певних довірчих областях.

Формулювання цілей статті. На засадах використання фундаментальних положень теорії нечітких множин запропонувати засоби визначення границь областей параметрів багатопараметричних технічних систем із нечітко визначеними параметрами.

Основна частина. Подамо дійсне число як складову одного з багатовимірних чисел в деякому інтервалі належності, який визначається обмеженою кривою L областю S допустимих відхилень цього числа від його номінального значення. Відповідно до представлення моделей засобами теорії нечітких множин визначимо інтервали значень числа як параметра регульованої системи у довірчій області у вигляді значення довірчої функції D:

$$D(u)=\begin{cases} 0 & \\ 1 & \text{при} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} U \le U - \Delta u; \\ U; \\ U \ge U + \Delta u. \end{matrix}$$

Нехай Φ є асоційованою з точкою E областю допустимого відхилення точки E від її дійсного положення. Тоді для двох областей Φ_1 і Φ_2, що відповідають точкам E_1, E_2, відстань у довірчій області визначається :

- як найменша з відстаней між точками двох областей

$$\rho_c(\Phi_1, \Phi_2) = \inf\{\rho(E_1, E_2)\}, \quad E_1 \in \Phi_1, E_2 \in \Phi_2 \tag{1}$$

- як верхня границя найбільших відстаней між точками двох областей

$$\rho_H(\Phi_1, \Phi_2) = \sup\{\rho(E_1, \Phi_2), \rho(E_2, \Phi_1)\}. \tag{2}$$

Тоді відстань у довірчій області ρ_F асоційованих областей Φ_1,Φ_2, що відповідають точкам E_1, E_2, визначається інтервалом

$$\rho_c(\Phi_1, \Phi_2) \le \rho_F(E_1, E_2) \le \rho_H(\Phi_1, \Phi_2). \tag{3}$$

Очевидно, що обидві складові ρ_F (E_1, E_2) для точкових множин ідентичні. Тому введення таких асоційованих областей Φ_1, Φ_2, що відповідають точкам E_1, E_2, з одного боку відображає нечіткість в досліджуваних системах чи процесах, а з другого – дозволяє визначити інтервальну функцію ρ_F (E_1, E_2) як відстань у довірчій області параметрів. На основі пропонованої лонгометрики у довірчих областях – визначення відстаней між елементами простору – можна застосувати гономерику $\gamma_F(a_1,a_2)$ – визначення кутів, заданими в довірчих областях двома відрізками, кутом нахилу відрізка до осі, до площини проекцій тощо. Лінії в довірчих областях з-поміж $a_1^{\,1}$,$a_1^{\,2}$ та $a_2^{\,1}$,$a_2^{\,2}$, які утворюють з віссю ox максимальні $\gamma_{\max}(a_1^1, x)$, $\gamma_{\max}(a_2^1, x)$ та мінімальні $\gamma_{\min}(a_1^2, x)$, $\gamma_{\min}(a_2^2, x)$ значення кутів, являють внутрішні опорні прямі пар Φ_1, Φ_2 і Φ_1, Φ_3, які визначають асоційовані геометричні області відповідних точок. Тоді значення кута між прямими у довірчій області

$$\gamma_F(a_1, a_2) = \left| \gamma_F(a_1, x) \Big|_{\gamma_{\min}(a_1^2, x)}^{\gamma_{\max}(a_1^1, x)} - \gamma_F(a_2, x) \Big|_{\gamma_{\min}(a_2^2, x)}^{\gamma_{\max}(a_2^1, x)} \right|. \tag{4}$$

Отже, визначення кожного числа U у довірчій області, яку являє відрізок $2\Delta u$ числової осі ou, зводиться до завдання довірчого числа, значення якого є постійним і складає U при значеннях довірчої функції $D(u)$=1. Для прийнятої числової осі u довірча область числа U_j відповідає його постійному значенню і складає відрізок довжиною $2\Delta u$.Поєднаємо дві числові осі ou та ox, утворивши прямокутну чи косокутну систему координат. Для заданих довірчих областей чисел U_j та X_j, взятих на кожній числовій осі, отримаємо точку в площині на перетині смуг, як границь довірчих областей чисел. Кожна смуга паралельна відповідній координатній лінії і розміщена так, що її границі є лініями

$$x = x_j \pm \Delta x;$$
$$u = u_j \pm \Delta u,$$

де складові Δx, Δu визначимо:

$$\Delta x = \frac{\left| x_{j+1} - x_j \right|}{2};$$

$$\Delta u = \frac{\left| u_{j+1} - u_j \right|}{2}.$$

Приймемо, що довільна точка A в системі координат oxu має довірчі координати $A\left(x_j \pm \Delta x, u_j \pm \Delta u\right)$, визначені на перетині відповідних цим координатам смуг. Таким чином, при належності точки площині ортогональної системи координат довірчою областю точки слугує прямокутник чи квадрат або ромб чи паралелограм косокутної системи координат.

