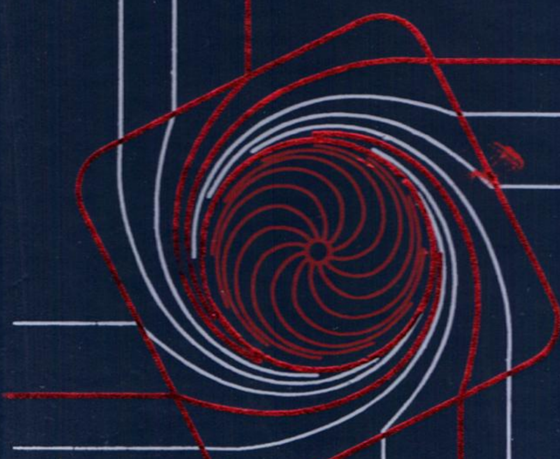
П. Гащук

ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ
І ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ



П. ГАЩУК
ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ
І ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Петро ГАЩУК

ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ І ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Львів
«Українські технології»
2002

ББК 22.161.6
Г 24
УДК 517.2

Викладається теорія лінійних динамічних систем, зведена до побудови інтегралів звичайних лінійних диференційних рівнянь. Поряд з класичною методологією основне місце в теорії посідає так звана фундаментальна функція, однієї якої достатньо, щоб структурувати загальний розв'язок довільної звичайної диференціальної задачі. Розглядаються як класичні, так і узагальнені інтеграли звичайних диференційних рівнянь, серед яких — рівняння з особливостями в коефіцієнтах типу імпульсних функцій.

Для інженерів та математиків, аспірантів та студентів.

Іл. 100. Табл. 7. Бібліогр. 39 назв.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
Лист № 14/18.2–400 від 02.04.2001

Рецензенти:
О. Ф. Дащенко, доктор технічних наук професор
Заслужений діяч науки і техніки України,
Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки
(Одеський національний політехнічний університет)

В. А. Осадчук, доктор фізико-математичних наук професор
(Національний університет «Львівська політехніка»)

Г $\dfrac{1602070100\text{-}029}{2002}$ Без оголош.

ББК 22.161.6
УДК 517.2

ISBN 966-666-024-5

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Все спрямовано на пізнання природи, і математика в цьому — лише засіб. Це твердження, без сумніву, викличе у багатьох спротив (за Гаусом, наприклад, математика — цариця наук). Проте, ...

Якось Бертран Расел сказав приблизно таке. Математикам притаманно те, що вони ніколи не знають, про що, власне, йдеться. Вони переймаються здебільшого не істиною, а несуперечністю своїх міркувань. Їх займає не те, чи можна деяку закономірність долучити до засобів описання реального світу, а лиш те, чи є ця закономірність логічно правдивою, якщо її розглядати у властивих їй рамках і розбирати її, керуючись доречними правилами. Не варто хибно розуміти математика, який вільно і рішуче говорить про нескінченність: він зовсім не збирається знати, про що ж він говорить, він ж бо не має на увазі якусь “справжню” нескінченність, навіть якщо б вона існувала.

В математиці співвідношення стали відігравати важливішу роль, аніж самі об’єкти. Р Фейнман у п’ятому томі своїх лекцій висловився відносно сприйняття рівнянь Максвела так: “Математики чи люди з математичним складом розуму часто при “вивченні” фізики гублять саму фізику з вигляду і впадають у блуд. Вони кажуть: “Послухайте, ці диференціальні рівняння — рівняння Максвела — це ж бо все, що є в електродинаміці; навіть самі ж фізики визнають, що нема нічого такого, що б не містилось у цих рівняннях. Рівняння ці складні; добре, але це лиш математичні рівняння, і якщо я розберусь в них математично, то я розберусь і у фізиці.” Але нічого з цього не виходить... Вони терплять поразку від того, що справжні фізичні ситуації реального світу так заплутані, що треба володіти значно більш широким розумінням рівнянь.” В свою чергу, П. Дірак казав “Я вважаю, що зрозумів зміст рівняння, якщо в змозі уявити собі загальний вигляд його розв’язку, не розв’язуючи його безпосередньо... Фізичне розуміння — це щось неточне, невизначене, не математичне, але для фізика воно цілком необхідне.” Сократ (маючи на увазі вчення Геракліта) висловився так: “Те, що я зрозумів, — прекрасне. З цього я роблю висновок, що й те, чого я не зрозумів, також прекрасне” (цей вислів можна розглядати і в багатьох інших контекстах). Отже точне і неточне неминуче повинні йти поруч.

