УДК 514.18

ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ДЕЯКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТУ

Мартин Є.В., д.т.н.

Ренкас А.Г.

Національний університет "Львівська політехніка",

Львівський інститут пожежної безпеки МВС України

Тел.(0322) 33-00-55

***Анотація* - робота присвячена розв'язанню однієї з задач формування багатовидів комплексного простору, а саме графоаналітичній інтерпретації деяких тригонометричних функцій комплексного аргументу на прикладі функцій синуса і косинуса. Показана доцільність графоаналітичного відображення таких функцій у чотиривимірному комплексному просторі з використанням частинних графіків комплексних функцій дійсної змінної, що реалізуються за допомогою тригонометричних і гіперболічних функцій дійсного аргументу.**

***Ключові слова* – комплексний простір, багатовид, функція комплексного аргументу.**

Формування сфер n–вимірного простору належить до числа задач, які розв'язує багатовимірна геометрія евклідового простору [1]. Частинні випадки відображення сфер використовуються у комплексному просторі при розв'язанні деяких задач. Наприклад, при аналізі обмеженої та необмеженої послідовності комплексних чисел $z=x+iy$ що знаходяться у розширеній двовимірній комплексній площині розглядається коло радіусом OA (рис. 1), кожна точка $Z_j=x_j+iy_j$ якого задовольняє умові [2]:

$$\left|Z_j\right| = OA, \tag{1}$$

де $\left|Z_j\right| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$ - модуль комплексного числа.

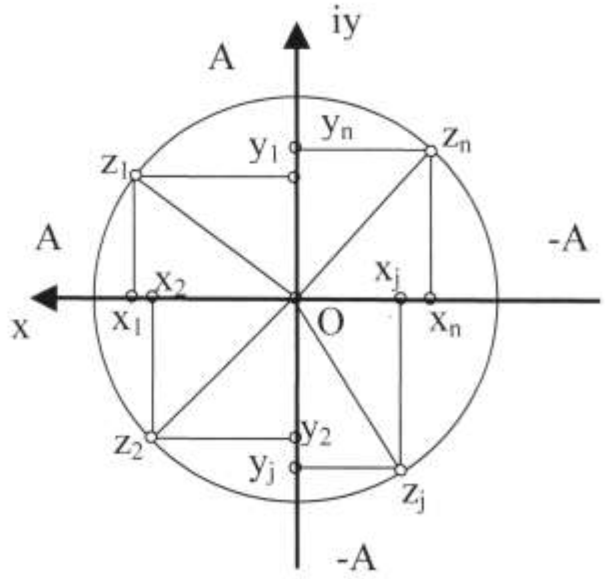

Рис. 1. Коло у комплексній площині

Проте у комплексному просторі $oxiyuiv$ з вимірами складових аргументу $z=x+iy$ та функції $\omega=u+iv$ згідно аналітичного виразу

$$\omega = u + iv = \omega(z) = \omega(x + iy) \quad (2)$$

площина $oxiy$ являє площину значень прообразів (2). Тоді коло радіусом OA є проекцією гіперциліндра у площині $oxiy$, який виділяє на двовимірній поверхні $\omega=\omega(z)$ замкнену лінію як частинний графік комплексної функції дійсної змінної. Сферу евклідового чи комплексного простору можна визначити згідно рівняння [3]:

$$\omega^2 + r^2 = R^2, \quad (3)$$

де ω, r, R - комплексні числа.

Формувати сферу зручно, використовуючи її параметричні рівняння

$$\begin{aligned} \omega &= R\sin t; \\ z &= R\cos t. \end{aligned} \tag{4}$$

Нехай ω і z приймають в (4) комплексні, а R - дійсні значення. Тоді параметр t також повинен бути комплексним. Розглянемо особливості графоаналітичного представлення залежностей (4) з урахуванням [4]. Приймемо також значення $R=1$. Представимо (4) у вигляді

$$\begin{aligned} \omega_1 &= u_1 + iv_1 = \sin(x+iy) = \sin x\, ch\, y + i\cos x\, sh\, y; \\ \omega_2 &= u_2 + iv_2 = \cos(x+iy) = \cos x\, ch\, y - i\cos x\, sh\, y, \end{aligned} \tag{5}$$

де $ch\, y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$; $sh\, y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$.

Тоді дійсні та уявні складові функцій комплексних змінних ω_1, ω_2 визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2};\; u_2 = \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2}; \\ v_2 &= \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2};\; v_2 = \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для побудови комплексного креслення кожної з тригонометричних функцій (5) виконаємо їх перерізи січними координатними тривимірними гіперплощинами зі слідами $y_j = const$ [5] на прикладі функції $\omega_1 = \sin z$ (рис. 2).

Для площини нульового рівня $y_1 = 0$ одержуємо

$$\begin{aligned} \omega_1 &= u_1 = \sin x; \\ \omega_2 &= u_2 = \cos x, \end{aligned} \tag{7}$$

які відображаються в площинах дійсних змінних oxu_1 та oxu_2. Нульових значень згідно (7) функції ω_1, ω_2 набувають при значеннях дійсної частини комплексного аргументу $z = x + iy$ відповідно $x = k\pi$ та $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ незалежно від значень його уявної частини iy.

