

**ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ
ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ**

Соломія ЛЯСКОВСЬКА, Євген МАРТИН

**МАТЕМАТИЧНІ ТА АЛГОРИТМІЧНІ
ОСНОВИ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ**

Навчальний посібник

Львів – 2025

УДК 744:004 (075.8)

ББК 32.81

Л 97

Соломія Ляковська, Євген Мартин. Математичні та алгоритмічні основи комп'ютерної графіки. Львів: ЛДУ БЖД, 2025. 183 с.

Рецензенти:

Тригуба А. М., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних систем та технологій Львівського національного аграрного університету;

Ткачук Р.Л., доктор технічних наук, професор, начальник кафедри управління інформаційною безпекою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності.

Видання містить базові поняття, визначення, математичні та алгоритмічні засади, покладені в основу графічних інформаційних технологій. Викладення матеріалу ведеться з залученням математичних засобів, зокрема, елементів матричного числення та основних положень графічних технологій.

Теоретичними засадами формування просторових фігур, крім математичних методів, слугують класичні поняття нарисної геометрії, зокрема, розділів проекційного креслення, аксонометричних і перспективних проекцій. Кращому розумінню теоретичних основ процесів перетворення геометричних об'єктів сприяє достатнє число детально розібраних прикладів з елементами дво- і тривимірної комп'ютерної графіки переважно прикладного спрямування. Окремі розділи містять додаткові пояснення використаних математичних і алгоритмічних методів.

Матеріал навчального посібника слугуватиме довідником в процесі поглибленого вивчення графічних комп'ютерних технологій щодо моделювання багатопараметричних систем, процесів і явищ і може бути використаний у навчальному процесі.

Рекомендовано до друку Вченою радою
Львівського державного університету безпеки життєдіяльності
(Протокол №7 від 28 лютого 2024 року).

ISBN 978-617-8654-06-1

© Соломія Ляковська, 2025

© Євген Мартин, 2025

© ЛДУБЖД, 2025

ЗМІСТ

.....	5
1. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ПРОСТОРУ E^2	8
1.1. Зображення і перетворення точок і відрізків прямих ліній	9
1.1.1. Подання точок.....	9
1.1.2. Перетворення точок	9
1.1.3. Перетворення прямих ліній.....	14
1.1.4. Перетворення середини відрізка.....	15
1.1.5. Перетин прямих ліній	16
1.1.6. Обертання.....	20
1.1.7. Відображення.....	20
1.1.8. Зміна масштабу	21
1.1.9. Комбіновані перетворення	22
1.2. Зображення і перетворення геометричних фігур.....	23
1.2.1. Перетворення одиничного квадрата.....	23
1.2.2. Довільна матриця перетворення 2×2	24
1.2.3. Перетворення жорстких конструкцій	26
1.2.4. Двовимірні зміщення і однорідні координати	27
1.2.5. Двовимірне обертання навколо довільної точки	31
1.2.6. Відображення відносно довільної прямої.....	32
1.2.7. Точки безконечності	36
1.3. Правила виконання перетворень	38
2. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ПРОСТОРУ E^3	40
2.1. Перетворення точок і відрізків прямих ліній простору E^3	41
2.1.1. Зміна масштабу.....	41
2.1.2. Тривимірні обертання	45
2.1.3. Відображення в просторі E^3	51
2.1.4. Композиції перетворень	52
2.1.5. Обертання навколо паралельної координатній осі прямої	52
2.1.6. Обертання навколо довільної осі в просторі E^3	54
2.1.7. Відображення відносно довільної площини.....	57
2.2. Афінна і перспективна геометрія. Аксонометричні проекції	57
2.2.1. Ортографічні проекції.....	59
2.2.2. Аксонометрія	61
2.3. Перспективні перетворення	74
3. ВІДОБРАЖЕННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ НА ПЛОЩИНІ	93
3.1. Плоскі криві лінії.....	94
3.2. Параметричні криві лінії.....	97
3.3. Параметричне подання еліпса.....	102
3.4. Конічні перерізи	103
3.5. Паралельність осей перерізу осям координат	105
3.6. Визначення центрального чи нецентрального перерізу.....	106
4. АЛГОРИТМИ РАСТРОВОЇ ГРАФІКИ	110
4.1. Алгоритми викреслювання ліній	111

4.2. Алгоритм Брезенхема	114
4.2.1. Цілочисельний алгоритм Брезенхема	117
4.2.2. Загальний алгоритм Брезенхема	119
4.3. Відсікання.....	123
4.3.1. Двовимірне відсікання	123
4.3.2. Тривимірне відсікання	127
5. ЗАСОБИ ВІДОБРАЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ У	
ПРОСТОРИ E^3	130
5.1. Побудова просторових кривих ліній	131
5.2. Криві Без'є.....	134
5.3. Геометричне моделювання поверхонь.....	136
5.3.1. Плоскі поверхні	138
5.3.2. Білінійні поверхні.....	141
5.4. Видалення невидимих ліній поверхонь	142
5.5. Алгоритми видалення невидимих ліній.....	144
5.6. Алгоритм плаваючого горизонту	146
5.7. Алгоритм Робертса.....	158
5.7.1. Принцип роботи алгоритму Робертса	158
5.7.2. Послідовність реалізації алгоритму Робертса.....	175
Перелік використаних джерел.....	182

ВСТУП

Основне призначення комп'ютера полягає у перетворенні інформації, переважно пов'язаної із графічними зображеннями об'єктів, процесів і явищ. Такі *перетворення поділяють на три основні напрямки:*

комп'ютерна графіка, яка надає широкі функціональні можливості для створення геометричних моделей розмаїтих багатопараметричних систем, процесів і явищ,

оброблення створених моделюванням графічних зображень об'єктів для зміни їх властивостей,

розпізнавання графічних зображень об'єктів для формування відповідних їм математичних моделей.

Комп'ютерну графіку розглядають як науку про автоматизацію процесів підготовки, перетворення, зберігання і виведення графічної інформації за допомогою комп'ютера [1,2,3,4,5,6]. Отже, завдання комп'ютерної графіки полягає у візуалізації, тобто створенні зображень розмаїтих геометричних об'єктів і сцен реального світу. Візуалізацію виконують, виходячи з опису, тобто моделі, насамперед математичної, того об'єкта, явища чи процесу, який підлягає відображенню. Використовують для цього результативні графічні програми. Для розв'язування нових практичних задач створюють відповідно нові графічні програми. Це потребує глибоких знань з основ графічних інформаційних технологій. Такі знання корисні також в процесі роботи з існуючими графічними програмами [7,8,9]; у поєднанні з мистецтвом програмування вони надають розуміння майбутнього поступу в процесі подальшого розвитку інформаційних технологій.

Основою комп'ютерної графіки є фундаментальні дисципліни: аналітична геометрія і оптика, поєднані мистецтвом програмування [10,11,12].

Побудова зображення складається з двох етапів [1]:

моделювання з використанням засобів математичного опису таких об'єктів і сцен різного походження: геометричні фігури і тіла дво- і тривимірного простору, процеси і явища у природі та виробництві;

візуалізація шляхом відображення створених математичних моделей об'єктів, процесів та явищ на екрані дисплея.

Комп'ютерне зображення подібне на реальне тільки у випадку вдалого використання методів моделювання геометричних форм та їх достовірної візуалізації. Одним з перших покликань комп'ютерної графіки було створення реальних зображень навколишнього середовища, втіленням яких являють системи віртуальної реальності щодо моделювання навколишнього середовища за допомогою поєднання візуальних, акустичних та інших фізичних ефектів. Очевидно, що такий комп'ютерній графіці посильне створення також нереальних, тобто фантастичних зображень та ефектів як складових відомих комп'ютерних ігор чи кінострічок. Першою такою кінострічкою вважають фільм «Зоряні війни», створений з допомогою суперкомп'ютера Cray. Відмітимо, що поширеним також є практичне застосування комп'ютерної графіки у

рекламному бізнесі шляхом створення анімованих, тобто рухомих елементів рекламованого товару.

Комп'ютерна графіка є *головним стрижнем* [1]

систем автоматизованого управління, у яких має місце інтерактивна взаємодія конструктора і створеного засобами комп'ютерної графіки зображення тобто геометричної моделі виробу;

автоматизованих систем наукових досліджень для візуалізації засобами комп'ютерної графіки результатів таких досліджень;

розпізнавання та оброблення зображень у системах штучного зору, авіа - та космічної картографії тощо.

Зображення, які створюють засобами комп'ютерної графіки, являють комбінацію точок і похідних від них ліній та символного тексту [1]. Точка визначається трьома координатами x , y , z , відрізок прямої лінії може бути заданий, наприклад, координатами початкової точки x_1, y_1, z_1 і кінцевої x_2, y_2, z_2 , а текст – комбінацією відрізків або точок.

Криві лінії у комп'ютерній графіці формують шляхом апроксимації короткими відрізками прямих ліній.

Сучасна комп'ютерна графіка виступає насамперед як *інтерактивна комп'ютерна графіка*, тобто важливою є здатність комп'ютерної системи створювати графіку в прямому діалозі з користувачем. Це дає змогу оперативно вносити зміни у процес створення моделі. Попередні версії комп'ютерних графічних систем працювали в пакетному режимі: можливості безпосереднього впливу на процес формування зображення були відсутні.

Графічні зображення на екрані дисплея утворюють з точок, званих *пікселями*. Пікселі розташовуються конструктивно по вертикалі та горизонталі екрана. Такий стиль комп'ютерної графіки має назву *растрової комп'ютерної графіки*. Лінія в растровій комп'ютерній графіці утворюється з пікселів, які так наближені один до одного, що моделюють цю лінію. Тому всі моделі створюються з відрізків прямих ліній, які сукупно визначають її каркас.

Векторна комп'ютерна графіка заснована на вільному переміщенні струменів електронів по екрану подібно як олівця по поверхні паперу. Зображення засобами векторної комп'ютерної графіки формуються на екрані дисплея шляхом викреслювання відрізків ліній або векторів. Створена модель графічного об'єкта запам'ятовується комп'ютером не у вигляді множини точок, а у вигляді векторів.

В процесі розв'язування графічної задачі, тобто створення моделі, можна виділити такі три етапи:

1. Введення в комп'ютер літерно-цифрових даних, які необхідні для визначення зображення.

2. Опрацювання даних в комп'ютері за допомогою відповідної програми як множини цифр, що описують зображення.

3. Візуалізація зображення на екрані з використанням відповідної програми. До мови графічного програмування висуваються такі вимоги:

1. Мова програмування має давати можливість і засоби для описування, перетворення та генерації відображень.

2. Мова програмування має бути гнучкою і має мати засоби роботи з процедурами.

3. Мова програмування має мати засоби для аналізу зображень. Повинні бути передбачені команди для дослідження властивостей зображення.

Контролери відеосистем (відеоадаптери) – це електронні схеми, що забезпечують формування відеосигналу і, отже, визначають зображення, яке показує монітор. В персональних комп'ютерах позитивним з позицій власне графіки є те, що відеоадаптер розташований поруч з процесором та оперативною пам'яттю, бо підключений до системної шини через швидкісну локальну шину. Це дає можливість швидко вести обмін даними між оперативною та відеопам'яттю. Розвиток відеоадаптерів спрямований на підвищення роздільної здатності та числа кольорів.

Комп'ютерна графіка як візуалізація чисельно-літерної інформації передбачає таким чином [1]:

- візуалізацію результатів обчислень у вигляді плоских та просторових графіків та діаграм;

- об'єктну візуалізацію у вигляді геометричних моделей просторових об'єктів як результатів математичного моделювання багатопараметричних об'єктів, явищ і процесів;

- автоматизоване проектування як окремих елементів і деталей, так і виробів та комплексів у промисловості.

Шляхи реалізації процесів комп'ютерного моделювання:

- мова програмування;

- спеціалізовані графічні пакети.

Згадані задачі, які покликані розв'язувати комп'ютерна графіка, належать до багатопараметричних [13,14,15,16]. Геометричні образи, плоскі чи просторові моделі таких багатопараметричних систем, процесів і явищ, пов'язують два і більше функціональних параметри. Такі моделі реалізуються засобами комп'ютерної графіки у вигляді зображень геометричних образів чи графічних залежностей. Їх основою слугують математичні співвідношення, формули, які мають відповідні геометричні інтерпретації. Перетворення геометричних примітивів як складових елементів поверхонь відбуваються, опираючись на основний метод відображення просторових фігур у нарисній геометрії – *метод проєкціювання* [1]. Зазначений метод реалізований способами перетворення геометричних фігур в інженерній графіці, такими як масштабування, обертання, дзеркальні відображення, ортогональні, аксонометричні, перспективні проєкції тощо. У комп'ютерній графіці запозичені у нарисної геометрії засоби реалізовані завдяки залученню багатого математичного інструментарію, насамперед використанню елементів теорії матриць. Прості математичні перетворення геометричних примітивів є фундаментом сучасних складних графічних програм створення моделей багатопараметричних об'єктів, процесів і явищ.

РОЗДІЛ 1

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ПРОСТОРУ E^2

- Зображення і перетворення точок і відрізків прямих ліній

-. Зображення і перетворення геометричних фігур

- Правила виконання перетворень

1.1. Зображення і перетворення точок і відрізків прямих ліній

Зображення геометричних об'єктів засобами комп'ютерної графіки створюється точками і лініями. Отже, можливість *перетворення точок і ліній* є основою комп'ютерної графіки. Такі перетворення можна виконувати на основі залучення математичних методів [11] та геометричних засобів [1].

1.1.1. Подання точок

Точку, наприклад, A в площині Oxy (рис.1.1а) задають двома координатами x_A та y_A . Їхні значення в комп'ютерній графіці подають переважно у вигляді вектора – рядка

$$[x_A \ y_A].$$

У тривимірному евклідовому просторі $Oxyz$ (рис.1.1б) точку A подають матрицею з трьома координатами x, y, z

$$[x_A \ y_A \ z_A].$$

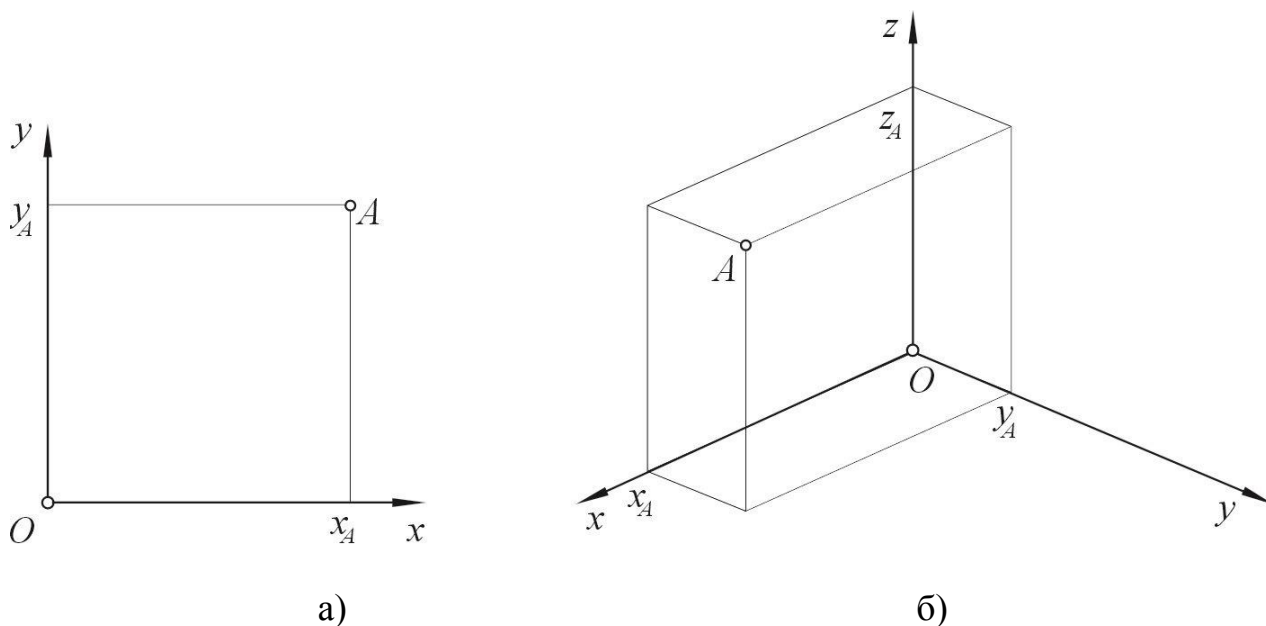


Рисунок 1.1 – Точка A дво- а) і тривимірного б) простору

Можливі подання точки також векторами – стовпчиками $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ у площині чи $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ у тривимірному просторі.

1.1.2. Перетворення точок

Виконаємо матричне множення матриці $[x \ y]$, що визначає деяку точку, і матриці перетворень 2×2 виду $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ на (рис.1.2).

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ax + cy) & (bx + dy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

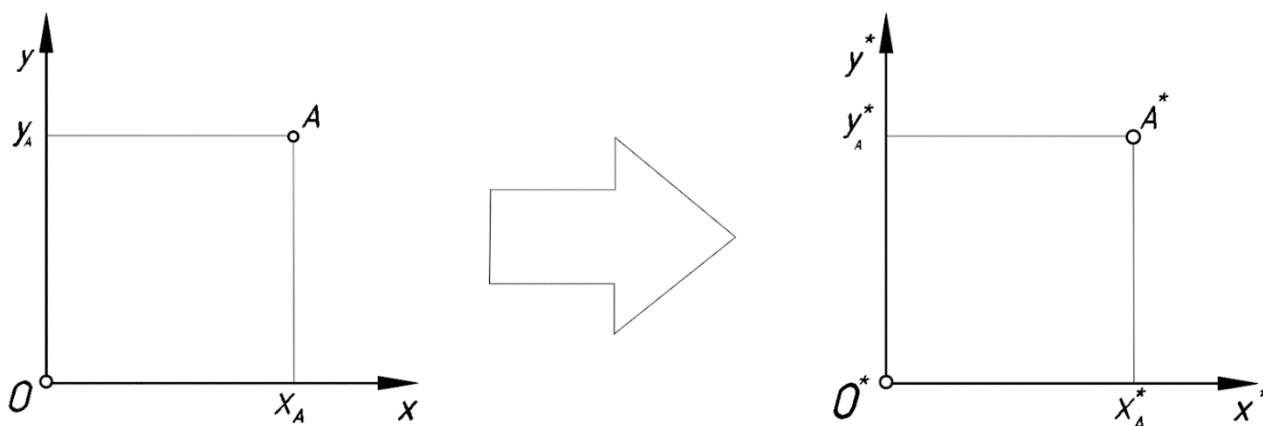


Рисунок 1.2 – Матричне множення координат точки

За допомогою наведеного виразу здійснили перетворення двох координат x , y точки A в координати x^* , y^* перетвореної точки A^* .

Одержали, що $x^* = ax + cy$; $y^* = bx + dy$, які є перетвореними координатами точки.

Розглянемо випадки:

1. $a = d = 1, c = b = 0$. Тоді

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

В результаті перетворення одержали початкову матрицю, у якій маємо $x^* = x$; $y^* = y$. Змін координат точки не відбувається.

2. $d = 1; b = c = 0$. Тоді

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Маємо зміну масштабу на осі Ox : $x^* = ax$ (рис.1.3).

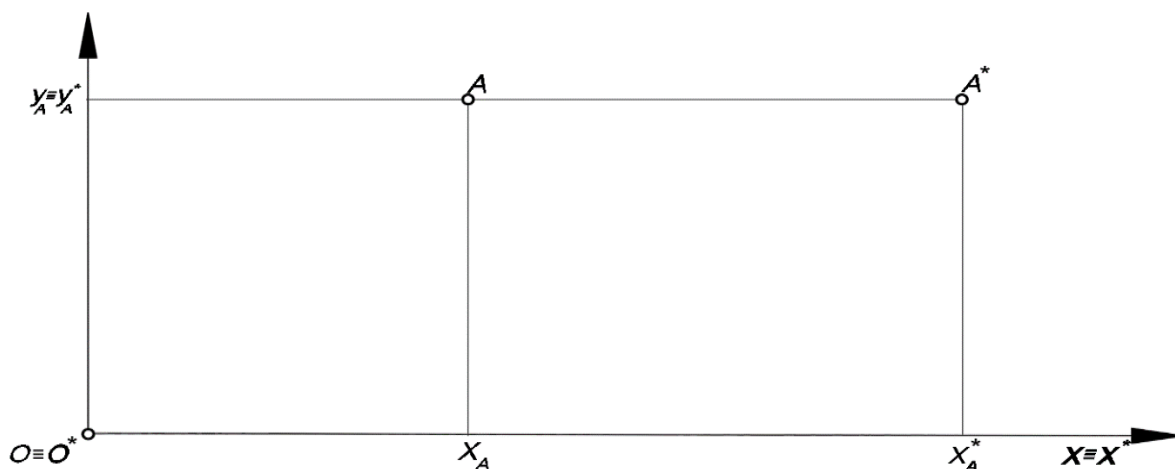


Рисунок 1.3 – Зміна масштабу на осі Ox

Таке перетворення відповідає переміщенню точки A в напрямку осі Ox .

3. $b = c = 0$. Тоді

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Маємо, що $x^* = ax$, $y^* = dy$, тобто масштаб змінюється на осях Ox та Oy (рис.1.4).

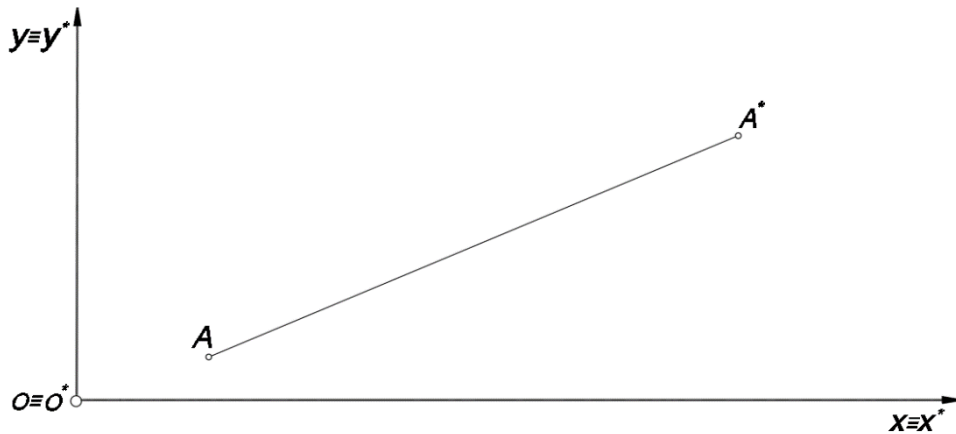


Рисунок 1.4 – Зміна масштабу на осях Ox та Oy

У цьому випадку можливі такі варіанти:

3.1. $a = d$ – переміщення точки A відбувається під кутом 45° до горизонталі.

3.2. $a \neq d$ – переміщення точки A вздовж осей Ox та Oy різні.

3.3. $a, d > 1$ – збільшення масштабів координат точки.

3.4. $0 < a, d < 1$ – зменшення масштабів координат точки.

4. $a = \pm 1$; $d = \pm 1$; $b = c = 0$. У цьому випадку можливі такі варіанти:

4.1. $a = -1$; $d = 1$; $b = c = 0$. Тоді

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Маємо відображення точки відносно осі Oy (рис.1.5).

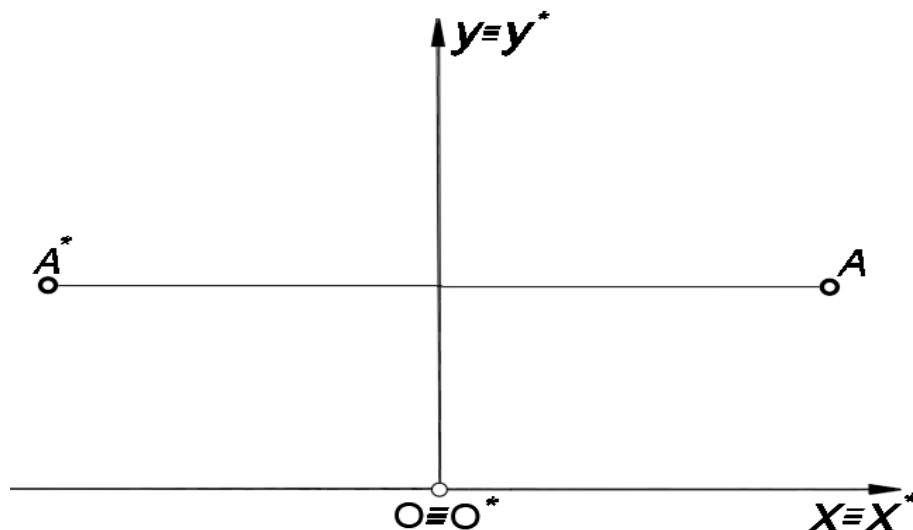


Рисунок 1.5 – Відображення точки відносно осі Oy

4.2. $a = 1; d = -1; b = c = 0$. Тоді

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Маємо відображення точки відносно осі Ox (рис.1.6).

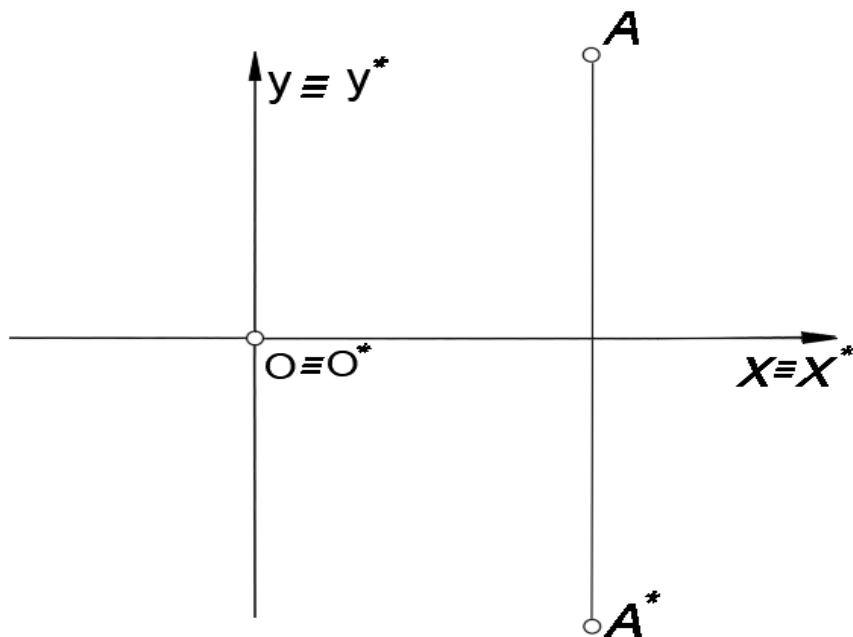


Рисунок 1.6 – Відображення точки відносно осі Ox

4.3. $a = d = -1; b = c = 0$. Тоді

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Маємо відображення точки відносно початку координат (рис.1.7).

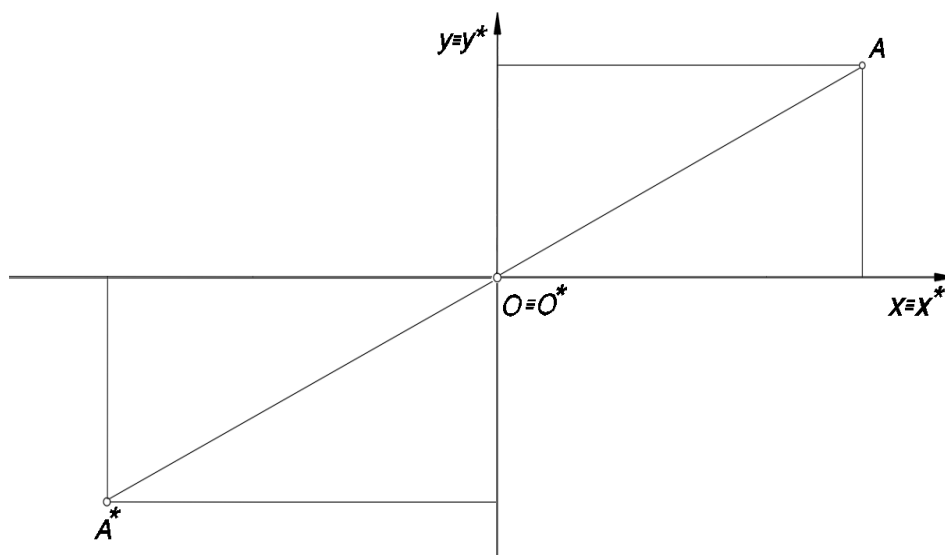


Рисунок 1.7 – Відображення точки відносно початку координат

Таким чином, діагональні елементи a і d матриці перетворення впливають на зміну масштабу і відображення точки відносно осей Ox , Oy чи початку координат.

5. $a = d = 1; c = 0$. Тоді

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x(bx + y)] = [x^* y^*].$$

Маємо, що $x^* = x; y^* = bx + y$, тобто y^* є лінійною функцією координат x та y . Відбувся зсув точки пропорційно координаті x (рис.1.8).

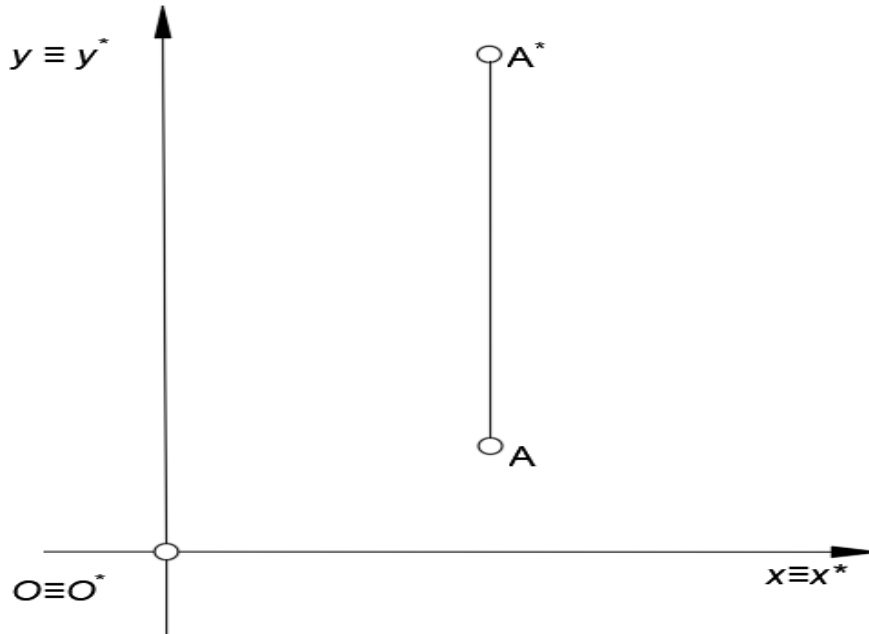


Рисунок 1.8 – Зсув точки пропорційно координаті x

6. $a = d = 1; b = 0$. Тоді

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = [(x + cy)y] = [x^* y^*].$$

Маємо, що $x^* = x + cy; y^* = y$, тобто x^* є лінійною функцією від x та y . Має місце зсув точки пропорційно координаті y (рис.1.9).

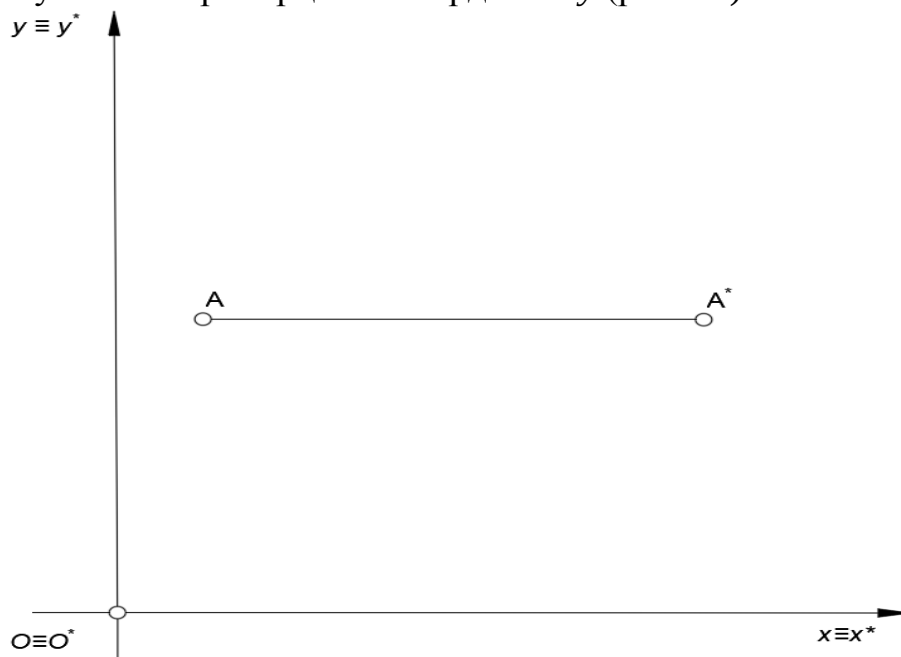


Рисунок 1.9 – Зсув точки пропорційно координаті y

Таким чином, діагональні елементи b і c матриці перетворень 2×2 виконують операцію зсуву точки відповідно до значень її координат x та y .

Для точки $O(0,0)$, початок координат, одержимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Отже, *початок координат є інваріантним при використанні перетворення матрицею 2×2* . Таке обмеження можна зняти, використовуючи однорідні координати.

1.1.3. Перетворення прямих ліній

Пряму задають два вектори положення двох її довільних точок. Наприклад, для відрізка AB (рис.1.10) розглянемо матрицю перетворення

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

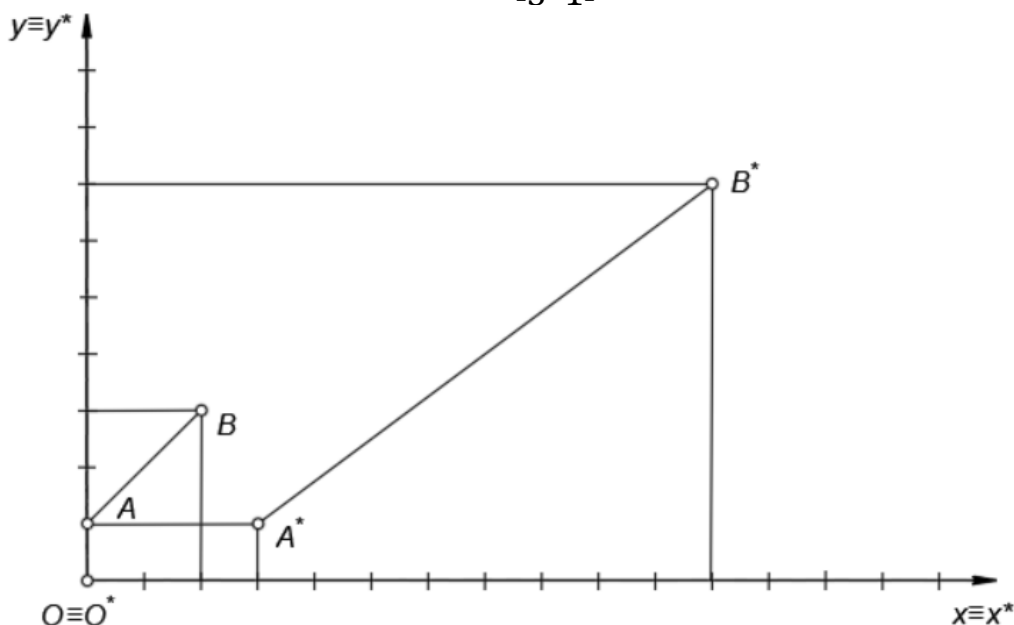


Рисунок 1.10 – Перетворення відрізка AB прямої

Діагональні елементи $1,1$ не змінюють координат точки, а елементи $2,3$ причетні до операції зсуву. Здійснимо множення векторів точок A і B на матрицю $[T]$:

$$[A] [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} = [A^*];$$

$$[B] [T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \end{bmatrix} = [B^*].$$

Подавши відрізок AB прямої матрицею 2×2

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

здійснимо множення матриць $[L]$ і $[T]$:

$$[L][T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = [L^*].$$

Компоненти матриці $[L^*]$ містять складові перетворених векторів $[A^*]$ та $[B^*]$ положення кінцевих точок A і B відрізка прямої. Як видно з рисунка 1.10 вихідні та перетворені осі збігаються. При такій операції зсуву відбивається зміна, у даному випадку, збільшення довжини та положення лінії у площині $Oxy = Ox^*y^*$.

1.1.4. Перетворення середини відрізка

Матриця перетворення $[T]$ транспонує пряму лінію в пряму лінію. Точки другої прямої лінії однозначно відповідні точкам першої. Це дійсне як для кінців відрізка прямої лінії, так і для будь – якої належної їй точки. Розглянемо перетворення середньої точки прямої лінії між точками A і B . Нехай

$$A = [x_1 \ y_1]; B = [x_2 \ y_2];$$

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Здійснимо перетворення одночасно двох точок

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Середня точка відрізка прямої лінії AB визначається матрицею – рядком

$$M_1 = \left[\frac{x_1+x_2}{2} \quad \frac{y_1+y_2}{2} \right].$$

В результаті її перетворення одержимо

$$\left[\frac{x_1+x_2}{2} \quad \frac{y_1+y_2}{2} \right] \begin{bmatrix} ax_1+ax_2+cy_1+cy_2 & bx_1+bx_2+dy_1+dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Таке перетворення переводить середню точку M лінії AB в середню точку M^* лінії A^*B^* . Для комп'ютерної графіки це означає, що будь – яка *пряма лінія може бути перетворена в нове положення перетворенням кінців її відрізка*.

Перетворення одної пари *паралельних ліній* дає другу пару також паралельних ліній. Розглянемо дві паралельні прямі, задані відрізками

$$A = [x_1 y_1]; B = [x_2 y_2] \text{ і } EF.$$

Перетворення відрізка прямої AB здійснимо відповідно до (1.1). Нахили m_1 відрізка прямої AB і m_2 відрізка прямої A^*B^* становлять:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

$$m_2 = \frac{(bx_2 + dy_1) - (bx_1 + dy_1)}{(ax_2 + cy_2) - (ax_1 + cy_1)} = \frac{b + d \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{a + c \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} = \frac{b + dm_1}{a + cm_1}.$$

Очевидно, що такими ж є нахили відрізків EF і E^*F^* . Справді m_2 не залежить від x_1, y_1, x_2, y_2 . Значення m_1, a, b, c, d однакові для AB і EF . Отже,

$$\begin{matrix} m_2 & = & m_2. \\ \text{для } E^*F^* & & \text{для } A^*B^* \end{matrix}$$

Таким чином, паралельні лінії при перетворенні залишаються паралельними: тобто, паралельність сторін паралелограма при дії матриці перетворення 2×2 зберігається.

1.1.5. Перетин прямих ліній

Точка перетину відрізків двох прямих одночасно належить кожній прямій зокрема. При перетворенні двох прямих AB і EF , що перетинаються в точці D з координатами $[x \ y]$, в прямі $A^* B^*$ і $E^* F^*$ одержуємо перетворену точку D^* з координатами $[x^* \ y^*]$, для якої маємо при використанні матриці 2×2 загального вигляду

$$[x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [ax + cy \ bx + dy] = [x^* \ y^*].$$

У цьому випадку точка перетину двох прямих перетворюється в точку перетину перетворених прямих.

Покажемо це на **прикладі** двох прямих

$$\begin{aligned} y &= m_1 x + b_1; \\ y &= m_2 x + b_2, \end{aligned}$$

які перетинаються.

Подавши рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} -m_1 x + y &= b_1; \\ -m_2 x + y &= b_2, \end{aligned}$$

запишемо їх у вигляді матриць

$$[x \ y] \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2].$$

Тобто

$$[-m_1 x + y \ -m_2 x + y] = [b_1 \ b_2].$$

Введемо позначення

$$[x \ y] = [X]; \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [M]; [b_1 \ b_2] = [B].$$

З урахуванням цих позначень рівняння прямих приймуть вигляд:

$$[X][M] = [B].$$

Якщо прямі перетинаються, то точку перетину $[X_i] = [x_i \ y_i]$ знайдемо з допомогою оберненої матриці $|M|^{-1}$:

$$[M]^{-1} = \frac{1}{[M]} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_2 - m_1} \begin{bmatrix} 1 & m_2 \\ -1 & -m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_2 - m_1} & \frac{m_2}{m_2 - m_1} \\ \frac{-1}{m_2 - m_1} & \frac{-m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix},$$

де $M_{11} = 1$; $M_{12} = m_2$ і $M_{21} = -1$; $M_{22} = -m_1$ – алгебраїчні доповнення. Визначник $[M] = m_2 - m_1$.

Елементи оберненої матриці $|M|^{-1}$ шукаємо відповідно до загального алгоритму. Наприклад, обернена до

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

матриця має вигляд

$$[A]^{-1} = \frac{1}{[A]} \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & C_{11} \\ A_{12} & B_{22} & C_{21} \\ A_{13} & B_{32} & C_{31} \end{bmatrix},$$

$$\text{де } a_{11} = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} = b_2 c_3 - c_2 b_3 = A_{11},$$

$$a_{21} = -\begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} = -b_1 c_3 + b_3 c_1 = A_{12},$$

$$a_{31} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = b_1 c_1 - b_2 c_1 = A_{13},$$

$$b_{12} = -\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} = -a_2 c_3 + a_3 c_2 = B_{21},$$

$$b_{22} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} = a_1 c_3 - a_3 c_1 = B_{22},$$

$$b_{32} = -\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = a_2 c_1 - a_1 c_2 = B_{32},$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} = a_2 b_3 - a_3 b_2 = C_{11},$$

$$c_{21} = -\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3 = C_{21},$$

$$c_{31} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = C_{31}.$$

Координати точки перетину двох прямих

$$\begin{aligned} [X_i] = [x_i y_i] &= [B][M]^{-1} = [b_1 b_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{m_2 - m_1} & \frac{m_2}{m_2 - m_1} \\ -\frac{1}{m_2 - m_1} & -\frac{m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} & \frac{b_1 m_2 - b_2 m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Перетворимо рівняння двох прямих за допомогою матриці перетворення

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Перетворені координати довільної точки двох прямих

$$[X^*] = [X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [ax + cy \ bx + dy] = [x^* y^*],$$

через які визначимо координати x, y цих прямих:

$$[X] = [x \ y] = [X^*][T]^{-1}.$$

Обернена матриця

$$[T]^{-1} = \frac{1}{[T]} \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} \\ A_{12} & B_{22} \end{bmatrix},$$

де $[T] = ad - bc$;

$A_{11} = d$;

$A_{12} = -c$;

$$B_{12} = b;$$

$$B_{22} = a.$$

Алгоритм перетворення має вигляд:

$$\begin{aligned} [X][M] &= [B], \\ [X] &= [X][T], \\ [X] &= [X][T]^{-1}, \\ [X][T]^{-1}[M] &= [B]. \end{aligned}$$

Матриця $[X]$ координат x, y точок прямих

$$[X] = [X^*][T]^{-1} = [x^* y^*] \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} [x^*d - y^*c \quad y^*a - x^*b].$$

Підставимо $[X]$ у матричне рівняння прямих $[X][M] = [B]$:

$$\frac{1}{ad-bc} [x^*d - y^*c \quad y^*a - x^*b] \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2].$$

Перетворимо його до такого вигляду:

$$\frac{1}{ad-bc} [-m_1(x^*d - y^*c) + y^*a - x^*b \quad -m_2(x^*d - y^*c) + y^*a - x^*b] = [b_1 \ b_2].$$

Одержимо систему двох рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{1}{ad-bc} (y^*a - x^*b - m_1(x^*d - y^*c)) &= b_1; \\ \frac{1}{ad-bc} (y^*a - x^*b - m_2(x^*d - y^*c)) &= b_2. \end{aligned}$$

Розкриємо дужки

$$\begin{aligned} y^*(a + m_1c) - x^*(b + m_1d) &= b_1(ad - bc); \\ y^*(a + m_2c) - x^*(b + m_2d) &= b_2(ad - bc). \end{aligned}$$

Перетворені за допомогою матриці перетворення $[T]$ рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{b+dm_1}{a+cm_1} x^* + b_1 \frac{ad-bc}{a+cm_1} = m_1^* x^* + b_1^*; \\ y^* &= \frac{b+dm_2}{a+cm_2} x^* + b_2 \frac{ad-bc}{a+cm_2} = m_2^* x^* + b_2^*. \end{aligned}$$

Точку перетину перетворених прямих ліній $[X_i^*]$ знайдемо, перемноживши матриці $[X_i]$ та $[T]$:

$$\begin{aligned} [X_i^*] &= [x_i \ y_i][T] = [x_i^* \ y_i^*] = [B][M]^{-1} [T] = \begin{bmatrix} \frac{b_1-b_2}{m_2-m_1} & \frac{b_1m_2-b_2m_1}{m_2-m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a(b_1-b_2)+c(b_1m_2-b_2m_1)}{m_2-m_1} & \frac{b(b_1-b_2)+d(b_1m_2-b_2m_1)}{m_2-m_1} \end{bmatrix}. \\ x_i^* &= \frac{a(b_1-b_2) + c(b_1m_2 - b_2m_1)}{m_2 - m_1}; \\ y_i^* &= \frac{b(b_1-b_2) + d(b_1m_2 - b_2m_1)}{m_2 - m_1}. \end{aligned}$$

З іншого боку точка перетину являє

$$[X_i^*] = [x_i^* \ y_i^*] = \left[\frac{b_1^* - b_2^*}{m_2^* - m_1^*} \quad \frac{b_1^* m_2^* - b_2^* m_1^*}{m_2^* - m_1^*} \right] =$$

$$= \left[\frac{a(b_1 - b_2) + (b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \quad \frac{b(b_1 - b_2) + d(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \right].$$

Отже, точка перетину двох прямих перетворюється в точку перетину перетворених прямих, адже обидві матриці $[X_i^*]$ однакові.

Приклад. Задано відрізки AB і EF двох прямих з координатами

$$[A] = [-1 \ -1], \ [B] = \left[3 \ 5/3 \right], \ E = \left[-\frac{1}{2} \ \frac{3}{2} \right], \ [F] = [3 \ -2].$$

Знайдемо точку їх перетину.

Рівняння відрізків прямих мають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{відрізок } AB \quad & -\frac{2}{3}x + y = -\frac{1}{3}; \\ \text{відрізок } EF \quad & x + y = 1. \end{aligned}$$

У матричному вигляді цей пучок прямих являє:

$$[x \ y] \begin{bmatrix} -2/3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [-1/3 \ 1].$$

Використовуючи матрицю зворотного перетворення, одержимо точку перетину прямих:

$$[x_i \ y_i] = [-1/3 \ 1] \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \left[\frac{4}{5} \ \frac{1}{5} \right].$$

Перетворимо тепер ці лінії з допомогою матриці

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

У матричному вигляді рівняння перетворених ліній являють:

$$[x^* \ y^*] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1].$$

Отже,

$$\begin{aligned} x^* + 0 * y^* &= 1 \\ 0 * x^* + y^* &= 1 \end{aligned} ,$$

точка перетину яких $[x_i^* \ y_i^*] = [1 \ 1]$.

Перетворюючи у приведеній вище послідовності точку перетину відрізків прямих ліній, маємо

$$[x_i^* \ y_i^*] = [x_i \ y_i] [T] = \left[\frac{4}{5} \ \frac{1}{5} \right] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = [1 \ 1],$$

що являє координати точки перетину перетворених ліній.

1.1.6. Обертання

Обертання об'єкта в двовимірній площині Oxy здійснюється в тривимірному просторі навколо осі, перпендикулярної до цієї площини Oxy .

Обертання трикутника ABC на 90° навколо початку координат проти годинникової стрілки здійснюється перетворенням кожної його вершини матрицею $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Його обертання на 180° навколо початку координат здійснюється за допомогою матриці $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, а обертання на 270° – навколо початку координат матрицею $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. При цьому відсутні зміни масштабу.

1.1.7. Відображення

Відображення об'єкта здійснюється в тривимірному просторі обертанням геометричної фігури на 180° навколо осі, що належить площині Oxy . Наприклад, обертання навколо лінії $y=x$ відбувається з використанням матриці $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; обертання навколо осі $y=0$ – матриці $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Відображення відносно осі Oy при $x=0$ здійснюється за допомогою матриці

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відображення відносно прямої $y=-x$ здійснюється за допомогою матриці

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

У кожній з приведених матриць визначник $= -1$.

Отже, якщо визначник матриці перетворення дорівнює -1 , то перетворення дає повне відображення. Якщо два відображення виконувати послідовно відносно прямих, які проходять через початок координат, то одержимо повний поворот відносно початку координат.

Приклад. Трикутник ABC відобразимо відносно осі Ox , а потім відносно прямої $y=-x$.

Перше відображення

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Друге відображення

$$[X^+] = [X^*][T] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Подібний результат одержимо поворотом трикутника відносно початку координат на кут 270 град.

$$[X^+] = [X][T] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

1.1.8. Зміна масштабу

Зміна масштабу визначається двома членами основної діагоналі матриці 2×2 . Наприклад, при використанні матриці

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

збільшуються у два рази координати плоскої фігури відносно початкових. Якщо ці члени різні, наприклад,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

то має місце ще й спотворення зображення плоскої фігури через різні масштабні коефіцієнти.

Зауважимо, що матричний добуток не комутативний, тому порядок перетворень (більше одного) є важливим при використанні комбінованих операцій перетворення. З допомогою матричних перетворень можна виконувати операції над кожною точкою в системі координат Oxy . Початок координат при матричному перетворенні 2×2 інваріантний. Решта точок підлягають перетворенню. Такі перетворення можна інтерпретувати як перетворення одної системи координат в другу, тобто перетворення здійснює перенесення зображення плоскої фігури з одної площини в другу. Пропорційне масштабування виконується за допомогою матриці

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

якщо $a=d$, $b=c=0$. Якщо a і d різні при $b=c=0$, то має місце спотворення зображення фігури. При однакових, але більших від одиниці значеннях a і d має місце збільшення зображення фігури. При однакових, але менших від одиниці значеннях a і d має місце зменшення зображення фігури.

Розглянемо перетворення ΔABC в $\Delta D^*E^*F^*$:

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 12 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}.$$

Має місце нібито, крім масштабування, ще й переміщення. Це пояснюється тим, що відбулося масштабування відносно початку координат координатних векторів, а не точок. Точки задають вершини векторів. Початки таких векторів знаходяться у початку системи координат. Відмітимо, що в даному випадку операції масштабування кожену координату x точок A, B, C координатних векторів трикутника ABC множили на $\frac{1}{2}$, а координату y – на три. Для одержання чистого масштабування без ефекту переміщення центр фігури треба розташувати у початку координат.

1.1.9. Комбіновані перетворення

Матричні операції над координатними векторами, що визначають величини геометричних фігур, дозволяють керувати формою і положенням, наприклад, поверхонь. В процесі формоутворення поверхонь необхідно проводити кілька перетворень. Оскільки операція множення матриць некомутативна, важливо дотримуватися порядку виконання перетворень. Розглянемо, **наприклад**, перетворення обертання і відображення координатного вектора $[x \ y]$.

Два послідовні перетворення обертання, наприклад, на 90° , за допомогою матриці $[T_1]$ і відображення відносно, наприклад, прямої $y=-x$ за допомогою матриці $[T_2]$ мають вигляд:

перше перетворення

$$[X'] = [X] [T_1] = [x \ y] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-y \ x];$$

і друге перетворення

$$[X^*] = [X'] [T_2] = [-y \ x] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-x \ y] .$$

В результаті подвійного перетворення координатний вектор перемістився з точки (x, y) в точку $(-x, y)$.

Якщо, навпаки – обертання слідує за відображенням, то в результаті перетворень одержимо:

перше перетворення

$$[X'] = [X] [T_2] = [x \ y] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-y \ -x]$$

і друге перетворення

$$[X^*] = [X'] [T_1] = [-y \ -x] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [x \ -y] .$$

У другому випадку координатний вектор переміститься з точки (x, y) в точку $(x, -y)$. Отже, обидва результати різні, що підтверджує *важливість порядку застосування матричних перетворень*.

