

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ  
ИНСТИТУТ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА им. А. В. ЛЫКОВА  
Журнал основан в январе 1958 г.

*ИФЖ*

*И*  
*НЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ*  
**ЖУРНАЛ**

JOURNAL  
OF ENGINEERING PHYSICS  
AND THERMOPHYSICS

**Отдельный оттиск**  
**Offprint**

**Том 89, № 2**  
**Vol. 89, No. 2**

МАРТ–АПРЕЛЬ  
MARCH–APRIL

2016

# ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Основан в январе 1958 г.

---

---

2016. ТОМ 89, № 2 (МАРТ–АПРЕЛЬ)

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОС В ДИСПЕРСНЫХ И ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

<b>Шагапов В. Ш., Дударева О. В.</b> Нелинейные эффекты фильтрации при переходных режимах работы скважины .....	285
<b>Теплицкий Ю. С., Пицуха Е. А., Прокопович О. В.</b> О движении частиц в газовом потоке при наличии тангенциального и осевого дутья .....	292
<b>Елизаров Д. В., Елизаров В. В., Камалиев Т. С., Дьяконов С. Г.</b> Математическое моделирование массопереноса при ламинарном движении капли в жидкой среде .....	298
<b>Кузнецов Г. В., Феоктистов Д. В., Орлова Е. Г.</b> Режимы растекания капли воды по подложкам с различной смачиваемостью .....	310
<b>Жилин А. А., Федоров А. В.</b> Исследование акусто-конвективной сушки мяса .....	316
<b>Даулбаев Ч. Б., Бодыков Д. У., Алиев Е. Т., Мансуров З. А.</b> Влияние электрического поля на ультразвуковой капиллярный эффект .....	326
<b>Пиралишвили Ш. А., Бирфельд А. А., Степанов Е. Г., Михайлов А. С., Спесивцева Н. С.</b> Экспериментальное исследование влияния производственных факторов на свойства торфяных брикетов .....	331

### ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛООБМЕН В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

<b>Карташов Э. М.</b> Математические модели теплопроводности с двухфазным запаздыванием .....	338
<b>Таций Р. М., Пазен О. Ю.</b> Общие краевые задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами .....	350
<b>Кот В. А.</b> Многократное интегрирование уравнения теплопроводности для ограниченного изнутри пространства .....	362

### ГИДРОГАЗОДИНАМИКА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

<b>Исатаев С. И., Толеуов Г., Исатаев М. С., Болысбекова Ш. А.</b> Экспериментальное исследование трехмерных турбулентных струй, истекающих из сопла с прямоугольным выходным сечением .....	383
<b>Перминов А. В., Никулин И. Л.</b> Математическая модель процессов тепломассопереноса и диффузии магнитного поля в индукционной печи .....	388
<b>Губайдуллин Д. А., Осипов П. П., Насыров Р. Р.</b> Влияние положения частицы и коэффициента увлечения на скорость дрейфа в акустическом резонаторе .....	400
<b>Молдабекова М. С., Асембаева М. К., Акжолова А. А.</b> Экспериментальное исследование неустойчивости механического равновесия четырехкомпонентной смеси с балластными газами .....	407
<b>Тютюма В. Д.</b> Эффективность энергоразделения вихресточка .....	412
<b>Singh B. and Yadav A. K.</b> Plane Waves in a Rotating Monoclinic Magnetoelastostic Medium .....	417
<b>Narla V. K., Prasad K. M., and Ramana Murthy J. V.</b> Second Law Analysis of a Peristaltic Flow of an Incompressible Viscous Fluid in a Curved Channel .....	428

### ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОС В ПРОЦЕССАХ ГОРЕНИЯ

<b>Крайнов А. Ю., Моисеева К. М.</b> Горение метано-воздушной смеси в щелевой горелке с инертной вставкой при теплоотдаче в окружающую среду .....	435
<b>Крайнов А. Ю., Крайнов Д. А., Порязов В. А.</b> Математическое моделирование горения смеси ультрадисперсного алюминия с водой .....	444
<b>Зима В. П., Касымов Д. П.</b> Исследование воздействия очага горения на образцы древесины с помощью ИК-диагностики .....	452

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

<b>Плевако Ф. В., Горбатов С. В., Давидович П. А., Приходько Е. М., Шушков С. В., Круль Л. П., Бутовская Г. В., Шахно О. В., Гусакова С. В., Королик О. В., Мазаник А. В.</b> Осаждение функциональных покрытий из ацетилен-содержащей плазмы при атмосферном давлении .....	457
<b>Гуцев С. А.</b> Переходные явления при зондовых измерениях в плазме низкой плотности гелия и кислорода .....	464
<b>Васильев С. В., Иванов А. Ю., Копыцкий А. В., Недолугов В. И.</b> Динамика развития плазменного факела и роста кратера в ходе лазерной обработки материалов и ее диагностика .....	470
<b>Тимеркаев Б. А., Петрова О. А., Сайфутдинов А. И.</b> Самоорганизация слоистой структуры нормального тлеющего разряда .....	477

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

<b>Шишкова И. Н., Крюков А. П.</b> Приближенное решение сопряженной задачи тепло- и массопереноса через межфазную поверхность .....	483
---	-----

РАЗНОЕ

<b>Батура Н. И.</b> Об информационном содержании результатов измерений .....	489
<b>Каримов А. В., Джураев Д. Р., Кулиев Ш. М., Тураев А. А.</b> Особенности температурной чувствительности транзисторной структуры в двухполосном режиме измерения .....	497
<b>Чернухо Е. В.</b> Анализ неопределенностей на примере прямых и обратных задач теплотерии .....	501
<b>Майорова И. А., Просунцов П. В., Зувев А. В.</b> Оптимальное тепловое проектирование мультитекранной системы тепловой защиты многоразовых космических аппаратов .....	512
<b>Журомский В. М.</b> Управление экструзией .....	518

