Прямий метод дослідження першої загальної крайової задачі для рівняння теплопровідності в прямокутнику

О.М. Трусевич
кафедра прикладної математики і механіки
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
trusev14@gmail.com

М.І. Кусій
кафедра прикладної математики і механіки
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
kusijmiroslava@gmail.com

The direct method research of the first general boundary value problem for the heat equation in a rectangle

O. Trusevych
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
trusev14@gmail.com

M. Kusij
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
kusijmiroslava@gmail.com

***Анотація*—Запропоновано та обґрунтовано прямий метод розв'язування першої загальної крайової задачі для рівняння теплопровідності в прямокутнику. В основі даного методу використано метод редукції, класичний метод Фур'є, метод власних функцій та власних значень. Перевагою даного методу є власне прямий метод розв'язування даної задачі.**

***Abstract*—A direct method for solving the first boundary value problem for the heat equation in the rectangle was proposed and justified. The basis of this method used a reduction method, the classical Fourier method, method of eigenfunctions and eigenvalues. The advantage of this method is actually a direct method for solving this problem.**

Ключові слова—задача на власні значення та власні функції, метод Фур'є, функція Коші, подвійний ряд Фур'є

Keywords—eigenvalue problem and their functions, Fourier method, function Cauchy, double Fourier series

I. Вступ

При розв'язуванні нестаціонарних задач теорії теплопровідності у випадку, коли температура є функцією часу і двох просторових координат, виникають значні труднощі. В монографії [1] розглядаються деякі задачі двовимірного температурного поля, коли розв'язки можуть бути отримані методами інтегральних перетворень. Там, зокрема, розглядається двовимірна задача для прямокутника, на одній стороні якого підтримується температура, що змінюється в часі. Натомість на трьох інших сторонах підтримується нульова температура. Ця задача розв'язується шляхом застосування скінченного синус – перетворення Фур'є з відповідним використанням формули оберненого перетворення.

Останнім часом все активніше при розв'язуванні задач нестаціонарної теплопровідності застосовується прямий метод, в основу якого покладено редукцію (зведення задачі до двох простіших, але взаємозв'язаних) з наступним застосуванням модифікованого методу Фур'є власних функцій [1] - [4]. В даній роботі ця ідея використана для розв'язування загальної задачі для прямокутника, коли крайові умови, що залежать від часу, задаються без обмежень на всіх чотирьох його сторонах.

II. Постановка задачі та її математична модель

Розглянемо рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

у прямокутнику $\Pi:\{0\le x\le h, 0\le y\le d\}$

з початковою умовою:

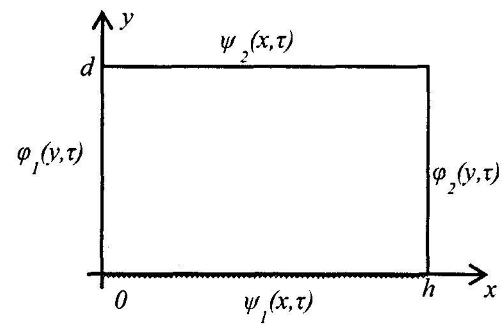
$$T(x,y,0)=f(x,y), \qquad (2)$$

крайовими умовами $T|_\Gamma$:

$$T|_\Gamma:\begin{cases} T(0,y,\tau)=\varphi_1(y,\tau),\\ T(x,0,\tau)=\psi_1(x,\tau),\\ T(h,y,\tau)=\varphi_2(y,\tau),\\ T(x,d,\tau)=\psi_2(x,\tau)\end{cases} \qquad (3)$$

та умовами узгодження в кутових точках прямокутника $\Pi:\{0\le x\le h, 0\le y\le d\}$:

$$\begin{array}{l}\varphi_1(0,\tau)=\psi_1(0,\tau),\varphi_1(d,\tau)=\psi_2(0,\tau),\\ \varphi_2(0,\tau)=\psi_1(h,\tau),\varphi_2(d,\tau)=\psi_2(h,\tau)\end{array} \qquad (4)$$



