

МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНА СЛУЖБА УКРАЇНИ З НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ
ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Кафедра прикладної математики і механіки



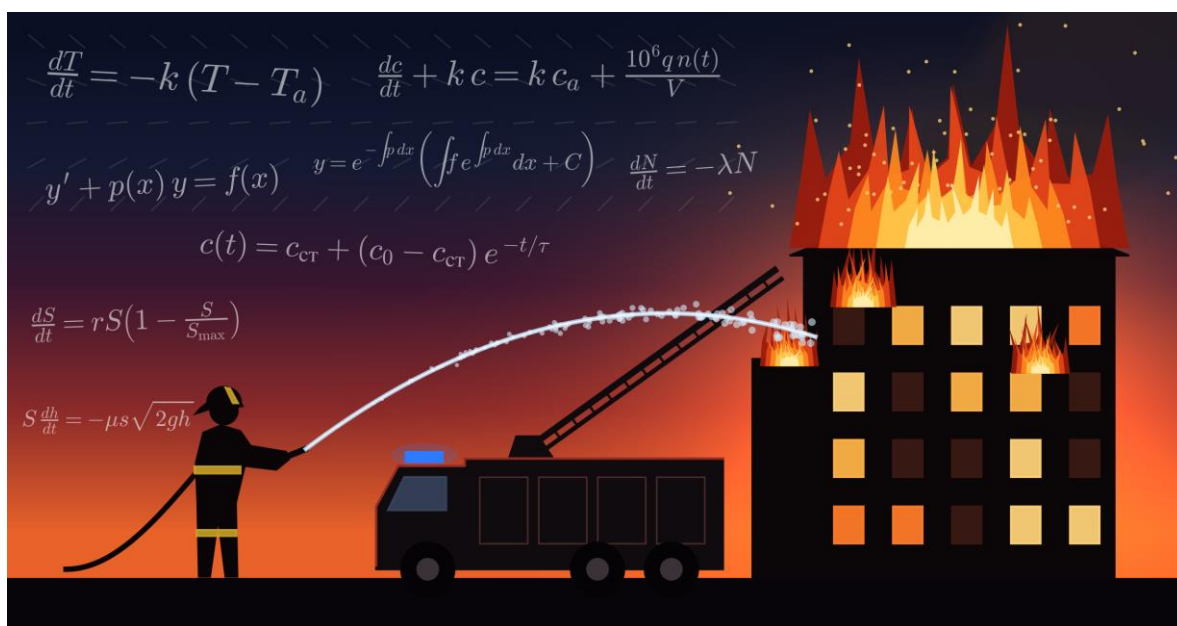
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ
ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Гембара Т.В., Трусевич О.М.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Методичні вказівки для самостійної роботи та завдання до виконання
розрахункової роботи з дисципліни «Вища математика»

для курсантів та студентів спеціальностей
К10 «Цивільна безпека» та J4 «Охорона праці»



Львів – 2026

Гембара Т.В., Трусевич О.М. Диференціальні рівняння у прикладних задачах цивільного захисту: методичні вказівки для самостійної роботи та завдання до виконання розрахункової роботи для курсантів та студентів спеціальностей К1О «Цивільна безпека» та J4 «Охорона праці». – Львів: ЛДУ БЖД, 2026. – 37 с.

Методичні вказівки складено відповідно до вимог освітніх програм «Цивільна безпека» та «Охорона праці» до навчальної дисципліни «Вища математика» та «Системний аналіз і моделювання». Систематично викладено теорію диференціальних рівнянь першого порядку (з відокремлюваними змінними, однорідних, лінійних, Бернуллі) з доведеннями основних тверджень і розв'язаними прикладами, наведено приклади застосування диференціальних рівнянь у задачах цивільного захисту та охорони праці.

Використано сучасні науково-інженерні методики оцінки якості повітря в приміщеннях за вмістом вуглекислого газу, які ґрунтуються на математичному моделюванні диференціальними рівняннями. Обґрунтовано шкідливість CO_2 , наведено нормативні рівні, описано будову та порядок використання портативного детектора CO_2 – термогігрометра. Розглянуто моделі якості повітря при сталій та періодично змінній кількості осіб. Вказівки містять 80 варіантів індивідуальної розрахункової роботи та повністю оформлений приклад її виконання.

Укладачі: Гембара Т.В., канд. техн. наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки;

Трусевич О.М., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки

Рецензент: Онишкевич В.М., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії, математики і фізики НЛТУ України

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики і механіки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності ДСНС МВС України, протокол № 12 від «4» червня 2026 року.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	5
1.1. Основні поняття та означення	5
1.2. Задача Коші. Геометричний зміст рівняння першого порядку	5
1.3. Рівняння з відокремлюваними змінними	6
1.4. Однорідні рівняння першого порядку	7
1.5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку	7
1.6. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів	10
1.7. Рівняння Бернуллі	12
1.8. Застосування диференціальних рівнянь у задачах цивільного захисту та охорони праці	12
1.9. Контрольні питання до розділу 1	17
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОНТРОЛЬ КОНЦЕНТРАЦІЇ CO ₂ У ПРИМІЩЕННЯХ	19
2.1. Вуглекислий газ як показник якості повітря та шкідливий чинник	19
2.2. Інструментальний контроль: детектор CO ₂ – термогігрометр	21
2.3. Постановка задачі матеріального балансу	24
2.4. Розв'язок для сталої кількості людей	25
2.5. Розв'язок для періодично змінної кількості людей	26
2.6. Порядок виконання та оформлення розрахункової роботи	27
2.7. Приклад виконання розрахункової роботи	28
2.8. Завдання розрахункової роботи	31
2.9. Варіанти завдань	32
2.10. Вимоги до висновків. Контрольні питання	33
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	35
ДОДАТОК А. ЗРАЗОК ТИТУЛЬНОГО АРКУША РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ ..	37

ВСТУП

Під час перебування людей у навчальних аудиторіях, лабораторіях, офісах, чергових приміщеннях підрозділів ДСНС, захисних спорудах та укриттях концентрація діоксиду вуглецю (вуглекислого газу, CO_2) безперервно змінюється внаслідок дихання людей, припливу зовнішнього повітря та роботи системи вентиляції. У приміщеннях з великою кількістю осіб саме CO_2 найчастіше використовують як індикатор якості повітря та достатності повітрообміну. Підвищений рівень CO_2 не тільки характеризує погіршення санітарного стану повітря, а й супроводжується зниженням концентрації уваги, відчуттям дискомфорту, головним болем, зменшенням продуктивності праці та зростанням кількості помилок [1–6, 22]. Для фахівців з цивільної безпеки та охорони праці особливо важливо, що CO_2 є також небезпечним чинником у замкнених і заглиблених просторах (колодязях, оглядових ямах, підвалах, силосах), у герметизованих укриттях та в приміщеннях, обладнаних установками газового пожежогасіння.

Для інженерного аналізу мікроклімату недостатньо лише виміряти концентрацію CO_2 у певний момент – потрібно вміти *прогнозувати* її зміну в часі: скільки хвилин заняття повітря залишатиметься прийнятним, яку витрату вентиляції слід забезпечити, скільки часу люди можуть безпечно перебувати в укритті. Таке прогнозування природно приводить до *диференціальних рівнянь першого порядку*, побудованих на законі матеріального балансу: швидкість накопичення речовини у приміщенні дорівнює надходженню CO_2 від людей і з припливним повітрям мінус видалення CO_2 вентиляцією. –

Методичні вказівки складаються з двох розділів. У першому розділі систематично викладено теорію диференціальних рівнянь першого порядку для невідомої функції $y = y(x)$: основні поняття, задача Коші та її геометричний зміст, рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні та лінійні рівняння, рівняння Бернуллі. Основні твердження подано з доведеннями, кожен метод проілюстровано розв'язаними прикладами, а наприкінці розділу розглянуто прикладні задачі цивільного захисту та охорони праці: охолодження нагрітих конструкцій, провітрювання приміщення після аварійного викиду, накопичення CO_2 у герметичному укритті, радіоактивний розпад, аварійне витікання рідини з резервуара, поширення лісової пожежі.

У другому розділі обґрунтовано шкідливість вуглекислого газу, наведено гігієнічні та нормативні рівні, описано будову, принцип дії та порядок використання портативного детектора CO_2 – термогігрометра (типу НТ-2000, що постачається під торговими марками Walcom, Xintest та ін.), показано, як за результатами вимірювань визначити кратність повітрообміну. Далі побудовано математичну модель концентрації CO_2 у приміщенні для сталої та періодично змінної кількості людей, наведено повністю оформлений приклад виконання розрахункової роботи та 80 варіантів індивідуальних завдань.

Мета розрахункової роботи – сформувати в курсантів і студентів навички побудови математичних моделей на основі диференціальних рівнянь, їх аналітичного розв'язування, обчислення, графічної інтерпретації результатів та формулювання обґрунтованих інженерних висновків щодо безпеки умов праці й перебування людей.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Основні поняття та означення

Диференціальним рівнянням називають рівняння, що пов'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = y(x)$ та її похідні $y', y'', \dots$. Найвищий порядок похідної, яка входить у рівняння, називають **порядком рівняння**. Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.1)$$

Якщо рівняння (1.1) можна розв'язати відносно похідної, його записують у **нормальній формі**

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

або в **диференціальній формі**

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (1.3)$$

Розв'язком рівняння (1.2) на інтервалі $(a; b)$ називають диференційовну функцію $y = \varphi(x)$, яка після підстановки в рівняння перетворює його на тотожність для всіх $x \in (a; b)$. Графік розв'язку називають **інтегральною кривою**.

Загальним розв'язком рівняння першого порядку називають функцію

$$y = \varphi(x, C), \quad (1.4)$$

яка залежить від однієї довільної сталої C і при кожному допустимому значенні C є розв'язком, причому з неї можна виділити розв'язок, що задовольняє будь-яку допустиму початкову умову. Якщо загальний розв'язок отримано в неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, його називають **загальним інтегралом**. Розв'язок, отриманий із загального при конкретному значенні $C = C_0$, називають **частинним**.

Приклад 1.1. Перевірити, що функція $y = Ce^{-x} + x - 1$ є загальним розв'язком рівняння $y' + y = x$.

Розв'язання. Знаходимо похідну: $y' = -Ce^{-x} + 1$. Підставляємо в ліву частину рівняння: $y' + y = -Ce^{-x} + 1 + Ce^{-x} + x - 1 = x$. Отримали тотожність $x \equiv x$ при будь-якому C , отже, функція є розв'язком, причому сім'я містить одну довільну сталу, тобто є загальним розв'язком.

1.2. Задача Коші. Геометричний зміст рівняння першого порядку

На практиці потрібен не весь набір розв'язків, а той, що відповідає конкретним умовам процесу, наприклад, відомому значенню концентрації домішки в початковий момент часу. **Задачею Коші** називають задачу відшукування розв'язку рівняння (1.2), який задовольняє **початкову умову**

$$y(x_0) = y_0, \quad (1.5)$$

де x_0, y_0 – задані числа. Геометрично це означає, що серед усіх інтегральних кривих шукаємо ту, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Рівняння (1.2) у кожній точці $(x; y)$ області визначення функції f задає кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ дотичної до інтегральної кривої, яка проходить через цю точку. Сукупність коротких відрізків з такими нахилами утворює **поле напрямків**. Лінії, вздовж яких нахил сталий, називають **ізоклінами**:

$$f(x, y) = k, \quad k = \operatorname{const}. \quad (1.6)$$

Інтегральні криві у кожній точці дотикаються до відрізків поля напрямків. На рис. 1.1 зображено поле напрямків рівняння $y' = 1 - y$ та кілька інтегральних кривих. Видно, що за будь-якої початкової умови розв'язки наближаються до прямої $y = 1$, яку називають **стаціонарним (рівноважним) розв'язком**. Саме така поведінка характерна для концентрації CO_2 у вентиляваному приміщенні зі сталою кількістю людей (див. підрозділ 2.4).

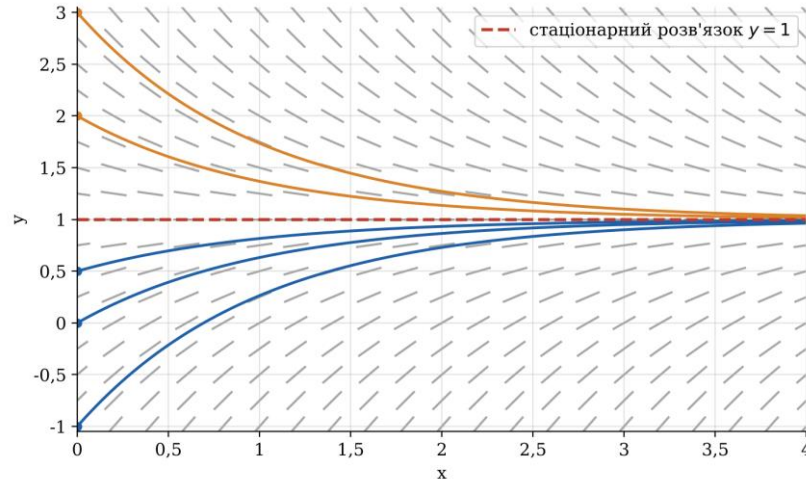


Рис. 1.1 – Поле напрямків рівняння $y' = 1 - y$ та інтегральні криві для різних початкових умов

Теорема 1.1 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші). Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\partial f / \partial y$ неперервні в деякій області D , що містить точку $M_0(x_0; y_0)$, то в деякому околі точки x_0 існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (1.2), який задовольняє початкову умову (1.5).