ИНФОРМАЦИОННАЯ ЛИНИЯ

<b>Положение</b> о Премиях имени академика А. В. Лыкова, присуждаемых Национальной академией наук Беларуси .....	523
--	-----

Подготовка оригинал-макета и сопровождение компьютерной системы в Internet осуществляется в редакции "Инженерно-физического журнала",  
Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова  
Национальной академии наук Беларуси  
220072, г. Минск, ул. П. Бровки, 15

Ответственный за выпуск: Л. Н. Шемет

Подписано в печать 01.03.2016. Формат 60×84%. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 28,13. Уч.-изд. л. 24,91. Тираж 112 экз. Заказ 47.

Отпечатано в Республиканском унитарном предприятии «Издательский дом «Беларуская навука».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/18 от 02.08.2013.  
ЛП № 02330/455 от 30.12.2013.

Ул. Ф. Скорины, 40. 220141, г. Минск.

УДК 517.912

*Р. М. Тацкий, О. Ю. Пазен***ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

*В данной работе предложена и обоснована конструктивная схема построения решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами, зависящими от координаты на конечном интервале. Краевые условия при этом предполагаются наиболее общими. В основу схемы положены: метод редукции, концепция квазипроизводных, современная теория систем линейных дифференциальных уравнений, метод Фурье и модифицированный метод собственных функций. Основанный на этой схеме метод следует отнести к прямым точным методам решения смешанных задач, не использующих процедуры построения функций Грина или интегральных преобразований. При этом теорема о разложении по собственным функциям здесь адаптирована для случая коэффициентов, имеющих точки разрыва 1-го рода. Полученные результаты могут быть использованы, например, при исследовании процесса теплопередачи в многослойной плите в условиях идеального теплового контакта между слоями. Рассмотрен частный случай кусочно-постоянных коэффициентов. Приведен численный пример расчета температурного поля в реальной четырехслойной строительной плите при краевых условиях третьего рода (условиях конвекционного теплообмена), моделирующих явление пожара вблизи одной из внешних поверхностей.*

**Ключевые слова:** *редукция, квазипроизводная, матрица Коши, метод Фурье, метод собственных функций.*

**Введение.** Современным аналитическим методам расчета температурных полей в слоистых неоднородных системах посвящена обширная литература. Такие методы условно делятся на два типа: а) прямые или классические, т. е. базирующиеся на методе разделения переменных Фурье; б) операционные, использующие различного рода интегральные преобразования [1, 2].

В классических монографиях [1, 3] задачи теплопереноса для однослойных структур с методической точки зрения решаются для сравнения прямым и операционным методами. Это позволяет сделать выбор между этими двумя подходами при решении конкретной задачи.

В монографии [1], по-видимому, впервые продемонстрирован метод преобразования Лапласа при решении задачи о распределении температурного поля по толщине системы двух неограниченных пластин, где задача в изображениях решалась методом сопряжения. Представляется вполне правдоподобным, что это стало толчком для стремительного развития такого подхода при решении подобных задач не только для уравнений параболического типа.

Иной подход, идея которого, как нам кажется, исходит из работы [4], дает возможность рассматривать тематические модели процессов теплопереноса для многослойных структур одновременно по всей их толщине.

При этом традиционно для выражения  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)$  предлагается выполнять формальную операцию дифференцирования. Такая операция неизбежно, даже для случая кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности  $\lambda(x)$ , приводит к необходимости решения проблемы умножения обобщенных функций. Типичным примером реализации такого подхода является публикация [5].

В данной работе предлагается схема решения задачи нестационарной теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами, зависящими от пространственной координаты на конечном интервале. В ее основу положены: известный метод разделения исходной задачи на две взаимосвязанные, концепция квазипроизводных и классический метод Фурье с модифицированным методом собственных функций для случая коэффициентов, имеющих точки разрыва 1-го рода. Рассмотрен частный случай кусочно-постоянных коэффициентов и приведен численный пример расчета температурного поля в четырехслойной строительной плите при краевых условиях третьего рода с переменной температурой внешней среды.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$  — произвольное разбиение отрезка  $[x_0, x_n]$  действительной оси  $OX$  на  $n$  частей;  $\theta_i$  — характеристическая функция [6] промежутка  $[x_i, x_{i+1})$ , т. е.

$$\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1}. \end{cases}$$

Положим

$$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x)\theta_i, \quad r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(x)\theta_i,$$

$$\lambda_i(x) > 0, \quad r_i(x) > 0, \quad \forall i = \overline{0, n-1}, \quad \lambda_i(x), \quad r_i(x) \in C[x_i, x_{i+1}).$$

Рассмотрим общую смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности — найти решение уравнения

$$r \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) \quad \text{при} \quad x \in (x_0, x_n), \quad \tau > 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$p_{11}t(x_0, \tau) + p_{12}\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_0, \tau) + q_{11}t(x_n, \tau) + q_{12}\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_n, \tau) = \gamma_0(\tau), \quad (2)$$

$$p_{21}t(x_0, \tau) + p_{22}\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_0, \tau) + q_{21}t(x_n, \tau) + q_{22}\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_n, \tau) = \gamma_n(\tau)$$

при начальном условии

$$t(x, 0) = \varphi(x), \quad (3)$$

где  $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(x)\theta_i$ .