Функцію розподілу температури $T(x,y,\tau)$, як розв'язок задачі (1) - (4) знайдено у вигляді суми двох функцій (метод редукції (див., наприклад,[5]):

$$T(x,y,\tau)=U(x,y,\tau)+V(x,y,\tau)\ . \qquad (5)$$

Функція $U(x,y,\tau)$ визначена як розв'язок крайової (квазістаціонарної) задачі Діріхле:

$$\Delta U\equiv\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=0,$$

$$U|_\Gamma=T|_\Gamma,$$

з умовами узгодженості (4) у вигляді, (наприклад, [6]):

$$U(x,y,\tau)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{h}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{h}d}+B_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{h}(d-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{h}d}\right)\sin\frac{\pi n}{h}x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{d}x}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{d}h}+D_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{d}(h-x)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{d}h}\right)\sin\frac{\pi n}{d}y+$$

$$+W(x,y,\tau),$$

де коефіцієнти A_n, B_n, C_n, D_n обчислюються наступним чином:

$$A_n=\frac{2}{h}\int_0^h\psi_2(x,\tau)\sin\frac{\pi nx}{h}dx,$$

$$B_n=\frac{2}{h}\int_0^h\psi_1(x,\tau)\sin\frac{\pi nx}{h}dx,$$

$$C_n=\frac{2}{d}\int_0^d\varphi_2(y,\tau)\sin\frac{\pi ny}{d}dy,$$

$$D_n=\frac{2}{d}\int_0^d\varphi_1(y,\tau)\sin\frac{\pi ny}{d}dy,$$

а $W(x,y,\tau)=A(\tau)xy+B(\tau)x+C(\tau)y+D(\tau)$ - це гармонічна функція, яка забезпечує виконання умов узгодженості [6] в кутках прямокутника $\Pi:\{0\le x\le h, 0\le y\le d\}$.

Функції $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$ знаходимо із систем рівнянь:

$$W(0,0,\tau)=\begin{cases}D(\tau)=\varphi_1(0,\tau),\\ D(\tau)=\psi_1(0,\tau).\end{cases}$$

$$W(0,d,\tau)=\begin{cases}dC(\tau)+D(\tau)=\varphi_1(d,\tau),\\ dC(\tau)+D(\tau)=\psi_2(0,\tau).\end{cases}$$

$$W(h,0,\tau)=\begin{cases}hB(\tau)+D(\tau)=\psi_1(h,\tau),\\ hB(\tau)+D(\tau)=\varphi_2(0,\tau).\end{cases}$$

$$W(h,0,\tau)=\begin{cases}dhA(\tau)+hB(\tau)+dC(\tau)+D(\tau)=\varphi_2(d,\tau),\\ dhA(\tau)+hB(\tau)+dC(\tau)+D(\tau)=\psi_2(h,\tau).\end{cases}$$

Звідки одержуємо:

$$D(\tau)=\frac{\varphi_1(0,\tau)+\psi_1(0,\tau)}{2},$$

$$B(\tau)=\frac{\psi_1(h,\tau)+\varphi_2(0,\tau)-\varphi_1(0,\tau)-\psi_1(0,\tau)}{2h},$$

$$C(\tau)=\frac{\varphi_1(d,\tau)+\psi_2(0,\tau)-\varphi_1(0,\tau)-\psi_1(0,\tau)}{2d},$$

$$A(\tau)=\frac{\varphi_2(d,\tau)+\psi_2(h,\tau)-\psi_1(h,\tau)-\varphi_2(0,\tau)}{2hd}+$$
$$+\frac{\varphi_1(0,\tau)+\psi_1(0,\tau)-\varphi_1(d,\tau)-\psi_2(0,\tau)}{2hd}.$$

Функцію $V(x,y,\tau)$ знайдено із неоднорідного рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=a\Delta V-\frac{\partial U}{d\tau} \tag{6}$$