Термодинаміка, наприклад, оперує лише чотирма дуже простими за змістом і досить формалізованими началами (принципами, законами). Здавалося б, виклади акуратно на кількох сторінках ці начала, доведи їх зміст до найширшого загалу і задача пізнання світу у багатьох аспектах була б розв’язана. Але ж ні, кожен вартий уваги підручник з термодинаміки вимушено є великим за обсягом зводом коментарів, які супроводжують виклад начал термодинаміки, і кожен раз здається, що для повного їх розуміння ще якоїсь інформації не вистачає. Отже розуміння законів термодинаміки є чимось складнішим, аніж укладання і дослідження рівнянь.

Не варто особливо перейматися клопотами, які постали перед математиками в усвідомленні того, чим вони займаються. Але немає сенсу ігнорувати і те, що з плином часу все менша і менша частка новітніх досягнень математики залучається до пізнання природи і корисного перетворення довкілля. Стало цілком звичним при розв'язування багатьох фізичних, технічних, економічних тощо задач покладатися більше на досвід і емпіризм, дослід і машинний (обчислювальний) експеримент, спираючись при цьому на "старі" досягнення математики. Інженери багатьох напрямів діяльності переконалися, що простіше, дешевше і надійніше всі свої ідеї перевіряти натурними експериментами ("на зуб"), аніж вдаватися до ґрунтовних теоретичних досліджень з використанням складного математичного супроводу (перевіряти ідеї розумом).

Постійно зростаюча складність задач зумовила необхідність вузької спеціалізації різних галузей науки. Через це, в значній мірі, й математика стала самодостатньою, чистою. При цьому, однак, і досягнення "чистих" фізиків, біологів, інженерів не втратили масштабності і разючості. Але якими б вони були, якщо б високий інтелект математиків не був ізольований від проблем пізнання природи? Залишається визнати, що дослідникам природи і інженерам доведеться (з певними "втратами", зрозуміло) урівняти свої суто фахову обізнаність та обізнаність в математиці.

В книзі про лінійні динамічні системи йдеться, власне, про відносно "старий" розділ математики, виклад якого не потребує глибоких абстракцій і складної математичної мови. Моделі лінійних динамічних систем — це перш за все лінійні диференціальні рівняння (та споріднені інтегральні рівняння). Вмотивований аналіз і синтез динамічних систем не можливий без залучення варіаційного числення (теорії оптимального керування, динамічного програмування) та теорії стійкості, які, в свою чергу, спираються на теорію диференціальних рівнянь чи є продовженнями цієї теорії. Але загалом всі перелічені математичні засоби дослідження динамічних систем — це, без перебільшення, теорія функцій (і функціональний аналіз, звичайно). Тому функція в книзі, в якій всю увагу зосереджено на звичайних лінійних диференціальних рівняннях, доречно посідає особливе місце і як окремий математичний об'єкт (розділи 1 і 2), і як ефективний засіб синтезу розв'язків диференціальних задач (всі інші розділи); до того ж, окремо в розділі 3 розглядається алгебричний многочлен як непересічна у всіх відношеннях функція, а разом з тим і як функція, що править за характеристику властивостей динамічних систем зі сталими параметрами.

Розділи 4 — 7 охоплюють виклад класичних питань теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь у класичному їх тлумаченні (опущено, проте, проблему існування та єдиності розв'язків, яку напевне доцільніше розглядати в рамках теорії більш загальних рівнянь, аніж суто лінійних). Через це ці розділи умовно складають самостійну за змістом частину книги, як і, зрештою, попередні три розділи. Разом перші сім розділів формують підґрунтя для введення поняття фундаментальної функції (розділи 8 та 9).