Розглянуті два послідовні перетворення можна комбінувати або конкатенувати і застосувати одержану матрицю перетворення $[T_3]$ до початкового вектора $[X]$, тобто:

$$[T_1][T_2] \rightarrow [T_3] \Rightarrow [x \ y] [T_3] \rightarrow [x^* \ y^*].$$

Для попереднього випадку маємо

$$[X^*] = [X] [T_1] [T_2] = [X] [T_3]$$

або

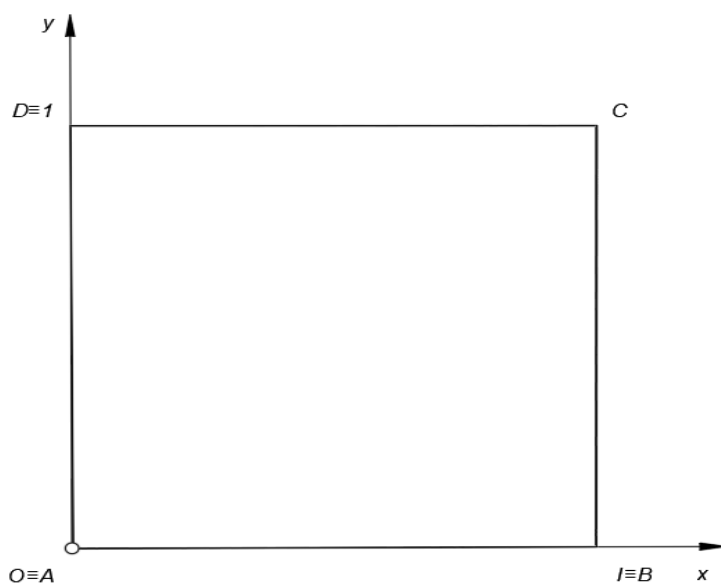
$$[X^*] = [x \ y] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \ y],$$

що являє, як і у попередньому випадку, кінцевий результат подвійного перетворення обертання і відображення.

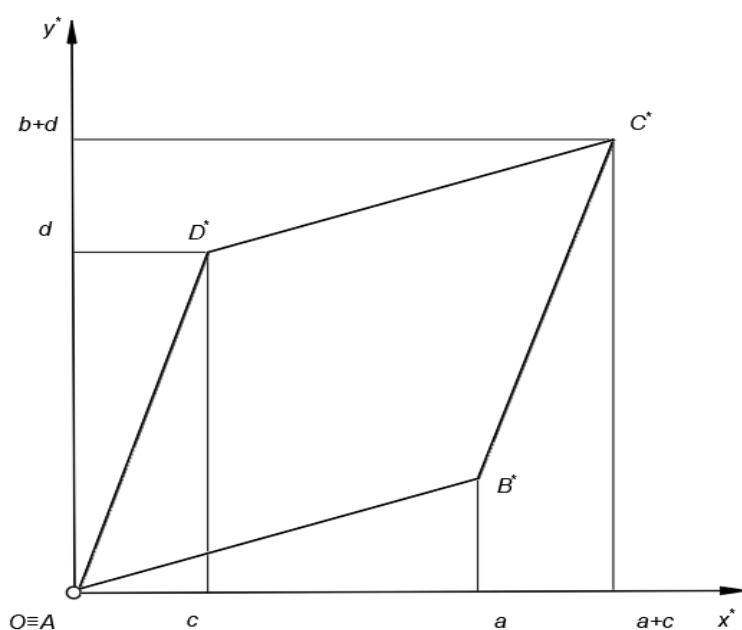
1.2. Зображення і перетворення геометричних фігур

1.2.1. Перетворення одиничного квадрата

Нехай вектори положення точок вершин одиничного квадрата $ABCD$ (рис.1.11а)



а)



б)

Рисунок 1.11 – Перетворення одиничного квадрата $ABCD$

з кутом у початку координат $O \equiv A$ мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}.$$

Застосуємо до нього загальне матричне перетворення $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}.$$

З аналізу результуючої матриці координат точок вершин A^*, B^*, C^*, D^* перетвореного одиничного квадрата (рис.1.11б) робимо висновки:

- початок координат інваріантний: $A=[0 \ 0]$;
- координати точки B^* визначені другим рядком $a \ b$ матриці;
- координати точки D^* визначені четвертим рядком $c \ d$ матриці.

Оскільки вихідна фігура являє квадрат (його сторони не тільки однакові, але й паралельні), то перетворена фігура – паралелограм. Елементи b, c здійснюють зсув квадрата по напрямках осей Oy та Ox відповідно, а елементи a і d являють масштабні коефіцієнти. Отже,

матриця 2×2 здійснює зсув та зміну масштабу квадрата.

Знайдемо площу паралелограма $A^* B^* C^* D^*$:

$$A_n = (a + c)(b + d) - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} - \frac{c(b+b+d)}{2} - \frac{b(c+a+c)}{2} = ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Якщо площа квадрата не дорівнює одиниці, наприклад, A_k , то площа перетвореного квадрата (паралелограма) становить

$$A_n = A_k(ad - bc).$$

Узагальнюючи, робимо висновок, що площа A_t довільної перетвореної фігури пов'язана з площею A_i вихідної фігури залежністю:

$$A_t = A_i(ad - bc).$$

1.2.2. Довільна матриця перетворення 2×2

При обертанні квадрата $ABCD$ точка A і A^* збігаються з початком координат, точки B, C, D переходять в перетворені точки B^*, C^*, D^* . Відомо, що при загальному матричному перетворенні довільної геометричної фігури, наприклад, одиничного квадрата координати точки B^* визначені рядком $a \ b$ матриці, а координати точки D^* – рядком $c \ d$ матриці.

З рисунка 1.12 одержуємо

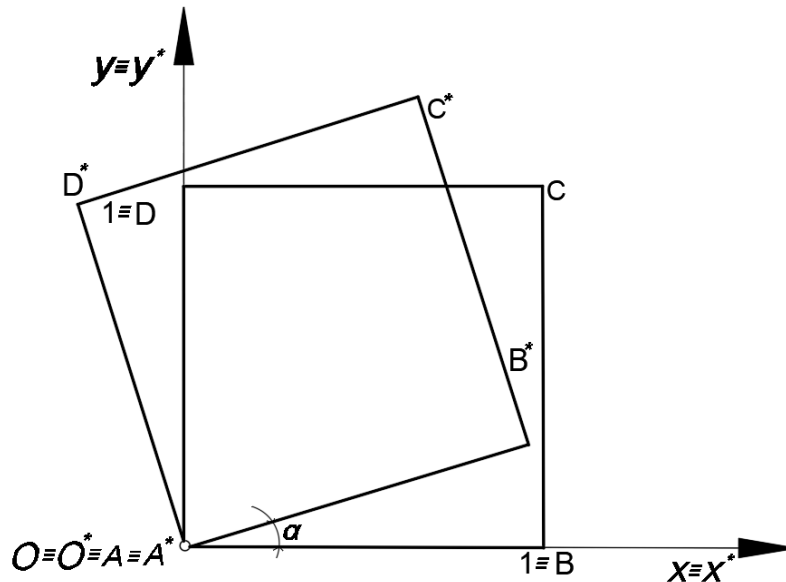


Рисунок 1.12 – Обертання квадрата $ABCD$

координати точки B^*

$$x^* = 1 * \cos a; \quad y^* = 1 * \sin a;$$

координати точки D^*

$$x^* = -1 * \sin a; \quad y^* = 1 * \cos a.$$

Підставивши значення в загальну матрицю $[T]$ перетворення розміру 2×2 , одержимо:

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix}.$$

Звідси одержуємо частинні вигляди матриці 2×2 при повертанні на будь-який кут a , наприклад, 90° , 180° , 270° і т. д. Зазначимо, що *обертання є додатнім, якщо воно здійснюється проти годинникової стрілки*. Визначник загальної матриці перетворення має вигляд:

$$\det[T] = \cos^2 a + \sin^2 a = 1.$$

Припустимо, що потрібно повернути точки B^* , C^* , D^* знову у початкове положення, тобто виконати зворотне перетворення. Кут повороту при цьому становить $-a$. З матриці $[T]$ одержимо обернену матрицю $[T]^{-1}$ для виконання необхідного перетворення:

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-a) & \sin(-a) \\ -\sin(-a) & \cos(-a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця $[T]^{-1}$ є оберненою по відношенню до $[T]$, то

$$\begin{aligned} [T] [T]^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 a + \sin^2 a & \cos a \sin a - \cos a \sin a \\ \cos a \sin a - \cos a \sin a & \cos^2 a + \sin^2 a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= [1] - \text{одинична матриця.} \end{aligned}$$

Отже, матриця $[T]^{-1}$ є оберненою по відношенню до матриці $[T]$. Покажемо, що матриця $[T]^{-1}$ є одночасно і транспонованою, позначивши її $[T]^t$. Помінявши рядки стовпцями в $[T]$, одержимо:

$$[T]^t = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = [T]^{-1}.$$

1.2.3. Перетворення жорстких конструкцій

Розглянемо проблему збереження кутів при різних видах перетворення. Оскільки точки, що використовувались при перетвореннях, являють вершини координатних векторів, запишемо вирази скалярного і векторного добутків двох векторів.

Скалярний добуток двох векторів $[V_1]$ і $[V_2]$

$$[V_1][V_2] = V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} = [V_1][V_2]\cos\theta,$$

а векторний добуток

$$[V_1] * [V_2] = (V_{1x}V_{2y} - V_{2x}V_{1y})k = [V_1][V_2]k \sin\theta,$$

де x та y позначають проекції векторів на осі,

θ - гострий кут між векторами;

k - одиничний вектор, перпендикулярний до площини Oxy .

Перетворимо обидва вектори, використовуючи матрицю загального перетворення:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} V_{1x} & V_{1y} \\ V_{2x} & V_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aV_{1x} + cV_{1y} & bV_{1x} + dV_{1y} \\ aV_{2x} + cV_{2y} & bV_{2x} + dV_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Тобто

$$V_1^* = V_{1x}^* + V_{1y}^* = aV_{1x} + cV_{1y} + bV_{1x} + dV_{1y};$$

$$V_2^* = V_{2x}^* + V_{2y}^* = aV_{2x} + cV_{2y} + bV_{2x} + dV_{2y}.$$

Векторний добуток перетворених векторів

$$\begin{aligned} [V_1^*] \times [V_2^*] &= \{(aV_{1x} + cV_{1y})(bV_{2x} + dV_{2y}) - (aV_{2x} + cV_{2y})(bV_{1x} + dV_{1y})\}k = \\ &= (abV_{1x}V_{2x} + cbV_{1y}V_{2x} + adV_{1x}V_{2y} + cdV_{1y}V_{2y} - abV_{1x}V_{2x} - cbV_{1x}V_{2y} \\ &\quad - adV_{2x}V_{1y} - cdV_{1y}V_{2y})k = (ad(V_{1x}V_{2y} - V_{2x}V_{1y}) - bc(V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x}))k = \\ &= (ad - bc)(V_{1x}V_{2y} - V_{2x}V_{1y})k = [V_1][V_2]k \sin\theta. \end{aligned}$$

Скалярний добуток перетворених векторів

$$\begin{aligned} [V_1][V_2] &= (aV_{1x} + cV_{1y})(aV_{2x} + cV_{2y}) + (bV_{1x} + dV_{1y})(bV_{2x} + dV_{2y}) = \\ &= a^2V_{1x}V_{2x} + acV_{2x}V_{1y} + acV_{1x}V_{2y} + c^2V_{1y}V_{2y} + b^2V_{1x}V_{2x} + bdV_{1x}V_{2y} + d^2V_{1y}V_{2y} + bdV_{2x}V_{1y} = \\ &= (a^2 + b^2)V_{1x}V_{2x} + (c^2 + d^2)V_{1y}V_{2y} + ac(V_{2x}V_{1y} + V_{1x}V_{2y}) + bd(V_{2x}V_{1y} + V_{1x}V_{2y}) = \\ &= (a^2 + b^2)V_{1x}V_{2x} + (c^2 + d^2)V_{1y}V_{2y} + (ac + bd)(V_{2x}V_{1y} + V_{1x}V_{2y}) = [V_1][V_2]\cos\theta. \end{aligned}$$

Порівнюючи вирази для відповідних добутків перетворених і неперетворених векторів, маємо

$$a^2 + b^2 = 1;$$

$$c^2 + d^2 = 1;$$

$$ac - bd = 0;$$

$$ad - bc = 1.$$

Перші три вирази відповідають умові ортогональності матриці:

$$[T][T]^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ab \\ cd - cd & ad - cb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1].$$

Останній вираз вимагає, щоб визначник матриці перетворення дорівнював одиниці:

$$[T][T]^{-1} = \begin{bmatrix} -a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ab \\ cd - cd & ad - cb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1].$$

Проаналізуємо матрицю повороту

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

При повороті, наприклад, на 180° , матриця має вигляд

$$T = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ -\sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а при повороті на 360° матриця виглядає так:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для 180° і 360° визначник матриці дорівнює одиниці.

Таким чином, *при повороті кути зберігаються.*

Матриця відображення

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

має визначник, рівний -1.

У цьому випадку величини векторів зберігаються, а кут для загального випадку не зберігається. Зокрема, перпендикулярні прямі перетворюються у перпендикулярні прямі. У комп'ютерній графіці повні повороти і відображення називають *перетвореннями жорсткої конструкції*.

Крім цих випадків збереження кутів спостерігається також при пропорційному рівномірному масштабуванні без переміщення; модулі перетворюваних векторів при такому масштабуванні змінюються.

1.2.4. Двовимірні зміщення і однорідні координати

Зауважимо, що початок координат – точка $O(0,0)$ – є інваріантним при перетворенні геометричних об'єктів матрицею 2×2 . Таке обмеження можна усунути, використовуючи однорідні координати.

Точка в площині визначена як впорядкована пара чисел (x, y) . Пряма в площині визначена множиною розв'язків (x, y) лінійного рівняння

$$ax + by + c = 0$$

$$\text{при } a \neq 0; b \neq 0.$$

Тут прийнято a, b, c як константи, а x, y – змінні. З другого боку множина прямих, що проходять через деяку точку (u,v) визначається наведеним рівнянням у вигляді множини (a,b,c) .

Якщо a, b, c – константи, а x, y – змінні, то наведений вираз містить x, y в першому степені, c – в нульовому степені і є неоднорідним. Якщо a, b, c – змінні, а x, y – константи, то всі члени виразу мають один і той же степінь, перший, а вираз є однорідним. Якщо ввести до розгляду додаткові уявні точки, то можна усунути відмінності між точками і прямими: перші визначаються неоднорідним, а другі – прямі, однорідним виразом, задаючи лінійне рівняння у вигляді

$$au + bv + c\omega = 0.$$

Таке рівняння має переваги однорідного. При цьому початкову форму

$$ax + by + c = 0$$

можна відновити:

при $\omega \neq 0$ маємо $\frac{u}{\omega}$ і $\frac{v}{\omega}$ є парою чисел, що задовольняють рівнянню.

Навпаки, якщо (x, y) задовольняють вихідному рівнянню, то $(x, y, 1) = \frac{1}{\omega}(u, v, \omega)$ є трійкою чисел, що задовольняють рівняння

$$au + bv + c\omega = 0.$$

При цьому для деякого значення λ трійка чисел $(\lambda x, \lambda y, \lambda)$, де $x = \frac{u}{\omega}, y = \frac{v}{\omega}$ при $\omega \neq 0$, λ – довільне число, також задовольняють це рівняння. З множини таких значень маємо точку $(0, 0, 0)$, що є тривіальним розв'язком.

Визначаючи $x = \frac{u}{\omega}, y = \frac{v}{\omega}$ при $\omega \neq 0$, встановлюємо однозначну відповідність між трійкою чисел (u, v, ω) і парою чисел (x, y) , яка визначає положення точки в площині.

При обмеженні $\omega \neq 0$ трійка чисел (u, v, ω) при $u = \omega x, v = \omega y$ також подає цю точку. Тому трійку чисел (u, v, ω) називають *однорідними координатами точки* (x, y) . Якщо при цьому маємо, крім (u, v, ω) , інші трійки вигляду $(\lambda u, \lambda v, \lambda \omega)$ при $\lambda \neq 0$, то останні також є однорідними координатами точки (x, y) .

Розглянемо векторно – геометричне подання однорідних координат. Для цього введемо, як показано вище, третю компоненту в вектори точок $[x \ y]$ та $[x^* \ y^*]$, тобто у вигляді $[x \ y \ 1]$ та $[x^* \ y^* \ 1]$.

Матриця перетворення при цьому є матрицею 3×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ m & n \end{bmatrix}$$

через те, що число стовпців, що описують координати точки, повинно дорівнювати числу рядків у матриці перетворення для того, щоб виконувати операції множення матриць:

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ m & n \end{bmatrix} = [x + m \ y + n] = [x^* \ y^*].$$

Отже, постійні m, n зміщують x^*, y^* відносно x, y .

Матриця 3×2 не є квадратною і тому не має зворотної матриці. Щоб зробити її квадратною, доповнимо її так, наприклад:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Виконаємо множення:

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [x + m \ y + n \ 1] = [x^* \ y^* \ 1].$$

Отже, третя компонента векторів положення точок не змінює при додаванні третього стовпця до матриці перетворення. Перетворений вектор має вигляд $[x^* \ y^* \ 1]$. Третій елемент, одиницю, можна розглядати як третю координату вектора положення. Вектор положення $[x \ y \ 1]$ при дії матриці 3×3 стає вектором загального положення вигляду $[X \ Y \ H]$. У нашому випадку

$$[X \ Y \ H] = [x^* \ y^* \ 1].$$

Маємо $H = 1$, тобто площа, в якій розташована точка, має координату $z = 1$.

Якщо замість останнього стовпця $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ матриці 3×3 візьмемо загальний випадок

$\begin{bmatrix} p \\ q \\ s \end{bmatrix}$, то в результаті матричного перетворення одержимо

$$[x \ y \ 1] = [X \ Y \ H], \text{ де } H \neq 1.$$

Тоді одержуємо компоненти перетвореного вектора

$$[x^* \ y^* \ 1] = \begin{bmatrix} X & Y \\ H & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

де $x^* = \frac{x}{H}$, $y^* = \frac{y}{H}$ - перетворені звичайні координати завдяки нормалізації однорідних координат.

Отже, однорідне координатне перетворення є, з іншого боку, поданням двовимірного вектора тривимірним, або, узагальнюючи, n - вимірного вектора $(n + 1)$ - вимірним вектором. Таке перетворення у комп'ютерній графіці являє один з способів подання n - вимірного вектора в $(n + 1)$ - вимірному просторі, а кінцеві результати одержують в n - вимірному просторі зворотнім перетворенням. Тобто двовимірний вектор $[x \ y]$ поданий трикомпонентним вектором $[hx \ hy \ h]$. Розділивши компоненти вектора на однорідну координату $h \neq 0$, маємо

$$x = \frac{hx}{h}; y = \frac{hy}{h}.$$

При такому способі однорідного координатного подання одна і та ж точка в площині може бути подана по різному. Наприклад, однорідні координати $(12, 8, 4)$, $(6, 4, 2)$, $(3, 2, 1)$ подають точку $(3, 2)$.

Проте при використанні чисельних методів можуть виникнути обмеження:

- результатом такого однорідного координатного подання мають бути числа, що є координатами. Наприклад, якщо пристрій відображення працює з цілими числами, то для довільного значення h , наприклад $h = 1$, не можна представити точку $(0.5, 0.1, 2.5)$. При раціональному виборі h можна добитися, щоб однорідні координати були цілими числами. Наприклад, для цього випадку при $h = 10$ однорідні координати точки являють цілі числа $(5, 1, 25, 10)$;

- результати перетворення не повинні приводити до арифметичного переповнення. Якщо треба в процесі комп'ютерного моделювання подати цілі числа, а діапазон зміни їх значень складає, наприклад, $-2^{16} \dots -2^{16}$, то для перетворення точки з координатами, наприклад, $(80\ 000, 40\ 000, 1\ 000)$ можна вибрати значення, наприклад. $h = 0.1$.

Дію третього стовпця, позначимо його $\begin{bmatrix} p \\ q \\ s \end{bmatrix}$, матриці перетворення 3×3 розглянемо на **прикладі**. Нехай

$$[X\ Y\ H] = [x\ y\ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x\ y\ (px + qy + s)],$$

тобто $X = x, y = Y, H = px + qy + s$.

Виконаємо нормалізацію, щоб одержати замість значень координат X, Y при $H \neq 1$ координати перетвореного вектора $[x^*\ y^*\ 1]$.

Якщо $H=1$ визначає у тривимірному просторі горизонтальну площину рівня, то $H = px + qy + 1$ визначає площину загального положення (рис.1.13).

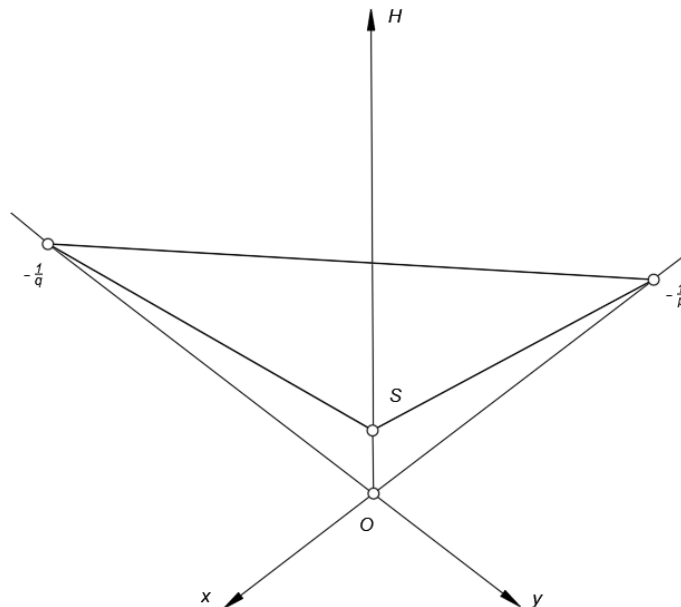


Рисунок 1.13 – Площина загального положення $H = px + qy + 1$

Звичайні координати x^*, y^* одержимо, виконавши нормалізацію:

$$x^* = \frac{X}{H} = \frac{x}{px + qy + 1} \text{ бо } X = x, y = Y;$$

$$y^* = \frac{Y}{H} = \frac{y}{px + qy + 1}.$$

Основну матрицю перетворення 3×3 для двовимірних однорідних координат можна поділити на 4 частини:

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ t & n & s \end{bmatrix}.$$

Тут коефіцієнти a, b, c, d здійснюють зміну масштабу геометричного об'єкта, зсув та обертання, m, n – зміщення, p, q – формування проєкцій. Елемент s здійснює повну зміну його масштабу:

$$[X \ Y \ H] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \ y \ s]; x = x; Y = y, h = s.$$

Тоді одержуємо

$$x^* = \frac{x}{s}; y^* = \frac{y}{s}.$$

В результаті перетворення $[x \ y \ 1]$ в $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ s & s & 1 \end{bmatrix}$ має місце так звана однорідна зміна масштабу вектора положення: при $s < 1$ – збільшення, при $s > 1$ – зменшення масштабу зображення фігури.

1.2.5. Двовимірне обертання навколо довільної точки

Матриця обертання 2×2 здійснює обертання фігури відносно початку координат. Однорідні координати забезпечують повертання фігури навколо точок, які не є початком координат. Таке обертання здійснюється шляхом переносу центру обертання, точки m, n , в початок координат повертанням навколо початку координат і перенесенням точки обертання в початкове положення, точку m, n .

Отже, поворот вектора положення $[x \ y \ 1]$ навколо точки з координатами (m, n) на кут θ можна виконати з допомогою такого перетворення

$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [X \ Y \ H].$$

Виконавши дії над внутрішніми матрицями, одержимо:

$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -m(\cos\theta - 1) & -n(\cos\theta - 1) & 0 \\ n \sin\theta & -m \sin\theta & 1 \end{bmatrix}.$$

Приклад. Нехай центр об'єкта знаходиться в точці з координатами $(4, 3)$. Треба повернути об'єкт на прямиий кут проти годинникової стрілки навколо центра. Спочатку центр об'єкта перемістимо у початок координат за допомогою

матриці перетворення $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$

Далі використаємо матрицю повороту і з допомогою матриці переміщення приводимо повернені навколо початку координат точки до початкового центру:

$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

або з допомогою одної матриці перетворення як результат множення окремих матриць:

$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.6. Відображення відносно довільної прямої

Відображення ліній зображення геометричного об'єкта відносно прямої, що не проходить через початок координат, можна виконати за процедурою обертання навколо довільної точки. Послідовність відображення така:

- переміщення прямої та зображення об'єкта так, щоб пряма проходила через початок координат;
- повертання лінії разом із зображенням об'єкта навколо початку координат до співпадання з однією з осей;
- відображення відносно координатної осі;
- повторний поворот навколо початку координат;
- переміщення у початкове положення.

Матриця $[T]$ цього перетворення має вигляд:

$$[T] = [T'] [R] [R'] [R]^{-1} [T']^{-1},$$

де T' - матриця переміщення;

R – матриця обертання навколо початку координат;

R' – матриця відображення.

Приклад. Розглянемо пряму a і трикутник ABC (рис.1.14а).

Рівняння прямої a має, наприклад, вигляд

$$y = \frac{1}{2}(x + 4).$$

Координатні вектори вершин A, B, C трикутника набувають, наприклад, таких значень: $[2 \ 4 \ 1]$, $[4 \ 6 \ 1]$, $[2 \ 6 \ 1]$ у відносних координатах. Послідовність відображень наведена на рис. 1.14.

При паралельному переміщенні прямої l на -2 одиниці в напрямку осі Oy пряма a пройде через початок координат.

Двовимірна матриця переміщення на -2 одиниці має вигляд (рис.1.14б):

$$[T'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

При обертанні (матриця R) навколо початку координат на кут $\theta = -\text{tg}(\frac{1}{2}) = -26.57^\circ$ пряма l співпаде з віссю Ox . Матриця R має вигляд (рис.1.14в):

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відображення трикутника ABC відносно осі Ox здійснюємо з допомогою матриці (рис.1.14г)

$$[R'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обертання прямої відносно початку координат θ на кут $\theta = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}) = 26.57^\circ$ здійснюємо з допомогою матриці (рис.1.14 д)

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриця переміщення зображення трикутника ABC на дві одиниці догори у положення $A^* B^* C^*$ має вигляд (рис.1.14е):

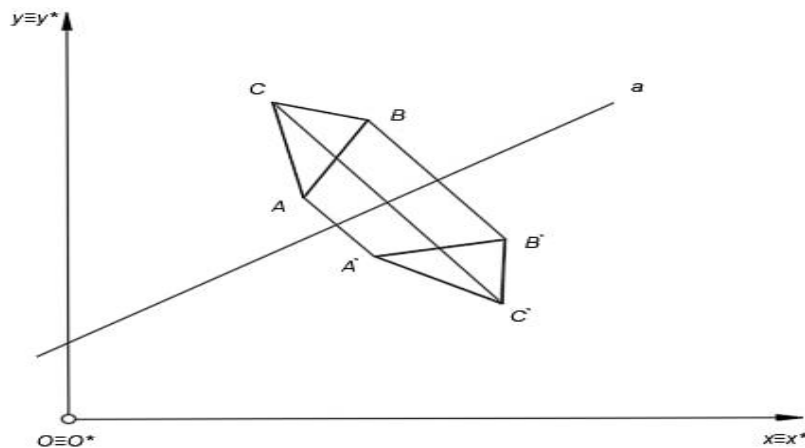
$$[T']^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриця перетворення має вигляд

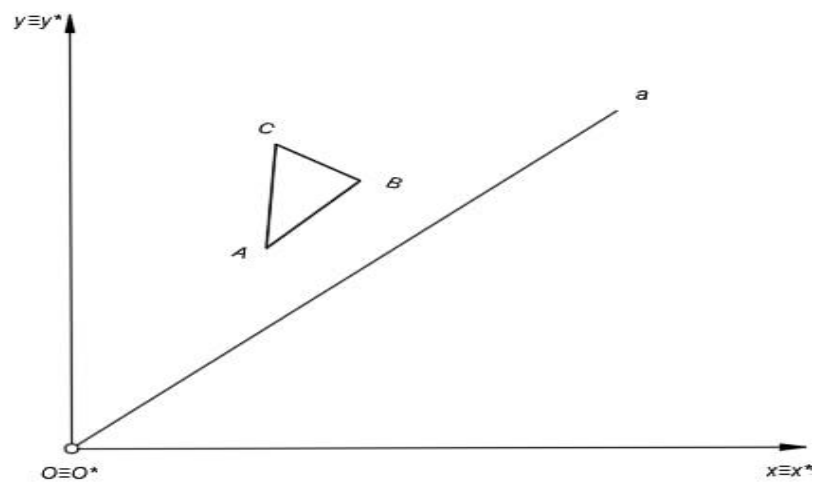
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{8}{5} & \frac{16}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Підставивши значення координат векторів вершин A, B, C трикутника, одержимо

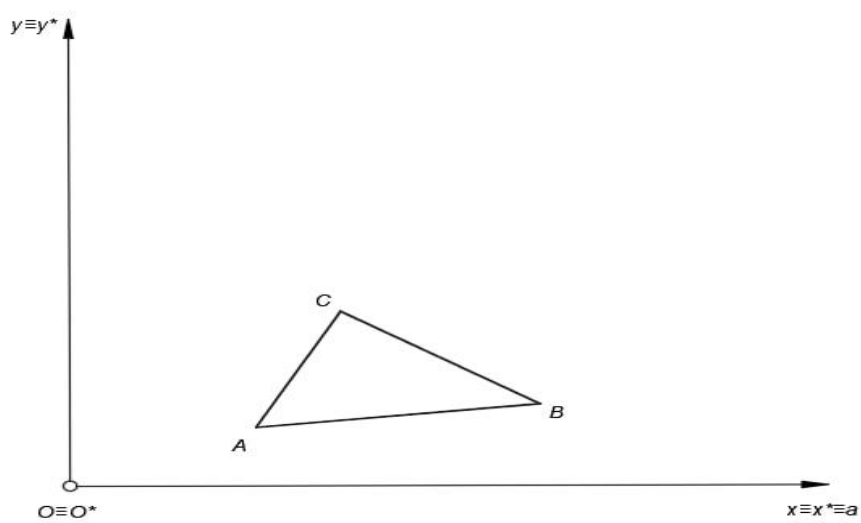
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{8}{5} & \frac{16}{5} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{12}{5} & 1 \\ \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 1 \\ \frac{22}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$



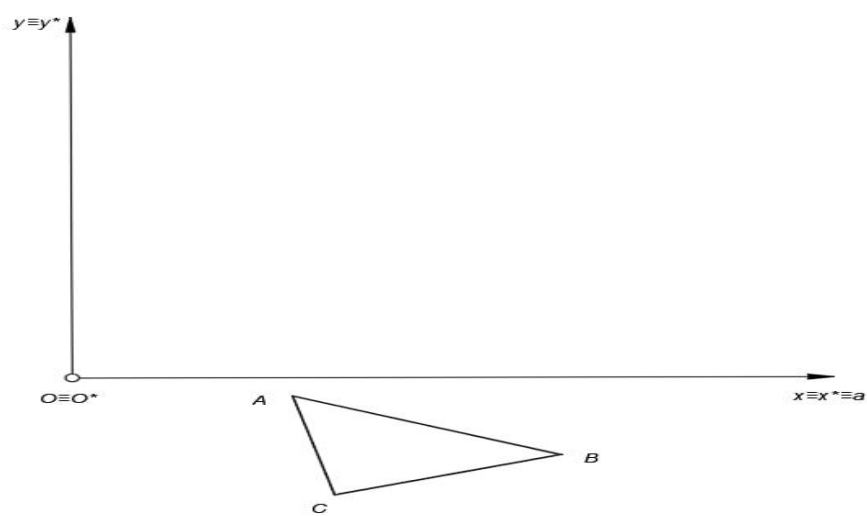
a)



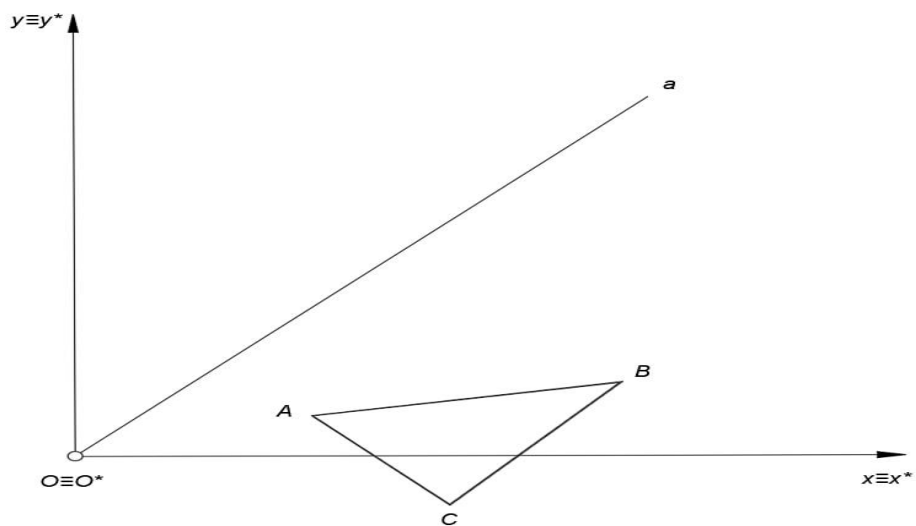
6)



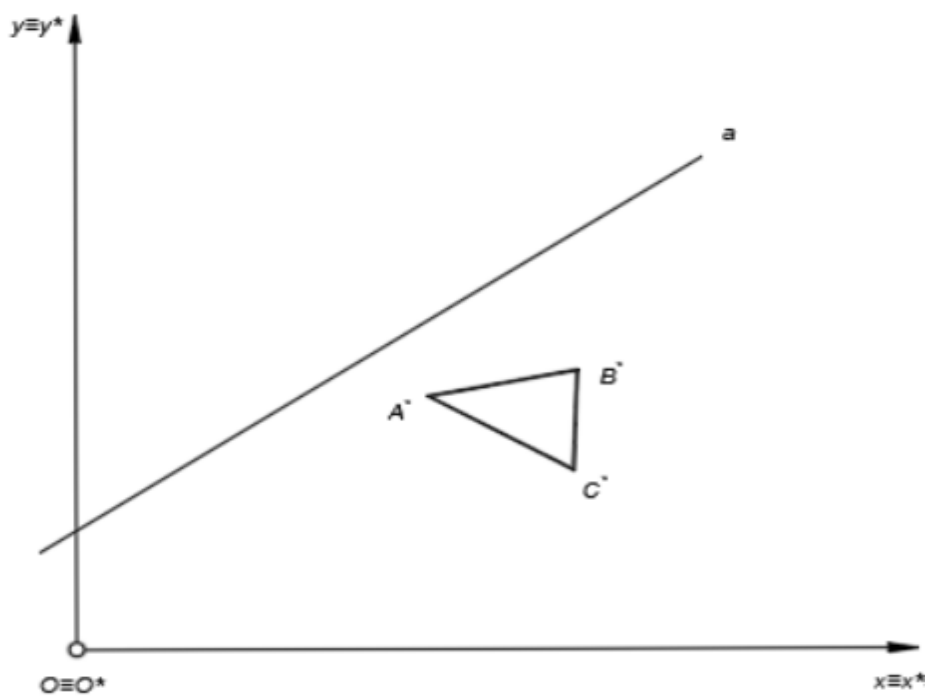
B)



Γ)



д)



е)

Рисунок 1.14 – Послідовність відображень

1.2.7. Точки безконечності

Однорідні координати є результативним засобом комп'ютерної графіки перенесення точок з одної системи координат у відповідні точки альтернативної системи координат. Відбувається коректне перенесення точок перетину ліній в точки перетину перетворених ліній. Таку властивість використовують для визначення однорідних координат точок безконечності.

Розглянемо пару прямих, що перетинаються:

$$x+y=1;$$

$$x=\frac{3}{2}y.$$

Точка перетину прямих має координати $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{2}{5}$.

Перепишемо рівняння у вигляді

$$x+y=1;$$

$$2x-3y=0.$$

і подамо їх у матрицевому вигляді

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0]$$

або $[X] [M'] = [R]$.

Якщо матриця $[M']$ квадратна, то точка перетину може бути одержана її обертанням. Змінимо систему координат

$$x+y-1=0;$$

$$2x-3y+0=0;$$

$$x=x$$

або у матрицевому вигляді $[X][M]=[R]$.

$$\text{Тобто } [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1].$$

Квадратна матриця, обернена до $[M]$, має вигляд:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Перемноживши обидві частини рівняння на $[M]^{-1}$, маємо

$$[xy1] = \frac{1}{5} [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \left[\frac{3}{5} \ \frac{2}{5} \ 1 \right].$$

Отже, точка перетину має координати $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{2}{5}$.

Тепер розглянемо дві паралельні прямі

$$x+y=1;$$

$$x+y=0,$$

точка перетину яких, за Евклідом, розташована у безконечності. Подамо рівняння у матрицевому вигляді

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1].$$

Матриця у рівнянні квадратна, але не має оберненої, бо два її рядки однакові. Це сингулярна матриця. Одержимо обернену матрицю, переписавши систему рівнянь

$$\begin{aligned} x+y-1 &= 0; \\ x+y+0 &= 0; \\ x+0+0 &= x, \end{aligned}$$

або в матрицевому вигляді:

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ x].$$

Обернена до неї матриця $[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Перемноживши обидві частини рівнянь на $[M]^{-1}$, маємо

$$[x \ y \ 1] = [0 \ 0 \ x] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [x - x \ 0] = x[1 - 1 \ 0].$$

Результуючі однорідні координати $(1 \ -1 \ 0)$ визначають точку «перетину» двох паралельних прямих, тобто точку безконечності. У даному випадку вони подають точку безконечності в напрямку $[1 \ -1]$ двовимірної площини. Двовимірний вектор $[a \ b \ 0]$ подає точку безконечності прямої, зокрема

- $[1 \ 0 \ 0]$ – точка на додатній осі Ox ,
- $[-1 \ 0 \ 0]$ – точка на від'ємній осі $-Ox$,
- $[0 \ 1 \ 0]$ – точка на додатній осі Oy ,
- $[0 \ -1 \ 0]$ – точка на від'ємній осі $-Oy$.
- $[1 \ 1 \ 0]$ – вздовж прямої $y=x$ в напрямі $[1 \ 1]$.

Вектор з однорідною компонентою $h=0$ подає точку безконечності та може бути пояснений як її рух до границі «безконечність»:

h	x^*	y^*	x	y
1	4	3	4	3
1/2	8	6	4	3
1/3	12	9	4	3
.....				
1/10	40	30	4	3
.....				
1/100	400	300	4	3

Таким чином, границя $h \rightarrow 0$ є точкою безконечності, заданою в однорідних координатах як $[x \ y \ h] = [4 \ 3 \ 0]$.

1.3. Правила виконання перетворень

Для формування графічних даних і виконання перетворень з допомогою множення матриць у комп'ютерній графіці *використовуються різні домовленості*. Найбільшу увагу потрібно приділяти постановці задачі та інтерпретації результатів. Наприклад, для виконання повороту потрібно одержати відповіді на такі питання:

- обертається об'єкт чи система координат?
- Як визначаються додатній та від'ємний повороти?
- Координати об'єкта записуються у вигляді рядка чи стовпця матриці?
- Навколо якої осі чи лінії виконується поворот?

Безумовно осі та лінії повинні бути прямими.

У нашому випадку:

використовується правостороння система координат,
графічний об'єкт обертається в нерухомій координатній системі,
додатній поворот визначається правилом правої руки, тобто поворот за годинниковою стрілкою здійснюється навколо осі при спостереженні від її початку в додатному напрямку,

координатні вектори подаються у вигляді рядків матриці.

Матриця

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

задає перетворення для додатного повороту навколо початку координат або осі Oz . Оскільки вектор задається рядком матриці, то *матрицю перетворення потрібно розташувати після матриці координатних векторів*. Таке перетворення задається шляхом множення справа. При використанні однорідних координат для додатного повороту об'єкта на кут θ навколо початку координат або осі Oz використання множення справа приводить до такого результату

$$[X^*] = [X][R],$$
$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Якщо подати координатні вектори, задані однорідними координатами, у вигляді стовпця матриці, то поворот можна виконати так:

$$[X^*] = [R]^{-1}[X],$$
$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Такий вираз являє перетворення з множенням зліва, бо матриця перетворення розташована перед стовпцем координатного вектора. Матриця 3*3 останнього виразу являє транспозицію матриці 3*3 попереднього виразу, що свідчить про незалежність рядків та стовпців матриці. Щоб повернути систему координат і залишити незмінними координатні вектори, треба в матриці перетворення

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

замінити Θ на $-\Theta$:

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворення точки має вигляд:

$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

РОЗДІЛ 2

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ПРОСТОРУ E^3

-
- Перетворення точок і відрізків прямих ліній простору E^3
 - Афінна і перспективна геометрія. Аксонометричні проекції
 - Перспективні перетворення

2.1. Перетворення точок і відрізків прямих ліній простору E^3

Уявлення про геометричний об'єкт можна одержати за допомогою операцій перетворення у тривимірному просторі E^3 з осями Ox , Oy та Oz . Тому всі операції для випадку площини простору E^2 можна поширити на простір E^3 . З урахуванням однорідних координат точка з координатами (x, y, z) тривимірного простору буде подана чотиривимірним вектором $[x \ y \ z \ 1]$ при $H=1$ або $[X \ Y \ Z \ H]$. Перетворення має вигляд:

$$[X \ Y \ Z \ H] = [x \ y \ z \ 1][T];$$

$$[x \ y \ z \ 1] = \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ H & H & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

У виразі маємо $[T] = \begin{bmatrix} a & b & c & \square & p \\ d & e & t & \square & q \\ g & i & j & \square & r \\ \dots & \dots & \dots & \square & \dots \\ l & m & n & \square & s \end{bmatrix}$ — узагальнена матриця

перетворення 4×4 графічного об'єкта.

Подамо матрицю $[T]$ чотирма частинами, які виділені штриховими лініями. Функціональні призначення матриць такі:

матриця 3×3 здійснює лінійне перетворення, тобто лінійну комбінацію векторів у лінійну комбінацію векторів як зміну масштабу, зсуву, обертання і відображення графічного об'єкта,

матриця 1×3 виконує перенесення графічного об'єкта,

матриця 3×1 виконує перетворення в перспективі графічного об'єкта,

елемент 1×1 виконує загальну зміну масштабу графічного об'єкта.

Повне перетворення вектора матрицею 4×4 і нормалізацію перетвореного вектора називають *білінійним перетворенням*, яке містить операції зсуву, частинної зміни масштабу, обертання, відображення, переносу і зміни масштабу усього зображення графічного об'єкта.

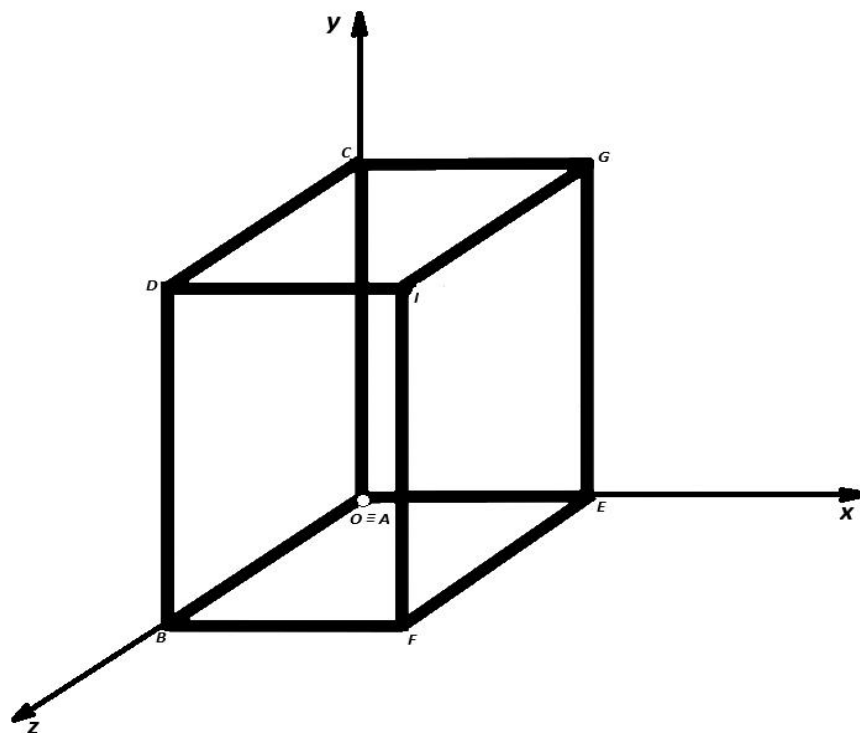
2.1.1. Зміна масштабу

Зміну масштабу як часткового, так і повного здійснюють подібно до двовимірного елемента основної матриці перетворення 4×4 . Таке перетворення має вигляд:

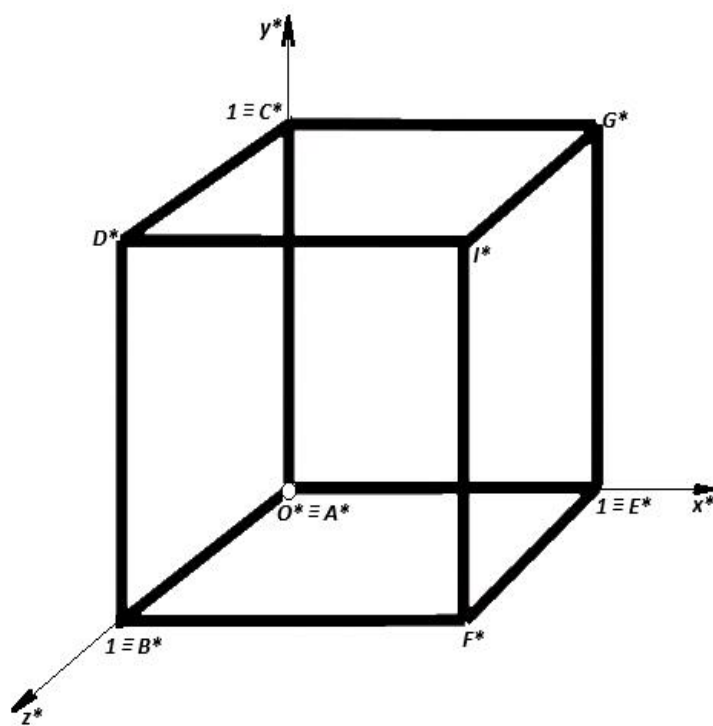
$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [a \ x \ e \ y \ j \ z \ 1] = [xyz1]$$

і здійснює частинну зміну масштабу по осях Ox , Oy , Oz .

Приклад. Розглянемо перетворення у тривимірному просторі E^3 паралелепіпеда в одиничний куб (рис.2.1).



a)



б)

Рисунок 2.1 – Перетворення паралелепіпеда в одиничний куб

Прийmemo такі значення коефіцієнтів: $a=0.5$; $e=\frac{1}{3}$; $j=1$. Вигляд перетворення такий:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворення координат вершин паралелепіпеда (рис.2.1а), матриця зліва, в координати вершин одиничного куба (рис.2.1б), матриця справа, виконується за допомогою узагальненої матриці 4×4 перетворення $[T]$ з прийнятими значеннями коефіцієнтів a, e, j .

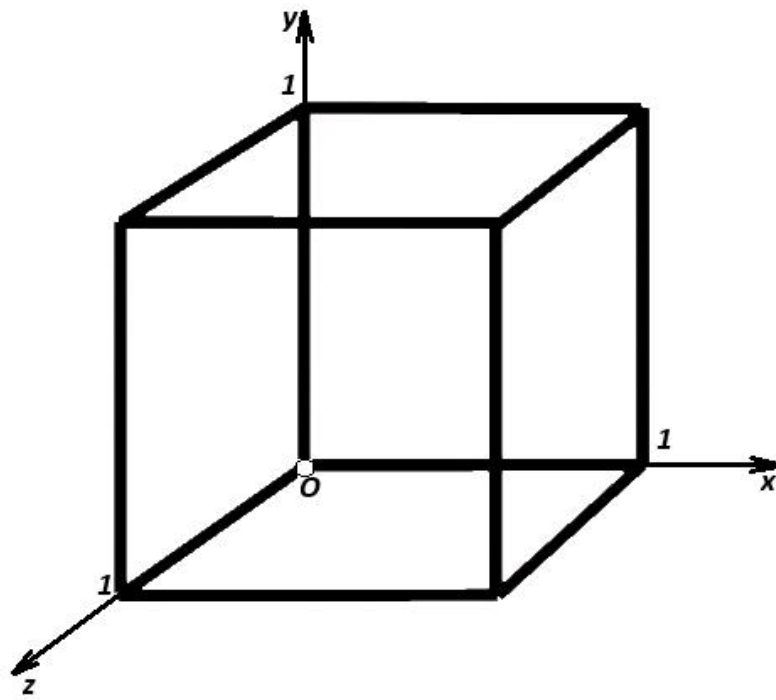
Загальну зміну масштабу здійснює четвертий діагональний елемент:

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ s] = [xyz \ 1] = \left[\frac{x}{s} \ \frac{y}{s} \ \frac{z}{s} \ 1 \right].$$

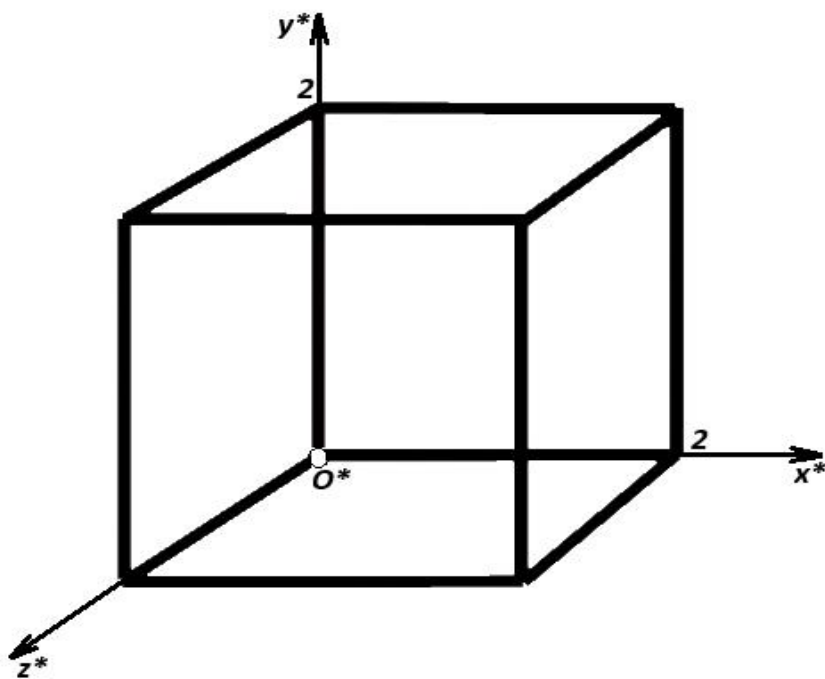
Наприклад, збільшимо в два рази куб при $s=0.5$ (рис.2.2). Вигляд перетворення такий:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворення координат вершин одиничного куба (рис.2.2а), матриця зліва, в координати вершин збільшеного в два рази куба (рис.2.2б) при $s=0.5$, матриця справа, виконується за допомогою узагальненої матриці $[T]$ перетворення 4×4 з прийнятим значенням коефіцієнта $s=0.5$.



a)



б)

Рисунок 2.2 – Масштабування одиничного куба

Цей результат можна одержати при однакових значеннях коефіцієнтів частинних змін масштабу

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{x}{s} \ \frac{y}{s} \ \frac{z}{s} \ 1 \right].$$

Тривимірний зсув здійснюють недіагональні елементи b, c, d, f, y, i верхньої лівої підматриці 3*3:

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ y & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x + yd + zg \ \ bx + y + iz \ \ cx + fy + z \ 1].$$

У розглянутих випадках наявна постійність координат вершини паралелепіпеда, яка знаходиться у початку координат.