В математической физике хорошо известен прием, учитывающий неоднородность граничных условий и связанный с выделением квазистационарной части (метод редукции) [7, 8]. Следуя этим рекомендациям, ищем решение задачи (1)–(3) в виде суммы двух функций:

$$t(x, \tau) = u(x, \tau) + v(x, \tau). \quad (4)$$

Любую из функций  $u$  или  $v$  можно выбрать специальным образом, тогда другая определится уже однозначно.

**2. Краевая задача для  $u(x, \tau)$  и смешанная задача для  $v(x, \tau)$ .** Определим функцию  $u(x, \tau)$  как решение краевой квазистационарной задачи:

$$(\lambda u')' = 0, \quad (5)$$

$$p_{11}u(x_0, \tau) + p_{12}u^{[1]}(x_0, \tau) + q_{11}u(x_n, \tau) + q_{12}u^{[1]}(x_n, \tau) = \gamma_0(\tau), \quad (6)$$

$$p_{21}u(x_0, \tau) + p_{22}u^{[1]}(x_0, \tau) + q_{21}u(x_n, \tau) + q_{22}u^{[1]}(x_n, \tau) = \gamma_n(\tau),$$

где  $u^{[1]}(x) = \lambda(x)u'(x)$ , а  $\tau$  считаем параметром. Краевые условия (6) должны быть линейно независимыми.

Используя представление (4), перепишем уравнение (1) в виде

$$r \frac{\partial u}{\partial \tau} + r \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Если учесть, что  $u(x, \tau)$  — решение задачи (5), (6), то в (7) следует принять  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) \equiv 0$ , и мы приходим к неоднородному дифференциальному уравнению функции  $v(x, \tau)$

$$r \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) - r \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (8)$$

Заметим, что функция  $-r \frac{\partial u}{\partial \tau}$  в правой части (8) считается известной, так как известна функция  $u(x, \tau)$  как решение задачи (5), (6). Поскольку функция  $u(x, \tau)$  удовлетворяет краевым условиям (6), то из представления (4) вытекают краевые условия для функции  $v(x, \tau)$

$$\begin{aligned} p_{11}v(x_0, \tau) + p_{12}v^{[1]}(x_0, \tau) + q_{11}v(x_n, \tau) + q_{12}v^{[1]}(x_n, \tau) &= 0, \\ p_{21}v(x_0, \tau) + p_{22}v^{[1]}(x_0, \tau) + q_{21}v(x_n, \tau) + q_{22}v^{[1]}(x_n, \tau) &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

а начальное условие принимает вид

$$v(x, 0) = f(x) \equiv \varphi(x) - u(x, 0) = \sum_{i=0}^{n-1} [\varphi_i(x) - u_i(x, 0)]\theta_i. \tag{10}$$

Итак, при условии, что решение  $u(x, \tau)$  задачи (5), (6) известно, функция  $v(x, \tau)$  является решением смешанной задачи (8)–(10).

**3. Решение краевой задачи (5), (6).** При решении задачи (5), (6) будем исходить из концепции квазипроизводных [9–13]. Введем квазипроизводную  $u^{[1]} \stackrel{df}{=} \lambda u'$ , вектор  $\mathbf{u} = (u, u^{[1]})^T$  и матрицу  $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Тогда квазидифференциальное уравнение (5), как легко убедиться, сводится к эквивалентной системе дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u}. \tag{11}$$

Краевые условия (6) также запишем в векторной форме [13]

$$P\mathbf{u}(x_0) + Q\mathbf{u}(x_n) = \tilde{\mathbf{A}}(\tau), \tag{12}$$

где  $P, Q$  и  $\tilde{\mathbf{A}}(\tau)$  имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}(\tau) = (\gamma_0(\tau), \gamma_n(\tau))^T. \tag{13}$$

Заметим, что линейная независимость краевых условий (6) эквивалентна условию  $\text{rang}(P | Q) = 2$ .

Под решением системы (11) понимаем абсолютно непрерывную на отрезке  $[x_0, x_n]$  вектор-функцию  $\mathbf{u}(x)$ , удовлетворяющую этой системе почти всюду. На каждом из промежутков  $[x_i, x_{i+1})$  система (11) имеет вид

$$\mathbf{u}'_i = A_i\mathbf{u}_i, \quad A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что матрицу Коши  $B_i(x, s)$  [13] системы (14) можно представить следующим образом:

$$B_i(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где

$$b_i(x, s) = \int_s^x \lambda_i^{-1}(r)dr, \quad x, s \in [x_i, x_{i+1}). \tag{16}$$

Для произвольного  $k \geq i$  обозначим

$$B(x_k, x_i) \stackrel{df}{=} B_{k-1}(x_k, x_{k-1})B_{k-2}(x_{k-1}, x_{k-2}) \dots B_i(x_{i+1}, x_i). \tag{17}$$

При этом считаем, что  $B(x_k, x_k) = E$ , где  $E$  — единичная матрица размера  $2 \times 2$ . Структура (15) матриц  $B_k(x, s)$  дает возможность установить структуру матриц (17), а именно:

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В работе [13] установлено, что на каждом из промежутков  $[x_i, x_{i+1})$  решение задачи (11), (12) имеет вид

$$\mathbf{u}_i(x, \tau) = B_i(x, x_i)B(x_i, x_0)\mathbf{P}_0(\tau), \tag{19}$$

где

$$\mathbf{P}_0(\tau) = (P + QB(x_n, x_0))^{-1}\Gamma(\tau). \tag{20}$$

Выражение (19) позволяет записать решение  $\mathbf{u}(x, \tau)$  на всем отрезке  $[x_0, x_n]$  с помощью характеристических функций  $\theta_i$  в виде

$$\mathbf{u}(x, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{u}_i(x, \tau)\theta_i. \tag{21}$$

Остается заметить, что первая координата  $\mathbf{u}(x, \tau)$  из (21) является решением краевой задачи (5), (6). Это решение единственное при условии, что  $\det [P + QB(x_n, x_0)] \neq 0$  [13].