Для інженерних застосувань ця теорема має принципове значення: якщо модель процесу задовольняє умови теореми, то за відомим початковим станом подальший перебіг процесу визначається однозначно. Для лінійних рівнянь (п. 1.5) з неперервними коефіцієнтами розв'язок задачі Коші існує і єдиний на всьому інтервалі неперервності коефіцієнтів.

1.3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння першого порядку називають **рівнянням з відокремлюваними змінними**, якщо його права частина є добутком функції лише від x на функцію лише від y :

$$y' = f_1(x)f_2(y). \quad (1.7)$$

Метод розв'язування. Записуємо $y' = dy/dx$ і за умови $f_2(y) \neq 0$ ділимо обидві частини на $f_2(y)$, а потім множимо на dx – «відокремлюємо змінні»:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \quad (1.8)$$

Інтегруючи обидві частини, отримуємо загальний інтеграл

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C. \quad (1.9)$$

Обґрунтування. Нехай $y = y(x)$ – розв'язок рівняння (1.7). Тоді $y'(x)/f_2(y(x)) = f_1(x)$ – тотожність. Позначимо через $G(y)$ первісну функції $1/f_2(y)$, а через $F(x)$ – первісну $f_1(x)$. За правилом диференціювання складеної функції

$\frac{d}{dx}G(y(x)) = \frac{y'(x)}{f_2(y(x))} = f_1(x) = F'(x)$. Дві функції з однаковими похідними на інтервалі відрізняються на сталу, тому $G(y(x)) = F(x) + C$, що й записано в (1.9). Зауважимо, що при діленні на $f_2(y)$ можуть бути втрачені розв'язки $y = b$, для яких $f_2(b) = 0$; їх треба перевірити окремо.

Приклад 1.2. Розв'язати задачу Коші $y' = 2xu$, $y(0) = 1$.

Розв'язання. Відокремлюємо змінні: $\frac{dy}{y} = 2x dx$. Інтегруємо: $\ln |y| = x^2 + \ln |C|$, звідки $y = Ce^{x^2}$. Розв'язок $y = 0$, втрачений при діленні, міститься в цій формулі при $C = 0$. З початкової умови $1 = Ce^0$ маємо $C = 1$, отже, $y = e^{x^2}$.

Приклад 1.3 (базова модель релаксації). Розв'язати рівняння $y' = -k(y - a)$, $y(x_0) = y_0$, де $k > 0$, a – сталі.

Розв'язання. Відокремлюємо змінні: $\frac{dy}{y-a} = -k dx$. Після інтегрування $\ln |y - a| = -kx + \ln |C|$, тобто $y = a + Ce^{-kx}$. З умови $y(x_0) = y_0$ знаходимо $C = (y_0 - a)e^{kx_0}$. Остаточно

$$y = a + (y_0 - a)e^{-k(x-x_0)}. \quad (1.10)$$

Формула (1.10) описує експоненційне наближення величини y до рівноважного значення a . Вона є універсальною: за нею розраховують охолодження тіл, розбавлення забруднень вентиляцією, розряд конденсатора, а також зростання концентрації CO_2 до стаціонарного рівня.

1.4. Однорідні рівняння першого порядку

Рівняння $y' = f(x, y)$ називають **однорідним**, якщо його права частина залежить лише від відношення y/x :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.11)$$

Таке рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y = u(x)x, \quad y' = u'x + u, \quad (1.12)$$

після якої маємо $u'x + u = \varphi(u)$, або $\frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}$.

Приклад 1.4. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x} + 1$, $x > 0$.

Розв'язання. Підстановка (1.12) дає $u'x + u = u + 1$, тобто $du = \frac{dx}{x}$. Звідси $u = \ln x + C$ і $y = x \ln x + Cx$.

1.5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

1.5.1. Означення та структура загального розв'язку

Багато інженерних задач, пов'язаних із вентиляцією, тепломасообміном, фільтрацією, зміною вологості або концентрації домішок, зводяться до **балансових моделей**, у яких швидкість зміни шуканої величини пропорційна самій величині та заданому зовнішньому впливу. Це приводить до **лінійного диференціального рівняння першого порядку**

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (1.13)$$

де $p(x)$ і $f(x)$ – відомі неперервні функції. Рівняння називають лінійним, оскільки невідома функція y та її похідна y' входять у нього лише в першому

степені, не перемножуються між собою і не стоять під знаками нелінійних функцій. Якщо $f(x) \equiv 0$, рівняння називають **лінійним однорідним**:

$$y' + p(x)y = 0, \quad (1.14)$$

а при $f(x) \not\equiv 0$ – **неоднорідним**. Однорідне рівняння (1.14) є рівнянням з відокремлюваними змінними: $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, $\ln |y| = -\int p(x)dx + \ln |C|$, звідки

$$y_{\text{од}} = C e^{-\int p(x)dx}. \quad (1.15)$$

Теорема 1.2 (про структуру загального розв'язку). Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.13) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (1.14) та будь-якого частинного розв'язку $y_{\text{ч}}$ неоднорідного рівняння:

$$y = y_{\text{од}} + y_{\text{ч}} = C e^{-\int p(x)dx} + y_{\text{ч}}(x). \quad (1.16)$$

Доведення. 1) Підставимо суму $y = y_{\text{од}} + y_{\text{ч}}$ у ліву частину (1.13): $(y_{\text{од}} + y_{\text{ч}})' + p(y_{\text{од}} + y_{\text{ч}}) = (y'_{\text{од}} + p y_{\text{од}}) + (y'_{\text{ч}} + p y_{\text{ч}}) = 0 + f(x) = f(x)$, тобто сума є розв'язком. 2) Нехай y – довільний розв'язок (1.13). Тоді різниця $z = y - y_{\text{ч}}$ задовольняє рівняння $z' + pz = f - f = 0$, тобто є розв'язком однорідного рівняння і за (1.15) має вигляд $z = C e^{-\int p dx}$. Отже, будь-який розв'язок записується у формі (1.16). Теорему доведено.

Фізичний зміст теореми 1.2 такий: доданок $y_{\text{од}}$ описує **перехідний процес**, зумовлений початковим станом системи (у задачах вентиляції – початковою концентрацією в приміщенні), а $y_{\text{ч}}$ – **вимушений режим**, що визначається зовнішнім впливом (джерелами домішки). Розглянемо три рівноцінні методи розв'язування рівняння (1.13).

1.5.2. Метод Бернуллі (підстановка $y = uv$)

Розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій:

$$y = u(x)v(x), \quad y' = u'v + uv'. \quad (1.17)$$

Після підстановки в (1.13) групуємо доданки:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x). \quad (1.18)$$

Оскільки одну з функцій можна вибрати довільно, підберемо $v(x)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю: $v' + p(x)v = 0$. Беремо найпростіший ненульовий розв'язок цього рівняння (без сталої):

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}. \quad (1.19)$$

Тоді з (1.18) залишається $u'v = f(x)$, звідки

$$u(x) = \int \frac{f(x)}{v(x)} dx + C, \quad y = u(x)v(x). \quad (1.20)$$

Приклад 1.5. Розв'язати задачу Коші $y' + \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 1$, $x > 0$.

Розв'язання. Тут $p(x) = 1/x$, $f(x) = x^2$. Покладемо $y = uv$: $u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = x^2$. З умови $v' + \frac{v}{x} = 0$ маємо $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $v = \frac{1}{x}$. Далі $\frac{u'}{x} = x^2$, $u' = x^3$, $u = \frac{x^4}{4} + C$. Загальний розв'язок: $y = uv = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$. З початкової умови $1 = \frac{1}{4} + C$, $C = \frac{3}{4}$. Відповідь: $y = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{4x}$.

Перевірка: $y' = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4x^2}$, $\frac{y}{x} = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4x^2}$, їх сума дорівнює x^2 , тобто розв'язок знайдено правильно.

1.5.3. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Спочатку розв'язуємо однорідне рівняння і отримуємо (1.15). Потім вважаємо сталу C невідомою функцією від x :

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (1.21)$$

Підставивши (1.21) у (1.13), отримаємо $C'(x)e^{-\int p dx} - C(x)p e^{-\int p dx} + p C(x)e^{-\int p dx} = f(x)$; доданки з $C(x)$ взаємно знищуються, і $C'(x) = f(x)e^{\int p dx}$. Тому

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1, \quad (1.22)$$

а загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right). \quad (1.23)$$

Приклад 1.6. Розв'язати рівняння $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Однорідне рівняння $y' = y \operatorname{tg} x$: $\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x dx$, $\ln |y| = -\ln |\cos x| + \ln |C|$, $y = \frac{C}{\cos x}$. Варіюємо сталу: $y = \frac{C(x)}{\cos x}$, тоді $\frac{C'(x)}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$, $C'(x) = 1$, $C(x) = x + C_1$. Відповідь: $y = \frac{x+C_1}{\cos x}$.

1.5.4. Метод інтегрувального множника

Шукаємо таку функцію $\mu(x) > 0$, після множення на яку ліва частина рівняння (1.13) стає похідною добутку:

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \frac{d}{dx} [\mu(x)y(x)]. \quad (1.24)$$

Розкриваючи похідну добутку за правилом $(\mu y)' = \mu y' + \mu' y$ і порівнюючи з лівою частиною (1.24), отримуємо умову для інтегрувального множника

$$\mu'(x) = p(x)\mu(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \quad (1.25)$$

Тепер рівняння (1.13) набуває вигляду $(\mu y)' = \mu f$. Інтегруючи, маємо

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)f(x)dx + C \Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)f(x)dx + C \right), \quad (1.26)$$

що збігається з (1.23). Якщо інтегрувати не невизначено, а від x_0 до x , то відразу отримуємо **формулу Коші** – розв'язок задачі Коші (1.13), (1.5):

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds} + \int_{x_0}^x f(s) e^{-\int_s^x p(r)dr} ds. \quad (1.27)$$

Перший доданок у (1.27) – внесок початкового стану, який з часом «забувається», другий – накопичений внесок зовнішнього впливу f з «вагою» $e^{-\int_s^x p dr}$. Саме тому інтегрувальний множник є основним методом для балансових задач.

Приклад 1.7. Розв'язати задачу Коші $y' + 2y = 4x$, $y(0) = 0$.

Розв'язання. $p = 2$, $\mu = e^{2x}$. Тоді $(ye^{2x})' = 4xe^{2x}$. Інтегруючи частинами ($u = 4x$, $dv = e^{2x}dx$): $\int 4xe^{2x}dx = 2xe^{2x} - \int 2e^{2x}dx = (2x - 1)e^{2x} + C$. Отже, $y = 2x - 1 + Ce^{-2x}$; з умови $y(0) = 0$ маємо $C = 1$:

$$y = \underbrace{2x - 1}_{y_{\text{ч}}} + \underbrace{e^{-2x}}_{y_{\text{од}}}. \quad (1.28)$$

Складові розв'язку (1.28) показано на рис. 1.2: перехідна складова швидко згасає, і розв'язок прямує до частинного розв'язку $y_{\text{ч}} = 2x - 1$.

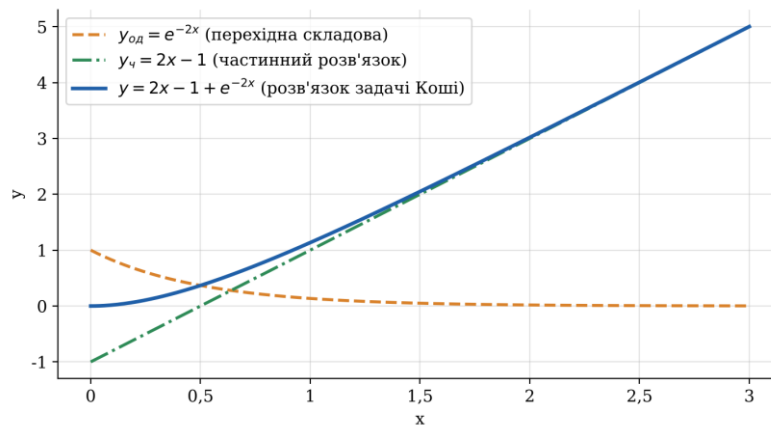


Рис. 1.2 – Структура розв'язку лінійного рівняння: перехідна та вимушена складові

1.6. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

У балансових моделях з незмінною витратою вентиляції коефіцієнт $p(x)$ сталий. Розглянемо рівняння

$$y' + k y = f(x), \quad k = \text{const} > 0. \quad (1.29)$$

За теоремою 1.2 його загальний розв'язок $y = C e^{-kx} + y_{\text{ч}}(x)$. Для правих частин спеціального вигляду частинний розв'язок зручно шукати **методом невизначених коефіцієнтів**: задаємо $y_{\text{ч}}$ того самого типу, що й $f(x)$, з невідомими коефіцієнтами, підставляємо в рівняння і прирівнюємо коефіцієнти при однакових функціях (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Вигляд частинного розв'язку рівняння $y' + ky = f(x)$

Права частина $f(x)$	Вигляд $y_{\text{ч}}(x)$	Коефіцієнти
$b = \text{const}$	A	$A = b/k$
$P_m(x)$ – многочлен степеня m	$Q_m(x)$ – многочлен степеня m	з тотожності $Q_m' + kQ_m = P_m$
$a e^{\lambda x}, \lambda \neq -k$	$A e^{\lambda x}$	$A = \frac{a}{\lambda + k}$
$a \cos \omega x + b \sin \omega x$	$M \cos \omega x + N \sin \omega x$	з системи (1.33)

Стала права частина. Стаціонарний стан і стала часу. Якщо $f(x) = b$, то $y_{\text{ч}} = b/k$, і розв'язок задачі Коші $y(0) = y_0$ має вигляд

$$y(x) = y_{\text{ст}} + (y_0 - y_{\text{ст}})e^{-x/\tau}, \quad y_{\text{ст}} = \frac{b}{k}, \quad \tau = \frac{1}{k}. \quad (1.30)$$

Величину $y_{\text{ст}}$ називають **стаціонарним значенням**, а τ – **сталом часу** процесу. За час $x = \tau$ відхилення від стаціонарного стану зменшується в $e \approx 2,718$ разів, тобто процес завершується на 63,2 %. Частку завершення процесу $1 - e^{-x/\tau}$ подано в табл. 1.2; на практиці вважають, що через 3τ – 5τ стаціонарний режим установився.

