**Міністерство освіти і науки України**
**Прикарпатський національний університет**
**імені Василя Стефаника (м. Івано-Франківськ)**
**Вінницький національний технічний уніiверситет**
**AGH науково-технологічний університет (Польща)**
**Інститут кібернетики НАН України**
**Національний технічний університет України “КПІ"**
**Інститут інженерів з електротехніки та електроніки (IEEE),**
**Українська секція**
**Новий університет Лісабона, Португалія**
**Люблінська політехніка, Польща**
**Азербайджанська державна нафтова академія**
**Об’єднаний інститут проблем інформатики НАН Білорусі**
**Асоціація “Інформаційні технології України”**

# "Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія"

# МАТЕРІАЛИ

## п’ятої міжнародної науково-практичної конференції

**27-29 травня 2015 року**

**Івано-Франківськ – Вінниця**

# "Information Technology and Computer Engineering"

## PROCEEDINGS

## of the 5th International Scientific Conference

## 2015, May, 27th to 29th

**Ivano-Frankivsk - Vinnytsia**

Івано-Франківськ
2015

# Загальна перша крайова задача для рівняння гіперболічного типу з кусково-неперервними коефіцієнтами

**Тацій Р.М.[1], Карабин О.О.[2], Чмир О.Ю.[3]**

[1]Проф., д.ф-м.н., завідувач кафедри прикладної математики і механіки, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська 35, м. Львів, Україна,
[2]Доц., к.ф-м.н., доцент кафедри прикладної математики і механіки, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська 35, м. Львів, Україна, tosjakarabyn@gmail.com,
[3]Доц., к.ф-м.н., доцент кафедри прикладної математики і механіки, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська 35, м. Львів, Україна, o_chmyr@yahoo.com

***Анотація*** **– Запропоновано та обґрунтовано нову схему розв'язування загальної першої крайової задачі для рівняння гіперболічного типу з кусково-неперервними коефіцієнтами. В основу схеми розв'язування покладено концепцію квазіпохідних, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, а також класичний метод Фур'є та метод редукції. Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім на основі матричного числення об'єднати отримані розв'язки. Такий підхід дозволяє застосувати програмні засоби до процесу вирішення задачі та графічної ілюстрації розв'язку.**

***Ключові слова:*** ***квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій.***

# The total first boundary value problem for equation of hiperbolic type with piecewise continuous coefficients

**Tatsij R.M.[1], Karabyn O.O.[2], Chmyr O.Yu.[3]**

[1]Prof., Head of Department of Applied Mathematics and Mechanics, Lviv State University of vital activity safety, Kleparivska str., 35, Lviv, Ukraine,
[2]Doc., Docent of Department of Applied Mathematics and Mechanics, Lviv State University of vital activity safety, Kleparivska str., 35, Lviv, Ukraine, tosjakarabyn@gmail.com,
[3]Doc., Docent of Department of Applied Mathematics and Mechanics, Lviv State University of vital activity safety, Kleparivska str., 35, Lviv, Ukraine, o_chmyr@yahoo.com

***Abstract*** **– A new solving scheme of the general first boundary value problem for a hyperbolic type equation with piecewise *continuous coefficients was proposed and justified. In the basis of the solving scheme is a concept of quasi-derivatives,* a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a reduction method. The advantage of this method is a possibility to examine a problem on each breakdown segment and then to combine obtained solutions on the basis of matrix calculation. Such an approach allows to use software tools for the solution.**

***Keywords: kvazidifferential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions***

Розглядається мішана задача для рівняння гіперболічного типу

$$r\;x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\;x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\; x\in[0;l],\; t\in(0;+\infty) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x_0,t)=\psi_0(t), \\ u(x_n,t)=\psi_n(t), \end{cases} t\in[0;+\infty) \qquad (2)$$

та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varphi_1(x), \end{cases} x\in[0;l], \qquad (3)$$

де $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=l$ – довільне розбиття відрізка $[0;l]$ дійсної осі $OX$ на $n$ частин, функції $\psi_0(t)$, $\psi_n(t)\in C^2(0;\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – кусково-неперервні на $(0;l)$.