Фундаментальна функція — ефективний засіб структурування розв'язку лінійного диференціального рівняння довільного порядку (однорідного чи неоднорідного). По суті, розв'язати рівняння означає знайти лише одну параметризовану функцію, яку і було названо фундаментальною: вона та її послідовні частинні похідні за параметром разом складають фундаментальну систему розв'язків однорідного лінійного рівняння; та сама функція дозволяє водночас побудувати і окремий розв'язок відповідного неоднорідного рівняння. Вперше почав застосовувати поняття фундаментальної функції до розв'язування диференціальних рівнянь Л.-М. М. Зорій.

Лінійні задачі дивним чином поєднуються в одну систему. Відомо, що лінійні диференціальні рівняння тісно пов'язані з лінійними інтегральними рівняннями. На цьому буде зосереджено увагу в розділі 10. Ще в XIX столітті наполегливо вивчалися аналогії між системами лінійних алгебричних рівнянь зі скінченною кількістю змінних і лінійними інтегральними рівнянням — граничними відображеннями систем лінійних рівнянь у разі зростання кількості змінних до нескінченності. В 1900 році Фредгольмом аналогію між системою лінійних алгебричних рівнянь зі скінченною кількістю змінних

$$y_i - \lambda h \sum_{j=1}^{n} k_{ij} y_j = x_i ,\ i = \overline{1,n} ,$$

(де x_i та y_i — відомі та шукані величини, k_{ij} та λ, h — задані коефіцієнти та параметри) і лінійним інтегральним рівнянням

$$y(t) - \lambda \int_a^b K(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau = x(t)$$

(де $x(t)$ та $y(t)$ — відома та шукана функції, $K(t,\tau)$ та λ, a, b — задані функція та параметри) було доведено до рівня теоретично обґрунтованого математичного засобу. Замість інтеграла Фредгольм оперував інтегральними сумами, в яких

$$t_i = a + ih ,\ x_i = x(t_i) ,\ y_i = y(t_i) ,\ k_{ij} = K(t_i, \tau_j) ,\ 1 \le i, j \le n .$$

Методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь були опрацьовані у XVIII столітті. Застосовуючи ці методи і операцію граничного переходу, Фредгольм віднайшов умови розв'язності і алгоритми знаходження розв'язків своїх інтегральних рівнянь. Так, по суті, започаткувався лінійний функціональний аналіз. Поряд з інтегральними рівняннями в розділі 10 розглядаються (у взаємозв'язку і незалежно) також й інші типи диференціальних задач.

Розділ 11 охоплює основні питання побудови узагальнених інтегралів диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, в тому числі з такими коефіцієнтами, що мають особливості типу дельта-функції та її похідних. У рівняннях з узагальненими розв'язками, що містять в собі дельта-функцію та її похідні, статуси незалежної і залежної змінних змінити не можливо. При цьому незалежну змінну є можливість тлумачити як час у примітивному означенні: час — це те, що змінюється навіть тоді, коли ніщо інше не змінюється.

Нарешті, в розділі 12 викладено основні методи синтезу фундаментальної функції. Фундаментальні функції будуються як ряди Тейлора, ряди за параметром, а для рівнянь зі сталими коефіцієнтами та звідних до них, а також для систем таких рівнянь — в замкненій формі. Такі способи синтезу фундаментальної функції, які забезпечують можливість будувати загальні розв'язки рівнянь залежними явно від коефіцієнтів диференціальних рівнянь і їх особливостей заслуговують на особливе відношення.

Залишається тільки жалкувати, що, покладаючись навіть на поняття фундаментальної функції, всі розділи теорії лінійних задач (важливі, цікаві, потрібні) скоріш за все найближчим часом не вдасться викласти вичерпно у цілковитому взаємозв'язку і на єдиних засадах в одній осяжній за обсягом і складністю праці. Зовсім мало зусиль докладено в цьому напрямі сьогодні.

Основний аспект вияву лінійності динамічних систем — це суперпозиція розв'язків відповідних модельних диференційних рівнянь. Суперпозиційність вирізняє лінійні динамічні системи і лінійні диференціальні рівняння як принципово відмінні від нелінійних. Проте, завжди існують підстави методологічно розглядати лінійність і нелінійність як такі, що супроводжують одна одну. За приклад може правити відома ідея квазілінеаризації. Вона дозволяє втілити універсальний підхід до дослідження існування та єдиності розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними, які підпорядковані певним початковим чи граничним умовам, а також, що вданому разі є найважливішим, передбачає зведення процесу розв'язування нелінійної задачі до пошуку розв'язків послідовності лінійних задач; аналіз збіжності при цьому спирається на апарат диференціальних нерівностей. Така обставина дозволяє розглядати теорію лінійних диференціальних рівнянь як в певному сенсі підґрунтя для теорії нелінійних диференціальних рівнянь, а звідси випливає вмотивованість, доцільність викладу цієї теорії окремо.