Таблиця 1.2 – Частка завершення експоненційного перехідного процесу

x/τ	0,5	1	2	3	4	5
$1 - e^{-x/\tau}, \%$	39,3	63,2	86,5	95,0	98,2	99,3

Гармонічна права частина. Амплітуда та фазове запізнення. Розглянемо рівняння, у якому зовнішній вплив коливається з коловою частотою ω :

$$y' + k y = k a \cos \omega x. \quad (1.31)$$

(множник k у правій частині вибрано так, щоб за $\omega \rightarrow 0$ відгук дорівнював збуренню). Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{ч}} = M \cos \omega x + N \sin \omega x. \quad (1.32)$$

Тоді $y_{\text{ч}}' = -M\omega \sin \omega x + N\omega \cos \omega x$, і після підстановки в (1.31) групуємо доданки при $\cos \omega x$ та $\sin \omega x$: $(kM + \omega N)\cos \omega x + (kN - \omega M)\sin \omega x = ka \cos \omega x$. Прирівнюючи коефіцієнти, маємо систему

$$\begin{cases} kM + \omega N = ka, \\ -\omega M + kN = 0, \end{cases} \quad M = \frac{ak^2}{k^2 + \omega^2}, \quad N = \frac{ak\omega}{k^2 + \omega^2}. \quad (1.33)$$

Перейдемо до амплітудно-фазової форми, використовуючи тотожність $M \cos \omega x + N \sin \omega x = \sqrt{M^2 + N^2} \cos(\omega x - \varphi)$, $\tan \varphi = N/M$:

$$y_{\text{ч}} = a K \cos(\omega x - \varphi), \quad K = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} < 1, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega}{k}. \quad (1.34)$$

Формула (1.34) містить два важливі висновки (рис. 1.3): 1) амплітуда відгуку менша за амплітуду збурення в $1/K$ разів – система «згладжує» коливання; 2) відгук **запізнюється** на величину $\Delta x = \varphi/\omega$. Чим більша частота ω порівняно з k , тим сильніше згладжування і тим більше запізнення (але не більше чверті періоду). У задачі про CO₂ це означає, що максимум концентрації настає пізніше від максимуму кількості людей.

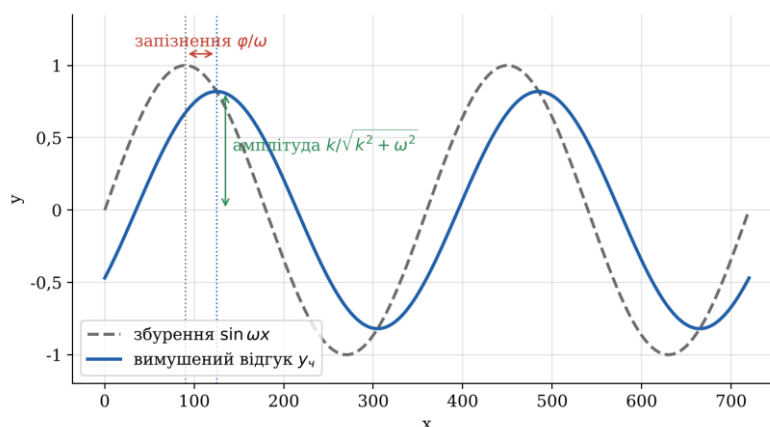


Рис. 1.3 – Згладжування амплітуди та фазове запізнення відгуку лінійної системи на гармонічне збурення

Приклад 1.8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + y = \sin x$.

Розв'язання. $y_{\text{од}} = Ce^{-x}$. Шукаємо $y_{\text{ч}} = M \cos x + N \sin x$: $-M \sin x + N \cos x + M \cos x + N \sin x = \sin x$. Звідси $N + M = 0$, $N - M = 1$, тобто $N = \frac{1}{2}$, $M = -\frac{1}{2}$. Відповідь: $y = Ce^{-x} + \frac{\sin x - \cos x}{2}$.

1.7. Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називають рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = f(x)y^m, \quad m \neq 0; 1. \quad (1.35)$$

Поділивши його на y^m і виконавши заміну $z = y^{1-m}$ (тоді $z' = (1-m)y^{-m}y'$), отримуємо лінійне рівняння відносно z :

$$z' + (1-m)p(x)z = (1-m)f(x). \quad (1.36)$$

Приклад 1.9. Розв'язати рівняння $y' - y = e^x y^2$.

Розв'язання. Тут $m = 2$, $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$. Поділимо рівняння на y^2 : $y^{-2}y' - y^{-1} = e^x$, тобто $-z' - z = e^x$, або $z' + z = -e^x$. За методом інтегрувального множника $(ze^x)' = -e^{2x}$, $z = -\frac{e^x}{2} + Ce^{-x}$. Відповідь: $y = \frac{1}{Ce^{-x} - e^x/2}$, а також $y = 0$.

До рівняння Бернуллі зводиться, зокрема, **логістичне рівняння** $y' = ry(1 - y/K)$, яке застосовують для опису поширення пожежі в лісовому масиві, епідемій, а також поширення інформації серед населення під час оповіщення про надзвичайну ситуацію (див. задачу 1.6).

1.8. Застосування диференціальних рівнянь у задачах цивільного захисту та охорони праці

Побудова математичної моделі процесу за допомогою диференціального рівняння зазвичай виконується за такою схемою:

- 1) обрати шукану функцію часу $y(t)$ (температуру, концентрацію, кількість речовини, рівень рідини тощо) та одиниці вимірювання;
- 2) записати закон збереження (баланс) для малого проміжку часу dt : зміна кількості дорівнює надходженню мінус видалення;
- 3) задати початкову умову $y(0) = y_0$;
- 4) розв'язати задачу Коші одним із методів підрозділів 1.3–1.6;
- 5) проаналізувати розв'язок: стаціонарне значення, сталу часу, час досягнення небезпечного (допустимого) рівня, порівняти з нормативами.

Закон балансу в загальному вигляді:

$$\frac{dy}{dt} = I(t) - O(t, y), \quad (1.37)$$

де $I(t)$ – інтенсивність надходження, $O(t, y)$ – інтенсивність видалення (вона, як правило, пропорційна самій величині y). Розглянемо типові задачі.

Задача 1.1. Охолодження нагрітої конструкції після пожежі

Металевий елемент конструкції після локалізації пожежі має температуру $T_0 = 600$ °С, температура навколишнього повітря $T_a = 20$ °С. Визначити, через скільки хвилин елемент охолоне до $T^* = 50$ °С (температура, за якої дотик не спричиняє опіку), якщо коефіцієнт тепловіддачі $k = 0,05$ хв⁻¹.

Розв'язання. За законом Ньютона швидкість охолодження пропорційна різниці температур тіла та середовища:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad T(0) = T_0. \quad (1.38)$$

Це рівняння вигляду, розглянутого в прикладі 1.3, тому за формулою (1.10)

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} = 20 + 580e^{-0,05t}. \quad (1.39)$$

Розв'язуючи рівняння $T(t^*) = T^*$ відносно часу, отримуємо

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \frac{T_0 - T_a}{T^* - T_a} = \frac{1}{0,05} \ln \frac{580}{30} \approx 59,2 \text{ хв.} \quad (1.40)$$

Графік охолодження показано на рис. 1.4. Отже, розбирання конструкцій без засобів захисту рук допустиме не раніше ніж через годину.

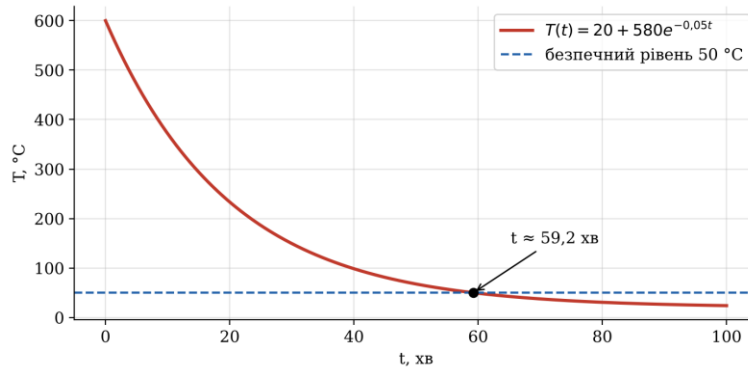


Рис. 1.4 – Охолодження нагрітого елемента конструкції за законом Ньютона

Задача 1.2. Провітрювання приміщення після аварійного викиду чадного газу

Унаслідок несправності газового обладнання концентрація оксиду вуглецю (CO) у котельні об'ємом $V = 300 \text{ м}^3$ досягла $c_0 = 200 \text{ мг/м}^3$. Увімкнено вентиляцію з витратою чистого повітря $Q = 10 \text{ м}^3/\text{хв}$. Через який час концентрація знизиться до гранично допустимої для робочої зони $c_{\text{ГДК}} = 20 \text{ мг/м}^3$?

Розв'язання. За час dt з приміщення видаляється $Qc \, dt$ мг CO, а кількість CO у приміщенні змінюється на $V \, dc$. Баланс:

$$V \frac{dc}{dt} = -Qc, \quad c(0) = c_0 \Rightarrow c(t) = c_0 e^{-Qt/V}. \quad (1.41)$$

Час зниження концентрації до заданого рівня:

$$t^* = \frac{V}{Q} \ln \frac{c_0}{c_{\text{ГДК}}} = \frac{300}{10} \ln 10 \approx 69,1 \text{ хв.} \quad (1.42)$$

З рис. 1.5 видно, що подвоєння витрати вентиляції вдвічі скорочує час провітрювання. У реальних умовах повітря перемішується неідеально, тому розрахунковий час збільшують, вводячи коефіцієнт ефективності повітрообміну, а вхід до приміщення без засобів захисту органів дихання дозволяють лише після контрольного вимірювання газоаналізатором.

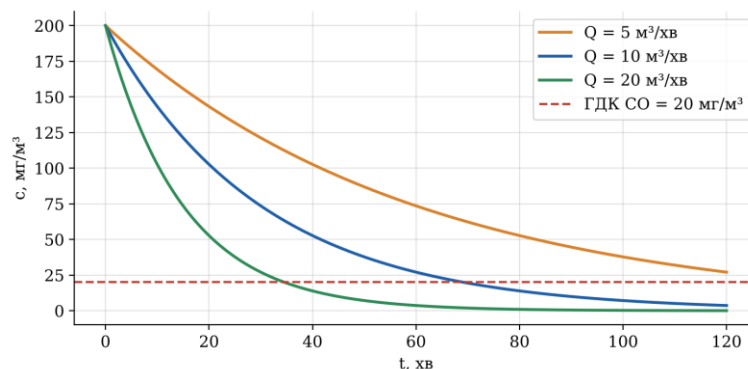


Рис. 1.5 – Зниження концентрації CO під час провітрювання за різних витрат вентиляції

Задача 1.3. Накопичення CO₂ у герметичному укритті

У захисній споруді об'ємом $V = 150 \text{ м}^3$ перебуває $n = 50$ осіб у стані спокою; кожна особа виділяє $q = 0,0003 \text{ м}^3/\text{хв}$ CO₂. Початкова концентрація $c_0 = 450 \text{ ppm}$. Визначити час, за який концентрація досягне 1 % (10 000 ppm) за відсутності вентиляції, та мінімальну витрату фільтровентиляції, за якої цей рівень не буде перевищено.

Розв'язання. Без вентиляції CO₂ лише надходить, тому (концентрація в ppm, множник 10^6 переводить об'ємні частки в мільйонні частки)

$$\frac{dc}{dt} = \frac{10^6 q n}{V} = \frac{10^6 \cdot 0,0003 \cdot 50}{150} = 100 \frac{\text{ppm}}{\text{хв}}, \quad c(t) = c_0 + 100 t. \quad (1.43)$$

Час досягнення рівня $c^* = 10\,000 \text{ ppm}$:

$$t^* = \frac{V(c^* - c_0)}{10^6 q n} = \frac{10\,000 - 450}{100} \approx 95,5 \text{ хв}. \quad (1.44)$$

За наявності припливу зовнішнього повітря з витратою Q і концентрацією c_a рівняння стає лінійним рівнянням (1.29) зі стаціонарним значенням $c_a + 10^6 q n / Q$. Щоб воно не перевищувало c^* , потрібно

$$Q \geq \frac{10^6 q n}{c^* - c_a} = \frac{15\,000}{10\,000 - 450} \approx 1,57 \text{ м}^3/\text{хв} (\approx 94 \text{ м}^3/\text{год}). \quad (1.45)$$

Криві на рис. 1.6 показують, що за $Q = 1 \text{ м}^3/\text{хв}$ рівень 1 % буде перевищено, а за $Q = 2 \text{ м}^3/\text{хв}$ концентрація стабілізується на рівні близько 7950 ppm. Для забезпечення комфортного рівня 1000 ppm знадобилася б витрата близько 27 м³/хв. Ця задача ілюструє, чому під час тривалого перебування людей в укритті вирішальне значення має робота фільтровентиляційного обладнання.