із крайовими умовами:

$$V\big|_{\Gamma}=0 \tag{7}$$

та початковою умовою:

$$V(x,y,0)=f(x,y)-U(x,y,0)\overset{df}{=}\varphi(x,y). \tag{8}$$

(6) – (8) - класична мішана задача для функції $V(x,y,\tau)$. Розв'язки відповідної однорідної крайової задачі:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=a\Delta V\,,\ V\big|_{\Gamma}=0$$

знайдено методом власних функцій та власних значень (див. наприклад, [6]). Її власні значення:

$$\lambda_{mn}=\frac{\pi^2m^2}{h^2}+\frac{\pi^2n^2}{d^2},m\in\mathrm{N},n\in\mathrm{N}\,,$$

а відповідні власні функції:

$$v_{mn}=\sin\frac{\pi m}{h}x\cdot\sin\frac{\pi n}{d}y\,.$$

Функція $V(x,y,\tau)$, як розв'язок (6) – (8), знайдена у вигляді розвинення в ряд за власними функціями на власні значення:

$$V(x,y,\tau)=\sum_{m,n}t_{mn}(\tau)\sin\frac{\pi m}{h}x\sin\frac{\pi n}{d}y\,, \tag{9}$$

де $t_{mn}(\tau)$ - функції по часу τ . Для їх знаходження, після підстановки (9) в (6), одержуємо нескінченну сукупність диференціальних рівнянь першого порядку для $t_{mn}(\tau)$:

$$t'_{mn}(\tau)+a\lambda_{mn}t_{mn}(\tau)=-\alpha_{mn}(\tau)\,, \tag{10}$$

де $\alpha_{mn}(\tau)=\frac{4}{dh}\iint\limits_{\Pi}\frac{\partial U(x,y,\tau)}{\partial\tau}\sin\frac{\pi m}{h}x\sin\frac{\pi n}{d}ydxdy\,.$

Початкова умова для функцій $t_{mn}(\tau)$:

$$t_{mn}(0)=\varphi_{mn}\,, \tag{11}$$

де φ_{mn} – коефіцієнти подвійного ряду Фур'є за системою власних функцій $\left\{\sin\frac{\pi m}{h}x\cdot\sin\frac{\pi n}{d}y\right\}$ для функції (8), тобто

$$\varphi_{mn}=\frac{4}{dh}\iint\limits_{\Pi}\varphi(x,y)\sin\frac{\pi m}{h}x\sin\frac{\pi n}{d}ydxdy\,.$$

Розв'язки сукупності задач Коші (10), (11) мають вигляд:

$$t_{mn}(\tau)=\varphi_{mn}e^{-a\pi(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2})\tau}-\int\limits_0^{\tau}e^{-a\pi(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2})(\tau-s)}\alpha_{mn}(s)ds\,.$$

Висновки

Запропонована та обґрунтована формальна схема застосування прямого методу розв'язування першої загальної крайової задачі для рівняння теплопровідності в прямокутнику.

Задача розв'язана в найбільш загальній постановці з ненульовими крайовими умовами на всіх чотирьох сторонах прямокутника. Розв'язок отримано у вигляді рядів в явній формі.

Запропонована схема без ускладнень може бути поширена на випадки крайових умов другого та третього роду або будь-яких комбінацій таких умов на різних сторонах прямокутника.

Література References

[1] Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва. – 1967. – 559 с.

[2] Таций Р.М., Пазен О.Ю. Общие краевые задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэфициентами / Таций Р.М., Пазен О.Ю.// Инженерно-физический журнал Национальной Академии Беларусии. – 2016. - Том 89, № 2. – С.350-361.

[3] Тацій Р.М. Визначення теплообміну в нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом тепла/ Тацій Р.М., Кусій М.І., Пазен О.Ю.// Пожежна безпека. Зб. наук. пр. 2012. - №20. – С.20-26.

[4] Тацій Р.М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефцієнтами/ Тацій Р.М., Власій О.О., Стасюк М.Ф.// Вісник національного університету «Львівська політехніка» фіз.-мат. науки. – 2014. -№804. – С.64-69.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука,1977. – 735 с.

[6] Положій Г.М. Рівняння математичної фізики, К.: 1959.