2.1.2. Тривимірні обертання

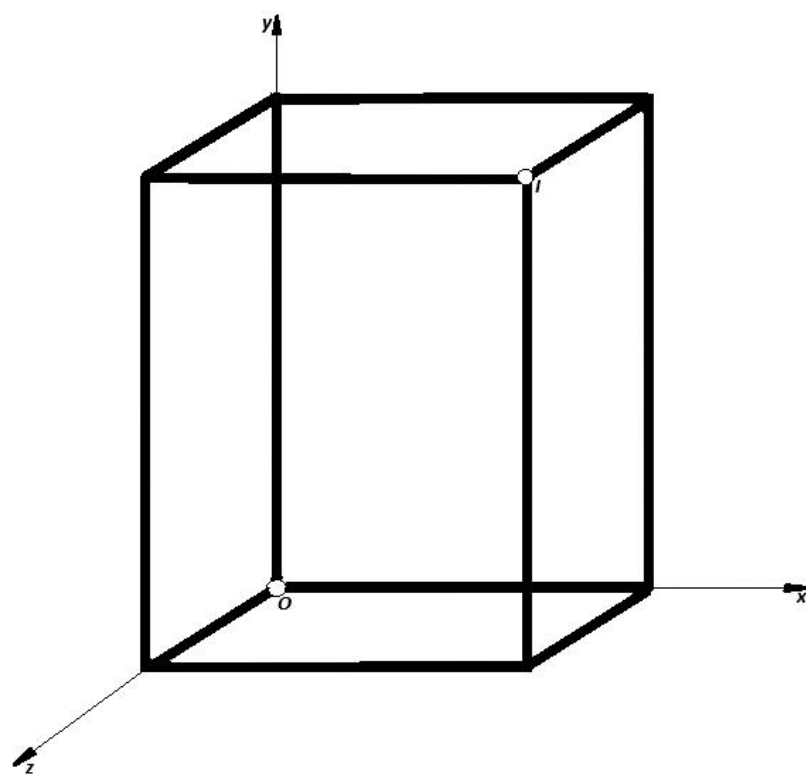
Тривимірні обертання навколо початку координат наявні, якщо визначник матриці 3*3 дорівнює одиниці. При обертанні навколо осі Ox розміри предмета відносно цієї осі не змінюються. Тобто матриця 4*4 має нулі в першому рядку і першому стовпці за винятком одиниці в головній діагоналі. При визначенні інших елементів матриці способом обертання не квадрата у площині, а куба у просторі E^3 на кут Θ навколо осі Ox одержимо таку матрицю перетворення:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

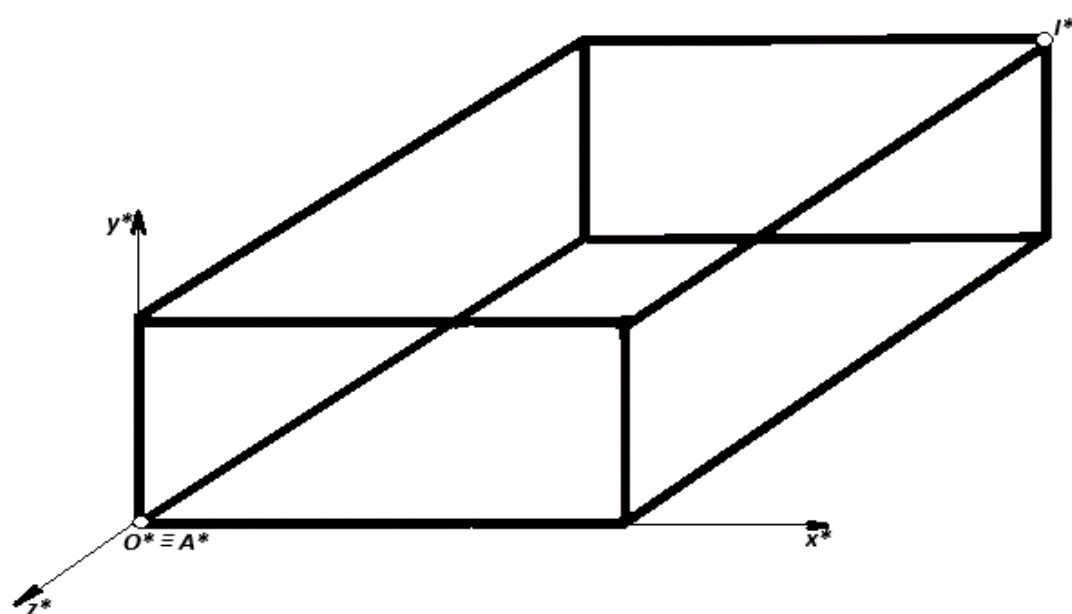
Обертання додатне, за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат вздовж осі Ox . Маємо такий вигляд матриці перетворення:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

для випадку повороту паралелепіпеда (рис.2.3а) на -90° навколо осі Ox (рис.2.3б).



a)



б)

Рисунок 2.3 – Обертання паралелепіпеда на -90° навколо осі Ox

Для обертання геометричного об'єкта навколо осі Oy на кут φ маємо такий вигляд матриці перетворення:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зокрема, для значення кута $\varphi=90$ град. маємо такий вигляд матриці перетворення:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для обертання геометричного об'єкта навколо осі Oz на кут ψ маємо такий вигляд матриці перетворення:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тривимірні обертання геометричних об'єктів не комутативні, тобто *порядок множення впливає на кінцевий результат*. Наприклад, обертання геометричного об'єкта у тривимірному просторі навколо осі Ox , а далі Oy , на однаковий кут Θ потребує матриці

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta & 0 \\ \sin^2 \Theta & \cos \Theta & \cos \Theta \sin \Theta & 0 \\ \cos \Theta \sin \Theta & -\sin \Theta & \cos^2 \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Обертання геометричного об'єкта навколо осі Oy , а далі навколо осі Ox на однаковий кут Θ потребує матриці

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin^2 \Theta & -\cos \Theta \sin \Theta & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & -\cos \Theta \sin \Theta & \cos^2 \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приклад. Розглянемо обертання у тривимірному просторі E^3 паралелепіпеда. Приведений на рис. 2.4 паралелепіпед має координатні вектори

$$[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

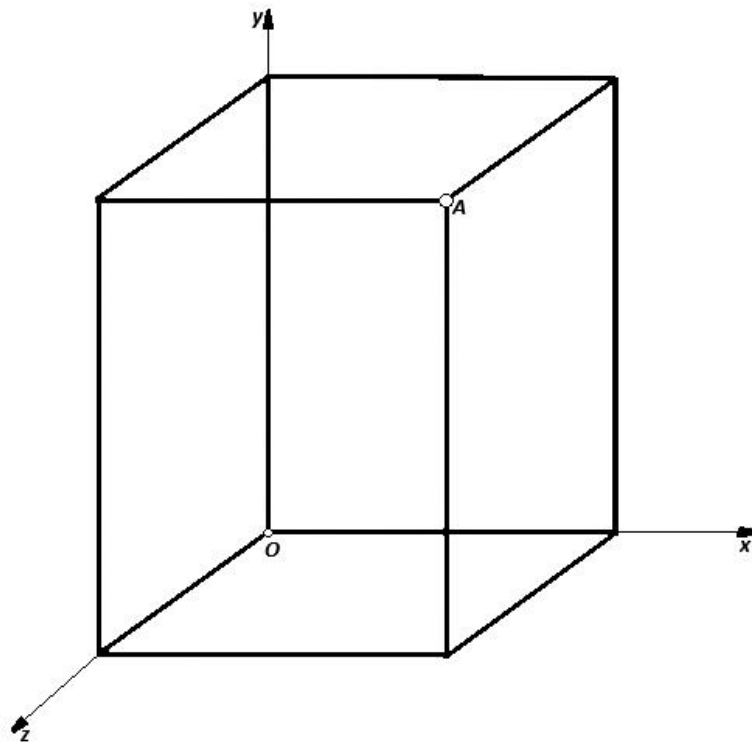
Загальна матриця для обертання геометричного об'єкта, наприклад, паралелепіпеда, спочатку навколо осі Ox на кут $\Theta = 90^\circ$ (рис. 2.4а), далі навколо осі Oy на кут $\Theta = 90^\circ$ (рис. 2.4б) має такий вигляд:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

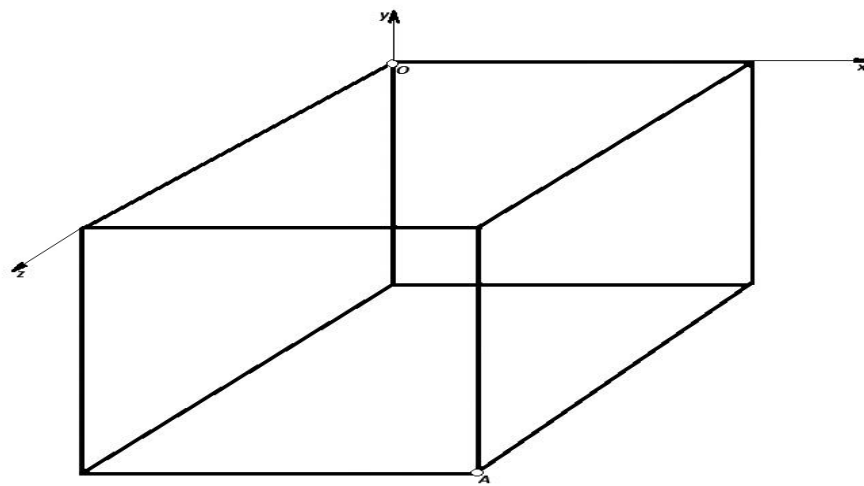
Перетворені координатні вектори мають вигляд:

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

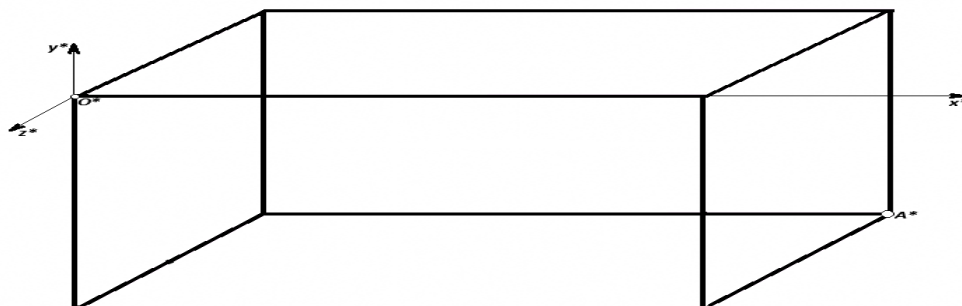
Перетворений геометричний об'єкт, паралелепіпед, зображено на рис. 2.4в.



a)



б)



в)

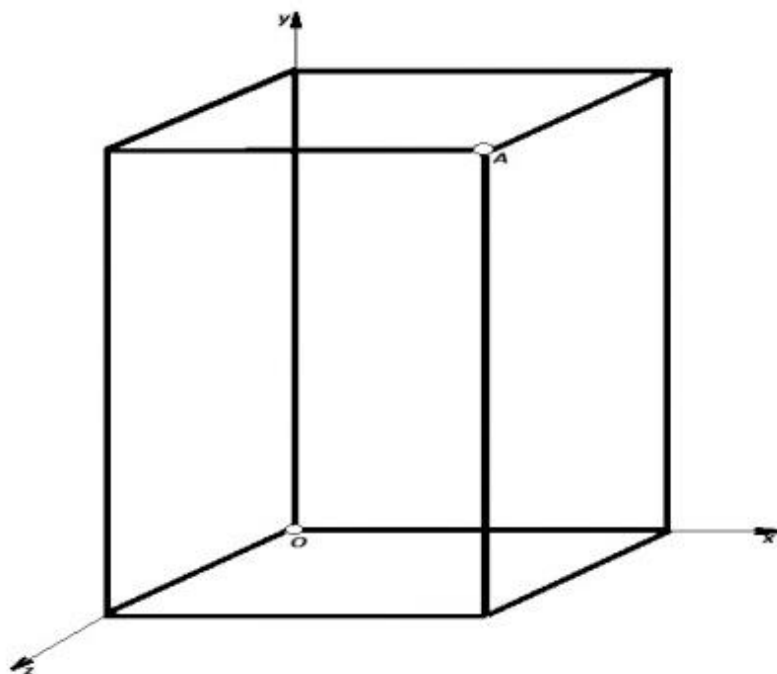
Рисунок 2.4 – Обертання паралелепіпеда навколо осей Ox та Oy

Загальна матриця перетворення для обертання паралелепіпеда (рис. 2.5а) спочатку навколо осі Oy на кут 90° (рис. 2.5б), а потім навколо осі Ox на кут 90° (рис. 2.5в) має такий вигляд:

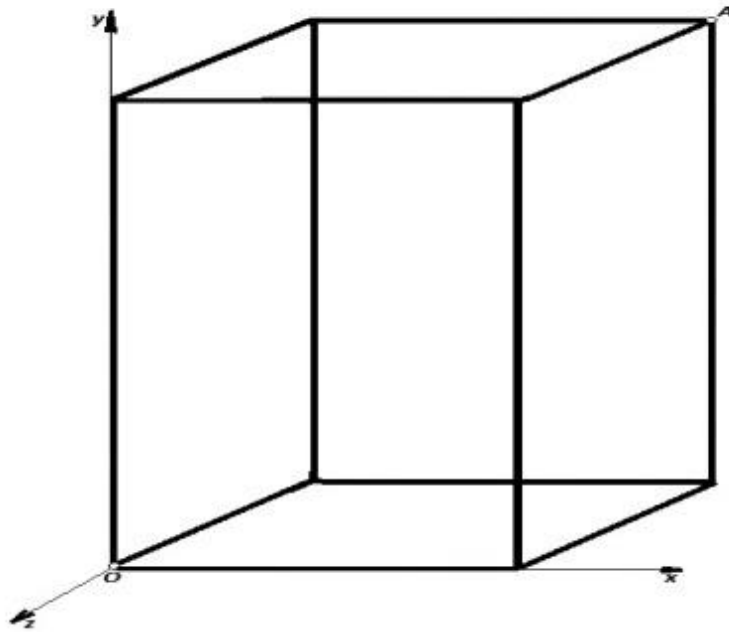
$$[T'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворені координатні вектори мають вигляд:

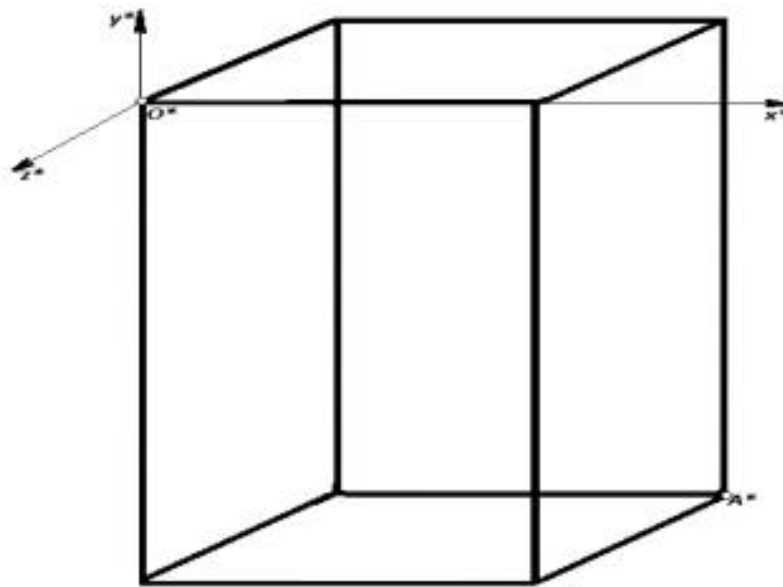
$$[X]^* = [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$



а)



б)



в)

Рисунок 2.5 – Обертання паралелепіпеда навколо осей Oy та Ox

Порівнюючи одержані результати, маємо, що орієнтація векторів перетворених координат графічного об'єкта різна, що свідчить про важливість порядку множення матриць.

2.1.3. Відображення в просторі E^3

Відображення в просторі являє дзеркальне відображення, наприклад, відносно площини. Для відображення без зміни масштабу треба, щоб визначник

матриці перетворення дорівнював -1 . При відображенні відносно площини Oxy змінюється знак координати z . Матриця перетворення для відображення відносно площини Oxy має такий вигляд:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриці перетворення для відображення відносно:

площини Oyz

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

площини Oxz

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тривимірне лінійне просторове перенесення визначене виразом

$$[X \ Y \ Z \ H] = [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & n & 1 \end{bmatrix} = [(x + l)(y + m)(z + n)] = [x \ y \ z \ 1].$$

2.1.4. Композиції перетворень

Послідовні перетворення можуть бути об'єднані в одне 4×4 -перетворення. Оскільки множення матриць є некомутативною операцією, то важливий порядок його виконання. Найближча до матриці координатного вектора матриця задає перше перетворення, а остання – останнє:

$$[X][T] = [X] \cdot [T_1][T_2][T_3] \dots,$$

де $[T_i]$ – довільна комбінація матриць перетворення, масштабування, зсуву, обертання, відображення, переносу, перспективного перетворення і проєкціювання. Перспективні перетворення спотворюють зображення геометричних об'єктів, а проєкціювання приводить до втрати інформації. Тому за наявності цих матриць в ряду $[T_i]$ вони повинні бути розташовані відповідно передостанньою і останньою по порядку.

2.1.5. Обертання навколо паралельної координатній осі прямої

Обертання навколо глобальних координатних осей Ox , Oy чи Oz виконуються із використанням відповідних матриць. Для того, щоб виконати один чи кілька обертів у локальній системі координат об'єкта, паралельній осям глобальної системи координат, суміщають початки координат локальної та глобальної систем. Для цього треба виконати такі процедури:

- сумістити початки локальної та глобальної систем координат;
- виконати необхідні оберт чи оберти;

– повернути локальну систему координат у початковий стан.

Приклад. Паралелепіпед заданий координатними векторами відносно глобальної системи координат $Oxyz$

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E' \\ F \\ G \\ H \end{matrix}.$$

Повернемо його на кут $\Theta = 30^\circ$ відносно локальної осі Ox' , що проходить через центр паралелепіпеда. Початок локальної системи координат прийнято в центрі паралелепіпеда. Координати центра мають такі числові значення:

$$[x_c \ y_c \ z_c \ 1] = [\frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \ 1].$$

Обертання здійснимо таким чином:

$$[X'] = [X] \cdot [T_r][R][T_r]^{-1},$$

$$\begin{aligned} \text{де } [T_r] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -y_c & z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, \\ [R_x] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ [T_r]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_c & z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матриця $[T_r]$ зсуває паралелепіпед паралельно площині $x=0$ до збігу $x' \equiv x$. Матриця $[R_x]$ виконує обертання навколо осі Ox . Матриця $[T_r]^{-1}$ переносить вісь Ox' з повернутим паралелепіпедом у початкове положення. Перемноживши матриці, одержимо:

$$[T] = [T_r][R_x][T_r]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & y_c(1 - \cos \Theta) + z_c \sin \Theta & z_c(1 - \cos \Theta) - y_c \sin \Theta & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворені координати мають вигляд:

$$[X'] = [X][T] = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0.951 & -0.549 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.817 & 1.68 & 1 \\ 2 & 0.817 & 1.68 & 1 \\ 2 & 1.68 & 2.18 & 1 \\ 1 & 1.68 & 2.18 & 1 \\ 1 & 1.32 & 0.82 & 1 \\ 2 & 1.32 & 0.82 & 1 \\ 2 & 2.18 & 1.32 & 1 \\ 1 & 2.18 & 1.32 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \\ E^* \\ F^* \\ G^* \\ H^* \end{matrix}$$

2.1.6. Обертання навколо довільної осі в просторі E^3

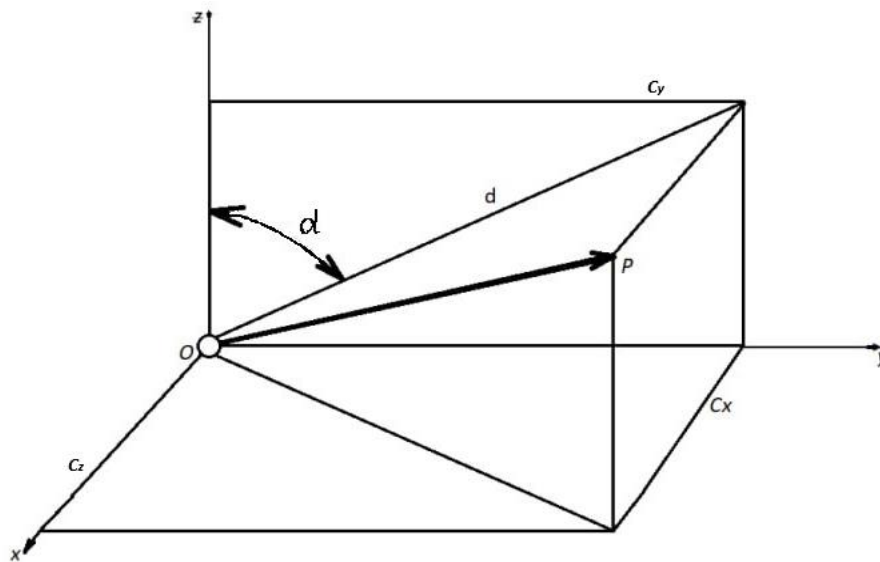
Узагальнений випадок повороту геометричного об'єкта навколо довільної осі у просторі часто використовується у виробництві реклами, фільмів, при моделюванні об'єктів, процесів та явищ. Поворот навколо довільної осі у тривимірному просторі виконується з допомогою операцій переносу і простих поворотів навколо координатних осей.

Нехай довільна вісь проходить у просторі через точку (x_0, y_0, z_0) і має направляючий вектор (C_x, C_y, C_z) . Поворот навколо цієї осі на деякий кут δ виконується у такій послідовності:

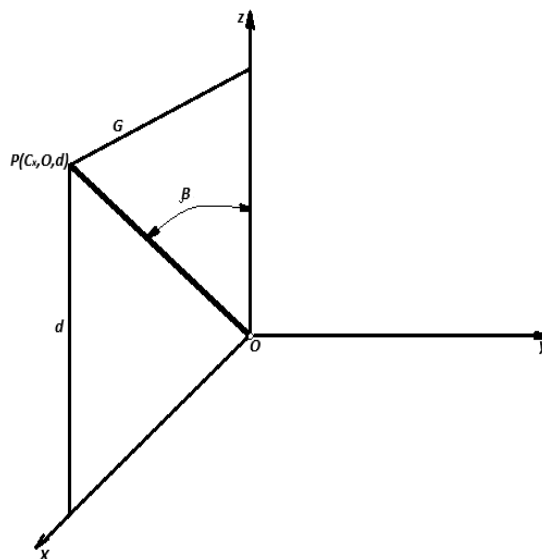
- перенести вісь так, щоб точка (x_0, y_0, z_0) була розташована у початку системи координат;
- повернути вісь за допомогою декількох поворотів до збігання її з потрібною віссю, наприклад Oz ;
- виконати поворот на кут δ навколо осі Oz ;
- виконати зворотні перетворення до тих, що дали сумістити вісь обертання з віссю Oz ;
- виконати зворотній перенос.

Щоб вісь, яка проходить через початок координат, збіглася з однією з координатних осей, потрібно виконати два послідовних повороти навколо інших двох осей. Для суміщення довільної осі обертання з віссю Oz спочатку виконуємо її поворот навколо осі Ox у площину Oxz , а потім навколо осі Oy .

Спроеціюємо направляючий одиничний вектор OP у площини проєкцій Oyz та Oxy тривимірного простору (рис.2.6).



a)



б)

Рисунок 2.6 – Проекціювання одиничного напрямного вектора OP

Проекцією цього вектора у площині проєкцій Oyz є його складова d . Координатами проєкції d є Cy і Cz . З рис. 2.6а маємо

$$d = \sqrt{C_y^2 + C_z^2}.$$

Звідки

$$\cos \alpha = \frac{C_z}{d};$$

$$\sin \alpha = \frac{C_y}{d}.$$

Після повороту навколо осі Ox вектора P на кут α він знаходиться у площині Oxz . Складова вектора на осі Ox дорівнює Cx , а на осі Oz вона дорівнює d . З рис. 2.6б маємо:

$$\cos \beta = \frac{d}{[P]} = \frac{d}{1} = d;$$

$$\sin \beta = \frac{Cx}{[P]} = \frac{Cx}{1} = Cx.$$

Повне перетворення має вигляд:

$$[M] = [T][Rx][Ry][R\delta][Ry]^{-1}[Rx]^{-1}[T]^{-1}.$$

Матриця обертання навколо осі Ox

$$[Rx] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Cz}{d} & \frac{Cy}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{Cy}{d} & \frac{Cz}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриця обертання навколо осі Oy

$$[Ry] = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & Cx & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -Cx & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нарешті матриця обертання навколо довільної осі задана матрицею обертання на кут δ навколо осі Oz

$$[R\delta] = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

У матрицях $[Rx]$ і $[Ry]$ замість тригонометричних функцій потрібно брати відношення $\frac{Cz}{d}$ і $\frac{Cy}{d}$, d і $-Cx$.

Якщо складові одиничного напрямного вектора довільної осі невідомі, то потрібно задати його двома точками довільної осі (x_0, y_0, z_0) та (x_1, y_1, z_1) :

$$[v] = [(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0)].$$

Компоненти Cx , Cy і Cz одиничного напрямного вектора знайдемо, нормалізувавши цей вектор:

$$[Cx \ Cy \ Cz] = \frac{[(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0)]}{((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2)^{1/2}}.$$

2.1.7. Відображення відносно довільної площини

Розглянуті матриці відображення здійснюють відображення об'єкта відносно координатних площин Oxy , Oxz , Oyz . За необхідності виконати відображення відносно площини загального положення треба цю площину сумістити з одною з координатних площин, наприклад, Oxy , виконати відображення відносно цієї площини і здійснити обернені перетворення для повернення цієї площини до початкового положення:

- перенести довільну точку P площини відображення у початок тривимірної системи координат;
- повернути вектор нормалі до площини відображення у початку координат до співпадання з віссю Oz . Площина відображення збігається з координатною площиною Oxy ;
- за відомим способом відображення відобразити об'єкт відносно координатної площини Oxy ;
- повернути площину з об'єктом у первісне положення, виконавши перетворення, зворотні до перших двох.

Матриця загального перетворення має вигляд:

$$[M] = [T][Rx][Ry][Rt][Ry]^{-1}[Rx]^{-1}[T]^{-1}.$$

Матриці $[T]$, $[Rx]$, $[Ry]$ розглянуті раніше, а матриця $[Rt]$ являє матрицю відображення відносно площини Oxy .

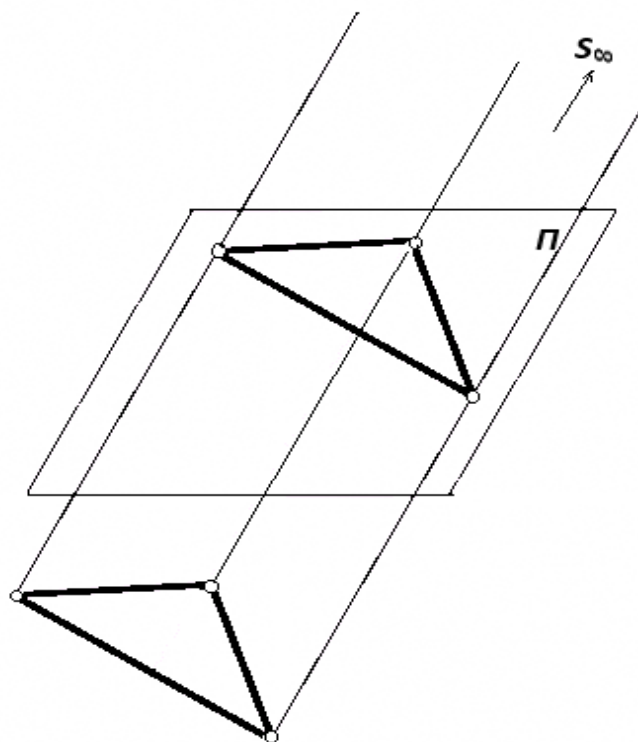
2.2. Афінна і перспективна геометрія. Аксонометричні проекції

Афінні перетворення являють комбінацію лінійних перетворень, що супроводжуються перенесенням зображень. При цьому останній стовпець

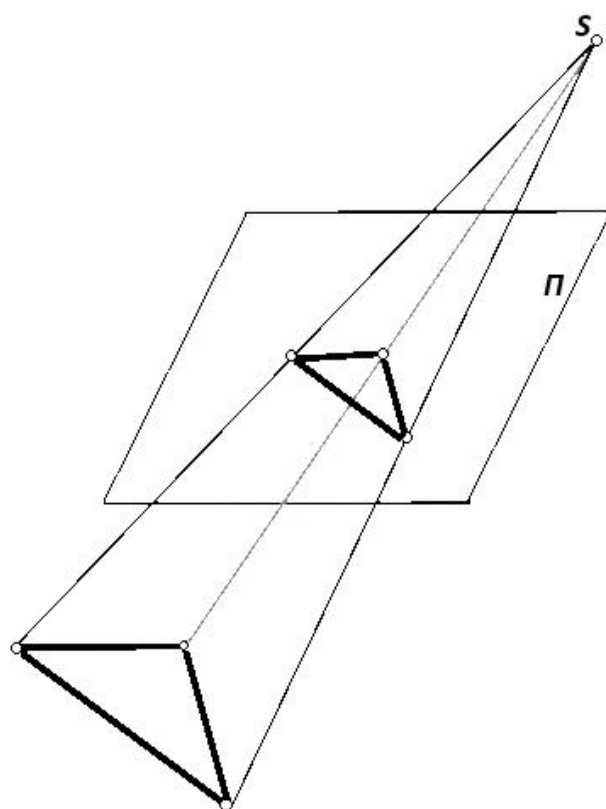
узагальненої матриці перетворення 4×4 має бути $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, інакше перетворена

однорідна координата H не буде одиничною, а співвідношення між афінним перетворенням і матрицею перетворення 4×4 не буде однозначним. Добуток двох афінних перетворень геометричних об'єктів є також афінним перетворенням, тобто має місце білінійне перетворення.

Перспективні перетворення доречні, якщо останній стовпець узагальненої матриці перетворення 4×4 не нульовий. Перспективні перетворення полягають у побудові проекції геометричного об'єкта в площині з деякої точки S , що є центром проєкціювання (рис.2.7). Якщо центр проєкціювання S знаходиться в безконечності S_∞ , то перспективна проєкція являє аксонометричну (рис.2.7а). Комбінація перспективного перетворення з проєкційним тобто ортографічним перетворенням являє перспективну проєкцію як перетворення зображення геометричного об'єкта з тривимірного простору у двовимірний (рис.2.7б).



а)



б)

Рисунок 2.7 – Способи проєкціювання

2.2.1. Ортографічні проекції

Ортографічні проекції є найпростішими з паралельних проекцій. На таких проекціях має місце зображення дійсних розмірів і форми одної грані об'єкта. Ортографічні проекції одержують проекціюванням предмета в одну з координатних площин $x=0$, $y=0$ чи $z=0$.

Матриці проекцій об'єкта на площину

$$x = 0:$$

$$[Px] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$y = 0:$$

$$[Py] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$z = 0:$$

$$[Pz] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

У відповідному першому (x), другому (y) чи третьому (z) стовпці всі елементи матриці дорівнюють нулю. Отже, в результаті перетворення геометричного об'єкта ця координата дорівнює нулю.

На рис.2.8 приведені приклади аксонометричної та двох ортографічних проекцій геометричного об'єкта.

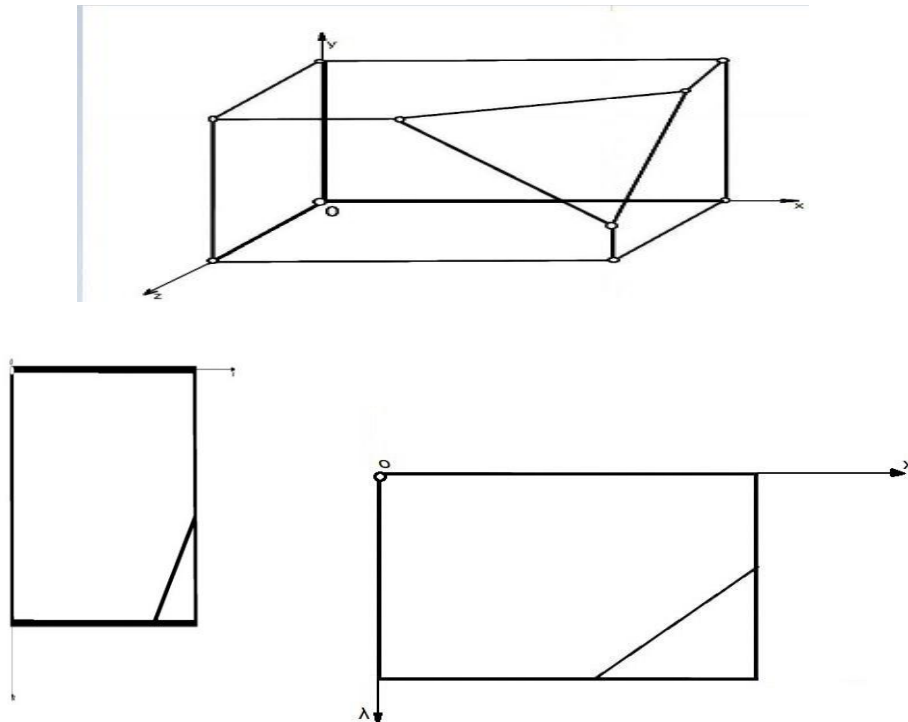


Рисунок 2.8 – Приклад ортографічних проекцій геометричного об'єкта

Одна ортографічна проекція не дає повної інформації про геометричний об'єкт, необхідної для його відтворення за зображенням. Використовують, як правило, кілька пов'язаних між собою проекцій, наприклад, три (рис.2.9).

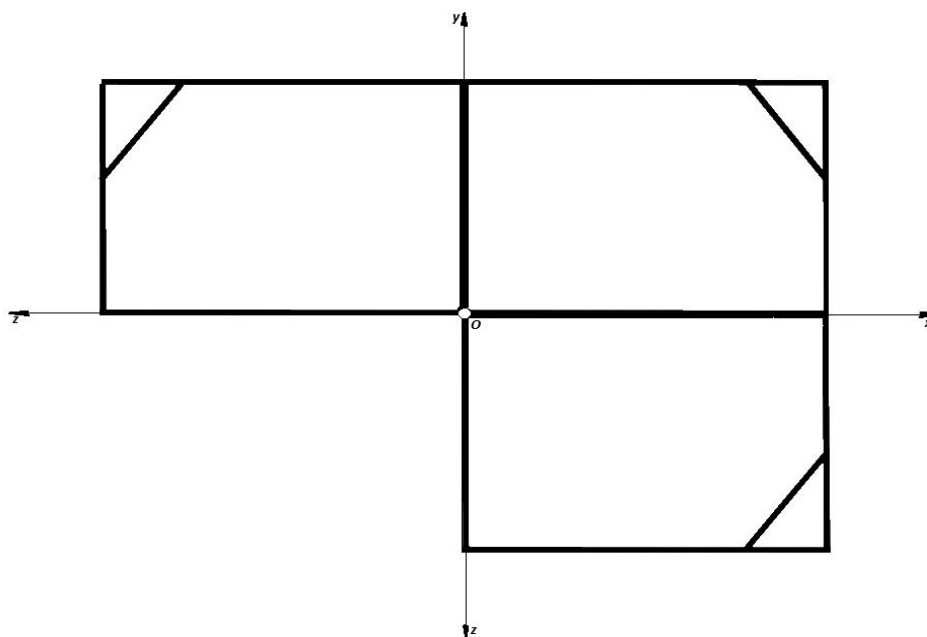


Рисунок 2.9 – Комплексне креслення об'єкта

Це вигляди геометричного об'єкта з боку осей Ox , Oy та Oz і являють вигляди спереду, зверху, справа. Їх одержують проєкціюванням на площини $z=0$, $x=0$, $y=0$ з центрів проєкцій, розташованих в безконечності на осях $+Oz$, $+Ox$ та $+Oy$. Вигляди предмета ззаду, зліва та знизу одержують проєкціюванням у площини проєкцій $z=0$, $x=0$, $y=0$ з центрів проєкцій, розташованих у безконечності на осях $-Oz$, $-Ox$, $-Oy$.

Відмітимо, що всі шість виглядів можна одержати комбінаціями відображення, обертання і переносу з наступним проєкціюванням на площину $z=0$ з центра проєкцій, розташованого у безконечності на осі Oz . Наприклад, вигляд ззаду можна одержати відображенням відносно площини $z=0$ і проєкціюванням на цю площину. Вигляд зліва одержують обертанням за допомогою матриці $[P_z]$ у площину $z=0$. Якщо одна чи декілька граней об'єкта не паралельні координатній площині, стандартні ортографічні вигляди не зображують дійсну величину граней. Для цього використовуються додаткові вигляди. Вони утворюються обертанням і переміщенням геометричного об'єкта так, щоб нормаль до цієї грані збіглася з одною з координатних осей. Така грань проєкціюється у координатну площину, перпендикулярну до цієї осі.

Графічне моделювання складних геометричних об'єктів вимагає зображення не тільки його зовнішніх поверхонь, але й внутрішніх поверхонь у вигляді отворів. У нарисній геометрії для зображення внутрішньої будови об'єкта використовують розрізи і перерізи. Переріз утворюється умовним проведенням через геометричний об'єкт площини, яку називають січною, вилученням частини об'єкта, розташованого між спостерігачем і січною площиною, і проєкціюванням одержаного зображення, яке розташоване у січній площині, у площину проєкцій.

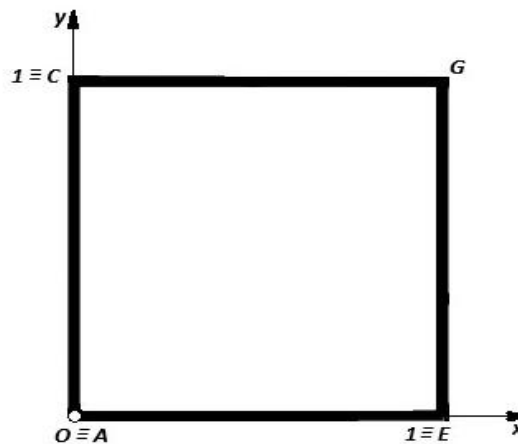
У комп'ютерній графіці таке зображення можна одержати з допомогою суміщення з координатною віссю нормалі, проведеної до площини перерізу, відтинання об'єкта з одного боку від площини перерізу і, нарешті, проєкціюванням одержаного зображення у площині перерізу у координатну площину, перпендикулярну до осі.

2.2.2. Аксонометрія

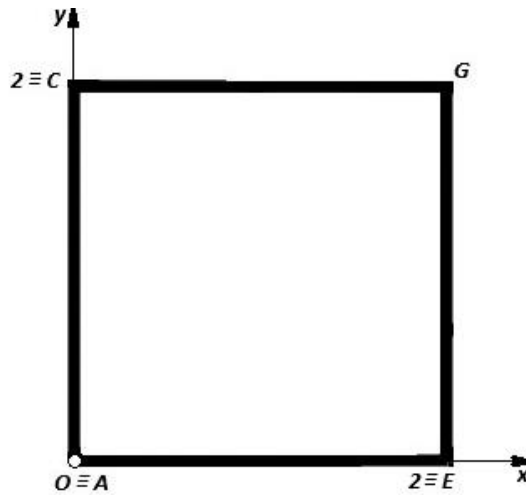
Ортогональні проєкції об'єкта на одну чи декілька площин проєкцій не дозволяють аналізувати загальну його форму, а тільки окремих його частин поверхонь або граней. Таке обмеження можна усунути за допомогою аксонометричних проєкцій. Суть аксонометричного проєкціювання полягає в обертанні об'єкта навколо координатних осей так, щоб було видно щонайменше три сусідні грані для кубоподібних об'єктів. Повернутий об'єкт проєкціюється з центром проєкцій у безконечності в одну з координатних площин, як правило у площину $z=0$. Якщо грань не паралельна площині проєкцій, то її аксонометрична проєкція не є дійсною величиною. Паралельні осям координат лінії спотворюються однаково. Коефіцієнт спотворення – це являє відношення довжини проєкції відрізка до його дійсної величини. Практичне значення мають триметрична, ізометрична та диметрична аксонометричні проєкції. Ізометрична проєкція є частинним випадком диметричної, яка в свою чергу є частинним випадком триметричної проєкції.

Приступаючи до розгляду аксонометричних проєкцій, проведемо аналіз особливостей матриці перетворення 2×2 на прикладі перетворення одиничного квадрата (рис.2.10а). Збільшимо квадрат у два рази, використовуючи матрицю, в якій діагональні елементи дорівнюють два (рис.2.10б):

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$



a)



б)

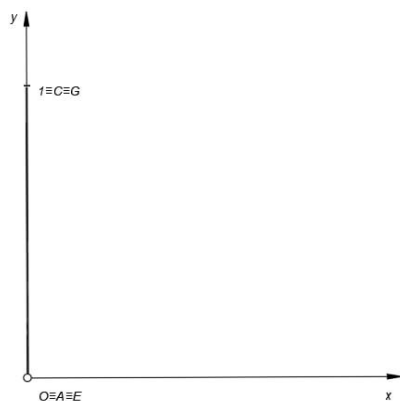
Рисунок 2.10 – Збільшення квадрата у два рази

Якщо один з рядків матриці 2×2 нульовий, наприклад, $x=0$, то відбувається перенесення зображення об'єкта з безконечності на вісь при $x=0$ (рис.2.11а):

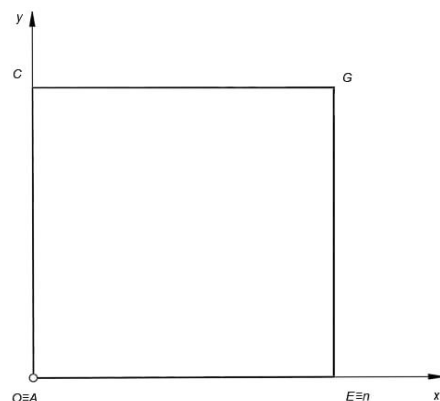
$$\begin{matrix} A \\ C \\ G \\ E \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо прийняти при цьому $x=n$, то має місце зміна масштабу по x , тобто перетворення квадрата в прямокутник (рис.2.10б).

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ n & 1 \\ n & 0 \end{bmatrix}.$$



а)



б)

Рисунок 2.11 – Проекції квадрата при $x=0$ а), $x=n$ б)

Введемо тепер однорідні координати. Використання матриці збільшення масштабу в два рази дає незмінний результат, тобто має місце збільшення масштабу в два рази:

$$\begin{matrix} A \\ C \\ G \\ E \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Прийmemo діагональні елементи одиничними, а в рядку значень абсцис $x=0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Як і раніше, одержали перенесене зображення квадрата з безконечності на вісь $0y$ при $x=0$ (рис.2.11а).

Прийmemo значення $x=n$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & 1 \\ n & 1 & 1 \\ n & 1 & 1 \\ n & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відбувається перенесення зображення квадрата з осі $0y$ в напрямку $x=n$ (рис.2.12).

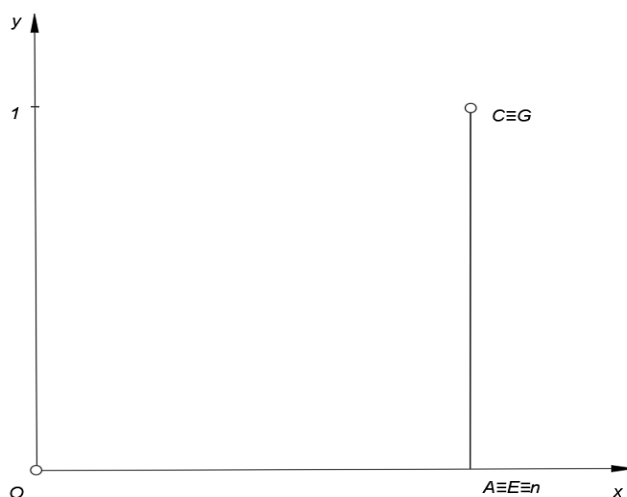


Рисунок 2.12 – Перенесення квадрата в напрямку $x=n$

Розглянемо тривимірний простір, використавши замість квадрата одиничний куб (рис.2.13а). Аксонометричну проекцію куба в площину $z=0$ одержимо проєкціюванням його з безконечності в площину $z=0$ (рис.2.13б):

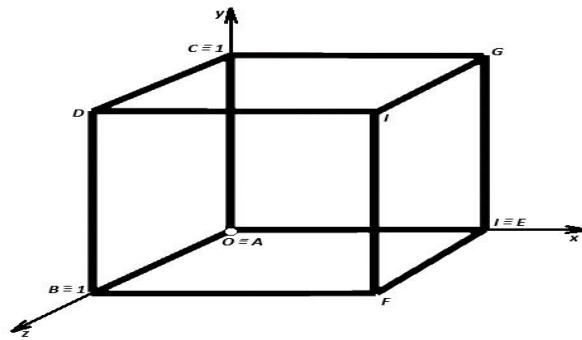
$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перенесення зображення куба з площини $z=0$ в пл. $z=n$ виконаємо за допомогою перетворення (рис.2.13в):

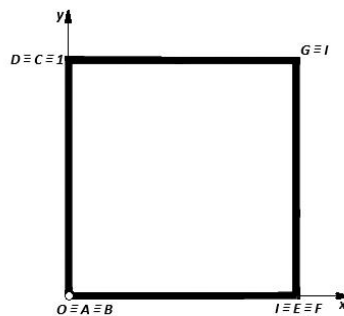
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n & 1 \\ 0 & 0 & n & 1 \\ 0 & 1 & n & 1 \\ 0 & 1 & n & 1 \\ 1 & 0 & n & 1 \\ 1 & 0 & n & 1 \\ 1 & 0 & n & 1 \\ 1 & 1 & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Такий самий результат одержимо за допомогою перетворення (рис.2.13в):

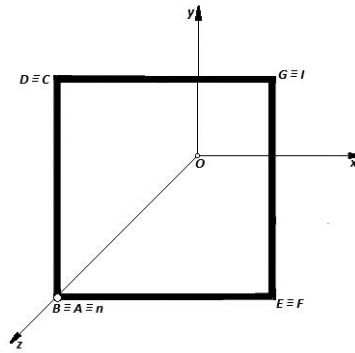
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n & 1 \\ 0 & 0 & n & 1 \\ 0 & 1 & n & 1 \\ 0 & 1 & n & 1 \\ 1 & 0 & n & 1 \\ 1 & 0 & n & 1 \\ 1 & 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & n & 1 \end{bmatrix}.$$



а)



б)



в)

Рисунок 2.13 – Аксонометричні проекції куба

Таким чином, утворена аксонометрична проекція геометричного об'єкта в нульовій площині містить нульовий стовпець, що відповідає площині проекції. Для випадку площин $x=l$ та $y=t$ матриці $[T]'$ та $[T]''$ переносу в напрямку $x=l$ чи $y=t$ після проєкціювання з безконечності в площину $x=0$ чи $y=0$ мають вигляд:

$$[T]' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[T]'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для аксонометричних проєкцій можна виділити такі основні види проєкцій:

- ортогональна проєкція – матриця перетворення здійснює тільки обертання; при цьому координатні осі є ортогональними в процесі проєкціювання;
- диметрична проєкція – дві з трьох осей в процесі проєкціювання однаково скорочені;
- ізометрична проєкція – три координатні осі в процесі проєкціювання однаково скорочені.

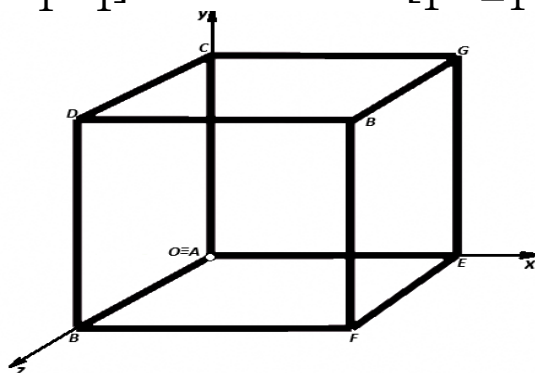
Ортогональну проєкцію куба (рис.2.14а) в площину $z=0$, тобто площину Oxy , одержимо, повернувши куб на 90° і спроекціювавши його з безконечності в координатну площину $z=0$.

Виконуємо поворот куба на 90° (рис.2.14б):

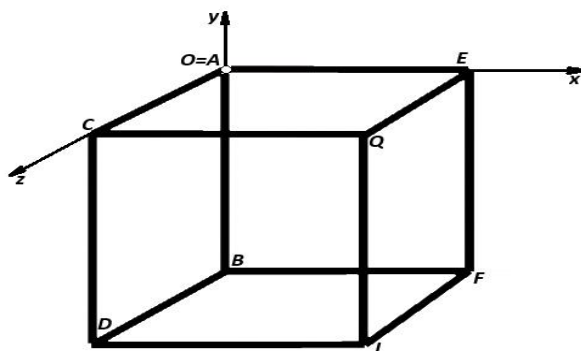
$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проекціюємо куб в координатну площину $z=0$ (рис.2.14в):

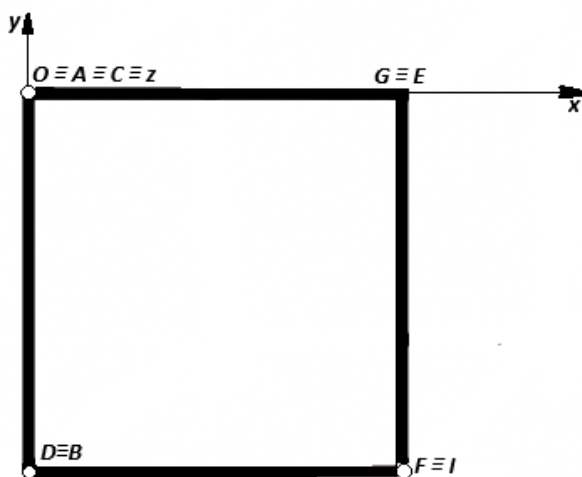
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



a)



б)



в)

Рисунок 2.14 – Ортогональна проекція куба в площині $z=0$

Диметричні проекції геометричних об'єктів одержують за допомогою комбінованих обертань послідовно навколо осей Oy та Ox . Такі обертання виконують після проєкціювання з центра, який знаходиться в безконечності. Запишемо рівняння, які відповідають обертанню об'єкта навколо осі Oy на кут φ , а далі – навколо осі Ox на кут Θ :

$$[XYZH] = [xyz1] \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [xyz1] \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \sin \Theta & -\sin \varphi \cos \Theta & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \Theta & \cos \varphi \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В якості геометричного об'єкта приймемо одиничний вектор. Одиничний вектор, який належить осі Ox , має вигляд:

$$[XYZH] = [1001] \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \sin \Theta & -\sin \varphi \cos \Theta & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \Theta & \cos \varphi \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [\cos \varphi \ \sin \varphi \sin \Theta \ -\sin \varphi \cos \Theta \ 1].$$

При проєкціюванні одиничного вектора з безконечності в площину $z=0$, тобто в площину Oxy , одержимо:

$$[\cos \varphi \ \sin \varphi \sin \Theta \ -\sin \varphi \cos \Theta \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\cos \varphi \ \sin \varphi \sin \Theta \ 0 \ 1].$$

Довжина одиничного вектора l в площині Oxy

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi \sin \Theta)^2}.$$

Одиничний вектор, що належить осі Oy , має вигляд:

$$[XYZH] = [0101] \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \sin \Theta & -\sin \varphi \cos \Theta & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \Theta & \cos \varphi \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ \cos \Theta \ \sin \Theta \ 1].$$

У даному випадку обертання вектора навколо осі Oy не змінює його положення, тобто $\varphi = 0$: вектор належить осі Oy . Обертання вектора навколо осі Ox зводиться до руху вектора в площині Ozy за годинниковою стрілкою в даному випадку на кут Θ .

При проєкціюванні вектора з безконечності на площину $z=0$, тобто на площину Oxy , одержимо:

$$[0 \cos \Theta \sin \Theta \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \cos \Theta \ 0 \ 1].$$

Довжина вектора l в площині Oxy

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 \Theta} = \cos \Theta.$$

Для формування диметричної проєкції значення двох перетворених векторів скорочують в однакове число разів.

Прирівнюючи значення довжин перетворених векторів, одержимо:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 \Theta = \cos^2 \Theta.$$

Підставивши $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$, одержимо

$$1 - \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 \Theta = \cos^2 \Theta.$$

Підставивши $\cos^2 \Theta = 1 - \sin^2 \Theta$, одержимо

$$1 - \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 \Theta = 1 - \sin^2 \Theta.$$

Спростимо вираз

$$\sin^2 \varphi (\sin^2 \Theta - 1) = \sin^2 \Theta.$$

Одержимо залежність кутів φ і Θ :

$$\sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \Theta}{1 - \sin^2 \Theta}. \quad (2.1)$$

Диметричне проєкціювання геометричних об'єктів виконують, якщо значення кутів φ і Θ задовольняють вираз (2.1).