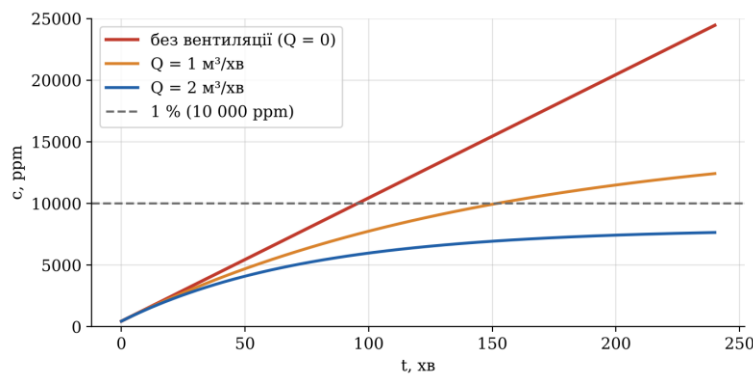


Рис. 1.6 – Концентрація CO₂ в укритті без вентиляції та з фільтровентиляцією

Задача 1.4. Спад активності радіоактивного забруднення

Після радіаційної аварії територію забруднено ізотопом йоду-131 (період напіврозпаду $T_{1/2} = 8,02$ доби). Визначити, через скільки діб активність зменшиться в 100 разів.

Розв'язання. Швидкість розпаду пропорційна кількості ядер, що не розпалися:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \quad (1.46)$$

Активність $A = \lambda N$ змінюється за тим самим законом, тому

$$t^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_0}{A} = T_{1/2} \log_2 \frac{A_0}{A} = 8,02 \cdot \log_2 100 \approx 53,3 \text{ доби}. \quad (1.47)$$

Графік у напівлогарифмічному масштабі (рис. 1.7) є прямою лінією; вертикальні пунктири відповідають періодам напіврозпаду. Подібні розрахунки використовують для визначення допустимого часу перебування на забрудненій території та строків початку робіт з дезактивації.

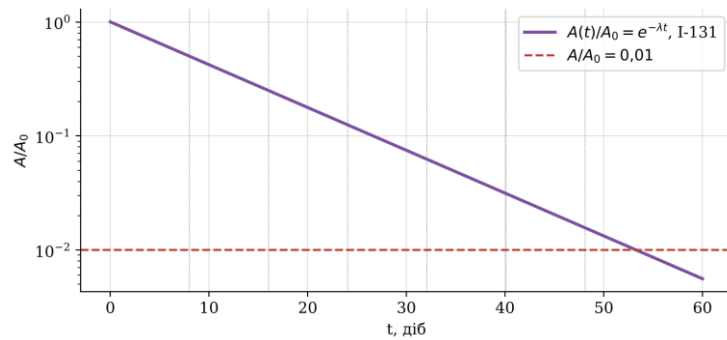


Рис. 1.7 – Спад відносної активності I-131 (напівлогарифмічний масштаб)

Задача 1.5. Аварійне витікання рідини з резервуара

У вертикальному циліндричному резервуарі діаметром $D = 3$ м зберігається небезпечна рідина, рівень якої $h_0 = 4$ м. Біля дна утворився отвір діаметром $d = 5$ см (коефіцієнт витрати $\mu = 0,62$). Визначити час повного витікання рідини, що потрібно для планування заходів з локалізації розливу.

Розв'язання. За формулою Торрічеллі швидкість витікання $v = \mu\sqrt{2gh}$. За час dt об'єм рідини в резервуарі зменшується на $S dh$, де $S = \pi D^2/4 \approx 7,069$ м², а через отвір площею $s = \pi d^2/4 \approx 1,963 \cdot 10^{-3}$ м² витікає $\mu s \sqrt{2gh} dt$. Баланс дає рівняння з відокремлюваними змінними:

$$S dh = -\mu s \sqrt{2gh} dt \Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\mu s \sqrt{2g}}{S} dt. \quad (1.48)$$

Інтегруючи з урахуванням $h(0) = h_0$, отримуємо $2\sqrt{h} = 2\sqrt{h_0} - \frac{\mu s \sqrt{2g}}{S} t$, тобто

$$h(t) = (\sqrt{h_0} - at)^2, \quad a = \frac{\mu s \sqrt{2g}}{2S} \approx 3,81 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{1/2}/\text{с}. \quad (1.49)$$

Резервуар спорожніє, коли $h = 0$:

$$T = \frac{\sqrt{h_0}}{a} = \frac{S}{\mu s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \approx 5244 \text{ с} \approx 87,4 \text{ хв}. \quad (1.50)$$

Рівняння (1.48) – нелінійне: на відміну від експоненційних процесів, рідина витікає за скінченний час, а швидкість спадання рівня зменшується з часом (рис. 1.8).

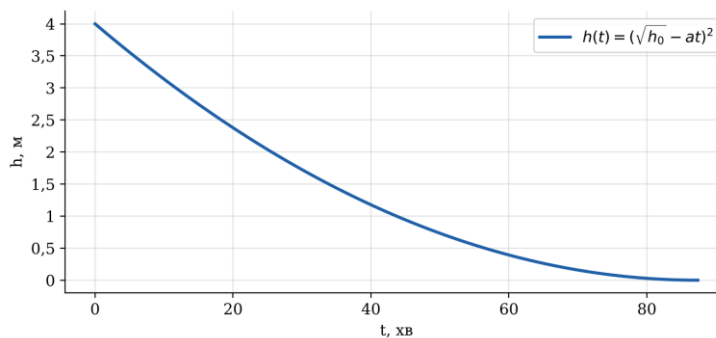


Рис. 1.8 – Зміна рівня рідини в резервуарі під час аварійного витікання

Задача 1.6. Поширення лісової пожежі (логістична модель)

Лісовий масив площею $S_{\max} = 400$ га обмежений протипожежними розривами. На момент виявлення пожежі її площа становила $S_0 = 5$ га, відносна швидкість поширення на початковій стадії $r = 0,4$ год⁻¹. Визначити закон зміни площі пожежі, момент найшвидшого поширення та час, за який вогонь охопить 90 % масиву, якщо пожежу не локалізувати.

Розв'язання. На початковій стадії площа пожежі зростає пропорційно самій площі (довжині кромки), проте з наближенням до протипожежних розривів частка незгорілого лісу, на який може перейти вогонь, зменшується. Цей ефект враховує множник $(1 - S/S_{\max})$, і ми отримуємо логістичне рівняння

$$\frac{dS}{dt} = r S \left(1 - \frac{S}{S_{\max}}\right), \quad S(0) = S_0. \quad (1.51)$$

Це рівняння Бернуллі (1.35) з $m = 2$. Заміна $z = 1/S$ дає лінійне рівняння $z' + r z = r/S_{\max}$, звідки $z = 1/S_{\max} + C e^{-rt}$. Повертаючись до S і враховуючи початкову умову, маємо

$$S(t) = \frac{S_{\max}}{1 + \left(\frac{S_{\max}}{S_0} - 1\right) e^{-rt}} = \frac{400}{1 + 79 e^{-0,4t}}. \quad (1.52)$$

Швидкість поширення $S' = rS(1 - S/S_{\max})$ найбільша, коли $S = S_{\max}/2$ (точка перегину кривої). Цей стан настає в момент

$$t_{\pi} = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{S_{\max}}{S_0} - 1 \right) = \frac{\ln 79}{0,4} \approx 10,9 \text{ год}, \quad S'_{\max} = \frac{r S_{\max}}{4} = 40 \text{ га/год}. \quad (1.53)$$

Час, за який пожежа охопить частку γ масиву, знаходимо з (1.52):

$$t_{\gamma} = \frac{1}{r} \ln \left[\left(\frac{S_{\max}}{S_0} - 1 \right) \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right], \quad t_{0,9} = \frac{\ln(79 \cdot 9)}{0,4} \approx 16,4 \text{ год}. \quad (1.54)$$

Графіки на рис. 1.9 показують головну особливість логістичного процесу: у перші години пожежа зростає повільно (через 3 год її площа становить лише ≈ 16 га, через 6 год – ≈ 49 га), після чого настає фаза стрімкого поширення зі швидкістю до 40 га/год. Тому вирішальне значення мають раннє виявлення пожежі та зосередження сил і засобів до настання точки перегину. Та сама модель з іншими параметрами описує охоплення населення оповіщенням про надзвичайну ситуацію та поширення епідемій.

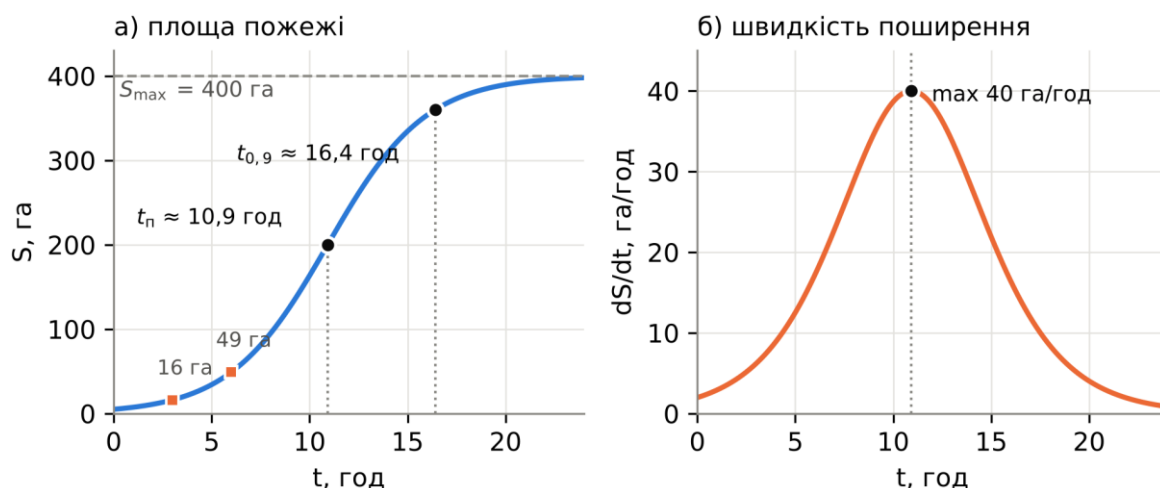


Рис. 1.9 – Поширення лісової пожежі за логістичною моделлю: а) площа пожежі; б) швидкість поширення

Узагальнення розглянутих моделей подано в табл. 1.3.

Таблиця 1.3 – Диференціальні моделі процесів у задачах цивільного захисту та охорони праці

Процес	Рівняння	Розв'язок	Практичний результат
Охолодження тіла	$T' = -k(T - T_a)$	$T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$	час безпечного доступу
Провітрювання після викиду	$Vc' = -Qc$	$c_0 e^{-Qt/V}$	час зниження до ГДК
CO ₂ в укритті без вентиляції	$Vc' = 10^6 qn$	$c_0 + 10^6 qnt/V$	допустимий час перебування
CO ₂ у вентильованому приміщенні	$c' + kc = kc_a + 10^6 qn/V$	(1.30), (1.34)	потрібна витрата повітря
Радіоактивний розпад	$N' = -\lambda N$	$N_0 e^{-\lambda t}$	строки робіт, дозові оцінки
Витікання з резервуара	$Sh' = -\mu s \sqrt{2gh}$	$(\sqrt{h_0} - at)^2$	час розливу, обсяг розливу
Поширення лісової пожежі	$S' = rS(1 - S/S_{\max})$	$\frac{S_{\max}}{1 + (S_{\max}/S_0 - 1)e^{-rt}}$	час до фази стрімкого поширення, площа на момент прибуття сил

1.9. Контрольні питання до розділу 1

- 1) Що називають диференціальним рівнянням, його порядком і розв'язком? Чим загальний розв'язок відрізняється від частинного?
- 2) Сформулюйте задачу Коші та поясніть її геометричний зміст. Що таке поле напрямків та ізокліни?
- 3) Сформулюйте теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Яке її значення для математичного моделювання?
- 4) Як розв'язують рівняння з відокремлюваними змінними? Які розв'язки можуть бути втрачені?

- 5) Яке рівняння називають однорідним і яка підстановка зводить його до рівняння з відокремлюваними змінними?
- 6) Доведіть теорему про структуру загального розв'язку лінійного рівняння першого порядку.
- 7) Порівняйте методи Бернуллі, Лагранжа та інтегрувального множника. Виведіть формулу (1.23).
- 8) Що таке стаціонарне значення та стала часу? За який час перехідний процес завершується на 95 %?
- 9) Виведіть формули амплітудного коефіцієнта K та фазового запізнення φ для гармонічної правої частини.
- 10) Наведіть приклади задач цивільного захисту та охорони праці, які зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОНТРОЛЬ КОНЦЕНТРАЦІЇ CO₂ У ПРИМІЩЕННЯХ

2.1. Вуглекислий газ як показник якості повітря та шкідливий чинник

Властивості та джерела. Діоксид вуглецю (CO₂, вуглекислий газ) – безбарвний газ без запаху з молярною масою $M = 44,01$ г/моль і густиною близько $1,98$ кг/м³ за 0 °С, що приблизно в $1,5$ рази більше за густину повітря. Через це CO₂ накопичується в нижній частині приміщень, підвалах, колодязях, оглядових ямах, траншеях, силосних ямах і винних льохах, де без належного провітрювання може утворюватися небезпечна для життя концентрація. Тому перед входом у такі простори правила охорони праці вимагають контролю газового середовища.