**4. Метод Фурье и задача на собственные значения.** *Разложения по собственным функциям.* Следуя, например, [7], будем искать нетривиальные частные решения однородного дифференциального уравнения

$$r \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tag{22}$$

в виде

$$v(x, \tau) = e^{-\omega\tau} X(x), \tag{23}$$

где  $\omega$  — параметр, а  $X(x)$  — пока неизвестная функция. Подставляя правую часть (23) в (22), приходим к квазидифференциальному уравнению

$$(\lambda X')' + \omega r X = 0 \tag{24}$$

при краевых условиях

$$p_{11}X(x_0) + p_{12}X^{[1]}(x_0) + q_{11}X(x_n) + q_{12}X^{[1]}(x_n) = 0, \tag{25}$$

$$p_{21}X(x_0) + p_{22}X^{[1]}(x_0) + q_{21}X(x_n) + q_{22}X^{[1]}(x_n) = 0.$$

Задача (24), (25) — классическая задача на собственные значения, свойства собственных значений  $\omega_k$  и собственных функций  $X_k(x, \omega_k)$  которой в случае краевых условий первого, второго и третьего рода исчерпывающе изучены и подробно описаны, например, в [7].

Так, в частности, разложение функции  $g(x)$  из "определенного класса" в ряд Фурье по собственным функциям  $X_k(x, \omega_k)$  задачи (24), (25) имеет вид

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k X_k(x, \omega_k), \tag{26}$$

где коэффициенты Фурье  $g_k$  вычисляются по формуле

$$g_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_{x_0}^{x_n} g(x) X_k(x, \omega_k) r(x) dx. \tag{27}$$

Заметим, что  $\|X_k\|^2$  — квадрат нормы собственной функции  $X_k$  равен

$$\|X_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} X_k^2(x, \omega_k) r(x) dx . \tag{28}$$

Уточним, какие же функции  $g(x)$  относятся к "определенному классу". Будем считать, что  $g(x)$  — кусочно-непрерывная функция, имеющая различные аналитические выражения на каждом из промежутков  $[x_i, x_{i+1})$ , т. е. представляется в виде

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i \theta_i . \tag{29}$$

Функции вида (29) складываются, умножаются и интегрируются следующим образом [14] — если

$$g_1(x) = \sum_{i=1}^n g_{1i} \theta_i, g_2(x) = \sum_{i=1}^n g_{2i} \theta_i, \text{ то}$$

$$g_1 \pm g_2 = \sum_{i=1}^n (g_{1i} \pm g_{2i}) \theta_i, g_1 g_2 = \sum_{i=1}^n (g_{1i} g_{2i}) \theta_i , \tag{30}$$

$$\int_{x_0}^{x_n} g_1(x) g_2(x) r(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_n} g_{1i}(x) g_{2i}(x) r_i(x) dx , \tag{31}$$

$$\|g_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} g_k^2(x) r(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_n} g_{ki}^2(x) r_i(x) dx , \quad k = \overline{1, \infty} . \tag{32}$$

Выражения (31), (32) можно интерпретировать как скалярное произведение функций  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  и квадрат нормы функции  $g_k(x)$  соответственно с весом  $r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(x) \theta_i$ . Положим

$$X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x, \omega_k) \theta_i , \tag{33}$$

тогда для коэффициентов Фурье  $g_k$  из представления (26) и для квадратов норм функций  $X_k(x)$  из формул (27) и (28) получим:

$$g_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x) X_{ki}(x, \omega_k) r_i(x) dx , \tag{34}$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x, \omega_k) r_i(x) dx . \tag{35}$$

*Конструктивное построение собственных функций.* Введя квазипроизводную  $X^{[1]} = \lambda X'$ , вектор  $\mathbf{X} = (X, X^{[1]})^T$  и матрицу  $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega r(x) & 0 \end{pmatrix}$ , приведем квазидифференциальное уравнение (24) к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{X}' = A \mathbf{X} . \tag{36}$$

Соответствующую систему на промежутке  $[x_i, x_{i+1})$  запишем как

$$\mathbf{X}'_i = A_i \mathbf{X}_i , \quad i = \overline{0, n-1} \tag{37}$$



с матрицами  $A_i$  вида

$$A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i(x)} \\ -\omega r_i(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Матрицу Коши системы (37) обозначим  $\tilde{B}_i(x, s, \omega)$  и аналогично формуле (17) запишем

$$\tilde{B}(x_i, x_0, \omega) = \prod_{j=0}^{df} \tilde{B}_{i-j}(x_{i-j+1}, x_{i-j}, \omega). \quad (39)$$

Обозначим также

$$\tilde{B}(x, x_0, \omega) = \sum_{i=0}^{df} \tilde{B}_i(x, x_i, \omega) \tilde{B}(x_i, x_0, \omega) \theta_i, \quad (40)$$

$$[P + Q \tilde{B}(x_n, x_0, \omega)] = \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где  $\tilde{B}(x_n, x_0, \omega) = \begin{pmatrix} c_{11}(\omega) & c_{12}(\omega) \\ c_{21}(\omega) & c_{22}(\omega) \end{pmatrix}$ .