Одним з способів вибору числових значень кутів φ і Θ є скорочення по осі Oz у певне число разів. Одиничний вектор, який належить осі Oz , перетвориться відповідно до виразу

$$\begin{aligned} [XYZH] &= [0011] \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \sin \Theta & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \Theta & \cos \varphi \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= [T] |\sin \varphi - \cos \varphi \sin \Theta \ \cos \varphi \cos \Theta \ 1|. \end{aligned}$$

Приймемо значення перетвореного вектора рівним $\frac{1}{2}$. Тоді

$$\sin^2 \varphi + (\cos \varphi \sin \Theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Підставивши

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi,$$

одержимо

$$\sin^2 \varphi + (1 - \sin^2 \varphi) \sin^2 \Theta = \frac{1}{4}.$$

Підставимо значення $\sin^2 \varphi$ відповідно до одержаного вище виразу (2.1):

$$\frac{\sin^2 \Theta}{1 - \sin^2 \Theta} + \left(1 - \frac{\sin^2 \Theta}{1 - \sin^2 \Theta}\right) \sin^2 \Theta - \frac{1}{4} = 0.$$

Розкриємо дужки

$$\frac{\sin^2 \Theta}{1 - \sin^2 \Theta} + \frac{\sin^2 \Theta \square \sin^2 \Theta}{\sin^2 \Theta} - \frac{\sin^2 \Theta \sin^2 \Theta}{1 - \sin^2 \Theta} - \frac{1}{4} = 0.$$

Після перетворень одержимо

$$4 \sin^2 \Theta + 4 \sin^2 \Theta - 8 \sin^2 \Theta \sin^2 \Theta - 1 + \sin^2 \Theta = 0.$$

Одержимо кінцеве рівняння

$$9 \sin^2 \Theta - 8 \sin^4 \Theta - 1 = 0,$$

корені якого

$$\sin^2 \Theta = \pm \frac{1}{8};$$

$$\sin^2 \Theta = \pm 1.$$

З першого кореня знаходимо числове значення

$$\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Тоді значення кута

$$\Theta = 20.704811^\circ.$$

Знаходимо числове значення

$$\sin \varphi = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{2.65}.$$

Отже, значення кута $\varphi = \arcsin 0.378 = 22.20765^\circ$.

Підставивши значення кутів Θ і φ , одержимо матрицю перетворення:

$$[XYZH] = [xyz1] \begin{bmatrix} 0.92582 & 0.133631 & -0.353553 & 0 \\ 0 & 0.935414 & 0.353553 & 0 \\ 0.377964 & -0.327321 & 0.866025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, для значення кута $\Theta = 20.704811^\circ$ маємо

$$\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2.8284271} = 0.3535533 ;$$

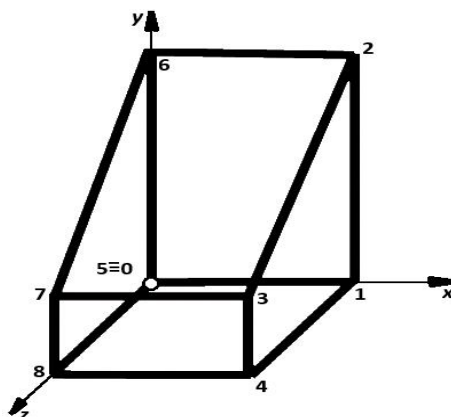
$$\cos \Theta = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}} = 0.9354143.$$

Для значення кута $\varphi = 22.20765^\circ$ маємо

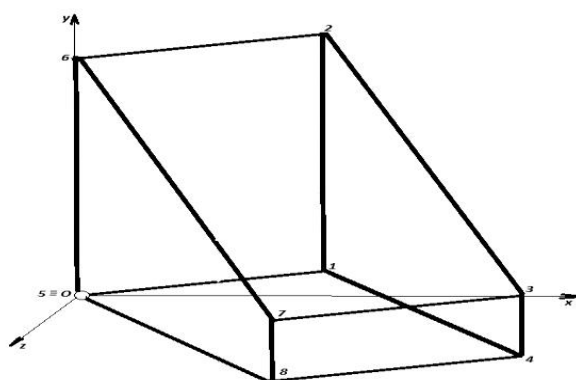
$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{7}} = 0.3779644;$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{6}{7}} = 0.92582.$$

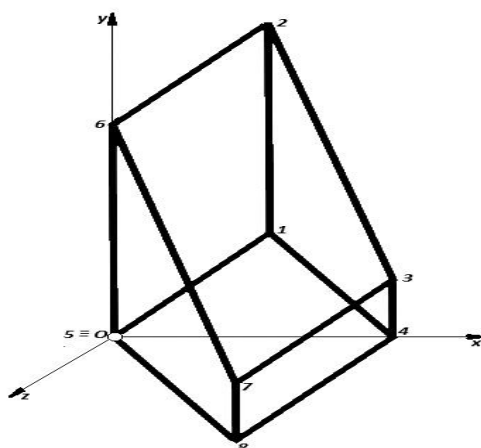
Приклад. Розглянемо процес побудови диметричної проекції на прикладі зрізаної призми (зрізаного паралелепіпеда) (рис.2.15а) обертанням спочатку навколо осі Oy , далі – навколо осі Ox (рис.2.15б).



а)



б)



в)

Рисунок 2.15 – Аксонометричні проекції зрізаної призми в площині $z=0$

Результатом обертання матриці точок як вершин зрізаної призми навколо осі Oy є матриця точок вершин оберненої зрізаної призми

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.926 & 0 & -0.378 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.378 & 0 & 0.926 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.926 & 0 & -0.378 & 1 \\ 0.926 & 1 & -0.378 & 1 \\ 1.304 & \frac{1}{2} & 0.548 & 1 \\ 1.304 & 0 & 0.548 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.378 & \frac{1}{2} & 0.926 & 1 \\ 0.378 & 0 & 0.926 & 1 \end{bmatrix},$$

яку обертаємо навколо осі Ox

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.926 & 0 & -0.378 & 1 \\ 0.926 & 1 & -0.378 & 1 \\ 1.304 & \frac{1}{2} & 0.548 & 1 \\ 1.304 & 0 & 0.548 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.378 & \frac{1}{2} & 0.926 & 1 \\ 0.378 & 0 & 0.926 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.935 & 0.354 & 0 \\ 0 & -0.354 & 0.935 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.926 & 0.134 & -0.35 & 1 \\ 0.926 & 1.07 & 0 & 1 \\ 1.304 & 0.27 & 0.689 & 1 \\ 1.304 & -0.19 & 0.512 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.935 & 0.354 & 1 \\ 0.378 & 0.14 & 1.04 & 1 \\ 0.378 & -0.327 & 0.86 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сформуємо матрицю, що відповідає проєкціюванню зрізаної призми з центра, розташованого в безконечності, у площину $z=0$ і послідовним обертанням навколо осей Oy та Ox :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.926 & 0.378 * 0.154 & -0.78 * 0.935 & 0 \\ 0 & 0.935 & 0.354 & 0 \\ 0.378 & -0.926 * 0.354 & 0.926 * 0.935 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.926 & 0.134 & -0.353 & 0 \\ 0 & 0.935 & 0.354 & 0 \\ 0.378 & -0.328 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.926 & 0.134 & -0.353 & 0 \\ 0 & 0.935 & 0.354 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проведемо проміжну побудову диметричної проекції зрізаної призми за допомогою останньої матриці:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.926 & 0.134 & -0.353 & 0 \\ 0 & 0.935 & 0.354 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.926 & 0.134 & -0.353 & 1 \\ 0.926 & 0.69 & 0 & 1 \\ 0.926 & 0.601 & -0.175 & 1 \\ 0.926 & 0.134 & -0.353 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.935 & 0.354 & 1 \\ 0 & 0.467 & 0.177 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для одержання наочного зображення зрізаної призми у диметричній проекції формуємо, нарешті, матрицю, що відповідає послідовним обертанням навколо осей Oy , Ox та проєкціюванню з центра в безконечності у площину $z=0$:

$$\begin{bmatrix} 0.926 & 0.134 & -0.354 & 0 \\ 0 & 0.935 & 0.354 & 0 \\ 0.378 & -0.328 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.926 & 0.134 & 0 & 0 \\ 0 & 0.935 & 0 & 0 \\ 0.378 & -0.328 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Виконуємо побудову диметричної проекції зрізаної призми:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.926 & 0.134 & 0 & 0 \\ 0 & 0.935 & 0 & 0 \\ 0.378 & -0.328 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.926 & 0.134 & 0 & 0 \\ 0.926 & 1.07 & 0 & 0 \\ 1.3 & 0.28 & 0 & 0 \\ 0.378 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.935 & 0 & 0 \\ 0.378 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0.378 & -0.378 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зображення диметричної проекції, що відповідає обертанням навколо осей Oy , Ox та проєкціюванню у площину $z=0$, наведене на рис.2.15б.

При формуванні ізометричної проекції необхідно в однакове число разів скоротити всі три осі:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 \Theta &= \cos^2 \Theta; \\ \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta &= \cos^2 \Theta. \end{aligned}$$

З першого рівняння маємо

$$\sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \Theta}{1 - \sin^2 \Theta}.$$

Підставивши в друге рівняння вираз

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi,$$

одержимо

$$\sin^2 \varphi + \sin^2 \Theta - \sin^2 \varphi \sin^2 \Theta - \cos^2 \Theta = 0.$$

Підставивши в останнє рівняння вираз

$$\cos^2 \Theta = 1 - \sin^2 \Theta,$$

одержимо

$$\sin^2 \varphi + \sin^2 \Theta - \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi - 1 + \sin^2 \Theta = 0.$$

Знайдемо $\sin^2 \varphi$:

$$\sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \Theta) + 2 \sin^2 \Theta - 1 = 0.$$

Звідки

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - 2 \sin^2 \Theta}{1 - \sin^2 \Theta}.$$

Прирівняємо праві частини $\sin^2 \varphi$:

$$\sin^2 \Theta = 1 - 2 \sin^2 \Theta.$$

З останнього виразу визначаємо

$$\sin^2 \Theta = \frac{1}{3}.$$

Звідки $\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Значення кута $\Theta = 35,26439^\circ$.

Тоді $\sin^2 \varphi = \frac{1}{3(1 - \frac{1}{3})} = \frac{1}{2}.$

Отже, значення кута $\varphi = 45^\circ$.

Кут, який ізометрична вісь Ox_i , утворює з горизонталлю, віссю Ox тривимірної системи координат простору, визначимо відповідно до виразу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y_{\text{ізом}}}{\Delta x_{\text{ізом}}} = \frac{\sin \varphi \sin \Theta}{\cos \varphi}.$$

Підставимо значення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 45^\circ \cdot \sin 35,26439^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тоді значення кута $\alpha = 30^\circ$.

Таким чином, ізометрична вісь Ox_i складає кут 30° з горизонталлю.

Отже, для побудови ізометричної проєкції необхідно виконати такі перетворення координат об'єкта:

$$[XYZH] = [xyz1] \begin{bmatrix} 0.707107 & 0.408248 & -0.577353 & 0 \\ 0 & 0.816597 & 0.577345 & 0 \\ 0.707107 & -0.408248 & 0.577353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Підставивши числові значення, одержимо:

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.71 & 0.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0.82 & 0 & 0 \\ 0.71 & -0.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.71 & 0.41 & 0 & 0 \\ 0.71 & 1.23 & 0 & 0 \\ 1.42 & 0.41 & 0 & 1 \\ 1.42 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.82 & 0 & 1 \\ 0.71 & 0 & 0 & 1 \\ 0.71 & -0.41 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ізометричне зображення зрізаної призми, одержане за допомогою останньої матриці, наведене на рис. 2.15в.

2.3. Перспективні перетворення

Перспективне перетворення геометричного об'єкта має місце, коли відмінний від нуля довільний з трьох елементів четвертого стовпчика матриці перетворення однорідних координат. Перспективне перетворення тривимірне, тобто *при перспективних перетвореннях вимірність простору дорівнює трьом*. Для одержання результатів перетворення у двовимірній площині необхідно виконати проєкціювання з тривимірного простору в двовимірний. У випадку перспективних проєкцій, на відміну від розглянутих паралельних проєкцій, паралельні прямі сходяться, розмір об'єкта зменшується із збільшенням відстані до центра проєкції. Одноточкове перетворення здійснюють відповідно до виразу:

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ rz + 1],$$

де $h = rz + 1$.

Перетворені координати об'єкта одержуємо діленням елементів одержаної матриці на h :

$$[X^*] = [x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{h} \ \frac{y}{h} \ \frac{z}{h} \ 1 \right] = \left[\frac{x}{rz+1} \ \frac{y}{rz+1} \ \frac{z}{rz+1} \ 1 \right].$$

Перспективну проєкцію об'єкта у двовимірній площині одержимо, виконавши послідовно перспективне перетворення і ортографічне проєкціювання. Наприклад, перспективне перетворення у площину $z=0$ виконується

з допомогою матриць

$$[T] = [Pr][Pz] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перспективна проекція точки являє:

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ 0 \ r \ z + 1].$$

Перетворені координати точки

$$[x^* y^* z^* 1] = \left[\frac{x}{rz+1} \ \frac{y}{rz+1} \ 0 \ 1 \right].$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію перспективного проєкціювання точки P тривимірного простору у площину $z = z^* = 0$ в точку P^* (рис.2.16). Центр проєкції знаходиться в точці z_c осі Oz . З подібності трикутників маємо:

$$\frac{x^*}{z_c} = \frac{x}{z_c - z}$$

або

$$x^* = \frac{x}{1 - z/z_c};$$

$$\frac{y^*}{\sqrt{(x^*)^2 + z_c^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + (z - z_c)^2}}.$$

Перетворимо вираз:

$$\frac{y^*}{\sqrt{\frac{x^2}{(1 - \frac{z}{z_c})^2} + z_c^2}} = \frac{y^*}{\sqrt{\frac{x^2 z_c^2}{(z_c - z)^2} + z_c^2}} = \frac{y^*}{z_c \sqrt{\frac{x^2 + (z_c - z)^2}{(z - z_c)^2}}} =$$

$$\frac{y^* (z_c - z)}{z_c \sqrt{x^2 + (z_c - z)^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + (z_c - z)^2}}.$$

Звідки одержуємо:

$$y^* = \frac{y}{1 - \frac{z}{z_c}}.$$

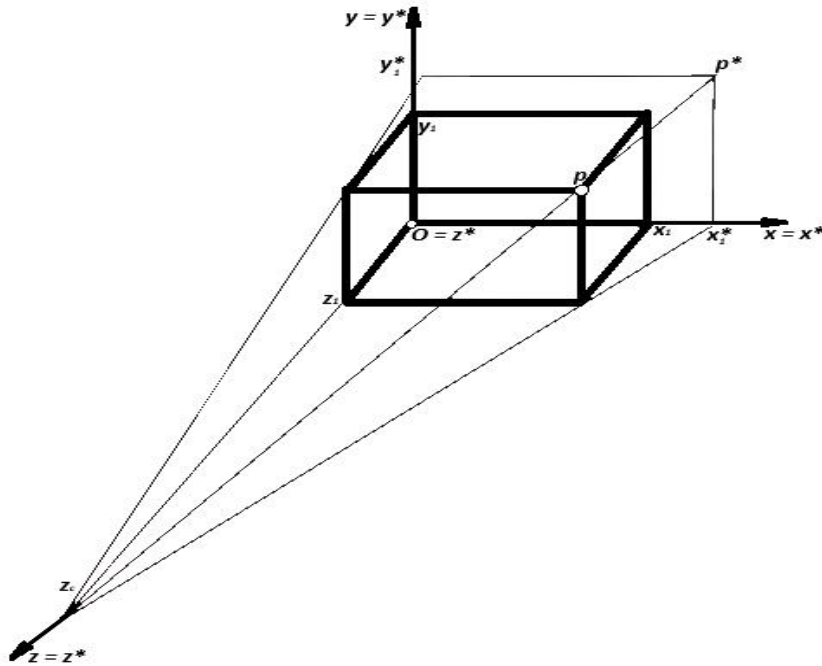


Рисунок 2.16 – Геометрична інтерпретація перспективного проєкціювання точки

Якщо прийняти $z = -\frac{1}{z_c}$, то одержимо вже відомі перетворені координати точки. Отже, матриця перетворення $[T]$ виконує перспективне перетворення у площину $z=0$ з центром проєкції в точці $z_c = -\frac{1}{r}$ на осі Oz . Зауважимо, що коли z_c прямує до безконечності, то r прямує до нуля. Тоді одержуємо аксонометричну проєкцію об'єкта у площину $z=0$.

Точки, належні площині проєкцій $z=0$, не підлягають перспективному перетворенню. Положення початку системи координат не змінюється. Отже, якщо частина геометричного об'єкта належить площині проєкцій $z=0$, то вона зображується в дійсну величину; всі інші його частини спотворюються.

Перспективне перетворення відображує точку безконечності в кінцеву точку $Z = -\frac{1}{r}$ осі Oz . Цю точку в перспективі називають *точкою сходження*, тобто ця точка розташована вдалині, де паралельні лінії ніби сходяться, наприклад, залізнична колія. Така точка знаходиться на відстані $\frac{1}{r}$ від площини проєкцій як і центр проєкцій, але з протилежного боку площини. Наприклад, якщо $z=0$ – площина проєкцій з центром проєкцій в точці $z = -\frac{1}{r}$, то точка сходження знаходиться в точці $z = \frac{1}{r}$ осі Oz .

Перспективне перетворення точки безконечності осі Oz подає такий результат:

$$[0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1 \ r].$$

Відповідна точці безконечності точка $[x^*y^*z^*1]=[0 \ 0 \ 1 \ 1/r]$ являє кінцеву точку осі Oz . Це означає, що весь напівбезконечний додатний одновимірний

простір $0 \leq z \leq \infty$ відображується в обмежену область $0 \leq z^* \leq 1/r$. Отже, всі прямі, паралельні осі Oz , проходять через точку $[0 \ 0 \ 1/r \ 1]$, яка належить осі Oz і являє точку сходження.

Розглянемо одноточкові перспективні перетворення з центром проєкцій і точкою сходження, розташованих на осях Ox та Oy . Одноточкове перспективне перетворення

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ (px + 1)]$$

з перетвореними координатами

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{px+1} \ \frac{y}{px+1} \ \frac{z}{px+1} \ 1 \right]$$

має центр проєкції в точці $\left[-\frac{1}{p} \ 0 \ 0 \ 1\right]$ і точку сходження, розташовану на осі Ox в точці $\left[\frac{1}{p} \ 0 \ 0 \ 1\right]$.

Одноточкове перспективне перетворення

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ (qy + 1)]$$

з перетвореними координатами

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{qy+1} \ \frac{y}{qy+1} \ \frac{z}{qy+1} \ 1 \right]$$

має центр проєкції в точці $\left[0 \ -\frac{1}{q} \ 0 \ 1\right]$ і точку сходження, розташовану на осі Oy в точці $\left[0 \ \frac{1}{q} \ 0 \ 1\right]$.

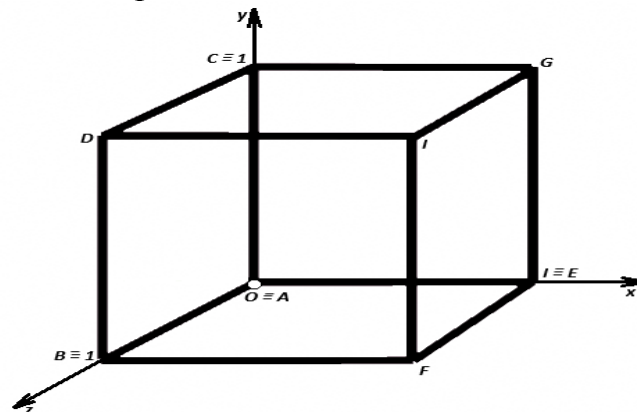
Приклад. Розглянемо одноточкове перспективне перетворення одиничного куба (рис.2.17а) у площину $z=0$ з центром проєкції в точці $z_c=10$, яка належить осі Oz .

Одноточковий множник перспективи $r = -\frac{1}{z_c} = -0.1$. Перетворені координати одиничного куба

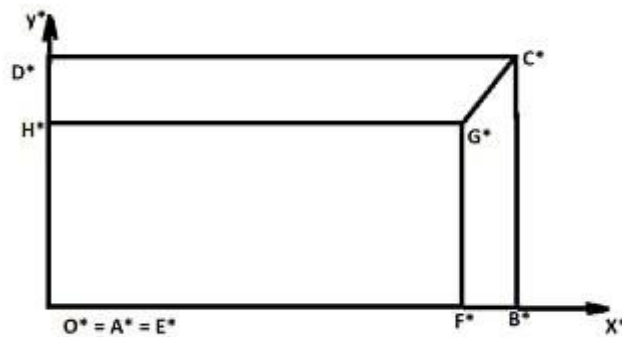
$$[X^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.11 & 0 & 0 & 1 \\ 1.11 & 1.11 & 0 & 1 \\ 0 & 1.11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Результат одноточкового перспективного перетворення одиничного куба у площину $z=0$ наведений на рис.2.17б.



а)



б)

Рисунок 2.17 – Одноточкове перспективне перетворення одиничного куба у площину $z=0$

Оскільки центр проєкції належить додатній частині осі Oz , то, як видно з рис.2.18, проєкція передньої грані $ABCD$ одиничного куба більша, ніж проєкція його заданої грані $FGHE$.

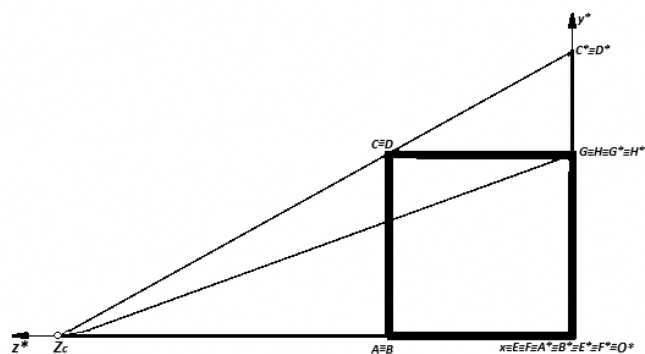


Рисунок 2.18 – Геометрична інтерпретація перспективного проєкціювання граней $ABCD$ і $EFGH$ одиничного куба

Оскільки точка збігу належить осі Oz , то пряма C^*G^* проходить через початок системи координат.

Одержаний рисунок не передає просторової форми куба. Більш задовільний результат можна одержати центруванням куба, наприклад, перенесенням на $-\frac{1}{2}$ одиниці вздовж напрямків x та y .

Матриця перетворення

$$[T] = [T_{rxy}][P_{xz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворені координати мають такий вигляд:

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0 & 0.9 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0.9 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0.9 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0.9 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.56 & -0.56 & 0 & 1 \\ 0.56 & -0.56 & 0 & 1 \\ 0.56 & 0.56 & 0 & 1 \\ -0.56 & 0.56 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одержимо одноточкову перспективну проєкцію центрованого одиничного куба (рис.2.19).

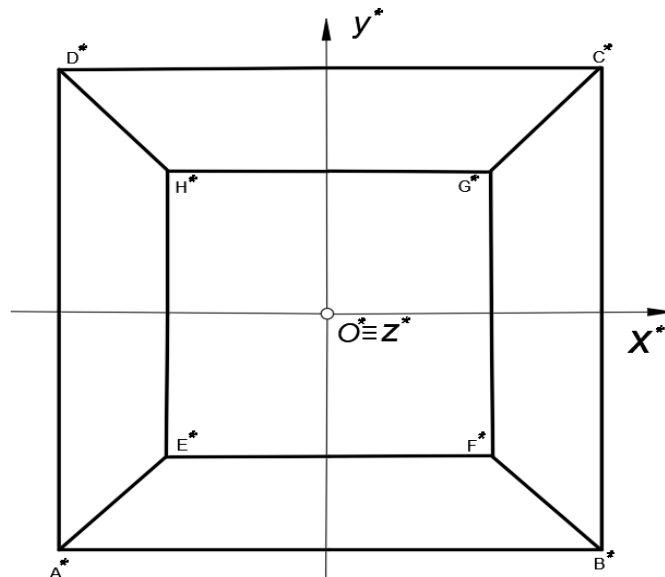


Рисунок 2.19 – Одноточкова перспективна проєкція центрованого одиничного куба

Відмітимо, що паралельні осі Oz чотири ребра, що з'єднують передню і задню грані одиничного куба, сходяться до початку координат O^* .

Проте одержана одноточкова перспективна проєкція центрованого одиничного куба також не передає просторової форми куба. Якщо в четвертому стовпці матриці перетворення два з перших трьох елементів не дорівнюють нулю, то таке перспективне перетворення називається двоточковим або кутовим перспективним перетворенням.

Двоточкове перспективне перетворення

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ (px + qy + 1)]$$

з координатами

$$[X^*] = [x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{px+qy+1} \ \frac{y}{px+qy+1} \ \frac{z}{px+qy+1} \ 1 \right]$$

має два центри проєкцій на осі Ox в точці $[-\frac{1}{p} \ 0 \ 0 \ 1]$, на осі Oy в точці $[0 \ -\frac{1}{q} \ 0 \ 1]$ і дві точки збігу на осі Ox в точці $[\frac{1}{p} \ 0 \ 0 \ 1]$ та на осі Oy в точці $[0 \ \frac{1}{q} \ 0 \ 1]$.

Розглянуте двоточкове перетворення $[P_{pq}]$ можна одержати об'єднанням двох одноточкових $[P_p]$ і $[P_q]$:

$$[P_{pq}] = [P_p][P_q].$$

Приклад. Розглянемо одиничний куб. Двоточкову перспективну проєкцію, куба у площину $Oz = 0$ будуюмо для центрів проєкцій, розташованих в точках з координатами $x = -10$, $y = -10$. Матриця перетворення

$$[T] = [P_{pq}][P_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

при значеннях $p=q=\frac{1}{10}$.

Перетворені координати куба

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1.1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.2 \\ 0 & 1 & 1 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.1 \\ 1 & 1 & 0 & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.909 & 0 & 0 & 1 \\ 0.833 & 0.833 & 0 & 1 \\ 0 & 0.909 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.909 & 0 & 0 & 1 \\ 0.833 & 0.833 & 0 & 1 \\ 0 & 0.909 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одержимо зображення (рис.2.20).

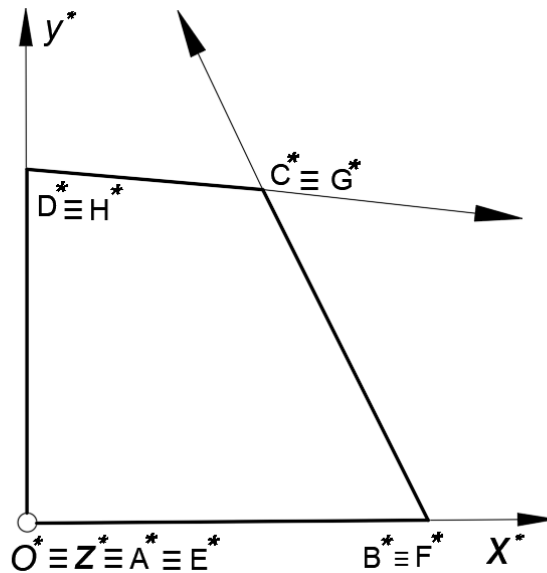


Рисунок 2.20 – Двоточкова перспективна проекція центрованого одиничного куба

Відмітимо, що дві точки збігу, показані на рис.2.20 стрілками, знаходяться на осях Ox при $x=10$ і Oy при $y=10$.

Центрування одиничного куба з допомогою переносу по осях Ox та Oy на -0.5 одиниць дає матрицю:

$$\begin{aligned}
 [T] &= [T_{xy}][P_{pq}][P_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

У цій матриці масштабний множник s відмінний від одиниці. Має місце масштабування куба, викликане його переміщенням. Перетворені координати куба дорівнюють

$$\begin{aligned}
 [X^*] &= [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0 & 0.9 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1.1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0.9 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1.1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.56 & -0.56 & 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.46 & 0.46 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 \\ -0.56 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.46 & 0.46 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одержане зображення (рис.2.21) також не передає просторової форми куба.

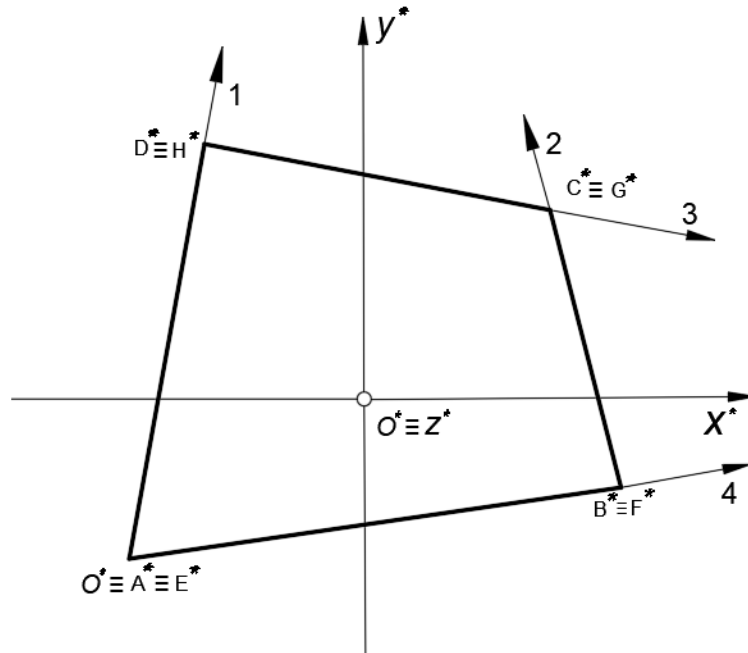


Рисунок 2.21 –Центрування одиничного куба

Відмітимо, що дві точки збігу, показані на рис.2.21 стрілками 1,2, розміщені на осі Oy при $y=10$, а стрілками 3,4 – на осі Ox при $x=10$.

Якщо в четвертому стовпці матриці перетворення три елементи не дорівнюють нулю, то таке перспективне перетворення називається триточковим.

Триточкове перспективне перетворення

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z(px + qy + rz + 1)]$$

з координатами

$$[X^*] = [x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{px+qy+rz+1} \ \frac{y}{px+qy+rz+1} \ \frac{z}{px+qy+rz+1} \ 1 \right]$$

має три центри проєкцій на осі Ox системи координат в точці $[-\frac{1}{p} \ 0 \ 0 \ 1]$, на осі Oy в точці $[0 \ -\frac{1}{q} \ 0 \ 1]$, на осі Oz в точці $[0 \ 0 \ -\frac{1}{r} \ 1]$.

Триточкове перспективне перетворення може бути одержане конкатенацією трьох одноточкових перспективних перетворень.

Для одиничного куба розглянемо його проєкцію у площину $z=0$ після триточкового перспективного перетворення. Центри проєкцій прийmemo в належних відповідним осям точках $x = -10, y = -10, z = 10$.

Точки збігу становлять відповідно $x=10, y=10, z=-10$. Матриця перетворення

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворені координати куба

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1.1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.1 \\ 1 & 1 & 0 & 1.2 \\ 0 & 1 & 0 & 1.1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0.909 & 0.909 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.909 & 0 & 0 & 1 \\ 0.833 & 0.833 & 0 & 1 \\ 0 & 0.909 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одержане зображення (рис.2.22) також не передає просторової форми куба.

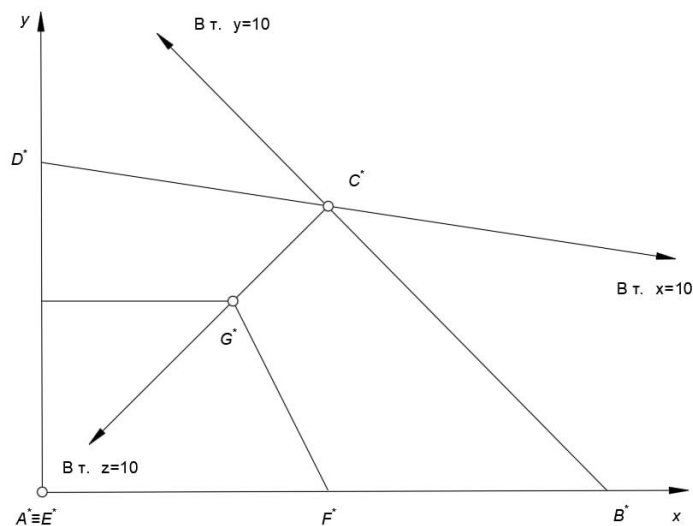


Рисунок 2.22 – Триточкове перспективне перетворення одиничного куба

У розглянутих випадках видима одна грань куба. Для більш реалістичного сприймання просторової форми об'єкта на основі тільки одного його вигляду необхідно, щоб видимими були хоча б три його грані. Такий вигляд можна одержати за допомогою одноточкової перспективної проекції з фіксованим центром і з площиною проекції, перпендикулярною напрямкові погляду, якщо виконати перенесення або поворот об'єкта.

Розглянемо перенесення об'єкта з одноточковим проекціюванням його у площину $z=0$ з центром проекцій в точці $z=z_c$. Тоді $r=-1/z_c$.

$$[T] = [T_{xyz}][P_{rz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ l & m & 0 & 1 + rn \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/z_c \\ l & m & 0 & 1 - n/z_c \end{bmatrix}.$$

З рис.2.23 видно, що перенесення в напрямках x , y відкриває додаткові грані об'єкта, при цьому розміри передньої грані залишаються постійними.

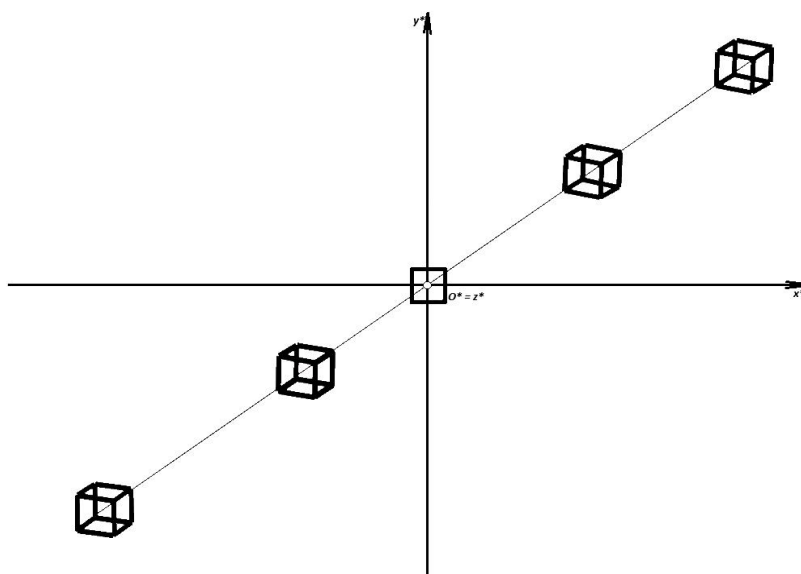


Рисунок 2.23 – Перенесення в напрямках x , y одиничного куба

Куб попередньо відцентрований. Перенесення вздовж осі Oz до центра проекції або від нього призводить до зміни масштабу, бо в рядку $1-n/z_c$ змінюється параметр n . Це відповідає фізичній реальності, оскільки об'єкти, розташовані далі, виглядають дрібнішими. У четвертий стовпець входить елемент z_c . При збільшенні z_c , тобто наближенні до безконечності, явище масштабування щезає. Результати перенесення об'єкта по трьох напрямках (рис.2.24) вздовж прямої від $-x$, $-y$, $-z$ до x , y , z вказують на збільшення його розмірів, збереження форми. Розміри передньої грані також збільшуються.

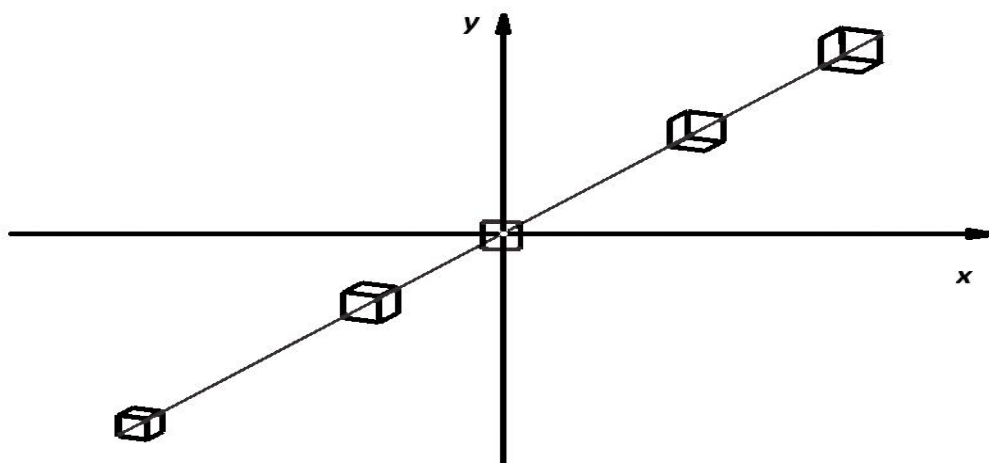


Рисунок 2.24 – Перенесення по трьох напрямках одиничного куба

Приклад. Відцентрований відносно початку координат одиничний куб

$$[X] = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

перемістимо на п'ять одиниць в напрямках x та y і побудуємо його перспективну проекцію у площину проєкцій $z=0$ з центром проєкції в точці $z_c = 10$. Загальна матриця перетворення

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетвореними координатами є:

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 4.5 & 4.5 & 0 & 0.95 \\ 5.5 & 5.5 & 0 & 0.95 \\ 5.5 & 5.5 & 0 & 0.95 \\ 4.5 & 5.5 & 0 & 0.95 \\ 4.5 & 5.5 & 0 & 1.05 \\ 4.5 & 4.5 & 0 & 1.05 \\ 5.5 & 5.5 & 0 & 1.05 \\ 4.5 & 5.5 & 0 & 1.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.737 & 4.737 & 0 & 1 \\ 5.789 & 4.737 & 0 & 1 \\ 5.789 & 5.789 & 0 & 1 \\ 4.737 & 5.789 & 0 & 1 \\ 4.286 & 4.289 & 0 & 1 \\ 5.238 & 5.238 & 0 & 1 \\ 5.238 & 5.238 & 0 & 1 \\ 4.238 & 5.238 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Якщо одиничний куб перемістити в напрямках x , y , z на п'ять одиниць і побудувати його одноточкову перспективну проєкцію у площину $z=0$ з центром в точці $z_c=20$, то матриця перетворення матиме вигляд:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.05 \\ 5 & 5 & 0 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

Перетворені координати одиничного куба

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 4.5 & 4.5 & 0 & 0.725 \\ 5.5 & 4.5 & 0 & 0.725 \\ 5.5 & 5.5 & 0 & 0.725 \\ 4.5 & 5.5 & 0 & 0.725 \\ 4.5 & 4.5 & 0 & 0.775 \\ 5.5 & 4.4 & 0 & 0.775 \\ 5.5 & 5.5 & 0 & 0.775 \\ 4.5 & 5.5 & 0 & 0.775 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.207 & 6.207 & 0 & 1 \\ 7.586 & 6.207 & 0 & 1 \\ 7.586 & 7.586 & 0 & 1 \\ 6.207 & 7.586 & 0 & 1 \\ 5.806 & 5.806 & 0 & 1 \\ 7.097 & 5.806 & 0 & 1 \\ 7.097 & 7.097 & 0 & 1 \\ 5.806 & 7.097 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Декілька граней буде видно, якщо обертати об'єкт. Один оберт відкриває дві його грані, тоді як два або три оберти навколо різних осей координатної системи відкривають щонайменше три грані.

Матриця перетворення об'єкта для повороту навколо осі Oy на кут φ і наступного одноточкового перспективного проєкціювання у площину $z=0$ з центром в точці $z=z_c$ має вигляд:

$$\begin{aligned} [T] = [R_y][P_{rz}] &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & \sin \frac{\varphi}{z_c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 & -\cos \frac{\varphi}{z_c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Подібно, матриця перетворення для повороту навколо осі Ox на кут θ і наступного одноточкового перетворення на площину $z=0$ з центром в точці $z=z_c$ має вигляд:

$$\begin{aligned} [T] = [R_x][P_{rz}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \frac{\theta}{z_c} \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\cos \frac{\theta}{z_c} \\ 0 & -\sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В обох матрицях $[T]$ не дорівнюють нулю два елементи у четвертому стовпці матриці перетворення. Отже, один оберт навколо головної осі, перпендикулярної осі, на якій розташований центр проекції, є двоточковим перспективним перетворенням. Цього немає при обертанні навколо осі, якій належить центр проекції.

Обертання навколо головної осі не відкриває мінімального числа граней. Для цього треба ввести ще комбінацію переміщення вздовж осі.

Приклад. Розглянемо перспективну проекцію одиничного куба на площину $z=0$ з центром в точці $z_c=2.5$, з поворотом навколо осі Oy на кут $\varphi=60^\circ$, щоб відкрилась права грань, і переміщеного на -2 одиниці вздовж осі Oy , щоб відкрилась верхня грань.

Матриця перетворення

$$\begin{aligned}
 [T] &= [R_y][T_r][P_{rz}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.866 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.866 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.346 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.866 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Перетворені координати дорівнюють

$$\begin{aligned}
 [X] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.346 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.866 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -2 & 0 & 0.8 \\ 1.366 & -2 & 0 & 1.146 \\ 1.366 & -1 & 0 & 1.146 \\ 0.866 & -1 & 0 & 0.8 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0.5 & -2 & 0 & 1.346 \\ 0.5 & -1 & 0 & 1.346 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1.083 & -2.5 & 0 & 1 \\ 1.192 & -1.175 & 0 & 1 \\ 1.192 & -0.872 & 0 & 1 \\ 1.083 & -1.25 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0.371 & -0.485 & 0 & 1 \\ 0.371 & -0.743 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Результат перетворення одиничного куба (рис.2.25а) наведений на рис.2.25б.

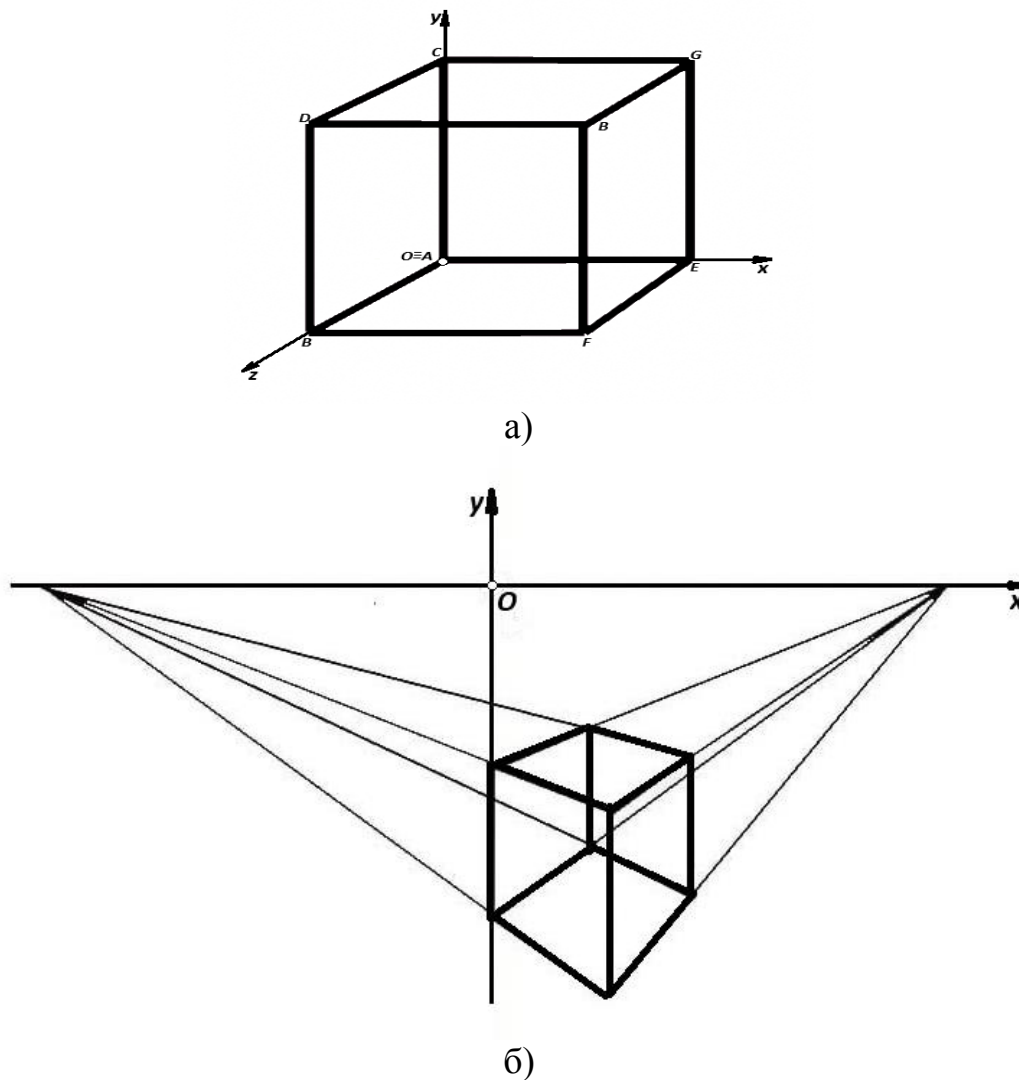


Рисунок 2.25 – Перспективне перетворення одиничного куба з відкритою правою гранню

Маємо збіг паралельних осей Ox і Oz прямих до точок збігу на осі Ox .

Триточкове перспективне перетворення виконують за допомогою обертання навколо двох чи більше осей і наступного одноточкового перетворення. Наприклад, поворот навколо осі Oy , далі поворот навколо осі Ox і перспективне перетворення в площину $z=0$ з центром точки $z=z_c$ виконується за допомогою матриці перетворення

$$\begin{aligned}
 [T] &= [Ry][Rx][Prz] = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \sin \Theta & 0 & \sin \varphi \cos \frac{\Theta}{z_c} \\ 0 & \cos \Theta & 0 & -\sin \frac{\Theta}{z_c} \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \Theta & 0 & -\cos \varphi \cos \frac{\Theta}{z_c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

В останньому стовпці маємо три ненульових перспективних елементи.

Триточкове перспективне перетворення можна також виконати, якщо переміщення відбувається після обертання:

$$[T]=[R_y][R_x][T_r][P_{rz}]=\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \cos \Theta & 0 & \sin \varphi \cos \frac{\Theta}{z_c} \\ 0 & \cos \Theta & 0 & -\sin \frac{\Theta}{z_c} \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \Theta & 0 & -\cos \Theta \cos \frac{\varphi}{z_c} \\ l & m & 0 & 1 - \frac{n}{z_c} \end{bmatrix}.$$

Така матриця дає змогу масштабувати об'єкт вздовж осі Oz . Результати перетворення різні, якщо поміняти місцями порядок виконання поворотів або перенесення виконати до обертання.

Приклад триточкової перспективної проекції з поворотами навколо двох осей. Розглянемо одиничний куб, повернутий на кут $\varphi = -30^\circ$ навколо осі Oy і на кут $\Theta = 45^\circ$ навколо осі Ox і спроекційований на площину $z=0$ з центром в точці $z_c=2.5$ на рис.2.26.

Матриця перетворення

$$[T]=\begin{bmatrix} 0.866 & -0.354 & 0 & -0.141 \\ 0 & 0.707 & 0 & -0.283 \\ -0.5 & -0.612 & 0 & -0.245 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворені координати

$$[X^*]=[X][T]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.866 & -0.354 & 0 & -0.141 \\ 0 & 0.707 & 0 & -0.283 \\ -0.5 & -0.612 & 0 & -0.245 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.612 & 0 & 0.755 \\ 0.366 & -0.966 & 0 & 0.614 \\ 0.366 & -0.259 & 0 & 0.354 \\ -0.5 & 0.095 & 0 & 0.472 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.866 & -0.354 & 0 & 0.859 \\ 0.866 & 0.354 & 0 & 0.576 \\ 0 & 0.707 & 0 & 0.717 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.662 & -0.811 & 0 & 1 \\ 0.596 & -1.574 & 0 & 1 \\ 1.107 & -0.782 & 0 & 1 \\ -1.059 & 0.201 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.009 & -0.412 & 0 & 1 \\ 1.504 & 0.614 & 0 & 1 \\ 0 & 0.986 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

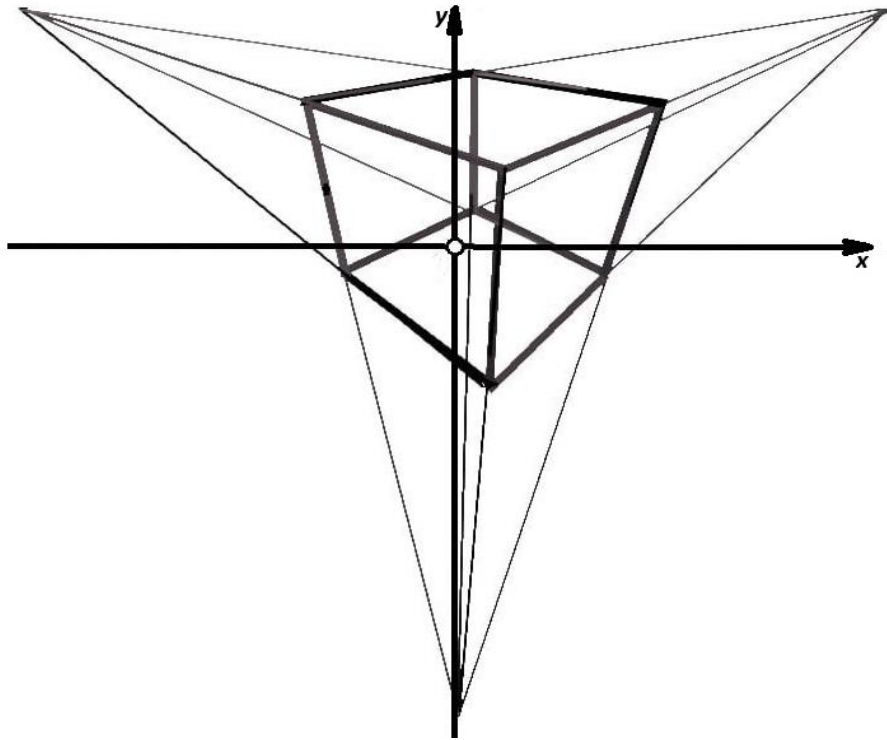


Рисунок 2.26 – Триточкове перспективне перетворення одиничного куба з поворотами навколо трьох осей

Отже, одно-, дво-, триточкове перспективне перетворення можна здійснити з допомогою поворотів і переносів навколо і вздовж осей з наступним одноточковим перспективним перетворенням з центром проекції, який належить одній з осей.

При формуванні перспективного перетворення лінію горизонту розташовують на рівні очей. Точки збігу знаходяться на лінії горизонту, де паралельні лінії сходяться в одній точці. Різні паралельні лінії мають різні точки збігу. Площини, нахилені відносно горизонтальної площини проєкцій, мають також точки збігу, які можуть знаходитися вище або нижче рівня очей, тобто лінії горизонту.

Приклад. Прийmemo для аналізу одиничний куб. Будемо обертати його навколо осі Oy і зміщувати до деякої точки з координатами $(0, m, n)$. На результуючу фігуру будемо дивитись з належної осі Oz точки K , для якої координата $z=k$. Спроеціюємо фігуру на площину $z=0$, сформувавши матрицю

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\frac{\sin \theta}{k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{k} \\ 0 & m & 0 & \frac{n}{k} + 1 \end{bmatrix}.$$

В такій матриці перетворення третій стовпець нульовий, тобто одержуємо проєкцію на площину $z=0$. Два з трьох елементів у четвертому стовпці ненульові, тобто визначають перспективу. Отже, одержуємо двоточкове перспективне зображення.

Перемножимо матрицю координат вершин одиничного куба на одержану матрицю $[T]$:

$$[X^*]=[X][T]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & 0 & -\frac{\sin \Theta}{K} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & 0 & \frac{\cos \Theta}{K} \\ 0 & m & 0 & \frac{n}{k} + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & m & 0 & \frac{n}{k} + 1 \\ \sin \Theta & m & 0 & \frac{\cos \Theta}{k} + \frac{n}{k} + 1 \\ \sin \Theta & 1 + m & 0 & \frac{\cos \Theta}{k} + \frac{n}{k} + 1 \\ 0 & 1 + m & 0 & \frac{n}{k} + 1 \\ \cos \Theta & m & 0 & -\frac{\sin \Theta}{k} + \frac{n}{k} + 1 \\ \cos \Theta + \sin \Theta & m & 0 & -\frac{\sin \Theta}{k} + \frac{\cos \Theta}{k} + \frac{n}{k} + 1 \\ \cos \Theta + \sin \Theta & 1 + m & 0 & -\frac{\sin \Theta}{k} + \frac{\cos \Theta}{k} + \frac{n}{k} + 1 \\ \cos \Theta & 1 + m & 0 & -\frac{\sin \Theta}{k} + \frac{n}{k} + 1 \end{bmatrix}.$$

Підставивши числові значення параметрів Θ° , m , n , k , одержимо матрицю перетворених координат вершин одиничного куба. Виконавши перетворення членів матриці

$$[x \ y \ z \ 1] = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ H & H & H & 1 \end{bmatrix},$$

одержимо матрицю координат точок (x^*, y^*) вершин одиничного куба.