1 МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ: ФУНКЦІЯ І ФУНКЦІОНАЛ 1

1.1 Елементарне тлумачення поняття функції

Функції широко застосовувались в математичних дослідженнях навіть тоді, коли достеменно не було відомо, що це таке функція в загальному випадку (ситуація чимось подібна до тієї, коли довший час повсюдно вимірювали температуру, не знаючи напевне, що таке власне температура). Однією з перших задач, в якій виникла нагальна потреба загального означення функції, була задача про коливання струни. Зміст цієї задачі полягає в такому.

Пружній струні, яка закріплена у двох точках $x=0$ і $x=l$ восі абсцис Ox (у вільному стані закріплена струна пересічно вважається натягнутою у пряму лінію), надають деякої, взагалі кажучи — довільної, форми, а потім струну без примусу (не надаючи жодному з її елементів початкової швидкості) відпускають. Струна починає коливатись, самовільно змінюючи свою форму. Необхідно визначити форму струни у будь-яку мить її коливання.

Задача зводиться до пошуку функції $u(t,x)$, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

за початкових умов

$$u(0,x)=u_0(x), \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=0 \tag{1.2}$$

(u ординати точок струни, t — час).

Д'Аламбер (а за рік і Ойлер) уклав таке правило побудови розв'язку задачі: функцію $u_0(x)$, що задає початкову форму струни, треба формально продовжити поза відрізок $0\le x\le l$ на відрізок $-l\le x\le 0$ як непарну функцію (для якої $u_0(x)=-u_0(-x)$); нову функцію, задану тепер на відрізку $-l\le x\le l$, необхідно поширити на всю числову вісь Ox як періодичну з періодом $2l$ функцію (для якої $u_0(x)=u_0(x+2l)$); якщо залишити старе позначення $u_0(x)$ за новою функцією, то шуканий розв'язок відображатиме формула

$$u(t,x)=\frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2} \quad (0\le x\le l,\, t\ge 0).$$

Принциповим тут є, по-перше, те, що задана функція $u_0(x)$, через яку визначається шукана функція $u(t,x)$, штучно продовжується за межі реальної області означення $0 \le x \le l$, а потім область означення знайденої функції $u(t,x)$ знову звужується; тож, в даній задачі доводиться оперувати в певному розумінні фіктивними функціями. А по-друге, первісна функція $u_0(x)$ (до її продовження) вважається в значній мірі довільною; то ж виникає запитання, що таке довільна функція (чи може вона в даному випадку бути, зокрема, неоднозначною) ?.

За Д'Аламбером (що був послідовником Й. Бернуллі*)) "довільна функція" — це "довільний аналітичний вираз", тоді як за Л. Ойлером — "довільно накреслена крива". З одного боку, задача графічно зобразити аналітично подану функційну залежність завжди сприймається як простіша, ніж задача відтворити довільний графік аналітичним виразом; отож природніше вважати "довільно накреслену криву" більш загальним об'єктом "функція", ніж функція як "аналітичний вираз" (аргумент, близький Л. Ойлеру**)). З іншого боку, в математиці доводиться з'ясовувати аналітичними засобами, чи належить та чи інша функція до певного класу (чи є вона, наприклад, розв'язком рівняння (1.1) за умов (1.2)); як же ж в такому разі здійснювати операції математичного аналізу (диференціювання, наприклад) поза рамками, скажімо, нарисної геометрії (аргумент, близький Д'Аламберу)?