Наведені довірчі області визначення положення точки дозволяють визначати її положення тільки вздовж осі дійсних чисел. З аналізу множини дійсних чисел осі ou відмітимо також довірчу область визначення числа u_0 в напрямку, ортогональному до дійсної осі ou. Якщо вздовж напрямку цієї осі маємо деяке число в довірчій області $\pm\Delta$, яке у такому випадку залишається дійсним, то довірча область визначення числа u_0 в напрямку, ортогональну до осі ou, задає число у довірчій дійсній області: тільки певна складова цього числа знаходиться в області дійсних чисел. До цього висновку також приходимо, аналізуючи корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, дискримінант якого $D=b^2-4ac$ від'ємний. Складова частина коренів такого рівняння знаходиться в області дійсних чисел, інша їх частина знаходиться поза границями цієї області і утворює область звичайних комплексних чисел. Зауважимо також, що множина звичайних комплексних чисел побудована з таким розрахунком, щоб дія добування кореня виконувалась в її границях, включаючи область дійсних чисел. З урахуванням довірчих областей дійсних чисел, наприклад, комплексне число z представимо у довірчій області Z на перетині смуг, шириною $\pm\Delta x$ і $\pm\Delta y$, паралельних напрямкам координатних осей ox та oiy ортогональної та косокутної системи. Для випадку визначення комплексного числа у полярній системі координат введемо сектори розміром $2\Delta\varphi$, поділені концентричними колами з радіусами в інтервалі $2\Delta r$ на зони, які являють довірчі області як області визначення комплексних чисел. Комплексне число запишемо у вигляді:

- для декартової прямокутної та косокутної системи координат

$$z = x \pm \Delta x + i\left(y \pm \Delta y\right);$$

- для полярної системи координат

$$z = \left(r \pm \Delta r\right)\left(\cos\left(\varphi \pm \Delta\varphi\right) + i\sin\left(\varphi \pm \Delta\varphi\right)\right) = \left(r \pm \Delta r\right)e^{i\left(\varphi \pm \Delta\varphi\right)}.$$

З урахуванням довірчих областей подання чисел різної розмірності один із можливих шляхів конструювання моделей регульованих багатопараметричних технічних систем і процесів з певними обмеженнями на степінь точності визначення числових значень параметрів полягає у використанні координатних шарів як аналогів координатних ліній та трубчастих каркасів як аналогів лінійчастих. Кожний шар $X_{i,i+1}^{j}$ в одній з багатовимірних координатних площин обмежений координатними лініями X_{i}^{j} та X_{i+1}^{j}. Перетин шарів $X_{i,i+1}^{j}$ та $X_{i,i+1}^{j+1}$ визначає деяку геометричну область. Точка E, належна шарові $X_{i,i+1}^{j}$ або $X_{i,i+1}^{j+1}$, є такою, що має інтервальну координату $X_{i,i+1}^{j}$ або $X_{i,i+1}^{j+1}$. Ширину координатного шару $X_{i,i+1}^{j}$ задає допустима похибка d визначення числового значення технологічного параметра. Тоді багатовимірні координатні площини як лінійні підпростори n - вимірного фазового простору із координатними шарами $X_{i,i+1}^{j}$ слугують комплексним кресленням деякої гіперповерхні α як геометричної моделі системи чи процесу. Каркас такої гіперповерхні складають трубки, що сукупно утворюють обмежені області трубчастих поверхонь. Приймаємо діаметр кожної трубки каркасу поверхні незмінним і відповідним допустимій похибці d. Взаємозв'язком між трубчастим та лінійчастим каркасом слугують осі трубок, які являють одночасно лінії лінійчастого каркасу. Деяка точка E, належна будь - якій трубці, одночасно належить також гіперповерхні α. Належність точки E гіперповерхні α може бути відносною або нечіткою. Степінь належності точки E гіперповерхні α визначається віддаллю точки до осі трубки, яка входить до складу гіперповерхні α, і являє задачу на взаємне положення точки із заданим відхиленням від дійсного положення та гіперповерхні α.

