Про співвідношення Бореля для рядів, подібних на ряди Тейлора-Діріхле

Скасків О. Б.
Львівський національний університет імені Івана Франка
olskask@gmail.com

Тарновецька О. М.
Чернівецький факультет НТУ "Харківський політехнічний інститут"
savinska.olga@mail.ru

Трусевич О. М.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
trusev14@gmail.com

Нехай L–клас додатних неспадних до $+\infty$ на $[0;+\infty)$ функцій, а $S(\lambda,\beta,\tau)$ клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}, \quad a_n \geq 0 \ (n \geq 0),$$

де $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ невід'ємні послідовності, $\tau(x)$ – додатна неспадна на $[0;+\infty)$ функція. Через $S(\lambda,\beta,\tau,\Phi)$, $\Phi \in L$, позначимо підклас класу $S(\lambda,\beta,\tau)$, в який входять функції F, для яких $\ln F(x) \leq \Phi(x)$ $(x \geq x_0)$.

Для $x \geq 0$ визначимо $\mu(x,F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$.

Правильне таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $\tau'(x) \geq 1$ $(x > 0)$. Якщо $F \in S(\lambda,\beta,\tau,\Phi_1)$, $\Phi_1(x) \equiv x\Phi(x)$, $\Phi \in L$, і виконується умова*

$$(\forall b>0)\colon \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \sum_{0<\alpha_k\leq b\Phi(R)} \frac{1}{k\alpha_k} = 0, \quad \alpha_k = \lambda_k + \beta_k, \qquad (A)$$

то співвідношення Бореля $\ln F(x) = (1+o(1))\ln\mu(x,F)$ справджується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E нульової лінійної щільності, тобто $DE := \overline{\lim\limits_{R\to+\infty}} \frac{1}{R}\int_{E\cap[0,R]} dx = 0$.

Твердження теореми раніше доведено ([1]) в класі $S(\lambda,\beta,\tau,\Phi)$, який, наприклад, у випадку $\Phi(x) = x^\rho$, $\rho > 0$ є істотно вужчим за клас $S(\lambda,\beta,\tau,\Phi_1)$.

Припущення. 1. *Умова (A) є і необхідною для того, щоб співвідношення Бореля виконувалось для кожної функції $F \in S(\lambda,\beta,\tau,\Phi_1)$ при $x \to +\infty$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності.*

2. *Опис виняткової множини в нашій теоремі істотно покращити не можна.*

[1] О.Б. Скасків, О.М. Трусевич. *Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів* // Препринт № 17-1. – Львів: Інститут прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, 1999. – 18 с.