Усунути предмет суперечки між Д'Аламбером і Л. Ойлером спробував Д. Бернуллі, припустивши можливість аналітично описати будь-яку криву Л. Ойлера (накреслену, зокрема, вільним порухом пера) у формі ряду

$$u_0 = a_1 \sin\frac{x}{l} + a_2 \sin\frac{2x}{l} + \ldots + a_n \sin\frac{nx}{l} + \ldots \, . \tag{1.3}$$

Аргумент Д. Бернуллі залишався, однак, непереконливим (ряд (1.3) здавався занадто конкретним за своїми властивостями, щоб претендувати на роль засобу загального означення функції), аж доки Ж. Фур'є (1807) не вивів правило знаходження коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ —

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\; n = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

а потім (1837) П. Діріхле не довів збіжність ряду (1.3) з коефіцієнтами (1.4).

Виявилося, що аналітичним виразом можна відобразити функцію, значення якої в одному проміжку ніяк не пов'язані з її значеннями в інших проміжках, а двома аналітичними виразами — дві різні функції, які збігаються в одному з проміжків, принципово відрізняючись в інших; один-єдиний аналітичний вираз може відо-

---

*) За Й. Бернуллі функцією змінної величини є аналітичний вираз, складений з цієї величини і сталих.

**) За Л. Ойлером функцією є крива, накреслена вільним рухом руки. Йому ж належить і дещо згодом підправлене означення: якщо деякі кількості залежать від інших так, що зі зміною останніх змінюються й перші, то перші називаються функціями від інших.

бражати криву, складену з різних суттєво відмінних за особливостями перебігу частин; відображувана аналітичним виразом крива не обов'язково повинна бути неперервною чи мати неперервну кривину тощо. Таким чином, вимога аналітичності функції в значній мірі перестала бути визначальною; стало зрозумілим, що "функція" — це щось більш загальне, ніж з самого початку аналітичний вираз. Тому П. Діріхле зупинився на такому означенні (1837): y є функцією від x, якщо кожному значенню x відповідає визначене значення y; причому цілком не важливо, як встановлено цю відповідність. Власне він зауважив, що за цим означенням функцією є непересічна відповідність (**функція Діріхле**)

$$D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x-\text{ірраціональне число},\\ 1, \text{ якщо } x-\text{раціональне число}.\end{cases}$$

Тут, справді, кожному дійсному значенню x відповідає цілком конкретне значення $D(x)$ (зокрема, $D(3/5)=1$, а $D(\pi)=0$); проте аналітичної формули для обчислення значень $D(x)$ не існує, до того ж функцію неможливо зобразити графічно.

Й. Бернуллі і Д'Аламбер наполягали, по суті, на тому, що функцією є сенс вважати об'єкт, яким можна аналітично оперувати. Ще на одному аспекті конструктивності означення функції можна наголосити, проводячи паралель між означеннями, запропонованими, наприклад, С. Лакруа (1797) "Будь-яка кількість, значення якої залежить від однієї або багатьох інших кількостей, є функцією цих останніх, незалежно від того, відомо чи ні, які операції треба виконати, щоб перейти від них до першої." та М. Лобачевським (1834) "Функцією числа x є число y, яке дається для кожного x і зі зміною x поступово змінюється. Значення функції можна подати у вигляді або аналітичного виразу, або умови, що дають засіб перевіряти всі числа. Залежність може реально існувати, або бути невідомою."

Показовим щодо такого типу (не)конструктивності означення функції є такий приклад (Г. Шилов). Нехай з кожним натуральним числом $N=1, 2, \ldots$ зіставлено число $\nu(N)$, що дорівнює 1 або 0 залежно від того, є чи немає в десятковому розкладі числа π N дев'яток поспіль. Таке зіставлення С. Лакруа і П. Діріхле визнали б, звичайно, за означення функції; натомість, М. Лобачевський заперечив би існування тут залежності типу функції, оскільки не вказано правило, як перевірити чи є в розкладі числа π N дев'яток поспіль. Зрештою, можна навести безліч прикладів, в яких правило зіставлення чисел гіпотетично є можливим, але поки що недоведеним, або в яких таке правило складається з нескінченної кількості дій (відповідної, наприклад, кількості значень x в області означення), або ж в яких достеменно відомо, що правила взагалі не існує. Зокрема, в рамках підходу П. Діріхле припускається можливість, що при означенні функції доведеться відповідно до нескінченної множини значень x застосувати нескінченну множину ніяк не пов'язаних між собою умов зіставлення y з x, і навпаки. Функції з нескінченною множиною умов зіставлення y з x не прийнятні, наприклад, в сучасній обчислювальній техніці. Їй підвладні лише функції, задані правила зі скінченною, і до того ж порівняно невеликою, кількістю "слів".