Зауважимо, що на перспективі одиничного куба лінії, паралельні осям Ox , Oz , перетинаються в одній з двох точок збігу, розташованих на осі O^*x^* . Лінії, паралельні осі Oy , залишаються паралельними.

РОЗДІЛ 3

ВІДОБРАЖЕННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ НА ПЛОЩИНІ

- Плоскі криві лінії
- Параметричні криві лінії
- Параметричне подання еліпса
- Конічні перерізи
- Паралельність осей перерізу осям координат
- Визначення центрального чи нецентрального перерізу

3.1. Плоскі криві лінії

Розглянуті засоби перетворення точок можна використати при побудові кривих ліній. Криву засобами комп'ютерної графіки подають сукупністю точок за умови, що вони розташовані близько одна коло одної. Проте математичний опис кривої лінії має ряд переваг у порівнянні з поданням її сукупністю точок.

Основні переваги математичного опису кривої лінії:

1. Математичний опис є точним і дає змогу обчислювати необхідні характеристики кривої лінії, наприклад, нахил, радіус кривини тощо.

2. Математичний опис можна компактно зберігати в пам'яті комп'ютера.

3. Зображення кривої лінії можна одержати простіше, якщо воно подане у вигляді алгоритму.

4. При аналітичному описі кривої на деякому проміжку $[a, b]$ відпадає потреба у використанні інтерполяційних схем для знаходження положення допоміжних точок, що базуються на класичній задачі інтерполяції в графіці: дано кілька точок, через які треба провести або визначити криву лінію чи поверхню.

5. Використання точок для подання кривих ліній, а потім і поверхонь, може бути незручним при потребі попередньо змінювати форму кривих для забезпечення того чи іншого критерію. Оптимальним є використання математичного подання кривих ліній.

Основними методами подання плоских кривих ліній у комп'ютерній графіці слугують параметрична

$$\begin{aligned}y &= y(t); \\ x &= x(t).\end{aligned}$$

або непараметрична форма:

$$y = y(x).$$

При задаванні плоскої кривої у непараметричній формі кривої з точки зору графіки незалежний аргумент і залежна від нього функція в математиці розглядаються як цілком рівноправні величини. Вибір одної з них за функцію, а другої – за аргумент є умовним. Рівняння

$$y = y(x),$$

що їх пов'язує, може бути виражене у явному вигляді відносно одної змінної, так і в неявному вигляді і показує їх взаємозалежність і зв'язок. При явному задаванні плоскої кривої

$$y = y(x)$$

для кожного значення аргументу x існує єдине значення функції y . Тому явна форма не може представляти замкнені або багатозначні криві лінії. Це обмеження можна зняти, якщо використати неявну функцію

$$f(x, y) = 0.$$

Проте у даному випадку точка, належна кривій лінії, може бути визначена знаходженням кореня рівняння, що не завжди зручно.

Графічне визначення кривої з точки зору математики за відомим законом розташування точок як задача інтерполяції дає змогу забезпечити проходження кривої через всі відомі точки: це спосіб інтерполяції поліномами. Інша задача

полягає в тому, що для заданих з деякою кінцевою точністю точок треба визначити криву лінію, яка описує «правильний» напрям зміни експериментальних даних. Загальний вигляд рівняння кривої лінії можна подати у наступному вигляді:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Визначивши значення постійних коефіцієнтів a, b, c, d, e, f , можна одержати різні плоскі криві лінії як конічні перетини. Якщо в цьому рівнянні прийняти наперед значення, наприклад $c=1$, то для визначення криволінійного сегмента між двома сусідніми точками треба визначити решту п'ять коефіцієнтів, тобто задати п'ять незалежних умов. Зокрема, якщо $b=0, c=1$, то аналітичне подання кривої одержуємо з допомогою чотирьох додаткових умов, наприклад, положення кінцевих точок відрізків і нахилу кривих ліній у цих точках.

Якщо у наведеному рівнянні $a=c=1, b=0$, то одержуємо

$$x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Трьома умовами для визначення d, e і f є дві кінцеві точки і нахил в одній з них або дві кінцеві точки і третя точка кривої.

Якщо прийняти $a=b=c=0$, то одержимо рівняння прямої лінії

$$2dx + 2ey + f = 0,$$

яке подають у вигляді

$$y = -\left(\frac{d}{e}\right)x - \frac{f}{2e} = mx + b.$$

При використанні осезалежних непараметричних кривих виникають труднощі, якщо крива, крім горизонтального нахилу q_1 у кінцевій точці має вертикальний нахил q_2 відносно системи координат, наприклад, коло k (рис.3.1).

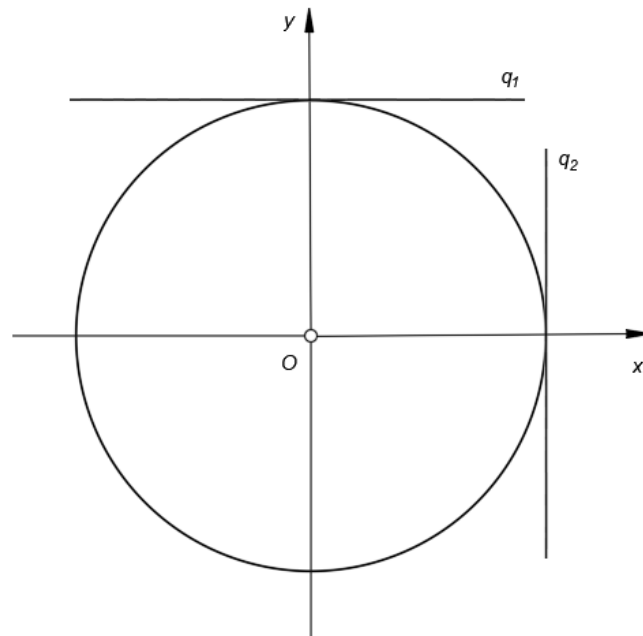


Рисунок 3.1 – Граничні нахили до кривої лінії, кола k

Такий нахил не можна використовувати як граничну умову. Тут можна змінити систему координат або апроксимувати невизначений нахил допустимим додатнім або від'ємним значенням. Крім того, якщо точки на осезалежній

непараметричній кривій вираховувати з однаковим приростом по координаті x , то вони не будуть рівномірно розташовані по кривій лінії.

Дотична d до кривої лінії l (рис.3.2) $y=y(x)$

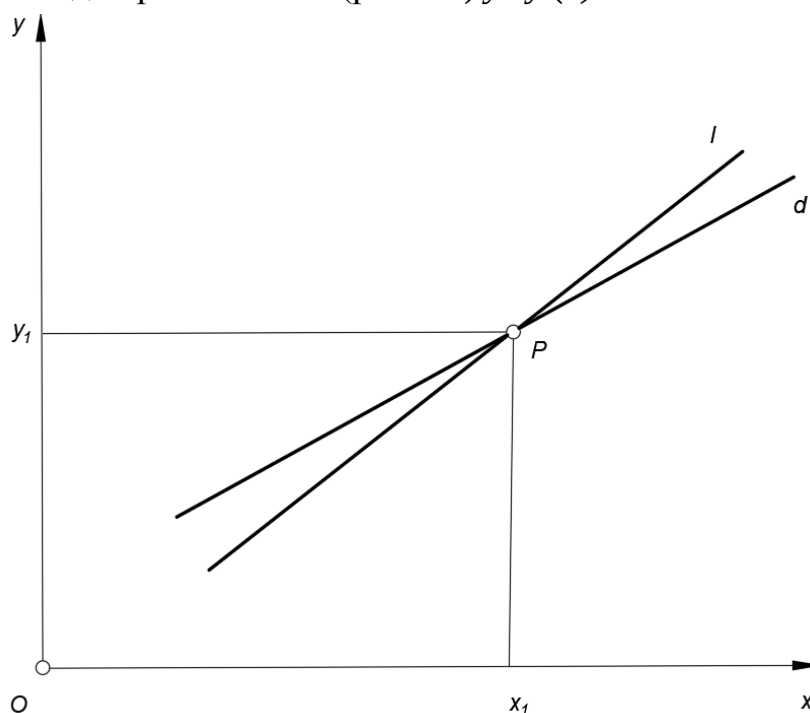


Рисунок 3.2 – Побудова дотичної до кривої лінії

в точці $P(x_1, y_1)$ визначається рівнянням

$$y = y_1 + f'(x_1)(x - x_1),$$

де $f'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x}$ при значенні $x = x_1$.

Якщо крива має в точці P вертикальну дотичну, то визначення дотичної майже неможливе. Для розв'язання задачі можна використати неявне рівняння кривої $g(x, y)=0$.

Тоді неявне рівняння дотичної в точці з координатами (x_1, y_1) має вигляд:

$$\frac{\partial g}{\partial x} (x - x_1) + \frac{\partial g}{\partial y} (y - y_1) = 0.$$

Наприклад, дотична до кола

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

в точці з координатами $(1, 0)$ знаходиться так:

записуємо рівняння кривої

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x;$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y,$$

одержуємо числові значення частинних похідних в точці з координатами $x=1, y=0$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2;$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Рівняння дотичної набуває наступного вигляду:

$$2(x-1) + 0(y-0) = 0,$$

тобто дотична є вертикальною прямою лінією, рівняння якої має вигляд:

$$x=1.$$

3.2. Параметричні криві лінії

Кожна координата точки плоскої кривої лінії являє функцію одного параметра. Якщо прийняти t як параметр, а криву – як плоска лінія, то її можна подати таким чином:

$$x=x(t);$$

$$y=y(t).$$

Значення параметра t задає координатний вектор точки кривої. Вектор положення точки кривої визначається матрицею з одним рядком

$$P(t) = [x(t) \ y(t)].$$

Для одержання непараметричної форми подання кривої треба у рівнянні виключити параметр t .

Параметричні криві використовують для подання замкнених кривих і кривих з кількома значеннями при заданій величині незалежної змінної.

Похідна як дотичний до кривої вектор являє

$$P'(t) = [x'(t) \ y'(t)].$$

Нахил кривої

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

При значенні $x'(t)=0$ нахил $=\infty$.

Найпростішим з усіх кривих являє параметричне подання прямої. Для двох векторів P_1 і P_2 параметричний вигляд відрізка:

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t$$

при значеннях $0 \leq t \leq 1$.

Значення $P(t)$ являє вектор, кожна складова якого має параметричне подання:

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t;$$

$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

при значеннях $0 \leq t \leq 1$.

Визначивши з першого рівняння

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

і підставивши його в друге рівняння, одержимо

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = kx + b.$$

Приклад. Знайдемо параметричне подання відрізка $P_1 [1 \ 2]$ і $P_2 [4 \ 3]$ прямої лінії, дотичний вектор і його нахил.

Параметричне подання відрізка таке:

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t = [1 \ 2] + ([4 \ 3] - [1 \ 2])t$$

при значеннях $0 \leq t \leq 1$.

Підставивши значення координат вершин відрізка, одержимо

$$P(t) = [1 \ 2] + [3 \ 1]t$$

при значеннях $0 \leq t \leq 1$.

Параметричне подання складових відрізка

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t = 1 + 3t;$$

$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t = 2 + t$$

при значеннях $0 \leq t \leq 1$.

Диференціюючи $P(t)$, одержимо дотичний вектор:

$$P'(t) = [x'(t) \ y'(t)] = [3 \ 1].$$

Дотичний вектор можна подати таким чином

$$\bar{v}_t = 3i + j,$$

де $\bar{v}_t$ – дотичний вектор,

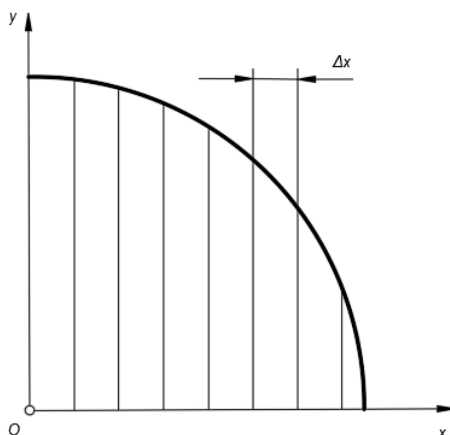
i, j – одиничні вектори в напрямках x, y .

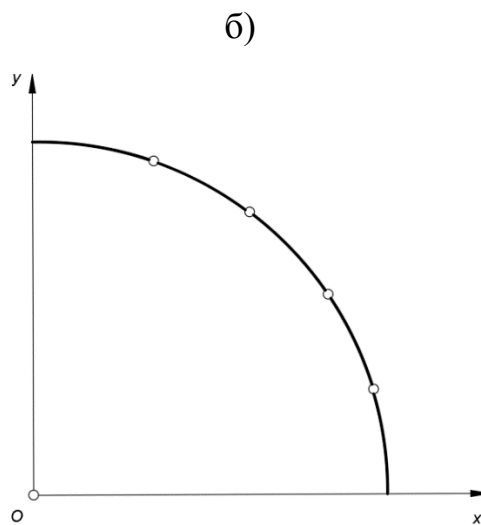
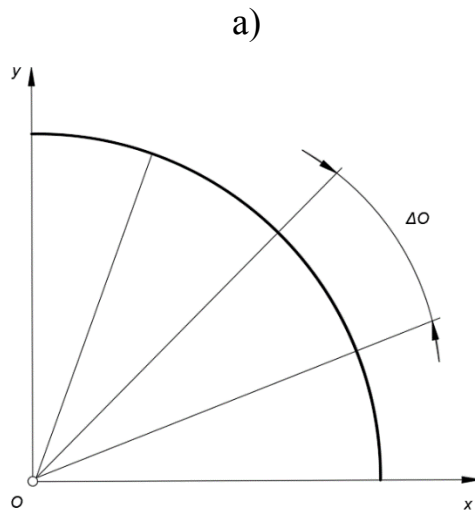
Нахил відрізка становить

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки точка параметричної кривої характеризується значенням параметра t , то параметрична функція осенезалежна. З допомогою параметричних функцій можна забезпечити покращення розподілу точок на кривій і, отже, одержати краще графічне представлення її.

Наприклад, четверть кола $y = \sqrt{1 - x^2}$ на рис. 3.3а містить





в)

Рисунок 3.3 – Розподіл точок кривої лінії

при рівних значеннях Δx довжини дуг між сусідніми точками неоднакові.

При параметричному задаванні кола $P(t)$

$$x = \cos \theta;$$

$$y = \sin \theta$$

довжини дуг однакові при рівних значеннях $\Delta \theta$ (рис. 3.3б), проте вчислювальна процедура неефективна.

При параметричному задаванні (рис. 3.3в)

$$P(t) = \left| \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \frac{2t}{1+t^2} \right|,$$

тобто

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

при значеннях $t = tg \frac{\theta}{2}$ час обчислень малий, проте довжини дуг кола не точно рівні.

Зв'язок між параметричними поданнями (рис. 3.4) полягає в наступному.

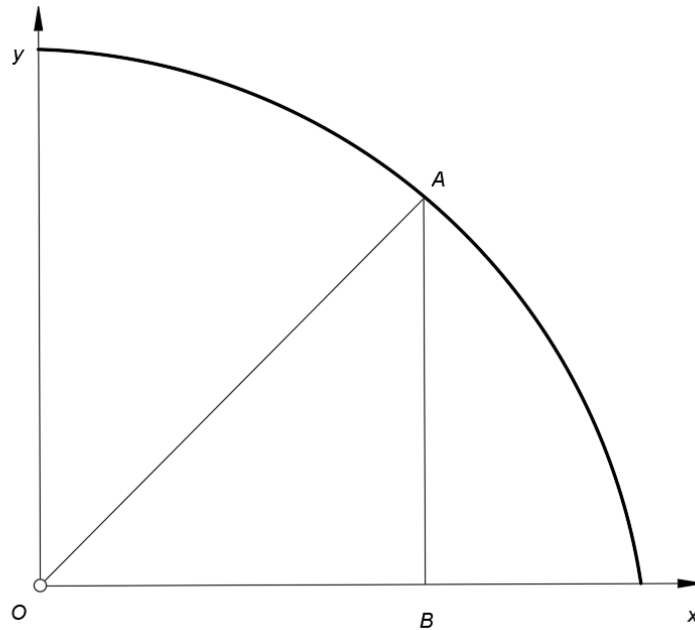


Рисунок 3.4 – Зв'язок між параметричними поданнями кола

У прямокутному трикутнику AOB прийемо значення кута AOB рівним θ , гіпотенуза AO дорівнює $1 + t^2$, катет $BO = 1 - t^2$, катет $AB = 2t$. Тоді

$$P(\theta) = [x \ y] = [\cos \theta \ \sin \theta];$$

$$P(t) = \left[\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \ \frac{2t}{1 + t^2} \right].$$

Порівнюючи обидва вирази, одержуємо

$$x = \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$y = \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Як одне, так і друге параметричне подання являють коло:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2 + \frac{4t^2}{(1 + t^2)^2} = \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{(1 + t^2)^2} = \frac{(1 + t^2)^2}{(1 + t^2)^2} = 1.$$

Отже, параметричне подання кола радіуса r з центром у початку координат має вигляд:

$$x = r \cos \theta;$$

$$y = r \sin \theta.$$

Рівномірний приріст по куту θ дає задовільне зображення, але комп'ютерний алгоритм розрахунку неефективний через часті виклики підпрограм обох тригонометричних функцій $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$.

Прискорений алгоритм можна побудувати таким чином.

Прийmemo діапазон зміни кута

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

При фіксованому числі рівномірно розподілених точок на колі приріст кута θ між окремими точками є постійним. Координати точок кола на інтервалі приросту кута θ :

на початку інтервалу кута θ

$$x_i = r \cos \theta;$$

$$y_i = r \sin \theta,$$

а в кінці інтервалу кута θ

$$x_{i+1} = r \cos (\theta_i + \delta \theta);$$

$$y_{i+1} = r \sin (\theta_i + \delta \theta).$$

Згідно формули суми кутів одержимо

$$x_{i+1} = r(\cos \theta_i \cos \delta \theta - \sin \theta_i \sin \delta \theta) = x_i \cos \delta \theta - y_i \sin \delta \theta;$$

$$y_{i+1} = r(\cos \theta_i \sin \delta \theta + \sin \theta_i \cos \delta \theta) = x_i \sin \delta \theta + y_i \cos \delta \theta.$$

Коло являє замкнену криву, тому перша $\theta = 0$ і остання $2\pi = 0$ точки збігаються. Отже, щоб одержати n різних точок кола треба вирахувати $n+1$ точку. Значення $\delta \theta$ постійне:

$$\delta \theta = 2\pi / (n + 1).$$

Значення тригонометричних функцій за цим способом треба обчислити один раз. У внутрішньому циклі використовуються чотири множення, віднімання і додавання, тому алгоритм належить до швидких.

Коло радіуса r з центром у довільній точці одержують переносом кола з центром у початку координат. За другим методом будують одиничне коло з центром у початку координат, збільшують його, наприклад, у два рази і переносять у потрібне місце. Нехай, наприклад, треба побудувати коло радіусом $r=2$ з центром в точці з координатами $x=y=2$ за другим методом для восьми його точок. Як зазначалося, коло являє замкнену криву, тому перша $\theta = 0$ і остання $\theta = 2\pi$ точки збігаються, тобто для n точок кола треба порахувати $n+1$ точку.

Обчислюємо значення

$$\delta \theta = \frac{2\pi}{(n+1)-1} = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Обчислюємо значення координат x_1, y_1 для значення кута $\theta_1 = 0$

$$x_1 = r \cos \theta_1 = 1 \square \cos 0 = 1;$$

$$y_1 = r \sin \theta_1 = 0.$$

Обчислюємо значення

$$\sin \delta \theta = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \delta \theta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Обчислюємо значення координат x_2, y_2 для значення кута $\delta \theta$:

$$x_2 = x_1 \cos \delta \theta - y_1 \sin \delta \theta = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y_2 = x_1 \sin \delta \theta + y_1 \cos \delta \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так само порахуємо решту точок, належних колові.

Сформуємо матрицю перетворення з урахуванням масштабування в два рази і переносу центра кола в точку $x=y=2$:

$$[T] = [S][T_{rxy}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворена точка x_1, y_1 кола має вигляд:

$$[x_1 \ y_1 \ 1][T] = [4 \ 2 \ 1].$$

Обмежуючи діапазон параметра θ , можна одержати дуги кола.

3.3. Параметричне подання еліпса

Рівномірний розподіл точок по еліпсу подає багатокутник, вписаний у цей еліпс, максимальної площі. Якщо розраховувати точки еліпса через рівні проміжки кута $\Delta\theta$, графічне зображення не буде відповідати еліпсу. Надто неточним зображення буде у місцях, де кривина велика.

Інший метод заснований на рівних приростах по периметру і дає добрий результат для досить великого числа точок. Проте на ділянках з малою кривиною використовується занадто велике число точок, а розрахунок рівних частин периметра потребує розрахунку еліптичного інтеграла.

З аналізу двох методів маємо, що для достатньо точної побудови еліпса потрібні малі прирости параметра на ділянках з великою кривиною і великі його прирости вздовж сторін з малою кривиною. Такий розподіл одержуємо з параметричного подання еліпса з центром у початку координат, що має велику піввісь a і малу піввісь b :

$$x = a \cos \theta;$$

$$y = b \sin \theta.$$

Диференціали по x та y мають вигляд:

$$dx = -a \sin \theta \, d\theta;$$

$$dy = b \cos \theta \, d\theta.$$

При значеннях $\theta \approx 0$ або π

$$|dx| \approx 0;$$

$$|dx| \approx b d\theta.$$

Якщо $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ або $\frac{3\pi}{2}$, то

$$|dx| \approx a d\theta;$$

$$|dx| \approx 0$$

На ділянках з високою кривиною точки еліпса розташовані частіше, а на ділянках з малою кривиною – рідше.

Для заданого числа точок еліпса координати i -тої точки

$$x_{i+1} = a \cos(\theta + \delta\theta);$$

$$y_{i+1} = b \sin(\theta + \delta\theta).$$

Значення $\delta\theta = \frac{2\pi}{(n-1)}$.

За формулою суми кутів маємо

$$x_{i+1} = x_i \cos \delta\theta - \frac{a}{b} y_i \sin \delta\theta;$$

$$y_{i+1} = \frac{b}{a} x_i \sin \delta\theta + y_i \cos \delta\theta.$$

Оскільки $\delta\theta$, a , b – постійні, алгоритм містить у внутрішньому циклі чотири множення, додавання і віднімання. Щоб одержати еліпс не в початку координат і з головною (великою) віссю під кутом α до горизонталі, його формують з центром в початку координат, повертають навколо початку координат і переносять у задану точку.

3.4. Конічні перерізи

Конічний переріз – це крива, яку описує точка, яка рухається таким чином, що відношення віддалі від неї до фіксованої точки (фокуса) до віддалі від неї до фіксованої лінії (директриси) є постійною величиною ε – ексцентриситетом. Утворюються конічні перерізи при перерізі конуса площинами особливого положення (рис.3.5).

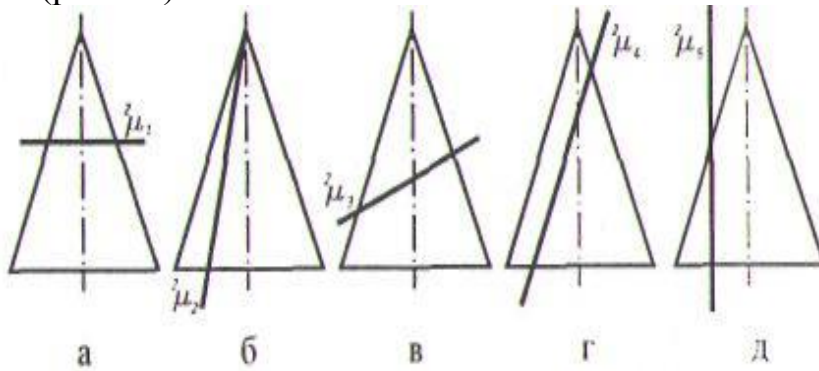


Рисунок 3.5 – Утворення конічних перерізів

Залежно від напрямку січної площини в перерізі конуса цією площиною можуть утворюватись (рис 3.5):

- коло, якщо січна площина – горизонтальна площина рівня (рис. 3.5а);
- трикутник, якщо січна площина проходить через вершину конуса (рис. 3.5б);
- еліпс повний або неповний, якщо січна площина нахилена до осі конуса під кутом, більшим за кут нахилу твірної конуса до осі. Неповний еліпс утворюється, коли січна площина перетинає основу конуса (рис. 3.5в);
- парабола, якщо січна площина паралельна одній твірній конуса (рис. 3.5г);
- гіпербола, якщо січна площина паралельна двом твірним лініям або осі конуса (рис. 3.5д).

Конічні перерізи описуються рівнянням другого степеня

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Член Bx визначає орієнтацію конуса по відношенню до деякої системи координат. Якщо одна з осей двовимірної системи координат є віссю симетрії кривої, то у рівнянні $B=0$.

Конічним перерізом може бути еліпс, парабола або гіпербола залежно від значення B^2-4AC :

$B^2-4AC=0$ – парабола;

$B^2-4AC<0$ – еліпс або коло;

$B^2-4AC>0$ – гіпербола.

При інших значеннях коефіцієнтів рівняння конічний переріз – це плоска крива, що задовольняє цьому рівнянню.

Конічні перерізи є центральними – гіпербола і еліпс (коло – частинний випадок), або нецентральними – парабола. Інші конічні перерізи, що мають назву вироджених форм, центральні.

У матричній формі рівняння конічного перерізу має вигляд:

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

або $[X][S][X]^T = 0$.

Привести конічний переріз до центрального вигляду означає таке. Для центрального перерізу (еліпс або гіпербола) центр розташований у початку координат, а осі належать осям координат. Для нецентрального перерізу – параболи – вісь симетрії належить півосі Ox , вершина розташована у початку координат, а сама парабола розкривається вправо. В обох випадках переріз переводиться до стандартного вигляду переносом і обертанням. Для центральних перерізів лінійні члени рівняння знищуються переносом перерізу в початок системи координат.

Рівняння набуває вигляду:

$$[X][T_r][S][T_r]^T[X]^T = 0,$$

де $[T_r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$ – матриця переносу.

Після конкатенації матриць переносу і коефіцієнтів рівняння має вигляд:

$$[X][S'][X]^T = 0;$$

$$\text{де } [S'] = [T_r][S][T_r]^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2A' & B' & D' \\ D' & 2C' & E' \\ D' & E' & 2F' \end{bmatrix},$$

причому $A' = A$;

$B' = B$;

$C' = C$;

$D' = 2Am + 2Bn + D$;

$2F' = mD' + nE' + (Dm + En + 2F)$;

$$E' = Bm + 2Cn + E.$$

З урахуванням коефіцієнтів рівняння конічних перерізів набуває вигляду:

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0.$$

Для знищення лінійних членів коефіцієнти переносу m та n вираховуємо з умови $D'=E'=0$

$$\begin{aligned} 2Am + Bn + D &= 0; \\ Bm + 2Cn + E &= 0. \end{aligned}$$

У матрицевому вигляді рівняння

$$[mn] \begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ -E \end{bmatrix}$$

можна записати $[M][L]=[Q]$.

Аналіз цього рівняння показує, що за умови інвертованості $[L]$ існує розв'язок для $[M]$ і переріз є центральний (еліпс або гіпербола). Якщо $[L]$ неінвертована, тобто сингулярна, то розв'язку для $[M]$ не існує і переріз є нецентральный (парабола). Детермінант сингулярної матриці

$$\det[L] = [T]|L| = [T] \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{або} \quad B^2 - 4AC = 0.$$

Таким чином, загальне рівняння другого порядку конічних перерізів описує нецентральный конічний переріз, тобто параболу при значеннях детермінанта $B^2 - 4AC < 0$, і центральний конічний переріз при значеннях детермінанта $B^2 - 4AC \neq 0$. Якщо значення детермінанта $B^2 - 4AC < 0$, то рівняння описує еліпс, а при значеннях детермінанта $B^2 - 4AC > 0$ – гіперболу.

3.5. Паралельність осей перерізу осям координат

Осі конічного перерізу можна зробити паралельними осям координат, використавши матрицю плоского повороту

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

на яку помножимо загальне рівняння:

$$[X][R][S][R]^T[X]^T = 0.$$

Після конкатенації матриць одержимо

$$[X][S''][X]^T = 0,$$

$$\text{де } [S''] = [R][S][R]^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2A'' & B'' & D'' \\ B'' & 2C'' & E'' \\ D'' & E'' & 2F'' \end{bmatrix},$$

а коефіцієнти матриці

$$\begin{aligned} A'' &= 2 \cos^2 \Theta + B \cos \Theta \sin \Theta + C \sin^2 \Theta; \\ B'' &= 2(C - A) \cos \Theta \sin \Theta + B(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta); \\ C'' &= A \sin^2 \Theta - B \cos \Theta \sin \Theta + C \cos^2 \Theta; \\ D'' &= D \cos \Theta + E \sin \Theta; \\ E'' &= E \cos \Theta - D \sin \Theta; \\ F'' &= F. \end{aligned}$$

Зауважимо, якщо осі перерізу паралельні осям координат, то $B'' = 0$:
 $2(C - A) \cos \Theta \sin \Theta + B(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) = 0$;
 $(C - A) \sin 2 \Theta + B \cos 2 \Theta = 0$.

Отже, кут повороту $\Theta = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{B}{A-C} \right)$.

Матриця $[S''] = \left(\frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} 2A'' & 0 & D'' \\ 0 & 2C'' & E'' \\ D'' & E'' & 2F'' \end{bmatrix}$ для кута Θ .

3.6. Визначення центрального чи нецентрального перерізу

Центральний переріз можна привести до стандартного вигляду комбінацією переносу і повороту:

$$[X][Tr][R][S][R]^T[Tr]^T[X]^T = 0. \quad (3.1)$$

Після конкатенації матриць одержимо

$$[S'''] = [Tr][R][S][R]^T[Rt]^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2A''' & B''' & D''' \\ B''' & 2C''' & E''' \\ D''' & E''' & 2F''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A''' & 0 & 0 \\ 0 & C''' & 0 \\ 0 & 0 & F''' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix},$$

де $A''' = A \cos^2 \Theta + B \cos \Theta \sin \Theta + C \sin^2 \Theta$;
 $B''' = 2(C - A) \cos \Theta \sin \Theta + B(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)$;
 $C''' = A \sin^2 \Theta - B \cos \Theta \sin \Theta + C \cos^2 \Theta$;
 $D''' = \varphi \cos \Theta + \eta \sin \Theta$;
 $E''' = \eta \cos \Theta - \varphi \sin \Theta$;
 $F''' = (m\varphi + \eta n + \mu)/2$;
 $\varphi = 2Am + Bn + D$;
 $\eta = Bm + 2Cn + E$;
 $\mu = Dm + En + 2F$.

Матриця $[S''']$ діагональна. Обертання усуває член $B'''xy$ при $B''' = 0$, а перенесення – лінійні члени рівняння при значенні

$$D''' = E''' = 0.$$

Коефіцієнти перенесення одержимо при значенні $\Theta = 0$, прирівнявши $D''' = E''' = 0$:

$$2Am + Bn + D = 0;$$

$$Bm + 2Cn + E = 0,$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}; \\ n &= \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}. \end{aligned}$$

Запишемо рівняння (3.1) з урахуванням матриці $[S''']$:

$$[X][S'''][X]^T = 0,$$

звідки маємо:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = k.$$

Проаналізуємо одержане рівняння конічного перерізу для різних значень α і β .

При значенні $k > 0$, коефіцієнти $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, а перерізом є еліпс. Якщо при цьому коефіцієнти α і β мають різні знаки, то переріз – гіпербола.

Якщо один з коефіцієнтів α чи $\beta = 0$, наприклад, $\beta = 0$, то маємо рівняння

$$\alpha x^2 = -k,$$

Звідки

$$x = \pm \sqrt{-k/\alpha}$$

при значенні $-k/\alpha > 0$. Графічним відображенням такого рівняння слугують дві паралельні прямі лінії.

При значенні $k = 0$ коефіцієнти α і β можуть мати однакові чи різні знаки.

Якщо знаки α і β однакові, то рівнянню

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$$

задовольняє початок системи координат $x=y=0$. Вважають, що це граничний випадок еліпса.

Якщо знаки α і β різні, то останнє рівняння має вигляд

$$y = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} x,$$

тобто маємо пару прямих, що перетинаються у початку координат як граничний випадок гіперболи.

Нарешті, якщо $\beta = 0$, тобто

$$\alpha x^2 + 0 \cdot y^2 = 0,$$

одержуємо $x=0$ і розв'язком слугує множина значень осі Oy .

Для **нецентрального** перерізу, тобто параболи, обидва лінійних члени усунути не можна, проте можна вилучити один лінійний та один квадратичний член для координат x чи y .

Використаємо матрицю перенесення до рівняння після повороту

$$[S^+] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2A^+ & 0 & D^+ \\ 0 & 2C^+ & E^+ \\ D^+ & E^+ & 2F^+ \end{bmatrix},$$

де $A^+ = A''$;

$C^+ = C''$;

$D^+ = 2A''m + D''$;

$E^+ = 2C''n + E''$;

$$F^+ = \left(\frac{m}{2}\right) D^+ + \left(\frac{n}{2}\right) E^+ + (mD'' + nE'' + 2F'').$$

Тут можливі випадки, коли $A^+ = A''$ або $C^+ = C''$ перетворюються в нуль. Один з лінійних членів для x чи y можна усунути, якщо $D^+ = 0$ або $E^+ = 0$. Тоді одержуємо, що

$$m = -\frac{D''}{2A''}.$$

Якщо $E^+ = 0$, то $n = -E''/2C''$.

При значеннях $A'' = 0$ коефіцієнт m не визначений, тоді можна усунути тільки лінійні члени відносно y .

Приклад. Визначити тип конічного перерізу

$$2x^2 - 72xy + 23y^2 + 140x - 20y + 50 = 0.$$

Визначаємо вигляд перерізу

$$B^2 - 4AC = (-72)^2 - (4)(2)(23) = 5000 > 0,$$

тобто перерізом є гіпербола.

Приведемо гіперболу до стандартного вигляду. Визначаємо кут повороту

$$\Theta = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{B}{A-C} \right) = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{72}{2-23} \right) = 36.87^\circ.$$

Для цього кута знаходимо

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{4}{5}, \\ \sin \Theta &= 3/5. \end{aligned}$$

Коефіцієнти набувають таких значень:

$$\begin{aligned} A''' &= A \cos^2 \Theta + B \cos \Theta \sin \Theta + C \sin^2 \Theta = \\ &= 2 \left(\frac{4}{5} \right)^2 + (-72) \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{3}{5} \right) + (23) \left(\frac{3}{5} \right)^2 = -25; \\ C''' &= A \sin^2 \Theta - B \cos \Theta \sin \Theta + C \cos^2 \Theta = \\ &= 2 \left(\frac{3}{5} \right)^2 - (-72) \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{3}{5} \right) + (23) \left(\frac{4}{5} \right)^2 = 50; \\ m &= \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} = \frac{2 \cdot 23 \cdot 140 - (-72)(-20)}{5000} = 1; \\ n &= \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = \frac{2 \cdot 2 \cdot (-20) - (-72)(140)}{5000} = 2. \end{aligned}$$

Оскільки $D''' = E''' = 0$ (для одержання коефіцієнтів переносу)

$$\varphi = \eta = 0;$$

$$F''' = \frac{\mu}{2} = \frac{Dm + En + 2F}{2} = \frac{140 \cdot 1 + 2(-20) + 2 \cdot 50}{2} = 100.$$

Рівняння гіперболи має такий вигляд:

$$-25x^2 + 50y^2 + 100 = 0,$$

а у стандартному вигляді

$$x^2 - 2y^2 = 4$$

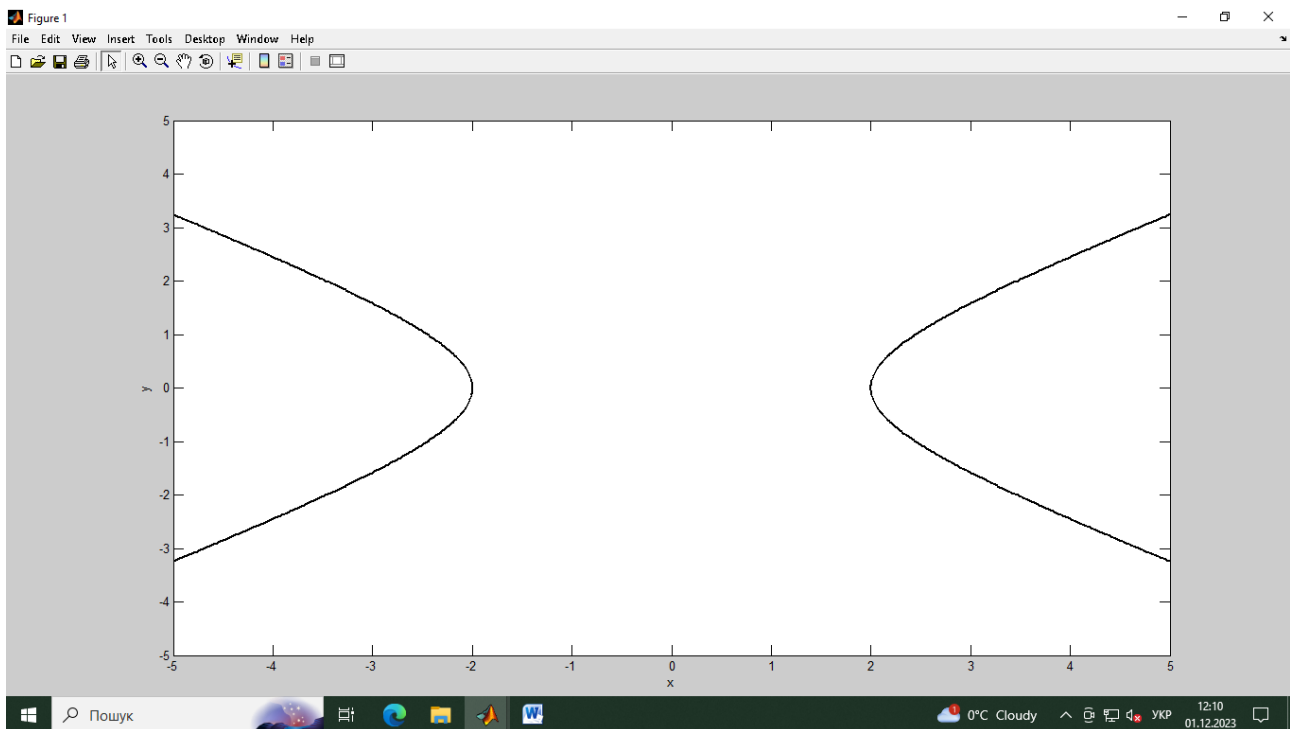
або

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

Результат реалізації одержаного рівняння у системі наукової комп'ютерної графіки Matlab командою

```
ezplot('x^2-2*y^2-4=0',[-5 5])
```

такий:



РОЗДІЛ 4

АЛГОРИТМИ РАСТРОВОЇ ГРАФІКИ

- Алгоритми викреслювання ліній

- Алгоритм Брезенхема

- Відсікання

4.1. Алгоритми викреслювання ліній

Екран растрового дисплея можна розглядати як матрицю дискретних елементів – *пікселів*, кожний з яких можна підсвітити. Процес визначення пікселів, що апроксимують заданий відрізок прямої лінії, називається *розкладанням в растр*.

Для горизонтальних, вертикальних і нахилених під кутом 45° відрізків вибір пікселів очевидний. При іншій орієнтації відрізка вибрати потрібні пікселі важче.

Загальні вимоги до алгоритмів:

- відрізки мають виглядати прямими;
- початок і кінець відрізка мають бути в заданих точках;
- яскравість вздовж відрізка має бути постійною і не залежати від довжини і нахилу відрізка;
- швидкість рисування має бути максимальною.

Оскільки дисплей растровий, то генерація абсолютно прямих ліній неможлива, так само як і точне співпадання кінців відрізка з заданими точками. Постійна вздовж відрізка яскравість досягається для вертикальних, горизонтальних і проведених під кутом 45° прямих. Для таких окремих випадків яскравість залежить від нахилу: наприклад, відстань між сусідніми пікселями під кутом 45° в $\sqrt{2}$ раз більша, ніж для вертикальних чи горизонтальних відрізків прямих ліній. Тому вертикальні чи горизонтальні відрізки прямих ліній будуть виглядати яскравішими, ніж похилі.

Компроміс полягає у тому, що має місце:

- знаходження приблизної довжини відрізка;
- найменше число обчислень;
- використання цілої арифметики;
- реалізація алгоритмів на апаратному або мікропрограмному рівні.

Для викреслювання відрізків використовується переважно покроковий метод:

```
позиція = початок
крок = приріст
1 if позиція – кінець < точність then 4
if позиція > кінець then 2
if позиція < кінець then 3
2 позиція = позиція – крок
  go to 1
3 позиція = позиція + крок
  go to 1
4 finish
```

Метод розкладання відрізка в растр полягає у розв'язанні диференціального рівняння, що описує цей процес. Для прямої лінії справедливо

$$\frac{dy}{dx} = \text{const}$$

$$\text{або } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Розв'язок одержуємо у вигляді:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y.$$

Підставивши значення, одержимо:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \Delta x.$$

Тут x_1, x_2, y_1, y_2 – координати кінців відрізка,
 y_i – початкове значення для чергового кроку.

Цей метод називається *цифровим диференціальним аналізатором*. Тут в якості одиниці растра вибирають більший з приростів Δx або Δy .

Алгоритм розкладу в растр відрізка за методом цифрового диференціального аналізатора такий:

Integer – функція перетворення дійсного в ціле число

$$(integer(-8.5)) = -9$$

$$sign = -1, 0, 1$$

Апроксимація довжини відрізка

$$\text{if } abs(x_2 - x_1) \geq abs(y_2 - y_1) \text{ then}$$

$$\text{Довжина} = abs(x_2 - x_1)$$

$$\text{else}$$

$$\text{Довжина} = abs(y_2 - y_1)$$

$$\text{end if}$$

приймаємо більший з приростів Δx або Δy рівним одиниці растра

$$\Delta x = (x_2 - x_1) / \text{довжина}$$

$$\Delta y = (y_2 - y_1) / \text{довжина}$$

Округляємо величини, а не відкидаємо дробову частину. Для використання алгоритму у всіх квадрантах використаємо функцію *sign*

$$x = x_1 + 0.5 \square sign(\Delta x)$$

$$y = y_1 + 0.5 \square sign(\Delta y)$$

Початок основного циклу

$$i = 1$$

$$\text{while } (i \leq \text{довжина})$$

$$\text{plot}(integer(x), integer(y))$$

$$x = x + \Delta x$$

$$y = y + \Delta y$$

$$i = i + 1$$

$$\text{end while}$$

$$\text{finish}$$

Приклад цифрового диференціального аналізатора в першому квадранті.

Результат роботи алгоритму для відрізка (0, 0; 5; 5):

початкові умови:

$$X_1 = 0$$

$$Y_1 = 0$$

$$X_2=5$$

$$Y_2=5$$

$$\text{Довжина} = 5$$

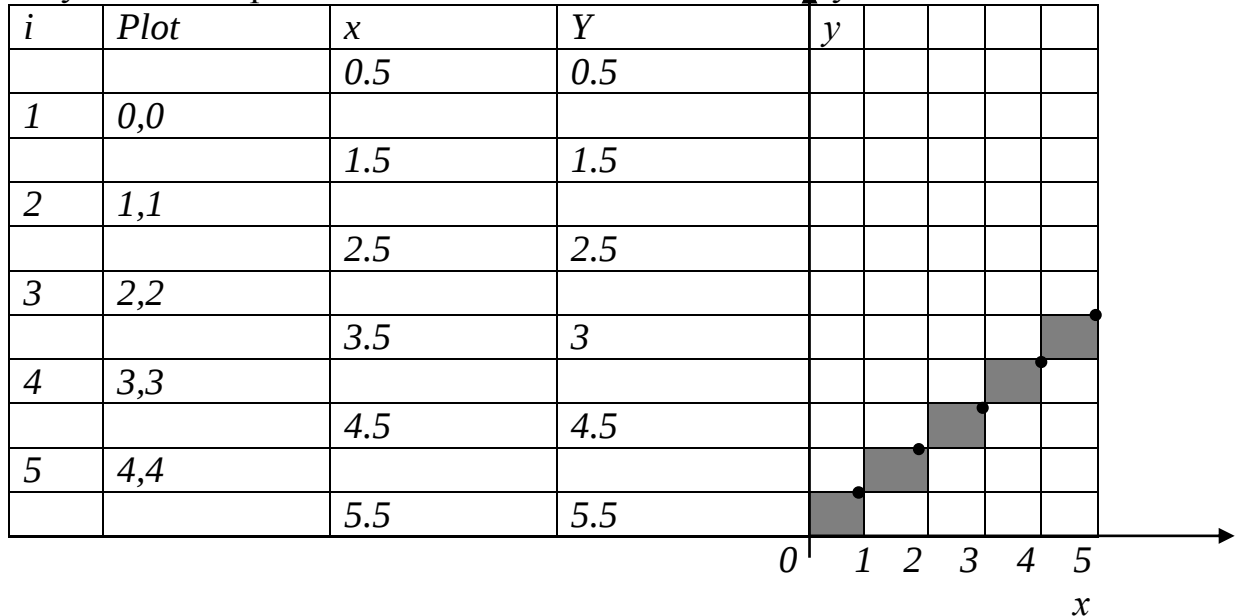
$$\Delta x=1$$

$$\Delta y=1$$

$$X=0.5$$

$$Y=0.5$$

Результати покрокового виконання основного циклу



На рисунку зображене представлення відрізка в першому квадранті. Тут кінцеві точки визначені точно, а вибрані пікселі рівномірно розподілені вздовж відрізка. Але якщо прийняти $i=0$, а не 1, то стане активованим піксел з координатою (5, 5), що небажано.

Якщо адресу пікселя задати не дробовими, а цілими числами як координати лівого нижнього кута, то його активація дає хибну кінцеву точку відрізка. Нарешті, при викреслюванні серії послідовних відрізків піксел (5, 5) буде активований двічі: в кінці даного і на початку наступного. Такий піксел може виглядати більш яскраво.

Робота алгоритму цифрового диференціального аналізатора в третьому квадранті для відрізка з координатами вершин (0,0; -8, -4):

початкові умови

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$x_2 = -8$$

$$y_2 = -4$$

$$\text{Довжина} = 8$$

$$\Delta x = -1$$

$$\Delta y = -0.5$$

$$x = -0.5$$

$$y = -0.5$$

Результати покрокового виконання основного циклу:

<i>i</i>	<i>plot</i>	<i>x</i>	<i>y</i>								
		-0.5	-0.5								
1	-1,-1										
		-1.5	-1.0								
2	-2,-1										
		-2.5	-1.5								
3	-3,-2										
		-3.5	-2.0								
4	-4,-2										
		-4.5	-2.5								
5	-5,-3										
		-5.5	-3.0								
6	-6,-3										
		-6.5	-3.5								
7	-7,-4										
		-7.5	-4.0								
8	-8,-4										
		-8.5	-4.5								

Результати показують, що відрізок, розкладений в растр, знаходиться по один бік від реального, а на нижньому кінці появляється зайва точка, тобто результат роботи алгоритму залежить від орієнтації відрізка і точність в кінцевих точках зменшується. Якщо замість взяття цілої частини округлювати результат до найближчого цілого, то результати також будуть різними. Нарешті алгоритм розкладу в растр відрізка за методом цифрового диференціального аналізатора використовує арифметику дійсних чисел.

4.2. Алгоритм Брезенхема

Алгоритм Брезенхема вибирає оптимальні растрові координати для відображення відрізка. При цьому одна з координат, x або y , залежно від значення кутового коефіцієнта змінюється на одиницю. Тоді зміна другої координати на нуль або одиницю залежить від віддалі між дійсним положенням відрізка і найближчими координатами сітки. Ця віддаль у комп'ютерній графіці називається помилкою. В цьому алгоритмі потрібно перевіряти тільки знак помилки. З рисунка 4.1 бачимо, що при кутовому коефіцієнті відрізка з точки $(0, 0)$ більшому, ніж $\frac{1}{2}$, його перетин з прямою $x=1$ буде розташований ближче до прямої $y=1$, ніж до прямої $y=0$.

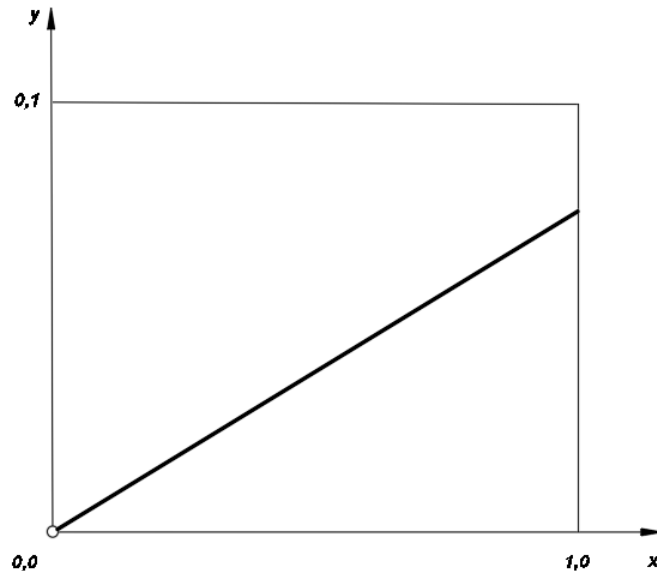


Рисунок 4.1 – Перевірка знаку помилки

Отже, точка растра $(1, 1)$ краще апроксимує хід відрізка, ніж точка $(1, 0)$. Якщо коефіцієнт менший від $\frac{1}{2}$, то справедливо навпаки.

Зауважимо, що для кутового коефіцієнта $\frac{1}{2}$ алгоритм вибирає точку $(1, 1)$.

Розглянемо представлення відрізка, якщо відрізок проходить, наприклад, через точку растра $(0, 0)$ і послідовно перетинає три пікселі, тангенс кута нахилу відрізка дорівнює $\frac{3}{8}$. За алгоритмом треба перевіряти знак помилки. Тому за замовчуванням спочатку приймаємо її рівною $-\frac{1}{2}$.

Величина помилки в такій точці растра з координатами $(1, 0)$ становить:

$$e = e + m.$$

Тангенс кута нахилу відрізка $m = \frac{3}{8}$,

тобто

$$e = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Оскільки помилка e від'ємна, то відрізок пройде нижче середини пікселя. Отже, піксель на тому самому горизонтальному рівні краще апроксимує положення відрізка, тому координата y не збільшуються. Знак помилки в такій точці растра $(2, 0)$:

$$e = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{4}.$$

Одержали додатне значення помилки e . Це означає, що відрізок пройде вище середньої точки, тобто растровий елемент – піксель $(2, 1)$ – з наступною за величиною координатою y краще апроксимує положення відрізка. Отже, значення y збільшується на одиницю. Оскільки знак помилки e змінився з від'ємного на додатний, перед аналізом наступного пікселя треба скоректувати помилку, віднявши від неї одиницю:

$$e = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

Зауважимо, що точка перетину вертикальної прямої $x=z$ з заданим відрізком лежить на $\frac{1}{4}$ нижче від прямої $y=l$. Адже перенесення відрізка на $\frac{1}{2}$ вниз дає результат, знак помилки

$$e = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Для наступного пікселя одержуємо знак помилки

$$e = -\frac{3}{4} + \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}.$$

Значення знаку помилки e від'ємне, тому координата y не збільшується.

Отже, маємо геометричну інтерпретацію помилки.

Помилка – це інтервал, який відтинає відрізок по осі Oy в кожному растровому елементі відносно значення $-\frac{1}{2}$.

Алгоритм Брезенхема розкладу в растр відрізка для першого октанта, коли $0 \leq \Delta y \leq \Delta x$, має такий вигляд:

$x, y, \Delta x, \Delta y$ – цілі числа

e – дійсне число

ініціалізація змінних

$x = x_1$

$y = y_1$

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta y = y_2 - y_1$

ініціалізація на половину пікселя

$$e = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{1}{2}$$

початок основного циклу

for $i = 1$ to Δx

Plot (x, y)

while ($e > 0$)

y = y + 1

e = e - 1

end while

x = x + 1

e = e + $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

next i

finish

Приклад роботи алгоритму Брезенхема для відрізка прямої лінії з вершинами в точках $(0, 0), (5, 5)$.