Нетривиальное решение  $\mathbf{X}(x, \omega)$  системы (36) ищем в виде

$$\mathbf{X}(x, \omega) = \tilde{B}(x, x_0, \omega) \mathbf{C}, \quad (42)$$

где  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$  — некоторый ненулевой вектор. Применив к обеим частям равенства (42) краевые условия в форме (25), при  $\tilde{\mathbf{A}}(\tau) \equiv 0$  получим

$$P \mathbf{X}(x_0, \omega) + Q \mathbf{X}(x_n, \omega) = [P \tilde{B}(x_0, x_0, \omega) + Q \tilde{B}(x_n, x_0, \omega)] \mathbf{C} = 0$$

или, заметив, что  $B(x_0, x_0, \omega) = E$ , где  $E$  — единичная матрица, придем к равенству

$$[P + Q \tilde{B}(x_n, x_0, \omega)] \mathbf{C} = 0. \quad (43)$$

Для существования ненулевого вектора  $\mathbf{C}$  в (43) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\det [P + Q \tilde{B}(x_n, x_0, \omega)] = 0. \quad (44)$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

*Утверждение 1.* Характеристическое уравнение задачи на собственные значения (26), (27) имеет вид (44). Далее будем предполагать, что все корни уравнения (44) (собственные значения задачи (24), (25)) действительные, что, очевидно, не всегда выполняется. Заметим, что достаточные условия для выполнения этого требования изложены в [15]. Для нахождения ненулевого вектора  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$  положим в равенстве (43)  $\omega_k$  вместо  $\omega$ . Тогда, используя обозначение (41), придем к векторному равенству

$$\begin{pmatrix} b_{11}(\omega_k) & b_{12}(\omega_k) \\ b_{21}(\omega_k) & b_{22}(\omega_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

эквивалентному системе уравнений

$$b_{11}(\omega_k) C_1 + b_{12}(\omega_k) C_2 = 0, \quad (45)$$

$$b_{21}(\omega_k) C_1 + b_{22}(\omega_k) C_2 = 0.$$

Поскольку определитель этой системы равен нулю, то одно из уравнений (45), например, второе, можно отбросить, т. е. получаем уравнение

$$b_{11}(\omega_k) C_1 + b_{12}(\omega_k) C_2 = 0. \quad (46)$$

Считая, например,  $b_{12}(\omega_k) \neq 0$ , из (46) получаем  $C_1 = -\frac{C_2 b_{12}(\omega_k)}{b_{11}(\omega_k)}$ . Полагая  $C_2 = 1$ , получаем, что нетривиальный вектор  $\mathbf{C}$  может быть выбран так:

$$\mathbf{C} = \left( -\frac{b_{12}(\omega_k)}{b_{11}(\omega_k)}, 1 \right)^T.$$

Случай  $b_{12}(\omega_k) = 0, b_{11}(\omega_k) \neq 0$  рассматривается аналогично.

Обозначая нетривиальный собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\omega_k$ , через  $\mathbf{X}_k(x, \omega_k)$ , получим следующее утверждение.

*Утверждение 2.* Собственные векторы системы дифференциальных уравнений (36) при краевых условиях (12) и  $\tilde{\mathbf{A}}(t) \equiv 0$  имеют следующую структуру:

$$\mathbf{X}_k(x, \omega_k) = \tilde{B}(x, x_0, \omega)(C_1, C_2)^T, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

*Следствие.* Собственные функции  $X_k(x, \omega_k)$  как первые координаты собственных векторов  $\mathbf{X}_k(x, \omega_k)$  можно записать в виде

$$X_k(x, \omega_k) = (1, 0)\tilde{B}(x, x_0, \omega_k)(C_1, C_2)^T, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{47}$$

В частности, поскольку

$$X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} x_{ki}(x, \omega_k)\theta_i,$$

то из (47) следует

$$X_{ki}(x, \omega_k) = (1, 0)\tilde{B}_i(x, x_i, \omega_k)\tilde{B}(x_i, x_0, \omega_k)(C_1, C_2)^T, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{48}$$

**5. Построение решения  $v(x, \tau)$  смешанной задачи (8)–(10).** Для решения задачи (8)–(10) применим метод собственных функций [8], заключающийся в том, что решение задачи ищем в виде

$$v(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau)X_k(x, \omega_k), \tag{49}$$

где  $T_k(\tau)$  — неизвестные функции, которые определим далее.

Поскольку производная  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  входит в правую часть уравнения (8), то разложим ее в ряд Фурье по собственным функциям (47) краевой задачи (24), (25):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\tau)X_k(x, \omega_k), \tag{50}$$

где переменная  $\tau$  играет роль параметра. Подставив (49) в (8) с учетом разложения (50), получим равенство

$$r(x) \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(\tau)X_k(x, \omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau)(\lambda X'_k(x, \omega_k))' - r(x) \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\tau)X_k(x, \omega_k).$$

Учитывая тождество

$$(\lambda X'_k)' + \omega_k r(x)X_k \equiv 0,$$

придем к равенству

$$r(x) \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(\tau)X_k(x, \omega_k) = -r(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k T_k(\tau)X_k - r(x) \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\tau)X_k,$$

которое после сокращения на  $r(x) \neq 0$  примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T'_k(\tau) + \omega_k T_k(\tau) + \beta_k(\tau)]X_k(x, \omega_k) = 0. \tag{51}$$

Приравнявая коэффициенты Фурье ряда (51) к нулю, приходим к совокупности дифференциальных уравнений

$$T'_k(\tau) + \omega_k T_k(\tau) + \beta_k(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (52)$$

Как известно, общее решение каждого из уравнений (52) при  $k = 1, 2, 3, \dots$  имеет вид

$$T_k(\tau) = C_k e^{-\omega_k \tau} - \int_0^\tau e^{-\omega_k(\tau-s)} \beta_k(s) ds, \quad (53)$$

где  $C_k$  — неизвестная постоянная. Для ее определения заметим, что функцию  $f(x)$  из начального условия (10) можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям (47) краевой задачи (24), (25), т. е.

$$v(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x, \omega_k), \quad (54)$$

где  $f_k$  — соответствующие коэффициенты Фурье.