Склалось так, що переважила точка зору, за якою під **функцією** слід розуміти закон, який дозволяє заданому значенню x ставити у відповідність єдине значення y. А тому, наприклад, функції $y=|x|$ і $y=\sqrt{x^2}$ не можуть бути різними, оскільки відображають один і той самий закон зіставлення чисел. В подальшому неодноразово використовуватимуться різні аналітичні способи запису одних і тих самих законів перетворення множин.

Через окреслену тут (в загальних рисах, зрозуміло) проблемність означення функції математики розділились на два табори — прихильників означення функції, яке не зобов'язувало вказувати правила зіставляння чисел, і прихильників означення, в якому обов'язково містилось такого типу правило, причому зі скінченної кількості "слів". Ці другі, яких називають "інтуїціоністами", відхиливши значну частину класичного аналізу, створили власну **"інтуїтивну" математику**, вагомі і корисні здобутки якої заперечити неможливо.

Прихильність до "інтуїціонізму" в математичному аналізі простежується в багатьох питаннях різного рівня вагомості. Звернемося, наприклад, до поняття похідної функції. Обчислимо похідну функції $y=x^2$, спираючись на примітивне тлумачення зникаюче малих величин.

Надамо аргументу x, при якому y має значення x^2, приросту dx. При цьому функція набуде значення $y+dy$, яке становитиме $(x+dx)^2=x^2+2x\,dx+(dx)^2$. Отже приріст функції становить $dx=2x\,dx+(dx)^2$. Звідси

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x\,dx+(dx)^2}{dx}=2x+dx.$$

Звідси, якщо dx — зникаюче мала ($dx\approx 0$), то $\dfrac{dy}{dx}=2x$. (Таким методом обчислював похідну Ферма, не турбуючись особливо про його обґрунтованість.)

Аналогічно, для функції $y=\sqrt{x}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}=\frac{\left(\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)}{dx\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{x+dx-x}{dx\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)}.$$

Отже при $dx\approx 0$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Вважаючи відомим те, що $\sin dx\approx dx$ і $\cos dx\approx 1$ при $dx\approx 0$, легко з'ясувати:

$$\frac{d}{dx}\sin x=\frac{\sin(x+dx)-\sin x}{dx}=\frac{\sin x\cos dx+\sin dx\cos x-\sin x}{dx}=\cos x,$$

$$\frac{d}{dx}\cos x=\frac{\cos(x+dx)-\cos x}{dx}=\frac{\cos x\cos dx-\sin x\sin dx-\cos x}{dx}=-\sin x.$$

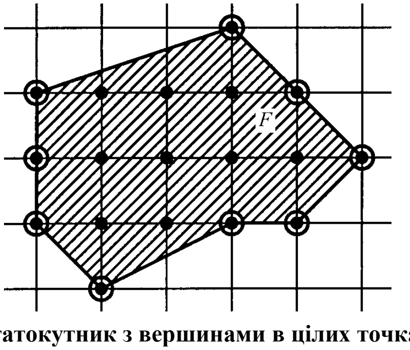
Викладений метод знаходження похідних не перечить інтуїції. Проте, він є неприйнятним з позицій класичного математичного аналізу. І лише в рамках так званого нестандартного математичного аналізу він знаходить тверде підґрунтя. Не заперечуючи доцільності строгих формалізованих підходів до дослідження, зазначимо, що корисний правдивістю результат часто важить більше, ніж обґрунтованість методу його отримування.

Від часу винайдення загальної теорії множин, під функцією $f(\cdot)$ почали розуміти відповідність між будь-якими множинами X і Y (не тільки числовими), коли кожному елементу x з X відповідає єдиний елемент y з Y (сутність елементів x і y може бути абсолютно різною). X називають областю означення функції, а множина $\{f(x)\ |x\in X\}$ — множиною її значень. У випадку нечислових множин (а інколи й числових) перед терміном “функція” надають перевагу терміну “відображення”. Наприклад, геометричні перетворення задають відображення множини точок площини (чи простору) на себе. Ставлячи у відповідність кожному трикутнику вписане в нього коло, матимемо відображення множини трикутників на множину кіл, а ставлячи у відповідність кожному трикутнику його площу — відображення множини трикутників на множину додатних чисел. Натомість, наприклад, перетворення $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\le x\le R$, відображає відрізок $[-R;R]$ на відрізок $[0;R]$, а тому є числовим відображенням — функцією.