Побудову моделей геометричних образів багатовимірного фазового простору із нестрого визначеними параметрами проводимо, використовуючи двовимірні площини проекцій комплексного креслення. Нехай точність визначення числового значення параметра регульованої багатопараметричної технічної системи чи процесу становить Δ. Проведемо в одній з площин проекцій Oxy систему координатних полос та $Y_i, Y_{i+\Delta}$ (рис.1). Їх перетин утворює деяку область σ, яка подібно з точкою перетину координатних ліній складає нечітку модель проекції точки. Означимо її як область допустимого відхилення точки від дійсного положення (ОДВТ). У кожній з площин проекцій модель точки уособлює квадрат. При збільшенні розмірності фазового простору нечітку модель точки подає відповідно куб чи паралелотоп. Фіксоване положення точки із чіткими координатами має похибку положення $\delta_n = \Delta\sqrt{n}$, де n – розмірність простору. Зокрема, у двовимірній координатній площині $\delta_2 = \Delta\sqrt{2}$. Послідовність визначення відстані між двома точками, координати яких нечіткі, наприклад, σ і σ_1, наступна (див. рис.1).

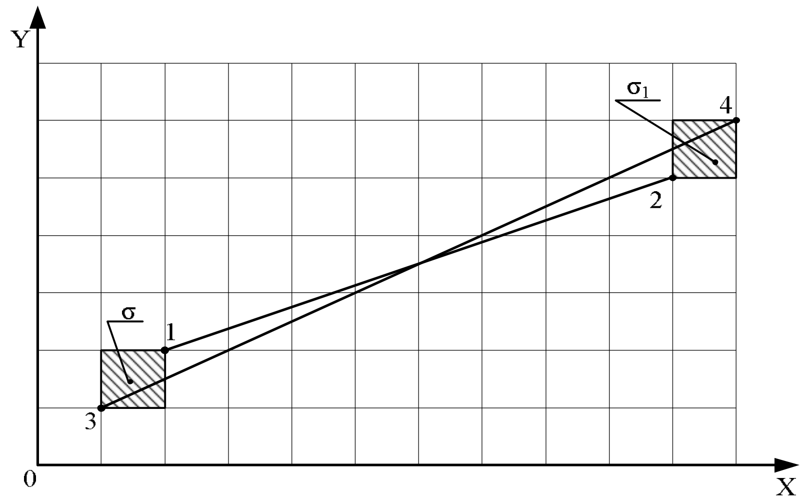

Рис.1. Координатні полоси площини проекцій *Oxy*.

Нечітка відстань ρ між двома точками гіперповерхні α знаходиться в інтервалі відстаней між найближчими точками 1,2 та найвіддаленішими точками 3 і 4, тобто

$$\rho_{12} \le \rho_{\sigma\sigma_1} \le \rho_{34} . \tag{5}$$

Аналіз (5) показує, що визначення відстані між двома поданими на засадах використання геометричних засобів теорії розмитих множин нечіткими точками ґрунтується у нижній границі на метриці Кантора [8,9], а у верхній границі – на метриці Хаусдорфа [10]. Залежно від вибору опорних точок в ОДВТ, σ і σ_1 призначається відповідний вигляд метрики. Для пари точок 1,2 необхідно використати метрику Кантора, а для точок 3,4 – метрику Хаусдорфа. Побудова відстаней між означеними точками суттєво залежить від вибраної норми Гельдера [11]. В такому випадку отримуємо метричні характеристики в довірчих областях, відмінні від класичного поняття метрики. Маємо підставу стверджувати можливість введення довірчої метрики шляхом сумісного застосування принципів класичних метрик Кантора і Хаусдорфа з одного боку і норми Гельдера з іншого. Тоді віддаль між двома довірчими областями, що відповідають точкам А і В, в С-метриці Кантора складає найменша з відстаней між точками двох областей:

$$\rho_c(A,B) = \underset{1\in A, 2\in B}{\inf}(1,2), \tag{6}$$

в Н-метриці Хаусдорфа верхня границя найбільших віддалей між точками двох областей являє:

$$\rho_H(A,B) = \underset{3\in A; 4\in B}{\max}\{\sup(3,B), \sup(4,A)\}, \tag{7}$$

в просторі з нормою Гельдера

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}_{(1 \le p \le \infty)}, \tag{8}$$

яка включає евклідову (p=2) метрику як частковий випадок. Введення норми Гельдера суттєво розширює спектр можливого практичного застосування методу графоаналітичного відображення елементів простору в довірчих областях в першу чергу для моделювання багатопараметричних технічних систем.