Из уравнения (53) следует, что

$$T_k(0) = C_k, \quad (55)$$

а из представления (49) получим

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k. \quad (56)$$

Сравнивая (54), (55) и (56), приходим к выводу, что  $C_k = f_k$ .

Итак, окончательно получаем решение смешанной задачи (8)–(10) в виде ряда

$$v(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k e^{-\omega_k \tau} - \int_0^\tau e^{-\omega_k(\tau-s)} \beta_k(s) ds \right] X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x, \tau) \theta_i, \quad (57)$$

где

$$v_i(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k e^{-\omega_k \tau} - \int_0^\tau e^{-\omega_k(\tau-s)} \beta_k(s) ds \right] X_{ki}(x, \omega_k), \quad (58)$$

а функции  $X_{ki}(x, \omega_k)$  определены формулами (48). Учитывая (21), получаем формальное решение задачи (1)–(3)

$$t(x, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} [u_i(x, \tau) + v_i(x, \tau)] \theta_i,$$

в котором функции  $u_i(x, \tau)$  и  $v_i(x, \tau)$  определены формулами (19), (57) и (58) соответственно.

Отметим, что полученные здесь результаты имеют непосредственное применение в прикладных задачах. Так, например, задача (1)–(3) описывает процесс распространения температуры в многослойной плите в условиях идеального теплового контакта между слоями с учетом конкретных краевых условий.

**6. Частный случай кусочно-постоянных коэффициентов.** При решении конкретных прикладных задач коэффициенты  $r_i$  и  $\lambda_i$  обычно считаются постоянными, вследствие чего коэффициенты  $r(x)$  и  $\lambda(x)$  в уравнении (21) являются кусочно-постоянными функциями с разрывами первого рода в точках  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ . С учетом этого факта формулы (14), (15), (16), (18), (34), (35), (38) примут совершенно конкретный вид, причем условимся нумеровать их соответственно (14\*), (15\*), (16\*), (18\*), (34\*), (35\*), (38\*):

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad (14^*)$$

$$B_i(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15*}$$

$$b_i(x, s) = \frac{x-s}{\lambda_i} \quad x, \quad s \in [x_i, x_{i+1}), \tag{16*}$$

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{\lambda_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18*}$$

$$g_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x) X_{ki}(x, \omega_k) dx, \tag{34*}$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x, \omega_k) dx, \tag{35*}$$

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ -\omega r_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{38*}$$

Кроме того, необходимо конкретизировать матрицу Коши  $\tilde{B}_i(x, s, \omega)$  (из раздела 4) системы (37). Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\tilde{B}_i(x, s, \omega) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i(x-s) & \frac{\sin \alpha_i(x-s)}{\lambda_i \alpha_i} \\ -\lambda_i \alpha_i \sin \alpha_i(x-s) & \cos \alpha_i(x-s) \end{pmatrix}, \tag{59}$$

где обозначено  $\alpha_i = \sqrt{\frac{r_i \omega}{\lambda_i}}$ .

**7. Иллюстрация метода и численный пример.** Описанный выше метод поясним на конкретном примере. В прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  рассматривается бесконечная плита толщиной  $l$ , т. е. область, ограниченная плоскостями  $x = x_0 = 0$  и  $x = x_n = l$ , разделена плоскостями  $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}$  на  $n$  слоев разной толщины  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Каждый слой характеризуется своим коэффициентом теплопроводности  $\lambda_i$ , плотностью  $\rho_i$  и удельной теплоемкостью  $c_i$ , причем все эти величины в границах каждого слоя считаются постоянными. Между слоями будем считать выполненными условия идеального теплового контакта, т. е. равенства температур и плотностей тепловых потоков. В случае конвекционного теплообмена на внешних поверхностях задача о расчете нестационарного температурного поля вдоль такой плиты сводится к решению дифференциального уравнения

$$r \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right), \quad x \in (x_0, x_n), \quad \tau > 0 \tag{60}$$

при краевых условиях

$$\alpha_0 t(0, \tau) - \lambda \frac{\partial t}{\partial \tau}(0, \tau) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \tag{61}$$

$$\alpha_n t(x_n, \tau) + \lambda \frac{\partial t}{\partial \tau}(x_n, \tau) = \alpha_n \psi_n(\tau)$$

и начальном условии

$$t(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(x)\theta_i. \tag{62}$$

Здесь  $r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i\Theta_i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\rho_i\Theta_i$ ,  $\psi_0(\tau)$  и  $\psi_n(\tau)$  — соответствующие законы изменения температур окружающей среды вне приповерхностных слоев, а  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  — соответствующие коэффициенты теплоотдачи на поверхностях  $x = x_0$  и  $x = l$ . Как и в разделе 1, при решении этой задачи применяем метод редукции, т. е. искомое решение  $t(x, \tau)$  представляем в виде (4) с дальнейшей конкретизацией краевых условий, выбора функции  $u(x, \tau)$  и построения функции  $v(x, \tau)$ .

*Замечание 1.* В математическую модель задачи не входят, как это принято, условия идеального теплового контакта между слоями. Эти условия автоматически выполняются, поскольку функции  $u(x, \tau)$  и  $v(x, \tau)$  абсолютно непрерывны вместе с их квазипроизводными, которые численно равны плотностям тепловых потоков, взятых со знаком "минус".

*Замечание 2.* Задача (60)–(62) — частный случай задачи (1)–(3) (уравнение (60) с постоянными коэффициентами и совершенно конкретными краевыми условиями (61)). Потому здесь в полной мере используются формулы раздела 6. Кроме того, будут конкретизированы формулы (13), (19), (20), (44), (47), (48), при этом их аналоги, как и в разделе 6, условимся нумеровать соответственно (13\*), (19\*), (20\*), (44\*), (47\*), (48\*).