Покладемо, що $\lambda \;\; x = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x)\theta_i$, $r \;\; x = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(x)\theta_i$, де $\lambda_i(x)$, $r_i(x) \in C[x_i, x_{i+1}]$, $\lambda_i(x) > 0$, $r_i(x) > 0$, $\theta_i$ – характеристична функція проміжку $[x_i; x_{i+1}]$.

Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t).$$

Розглянемо функцію $w(x,t)$. Ця функція є розв'язком однорідного рівняння

$$(\lambda w_x{}')_x{}' = 0 \tag{4}$$

з неоднорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} w(x_0,t) = \psi_0(t), \\ w(x_n,t) = \psi_n(t). \end{cases} \tag{5}$$

Рівняння (4) є квазідиференціальним рівнянням. Побудова розв'язку $w(x,t)$ квазідиференціальної задачі (4), (5) на основі властивостей матриці Коші детально описана в [1]

$$w(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x,t)\theta_i,$$

де $$w_i(x,t) = \psi_0(t) + \frac{\psi_n(t) - \psi_0(t)}{\sigma_n}(b_i(x,x_i) + \sigma_i),$$

$$b_i(x,x_i) = \int_{x_i}^{x} \frac{1}{\lambda_i(z)}dz, \quad \sigma_i = \sum_{m=0}^{i-1} b_m(x_{m+1}, x_m).$$

Функцію $v(x,t)$ шукаємо як розв'язок мішаної неоднорідної задачі

$$r \;\; x \;\; \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \;\; x \;\; \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -r \;\; x \;\; \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{6}$$

$$\begin{cases} v(x,0) = \Phi_0(x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \Phi_1(x), \end{cases} \tag{7}$$

де $\Phi_0(x) = \varphi_0(x) - w(x,0)$, $\Phi_1(x) = \varphi_1(x) - \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0)$,

з однорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} v(x_0,t) = 0, \\ v(x_n,t) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Розв'язок задачі (6)-(8) шукаємо методом Фур'є у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x,\omega_k). \tag{9}$$

Власні функції $X_k(x,\omega_k)$ є розв'язком задачі на власні значення $\omega_k$:

$$(\lambda X')' + \omega^2 r X = 0,$$

$$\begin{cases} X(x_0) = 0, \\ X(x_n) = 0. \end{cases}$$

Підставляючи функцію $v(x,t)$ у вигляді (9) в рівняння (6) та розвинувши праву частину рівняння (6) за власними функціями $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k(x,\omega_k)$, приходимо до диференціального рівняння

$$T_k''(t) + \omega_k{}^2 T_k(t) = -w_k(t),$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos\omega_k t + d_k \sin\omega_k t -$$

$$- \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s) w_k(s)ds, \tag{10}$$

де $a_k$, $d_k$ – невідомі сталі.

Розвиваємо праві частини початкових умов (7) в ряди за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ та підставляємо (9) в (7). Це дозволяє отримати $a_k = \Phi_{0k}$, $d_k = \dfrac{\Phi_{1k}}{\omega_k}$, де $\Phi_{0k}$, $\Phi_{1k}$ – коефіцієнти розвинень за власними функціями правих частин початкових умов (7).

Підставлюячи (10) в (9), остаточно отримуємо розв'язок задачі (6)-(8)

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0k}\cos\omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}\sin\omega_k t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s) w_k(s)ds\right] X_k(x,\omega_k).$$

Сума функцій $w(x,t)$ та $v(x,t)$ дають розв'язок задачі (1)-(3).

[1] Тацій Р. М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтам / Р. М. Тацій, О. О. Власій, М. Ф. Стасюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки . - 2014. - № 804. - С. 64-69.