Основними джерелами CO₂ у приміщеннях є дихання людей (у видихуваному повітрі міститься близько 4% CO₂, тобто приблизно $40\,000$ ppm), процеси горіння та бродіння. З погляду цивільного захисту важливим джерелом є установки газового пожежогасіння та вуглекислотні вогнегасники: вогнегасні концентрації CO₂ у системах об'ємного гасіння перевищують 30% об'єму, тому перебування людей у захищуваному приміщенні під час випуску газу неприпустиме і має передбачатися попереджувальна сигналізація з затримкою пуску.

Одиниці вимірювання. Концентрацію CO₂ у повітрі приміщень зазвичай виражають у мільйонних частках об'єму – ppm (parts per million): $1\% = 10\,000$ ppm. У гігієнічних нормативах використовують також масову концентрацію, мг/м³. Перерахунок виконують за формулою

$$c_{\text{мг/м}^3} = c_{\text{ppm}} \frac{M}{V_m}, \quad V_m = 22,414 \cdot \frac{273,15 + t}{273,15} \cdot \frac{101,325}{p} \text{ л/моль}, \quad (2.1)$$

де t – температура повітря, °С; p – атмосферний тиск, кПа. Саме тому під час вимірювань одночасно з концентрацією CO₂ фіксують температуру (див. п. 2.2). За $t = 20$ °С і $p = 101,325$ кПа маємо $V_m = 24,06$ л/моль і $1 \text{ ppm} \approx 1,83$ мг/м³; за $t = 25$ °С – $1 \text{ ppm} \approx 1,80$ мг/м³.

Вплив на організм. Атмосферне повітря нині містить близько $420\text{--}430$ ppm CO₂. Узагальнену шкалу впливу CO₂ на людину за даними [1–6, 21–23] подано в табл. 2.1 та на рис. 2.1. Слід наголосити, що за концентрацій до кількох тисяч ppm сам CO₂ здебільшого не є токсичним; підвищений його рівень свідчить про недостатній повітрообмін, за якого в повітрі накопичуються й інші забруднювачі (леткі органічні сполуки, мікроорганізми, вологість). Водночас дослідження [22] показали погіршення показників прийняття рішень уже за 1000 ppm і суттєве – за 2500 ppm.

Таблиця 2.1 – Вплив концентрації CO₂ на самопочуття та працездатність людини

Концентрація, ppm	% об.	мг/м ³ (20 °С)	Характеристика стану повітря та можливі наслідки
420–450	0,04	≈ 800	Атмосферне (зовнішнє) повітря
450–600	$\leq 0,06$	$\leq 1\,100$	Добра якість повітря в приміщенні
600–1000	0,06–0,1	1 100–1 830	Прийнятно; можливі скарги на «застояне» повітря
1000–1400	0,10–0,14	1 830–2 560	Задуха, сонливість, зниження уваги та якості прийняття рішень
1400–2000	0,14–0,2	2 560–3 660	Втома, головний біль, зростання кількості помилок

Концентрація, ppm	% об.	мг/м³ (20 °C)	Характеристика стану повітря та можливі наслідки
2000–5000	0,2–0,5	3 660–9 150	Головний біль, сонливість, порушення концентрації, прискорене серцебиття, можлива нудота
5000	0,5	9 000	Гранична концентрація для 8-годинної робочої зміни
10 000–30 000	1–3	18 000–55 000	Почастішання дихання, задишка, виражений головний біль; 30 000 ppm – межа для 15-хвилинного впливу
40 000	4	73 000	Безпосередньо небезпечно для життя та здоров'я (IDLH)
50 000–80 000	5–8	> 90 000	Запаморочення, сплутаність свідомості, порушення зору
> 100 000	> 10	> 180 000	Втрата свідомості, судоми, можлива загибель

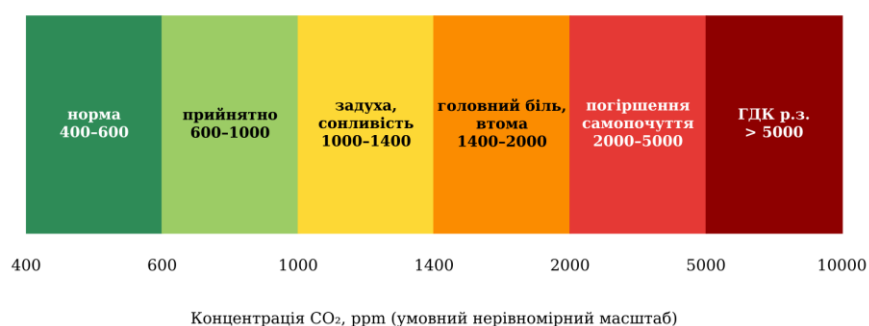


Рис. 2.1 – Кольорова шкала оцінювання якості повітря за концентрацією CO₂

Нормативні та рекомендовані рівні CO₂, на які орієнтуються під час проектування вентиляції та оцінювання умов праці, зведено в табл. 2.2. Для навчальних приміщень у різних джерелах наводять такі контрольні значення: 600 ppm – рекомендований рівень Американської асоціації промислових гігієністів; 700–1200 ppm – градації якості повітря за фінською класифікацією; 1000 ppm – гігієнічний рівень у низці рекомендацій для шкіл (число Петтенкофера); 1200 ppm – для шкіл Нідерландів; 1500 ppm – середнє за навчальний день значення у Великобританії [1, 2].

Таблиця 2.2 – Нормативні та рекомендовані значення концентрації CO₂

Показник	Значення	Джерело
Гігієнічний орієнтир якості повітря житлових і громадських приміщень (число Петтенкофера)	1000 ppm	[1, 2]
Категорія I якості повітря (підвищені вимоги), перевищення над зовнішнім повітрям	550 ppm	[21]
Категорія II (нормальний рівень для нових будівель)	800 ppm	[21]
Категорія III (помірний рівень)	1350 ppm	[21]
ГДК CO ₂ у повітрі робочої зони; гранична концентрація для 8-год зміни	9000 мг/м³ ≈ 5000 ppm	[20, 23]
Короткочасна (15 хв) гранична концентрація	30 000 ppm	[23]
Рівень, безпосередньо небезпечний для життя (IDLH)	40 000 ppm	[23]

Інтенсивність виділення CO₂ людиною залежить від рівня фізичної активності, маси тіла, віку та статі [4]. Орієнтовні значення наведено в табл. 2.3. У

розрахунковій роботі прийнято $q = 0,0004 \text{ м}^3/\text{хв}$ (0,4 л/хв, або 24 л/год), що відповідає розумовій діяльності сидячи з урахуванням певного запасу.

Таблиця 2.3 – Орієнтовна інтенсивність виділення CO₂ однією дорослою людиною

Вид діяльності	Рівень активності, met	q , л/хв	q , м ³ /год
Спокій, сон, відпочинок у положенні сидячи	0,8–1,0	0,25–0,30	0,015–0,018
Розумова робота сидячи (навчання, офіс)	1,0–1,4	0,30–0,42	0,018–0,025
Легка фізична робота стоячи	1,6–2,0	0,48–0,60	0,029–0,036
Робота середньої важкості	2,0–3,0	0,60–0,90	0,036–0,054
Важка фізична робота (рятувальні роботи)	3,0–5,0	0,90–1,50	0,054–0,090

Якість повітря оцінюють комплексно – разом із параметрами мікроклімату. Оптимальні значення температури та відносної вологості повітря робочої зони для різних категорій робіт за ДСН 3.3.6.042-99 [25] наведено в табл. 2.4; ці параметри одночасно з концентрацією CO₂ вимірює прилад, описаний у п. 2.2.

Таблиця 2.4 – Оптимальні параметри мікроклімату робочої зони [25]

Категорія робіт	Температура, °С (холодний період)	Температура, °С (теплий період)	Відносна вологість, %
Ia – легка (енерговитрати до 139 Вт)	22–24	23–25	40–60
Iб – легка (140–174 Вт)	21–23	22–24	40–60
IIa – середньої важкості (175–232 Вт)	18–20	21–23	40–60
IIб – середньої важкості (233–290 Вт)	17–19	20–22	40–60
III – важка (понад 290 Вт)	16–18	18–20	40–60

2.2. Інструментальний контроль: детектор CO₂ – термогігрометр

Для оперативного контролю якості повітря в навчальних аудиторіях, офісах, чергових приміщеннях, укриттях широко застосовують портативні прилади, що поєднують **детектор (монітор) вуглекислого газу та термогігрометр**. Типовим представником є прилад НТ-2000, який постачається під торговими марками Walcom, Xintest та ін. Прилад одночасно вимірює концентрацію CO₂, температуру й відносну вологість повітря, розраховує температуру точки роси та температуру за мокрим термометром, а також може реєструвати результати в пам'яті (режим реєстратора даних) з подальшим перенесенням на комп'ютер через USB-інтерфейс [24].

Принцип дії. Концентрацію CO₂ визначає недисперсійний інфрачервоний (NDIR) сенсор (рис. 2.2). Інфрачервоне випромінювання джерела проходить через оптичну камеру з досліджуванним повітрям; молекули CO₂ поглинають випромінювання в характерній смузі довжини хвилі 4,26 мкм, яку виділяє інтерференційний фільтр перед детектором. Ослаблення випромінювання описує закон Бугера – Ламберта – Бера:

$$I = I_0 e^{-\varepsilon c l}, \quad (2.2)$$

де I_0 та I – інтенсивність випромінювання на вході та виході камери; ε – коефіцієнт поглинання; l – довжина оптичного шляху; c – концентрація. Звідси мікропроцесор приладу обчислює

$$c = \frac{1}{\varepsilon l} \ln \frac{I_0}{I}. \quad (2.3)$$

Двохвильові сенсори мають додатковий опорний канал, який компенсує старіння джерела та забруднення оптики, а функція автоматичного калібрування базової лінії (ABC) періодично «прив'язує» мінімальні показання до рівня зовнішнього повітря.

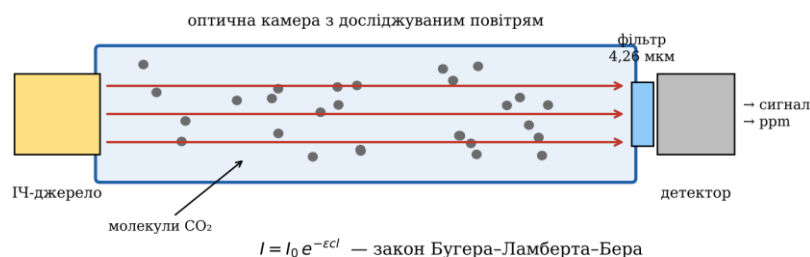


Рис. 2.2 – Схема недисперсійного інфрачервоного (NDIR) сенсора CO₂

Температуру вимірює напівпровідниковий термодатчик, а відносну вологість – ємнісний сенсор, діелектрична проникність чутливого шару якого залежить від кількості поглинутої води. Зовнішній вигляд приладу з позначенням основних елементів наведено на рис. 2.3, технічні характеристики – у табл. 2.5.



Рис. 2.3 – Портативний детектор CO₂ – термогігрометр типу HT-2000: 1 – показання концентрації CO₂, ppm; 2 – температура, °C; 3 – відносна вологість, %; 4 – кнопка увімкнення; 5 – кнопки керування (одиниці температури °C/°F, сигналізація ALM, підсвічування, запис REC, вибір режиму MODE); 6 – бічний відсік з роз'ємом USB

Таблиця 2.5 – Основні технічні характеристики приладу типу HT-2000 [24]

Параметр	Значення
Тип сенсора CO ₂	NDIR (недисперсійний інфрачервоний)
Діапазон вимірювання CO ₂	0–9999 ppm
Похибка вимірювання CO ₂ (400–2000 ppm)	±70 ppm або ±3 % показання
Час відгуку CO ₂	≈ 10 с
Діапазон вимірювання температури	від –10 до +70 °C
Роздільна здатність / похибка температури	0,1 °C / ±0,6 °C (у діапазоні 0–50 °C)
Діапазон вимірювання відносної вологості	0,1–99,9 %

Параметр	Значення
Роздільна здатність / похибка вологості	0,1 % / ± 3 % (у діапазоні 10–90 %)
Пам'ять реєстратора	до 12 700 записів
Живлення	4 елементи АА або USB
Робочі умови	0–50 °С, 0–95 % відносної вологості

Порядок проведення вимірювань.

- 1) Перевірити заряд елементів живлення, увімкнути прилад і дочекатися стабілізації показань (прогрівання сенсора триває кілька хвилин; після перенесення приладу з холоду – довше, щоб уникнути конденсації вологи).
- 2) За потреби перевірити калібрування: витримати прилад на відкритому повітрі, де концентрація має становити близько 420 ppm, і за потреби виконати калібрування згідно з інструкцією виробника.
- 3) Розмістити прилад у робочій зоні на висоті 1,1 м (для сидячих робіт) або 1,5 м (для робіт стоячи), не ближче ніж 1–1,5 м від людей, вікон, дверей, припливних решіток і нагрівальних приладів (рис. 2.5). Не дихати безпосередньо на прилад.
- 4) Встановити інтервал реєстрації (рекомендовано 1–5 хв) та увімкнути режим запису або вести протокол вручну (табл. 2.6).
- 5) Під час вимірювань фіксувати кількість людей у приміщенні, стан вікон і дверей, режим роботи вентиляції.
- 6) Після завершення перенести дані на комп'ютер, побудувати графіки $c(t)$, $T(t)$, $\varphi(t)$ та порівняти їх з нормативами (табл. 2.1–2.4) і результатами математичного моделювання.

Таблиця 2.6 – Форма протоколу вимірювань параметрів повітря

Час, год:хв	t , хв	CO ₂ , ppm	T , °С	Відн. вологість, %	Кількість осіб	Вікна / вентиляція
	0					
	5					
	10					
...	...	...	...	...	...	...