Початкові умови:

$x = 0$

$y = 0$

$\Delta x = 5$

$$\Delta y = 5$$

$$e = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{3} = 1 \right).$$

Результат покрокового виконання				
<i>i</i>	<i>plot</i>	<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
		$\frac{1}{2}$	0	0
1	0,0	$-\frac{1}{2}$	0	1
		$\frac{1}{2}$	1	1
2	1,1			
		$-\frac{1}{2}$	1	2
		$\frac{1}{2}$	2	2
3	2,2			
		$-\frac{1}{2}$	2	3
		$\frac{1}{2}$	3	3
4	3,3	$-\frac{1}{2}$	3	4
		$\frac{1}{2}$	4	4
5	4,4	$-\frac{1}{2}$	4	5
		$\frac{1}{2}$	5	5

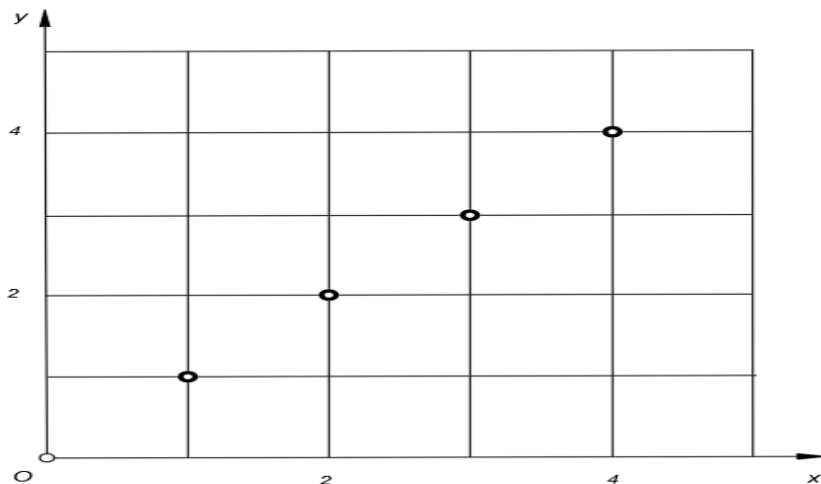


Рисунок 4.2 – Результат покрокового виконання алгоритму Брезенхема для відрізка прямої лінії

З рисунка 4.2 видно, що точка растра 5, 5 не активована. Активувати її можна змінивши умови циклу:

for i = 0 to Δx .

Активізацію точки відрізка прямої (0, 0) можна усунути, якщо поставити оператор *Plot* перед рядком

next i.

4.2.1. Цілочисельний алгоритм Брезенхема

Наведений алгоритм Брезенхема вимагає використання арифметики з плаваючою точкою, ділення при знаходженні кутового коефіцієнта і оцінці помилки. Збільшити швидкодію алгоритму можна, якщо використати

цілочисельну арифметику і виключити операцію ділення. У алгоритмі Брезенхема важливо визначити знак помилки, тому можна використати перетворення

$$\bar{e} = 2e\Delta x = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x = 2\Delta y - \Delta x.$$

Таке перетворення дає змогу перетворити алгоритм в цілочисельний. Розглянемо цілочисельний алгоритм Брезенхема для першого октанту, коли $0 \leq \Delta y \leq \Delta x$:

```

x = x1
y = y1
Δx = x2 - x1
Δy = y2 - y1
ініціалізація  $\bar{e}$  з поправкою на половину пікселя
 $\bar{e} = 2\Delta y - \Delta x$ 
початок основного циклу
for i = 1 to Δx
  plot (x, y)
  while ( $\bar{e} \geq 0$ )
    y = y + 1
    e =  $\bar{e} - 2\Delta x$ 
  end while
  x = x + 1
   $\bar{e} = \bar{e} + 2\Delta y$ 
next i
finish

```

Приклад цілочисельного алгоритму Брезенхема для відрізка прямої лінії з вершинами в точках (0, 0), (5, 5).

Початкові умови:

$$\begin{aligned}
 x &= 0 \\
 y &= 0 \\
 \Delta x &= 5 \\
 \Delta y &= 5 \\
 \bar{e} &= 2 \cdot 5 - 5 = 5
 \end{aligned}$$

Результат покрокового виконання				
<i>i</i>	<i>plot</i>	<i>e</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
		5	0	0
1	0, 0			
		-5	0	1
		5	1	1
2	1, 1	-5	1	2
		5	2	2
3	2, 2			
		-5	2	3
		5	3	3
4	3, 3			

		-5	3	4
		5	4	4
5	4, 4			
		-5	4	5
		5	5	5

Результати роботи алгоритму наведені на рис.4.2.

4.2.2. Загальний алгоритм Брезенхема

Щоб реалізація алгоритму Брезенхема була повною, треба обробляти відрізки у всіх октантах. Тоді треба враховувати номер квадранта і кутовий коефіцієнт відрізка. Коли абсолютна величина кутового коефіцієнта більша за одиницю, то координата y постійно змінюється на одиницю, а критерій помилки Брезенхема використовується для прийняття рішення про зміну значення чисельного координати x . Вибір координати, що постійно змінюється на $+1$ або -1 , залежить від квадранта. Розглянемо загальний цілочисельний алгоритм Брезенхема. Всі змінні – цілі числа:

$$\begin{aligned}x &= x_1 \\y &= y_1 \\ \Delta x &= \text{abs}(x_2 - x_1) \\ \Delta y &= \text{abs}(y_2 - y_1) \\ S_1 &= \text{sign}(x_2 - x_1) \\ S_2 &= \text{sign}(y_2 - y_1)\end{aligned}$$

Обмінювання значень Δy та Δx залежно від значення кутового коефіцієнта нахилу відрізка

$$\begin{aligned}&\text{if } \Delta y > \Delta x \text{ then} \\&\quad \text{час} = \Delta x \\&\quad \Delta x = \Delta y \\&\quad \Delta y = \text{час} \\&\quad \text{обмін} = 1 \\&\quad \text{else} \\&\quad \text{обмін} = 0 \\&\quad \text{end if}\end{aligned}$$

Ініціалізація $\bar{e}$ з поправкою на половину пікселя

$$\bar{e} = 2\Delta y - \Delta x$$

Основний цикл

$$\begin{aligned}&\text{for } i = 1 \text{ to } \Delta x \\&\quad \text{plot}(x, y) \\&\quad \text{while } (\bar{e} \geq 0) \\&\quad \text{if обмін} = 1 \text{ then} \\&\quad \quad x = x + S_1 \\&\quad \quad \text{else} \\&\quad \quad y = y + S_2 \\&\quad \quad \text{end if}\end{aligned}$$

```

 $\bar{e} = \bar{e} - 2\Delta x$ 
end while
if обмін = 1 then
 $y = y + S_2$ 
else
 $x = x + S_1$ 
end if
 $\bar{e} = \bar{e} + 2\Delta y$ 
next i
finish

```

Приклад узагальненого алгоритму Брезенхема для відрізка прямої лінії з вершинами в точках $(0, 0)$, $(-8, -4)$.

початкові умови

```

 $x = 0$ 
 $y = 0$ 
 $\Delta x = 8$ 
 $\Delta y = 4$ 
 $S_1 = -1$ 
 $S_2 = -1$ 
обмін = 0
 $\bar{e} = 2\Delta y - \Delta x = 0$ 

```

Результат покрокового виконання

i	Plot	$\bar{e}$	x	y
		0	0	0
1	0,0			
		-16	0	-1
		-8	-1	-1
2	-1,1			
		0	-2	-1
3	-2,-1			
		-16	-2	-2
		-8	-3	-2
4	-3,-2			
		0	-4	-2
5	-4,-2			
		-16	-4	-3
		-8	-5	-3
6	-5,-3			
		0	-6	-3
7	-6,-3			
		-16	-6	-4
		-8	-7	-4
8	-7,-4			
		0	-8	-4

Результат роботи алгоритму Брезенхема для відрізка прямої лінії з вершинами в точках $(0, 0)$, $(-8, -4)$ наведені на рис. 4.3.

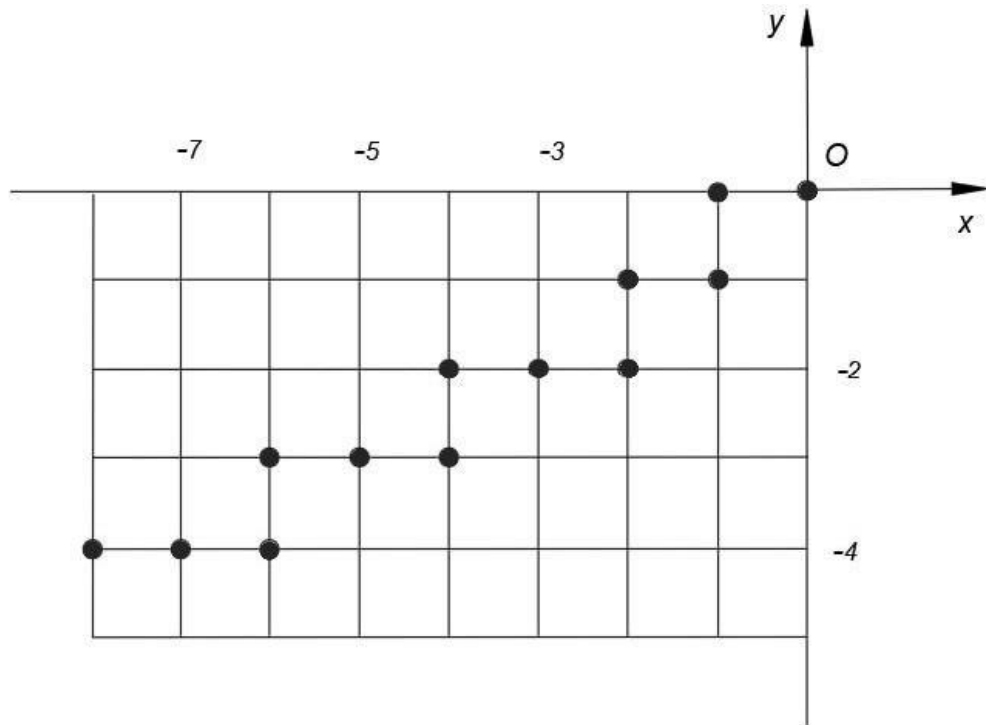


Рисунок 4.3 – Результат покрокового виконання алгоритму Брезенхема для відрізка прямої лінії з вершинами в точках $(0, 0)$, $(-8, -4)$

Приклад узагальненого алгоритму Брезенхема для відрізка прямої лінії з вершинами в точках $(0, 0)$, $(-4, -8)$.

$$\begin{aligned}
 x &= 0 \\
 y &= 0 \\
 \Delta x &= 4 \\
 \Delta y &= 8 \\
 S_1 &= -1 \\
 S_2 &= -1 \\
 \text{обмін} &= 1 \\
 \Delta x &= \Delta y = 8 \\
 \Delta y &= \Delta x = 4 \\
 \bar{e} &= 2 \square 4 - 8 = 0
 \end{aligned}$$

Результат покрокового виконання

i	$Plot$		e	x	y
			0	0	0
1	0	0			
			-16	-1	0
			-8	-1	-1
2	-1	-1			

			0	-1	-2
3	-1	-2			
			-16	-2	-2
			-8	-2	-3
4	-2	-3			
			0	-2	-4
5	-2	-4			
			-16	-3	-4
			-8	-3	-5
6	-3	-5			
			0	-3	-6
7	-3	-6			
			-16	-4	-6
			-8	-4	-7
8	-4	-7			
			0	-4	-7

Результат роботи алгоритму Брезенхема для відрізка прямої лінії з вершинами в точках $(0, 0)$, $(-4, -8)$ наведені на рис. 4.4.

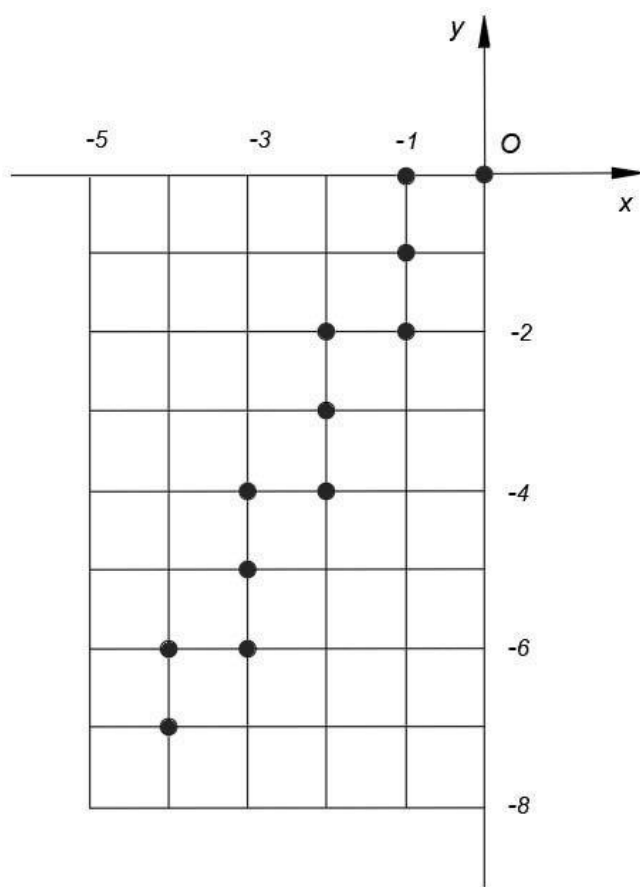


Рисунок 4.4 – Результат покрокового виконання алгоритму Брезенхема для відрізка прямої лінії з вершинами в точках $(0, 0)$, $(-4, -8)$

4.3. Відсікання

Відсікання являє процес виділення частини бази даних. Відсікання використовують в алгоритмах усунення невидимих ліній та частин поверхонь, при побудові тіней, відсіканні многогранників іншими многогранниками. Алгоритми відсікання є дво- і тривимірними і використовуються як для регулярних, тобто канонічних областей і об'ємів, так і для нерегулярних.

4.3.1. Двовимірне відсікання

При двовимірному відсіканні відсікаюче вікно регулярної форми задане лівим, правим, верхнім та нижнім двовимірними ребрами. Регулярним відсікаючим вікном слугує прямокутник, сторони якого паралельні осям координат екрана (рис. 4.5).

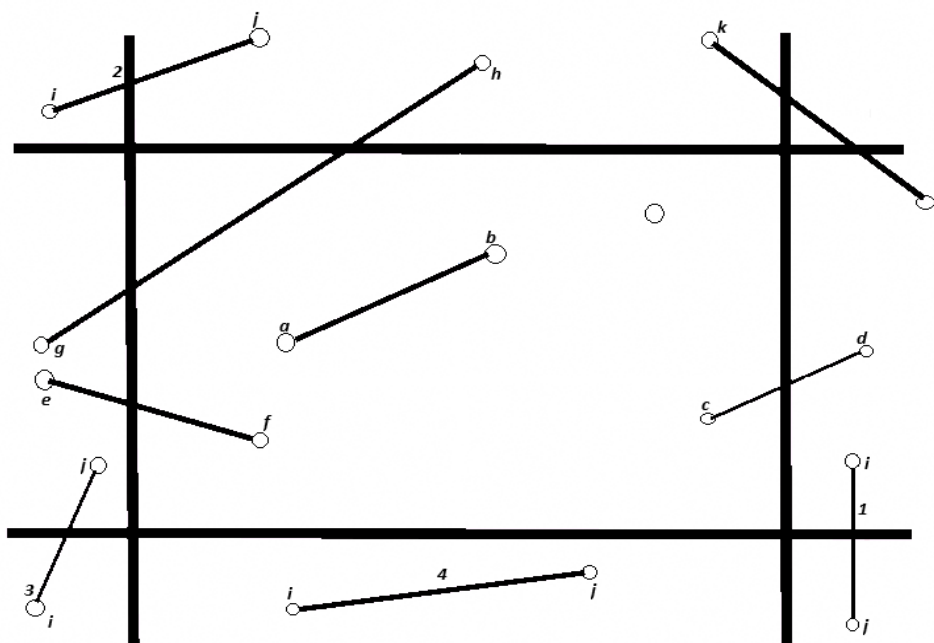


Рисунок 4.5 – Регулярне відсікаюче вікно

Метою алгоритму відсікання є визначення геометричних примітивів, тобто точок, відрізків тощо, які лежать всередині відсікаючого вікна. Такі геометричні примітиви залишаються всередині вікна, а решта відкидається. При відсіканні необхідно знаходити відрізки типу ab або відповідні їм точки і відкидати відрізки ij і відповідні їм точки.

Точки, розташовані всередині вікна, задовольняють умовам:

$$x_A \leq x \leq x_n$$

$$y_H \leq y \leq y_b.$$

Знак рівності означає, що точки, які лежать на границі вікна, вважають такими, розташовані всередині вікна. Відрізок лежить всередині вікна і, отже, є видимим, якщо його кінцеві точки лежать всередині вікна, наприклад, відрізок ab . Проте, якщо кінці відрізка знаходяться поза вікном, то цей відрізок не обов'язково цілком лежить поза вікном, наприклад, відрізок gh .

Якщо кінці відрізка знаходяться справа, n , зліва, l , вище, v , або нижче, n , вікна, то цей відрізок повністю знаходиться поза вікном і, отже, невидимий. Це дає змогу повністю усунути всі відрізки типу ij , але не відрізки типу gh , частково видимий, або відрізок типу kl , який повністю невидимий.

Прийmemo a і b – кінці відрізка. Тоді алгоритм визначення повністю видимих і більшості невидимих відрізків має вигляд:

{для кожного відрізка перевірити його повну видимість. Якщо одна з координат будь – якого кінця відрізка знаходиться поза вікном, то відрізок не є повністю видимим}

if $x_a < x_l$ or $x_a > x_n$ then 1

if $x_b < x_l$ or $x_b > x_n$ then 1

if $y_a < y_n$ or $y_a > y_v$ then 1

if $y_b < y_n$ or $y_b > y_v$ then 1

відрізок повністю видимий

візуалізувати відрізок

go to 3

перевірити повну невидимість відрізка.

Якщо обидва кінці відрізка лежать зліва, справа, зверху чи знизу від вікна, то відрізок невидимий

1 if $x_a < x_l$ and $x_b < x_l$ then 2

if $x_a > x_n$ and $x_b > x_n$ then 2

if $y_a > y_v$ and $y_b > y_v$ then 2

if $y_a < y_n$ and $y_b < y_n$ then 2

відрізок частково видимий або перетинає продовження діагоналі, залишаючись невидимим.

Визначити перетин відрізка з вікном

2 відрізок невидимий

3 перехід до наступного відрізка.

Порядок порівнянь при визначенні видимості чи невидимості довільний. Залежно від положення відрізка число порівнянь сягає від одного до чотирьох. Однаково також, що визначене раніше: видимі чи невидимі відрізки. При цьому визначення перетину відрізка з вікном потребує значного обсягу обчислень, то таке визначення необхідно проводити в останню чергу.

Для визначення повної видимості чи невидимості відрізків використовується s . За цим методом для визначення тої з дев'яти областей, якій належить кінець ребра, введений чотирирозрядний (бітовий) код:

в	1001	1000	1010
	0001	вікно 0000	0010
н	0101	0100	0110
	л		п

Прийнято, що крайній правий біт коду є першим. У відповідний біт заноситься одиниця, якщо виконуються умови:

для першого біта – якщо точка лівіше від вікна

для другого біта – якщо точка правіше від вікна

для третього біта – якщо точка нижче від вікна
 для четвертого біта – якщо точка вище від вікна
 У протилежному разі в біт заноситься нуль.

Отже, якщо коди обох кінців ребра дорівнюють нулю, то обидві точки знаходяться всередині вікна, а відрізок видимий. Якщо побітовий логічний добуток кодів кінцевих точок відрізка не дорівнює нулю, то відрізок повністю невидимий і його можна відкинути.

Розглянемо приклад для відрізків *ab*, *cd*, *ef*, *ij*, *gh*, *kl*.

N	Відрізок	Коди кінців		Результат логічного множення	Примітка
1	<i>ab</i>	0000	0000	0000	Видимий
2	<i>cd</i>	0000	0010	0000	Частково видимий
3	<i>ef</i>	0001	0000	0000	Частково видимий
4	<i>gh</i>	0001	1000	0000	Частково видимий
5	<i>kl</i>	1000	0010	0000	Цілком невидимий
6	<i>ij 1</i>	0110	0110	0010	Невидимий
7	<i>ij 2</i>	1001	1000	1000	Невидимий
8	<i>ij 3</i>	0101	0001	0001	Невидимий
9	<i>ij 4</i>	0100	0100	0100	Невидимий

Якщо результат логічного множення не дорівнює нулю, то відрізок невидимий. Якщо логічний добуток дорівнює нулю, то відрізок може бути повністю або частково видимим, або повністю невидимим. Тому для визначення повної видимості необхідно перевіряти окремо значення кодів кінців відрізка. Якщо спочатку знайдені повністю видимі і невидимі відрізки, то підпрограмі, що вираховує перетин відрізків, необхідно передати тільки такі відрізки, які, можливо, частково видимі, тобто результат логічного множення кодів кінцевих точок дорівнює нулю.

Перетин двох відрізків можна знаходити як параметричним, так і непараметричним способом. Рівняння прямої, що проходить через точки $P_1(x_1, y_1)$ та $P_2(x_2, y_2)$, має вигляд:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

або

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_2) + y_2.$$

У рівняннях позначимо

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Координати точок перетину прямої з сторонами вікна такі:

$$\text{зліва: } x_{\text{л}}, y = m(x_{\text{л}} - x_1) + y_1;$$

$$\text{справа: } x_{\Pi}, y = m(x_{\Pi} - x_1) + y_1;$$

$$\text{зверху: } y_B, x = x_1 + \frac{y_B - y_1}{m};$$

$$\text{знизу: } y_H, x = x_1 + \frac{y_H - y_1}{m}.$$

Розглянемо **приклад** двовимірного відсікання (рис. 4.6).

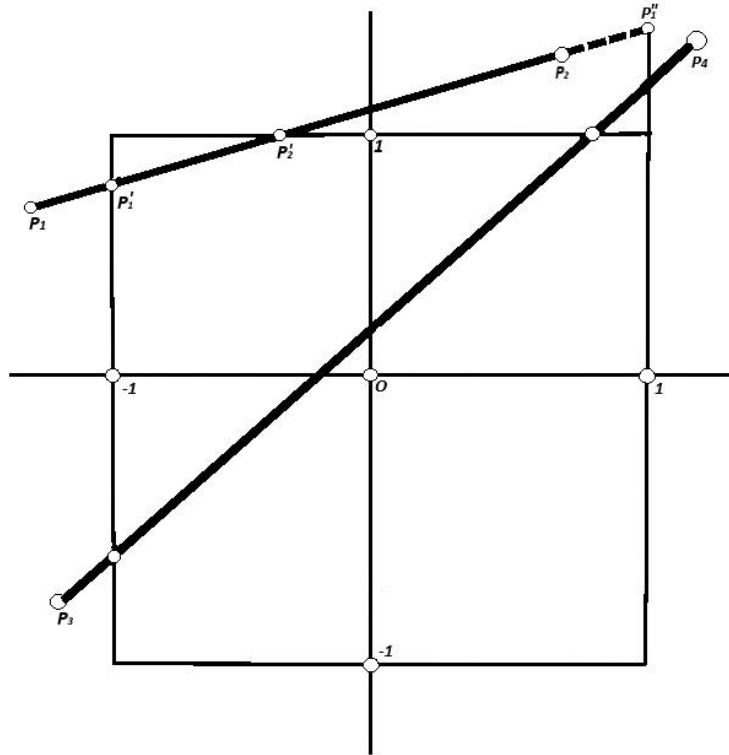


Рисунок 4.6 – Двовимірне відсікання відрізків

Приймемо такі координати точок як вершин відрізка прямої лінії:

$$P_1 \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{6} \right);$$

$$P_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

Знайдемо його нахил

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{3}.$$

Перетини відрізка зі сторонами вікна:

$$\text{зліва: } x = -1; y = \frac{2}{3} \left(-1 - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\text{справа: } x = 1; y = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{3}{2} \right) \right) + \frac{1}{6} = \frac{11}{6}.$$

Оскільки число $\frac{11}{6}$ більше за $y_B = 1$, тому його відкидаємо.

$$\text{Зверху: } y = 1; x = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{4};$$

знизу: $y = -1; x = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(-1 - \frac{1}{6}\right) = -\frac{13}{4}$.

Оскільки число $-\frac{13}{4}$ менше за $x_d = -1$, тому його відкидаємо.

Якщо нахил дорівнює безконечності, то відрізок паралельний лівій або правій сторонам вікна, тому треба шукати його перетини з верхньою і нижньою стороною вікна. Так само, якщо нахил дорівнює нулю, то відрізок паралельний верхній і нижній сторонам вікна, тому треба шукати його перетини з лівою і правою стороною вікна. Якщо код одного з кінців відрізка дорівнює нулю, то цей кінець відрізка знаходиться всередині вікна, а відрізок може перетнути одну сторону вікна.

4.3.2. Тривимірне відсікання

Тривимірне відсікання є узагальненням двовимірного. Поширеними формами тривимірних відсікачів є прямокутний паралелепіпед (рис.4.7), що використовується при аксонометричному проєкціюванні, і зрізана піраміда, яка використовується при центральному проєкціюванні (рис.4.8).

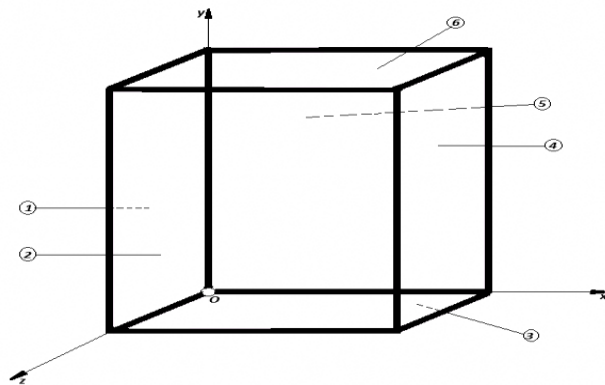


Рисунок 4.7– Тривимірний відсікач у вигляді прямокутного паралелепіпеда

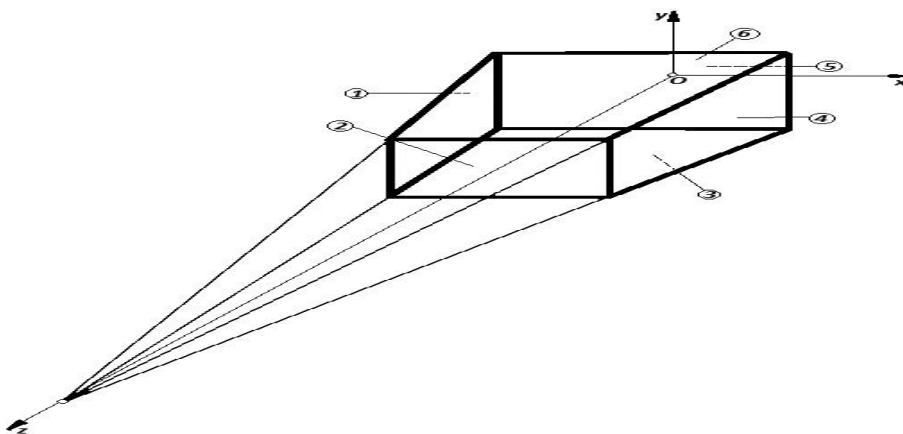


Рисунок 4.8 – Тривимірний відсікач у вигляді зрізаної піраміди

З рисунків маємо, що в кожній з обох форм є шість граней:

- 1 – вигляд зліва;
- 2 – вигляд спереду;

- 3 – вигляд знизу;
- 4– вигляд справа;
- 5 – вигляд ззаду;
- 6 – вигляд зверху.

Відрізки, повністю видимі або невидимі, можна ідентифікувати, використовуючи узагальнення кодів кінцевих точок Коена – Сазерленда. У тривимірному випадку використовують шестибітовий код. Правий біт рахують першим. У біти заносять одиниці з допомогою узагальнення двовимірної процедури:

у перший біт заносять одиницю, якщо кінець ребра лівіше об'єму
у другий біт заносять одиницю, якщо кінець ребра правіше об'єму
у третій біт заносять одиницю, якщо кінець ребра нижче об'єму
у четвертий біт заносять одиницю, якщо кінець ребра вище об'єму
у п'ятий біт заносять одиницю, якщо кінець ребра ближче об'єму
у шостий біт заносять одиницю, якщо кінець ребра даліше об'єму
інакше у відповідні біти заносять нулі.

Якщо коди обох кінців відрізка дорівнюють нулю, то обидва кінці видимі і відрізок також буде видимий. Якщо побітовий логічний добуток кодів кінців відрізка не дорівнюють нулю, то він повністю невидимий. Якщо такий добуток дорівнює нулю, то відрізок може бути частково видимий чи повністю невидимий. Тоді треба визначати перетини відрізка з гранями відсікаючого об'єму. Пошук кодів точки відносно відсікаючого прямокутного паралелепіпеда є узагальненням двовимірного алгоритму. Особливе місце займає випадок, коли відсікачем слугує зрізана піраміда (рис.4.9).

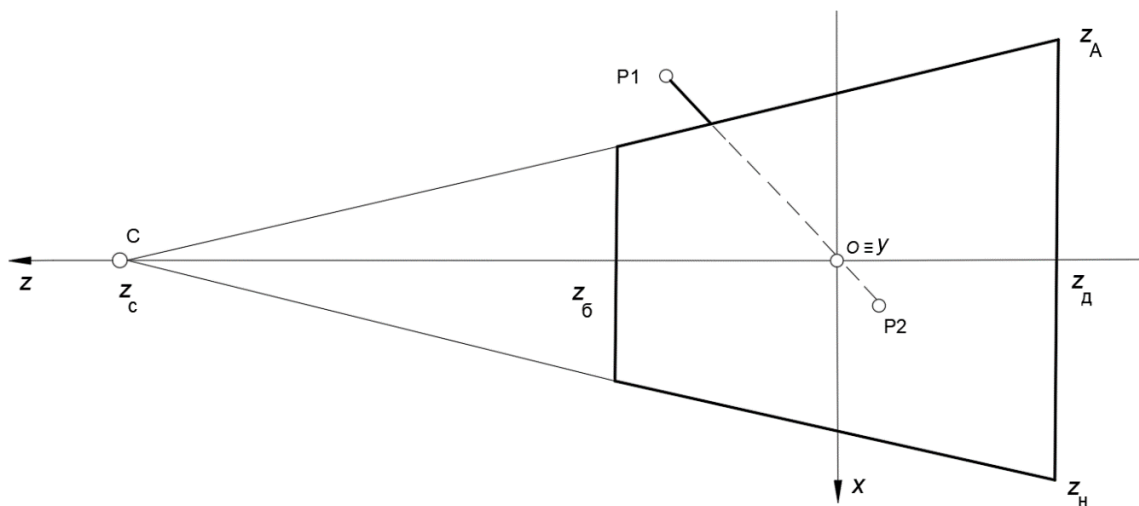


Рисунок 4.9 – Тривимірне відсікання зрізаною пірамідою

У цьому випадку відрізок, що з'єднує центр проекції з центром зрізаної піраміди, суміщений з віссю Oz правої системи координат. Розглянемо вигляд зверху зрізаної піраміди.

Рівняння прямої у площині $y=0$, що містить проекцію правої грані цієї піраміди, має вигляд:

$$x = (z - z_c) \cdot \frac{x_{\pi}}{(z_g - z_c)} = z \cdot \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad \alpha_1 &= \frac{x_n}{z_g - z_c}, \\ \alpha_2 &= -\alpha_1 z_c. \end{aligned}$$

Рівняння цієї прямої використовується для визначення місцеположення точки: справа на прямій або зліва від неї, тобто зовні відсікача, у площині, що містить праву грань відсікача, або всередині відсікача. Підставивши значення координат x, z точки P в пробну функцію

$$f_n = x - z\alpha_1 - \alpha_2,$$

одержимо такий результат:

$$f_n = x - z\alpha_1 - \alpha_2 \begin{cases} > 0, \text{ якщо } P \text{ справа від площини;} \\ = 0, \text{ якщо } P \text{ у площині;} \\ < 0, \text{ якщо } P \text{ зліва від площини.} \end{cases}$$

Пробні функції для лівої, верхньої та нижньої грані мають вигляд:

$$f_l = z\beta_1 - \beta_2 \begin{cases} > 0, \text{ якщо } P \text{ справа від площини;} \\ = 0, \text{ якщо } P \text{ у площині;} \\ < 0, \text{ якщо } P \text{ зліва від площини,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{де } \beta_1 &= \frac{x_n}{z_g - z_c}, \\ \beta_2 &= -\beta_1 z_c, \end{aligned}$$

$$f_B = y - z\gamma_1 - \gamma_2, \begin{cases} > 0, \text{ якщо } P \text{ справа від площини;} \\ = 0, \text{ якщо } P \text{ у площині;} \\ < 0, \text{ якщо } P \text{ зліва від площини,} \end{cases}$$

$$\text{де } \gamma_1 = \frac{y_n}{z_g - z_c},$$

$$\gamma_2 = -\gamma_1 z_c,$$

$$f_H = y - z\delta_1 - \delta_2 \begin{cases} < 0, \text{ якщо } P \text{ справа від площини;} \\ = 0, \text{ якщо } P \text{ у площині;} \\ > 0, \text{ якщо } P \text{ зліва від площини,} \end{cases}$$

$$\text{де } \delta_1 = \frac{y_n}{z_g - z_c},$$

$$\delta_2 = -\delta_1 z_c,$$

Пробні функції для ближньої і дальньої грані:

$$f_6 = z - z_6, \begin{cases} > 0, \text{ якщо } P \text{ ближче від площини;} \\ = 0, \text{ якщо } P \text{ у площині;} \\ < 0, \text{ якщо } P \text{ даліше від площини,} \end{cases}$$

$$f_d = z - z_d, \begin{cases} > 0, \text{ якщо } P \text{ даліше від площини;} \\ = 0, \text{ якщо } P \text{ у площині;} \\ < 0, \text{ якщо } P \text{ ближче від площини.} \end{cases}$$

При наближенні z_c до безконечності форма відсікача наближується до прямокутного паралелепіпеда. Пробні функції також наближуються до пробних функцій прямокутного паралелепіпеда.

РОЗДІЛ 5

ЗАСОБИ ВІДОБРАЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ У ПРОСТОРИ E^3

- Побудова просторових кривих ліній
- Криві Без'є
- Геометричне моделювання поверхонь
- Видалення невидимих ліній поверхонь
- Алгоритми видалення невидимих ліній
- Алгоритм плаваючого горизонту
- Алгоритм Робертса

5.1. Побудова просторових кривих ліній

Тривимірні просторові криві лінії у просторі в осях Ox , Oy , Oz задаються явно у непараметричній формі рівняннями [1]

$$\begin{aligned}x &= x; \\ y &= f(x); \\ z &= q(x),\end{aligned}\quad (5.1)$$

а неявно в непараметричній формі

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= 0; \\ q(x, y, z) &= 0\end{aligned}$$

як лінії перетину двох поверхонь.

Розв'язок має місце для випадку неявного опису просторових кривих ліній в непараметричній формі, якщо для точки з координатами x , y , z просторової лінії, що описана двома рівняннями поверхонь, справедливе співвідношення

$$\det \begin{bmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \\ \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dy} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Параметрично просторову криву описують рівняннями

$$\begin{aligned}x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t).\end{aligned}$$

Це однопараметрична крива лінія, де параметр t змінюється в границях $t_1 \leq t \leq t_2$.

Якщо в (5.1) прийняти $x=t$, то маємо параметричний опис кривої

$$\begin{aligned}x &= t; \\ y &= y(t); \\ z &= z(t).\end{aligned}$$

При відсутності аналітичного опису кривої використовують інтерполяцію, щоб провести криву через ряд заданих точок. Якщо відомий набір точок, що належать кривій, то використовують сплайни, які формують гладку криву. Фізичним аналогом сплайна є вузька рейка з дерева, яку використовують для проведення кривої $y=y(x)$ між заданими точками. Рейка приймає форму, яку надають їй свинцеві вантажі, під дією яких вона прогинається і може проходити через задані точки. Якщо сплайн подати у вигляді тонкої пружної балки з модулем Юнга E , то момент згинання

$$M(x) = \frac{E \square I}{R(x)},$$

де I – момент інерції, $R(x)$ – радіус кривини, який можна подати як

$$R(x) = \frac{1}{y''(x)}.$$

Значення $M(x)$ можна замінити деяким виразом, тобто лінеаризувати

$$M(x) = \bar{A} + \bar{B}x.$$

Тоді значення другої похідної $y''(x)$ подамо виразом

$$y''(x) = \frac{\bar{A} + \bar{B}x}{E \Delta i}.$$

Отже, сплайн описується кубічним поліномом, який одержуємо після подвійного інтегрування другої похідної $y''(x)$:

$$y = A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1.$$

Узагальнюючи маємо, що математично сплайн описується кусковим поліномом степеня k з неперервними похідними степеня $k-1$ у місцях з'єднань його кусків (сегментів). Отже, кубічний сплайн ($k=3$) має неперервність другого порядку у місцях з'єднань його кусків (сегментів).

Кускові сплайни поліномів низького степеня більш зручні для формування кривої через спрощення вимог до розрахунків і зменшення числових похибок, властивих многочленам високих степенів. Поліномом низького степеня не можна описати з'єднання довільного ряду точок, тому необхідні суміжні поліноміальні сегменти. Використовують кілька кубічних сегментів, кожний з них проходить через дві точки. Кубічний сплайн являє криву найменшого порядку, що допускає точки перетину та згин у просторі.

Рівняння параметричного кубічного сплайнового сегмента

$$P(t) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1}; t_1 \leq t \leq t_2,$$

де $P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$ – вектор положення точки на сплайні, $x(t), y(t), z(t)$ являють декартові координати цього вектора.

Кожна складова має подібний вид:

$$x(t) = \sum_{i=1}^4 B_{ix} t^{i-1}; t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 B_{iy} t^{i-1}; t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^4 B_{iz} t^{i-1}; t_1 \leq t \leq t_2.$$

Коефіцієнти B_i визначаються чотирма граничними умовами. Запишемо рівняння у вигляді

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3.$$

Нехай криволінійний сегмент проходить через точки P_1 і P_2 , а дотичні вектори в цих точках є P'_1 і P'_2 як похідні за параметром t , який змінюється в

межах

$t_1 \leq t \leq t_2$ (рис.5.1).

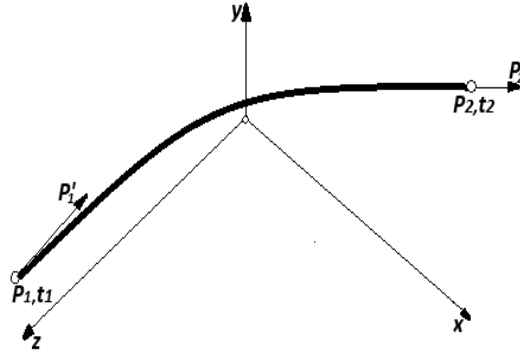


Рисунок 5.1 – Криволінійний сегмент сплайна у просторі

Для спрощення прийнемо $t_1 = 0$. Диференціюючи $P(t)$, маємо:

$$P'(t) = [x'(t) \ y'(t) \ z'(t)] = \sum_{i=1}^4 B_i (i-1)t^{i-2} = B_2 + 2B_3t + 3B_4t^2, t_1 \leq t \leq t_2.$$

Граничні умови для кубічного сегмента визначені параметрами двох кінцевих точок і дотичного вектора в кожній з них. Для сегмента між точками P_1 і P_2 маємо такі умови:

$$\begin{aligned} P(0) &= P_1; \\ P(t_2) &= P_2; \\ \frac{dP}{dt} &= P'_1 \text{ при } t = 0; \\ \frac{dP}{dt} &= P'_2 \text{ при } t = t_2. \end{aligned}$$

Використовуючи одержані умови, маємо співвідношення:

$$P(0) = B_1 = P_1;$$

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=2}^4 (i-1)t^{i-2}B_i = B_2 = P'_1 \text{ при } t = 0;$$

$$P(t_2) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} = B_1 + B_2t_2 + B_3t_2^2 + B_4t_2^3 \text{ при } t = t_2;$$

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=2}^4 (i-1)t^{i-2}B_i = B_2 + 2B_3t_2 + 3B_4t_2^2 \text{ при } t = t_2.$$

Значення B_3 і B_4 будуть:

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2^2} - \frac{P'_2}{t_2^2}, \\ B_4 &= \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^2} + \frac{P'_1}{t_2^2} + \frac{P'_2}{t_2^2}. \end{aligned}$$

Оскільки кожний з векторів кінцевих точок і вектор, дотичний у цих точках, має по три складових x , y , z , то параметричне рівняння для кубічної просторової

кривої залежить від дванадцяти векторних величин і значення параметра t на кінцях сегмента. Підстановка значень B_1, B_2, B_3, B_4 в рівняння для $P(t)$ визначає рівняння для одного кубічного сплайнового сегмента:

$$P(t) = P_1 + P'_1 t + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2} - \frac{P'_2}{t_2} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^2} + \frac{P'_1}{t_2^2} + \frac{P'_2}{t_2^2} \right] t^3. \quad (5.2)$$

Останнє рівняння (5.2), записане для одного кубічного сегмента, можна узагальнити для довільних двох сусідніх кубічних сегментів $P_k(t)$ і $P_{k+1}(t)$ при значеннях $1 \leq k \leq n-2$ з n заданих точок, через які має проходити крива

$$\begin{aligned} P_k(t) &= P_k + P'_k t + \left[\frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}} \right] t^2 + \\ &\quad + \left[\frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2} \right] t^3; \\ P_{k+1}(t) &= P_{k+1} + P'_{k+1} t + \left[\frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_{k+2}^2} - \frac{2P'_{k+1}}{t_{k+2}} - \frac{P'_{k+2}}{t_{k+2}} \right] t^2 + \\ &\quad + \left[\frac{2(P_{k+1} - P_{k+2})}{t_{k+2}^3} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+2}^2} + \frac{P'_{k+2}}{t_{k+2}^2} \right] t^3 \end{aligned}$$

для значень t :

першого сегмента при $0 \leq t \leq t_{k+1}$;

другого сегмента при $0 \leq t \leq t_{k+2}$

і решти сегментів (рис.5.2).

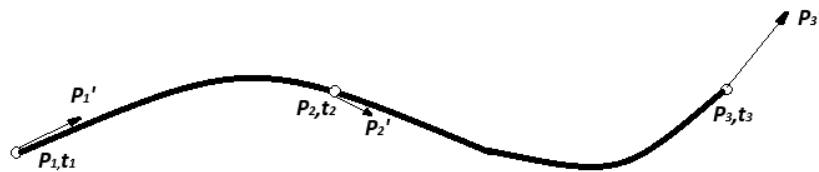


Рисунок 5.2 – З'єднання сегментів сплайна

Прирівнювання других похідних у точках стикування для сусідніх сегментів, тобто $P''_k(t_k) = P''_{k+1}(0)$, дає узагальнення рівняння:

$$\begin{aligned} &t_{k+2}P'_k + 2(t_{k+1} + t_{k+2})P'_{k+1} + t_{k+1}P'_{k+2} = \\ &= \frac{3}{t_{k+1} t_{k+2}} [t_{k+1}^2(P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2(P_{k+1} - P_k)] \end{aligned}$$

при $1 \leq k \leq n-2$.

З цього рівняння визначається дотичний вектор в точці з'єднання двох сегментів $P_k(t)$ і $P_{k+1}(t)$.

5.2. Криві Без'є

При побудові кривих ліній з використанням кубічних сплайнів задавання форми кривої за допомогою таких числових характеристик як напрям і модуль дотичних векторів не забезпечує інтуїтивного відчуття правильності побудови кривої, тобто *не завжди існує зв'язок між числами і формою кривої*. Результати інтерполяції одержують у вигляді кривої одного порядку, який не змінюється від сплайна до сплайна. Для збільшення кривини вводять більше точок для формування більшого числа кубічних сплайнів.

Крива Без'є визначена вершинами відкритого багатокутника, який однозначно задає форму кривої: кривій належать перша і остання вершина, а інші вершини характеризують похідні, порядок і вигляд кривої. Вигляд кривої залежить від форми багатокутника, зміна положення вершин якого створює відчуття зв'язку між входом і виходом. Підвищити порядок криволінійного елемента можна, задавши додаткові вершини багатокутника. Зміна вершин у заданому проміжку впливає на вигляд кривої всередині проміжку, а решта кривої не змінюється. Крива Без'є описується поліномом, який здійснює інтерполяцію між першою і останньою вершиною. Поліноми Без'є відносяться до поліномів Берштейна, які мають вигляд:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Коефіцієнти полінома Берштейна $B_n(x)$ степені n залежать від $n+1$ значень функції $f(x)$ на проміжку $0 \leq x \leq 1$ для рівновіддалених точок кривої лінії з ряду $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$.

Базисна i -та функція полінома Без'є порядку n або функція апроксимації задана співвідношенням

$$I_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1},$$

$$\text{де } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

$0 \leq i \leq n$ - степінь полінома,

i - порядковий номер вершини.

n - Й порядок полінома характеризується $n+1$ вершинами. Точки кривої Без'є визначені виразом:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i I_{n,i}(t),$$

де $0 \leq t \leq 1$,

B_i - функція компонент векторів вершин.

У початковій точці криволінійного сегмента $t = 0, i = 0$:

$$I_{n,0}(0) = \frac{n! \cdot 0^0}{0!(n-1)!} (I - 0)^{n-0} = 1.$$

При значеннях $t = 0, i \neq 0$:

$$I_{n,i}(0) = \frac{n! \cdot 0^i}{i!(n-i)!} (I - 0)^{n-1} = 0.$$

При значеннях $t = 1, i = n$:

$$I_{n,n}(1) = \frac{n! \cdot 0^{n-n}}{n! 1} = 1.$$

При значеннях $t = 1, i \neq n$:

$$I_{n,i}(1) = \frac{n! \cdot t^i}{i!(n-i)!} (1 - 1)^{n-i} = 0.$$

Звідси маємо:

$$P(0) = B_0; P(1) = B_n,$$

тобто вершини B_0 і P_n являють початкову і кінцеву точку криволінійного сегмента. Інтерполяційна функція досягає максимуму при значенні $t = \frac{i}{n}$:

$$I_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right) = \binom{n}{i} \frac{i^i (n-i)^{n-i}}{n^n}.$$

Наприклад, для кубічного полінома

$$I_{3,1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}; I_{3,2}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}.$$

Для побудови кубічного сегмента необхідно задати вершини многокутника і обчислити точки кривої для проміжку $0 \leq t \leq 1$. При спряженні двох кривих Без'є є необхідно задати похідні першого порядку для одержання однакового нахилу і кривини в точці спряження кривих.

5.3. Геометричне моделювання поверхонь

Розглянемо властивості кривих ліній, які використовуються при визначенні поверхонь, на прикладі сферичної поверхні. Характерні криві на її поверхні одержують за допомогою січних площин, що характеризують сферу. Перетнемо сферу радіусом $R = 1$ горизонтальною площиною рівня $z = \cos \phi_1 = a_1$. Результуюча крива перетину є широтою. Її рівняння одержимо шляхом сумісного розв'язання рівнянь сфери і площини. Непараметричне рівняння одиничної сфери має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Лінія перетину визначена рівнянням

$$x^2 + y^2 = 1 - a_1^2.$$

Горизонтально – проекційна площина, яка має точки збігу на осях Ox та Oy , визначені кутом θ , характеризується рівнянням

$$x \sin \theta - y \cos \theta = 0$$

або

$$c x - b y = 0.$$

Рівняння лінії перетину має вигляд:

$$y^2 \left[\left(\frac{b_1}{c_1} \right)^2 + 1 \right] + z^2 = 1.$$

Ділянка сферичної поверхні може бути утворена перетином сфери, наприклад, чотирма площинами рівня. Подання точки одиничної сферичної поверхні має вигляд:

$$x = \cos \theta \sin \phi,$$

$$y = \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = \cos \phi$$

і являє параметричне подання цієї сферичної поверхні. Векторне рівняння сферичної поверхні

$$S(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi) e_1 + (\sin \theta \sin \phi) e_2 + (\cos \phi) e_3,$$

де e_1, e_2, e_3 – одиничні вектори прямокутної системи координат,

S – вектор положення точки на поверхні.

Таку ділянку поверхні можна розглядати як траєкторію руху точки у тривимірному просторі з двома ступенями свободи, що формується зміною параметрів θ і ϕ . Граничні криві як перетини сфери і площин є дугами кіл сферичної ділянки. Форму кожної граничної кривої можна описати дотичними векторами в кінці кожної кривої, у даному випадку — це вісім дотичних векторів в кожній кутовій точці граничних кривих. Якщо відоме рівняння поверхні, кінцеві дотичні вектори можна одержати, диференціюючи рівняння, яке описує поверхню. Для ділянки сферичної поверхні вирази для кінцевих дотичних векторів мають вигляд:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -(\sin \theta \sin \phi) e_1 + (\cos \theta \sin \phi) e_2;$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = (\cos \theta \cos \phi) e_1 + (\sin \theta \cos \phi) e_2 - (\sin \phi) e_3.$$

При описі границі ділянки сферичної поверхні використовують змішані похідні або вектори кривини в кутових точках. Для одиничної сферичної ділянки вектори кривини описуються рівнянням:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right) = -(\sin \theta \cos \phi) e_1 + (\cos \theta \cos \phi) e_2.$$

Модуль вектора кривини

$$\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \phi \partial \theta} \right] = \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \cos^2 \phi} = \cos \phi.$$

Для визначення форми і орієнтації ділянки поверхні можна використовувати нормалі до поверхні, що задаються векторним змішаним добутком двох дотичних векторів. В чотирьох кутових точках вирази для нормалей такі:

$$N = e_1; \quad N = -e_2; \quad N = \frac{e_1 + e_2}{2}; \quad N = -\frac{e_2 + e_3}{2}.$$

Нормалі для ділянки поверхні, спрямовані від центра сфери, мають від'ємні значення. Одинична нормаль до поверхні:

$$n = \frac{N}{|N|}.$$

Рівняння нормалі має вигляд:

$$N = -(\cos \theta \sin^2 \phi) e_1 - (\sin \theta \sin^2 \phi) e_2 - (\sin \phi \cos \phi) e_3.$$

Тоді

$$|N| = \sqrt{\cos^2 \theta \sin^4 \phi + \sin^2 \theta \sin^4 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = \sin \phi,$$

а рівняння одиничної нормалі до поверхні

$$n = -(\cos \theta \sin \phi) e_1 - (\sin \theta \sin \phi) e_2 - (\cos \phi) e_3.$$

При цьому модуль

$$|n| = 1.$$

Для опису поверхні можна використати також скалярний добуток векторів. Для розглядуваної ділянки:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} \frac{\partial S}{\partial \phi} = [(-\sin \theta \sin \phi) e_1 + (\cos \theta \sin \phi) e_2][(\cos \theta \cos \phi) e_1 + (\sin \theta \cos \phi) e_2 - (\sin \phi) e_3] = 0.$$

Оскільки скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то два дотичних вектори взаємно перпендикулярні, тобто на сферичній поверхні широти при $\phi = \text{const}$ перпендикулярні лініям при $\theta = \text{const}$ тобто довготам.

5.3.1. Плоскі поверхні

Розглянемо плоску поверхню, обмежену з чотирьох боків лініями. Такі лінії з'єднують чотири кути, які утворюють границі поверхні. Відомо, що точки на поверхні є функціями двох параметрів, наприклад, в загальному випадку, v та ω . Тоді вираз для плоскої поверхні має вигляд:

$$x = f(v, \omega); \quad (5.2)$$

$$y = q(v, \omega),$$

а чотири граничні лінії описується умовами:

$$v = c_1 \text{ при } c_1 \leq \omega \leq c_2,$$

$$v = c_2 \text{ при } c_1 \leq \omega \leq c_2;$$

$$\omega_1 = c_1 \text{ при } c_1 \leq v \leq c_2,$$

$$\omega_2 = c_2 \text{ при } c_1 \leq v \leq c_2,$$

які визначають квадрат у площині $Ov\omega$. Функціональні залежності (5.2), що описують поверхню, зображають цей квадрат.