Как легко убедиться, матрицы  $P$ ,  $Q$  и вектор  $\tilde{A}(\tau)$ , фигурирующие в условии (12), в случае краевых условий (61) принимают вид:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(\tau) = (\alpha_0 \psi_0(\tau), \alpha_n \psi_n(\tau))^T, \tag{13*}$$

поэтому на основании формул (15\*) и (18\*) имеем

$$\mathbf{u}_i(x, \tau) = B_i(x, x_i)B(x_i, x_0)\mathbf{P}_0(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_i}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=0}^{i-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{\lambda_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}_0(\tau), \tag{19*}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(\tau) &= (P + QB(x_n, x_0))^{-1}\tilde{A}(\tau) = \\ &= \left[ \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{\lambda_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n \psi_n(\tau) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (\alpha_n \sigma_n + 1)\alpha_0 \psi_0(\tau) + \alpha_n \sigma_n \\ -\alpha_n \alpha_0 \psi_0(\tau) + \alpha_n \alpha_0 \psi_n(\tau) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{20*}$$

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{\lambda_m} \quad \Delta = \alpha_0 \alpha_n \sigma_n + \alpha_0 + \alpha_n.$$

Подставляя (20\*) в (19\*), с учетом формул (15\*) и (18\*) после элементарных преобразований получаем

$$\mathbf{u}_i(x, \tau) = \frac{\alpha_0 \alpha_n}{\Delta} \begin{pmatrix} \psi_0(\tau)\sigma_n + \frac{\psi_n(\tau)}{\alpha_0} + \frac{\psi_0(\tau)}{\alpha_n} + (\psi_n(\tau) - \psi_0(\tau)) \left( \frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i \right) \\ \psi_n(\tau) - \psi_0(\tau) \end{pmatrix}, \tag{63}$$

где  $\sigma_i = \sum_{m=0}^{i-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{\lambda_m}$ .

Далее, используя обозначения (41), конкретизируем структуру левой части характеристического уравнения (44)

$$\begin{aligned} \det (P + Q \tilde{B}(x_n, x_0, \omega)) &= \det \left[ \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}(\omega) & c_{12}(\omega) \\ c_{21}(\omega) & c_{22}(\omega) \end{pmatrix} \right] = \\ &= \det \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ c_{21}(\omega) & c_{22}(\omega) \end{pmatrix} = \alpha_0 c_{22}(\omega) + c_{21}(\omega) . \end{aligned}$$

Отсюда следует аналог утверждения 1 из подраздела 4.2 — характеристическое уравнение соответствующей задачи на собственные значения, возникающей при построении функции  $v(x, \tau)$  для смешанной задачи (60)–(62), имеет вид

$$\alpha_0 c_{22}(\omega) + c_{21}(\omega) = 0 . \tag{44*}$$

Как известно [7, 8], все корни  $\omega_k$  при  $k = 1, 2, \dots$  уравнения (44\*) строго положительные и простые:

$$\omega_k > 0, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, \quad \omega_i \neq \omega_j, \quad \forall i \neq j .$$

Для конкретизации вида нетривиального вектора  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$  из равенства (43) подставим в это равенство матрицы  $P$  и  $Q$ , определяемые формулами (13\*), и  $\omega_k$  вместо  $\omega$ :

$$(P + Q \tilde{B}(x_n, x_0, \omega_k)) \bar{\mathbf{C}} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ c_{21}(\omega_k) & c_{22}(\omega_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 .$$

Последнее равенство эквивалентно системе двух линейных уравнений относительно неизвестных  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\alpha_0 C_1 - C_2 = 0 ,$$

$$c_{21}(\omega_k) C_1 + c_{22}(\omega_k) C_2 = 0 .$$

Отбрасывая второе из этих уравнений, имеем  $\alpha_0 C_1 - C_2 = 0$ . Полагая, например,  $C_2 = 1$ , получаем, что  $C_1 = \frac{1}{\alpha_0}$ . Отсюда следует, что с точностью до постоянного множителя нетривиальный вектор  $\mathbf{C}$  может быть принят в виде

$$\mathbf{C} = \left( \frac{1}{\alpha_0}, 1 \right)^T . \tag{64}$$

Подчеркнем, что вектор  $\mathbf{C}$ , определяемый формулой (64), не зависит от  $\omega_k$ . Тогда формула (48) примет вид

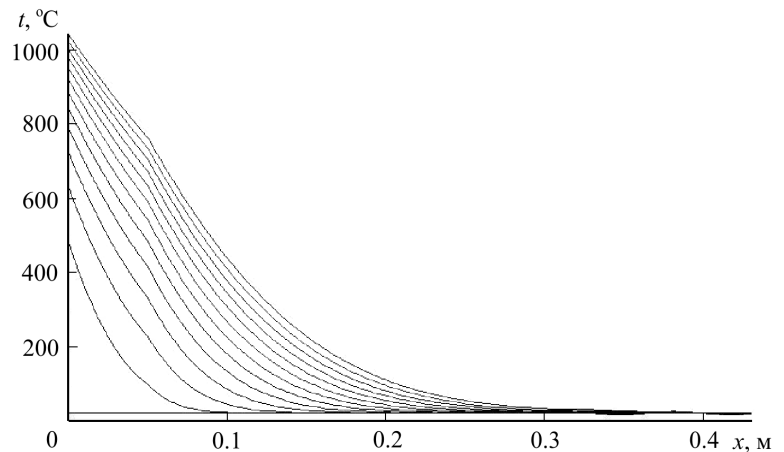
$$X_{ki}(x, \omega_k) = (1, 0) \begin{pmatrix} \cos \alpha_i(x - x_i) & \frac{\sin \alpha_i(x - x_i)}{\lambda_i \alpha_i} \\ -\lambda_i \alpha_i \sin \alpha_i(x - x_i) & \cos \alpha_i(x - x_i) \end{pmatrix} \tilde{B}(x_i, x_0, \omega_k) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{48*}$$