Визначення кратності повітрообміну за результатами вимірювань

Вимірювання дають змогу експериментально визначити параметр моделі $k = Q/V$. Найпростіший спосіб – **метод спаду концентрації**: після виходу людей з приміщення ($n = 0$) рівняння балансу (див. п. 2.3) має розв'язок

$$c(t) = c_a + (c_1 - c_a)e^{-kt}, \quad (2.4)$$

де c_1 – концентрація в момент виходу людей. Логарифмуючи, отримуємо лінійну залежність

$$y_i = \ln \frac{c_i - c_a}{c_1 - c_a} = -k t_i, \quad (2.5)$$

тому k є кутовим коефіцієнтом прямої, яку за методом найменших квадратів (пряма через початок координат) визначають за формулою

$$k = -\frac{\sum t_i y_i}{\sum t_i^2}. \quad (2.6)$$

Кратність повітрообміну (кількість обмінів повітря за годину) та витрата вентиляції:

$$n_{\text{пов}} = 60 k \text{ год}^{-1}, \quad Q = k V. \quad (2.7)$$

Приклад 2.1 (навчальні дані). У приміщенні об'ємом $V = 250 \text{ м}^3$ після закінчення заняття зареєстровано спад концентрації CO_2 (табл. 2.7), $c_a = 450 \text{ ppm}$.

Таблиця 2.7 – Результати вимірювань спаду концентрації та їх обробка (умовні навчальні дані)

$t_i, \text{хв}$	0	5	10	15	20	25	30
c_i, ppm	1650	1481	1327	1193	1090	991	924
y_i	0,000	-0,152	-0,314	-0,479	-0,629	-0,797	-0,929
$t_i, \text{хв}$	35	40	45	50	55	60	
c_i, ppm	872	791	740	711	672	638	
y_i	-1,045	-1,258	-1,420	-1,526	-1,687	-1,854	

Обчислюємо суми: $\sum t_i y_i = -502,56$, $\sum t_i^2 = 16250$. За формулою (2.6) $k = 0,0309 \text{ хв}^{-1}$, кратність повітрообміну $n_{\text{пов}} = 60 \cdot 0,0309 \approx 1,86 \text{ год}^{-1}$, витрата вентиляції $Q = kV \approx 7,73 \text{ м}^3/\text{хв} \approx 464 \text{ м}^3/\text{год}$. Результат апроксимації показано на рис. 2.4: точки добре лягають на пряму, що підтверджує адекватність моделі (2.4).

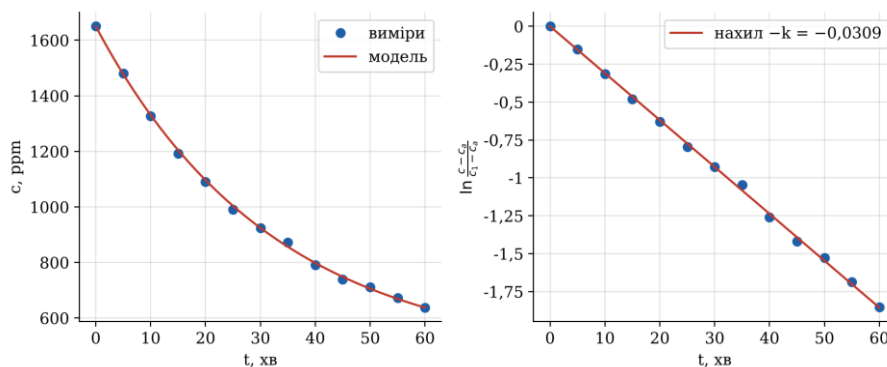


Рис. 2.4 – Визначення параметра k за спадом концентрації CO_2 : а) виміри та модель; б) лінеаризація

2.3. Постановка задачі матеріального балансу

Розглядається приміщення довжиною L , шириною B і висотою H (рис. 2.5). Його об'єм

$$V = L B H. \quad (2.8)$$

Введемо позначення: $c(t)$ – концентрація CO_2 у приміщенні, ppm; c_a – концентрація CO_2 у припливному повітрі, ppm; Q – об'ємна витрата вентиляції, $\text{м}^3/\text{хв}$; q – об'ємна швидкість виділення CO_2 однією людиною, $\text{м}^3/\text{хв}$; $n(t)$ – кількість людей у приміщенні; t – час, хв. Приймаємо такі **припущення**: повітря в приміщенні ідеально перемішується (концентрація однакова в усьому об'ємі); витрати припливу й витяжки однакові та сталі; c_a не змінюється; інших джерел і стоків CO_2 немає.

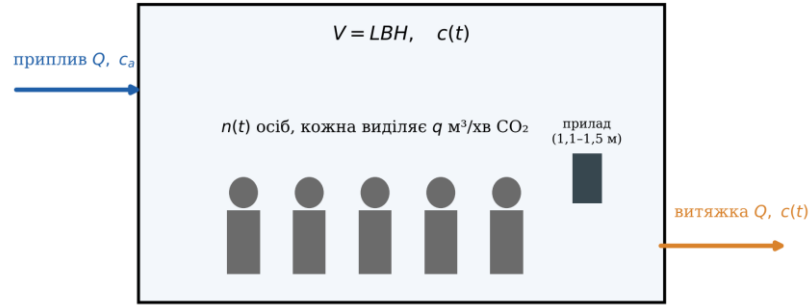


Рис. 2.5 – Розрахункова схема матеріального балансу CO₂ у приміщенні

Нехай $C(t) = 10^{-6}c(t)$ – концентрація в безрозмірних об'ємних частках. За малий проміжок часу dt об'єм CO₂ у приміщенні змінюється на $V dC$; від людей надходить $qn dt$, з припливним повітрям – $QC_a dt$, з витяжкою видаляється $QC dt$. Баланс:

$$V \frac{dC}{dt} = q n(t) + Q C_a - Q C(t). \quad (2.9)$$

Помноживши (2.9) на $10^6/V$ і перейшовши до ppm ($c = 10^6 C$, $c_a = 10^6 C_a$), отримуємо

$$\frac{dc}{dt} + \frac{Q}{V} c = \frac{Q}{V} c_a + \frac{10^6 q}{V} n(t). \quad (2.10)$$

Позначимо через k **кратність повітрообміну** (у хв⁻¹):

$$k = \frac{Q}{V}. \quad (2.11)$$

Тоді (2.10) набуває стандартного вигляду лінійного рівняння зі сталим коефіцієнтом (1.29):

$$\frac{dc}{dt} + k c = k c_a + \frac{10^6 q}{V} n(t), \quad (2.12)$$

а початкова умова (концентрація на момент початку перебування людей)

$$c(0) = c_0. \quad (2.13)$$

Отже, задача (2.12), (2.13) – це задача Коші для лінійного рівняння першого порядку, і для її розв'язування можна застосувати будь-який з методів п. 1.5–1.6.

2.4. Розв'язок для сталої кількості людей

Якщо в приміщенні постійно перебуває $n(t) = n_0$ осіб, права частина (2.12) стала: $b = k c_a + 10^6 q n_0 / V$. За формулою (1.30) стаціонарна концентрація $c_{ст} = b/k$, тобто

$$c_{ст} = c_a + \frac{10^6 q n_0}{Q}, \quad (2.14)$$

а розв'язок задачі Коші

$$c(t) = c_{ст} + (c_0 - c_{ст})e^{-kt} = c_{ст} + (c_0 - c_{ст})e^{-Qt/V}. \quad (2.15)$$

Характерний час оновлення повітря (стала часу):

$$\tau = \frac{1}{k} = \frac{V}{Q}. \quad (2.16)$$

Формула (2.14) показує, що **стаціонарна концентрація не залежить від об'єму приміщення** – вона визначається лише відношенням кількості людей до витрати вентиляції. Об'єм впливає тільки на швидкість наближення до стаціонарного рівня через сталу часу τ : у великому приміщенні рівень CO_2 зростає повільніше. Розв'язуючи рівняння $c(t^*) = c^*$, де c^* – контрольний рівень ($c_0 < c^* < c_{\text{ст}}$), знаходимо **час досягнення контрольного рівня**:

$$t^* = \tau \ln \frac{c_0 - c_{\text{ст}}}{c^* - c_{\text{ст}}}. \quad (2.17)$$

Якщо $c_{\text{ст}} \leq c^*$, контрольний рівень не буде перевищено за жодного часу перебування. З (2.14) випливає також **мінімальна витрата вентиляції**, за якої стаціонарна концентрація не перевищує допустимого значення $c_{\text{доп}}$:

$$Q_{\min} = \frac{10^6 q n_0}{c_{\text{доп}} - c_a}. \quad (2.18)$$

Нормативні вимоги до повітрообміну приміщень різного призначення наведено в [1, 26]. Вплив витрати вентиляції на динаміку концентрації показано на рис. 2.6: зі збільшенням Q зменшуються і стаціонарний рівень, і стала часу.

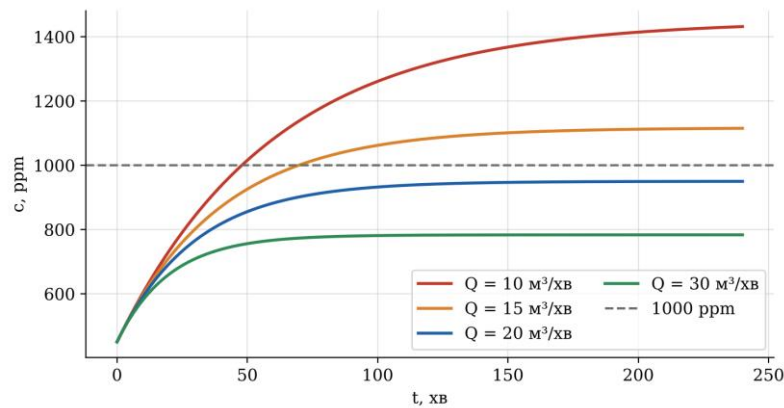


Рис. 2.6 – Зміна концентрації CO_2 за різних витрат вентиляції ($V = 600 \text{ м}^3$, $n_0 = 25$ осіб)

2.5. Розв'язок для періодично змінної кількості людей

У навчальних закладах і на підприємствах кількість людей у приміщенні протягом дня змінюється. Для періодичного режиму в розрахунковій роботі використовується закон

$$n(t) = n_b + \frac{w}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{t_p} \right), \quad 0 \leq t \leq t_p, \quad (2.19)$$

де n_b – базова (мінімальна) кількість людей; w – приріст кількості людей від мінімального до максимального значення; t_p – період зміни, хв. За цим законом кількість людей зростає від n_b (при $t = 0$) до $n_b + w$ (при $t = t_p/2$) і знову зменшується до n_b (при $t = t_p$). Введемо колову частоту

$$\omega = \frac{2\pi}{t_p}. \quad (2.20)$$

Підстановка (2.19) у (2.12) з урахуванням $10^6 q/V = k \cdot 10^6 q/Q$ дає

$$\frac{dc}{dt} + k c = k A - k B \cos \omega t, \quad (2.21)$$

де

$$A = c_a + \frac{10^6 q}{Q} \left(n_b + \frac{w}{2} \right), \quad B = \frac{10^6 q w}{2Q}. \quad (2.22)$$

Величина A – це стаціонарна концентрація для середньої кількості людей $n_b + w/2$, а B – половина розмаху коливань стаціонарної концентрації. Рівняння (2.21) – лінійне з правою частиною вигляду табл. 1.1. Сталій складовій kA відповідає частинний розв'язок A , а гармонічній $-kB \cos \omega t$ – за формулами (1.33) (з $a = -B$) розв'язок $-\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t$. Тому частинний розв'язок

$$c_q(t) = A - \alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t, \quad (2.23)$$

де

$$\alpha = \frac{k^2 B}{k^2 + \omega^2}, \quad \beta = \frac{k \omega B}{k^2 + \omega^2}. \quad (2.24)$$

Перевірка. Підставимо (2.23) у (2.21): $c_q' + k c_q = \alpha \omega \sin \omega t - \beta \omega \cos \omega t + kA - k\alpha \cos \omega t - k\beta \sin \omega t$. Коефіцієнт при $\sin \omega t$: $\alpha \omega - k\beta = \frac{k^2 \omega B - k^2 \omega B}{k^2 + \omega^2} = 0$; коефіцієнт при $\cos \omega t$: $-(\beta \omega + k\alpha) = -\frac{k \omega^2 B + k^3 B}{k^2 + \omega^2} = -kB$. Отже, c_q справді є розв'язком.

За теоремою 1.2 загальний розв'язок

$$c(t) = A - \alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t + C e^{-kt}. \quad (2.25)$$

Сталу C визначаємо з початкової умови (2.13): $c_0 = A - \alpha + C$, звідки

$$C = c_0 - A + \alpha. \quad (2.26)$$

Остаточно розв'язок для періодичного режиму:

$$c(t) = A - \alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t + (c_0 - A + \alpha) e^{-Qt/V}. \quad (2.27)$$

Аналіз розв'язку. Згідно з (1.34) вимушену складову можна записати як

$$c_q(t) = A - B K \cos(\omega t - \varphi), \quad K = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \omega^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega}{k}. \quad (2.28)$$

Звідси випливає, що в усталеному періодичному режимі концентрація коливається навколо середнього значення A з амплітудою $BK < B$, а її максимум $c_{\max} \approx A + BK$ досягається в момент $t = t_p/2 + \varphi/\omega$, тобто із запізненням $\Delta t = \varphi/\omega$ відносно максимуму кількості людей. Запізнення пояснюється інерційністю повітряного об'єму приміщення: поки концентрація нижча за поточне стаціонарне значення, вона продовжує зростати навіть тоді, коли кількість людей уже почала зменшуватися. У першому періоді на вимушену складову накладається перехідна $C e^{-kt}$, тому максимум уточнюють за таблицею значень або графіком.