Диференціали функцій (5.2)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega.$$

Приклад. Розглянемо поверхню в площині Oxu , задану двома параметричними рівняннями:

$$x = 3v + \omega;$$

$$y = 2v + 3\omega + v\omega$$

з границями, що мають умови:

$$v = 0, 0 \leq \omega \leq 1;$$

$$v = 1, 0 \leq \omega \leq 1;$$

$$\omega = 0, 0 \leq v \leq 1;$$

$$\omega = 1, 0 \leq v \leq 1.$$

Рівняння для границь:

для $v = 0$, $x = \omega$, $y = 3\omega$, звідси $y = 3x$;

для $v = 1$; $x = 3 + \omega$, $y = 2 + 4\omega$, звідси $y = 2 + 4(x - 3) = 4x - 10$;

для $\omega = 0$; $x = 3v$, $y = 2v$, звідси $y = \frac{2}{3}x$;

для $\omega = 1$; $x = 3v + 1$, $y = 3v + 3$, звідси $y = x + 2$.

Частинні похідні, що входять до диференціалів:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 3; \quad \frac{\partial x}{\partial \omega} = 1; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2 + \omega; \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = 3 + v.$$

Нахили границь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = \frac{2+\omega}{3} \text{ при } \omega = \text{const};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} = \frac{3+v}{1} \text{ при } v = \text{const}.$$

При $\omega = 0$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}$; при $v = 0$; $\frac{dy}{dx} = 3$; при $\omega = 1$; $\frac{dy}{dx} = 1$; при $v = 1$; $\frac{dy}{dx} = 4$.

Приклад. Провести аналіз поверхні, поданої рівняннями:

$$v = \frac{y^2}{x}; \quad \omega = \frac{x^2}{y}$$

з границями:

$$v = 1 \quad 1 \leq \omega \leq 3;$$

$$v = 3 \quad 1 \leq \omega \leq 3;$$

$$\omega = 1 \quad 1 \leq v \leq 3;$$

$$\omega = 3 \quad 1 \leq v \leq 3.$$

Рівняння границь:

$$v = 1 \quad x = y^2;$$

$$v = 3 \quad 3x = y^2;$$

$$\omega = 1 \quad y = x^2;$$

$$\omega = 3 \quad 3y = x^2;$$

Значення частинних похідних знайдемо, переписавши рівняння поверхні у вигляді:

$$x = \frac{y^2}{v}; \quad y = \frac{x^2}{\omega}.$$

Значення частинних похідних:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{y^2}{v^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = -\frac{x^2}{\omega^2}; \quad \frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{\partial y}{\partial v} = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = \frac{0}{-\frac{y^2}{v^2}} = 0 \text{ при } \omega = \text{const};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} = \frac{-\frac{x^2}{\omega^2}}{0} = \infty \text{ при } v = \text{const}.$$

Допущення при описі поверхонь.

1. Опис поверхонь ґрунтується на векторно - параметричному представленні:

він є осенезалежним; усуває невизначеність значень нахилу відносно системи координатних осей;

подає однозначне представлення багатозначних поверхонь і просторових кривих ліній;

спрощує представлення просторових кривих в однорідних координатах; допускає використання тривимірних перетворень однорідних координат.

2. Поверхня може бути представлена складеною з окремих кусків, що з'єднується на границях, тобто кусочно - неперервною.

3. Крива лінія може бути представлена векторною функцією одної змінної, тобто крива $P(t) = [x(t) \ y(t)]$ – плоска та $P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$ – просторова крива лінія.

4. Поверхня описується векторною функцією двох змінних

$$P(v, \omega) = [x(v, \omega) \ y(v, \omega) \ z(v, \omega)].$$

Криву лінію на цій поверхні можна виділити фіксацією v або ω , чи рівнянням зв'язку двох параметрів, наприклад, $t(v, \omega) = 0$. Такий зв'язок може визначати також перетин площини з ділянкою поверхні.

5. Точку на поверхні можна задати, встановивши значення двох параметрів $P(v_i, \omega_i)$, або незалежних співвідношень між параметрами

$$\begin{aligned} f(v, \omega) &= 0; \\ q(v, \omega) &= 0. \end{aligned}$$

5.3.2. Білінійні поверхні

При конструюванні білінійних поверхонь приймають:

P – вектор, одержаний за вихідними даними,

Q – вектор, який визначає поверхню, конструйовану за вхідними даними.

Нехай чотири кутові точки поверхні задані у площині Ouv точками $P(0,0)$, $P(0,1)$, $P(1,0)$, $P(1,1)$. Побудуємо білінійну поверхню $Q(v, \omega)$ при $(v, \omega \in [0,1])$ відповідно до рівняння:

$$Q(v, \omega) = P(0,0)(1-v)(1-\omega) + P(0,1)(1-v)\omega + P(1,0)v(1-\omega) + P(1,1)v\omega.$$

Задано значення:

$$v = \omega = 0;$$

$$Q(0,0) = P(0,0) \Rightarrow x_Q = 0; y_Q = 0;$$

$$v = \omega = 1;$$

$$Q(1,1) = P(1,1) \Rightarrow x_Q = 1; y_Q = 1;$$

$$v = \omega = 0.5;$$

$$Q(0.5,0.5) = 0.25 \cdot (P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) + P(1,1)) \Rightarrow x_Q = 0.5,$$

$$y_Q = 0.5;$$

$$v = \omega = 0.25;$$

$$Q(0.25,0.25) = P(0,0) \cdot 0.75^2 + P(0,1) \cdot 0.75 \cdot 0.25 + P(1,0) \cdot 0.25 \cdot 0.75 + \\ + P(1,1) \cdot 0.25^2 = 0.5625(P(0,0) + 0.1875 \cdot P(0,1) + 0.1875 \cdot P(1,0) + 0.625 \cdot \\ \cdot P(1,1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(v, \omega) = x_Q = 0.1875 \cdot 1 + 0.625 \cdot 1 = 0.8125,$$

$$y(v, \omega) = y_Q = 0.1875 \cdot 1 + 0.625 \cdot 1 = 0.8125.$$

Плоска білінійна поверхня у матричній формі:

$$[x(v, \omega), y(v, \omega)] = [(1-v)(1-\omega) \quad (1-v)\omega \quad v(1-\omega) \quad v\omega] \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} P(0,0) \\ P(0,1) \\ P(1,0) \\ P(1,1) \end{bmatrix} = [0.5625 \cdot 0.1875 \cdot 0.1875 \cdot 0.1625] \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,1 \\ 1,0 \\ 1,1 \end{bmatrix}.$$

Просторова білінійна поверхня у матричній формі:

$$[x(v, \omega), y(v, \omega), z(v, \omega)] = [(1-v)(1-\omega) \quad (1-v)\omega \quad v(1-\omega) \quad v\omega] \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} P(0,0) \\ P(0,1) \\ P(1,0) \\ P(1,1) \end{bmatrix},$$

або в матричній формі скороченому вигляді записується так:

$$Q[x(v, \omega), y(v, \omega), z(v, \omega)] = U P,$$

де Q – вектор положення точки на інтерполуючій поверхні;

P – матриця векторів положення кутових точок;

$U = [(1-v)(1-\omega) \quad (1-v)\omega \quad v(1-\omega) \quad v\omega]$.

5.4. Видалення невидимих ліній поверхонь

Побудова моделей об'єктів, процесів та явищ навколишнього середовища передбачає створення насамперед математичних залежностей їх параметрів. Геометрична інтерпретація тої чи іншої моделі здійснюється шляхом використання аналітичних виразів багатовидів дво- та тривимірних просторів і таких їхніх перетворень. Графічні методи дозволяють інтерпретувати задачу геометричними засобами і з допомогою одержаних геометричних форм здійснювати і перетворювати об'єкти проекційної природи. Зміна поведінки досліджуваного об'єкта, процесу чи явища відбувається за законами в кінцевому рахунку геометрії і в більшості випадків може не мати нічого спільного з фізичною суттю досліджуваного об'єкта, процесу чи явища. Інтерактивна комп'ютерна графіка являє основний засіб геометричного моделювання і дає змогу здійснювати візуалізацію різноманітних геометричних об'єктів, використовуючи засоби анімації, демонструвати зміну їх форм і поведінки у часі. Під геометричними об'єктами у прикладній геометрії розуміють геометричні образи, що розглядаються як множини точок, кожна з яких задовольняє конкретним геометричним умовам чи властивостям. Геометричні моделі процесів — це свого роду картинки у вигляді зазначених багатовидів, що розкривають секрети, приховані в математичних формах. Для того щоб створити оптимальну геометричну картинку, необхідно насамперед самому собі створити у просторі уявно певний образ, що втілює ту чи іншу математичну формулу, вираз, що потребує геометричної ілюстрації, а потім відобразити комп'ютерними засобами так, щоб можна було зрозуміти без супроводжуючих пояснень.

Візуалізація виразів типу

$$F(x, y, z) = 0$$

або

$$z = z(x, y)$$

підкоряється загальним правилам побудови зображень просторових об'єктів у площині.

Загальний алгоритм її подають у вигляді послідовності таких дій:

- зафіксувати значення одної змінної;
- присвоїти ряд значень другій змінній;
- за двома змінними обчислити значення функції, які відображаються точками у паралельних площинах проекцій площинах з осями значень функції z , y чи x , перпендикулярними до площини аргументів;
- вибрати нові значення першої змінної величини та знову порахувати ряд значень другої змінної величини;
- після проведення мінімального але достатнього числа перелічених процедур і з'єднання точок між собою можна одержати дискретний каркас поверхні. Такий алгоритм піддається формалізації здебільшого комп'ютерною

реалізацію. *Створення картинки математичного виразу супроводжують, як правило, аналізом, а також ручною побудовою хоча б характерних перерізів.*

Розглянемо, як приклад, алгоритм графічної побудови виразу

$$z - xy = 0.$$

Якщо невідомо, що це гіперболічний параболоїд або коса площина, то неможливо відразу уявити форму цієї поверхні. Надамо такий вигляд цього виразу, перетворивши його так:

$$z = xy.$$

При перерізі цієї поверхні площинами рівня x_i або y_i , одержуємо рівняння прямих ліній, наприклад,

$$z = x_i y.$$

Кожна така пряма повертається навколо осі Ox у площині x_i , а сама площина x_i рухається в напрямку осі Ox паралельно сама собі. Послідовність положень цієї прямої утворює косу площину, утворену з прямих ліній, що закручується навколо осі Ox . Якщо у виразі поміняти місцями x з y , то коса площина буде закручуватись навколо осі Oy . Отже, це двічі лінійчата поверхня.

Можна записати рівняння у вигляді

$$z_i = xy$$

і змінювати положення січних площин рівня z_i . Тоді для кожного значення z_i точки з координатами x, y поверхні будуть належати гіперболам, рівень яких визначається поточним значенням z_i . При $z_i = 0$ гіперболи перетворюються на дві прямі, що перетинаються під прямим кутом.

Можна ще всю поверхню розрізати площиною $x = y$. Одержимо лінію, що є результатом розв'язку системи рівнянь

$$z = xy;$$

$$x = y,$$

тобто виразом цієї лінії є $z = y^2$, тобто параболою. Отже, вершини гіпербол рухаються на параболах.

Розглянемо питання відображення на обмеженій картинці необмежених поверхонь. Можна робити рвані краї. Краще зображувати частину поверхні, яку нібито вкрито в прозорий контейнер: куб, циліндр, чи сферу.

Геометричні об'єкти поділяються на такі, які можна і не можна описати аналітично. У другому випадку використовують наближенні методи, наприклад, апроксимації чи інтерполяції. Тоді розв'язується задача визначення приблизного опису характеристичної ламаної за допомогою різних обчислювальних методів, серед яких найбільш поширеним є метод кубічних та сплайнів, кривих Без'є, Фергюсона, Кунса тощо. У всіх випадках розв'язується задача визначення видимості ліній, що задають поверхню. Вона, в свою чергу, може бути подана в системі координат, прив'язаної до об'єкта, тобто в об'єктному просторі, або у просторі зображення, прив'язаному до системи координат екрана.

5.5. Алгоритми видалення невидимих ліній

Потребу видалення невидимих ліній фігур ілюструє рис. 5.3,

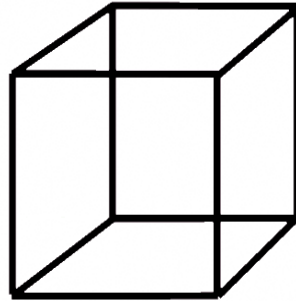
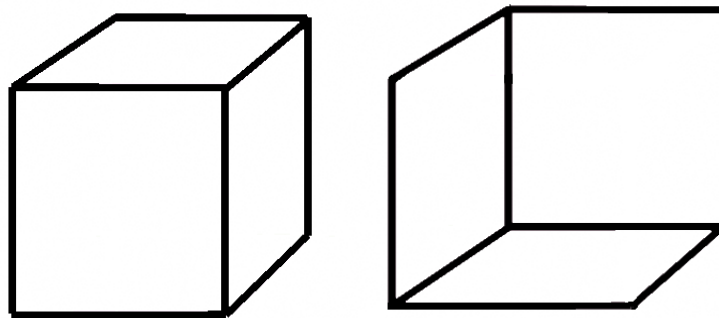


Рисунок 5.3 – Аксонометрична проекція куба

який можна пояснювати по-різному:



Як бачимо, видалення невидимих з заданої точки зору ліній на зображенні об'єкта дає змогу позбуватися від неоднозначності.

Найкращого розв'язання задачі видалення невидимих ліній не існує: в одних випадках потрібні швидкі алгоритми, в інших необхідно генерувати складні зображення, для реалізації яких слід використовувати алгоритми, що працюють повільно і дуже повільно. Існує *взаємозв'язок між швидкістю роботи алгоритму і детальністю його кінцевого результату*: для жодного з алгоритмів не можна досягнути хороших результатів з цих двох показників одночасно.

Усі алгоритми видалення ліній включають сортування. Порядок сортування координат об'єкта не впливає на ефективність того чи іншого алгоритму. Сортування проводяться з урахуванням відстані від тіла, поверхні, ребра чи точки до точки зору. Ідея сортування ліній об'єкта згідно відстані полягає в тому, що чим далі знаходяться об'єкти від точки зору, тим більша ймовірність, що він буде закритий повністю або частково одним з ближче розташованих до точки зору об'єктів.

Після визначення відстаней або пріоритетів по глибині необхідно провести сортування по горизонталі і по вертикалі для визначення факту закриття об'єктом, ближче розташованим до точок зору. Для підвищення ефективності

сортування використовується когерентність сцени, тобто тенденція сталості характеристик сцени в малому.

Алгоритми видалення невидимих ліній класифікують за способом вибору системи координат або простору. Алгоритми, що працюють в об'єктному просторі, мають справу з фізичною системою координат, в якій описані об'єкти. Точність одержуваних результатів у цьому випадку обмежена тільки точністю розрахунків. Одержані зображення можна збільшувати у необмежене число разів. Такі алгоритми ефективні, якщо необхідна висока точність. Алгоритми, що працюють у просторі зображення, прив'язані до системи координат екрана, в якому ці об'єкти візуалізуються. Точність розрахунків обмежена при цьому роздільною здатністю екрана. Одержані в просторі зображення результати, збільшені у декілька разів, не будуть відповідати первісній сцені: можуть, наприклад, не збігтися кінці відрізків тощо.

5.6. Алгоритм плаваючого горизонту

Алгоритм плаваючого горизонту використовується для видалення невидимих ліній поверхонь тривимірного простору, описаних рівняннями таких поверхонь у неявній формі:

$$f(x,y,z) = 0.$$

Такий алгоритм реалізується переважно у просторі зображення. Ідея алгоритму плаваючого горизонту полягає в пониженні тривимірної задачі до двовимірної шляхом використання перетинів поверхні горизонтальними січними площинами рівня. Тоді функція

$$f(x,y,z) = 0$$

відображається множиною кривих, що належать кожній площині рівня

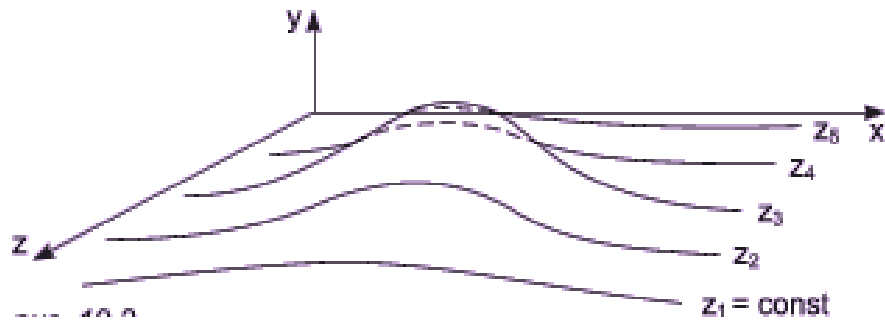
$$y = y(x, z_j)$$

або

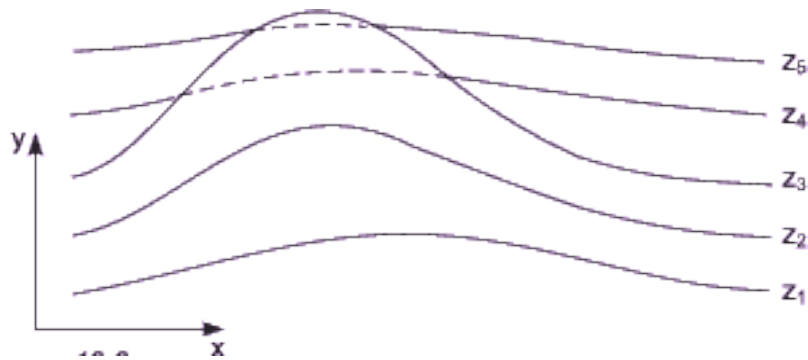
$$x = x(y, z_j)$$

при значенні сліду січної площини $z_j = const$.

Алгоритм припускає однозначність цих функцій. При проєкціюванні поверхні на площину $z=0$ одержуємо проєкцію цієї поверхні з числовими позначками z_j . Такий алгоритм результативно реалізується у графічних редакторах, зокрема, у системі інженерної комп'ютерної графіки Matlab. Поверхні можна візуалізувати, використовуючи фронтальні (рис.5.4а,б,в), профільні (рис.5.4г) площини рівня, або їх сукупність (рис.5.4д). Використання горизонтальних площин рівня дає можливість одержати зображення рельєфу поверхні.



a)

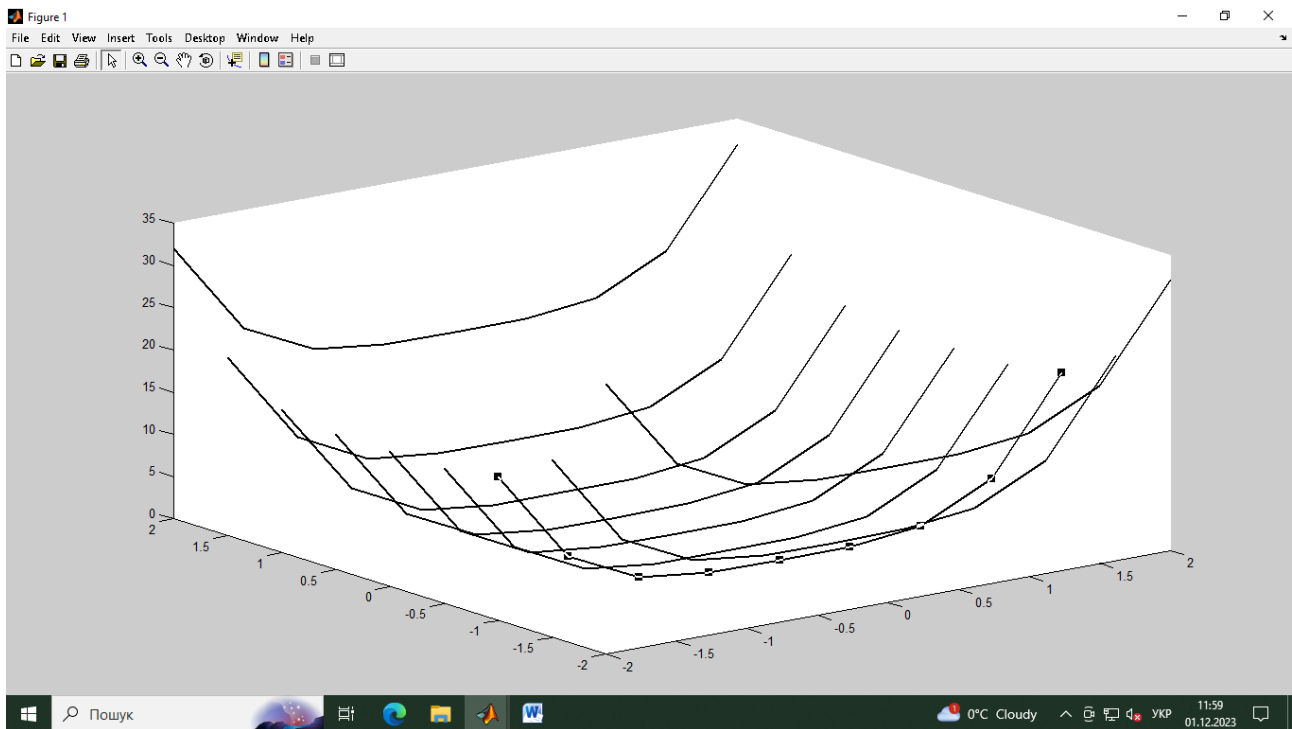


б)

```
>> [X,Y]=meshgrid([-2:0.5:2]);
```

```
>> Z=X.^4+Y.^4;plot3(X,Y,Z)
```

```
>> plot3(Y,X,Z)
```

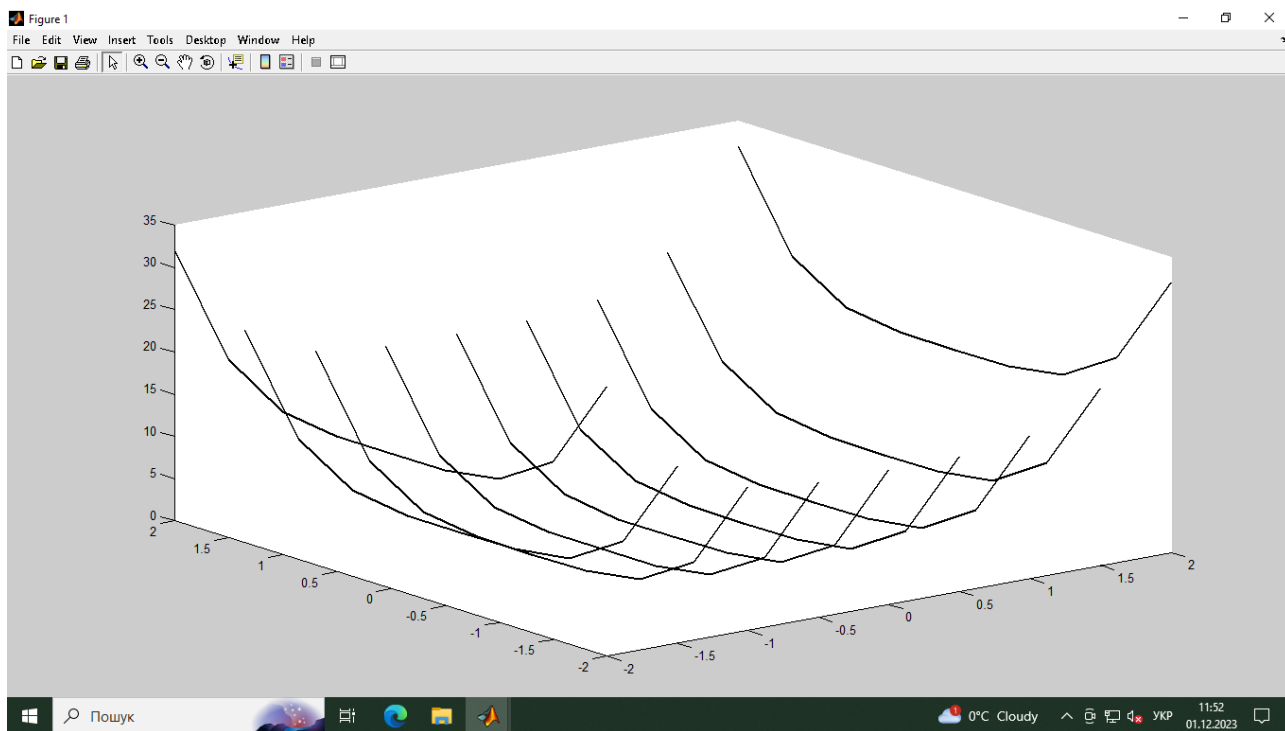


B)

```
>> [X,Y]=meshgrid([-2:0.5:2]);
```

```
>> Z=X.^4+Y.^4;
```

```
>> plot3(X,Y,Z)
```

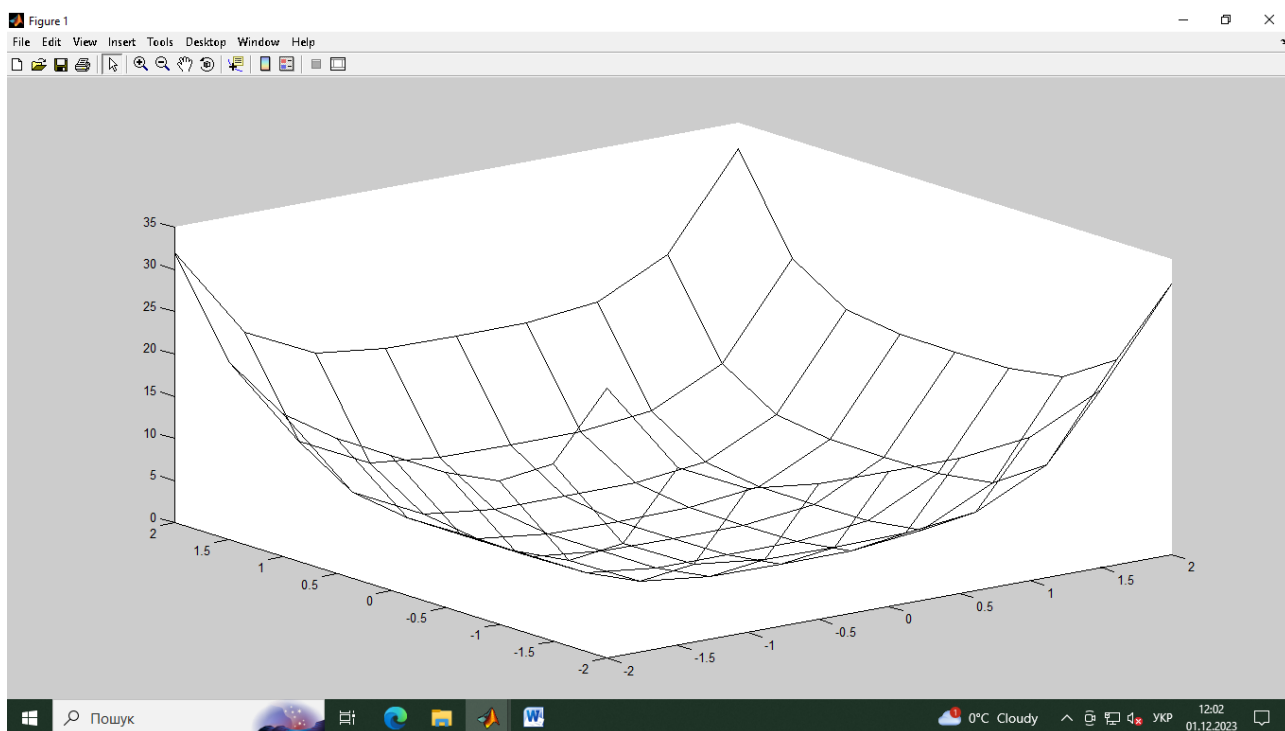


Г)

```
>> [X,Y]=meshgrid([-2:0.5:2]);
```

```
>> Z=X.^4+Y.^4;
```

```
>> plot3(X,Y,Z,'-k',Y,X,Z,'-k')
```



Д)

Рисунок 5.4 – Перетини поверхні січними площинами рівня

Алгоритм впорядковує площини z_j за збільшенням віддалі до них від точки зору. Для кожної площини z_j , починаючи від найближчої, z_1 , будують належну цій площині криву. Згідно з алгоритмом крива z_2 видима при значенні x_i , якщо при цьому значенні x_i значення y_i у площині z_3 більше від усіх значень y_i кривих при значеннях $z < z_2$, як показано на рис. 5.5.

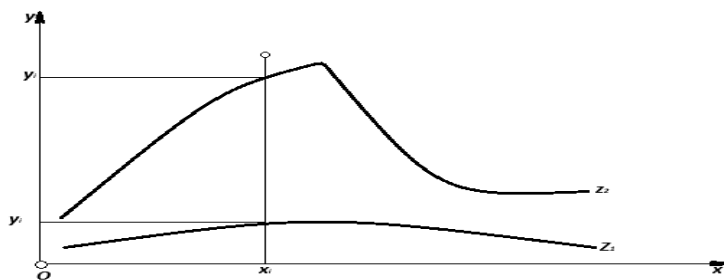


Рисунок 5.5 – Видимість точок кривої

Для зберігання максимальних значень координати y при кожному значенні координати x використовують масив довжиною в число точок по осі Ox в просторі зображення. Тоді значення, розташовані у масиві, є значеннями «горизонту». Цей алгоритм працює щоразу з одною лінією.

Якщо чергова лінія займе нижче положення від попередньої, то модифікований попередній варіант алгоритму повинен включати нижній горизонт, який, плаваючи, опускається вниз в процесі роботи алгоритму. Масив має довжину таку ж і містить найменші значення y для кожного значення координати x . Згідно з модифікованим алгоритмом крива при значенні координати x_i видима, якщо при цьому значенні координати x_i значення координати y_i кривої більше від максимального або менше від мінімального значення координати y_i для всіх попередніх кривих при цьому значенні координати x_i . В протилежному випадку крива невидима.

Значення координати y визначені для кожного значення координати x у просторі зображення. У протилежному випадку використовують лінійну інтерполяцію значень координати y між відомими значеннями для того, щоб заповнити масиви верхнього і нижнього плаваючого горизонту.

Якщо видимість кривої змінюється, то метод з такою інтерполяцією не є коректним. Якщо операція із заповнення масивів проводиться після перевірки видимості, то при переході ділянки AB кривої (рис.5.6) від видимого до невидимого стану точка B з координатами x_{n+k} , y_{n+k} оголошується невидимою.

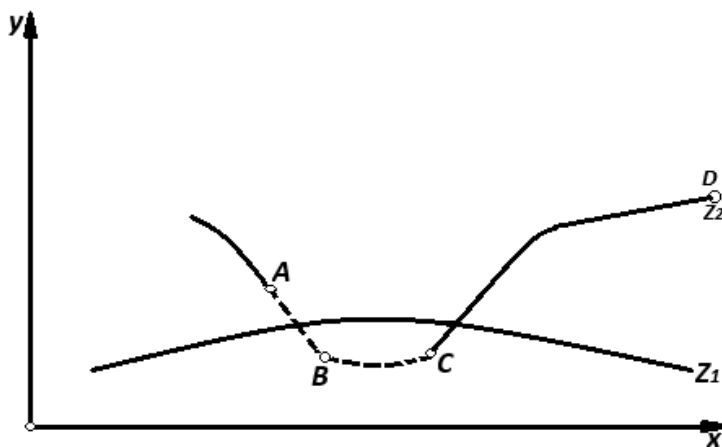


Рисунок 5.6 – Зміна видимості точок кривої

Тоді ділянка AB кривої не зображується і операція із заповнення масивів не здійснюється. Очевидно, що утворюється проміжок між кривими.

Якщо на ділянці CD кривої відбувається перехід від невидимого стану до видимого, то точка D з координатами x_{m+k}, y_{m+k} оголошується видимою, а ділянка кривої CD зображується і здійснюється операція із заповнення масивів. При цьому зображується також невидимий фрагмент кривої як видимий. Крім того, масиви плаваючих горизонтів не будуть містити точних значень координат y , що небажано для візуалізації таких кривих. Отже, необхідно знаходити координати точок перетину сегментів дуг кривих.

Суть методу одержання точок перетину кривих така:

- значення координати x збільшують на одиницю, починаючи з координати x_n або x_m ;
- значення координати y , яке відповідає цій координаті x , в просторі зображення одержують, додаючи Δy до попереднього значення координати y ;
- визначають видимість точки з координатою $x+1, y+\Delta y$.

Якщо ця точка видима, то відповідний піксель активізується, якщо невидима, то піксель не активізується, а x збільшується на одиницю. Такий процес продовжується до значення x_{n+k} або x_{m+k} .

Близький до нього заснований на двійковому пошуку метод визначення точок перетину є таким.

Координати x, y точки перетину двох прямолінійних відрізків, які інтерполюють задану і попередню криву між точками з поточними координатами x_n, y_n та x_{n+k}, y_{n+k} визначаються так:

$$x = x_n \frac{(y_{np} - y_{nc})\Delta x}{\Delta y_p - \Delta y_c},$$

де $y = m(x - x_n) + y_n$,

$$\Delta x = x_{n+k} - x_n;$$

$$\Delta y_p = (y_{n+k})_p - (y_n)_p;$$

$$\Delta y_c = (y_{n+k})_c - (y_n)_c;$$

$$m = \frac{y_{n+k} - y_n}{\Delta x}.$$

Індекси c і p відповідають поточній та попередній лінії. Тоді алгоритм працює іншим чином.

Якщо у заданій площині при заданому значенні координати x відповідне значення координати y кривої більше від максимального або менше від мінімального значення координати y для всіх попередніх кривих при цьому значенні координати x , то задана крива видима. В протилежному випадку – невидима.

Якщо на ділянці від попереднього значення координати x_n до заданого значення координати x_{n+k} видимість ділянки кривої змінюється, то вираховується точка перетину x_i .

Якщо на ділянці з значеннями координат $x_n \dots x_{n+k}$ сегмент кривої видимий, то він відображується; якщо цей сегмент став невидимий, то відображується фрагмент на ділянці з значеннями координат $x_n \dots x_i$, якщо він став видимим, то відображується фрагмент з значеннями координат $x_i \dots x_{n+k}$.

Заповнити масиви верхнього і нижнього плаваючого горизонту.

Одним з недоліків алгоритму є поява зазубрених бокових ребер (рис.5.7).

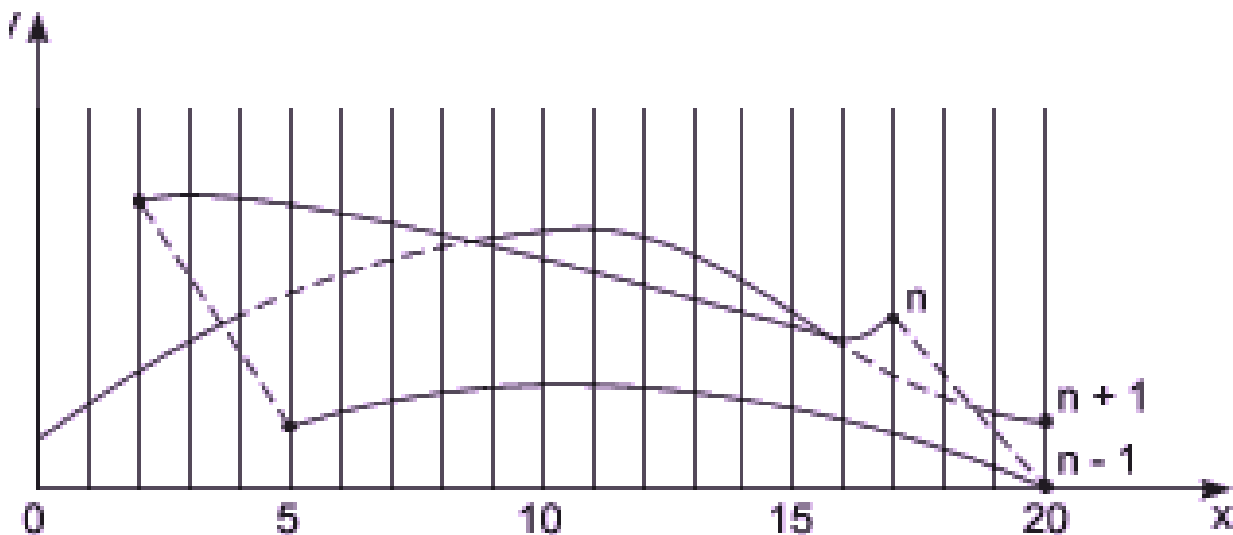


Рисунок 5.7 – Бокові ребра кривих

Після оброблення кривих $n-1$ і n верхній горизонт для значень $x = 0$ і $x = 1$ дорівнює деякому початковому значенню y ; для значень $x = 2 \dots 17$ він дорівнює ординатам кривої n , для значень $x = 18, 19, 20$ – ординатам кривої $n-1$. Нижній

горизонт для значень $x = 0$ і $x = 1$ дорівнює деякому початковому значенню y ; для значень $x = 2, 3, 4$ він дорівнює ординатам кривої n , для значень $x = 5 \dots 20$ – ординатам кривої $n-1$. При опрацюванні кривої $n+1$ алгоритм оголошує її видимою при значенні $x = 4$ як точку нижчого горизонту. Це показано на рис.2.46 суцільною лінією. Так само працює алгоритм справа при значенні $x = 18$ як точки верхнього горизонту. Одержуємо так званий ефект зазубрених бокових ребер.

Для його усунення в масиви верхнього і нижнього горизонтів включають ординати, що відповідають штриховим лініям, створюючи, таким чином, уявні бокові ребра.

Алгоритм, що реалізує ідею бокових уявних ребер, виглядає так:

Опрацювання лівого бокового ребра:

Якщо точка P_n є першою точкою на першій кривій, то запам'ятаємо P_n в якості P_{n-1} і закінчимо заповнення. У протилежному випадку створюємо ребро, що з'єднує P_n і P_{n-1} . Занесемо у масиви верхнього і нижнього горизонтів ординати цього ребра і запам'ятаємо точку P_n в якості P_{n-1} .

Опрацювання правого бокового ребра:

Якщо точка P_n є останньою точкою першої кривої, то запам'ятаємо P_n в якості P_{n-1} і закінчимо заповнення. У протилежному випадку створюємо ребро, що з'єднує P_n і P_{n-1} . Занесемо у масиви верхнього і нижнього горизонту ординати цього ребра і запам'ятаємо точку P_n в якості P_{n-1} .

Для кожної площини $z = \text{const}$ обробити ліве бокове ребро.

Для кожної точки, що належить кривій поточної площини:

Якщо при деякому заданому значенні x відповідне йому значення y у кривої більше від максимального чи менше від мінімального по координаті y для всіх попередніх кривих при цьому ж значенні x , то крива у цій точці видима. У протилежному випадку вона невидима.

Якщо на сегменті від попереднього значення x_n до поточного значення x_{n+k} видимість кривої змінюється, то обчислюється точка перетину x_i . Якщо сегмент кривої від попереднього значення x_n до поточного значення x_{n+k} видимий, то він відображається; якщо він став невидимий, то відображається частина сегмента від значення x_n до значення x_i ; якщо він став видимим, то відображається частина сегмента від значення x_i до значення x_{n+k} .

Заповнити масиви верхнього і нижнього плаваючих горизонтів.

Обробити праве бокове ребро.

Якщо графік функції має особливі ділянки, тобто скачки, гострі ділянки (рис.5.8), то виконання алгоритму може привести до некоректних результатів.

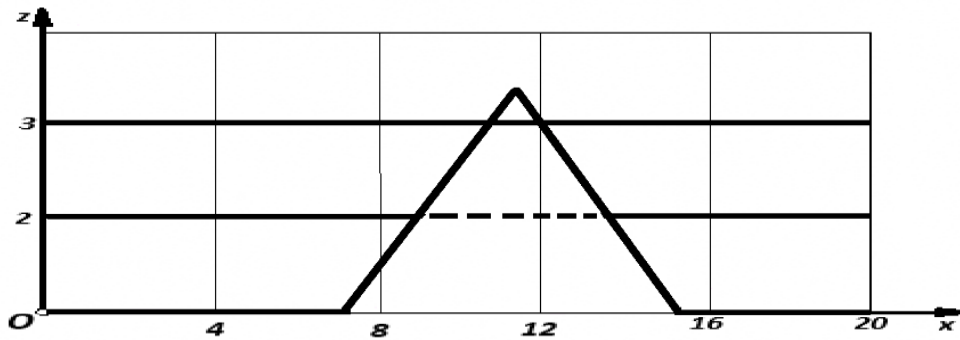


Рисунок 5.8 – Особливі ділянки графіка функції

Наприклад, нижня лінія $z=1$ містить пік. При значенні $x=8$ лінія $z=2$, наступна, оголошується видимою. При значенні $x=12$ ця лінія оголошується невидимою, визначається точка перетину і лінія $z=2$ відображується від значення $x=8$ до точки перетину. На ділянці від значення $x=12$ до значення $x=16$ лінія $z=2$ знову стає видимою, знову визначається нова точка перетину і крива відображується від нової точки перетину до $x=16$.

Наступна лінія $z=3$ при значенні $x=8$ видима. Видима вона також при значенні $x=12$. Отже, ця лінія відображується на ділянці від значення $x=8$ до значення $x=12$, хоч вона закрита піком.

Такий ефект обумовлений тим, що функція задана малим числом точок.

Якщо при побудові графіків функцій зустрічаються вузькі ділянки, то значення цієї функції необхідно вираховувати у більшому числі точок. Якщо, наприклад, таку функцію обчислюють в точках при значеннях $x=0, 2, 4, \dots, 18, 20$ замість $x=0, 4, 8, \dots, 16, 20$, то лінія $z=3$ буде відображена правильно.

Функція

$$F(x, y, z) = 0$$

була розглянута тільки при значеннях $z_j = \text{const}$. Більш наглядними одержані результати бувають, якщо крім постійних значень z приймати постійними теж, наприклад, значення x . При цьому виникає ефект перехресного ортогонального штрихування, що не являє просте накладання двох результатів, одержаних з допомогою січних площин z_j, x_j . Після опрацювання кожної кривої необхідно обробляти ділянки кривих, які знаходяться в ортогональних до неї площинах між поточною кривою і наступною. При опрацюванні обох послідовностей кривих треба використовувати одні і ті ж масиви верхнього і нижнього плаваючих горизонтів. При використанні перехресного ортогонального штрихування відпадає потреба формувати ліве і праве бокові ребра.

Алгоритм плаваючого горизонту.

Гекран – роздільна здатність екрана в горизонтальному напрямі
Векран - роздільна здатність екрана у вертикальному напрямі
Верх – масив з ординатами верхнього горизонту
Низ - масив з ординатами нижнього горизонту
 Y - поточне значення функції $y = f(x, z)$ при $z = \text{const}$
Тп - прапор видимості для поточної точки
Пп - прапор видимості для попередньої точки. Він дорівнює
0 = невидима
1 = видима і знаходиться вище верхнього горизонту
-1 = видима і знаходиться нижче нижчого горизонту
Draw – графічна команда, яка викреслює видимі лінії між точками, заданими їх координатами
 $X_{\min}$, $X_{\max}$ – мінімальна і максимальна абсциси функції
 X_k – прирости вздовж осі Ox
 $Z_{\min}$, $Z_{\max}$ – мінімальна і максимальна аплікати функції
 Z_k – крок між площинами $z = \text{const}$
Dimension Верх (Гекран), Низ (Гекран)
ініціалізація змінних
 $X_l = -1$; $Y_l = -1$; $X_{pr} = -1$; $Y_{pr} = -1$
ініціалізація масивів горизонтів
Верх = 0 Низ = Векран
Обчислення значень функції у кожній площині $z = \text{const}$, починаючи з ближньої до спостерігача площини
Zmax for $z = Z_{\max}$ to $Z_{\min}$ step $-Z_k$
ініціалізація попередніх значень по x та y :
 X_p та Y_p
 $X_p = X_{\min}$
 $Y_p = f(X_{\min}, z)$
якщо використовується видове перетворення, то його треба застосувати до X_p , Y_p , z в даній точці
оброблення лівого бокового ребра
call Обрребра (X_p , Y_p , X_l , Y_l ; Верх, Низ)
call Видимість (X_p , Y_p , Верх, Низ; Пп)
для кожної точки кривої, яка знаходиться в площині $z = \text{const}$
for $x = Y_{\min}$ to $X_{\max}$ step X_k
 $y = f(x, z)$
якщо використовується видове перетворення, то його треба застосувати до даної точки
перевірка видимості поточної точки і заповнення відповідного масиву горизонту
call Видимість (x , y , Верх, Низ; Тп)
if Тп = Пп then
if Тп = 1 або Тп = -1 then
Draw (X_p , Y_p , x , y)
call Горизонт (X_p , Y_p , x , y ; Верх, Низ)

```

else
end if
якщо видимість змінилась, то обчислюється перетин і
заповнюється масив горизонту
else
  if  $T_{\Pi} = 0$  then
    if  $\Pi_{\Pi} = 1$  then
      call Перетин ( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, x, y, \text{Верх}; X_i, Y_i$ )
    else
      call Перетин( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, x, y, \text{Низ}; X_i, Y_i$ )
    end if
    Draw( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, X_i, Y_i$ )
    call Горизонт( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, X_i, Y_i; \text{Верх}, \text{Низ}$ )
  else
    if  $T_{\Pi} = 1$  then
      if  $\Pi_{\Pi} = 0$  then
        call Перетин ( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, x, y, \text{Верх}; X_i, Y_i$ )
        Draw( $X_i, Y_i, x, y$ )
        call Горизонт ( $X_i, Y_i, x, y; \text{Верх}, \text{Низ}$ )
      else
        call Перетин ( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, x, y, \text{Низ}; X_i, Y_i$ )
        Draw ( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, X_i, Y_i$ )
        call Горизонт ( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, X_i, Y_i; \text{Верх}, \text{Низ}$ )
        call Перетин ( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, x, y, \text{Верх}; X_i, Y_i$ )
        Draw ( $X_i, Y_i, x, y$ )
        call Горизонт ( $X_i, Y_i, x, y; \text{Верх}, \text{Низ}$ )
      end if
    else
      if  $\Pi_{\Pi} = 0$  then
        call Перетин ( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, x, y, \text{Верх}; X_i, Y_i$ )
        Draw ( $X_i, Y_i, x, y$ )
        call Горизонт ( $X_i, Y_i, x, y; \text{Верх}, \text{Низ}$ )
      else
        call Перетин ( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, x, y, \text{Верх}; X_i, Y_i$ )
        Draw( $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, X_i, Y_i$ )
      end if
    end if
  end if
end if

```

```

call Горизонт (Хп, Yп, Xi, Yi;
Верх,Низ)
call Перетин (Хп, Yп, x, y, Низ;
Xi, Yi)
Draw (Xi, Yi, x, y)
call Горизонт (Xi, Yi, x, y; Верх,
Низ)
end if
end if
end if
end if
Знову ініціалізувати Пп, Хп, Yп
Пп = Тп
Хп = x
Yп = y
next x
Оброблення правого кінцевого ребра
call Обрребра (x, y, Хпр, Yпр; Верх, Низ)
next z
finish

```

Підпрограма оброблення бокового ребра
subroutine Обрребра (x, y, Хребра, Yребра; Верх, Низ)
якщо Хребра = -1, то зустрілася перша крива і ребро не створюється
if Хребра = -1 then 1
call Горизонт (Хребра, Yребра, x, y; Верх, Низ)
1: Хребра = x
Yребра = y
return

Підпрограма визначення видимості точки
subroutine Видимість (x, y, Верх, Низ; Тп)
видимість точки визначається по відношенню до верхнього і нижнього
плаваючих горизонтів. Якщо точка належить горизонтові, то вона рахується
видимою,
Тп = 0, якщо точка невидима
Тп = 1, якщо вона видима і вище верхнього горизонту
Тп = -1
y < Верх (x) and y > Низ (x) then Тп = 0
if y >= Верх (x) then Тп = 1
if y <= Низ (x) then Тп = -1
return

Підпрограма заповнення масивів плаваючих горизонтів
subroutine Горизонт (X1, Y1, X2, Y2; Верх, Низ)
Ця підпрограма використовує лінійну інтерполяцію для заповнення масивів
горизонтів між X1 X2

Max (a, b) визначає більше з a і b

Min (a, b) визначає менше з a і b

```
    перевірка вертикальності нахилу
    if (X2 - X1) = 0 then
        Верх (X2) = Max (Верх (X2), Y2)
        Низ (X2) = Min (Низ (X2), Y2)
    else
        Нахил = (Y2 - Y1)/(X2 - X1)
        for x = X1 to X2 step 1
            y = Нахил * (x - X1) + Y1
            Верх (x) = Max(Верх (x), y)
            Низ (x) = Min(Низ (x), y)
        next x
    end if
    return
```

Підпрограма обчислення перетину поточної кривої з горизонтом

subroutine Перетин (X1, Y1, X2, Y2), Масив; Xi, Yi)

Ця процедура обчислює перетин двох відрізків прямих

Масив містить інформацію про відповідний горизонт

Sign - функція, яка приймає значення -1,0, 1, якщо знак її аргумента <0, =0, >0

```
    перевірка безконечності нахилу
    if (X2 - X1) = 0 then
        Xi = X2
        Yi = Масив (X2)
    else
        обчислення перетину
        обхід починається з лівої точки
        перетин вважається знайденим, якщо змінюється знак різниці
        значень y
        Нахил = (Y2 - Y1)/(X2 - X1)
        Ysign = Sign (Y1 + Нахил - Масив (X1 + 1))
        Csign = Ysign
        Yi = Y1 + Нахил
        Xi = X1 + 1
        while (Csign = Ysign)
            Yi = Yi + Нахил
            Xi = Xi + 1
            Csign = Sign (Yi - Масив (Xi))
        end while
        вибирається ближче ціле число
        if |Yi - Нахил - Масив (Xi - 1)| <= |Yi - Масив (Xi)| then
            Yi = Yi - Нахил
            Xi = Xi - 1
        end if
    end if
```

return.

Алгоритм плаваючого горизонту справляється з парою прямих чи кривих ліній, які належать одній профільній площині рівня $z=const$. Однак порядок оброблення цих ліній впливає на кінцевий результат.

Перед візуалізацією до поверхні слід застосувати видове перетворення. Поверхню спочатку повертають на 30° навколо осі Oy , далі на 15° навколо осі Ox . Результат проєціюється на площину $z=0$ з центра проєкцій, який знаходиться у безконечності на осі $+Oz$. Для приведених умов матриця розміром 4×4 результуючого перетворення однорідних координат має вигляд:

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0.129 & 0 & 0 \\ 0 & 0.966 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.224 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одержані результати обчислень кожної лінії, складової графіка функції, візуалізуються у цілочисельну сітку в діапазонах $0 \leq x \leq 100$ та $0 \leq y \leq 50$, тобто в координати двовимірного простору зображення.

5.7. Алгоритм Робертса

5.7.1. Принцип роботи алгоритму Робертса

Алгоритм Робертса являє математичний метод вилучення невидимих ліній, що працює в об'єктному просторі. Алгоритм вилучає насамперед з кожного геометричного тіла ребра і грані, які екрановані самим тілом. Потім кожне з видимих ребер кожного тіла порівнюється з кожним тілом, що залишилося, для визначення того, яка його частина, якщо є така чи такі, екрануються цими тілами.

В алгоритмі Робертса прийнято допущення, щоб всі тіла були опуклими. Неопуклі тіла потрібно розчленувати на опуклі. Випуклий багатогранник, яким подається тіло, являє набір площин, що перетинаються. Рівняння площини загального положення подається в алгоритмі Робертса у загальному вигляді

$$ax + by + cz + d = 0$$

і у матрицевому вигляді

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0$$

або

$$[x \ y \ z \ 1] [P]^T = 0,$$

де $[P]^T = [a \ b \ c \ d]$.

Використовуючи наведене рівняння, випукле тіло подають матрицею цього тіла, що являє коефіцієнти рівнянь площин, які утворюють грані тіла:

$$[V] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Якщо точка

$$[S] = [x \ y \ z \ 1]$$

належить площині, то в алгоритмі

$$[S] \ [P]^T = 0.$$

Якщо ж точка $[S]$ не належить площині, то знак цього скалярного добутку показує, по який бік від площини розташована точка $[S]$. В алгоритмі прийнято, що точки, що лежать всередині тіла, дають додатній скалярний добуток.