где величина  $\tilde{B}(x_i, x_0, \omega_k)$  определена формулой (39) и является последним из конкретизированных "кирпичиков" для построения формального решения задачи (60)–(62). Запишем это решение на каждом из промежутков  $[x_i, x_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ :

$$\begin{aligned} t_i(x, \tau) &= u_i(x, \tau) + v_i(x, \tau) \equiv \\ &= \frac{\alpha_0 \alpha_n}{\Delta} \left( \psi_0(\tau) \sigma_n + \frac{\psi_n(\tau)}{\alpha_0} + \frac{\psi_0(\tau)}{\alpha_n} + (\psi_n(\tau) - \psi_0(\tau)) \left( \frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i \right) \right) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k s} \beta_k(s) ds \right] X_{ki}(x, \omega_k), \end{aligned} \tag{65}$$

где  $f_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x) X_{ki}(x, \omega_k) dx$ ,  $\beta_k(s) = \frac{1}{\|X_k\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u_i(x, s)}{\partial s} X_{ki}(x, \omega_k) dx$ , а  $\|X_k\|^2$  определяется формулой (35\*).

Распределение нестационарного температурного поля четырехслойной плоской стенки толщиной  $x$ . Во временном измерении "расстояние" между соседними кривыми равно 1800 с, нижняя кривая соответствует времени  $\tau = 0$



В качестве численного примера рассмотрим четырехслойную плоскую стенку, составленную из известковой штукатурки толщиной 5 см, кирпичной кладки толщиной 25 см, пенопласта толщиной 1 см и снова известковой штукатурки толщиной 3 см. Необходимо определить распределение нестационарного температурного поля вдоль этой стенки, если с левой стороны происходит пожар, температура которого меняется по закону  $\psi_0(\tau) = 345 \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 20$  (уравнение стандартной температурной кривой [16]). В начальный момент времени температура стенки составляет 20 °C. Коэффициенты теплоотдачи на поверхностях —  $\alpha_0 = 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,  $\alpha_n = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . Теплофизические характеристики материалов: известковая штукатурка — коэффициент теплопроводности  $\lambda = 0.7 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , удельная теплоемкость  $c = 837 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , плотность  $\rho = 1600 \text{ кг}/\text{м}^3$ ; кирпичная кладка —  $\lambda = 0.455 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $c = 840 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ,  $\rho = 1580 \text{ кг}/\text{м}^3$ ; пенопласт —  $\lambda = 0.041 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $c = 1340 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ,  $\rho = 100 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Используя программное обеспечение Maple 13, получаем решение данной задачи в виде графика (см. рисунок).

### Обозначения

$c$  — удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $t$  — температура, °C;  $x$  — толщина, м;  $\alpha$  — коэффициент теплообмена, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  $\rho$  — плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $\tau$  — время, с.

### Литература

1. Лыков А. В. *Теория теплопроводности*. Москва: Высшая школа, 1967.
2. Гринберг Г. А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных явлений при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях. *Прикладная математика и механика*. 1967. Т. 31, вып. 2. С. 193–203.
3. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. *Теплопередача*. Москва: Энергия, 1975.
4. Лазарян В. А., Конашенко С. И. *Обобщенные функции в задачах механики*. Киев: Наукова думка, 1974.
5. Гайвась Б. И., Чапля Е. Я. Описание процессов переноса в слоистых телах с использованием теории обобщенных функций. *Физико-математическое моделирование и информационные технологии*. 2011. Изд. 14. С. 13–22.
6. Владимиров В. С. *Уравнение математической физики*. Москва: Наука, 1976.
7. Арсенин В. Я. *Методы математической физики*. Москва: Наука, 1974.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука, 1977.
9. Шин Д. Теорема существования квазидифференциального уравнения  $n$ -го порядка. *ДАН СССР*. 1938. Т. 18, № 8. С. 515–518.
10. Шин Д. О решениях самосопряженного дифференциального уравнения  $u^{[n]} = lu$ ,  $l \neq 0$ , принадлежащих к  $L_2[0, \infty)$ . *ДАН СССР*. 1938. Т. 18, № 8. С. 519–522.
11. Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве. *ДАН СССР*. 1938. Т. 18, № 8. С. 522–526.
12. Тацкий Р., Стасюк М., Мазуренко В. Моделирование дискретно-континуальных систем. Основы концепции квазипроизводных. *Физико-математическое моделирование и информационные технологии*. 2009. Изд. 10. С. 7–37.
13. Тацкий Р., Стасюк М., Мазуренко В., Власий О. *Обобщенные квазидифференциальные уравнения*. Дрогобыч: Коло, 2011.
14. Стасюк М. Ф. Структура решений обыкновенных дифференциальных и квазидифференциальных уравнений с кусочно-переменными коэффициентами. *Доклады АН УССР. Сер. А*. 1982. № 12. С. 33–36.
15. Мазуренко В. В. О сведении дискретно-непрерывной краевой задачи к обобщенной схеме Аткинсона. *Доклады НАН Украины*. 2001. № 8. С. 19–22.
16. Челноков А. А., Жмыхов И. Н., Цап В. Н. *Охрана труда: учебник*. Минск: Высшая школа, 2011.