2.6. Порядок виконання та оформлення розрахункової роботи

Розрахункову роботу виконують індивідуально за варіантом, номер якого визначає викладач (як правило, за порядковим номером у журналі групи). Роботу оформлюють на аркушах формату А4 (рукописно або з використанням текстового редактора, формули – у редакторі формул) у такій послідовності:

- 1) титульний аркуш (зразок наведено в додатку А);
- 2) завдання та таблиця вихідних даних свого варіанта;
- 3) розрахунок параметрів приміщення: V , k , τ , кратність повітрообміну;

- 4) задача 1 – розрахунок для сталої кількості людей: формули з підставленими числовими значеннями, таблиця значень $c(t)$, графік, визначення t^* та $Q_{\min}$, висновок;
- 5) задача 2 – розрахунок для періодично змінної кількості людей: обчислення ω , A , B , α , β , C , розрахункова формула, перевірка початкової умови, таблиця значень $n(t)$ і $c(t)$, графік, аналіз максимуму та запізнення, висновок;
- 6) загальні висновки та рекомендації щодо забезпечення якості повітря;
- 7) список використаних джерел.

Усі формули в роботі нумерують, а при використанні посилаються на їх номер. Проміжні обчислення виконують з точністю не менше чотирьох значущих цифр, остаточні значення концентрації округлюють до 0,1 ppm. Графіки будують на міліметровому папері або з використанням комп'ютерних програм (MS Excel, LibreOffice Calc, Python, MathCAD тощо) з підписаними осями, одиницями вимірювання, позначенням розрахункових точок і контрольного рівня 1000 ppm.

2.7. Приклад виконання розрахункової роботи

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

«Моделювання концентрації CO₂ у приміщенні за допомогою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку». Варіант 0

Вихідні дані наведено в табл. 2.8. Для всіх варіантів $c_a = 450$ ppm, $q = 0,0004$ м³/хв.

Таблиця 2.8 – Вихідні дані варіанта 0

L , м	B , м	H , м	Q , м ³ /хв	c_0 , ppm	n_0 , осіб	n_b , осіб	w , осіб	t_p , хв
20	10	3,0	15	450	25	5	25	360

1. Параметри приміщення та вентиляції

Об'єм приміщення за формулою (2.8):

$$V = 20 \cdot 10 \cdot 3 = 600 \text{ м}^3. \quad (2.29)$$

Кратність повітрообміну (2.11) та стала часу (2.16):

$$k = \frac{15}{600} = 0,025 \text{ хв}^{-1} (1,5 \text{ год}^{-1}), \quad \tau = \frac{1}{0,025} = 40 \text{ хв}. \quad (2.30)$$

2. Задача 1: стала кількість людей

У приміщенні постійно перебуває $n_0 = 25$ осіб. Стаціонарна концентрація за формулою (2.14):

$$c_{\text{ст}} = 450 + \frac{10^6 \cdot 0,0004 \cdot 25}{15} = 450 + 666,7 = 1116,7 \text{ ppm}. \quad (2.31)$$

Підставляючи значення в (2.15), отримуємо розрахункову формулу

$$c(t) = 1116,7 + (450 - 1116,7)e^{-0,025t} = 1116,7 - 666,7 e^{-0,025t}. \quad (2.32)$$

Наприклад, для $t = 120$ хв:

$$c(120) = 1116,7 - 666,7 e^{-3} = 1116,7 - 666,7 \cdot 0,04979 = 1083,5 \text{ ppm}. \quad (2.33)$$

Результати обчислень у розрахункових точках наведено в табл. 2.9, графік – на рис. 2.7.

Таблиця 2.9 – Концентрація CO₂ для сталої кількості людей (варіант 0)

t , хв	0	30	60	90	120	180	240
$e^{-0,025t}$	1,0000	0,4724	0,2231	0,1054	0,0498	0,0111	0,0025
$c(t)$, ppm	450,0	801,8	967,9	1046,4	1083,5	1109,3	1115,0

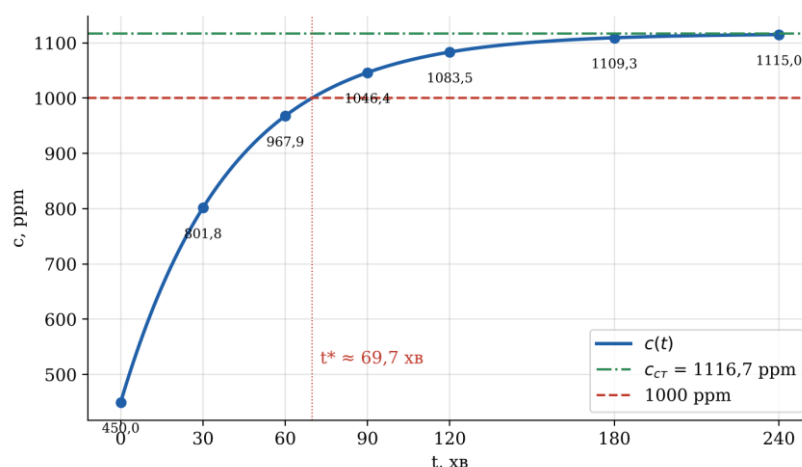


Рис. 2.7 – Зміна концентрації CO₂ для сталої кількості людей (варіант 0)

Оскільки $c_{\text{ст}} = 1116,7 \text{ ppm} > 1000 \text{ ppm}$, контрольний рівень буде перевищено. Час його досягнення за формулою (2.17):

$$t^* = 40 \ln \frac{450 - 1116,7}{1000 - 1116,7} = 40 \ln \frac{666,7}{116,7} = 40 \cdot 1,7430 \approx 69,7 \text{ хв.} \quad (2.34)$$

Мінімальна витрата вентиляції, за якої $c_{\text{ст}} \leq 1000 \text{ ppm}$, за формулою (2.18):

$$Q_{\min} = \frac{10^6 \cdot 0,0004 \cdot 25}{1000 - 450} = \frac{10\,000}{550} \approx 18,18 \text{ м}^3/\text{хв} (\approx 1091 \text{ м}^3/\text{год}). \quad (2.35)$$

Висновок до задачі 1. За заданих параметрів концентрація CO₂ експоненційно зростає від 450 ppm до стаціонарного рівня 1116,7 ppm; стала часу $\tau = 40 \text{ хв}$, тому практично стаціонарний режим устанавлюється через 3τ – 5τ , тобто 2–3,3 год. Рівень 1000 ppm перевищується вже через 69,7 хв, тобто до кінця першої академічної пари; на 120-й хвилині концентрація становить 1083,5 ppm, що за табл. 2.1 відповідає діапазону 1000–1400 ppm (задуха, сонливість, зниження уваги). Отже, витрата вентиляції 15 м³/хв (36 м³/год на одну особу) для тривалого перебування 25 осіб недостатня; її слід збільшити щонайменше до 18,2 м³/хв ($\approx 1091 \text{ м}^3/\text{год}$) або організувати провітрювання під час перерв.

3. Задача 2: періодично змінна кількість людей

Кількість людей змінюється від 5 до 30 осіб за законом (2.19):

$$n(t) = 5 + \frac{25}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{360} \right). \quad (2.36)$$

Колова частота за формулою (2.20):

$$\omega = \frac{2\pi}{360} = 0,01745 \text{ хв}^{-1}. \quad (2.37)$$

Параметри A і B за формулами (2.22):

$$A = 450 + \frac{10^6 \cdot 0,0004}{15} \left(5 + \frac{25}{2}\right) = 916,7 \text{ ppm}, \quad B = \frac{10^6 \cdot 0,0004 \cdot 25}{2 \cdot 15} = 333,3 \text{ ppm.} \quad (2.38)$$

Коефіцієнти гармонічної складової за формулами (2.24) ($k^2 = 6,25 \cdot 10^{-4}$, $\omega^2 = 3,046 \cdot 10^{-4}$):

$$\alpha = \frac{0,025^2 \cdot 333,3}{0,025^2 + 0,01745^2} = 224,1 \text{ ppm}, \quad \beta = \frac{0,025 \cdot 0,01745 \cdot 333,3}{0,025^2 + 0,01745^2} = 156,5 \text{ ppm.} \quad (2.39)$$

Стала інтегрування за формулою (2.26):

$$C = 450 - 916,7 + 224,1 = -242,6 \text{ ppm.} \quad (2.40)$$

Остаточна розрахункова формула (2.27):

$$c(t) = 916,7 - 224,1 \cos(0,01745t) - 156,5 \sin(0,01745t) - 242,6 e^{-0,025t}. \quad (2.41)$$

Перевірка початкової умови: $c(0) = 916,7 - 224,1 - 242,6 = 450,0 \text{ ppm} = c_0$.

Результати обчислень у точках $t = 0, t_p/6, \dots, t_p$ наведено в табл. 2.10, графік – на рис. 2.8.

Таблиця 2.10 – Кількість людей і концентрація CO₂ для періодичного режиму (варіант 0)

t , хв	0	60	120	180	240	300	360
$n(t)$, осіб	5,00	11,25	23,75	30,00	23,75	11,25	5,00
$c(t)$, ppm	450,0	615,0	881,1	1138,1	1163,6	940,0	692,5

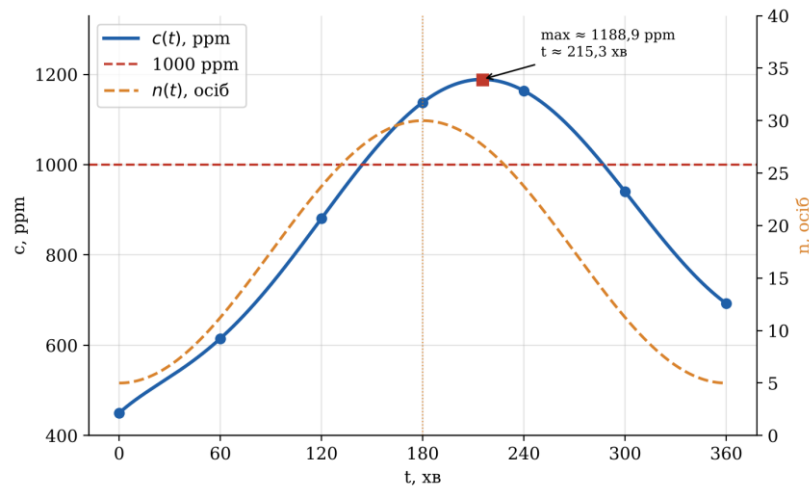


Рис. 2.8 – Кількість людей $n(t)$ та концентрація CO₂ $c(t)$ для періодичного режиму (варіант 0)

Аналіз максимуму та запізнення. За формулами (2.28):

$$K = \frac{0,025}{\sqrt{0,025^2 + 0,01745^2}} = 0,8200, \quad \varphi = \arctg \frac{0,01745}{0,025} = 0,6095 \text{ рад } (34,9^\circ), \quad (2.42)$$

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{0,6095}{0,01745} \approx 34,9 \text{ хв}, \quad c_{\max} \approx A + BK = 916,7 + 273,3 = 1190,0 \text{ ppm.} \quad (2.43)$$

Уточнений чисельний пошук максимуму функції (2.41) на першому періоді (з кроком 0,001 хв) дає $c_{\max} = 1188,9 \text{ ppm}$ при $t_{\max} \approx 215,3 \text{ хв}$, що добре узгоджується з оцінкою усталеного режиму, оскільки перехідна складова до цього часу зменшується до 1,1 ppm. Максимум кількості людей (30 осіб) припадає на $t = 180 \text{ хв}$, отже, фактичне запізнення максимуму концентрації становить 35,3 хв. Рівень 1000 ppm перевищено в інтервалі від $\approx 144,1$ до $\approx 287,1 \text{ хв}$, тобто протягом $\approx 143,0 \text{ хв}$.

Висновок до задачі 2. За періодичного закону (2.36) початкова кількість людей становить 5 осіб, а максимальна – 30 осіб. Концентрація CO₂ не досягає максимуму одночасно з максимальною кількістю людей: найбільше значення у першому періоді становить 1188,9 ppm при $t \approx 215,3 \text{ хв}$, тобто із запізненням $\approx 35,3 \text{ хв}$, яке пояснюється інерційністю повітряного об'єму приміщення (теоретичне значення $\varphi/\omega = 34,9 \text{ хв}$). Амплітуда коливань концентрації (273,3 ppm) менша, ніж розмах стаціонарної концентрації (333,3 ppm), – приміщення згладжує коливання навантаження. Протягом $\approx 143 \text{ хв}$ концентрація перевищує 1000 ppm і відповідає зоні «задуха, сонливість» (табл. 2.1); наприкінці періоду вона знижується до 692,5 ppm. Для дотримання рівня 1000 ppm слід збільшувати витрату вентиляції в період максимального заповнення приміщення (наприклад, керувати вентиляцією за сигналом детектора CO₂) або обмежити максимальну кількість людей.

2.8. Завдання розрахункової роботи

Для кожного варіанта потрібно виконати дві задачі. У всіх варіантах прийняти $c_a = 450 \text{ ppm}$ та $q = 0,0004 \text{ м}^3/\text{хв}$ на одну людину, якщо інше не зазначено викладачем. Об'єм приміщення в таблиці не подається – його обчислюють самостійно за розмірами $L \times B \times H$.