Приклад. Шість площин, 1, ... 6, як грані у вигляді квадратів, що обмежують одиничний куб з центром у початку координат (рис.5.9),

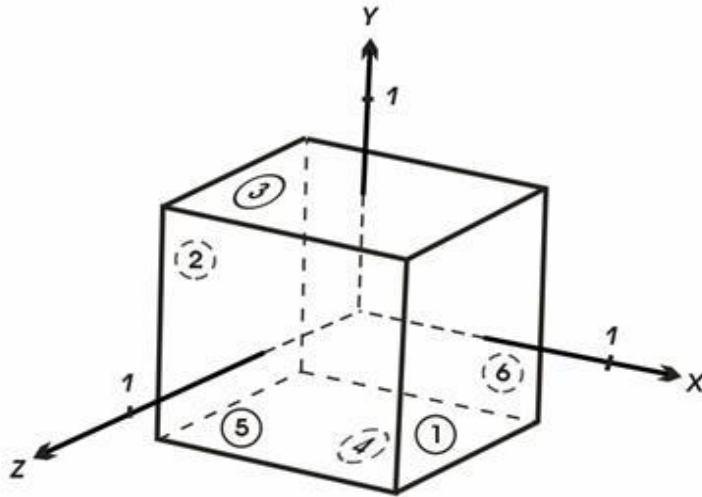


Рисунок 5.9 – Грані одиничного куба

описуються такими рівняннями:

$$x_1 = 1/2, x_2 = -1/2, y_3 = 1/2, y_4 = -1/2, z_5 = 1/2, z_6 = -1/2.$$

Наприклад, рівняння правої площини має вигляд:

$$2 x_1 - 1 = 0.$$

Повна матриця тіла

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

За алгоритмом матрицю треба перевірити з допомогою одної з точок, яка знаходиться всередині тіла, на правильність вибору знаків кожного рівняння площини. Тобто, якщо знак скалярного добутку для площини менший від нуля,

то відповідне рівняння площини треба помножити на мінус одиницю. Візьмемо точку всередині куба з координатами $x=y=z=1/4$, тобто

$$[S] = [1/4 \ 1/4 \ 1/4 \ 1] = [1 \ 1 \ 1 \ 4].$$

Скалярний добуток вектора на матрицю об'єму

$$[S][V] = [1 \ 1 \ 1 \ 4] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = [-2 \ 6 \ -2 \ 6 \ -2 \ 6 \ 1].$$

Коефіцієнти першого, третього і п'ятого рівнянь площин від'ємні. Помноживши ці рівняння на мінус одиницю, одержимо матрицю тіла для одиничного куба:

$$[V] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

У наведеному прикладі відома точка всередині куба, що дозволило експериментально шляхом перемноження матриць перевірити коректність рівнянь площин. Тобто рівняння, наприклад, першої площини замість

$$2x_1 - 1 = 0$$

треба записати у вигляді

$$-2x_1 + 1 = 0.$$

Для загальних випадків розроблені способи перевірки рівнянь площини.

За одним із способів використовують для визначення коефіцієнтів a, b, c три точки з координатами (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) :

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = -1;$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = -1;$$

$$ax_3 + by_3 + cz_3 = -1$$

або

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

тобто

$$[X][C] = [D].$$

Розв'язок цього рівняння дає значення коефіцієнтів

$$[C] = [X]^{-1}[D].$$

За другим способом використовують вектор нормалі до площини

$$n = ai + bj + ck,$$

де i, j, k – одиничні вектори осей Ox, Oy, Oz .

Тоді рівняння площини набуде вигляду

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Коефіцієнт d можна визначити за допомогою відомої довільної належної площині точки з координатами (x_1, y_1, z_1) :

$$d = -(ax_1 + by_1 + cz_1).$$

Відповідно до алгоритму для зменшення числа обчислень рекомендовано використовувати багатокутники з числом сторін, більшим від трьох, які можуть бути також неопуклими і неплоскими.

Для знаходження коефіцієнтів рівнянь площини з плоскими багатокутниками і найкращого наближення для неплоских багатокутників розроблений метод Ньюела:

$$a = \sum_{i=j}^n (y_i - y_j)(z_i + z_j);$$

$$b = \sum_{i=j}^n (z_i - z_j)(x_i + x_j);$$

$$c = \sum_{i=j}^n (x_i - x_j)(y_i + y_j);$$

$$d = -(ax_n + by_n + cz_n),$$

де n = число величин.

Приклад. Плоский чотирикутник має координати вершин:

$$V_1(1, 0, 0), V_2(0, 1, 0), V_3(0, 0, 1) \text{ і } V_4(1, -1, 1).$$

Використаємо вершини, наприклад, V_1, V_2, V_4 для визначення значень коефіцієнтів a, b, c :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Рівняння площини має вигляд

$$-x - y - z + 1 = 0$$

або

$$x + y + z - 1 = 0.$$

За другим способом рівняння нормалі до площини

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

одержимо, використовуючи векторний добуток пари векторів, що є суміжні ребра однієї з вершин, наприклад, V_1 :

$$n = V_1 V_2 * V_1 V_3 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = i + j + k.$$

Знайдемо значення постійного члена d з використанням координат точки, наприклад, V_4 :

$$d = -(1 * 1 - 1 * 1 + 1 * 1) = -1.$$

Рівняння площини знову має вигляд:

$$x + y + z - 1 = 0.$$

За методом Ньюела для цього прикладу при $n = 4$:

$$a = (y_1 - y_2)(z_1 + z_2) + (y_2 - y_3)(z_2 + z_3) + (y_3 - y_4)(z_3 + z_4) + (y_4 - y_1)(z_4 + z_1) = \\ = (-1)(0) + (1)(1) + (1)(2) + (-1)(1) = 2;$$

$$b = (z_1 - z_2)(x_1 + x_2) + (z_2 - z_3)(x_2 + x_3) + (z_3 - z_4)(x_3 + x_4) + (z_4 - z_1)(x_4 + x_1) = \\ = (0)(1) + (-1)(0) + (0)(1) + (1)(2) = 2;$$

$$c = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_1)(y_4 + y_1) = \\ = (1)(1) + (0)(1) + (-1)(-1) + (0)(-1) = 2.$$

З урахуванням значення V_4 знайдемо відповідне значення

$$d = -(2 - 2 + 2) = -2.$$

Тоді рівняння площини буде мати вигляд:

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Приклад для майже плоских багатокутників. Майже плоский багатокутник має такі координати вершин:

$$V_1(1, 0, 0), V_2(0, 1, 0), V_3(0, 0, 1) \text{ і } V_4(1.1, -1, -1).$$

Нормалі в кожній вершині:

$$n_1 = V_1 V_2 * V_1 V_4 = i + j + 0.9k;$$

$$n_2 = V_2 V_3 * V_2 V_1 = i + j + k;$$

$$n_3 = V_3 V_4 * V_3 V_2 = i + 1.1j + 1.1k;$$

$$n_4 = V_4 V_1 * V_4 V_3 = i + 1.1j + k.$$

Відповідно до знайденого середнього арифметичного рівняння нормалі має такий вигляд:

$$n = i + 1.05j + k.$$

З урахуванням значення V_1 значення

$$d = -1.$$

Наближене рівняння площини має вигляд:

$$x + 1.05y + z - 1 = 0.$$

За методом Ньюела одержимо такий самий результат:

$$a = (-1)(0) + (1)(1) + (1)(2) + (-1)(1) = 2;$$

$$b = (0)(1) + (-1)(0) + (0)(1.1) + (1)(2.1) = 2.1;$$

$$c = (1)(1) + (0)(1) + (-1.1)(-1) + (0.1)(-1) = 2.$$

Вирахувавши значення коефіцієнта d з використанням, наприклад, V_1 , одержимо таке ж рівняння площини.

Перед початком роботи алгоритму використовують тривимірні перетворення. Матриці тіл для об'єктів перетвореної сцени можна одержати або перетворенням матриць тіл, або обчисленням нових матриць тіл з використанням перетворених вершин таких тіл.

Приймаємо $[B]$ як матрицю однорідних координат вершин тіла, $[T]$ – матрицю розміром 4×4 перетворення вигляду тіла. Тоді перетворена матриця вершин тіла

$$[BT] = [B] [T].$$

Використання рівняння площини

$$[X] [C] = [D]$$

дає змогу одержати рівняння площин, що обмежують тіло:

$$[B] [V] = [D],$$

причому $[D]$ – нульова матриця.

Рівняння перетворених площин є добуток перетворених вершин $[BT]$ і перетвореної матриці тіла $[VT]$:

$$[BT] [VT] = [D].$$

Прирівнюючи ліві частини останніх двох рівнянь, маємо:

$$[BT] [VT] = [B] [V]$$

або

$$[B] [T] [VT] = [B] [V].$$

Помноживши на $[T]^{-1}$, маємо

$$[VT] = [T]^{-1} [V].$$

Отже, перетворена матриця тіла є добутком матриці тіла і оберненої матриці перетворення вигляду.

Приклад. Розглянемо перенесення одиничного куба з центром у початку координат на три одиниці в додатному напрямку осі Ox .

Матриця перетворення $[T]$ і обернена до неї матриця $[T]^{-1}$ є :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворена матриця тіла перенесеного куба

$$[VT] = [T]^{-1}[V] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 7 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, перенесення одиничного куба з центром у початку координат на три одиниці вправо розташовує його ліву грань на значення $x=2.5$, а праву – $x=3.5$. Маємо, що перший стовпець матриці $[VT]$ містить коефіцієнти рівняння площини правої грані

$$-2x + 7 = 0$$

або

$$x = 3.5,$$

а другий стовпець – лівої грані

$$2x - 5 = 0$$

або

$$x = 2.5.$$

Раніше точка $[S] = [1 \ 1 \ 1 \ 4]$ знаходилась всередині неперетвореного тіла куба, тобто $[S] [V] \geq 0$. У даному прикладі точка $[S]$ знаходиться зовні перенесеного тіла, зліва від лівої грані куба, адже для лівої грані маємо $x=2.5$ при значенні $x_5 = 1/4$.

Знайдемо добуток:

$$[S] [VT] = [1 \ 1 \ 1 \ 4] \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 7 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [26 \ -18 \ 2 \ 6 \ 2 \ 6].$$

Отже, другий елемент матриці, який відповідає лівій грані, від'ємний і дорівнює -18 . Тобто, точка знаходиться поза тілом.

Перетворимо точку

$$[ST] = [S][T] = [1 \ 1 \ 1 \ 4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [13 \ 1 \ 1 \ 4] = [3.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 1].$$

Скалярний добуток

$$[ST] [VT] = [2 \ 6 \ 2 \ 6 \ 2 \ 6]$$

вказує на розташування перетвореної точки всередині перетвореного тіла куба.

На основі властивостей безконечного простягання площини, якій належить грань одиничного куба, і від'ємного скалярного добутку точки на перетворену матрицю тіла ґрунтується метод визначення граней, що екрануються тілом. Підкреслимо, що від'ємний скалярний добуток дає площина, стовпець матриці тіла, відносно якої точка знаходиться зовні. Тобто у приведеному прикладі це ліва площина (грань) у другому стовпці перетвореної матриці геометричного тіла $[VT]$ і неперетворена точка $[S]$. Якщо глядач на рис.5.10 знаходиться у безконечності на додатній півосі Oz і дивиться на куб у початок тривимірної системи координат, точку O , то його погляд направлений в бік від'ємної півосі Oz . **Тоді** на фронтальній проекції куба грані 1,2,5,6 належать сторонам квадрата.

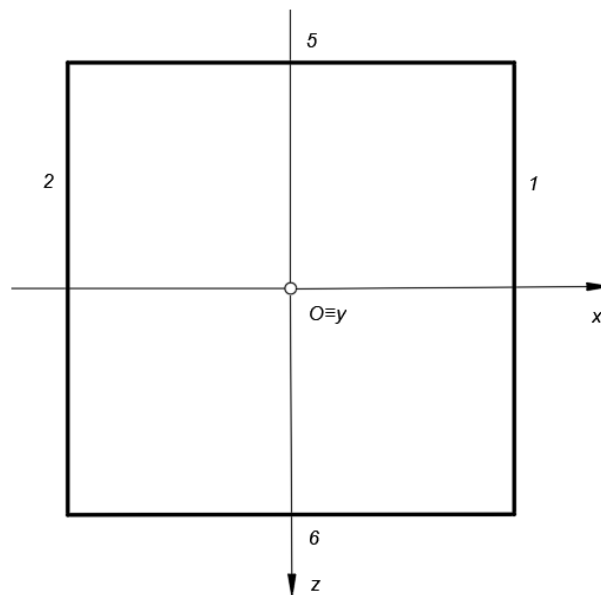


Рисунок 5.10 – Фронтальна проекція куба

Вектор такого напрямку $[E] = [0 \ 0 \ -1 \ 0]$ одночасно являє образ точки, що належить безконечності від'ємної півосі Oz . Тобто $[E]$ являє довільну точку площини $z = -\infty$: $x, y, -\infty$. Тому скалярний добуток $[E]$ на стовпець, що відповідає площині в матриці тіла, від'ємний, а сама точка $[E]$ знаходиться по від'ємний бік цієї площини. Отже, такі площини невидимі з точки спостереження, що належить площині $z = -\infty$, а відповідна їй пробна точка у площині $z = -\infty$ екранується тілом.

Такі площини називають нелицьовими, а відповідні їм грані – задніми. Тобто, добуток

$$[E] [V] < 0$$

є умовою того, що площини нелицеві, а грані задні.

Описаний метод являє найпростіший алгоритм видалення невидимих поверхонь для тіл, що є поодинокі випуклі багатогранники і називається в комп'ютерній графіці відкиданням задніх площин. Для опуклих багатогранників число граней зменшується майже наполовину.

Приклад. На рис. 5.10 для одиничного куба, що знаходиться з центром в початку координат, точка спостереження $[E] = [0\ 0\ 1\ 0]$ належить додатній півосі Oz , а погляд спрямований до початку системи координат.

Скалярний добуток

$$[E][V] = [0\ 0\ -1\ 0] \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0\ 0\ 0\ 0\ 2\ -2].$$

Від'ємне число у шостому стовпці показує, що грань з цим номером невидима.. Нулі в першому...четвертому стовпцях відповідають паралельним напрямкам погляду площинам. Перетворення вигляду можна застосувати до тіла так, щоб точка спостереження залишалась фіксованою.

За іншим способом нерухомим залишається тіло. Тоді еквівалентну точку спостереження і напрям погляду одержимо множенням матриці точки спостереження справа на матрицю, обернену до матриці перетворення вигляду.

Приклад нелицьової площини з врахуванням перетворення вигляду. Куб з центром у початку координат, повернутий на 45° навколо осі Oy , має такі матриці:

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[R_y]^{-1} = [R_y]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворена матриця тіла

$$[VT] = [R_y]^{-1}[V] = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Якщо дивитись у початок системи координат з точки спостереження $[0010]$, що належить додатній півосі Oz , то напрям погляду або пробна точка задаються вектором $[E] = [0\ 0\ -1\ 0]$.

Скалярний добуток

$$[E] [VT] = [-2/\sqrt{2}\quad 2/\sqrt{2}\quad 0\ 0\quad 2/\sqrt{2}\ -2/\sqrt{2}].$$

Отже, перша і шоста площини, яким відповідають ліва і задня грані початкового положення куба, невидимі.

Порівнявши одержаний результат з перетвореною матрицею тіла $[VT]$, бачимо, що, коли тіло перетворене і зафіксований напрям погляду, то пошук від'ємних членів у скалярному добутку координат пробної точки на перетворену матрицю тіла тотожний пошуку додатних членів третього рядка перетвореної матриці тіла $[VT]$.

Еквівалентна точка спостереження для неперетвореного тіла, що відповідає повороту на 45° навколо осі Oy ,

$$[0\ 0\ 1\ 0][R_y]^{-1} = [-1/\sqrt{2}\quad 0\quad 1/\sqrt{2}\quad 0] = (1/\sqrt{2}) [-1\ 0\ 1\ 0]$$

знаходиться в безконечності.

Еквівалентний напрям погляду і пробна точка

$$[ET] = [E] [R_y]^{-1} = [0\ 0\ -1\ 0][R_y]^{-1} = (1/\sqrt{2}) [1\ 0\ -1\ 0].$$

Скалярний добуток

$$[ET] [V] = (1/\sqrt{2}) [-2\ 2\ 0\ 0\ 2\ -2]$$

показує, що перша і шоста площини нелицьові.

Після визначення нелицьових площин необхідно визначити нелицьові відрізки, які утворюються в результаті перетину пари нелицьових площин. У передостанньому прикладі шоста грань була закрыта п'ятою гранню і являє нелицьову площину, проте нелицьові відрізки відсутні. В останньому прикладі утворене перетином першої та шостої площин ребро є нелицьовим.

Після зазначеного першого етапу видалення нелицьових відрізків необхідно провести аналіз, чи існують такі відрізки, які екрануються іншими тілами. Для цього кожний відрізок чи ребро, що залишилося, треба порівняти з другими тілами сцени. Використання у цьому випадку пріоритетного сортування, так званого z -сортування, а також так званого мінімаксного або габаритного з прямокутною оболонкою тестів дає змогу вилучити цілі групи, так звані кластери, відрізків і тіл. Наприклад, якщо всі тіла в сцені впорядковані у деякому пріоритетному списку, що використовує значення координати z ближніх вершин для визначення відстані до спостерігача, точки спостереження, то жодне тіло з списку, в якого найближча вершина знаходиться далі від спостерігача, ніж найвіддаленіша з кінцевих точок ребра, не може закривати це ребро. Більше того, жодне з тіл, що залишилися, прямокутна оболонка якого розташована повністю справа, зліва, над чи під ребром, не може екранувати це ребро.

Для порівняння деякого відрізка P_1P_2 з тілом використовують його параметричне подання:

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1) t; \quad 0 \leq t \leq 1$$

або

$$v = s + dt,$$

де v – вектор точки відрізка,

s – початкова точка,

d – напрям відрізка.

Якщо відрізок невидимий, то потрібно знайти ті значення параметра t , для яких він невидимий. Для цього формують другий параметричний відрізок від точки $P(t)$ до точки спостереження:

$$Q(a, t) = u = v + g a = s + d t + g a;$$

де $0 \leq t \leq 1, a > 0$ – параметри.

Значення параметра t вказує точку відрізка $P(t)$, значення параметра a вказує точку відрізка, який проведений від точки $P(t)$ до точки спостереження. Значення a приймають більшим нуля, бо тіла, які екранують $P(t)$, можуть знаходитися в тій частині площини, що розташована між відрізком $P(t)$ і точкою спостереження.

Наприклад, маємо відрізок з вершинами $P_1(-2, 0, -2)$ і $P_2(2, 0, -2)$, точка спостереження розташована у безконечності на додатній півосі Oz . Параметричне подання відрізка

$$P(t) = v = s + d t = [-2 \ 0 \ -2 \ 1] + [4 \ 0 \ 0 \ 0]t.$$

Вектор спостереження $g = [0010]$.

Параметричний відрізок

$$Q(a, t) = s + d t + g a = [-2 \ 0 \ -2 \ 1] + [4000] t + [0010] a.$$

Наприклад, для $t=0.5, a=3$:

$$P(0.5) = v = [-2 \ 0 \ -2 \ 1] + [4000] (0.5) = [0 \ 0 \ -2 \ 1].$$

Ця точка належить відрізку P_1P_2 і є точкою його перетину з віссю Oz при значенні $z = -2$.

При $a = 3$ маємо, що

$$Q(3, 0.5) = [00-21] + [0010] 3 = [0011]$$

і являє деяку точку осі Oz .

Якщо точка розташована всередині тіла, то вона невидима, а скалярний добуток цієї точки на матрицю тіла додатній. Для визначення цієї частини відрізка h , що екранується тілом, в алгоритмі Робертса знаходять ті значення a і t , для яких скалярний добуток $Q(a, t) = u$ на матрицю тіла додатній:

$$h = u [VT] = s [VT] + t d[VT] + a g [VT] > 0$$

при значеннях $0 \leq t \leq 1, a \geq 0$.

Якщо всі складові h для деяких значень параметрів t і a невід'ємні, то при цих значеннях відрізок екранується тілом.

В алгоритмі вводяться позначення

$p = s [VT]; q = d [VT]; w = g [VT],$
 щоб записати для j - го стовпця матриці тіла умову у вигляді

$$h_j = p_j + tq_j + aw_j > 0$$

 при значеннях $0 \leq t \leq 1, a \geq 0$.

Ці умови мають використовуватися при всіх значеннях j , тобто для всіх площин, що обмежують тіло. Отже, скалярний добуток може бути більшим або меншим від нуля. При цьому граничний випадок між видимістю та невидимістю є за умови $h_j = 0$. При значенні h_j , що відрізняється від нуля, точка знаходиться всередині або зовні тіла. При $h_j = 0$ точка належить площині. Приймаючи $h_j = 0$ для всіх площин, одержимо систему рівнянь відносно a і t , які мають задовільнятися одночасно.

Результат одержуємо розв'язанням можливих пар рівнянь системи для знаходження усіх значень a і t , при яких змінюється видимість відрізка.

Число n розв'язків при числі j рівнянь

$$n = \frac{(j-1)}{2}.$$

Кожний розв'язок в діапазоні $0 \leq t \leq 1, a \geq 0$ підставляють у решту рівнянь для перевірки виконання умови $h \geq 0$. Пошук коректних розв'язків відбувається для визначення мінімального значення серед максимальних значень параметра t , тобто t_{minmax} , і максимального значення серед мінімальних значень параметра t , тобто t_{maxmin} . За алгоритмом відрізок невидимий, якщо виконується умова:

$$t_{maxmin} < t < t_{minmax}.$$

Приклад. Нехай відрізок $P_1[-20-21] \dots P_2[20-21]$ частково екранований одиничним кубом з центром у початку координат. Рівняння відрізка

$$\begin{aligned}
 P(t) &= v = [-20-21] + [4000] t; \\
 s &= [-20-21]; \\
 d &= [4000].
 \end{aligned}$$

Вектор спостереження $g = [0010]$.

Прийmemo куб не перетвореним, тоді

$$[VT] = [V].$$

Складові частини відрізка h , що екранується тілом:

$$\begin{aligned}
 p &= s [VT] = [5-311 \ 5-3]; \\
 g &= d[VT] = [-8 \ 8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]; \\
 w &= g[VT] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2 \ 2].
 \end{aligned}$$

Відповідно до умови

$$h_j = p_j + tg_j + aw_j > 0$$

одержуємо шість нерівностей, по одній на кожному з шести площин, яким належать грані куба:

- *1 $5-8t+0 a > 0;$
- *2 $-3+8t+0 a > 0;$
- *3 $1+0t+0 a > 0;$
- *4 $1+0t+0 a > 0;$
- *5 $5+0t-2 a > 0;$
- *6 $-3+0t+2 a > 0.$

Третя і четверта умови завдань виконуються, тобто відрізок розташований між двома паралельними площинами, яким належать третя і четверта грані куба. Перепишемо решту чотири нерівності як рівності і одержимо розв'язки:

$$t = 5/8; t = 3/8; a = 5/2; a = 3/2.$$

Заштрихуємо області відповідно до нерівностей. Тоді відповідні області є можливі розв'язки. Очевидно, що всі складові нерівності $h_j > 0$ задовольняються всередині області:

$$t_{\max\min} = 3/8; t_{\min\max} = 5/8.$$

Відрізок невидимий в діапазоні $3/8 < t < 5/8$ і видимий при $0 \leq t \leq 3/8$ і $5/8 \leq t \leq 1$. При цих значеннях t координати відрізка

$$\begin{aligned} P(3/8) &= [-20-21] + [4000](3/8) = [-1/20-21] \\ P(5/8) &= [-20-21] + [4000](5/8) = [1/20-21], \end{aligned}$$

тобто відрізок закритий п'ятою і шостою гранями.

У наведеному прикладі маємо два значення t , що дає можливість вибрати $t_{\max\min}$ і $t_{\min\max}$. Розглянемо приклад перевірки екранування тіла відрізка при одному значенні t . Припустимо, що відрізок $P_1[1 \ 0-11] \dots P_2[0 \ 0-11]$ екранується кубом з центром у початку системи координат.

$$\begin{aligned} P(t) = v &= [10-11] + [-1000] t; \\ s &= [10-11]; \\ d &= [-1000]; \\ g &= [0010]. \end{aligned}$$

Величини p, q, w для неперетвореного куба $[VT] = [V]$:

$$\begin{aligned} p &= s [VT] = [-13113-1]; \\ q &= d [VT] = [2-20000]; \\ w &= g [VT] = [0000-22]. \end{aligned}$$

Система нерівностей за умови $h_j > 0$:

$$*1 \quad -1+2t + 0 a > 0;$$

$$\begin{aligned}
&*2 \quad 3 - 2t + 0a > 0; \\
&*3 \quad 1 + 0t + 0a > 0; \\
&*4 \quad 1 + 0t + 0a > 0; \\
&*5 \quad 3 + 0t - 2a > 0; \\
&*6 \quad -1 + 0t + 2a > 0.
\end{aligned}$$

Розв'язок для шести рівнянь для $h_j=0$ дає такі значення:

$$t=1/2, t=3/2, a=3/2, a=1/2.$$

Значення $t=3/2>1$ відкидаємо. Отже, маємо одне значення $t=1/2$. Маємо, що область невидимості не є замкненою. Для того, щоб її замкнути, використаємо граничні умови $t=0, t=1$, додавання яких дає змогу одержати замкнену область, в якій відрізок невидимий. Одержуємо значення $t_{\max} = 1/2, t_{\min} = 1$. Всі шість обмежень $h_j > 0$ виконуються при цих значеннях t . Таким чином, відрізок видимий при значеннях $0 \leq t \leq 1/2$, тобто

$$\begin{aligned}
&\text{від } P(0) = [10-11] + [-1000] \quad 0 = [10-11] \\
&\text{до } P(1/2) = [10-11] + [-1000] \quad 1/2 = [1/2 \ 0-11].
\end{aligned}$$

При видаленні невидимих ліній можуть траплятися випадки, коли необхідно враховувати границю $a=0$.

Знову візьмемо, **наприклад**, неперетворений куб $[VT] = [V]$ і відрізок $P_1 [1021] \dots P_2 [-1 \ 0 \ -21]$, який пронизує тіло куба:

$$\begin{aligned}
P(t) &= v = [1021] + [-20-40] t; \\
s &= [1021]; \\
d &= [-20-40].
\end{aligned}$$

Вектор спостереження знаходиться у безконечності, тобто $g = [0010]$.

Величини p, q, w для перетвореного куба становлять:

$$\begin{aligned}
p &= s [vt] = [-1311-35]; \\
q &= d [vt] = [4-4008-8]; \\
w &= g [vt] = [0000-22].
\end{aligned}$$

Система нерівностей за умови $h_j > 0$:

$$\begin{aligned}
&*1 \quad -1+4t+0a > 0; \\
&*2 \quad 3-4t+0a > 0; \\
&*3 \quad 1+0t+0a > 0; \\
&*4 \quad 1+0t+0a > 0;
\end{aligned}$$

$$*5 \quad -3+8t-2a > 0;$$

$$*6 \quad -5-8t+2a > 0.$$

Розв'язок шести рівнянь для значення $h_j = 0$ подає єдиний результат: $t = 3/4$. Розв'язки, проте, не утворюють замкнену область. Додаючи прямі $t = 0$ і $t = 1$, одержуємо обмежену область між $t = 3/4$ і $t = 1$, яка, проте, не коректна: при значеннях $t > 3/4$ не виконується умова $h_j > 0$ для значення $j = 2$. Додамо границю $a = 0$, яка дає коректну обмежену область кряями $t = 3/8$ і $t = 3/4$. З цієї області одержуємо значення $t_{\max\min} = 3/8$, $t_{\min\max} = 3/4$. Отже, відрізок видимий при значеннях $0 \leq t \leq 3/8$ і $3/4 \leq t \leq 1$

від точки $P(0) = [1021]$ до точки $P(3/8) = [1/4 \ 0 \ 1/2 \ 1]$
і від точки $P(3/4) = [-1/2 \ 0 \ -1 \ 1]$ до точки $P(1) = [-1 \ 0 \ -2 \ 1]$.

Отже, границю $a = 0$ треба враховувати у випадках пронизування тіла відрізком. Для цього запам'ятовують всі точки пронизування і, отже, додавання до сцени відрізків, що пов'язують ці точки. Далі перевіряють екранування цих відрізків тілами.

Розв'язки, що задовольняють нерівностям $h_j > 0$, можуть існувати за границями області, обмеженої умовами $0 \leq t \leq 1$ і $a = 0$. Тому додають до рівнянь, що описують границі, ще три рівняння, тобто $t = 0$, $t - 1 \leq 0$ і $a = 0$. Число розв'язків дорівнює

$$(j + 2)(j + 3)/2$$

для j площин, що обмежують опукле тіло.

Розв'язок, що відповідає нерівностям $h_j > 0$, зводиться до визначення обмеженої області, яку одержують в результаті графічного розв'язання. В алгоритмі Робертса для розв'язання цієї мінімаксної задачі використовується блок-схема (рис.5.11).

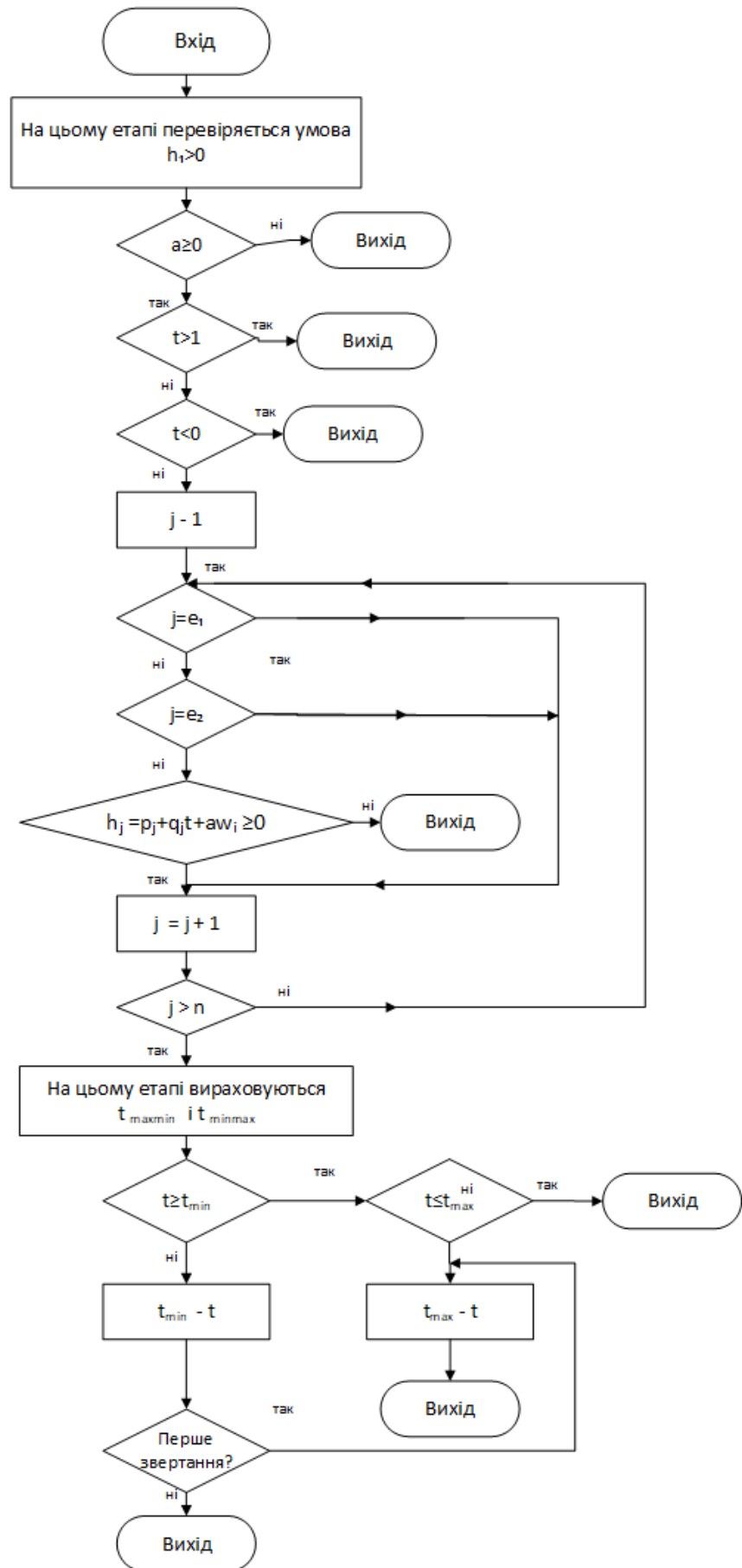


Рисунок 5.11 – Блок – схема розв’язання мінімаксної задачі алгоритму Робертса

Цей алгоритм використовується тільки для частково або повністю невидимих відрізків, а всі повністю видимі та нелицеві відрізки вилучені до початку роботи алгоритму.

Алгоритм починає роботу з значеннями t і a , що є розв'язки лінійних рівнянь з поточними мінімальним t_{min} та максимальним t_{max} значеннями t і з числом рівнянь n . На першому етапі алгоритму перевіряють виконання умови $h_j > 0$. Якщо такі умови виконані, то на другому етапі вираховують значення t_{minmax} і t_{maxmin} .

Метод потребує значних затрат машинного часу. Для його прискорення використовують спосіб визначення повністю видимих відрізків. Обидва кінці відрізка розташовані між точкою спостереження і деякою видимою площиною. При $a = 0$ значення $u = s + td + ag$ задає відрізок, а якщо одночасно маємо ще й $t = 0$ і $t = 1$, то одержуємо кінцеві точки відрізка. При значенні $t = 0$ виразу

$$h_j = u [VT] = p_j + q_j t + w_j a$$

значення p_j є скалярним добутком кінцевої точки відрізка і j - ї площини, що обмежує тіло. Аналогічно при $t = 1$ складова $p_j + q_j$ є скалярним добутком другої кінцевої точки відрізка і j - ї площини, що обмежує тіло. Нарешті, j - та площина видима, якщо $w_j \leq 0$. Тому при $w_j \leq 0$, $p_j \leq 0$ один кінець відрізка знаходиться або у видимій площині, або між видимою площиною і точкою спостереження. Якщо $p_j + q_j \leq 0$, то другий кінець відрізка також знаходиться або у видимій площині або між цією площиною і точкою спостереження. Отже, відрізок повністю видимий, якщо для будь - якого j маємо

$$w_j \leq 0, p_j \leq 0, p_j + q_j \leq 0,$$

тобто при жодних значеннях параметрів $a \geq 0$ і $0 \leq t \leq 1$ не виконуються складові нерівності $h_j \leq 0$ і, отже, увесь відрізок видимий.

Наприклад, для одиничного куба з центром у початку координат розташуємо відрізок $P_1 [-2021] \dots P_2 [2021]$ перед кубом.

Параметричне подання відрізка

$$P(t) = v = s + dt = [-2021] + [4000]t;$$

початкова точка $s = [-2021]$;

напрямок відрізка $d = [4000]$.

Точка спостереження розташована у безконечності на осі Oz : $g = [0010]$.

Для перетвореного куба

$$[VT] = [V].$$

Складові скалярного добутку h :

$$p = s [VT] = [5-311-35];$$

$$q = d [VT] = [-880000];$$

$$w = g [VT] = [0000-22].$$

Отже, маємо

$$w_5 = -2 < 0, p_5 = -3 < 0, p_5 + q_5 = -3 + 0 < 0,$$

тобто відрізок повністю видимий.

Розглянемо ще відрізок $P_3 [-1111] \dots P_4 [11-11]$, який розташований по діагоналі над кубом. Для цього відрізка маємо:

$$P(t) = v = st + dt = [-1111] + [20-20] t.$$

Координати точки спостереження не змінились: $g = [0010]$. Отже,
 $s = [-1111]$; $d = [20-20]$.

Складові скалярного добутку

$$p = s [VT] = [3 -1 -1 3 -1 3];$$

$$q = d [VT] = [-4 4 0 0 4 -4];$$

$$w = g [VT] = [0 0 0 0 -2 2].$$

Маємо, що $w_5 = -2 < 0$, $p_5 = -1 < 0$, $p_5 + q_5 = -1 + 4 > 0$,

$$w_6 = 2 > 0, p_6 = 3 > 0, p_6 + q_6 = 3 - 4 < 0.$$

Тобто умови не виконуються. Це відповідає у даному випадку перетину відрізком площин п'ятої та шостої граней куба.

Для першої та другої граней, паралельних напрямку погляду

$$w_1 = 0 = 0, p_1 = 3 > 0, p_1 + q_1 = 3 - 4 < 0,$$

$$w_2 = 0 = 0, p_2 = -1 < 0, p_2 + q_2 = -1 + 4 > 0,$$

тобто ці площини граней відрізок теж перетинає.

Для третьої грані $w_3 = 0, p_3 = -1, p_3 + q_3 < 0$, тобто відрізок видимий.

Алгоритм Робертса поділяється на три етапи:

На першому етапі кожне геометричне тіло аналізують з метою вилучення нелицевих площин.

На другому етапі перевіряють екранування решти ребер іншими тілами для визначення невидимих відрізків.

На третьому етапі обчислюють відрізки, які утворюють нові ребра при взаємному пронизуванні тіл.

Алгоритм передбачає будову тіл з плоских полігонів, обмежених ребрами, які, в свою чергу, обмежені точками, тобто окремими вершинами. Всі вершини, грані та ребра сукупно є тіло.

5.7.2. Послідовність реалізації алгоритму Робертса

Розглянемо послідовність реалізації алгоритму Робертса.

Вилучення нелицевих площин. Для кожного тіла:

Сформувані багатокутники граней та ребра за переліком вершин тіла.

Обчислити рівняння площини для кожної грані тіла.

Перевірити знак рівняння площини, тобто для довільної точки всередині тіла вирахувати скалярний добуток рівняння площини і точки всередині тіла.

Якщо скалярний добуток менший від нуля, то змінити знак рівняння цієї площини.

Сформувати матрицю тіла. Помножити її зліва на матрицю, обернену до матриці перетворення вигляду, що включає перспективу. Обчислити і запам'ятати габарити прямокутної оболонки перетвореного об'єму:

$$x_{max}, y_{max}, x_{min}, y_{min}.$$

Визначити неліцеві площини:

Вирахувати скалярний добуток пробної точки, що належить безконечності, на перетворену матрицю тіла. Якщо цей скалярний добуток менший від нуля, то площина невидима. Вилучити весь багатокутник, що розташований на цій площині. Це дає змогу не розглядати окремо невидимі лінії, утворені перетином пар невидимих площин.

Вилучити з кожного тіла ребра, що екрануються рештою тіл:

Якщо задано одне тіло, то алгоритм завершується.

Сформувати пріоритетний перелік цих тіл: спочатку провести сортування по координаті z . Сортування проводиться до максимальних значеннях координати z вершин перетворених тіл. Першим в упорядкованому списку і володіє найбільшим пріоритетом буде тіло, у якого мінімальне серед максимальних значень координати z . У використаній правій системі координат це тіло буде найбільш віддалене від точки спостереження, розташованої в безконечності на осі Oz тривимірного простору.

Для кожного тіла з пріоритетного списку:

Перевірити екранування всіх лицевих ребер іншими тілами. Тіло, ребра якого перевіряються, називається пробним об'єктом, а тіло, щодо якого в даний момент проводиться перевірка, називається пробним тілом або екраном. Тобто, потрібно перевірити екранування пробного об'єкта пробними тілами, які мають нижчі пріоритети:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } x_{min}(\text{пробного тіла}) > x_{max}(\text{пробного об'єкта}) \text{ або} \\ &x_{max}(\text{пробного тіла}) < x_{min}(\text{пробного об'єкта}) \text{ або} \\ &y_{min}(\text{пробного тіла}) > y_{max}(\text{пробного об'єкта}) \text{ або} \\ &y_{max}(\text{пробного тіла}) < y_{min}(\text{пробного об'єкта}), \end{aligned}$$

то пробне тіло не може екранувати жодного ребра пробного об'єкта.

Перейти до наступного пробного тіла. Інакше:

Провести попередні перевірки пронизування, щоб побачити, чи пронизується пробне тіло пробним об'єктом та чи має місце часткове екранування пробного тіла пробним об'єктом.

Порівняти z_{max} пробного об'єкта із z_{min} пробного тіла:

якщо z_{max} пробного об'єкта $< z_{min}$ пробного тіла, то пронизування неможливе.

Перейти до наступного тіла. Інакше:

Перевірити видиме пронизування.

якщо z_{max} (пробний об'єкт) $> z_{max}$ (пробне тіло), то пробний об'єкт може пронизати передню грань пробного тіла. Встановити так званий прапор видимого пронизування. Занести пронизане тіло у перелік пронизувань.

Якщо x_{max} (пробний об'єкт) $>$ x_{min} (пробне тіло) або

x_{min} (пробний об'єкт) $<$ x_{max} (пробне тіло),

то пробний об'єкт може пронизувати бік пробного тіла. Встановити так званий прапор видимого пронизування. Занести тіло в список пронизувань.

Якщо y_{max} (пробний об'єкт) $>$ y_{min} (пробне тіло) або

y_{min} (пробний об'єкт) $<$ y_{max} (пробне тіло),

то пробний об'єкт може пронизувати верх або низ пробного тіла. Встановити так званий прапор видимого пронизування. Занести пронизане тіло у перелік пронизувань.

Якщо список пронизувань порожній, то встановлювати прапор пронизування не треба.

Провести перевірки екранування ребер:

Вирахувати вектори s і d для кожного ребра.

Вирахувати значення параметрів p , q , w для кожної площини, якій належить грань пробного тіла.

Перевірка повної видимості:

Якщо ребро повністю видиме, то перейти до наступного ребра.

Сформувати і розв'язати рівняння

$$h_j = 0,$$

об'єднуючи попарно і включивши в систему рівняння кордони $t = 0$ і $t = 1$. Якщо встановлений так званий прапор видимого пронизування, то в систему треба ввести рівняння границі $a = 0$.

Запам'ятати точки пронизування. В іншому випадку границю $a = 0$ не враховувати.

Для кожної пари параметрів (t, a) , що є розв'язком, перевірити виконання умов $a \geq 0$, $h_j \geq 0$ і $0 \leq t \leq 1$ для всіх інших площин. Якщо ці умови виконані, то знайти t_{maxmin} і t_{minmax} .

Обчислити видимі ділянки відрізків і зберегти їх для наступної перевірки екранування тілами з нижчими пріоритетами.

Визначити видимі відрізки, котрі пов'язують точки пронизування:

Якщо так званий прапор видимого пронизування не встановлено, то перейти до процедури візуалізації.

Якщо точок пронизування не виявлено, перейти до процедури візуалізації.

Сформувати всіх можливі ребра, що з'єднують точки пронизування, для пов'язаних відношенням пронизування пар тіл.

Перевірити екранування всіх з'єднуючих ребер, пов'язаними відношенням пронизування.

Перевірити екранування іншими тілами з'єднуючих ребер, що залишились. Запам'ятати видимі відрізки. Візуалізувати видимі відрізки ребер, що залишились.

Розглянемо структуру алгоритму Робертса на **прикладі** побудови ізометричної проекції двох брусків, координати вершин яких наведені в таблицях 1, 2.

Таблиця 1

Координати вершин бруска 1

Брусок 1			
Номер вершини	x	y	z
1	0	0	1
2	2	0	1
3	2	0	3
4	0	0	3
5	0	6	1
6	2	6	1
7	2	6	3
8	0	6	3

Таблиця 2

Координати вершин бруска 2

Брусок 2			
Номер вершини	x	y	z
9	1	2	0
10	3	2	0
11	3	2	4
12	1	2	4
13	1	4	0
14	3	4	0
15	3	4	4
16	1	4	4

Відповідно до алгоритму матриця вершин тіла перетворюється шляхом множення справа на матрицю перетворення вигляду. Далі визначаються рівняння перетворених площин і, отже, перетворена матриця тіла.

Матрицю перетворення вигляду одержимо обертанням, наприклад, на кут -30° навколо осі Oy , тобто $\psi = -30^\circ$, з наступним обертанням на 15° навколо осі Ox , тобто $\theta = 15^\circ$.

$$\begin{aligned}
 [T] = [Ry] [Rx] &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \sin \theta & -\sin \psi & \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta & \cos \psi & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.129 & 0.483 & 0 \\ 0 & 0.966 & 0.259 & 0 \\ -0.5 & -0.224 & 0.837 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Перетворені матриці вершин першого і другого брусків мають такий вигляд:

$$[RT_1] = [R_1] [T] = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.224 & 0.837 & 1 \\ 1.232 & -0.483 & 1.802 & 1 \\ 0.232 & -0.933 & 3.475 & 1 \\ -1.5 & -0.672 & 2.510 & 1 \\ -0.5 & 5.571 & 2.389 & 1 \\ 1.232 & 5.313 & 3.355 & 1 \\ 0.232 & 4.864 & 5.028 & 1 \\ -1.5 & 5.123 & 4.062 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[RT_2] = [R_2] [T] = \begin{bmatrix} 0.866 & 1.802 & 1.001 & 1 \\ 2.598 & 1.544 & 1.967 & 1 \\ 0.598 & 0.647 & 5.313 & 1 \\ -1.134 & 0.906 & 4.347 & 1 \\ 0.866 & 3.734 & 1.518 & 1 \\ 2.598 & 3.475 & 2.484 & 1 \\ 0.598 & 2.579 & 5.83 & 1 \\ -1.134 & 2.838 & 4.864 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рівняння площин кожної грані двох брусків одержують за методом Ньюела. Зокрема, для багатокутника або першої грані, що містить вершини 2,3,7,6, маємо рівняння площини:

$$-0,866x + 0,129y - 0,483z + 2 = 0.$$

Перетворена матриця тіла для першого бруска

$$[VT_1] = \begin{bmatrix} -0,866 & 0,866 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0,129 & -0,129 & -0,966 & 0,966 & 0,224 & -0,224 \\ -0,483 & 0,483 & -0,259 & 0,259 & -0,837 & 0,837 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

для другого бруска

$$[VT_2] = \begin{bmatrix} -0,866 & 0,866 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0,129 & -0,129 & -0,966 & 0,966 & 0,224 & -0,224 \\ -0,483 & 0,483 & -0,259 & 0,259 & -0,837 & 0,837 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

В алгоритмі Робертса точка спостереження становить $[0010]$, а пробна точка $[E] = [00-10]$. Шукаємо нелицьові площини:

у першому тілі 1,2,3,4,5,6

$$[E] [VT_1] = [0,483 \quad -0,483 \quad 0,259 \quad -0,259 \quad 0,837 \quad -0,837],$$

у другому тілі 7,8,9,10,11,12

$$[E] [VT_2] = [0,483 \quad -0,483 \quad 0,259 \quad -0,259 \quad 0,837 \quad -0,837].$$

Отже, нелицеві площини однакові. Від'ємні знаки показують, що площини або багатокутники 2,4,6 першого бруска і 8,10,12 другого бруска нелицьові. Перетин цих граней утворюють невидимі ребра. Тобто відповідні ребра першого тіла і другого тіла утворені перетином пар нелицьових площин і тому невидимі.

Ребра кожного тіла, що залишились, перевіряються на екранування другим тілом. За алгоритмом перевіряється можливість перетину тіл. Перевірка пронизування першого тіла другим тілом з використанням перетворених вершин подає результат:

$$(z_{max})_1 = 5,028 > (z_{min})_2 = 1,011,$$

тобто, пронизування можливе. Якщо до того ж

$$(x_{max})_1 = 1,232 > (x_{min})_2 = -1,134,$$

то факт пронизування має місце. Тому в систему рівнянь треба включити рівняння границі $a = 0$.

Для ребер першого тіла, що залишились, перевіряється факт екранування другим тілом. Наприклад, для другого ребра, що з'єднує другу і третю вершини,

$$P(t) = v = s + dt = [1,232 \quad -0,483 \quad 1,802 \quad 1] + [-1 \quad -0,45 \quad 1,673 \quad 0]t.$$

Скалярні добутки s і d на $[VT_2]$

$$p = s [VT_2] = [114-231];$$

$$q = d [VT_2] = [0000-23].$$

Точка спостереження знаходиться у безконечності на додатній півосі Oz , тому $q = [0010]$:

$$w = g [VT_2] = [-0,483 \quad 0,483 \quad -0,259 \quad 0,259 \quad -0,837 \quad 0,837].$$

Перевірка повної видимості ліній показує, що умови

$$w_j \leq 0, p_j \leq 0, p_j + q_j \leq 0$$

не виконуються, тому що через безконечне простягання площина з основою або багатокутником, утвореними ребрами з вершинами 9,10,11,12, може екранувати це ребро. Формування умов невидимості ребра h_j подає систему з шести нерівностей

$$1+0t -0,483 a \geq 0;$$

$$1+0t +0,483 a \geq 0;$$

$$\begin{aligned}
1 + 0t - 0.259 a &\geq 0; \\
-2 + 0t + 0.259 a &\geq 0; \\
3 - 2t - 0.837 a &\geq 0; \\
1 + 2t + 0.837 a &\geq 0.
\end{aligned}$$

Розв'язання пар відповідних рівнянь показує невиконання умов для $h_j \geq 0$, за жодних значень j , тобто в ребра відсутня невидима ділянка, отже, воно повністю видиме.

Подібним чином розв'язуються питання щодо екранування інших ребер першого тіла другим тілом. Пов'язуючи одержану множину точок, маємо кілька можливих варіантів з'єднань відрізків, для яких перевіряється екранування кожного з цих відрізків кожним з двох тіл. Нарешті виявляється видимість відрізків з вершинами у цілком видимих точках.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Михайленко В. Є., Найдис В. М., Скидан І. А., Підкоритов А. М. Інженерна та комп'ютерна графіка : підручник. Київ : Слово, 2011, 352 с.
2. Гумен О.М., Ляковська С.Є., Малець І.О. Комп'ютерне моделювання технічних об'єктів : навчальний посібник. Львів : ЛДУБЖД, 2014, 180 с.
3. Маценко В.Г. Комп'ютерна графіка : навчальний посібник. Чернівці : Рута, 2009, 343 с.
4. Скиба О. П. Комп'ютерна графіка : навчальний посібник. Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019, 88 с.
5. Царенко М. О. Комп'ютерна графіка : курс лекцій. Одеса : Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», 2020, 26 с.
6. Блінова Т.О., Порєв В.М. Комп'ютерна графіка : навчальний посібник. Київ: Юніор, 2004, 456 с.
7. Ляковська С. Є., Мартин Є.В., Оленюк Ю.Р. Комп'ютерне графічне забезпечення технічних проектів : навчальний посібник. Львів : ЛДУБЖД, 2017, 330 с.
8. Ляковська С. Є., Мартин Є. В. Основи 3D – моделювання : навчальний посібник. Львів : ЛДУ БЖД, 2022, 283 с.
9. Пальчевський Б. О., Валецький Б. П., Вараніцький Т. Л. Системи 3D - моделювання : навчальний посібник. Луцьк : Луцький національний технічний університет, 2016, 176 с.
10. David F. Rodgers. Procedural elements for computer graphics : підручник. Mc Graw – Hill College, 1984, 430s.
11. David F. Rodgers, J. Alan Adams. Matematical elements for computer graphics : підручник. Mc Graw – Hill College, 1989, 512s.
12. Співак С. М. Теоретичні основи комп'ютерної графіки та дизайну : навчальний посібник. Київ : Київський університет імені Бориса Грінченка, 2013, 164 с.
13. Придатко О. В., Ляковська С. Є., Мартин Є. В., Хлевой О. В. Моделювання багатопараметричних систем : монографія. Львів : ЛДУ БЖД, 2021, 245 с.
14. Ратушний Р.Т., Хмель П., Мартин Є. В. Проектне управління на основі моделювання багатопараметричних організаційно - технічних систем : монографія. Львів : ЛДУ БЖД, 2022, 246 с.
15. Ляковська С. Є., Кордунова Ю. С., Мартин Є. В. Графічні інформаційні технології. Практикум до науково - дослідних робіт курсантів та студентів : практикум. Львів : ЛДУ БЖД, 2022, 277 с.
16. Ляковська С. Є., Мартин Є. В. Графічні інформаційні технології. Практикум : практикум. Львів : ЛДУ БЖД, 2023, 113 с.

Навчальне видання

Соломія ЛЯСКОВСЬКА, Євген МАРТИН

**МАТЕМАТИЧНІ ТА АЛГОРИТМІЧНІ ОСНОВИ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ**

Навчальний посібник

Літературний редактор:

Галина ПАДИК

Комп'ютерна верстка:

Євген МАРТИН

Друк:

Назарій ПЕТРОЛЮК

Підписано до друку 15.08.2025 р.
Формат 60×84/16. Гарнітура Times New Roman.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 11,4.

Друк ЛДУБЖД
79007, Україна, м. Львів, вул. Клепарівська, 35
Тел. /факс: (032)233-24-79
E-mail: vnrd@ldubgd.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №7249 від 09.02.2021 р.