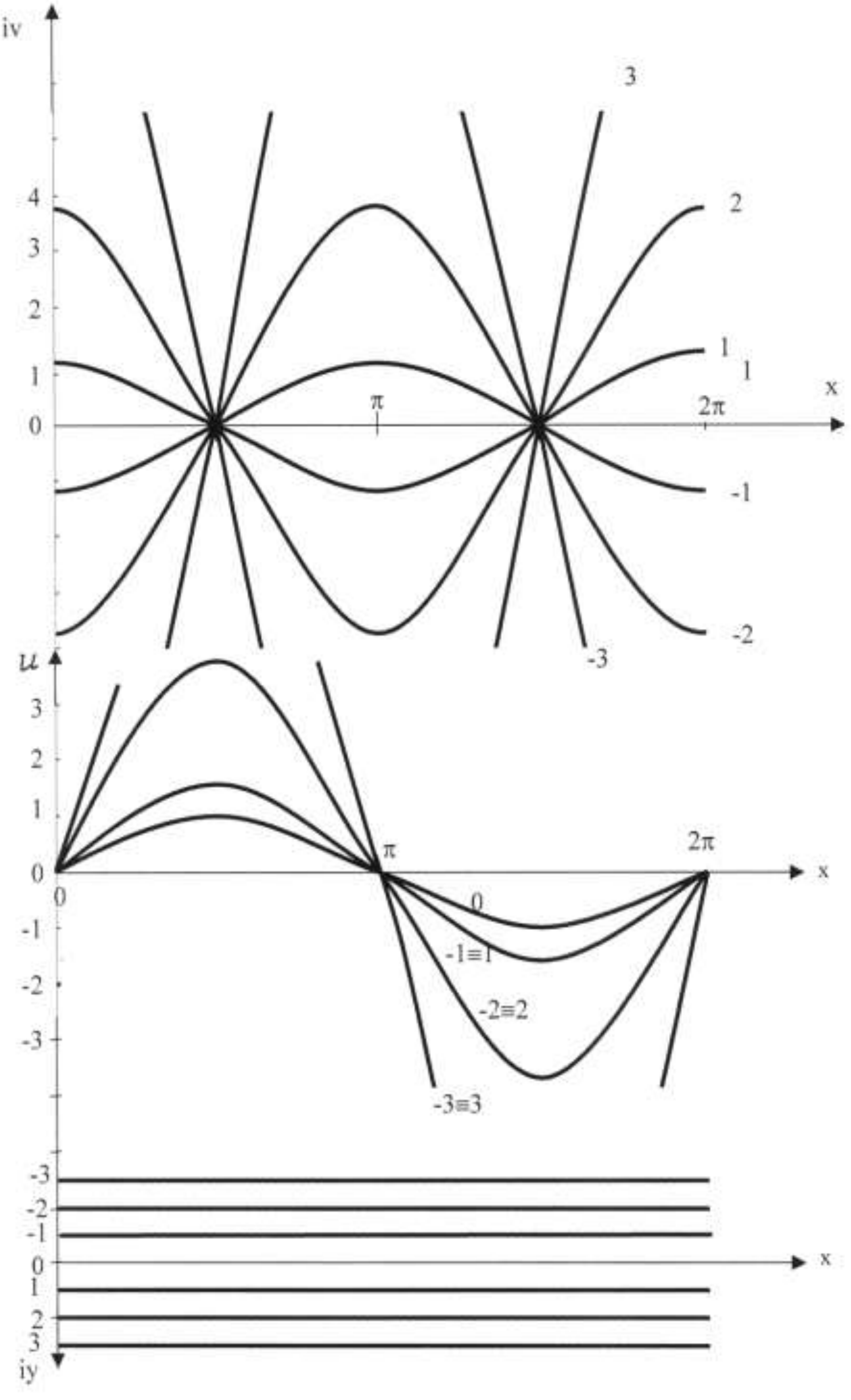

Рис. 2. Комплексне креслення функції $\omega = \sin z$

У координатній тривимірній гіперплощині з довільним слідом x_k одержуємо частинні графіки складових u та v у вигляді гіперболічних функцій $ch\ y$ та $sh\ y$.

Гіперболічна функція $sh\ y$ приймає нульове значення при $y=0$, але при такому значенні згідно (5) обидві функції комплексної змінної відображаються у площинах дійсних змінних (уявна частина виразу дорівнює нулю). При зростанні $|y|$ має місце збільшення значень модулів усіх складових (6). Перетин координатних площин oxu та $oxiv$ відбувається в точках $x = k\frac{\pi}{2}$.

Література

1. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства - М.: Наука, 1966. – С. 215-232.
2. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – С. 26-82.
3. *Гумен М.С., Мартин Є.В., Ренкас А.Г.* Сфери комплексного простору // Прик. геометрія та інж. графіка. - К.:КДТУБА, 2001. – Вип.71.
4. *Мартин Є.В.* Комплексне креслення для відображення функції комплексної змінної // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Мелітополь: ТДАТА, 1998. – Вип. 4. – Т.3. – С. 89-92.
5. *Гумен М.С., Мартин Є.В.* До графічного моделювання багатовидів комплексного простору // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Мелітополь: ТДАТА, 1998. – Вип. 4. – Т.2. – С. 58-61.