Задача 1. Для сталої кількості людей n_0 :

- 1) обчислити V , k , τ та кратність повітрообміну за годину;
- 2) визначити стаціонарну концентрацію $c_{\text{ст}}$ за формулою (2.14) і записати розрахункову формулу (2.15);
- 3) обчислити концентрацію CO₂ у точках $t = 0; 30; 60; 90; 120; 180; 240 \text{ хв}$, результати звести в таблицю;
- 4) побудувати графік $c(t)$ з позначенням $c_{\text{ст}}$ і рівня 1000 ppm;
- 5) визначити час t^* досягнення рівня 1000 ppm за формулою (2.17) (або встановити, що рівень не перевищується) та мінімальну витрату вентиляції $Q_{\min}$ за формулою (2.18);
- 6) сформулювати висновок з оцінкою якості повітря за табл. 2.1.

Задача 2. Для періодично змінної кількості людей за законом (2.19) з параметрами n_b , w , t_p свого варіанта:

- 1) обчислити ω , A , B , α , β , C і записати розрахункову формулу (2.27), перевірити виконання початкової умови;
- 2) обчислити $n(t)$ і $c(t)$ у точках $t = 0; t_p/6; t_p/3; t_p/2; 2t_p/3; 5t_p/6; t_p$, результати звести в таблицю;

- 3) побудувати графіки $c(t)$ та $n(t)$ (на одному рисунку з двома осями ординат);
- 4) визначити максимальне значення концентрації за перший період, момент його досягнення та запізнення відносно максимуму кількості людей; порівняти з оцінками $A + BK$ та φ/ω за формулами (2.28);
- 5) сформулювати висновок з оцінкою якості повітря та рекомендаціями.

2.9. Варіанти завдань

У табл. 2.11 наведено 80 варіантів. Для задачі 1 використовується стала кількість людей n_0 і початкова концентрація c_0 . Для задачі 2 використовується закон (2.19), параметри якого n_b , w і t_p задано в таблиці, та та сама початкова концентрація c_0 .

Таблиця 2.11 – Варіанти розрахункової роботи

№ вар.	L , м	B , м	H , м	Q , м ³ /хв	c_0 , ppm	n_0 , осіб	n_b , осіб	w , осіб	t_p , хв
1	12	10	3,5	10	450	16	3	15	180
2	14	13	2,8	28	450	47	6	20	240
3	16	8	3,0	20	450	36	9	25	300
4	18	11	3,2	12	450	26	12	30	360
5	20	6	3,5	30	450	57	15	35	420
6	22	9	2,8	22	450	34	2	40	480
7	24	12	3,0	15	450	38	5	45	180
8	26	7	3,2	35	450	70	8	14	240
9	28	10	3,5	25	450	54	11	19	300
10	30	13	2,8	18	450	41	14	24	360
11	12	8	3,0	10	450	23	1	29	420
12	14	11	3,2	28	450	68	4	34	480
13	16	6	3,5	20	450	31	7	39	180
14	18	9	2,8	12	450	35	10	44	240
15	20	12	3,0	30	450	48	13	13	300
16	22	7	3,2	22	450	37	0	18	360
17	24	10	3,5	15	450	27	3	23	420
18	26	13	2,8	35	450	66	6	28	480
19	28	8	3,0	25	450	50	9	33	180
20	30	11	3,2	18	450	28	12	38	240
21	12	6	3,5	10	450	32	15	43	300
22	14	9	2,8	28	450	60	2	12	360
23	16	12	3,0	20	450	40	5	17	420
24	18	7	3,2	12	450	27	8	22	480
25	20	10	3,5	30	450	73	11	27	180
26	22	13	2,8	22	450	35	14	32	240
27	24	8	3,0	15	450	25	1	37	300
28	26	11	3,2	35	450	59	4	42	360
29	28	6	3,5	25	450	45	7	11	420
30	30	9	2,8	18	450	37	10	16	480
31	12	12	3,0	10	450	19	13	21	180
32	14	7	3,2	22	450	44	0	26	240
33	16	10	3,5	20	450	43	3	31	300
34	18	13	2,8	12	450	22	6	36	360
35	20	8	3,0	30	450	68	9	41	420
36	22	11	3,2	22	450	54	12	10	480
37	24	6	3,5	15	450	34	15	15	180

№ вар.	L, м	B, м	H, м	Q, м³/хв	c ₀ , ppm	n ₀ , оціб	n _b , оціб	w, оціб	t _p , хв
38	26	9	2,8	35	450	56	2	20	240
39	28	12	3,0	25	450	42	5	25	300
40	30	7	3,2	18	450	32	8	30	360
41	28	7	2,7	25	520	47	7	12	300
42	17	13	3,6	26	520	42	11	16	540
43	26	7	3,3	25	480	39	10	26	360
44	13	8	2,8	14	450	40	8	13	360
45	24	13	2,7	20	450	40	15	23	240
46	19	11	3,0	20	600	33	4	44	240
47	28	14	3,6	22	600	47	3	22	360
48	26	11	3,3	20	480	45	14	10	300
49	24	9	3,0	10	450	19	1	35	300
50	20	10	3,2	24	600	59	3	15	480
51	20	10	3,3	8	500	23	5	25	480
52	28	10	2,7	26	550	38	9	43	300
53	17	12	3,5	28	480	45	6	30	420
54	13	6	4,0	15	450	26	0	20	540
55	22	14	3,2	24	600	43	7	30	420
56	16	14	2,8	14	520	27	15	18	480
57	22	6	3,5	10	450	29	12	43	540
58	26	11	3,5	30	480	60	2	38	420
59	18	7	3,6	16	550	34	4	31	420
60	17	11	4,0	16	500	36	10	31	300
61	30	10	3,2	14	600	43	8	45	420
62	28	12	3,0	30	500	73	13	21	180
63	19	11	3,0	30	450	48	7	22	360
64	32	14	3,5	24	450	36	7	42	180
65	19	11	3,5	28	520	43	13	42	300
66	17	14	2,8	14	520	24	1	33	300
67	12	12	3,0	10	520	42	5	21	180
68	13	9	3,2	24	500	43	15	11	540
69	11	13	3,6	15	480	29	4	39	540
70	19	12	2,8	28	550	56	13	14	540
71	15	13	3,5	22	520	36	11	12	240
72	18	8	3,3	12	550	45	8	10	360
73	28	8	4,0	18	520	40	12	36	420
74	14	13	3,5	20	550	37	10	37	360
75	21	8	3,0	26	450	56	11	10	180
76	18	11	3,2	12	480	32	14	29	540
77	22	10	3,3	18	550	27	4	36	420
78	17	9	3,2	25	600	37	0	44	540
79	15	10	3,3	12	480	22	0	14	360
80	11	13	2,7	14	450	32	8	45	180

2.10. Вимоги до висновків. Контрольні питання

У висновках до задачі 1 потрібно зазначити стаціонарну концентрацію $c_{\text{ст}}$, характерний час $\tau = V/Q$, час досягнення рівня 1000 ppm або факт відсутності перевищення, мінімальну необхідну витрату вентиляції. У висновках до задачі 2 потрібно вказати максимальне значення $c(t)$ за перший період, момент його досягнення, концентрацію наприкінці періоду, тривалість перевищення рівня 1000

ppm (якщо воно є) та пояснити запізнення максимуму концентрації відносно максимуму кількості людей. В обох задачах необхідно оцінити якість повітря за табл. 2.1 і запропонувати інженерні заходи (збільшення витрати вентиляції, провітрювання, обмеження кількості людей, автоматичне керування вентиляцією за показаннями детектора CO₂).

Контрольні питання до розділу 2

- 1) Чим небезпечний вуглекислий газ? Де він може накопичуватися і чому?
- 2) Як перерахувати концентрацію CO₂ з ppm у мг/м³? Навіщо при цьому вимірювати температуру?
- 3) Назвіть нормативні та рекомендовані рівні CO₂ для приміщень і робочої зони.
- 4) Поясніть принцип дії NDIR-сенсора. Які величини вимірює прилад типу НТ-2000?
- 5) Як правильно розмістити прилад у приміщенні та провести вимірювання?
- 6) Як за результатами вимірювань визначити кратність повітрообміну?
- 7) Виведіть рівняння матеріального балансу CO₂ (2.12). Які припущення покладено в його основу?
- 8) Чому стаціонарна концентрація не залежить від об'єму приміщення? На що впливає об'єм?
- 9) Як визначити мінімальну витрату вентиляції для дотримання заданого рівня CO₂?
- 10) Чому максимум концентрації CO₂ запізнюється відносно максимуму кількості людей? Як оцінити це запізнення?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1) Жуковський С. С., Возняк О. Т., Довбуш О. М., Люльчак З. С. Вентилювання приміщень. Львів: Вид-во Національного університету «Львівська політехніка», 2007. 476 с.
- 2) Гембара Т. В., Марич В. М. Диференціальне рівняння управління припливно-витяжною системою вентиляції за вмістом CO₂ у приміщенні. Охорона праці: освіта і практика : зб. наук. праць IV Всеукр. наук.-практ. конф. Львів: ЛДУ БЖД, 2024. С. 34–35.
- 3) Гембара Т. В., Марич В. М., Трусевич О. М. Математичне моделювання роботи системи припливно-витяжної вентиляції в стаціонарному та нестаціонарному режимах. Охорона праці: освіта і практика : зб. наук. праць V Всеукр. наук.-практ. конф. Львів: ЛДУ БЖД, 2025. С. 79–81.
- 4) Persily A. K., de Jonge L. Carbon dioxide generation rates for building occupants. Indoor Air. 2017. Vol. 27, No. 5. P. 868–879.
- 5) Гембара Т. Технічний контроль концентрації вуглекислого газу в закритих приміщеннях. Цивільний захист в умовах війни : зб. тез доп. II Міжнар. наук.-практ. конф. (м. Львів, 15 квітня 2026 р.). Львів, 2026. С. 364–365.
- 6) Гембара Т. Розрахункові методи та технічні засоби контролю концентрації вуглекислого газу в приміщеннях з системою припливно-витяжної вентиляції. Проблеми надзвичайних ситуацій : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. (21 травня 2026 р.). Черкаси: НУЦЗУ, 2026. С. 439–440.
- 7) Гембара Т. В. Модель аналізу глобальної динаміки вуглекислого газу з інтегральним ядром пам'яті. Охорона праці: освіта і практика : зб. наук. праць VI Всеукр. наук.-практ. конф. Львів: ЛДУ БЖД, 2026. С. 105–107.
- 8) Трусевич О., Гембара Т. Аналіз математичних моделей моніторингу глобальної динаміки CO₂ та обґрунтування моделі з ядром пам'яті. Інформаційні технології у сфері захисту довкілля : матеріали III Міжнар. наук.-практ. конф. (14–15 травня 2026 р.). Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2026. С. 239–242.
- 9) Вища математика : підручник / Е. І. Личковський, П. Л. Свердан, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий; за ред. Е. І. Личковського, П. Л. Свердана. Вінниця: Нова книга, 2014. 632 с.
- 10) Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ: А.С.К., 2001. 648 с.
- 11) Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : зб. задач. Київ: А.С.К., 2001. 479 с.
- 12) Тріщ Б. М. Вища математика для економістів : навч. посіб. Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2011. 552 с.
- 13) Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 1. Харків: ХНУРЕ; Фактор, 2004. 592 с.
- 14) Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Кривошеєва Г. М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 2. Харків: ХНУРЕ, 2002. 440 с.
- 15) Басманов О. Є., Кириченко І. К., Мігунова Л. В., Сознік О. П. Вища математика. Харків: АПБУ, 2003. 136 с.
- 16) Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика. Ч. 1, 2. Київ: Техніка, 2000.

- 17) Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика : зб. задач. Ч. 1, 2. Київ: Техніка, 2000.
- 18) Кузик А. Д., Карабин О. О., Трусевич О. М. Вища математика : навч. посіб. Ч. 1. Львів: ЛДУ БЖД, 2014. 400 с.
- 19) Кузик А. Д., Карабин О. О., Трусевич О. М. Вища математика : навч. посіб. Ч. 2. Львів: ЛДУ БЖД, 2014. 200 с.
- 20) Commission Directive 2006/15/EC establishing a second list of indicative occupational exposure limit values. Official Journal of the European Union. 2006. L 38. P. 36–39.
- 21) EN 16798-1:2019. Energy performance of buildings – Ventilation for buildings – Part 1: Indoor environmental input parameters for design and assessment of energy performance of buildings addressing indoor air quality, thermal environment, lighting and acoustics. Brussels: CEN, 2019.
- 22) Satish U., Mendell M. J., Shekhar K. et al. Is CO₂ an indoor pollutant? Direct effects of low-to-moderate CO₂ concentrations on human decision-making performance. Environmental Health Perspectives. 2012. Vol. 120, No. 12. P. 1671–1677.
- 23) NIOSH Pocket Guide to Chemical Hazards: Carbon dioxide. National Institute for Occupational Safety and Health. URL: <https://www.cdc.gov/niosh/npg/npgd0103.html>.
- 24) HT-2000 Carbon Dioxide / Temperature / RH Data Logger : технічні характеристики та інструкція з експлуатації.
- 25) ДСН 3.3.6.042-99. Санітарні норми мікроклімату виробничих приміщень. Київ: МОЗ України, 1999.
- 26) ДБН В.2.5-67:2013. Опалення, вентиляція та кондиціонування. Київ: Мінрегіон України, 2013.

**ДОДАТОК А. ЗРАЗОК ТИТУЛЬНОГО АРКУША
РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ**

**ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ
ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ**

Кафедра прикладної математики і механіки

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

з дисципліни «Вища математика»

на тему: «Моделювання концентрації CO_2 у приміщенні за
допомогою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку»

Варіант № _____

Виконав(ла): курсант (студент) групи _____
_____ (прізвище, ініціали)

Перевірів(ла): _____

Оцінка: _____ Дата: _____ Підпис: _____

Львів – 20__