За наведеними умовами довірча відстань між двома областями точок являє:

$$\rho(A,B) \le \rho_F(A,B) \le \rho_H(A,B). \tag{9}$$

Визначивши складові виразу, маємо:

$$a_{\min} \le \rho_F(A,B) \le a_{\max}, \tag{10}$$

де $a_{\min} = \rho_c(A,B) = \left|(A_{x1} + \Delta x_1, A_{x2} - \Delta x_2) - (B_{x1} - \Delta x_1, B_{x2} + \Delta x_2)\right|;$

$$a_{\max} = \rho_H(A,B) = \left|(A_{x1} - \Delta x_1, A_{x2} + \Delta x_2) - (B_{x1} + \Delta x_1, B_{x2} - \Delta x_2)\right|.$$

За відомими довірчими областями значень довжин окремих відрізків визначаються інші метричні характеристики геометричних примітивів. Площу S трикутника, наприклад $\Delta^I A^I B^I C$ у довірчій області, визначимо, знаючи довірчі області значення довжин його сторін *a, b, c*. Для цього скористаємося формулою:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{11}$$

де p – півпериметр трикутника.

У довірчій області значень вершин ${}^IA, {}^IB, {}^IC$ довжини сторін трикутника являють:

- у нижній границі ${}^Ia_{min}$, ${}^Ib_{min}$, ${}^Ic_{min}$, якій відповідає півпериметр p_{min};
- у верхній границі ${}^Ia_{max}$, ${}^Ib_{max}$, ${}^Ic_{max}$, якій відповідає півпериметр p_{max}.

Тоді площа трикутника у довірчій області S_F знаходиться в границях:

$$S_{\min} \le S_F \le S_{\max}, \tag{12}$$

де $S_{\min} = \sqrt{p_{\min}(p_{\min} - a_{\min})(p_{\min} - b_{\min})(p_{\min} - c_{\min})}$,

$$S_{\max} = \sqrt{p_{\max}(p_{\max} - a_{\max})(p_{\max} - b_{\max})(p_{\max} - c_{\max})}.$$

Висновок. В роботі запропоновано використовувати в якості геометричних засобів прикладної багатовимірної геометрії стосовно моделювання *n* - параметричних технічних систем і процесів з нестрого визначеними параметрами побудовані з використанням понять теорії нечітких множин L. A. Zadeh геометричні моделі обхоплюючих багатовимірних фазових просторів у вигляді трубчастих гіперповерхонь із призначеними метриками Кантора і Хаусдорфа та заданою нормою Гельдера.

Література

1. Савула Я. Г. Метод скінченних елементів. – К.:НМК ВО, 1993. – 100 с.
2. Lakoff G.Medges: a stagy in meaning criteria and Logis of fuzzy conzepts // J.Phil. Log .-2,N4.-1973.-S.458-508.
3. Zadeh L.A. Inform . and control.-8.-1965.-S.338-353.
4. Zadeh L.A. Outline of a new approach to the analysis of complex system and decision processes // IEEE Trans. Syst. Man & Cybern.-1969.-S.28-44.
5. Zadeh L.A. Fuzzy Logic and approximate reasoning // Synthese.-30, N 3-4.- 1975.-S.407-408.
6. Реброва М.П. Размытые множества в теории классификации // Науч.-техн. инф. сб. Всесоюзного ин-та науч. и техн. инф.-1976.- Сер.2,№10.- С.15-21.
7. Negoita C.V., Ralescu D.A. L-fuzzy Sets and L-flou Sets // Electron. Informations - verarb. und Kybern. 12, N 11-12.-1976.-S.599-605.
8. Александров П.С. Введение в теорию множеств и функций / П.С. Александров. – М.: Изд. техн. – теорет. лит. – 1948. – 411 с.
9. Cantor G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Repr. ed. Berlin e.a., Springer. – VIII. – 1980. – 486 s.
10. Берже М. Геометрия. Т.1. – М.: Мир, 1987. – 580 С.
11. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука. – 1983. – 334 с.