Виділимо на площині **цілі точки** — вузли ґратки, яка ділить площину на однакові квадратні клітини з довжиною сторони 1. Нехай задано багатокутник F, вершини якого знаходяться власне у цілих точках. Якщо $N(F)$ — кількість вузлів, що належать багатокутнику (що лежать всередині і на границі багатокутника), а $B(F)$ — кількість вузлів, що належать тільки його границі, то площа $S(F)$ цього багатокутника становить

$$S(F)=N(F)-\frac{B(F)}{2}-1.$$

Для зображеного на рис. 1 семикутника, наприклад, $N(F)=18$, $B(F)=9$, $S(F)=18-\frac{9}{2}-1=12\frac{1}{2}$, Наведену **формулу (Піка)** можна тлумачити як спосіб аналітичного задавання функції. В цьому прикладі також більше сенсу говорити про відображення множин.



1 **Багатокутник з вершинами в цілих точках.**

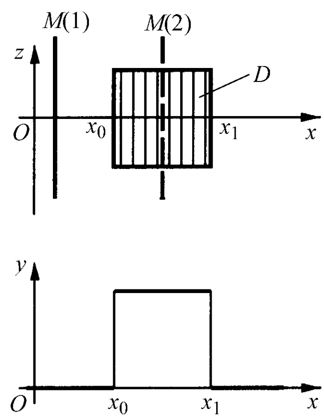
Отже, спираючись на теорію множин, поняття **функції** є сенс означити так. Якщо кожному числу x з певної множини X поставлено у відповідність число y з множини Y (X і Y можуть частково чи повністю збігатись), то кажуть, що задано функцію $y(x)$, яка величині x ставить у відповідність величину y. Таке формальне означення/тлумачення поняття функції є цілком задовільним у більшості випадків застосування математичних засобів дослідження. Але, чи завжди існує можливість в конкретних обставинах означити функціональну залежність, вдаючись лише до формальних дій?

1.2 Формальна та змістовна сутність функції

Пересічно функціональну залежність певних величин доводиться означувати (окреслювати), беручи до уваги цілком конкретні властивості реальних об'єктів. Власне конкретність доволі часто стає завадою при формалізованому означенні взаємної залежності величин.

Розглянемо такий простий приклад.

Задамо на площині в ортогональній системі координат Oxz замкнену область-квадрат D, сторони якого паралельні координатним восям, і пряму M, паралельну координатній восі Oz (рис. 2, вгорі). В залежності від розташування прямої M вздовж координатної восі Ox певна її частина (відрізок) може не належати (розташування 1) чи належати (розташування 2) області D. Спробуємо означити функцію $y = y(x)$, яка б відображала залежність довжини y відрізка прямої M, належного області D, від розташування x точки перетину цією прямою восі Ox.



2 **Зарисовка функції, покликаної відобразити залежність довжини належного квадратові відрізка прямої лінії від взаємного розташування квадрата і лінії.**

Напрошується функція, графік якої зображено в долішній частині рис. 2. Проте, легко угледіти, що при означуванні функції $y = y(x)$ в точках $x = x_0$ та $x = x_1$ виникає невизначеність. Варіанти можливого зображення функції наведено на рис. 3. В першому варіанті (рис. 3, *а*) в точках $x = x_0$ та $x = x_1$ функція $y = y(x)$ означена двозначно, в другому (рис. 3, *б*) — недоозначена, в третьому, …, шостому (рис. 3, *в – е*) — по-різному однозначно, в сьомому (рис. 3, *є*) — неоднозначно. Варіанти, відображені на рис. 3, *в, е*, сприймаються як неправдиві, оскільки графік $y = y(x)$ повинен би мати вісь симетрії.

Надамо квадрату D чи прямій M малих деформацій і за цих умов знову означимо функцію $y = y(x)$ (рис. 4). Графік цієї функції більш за все подібний на дещо здеформований графік з рис. 3, *є*. Тому складається враження, що власне графік з рис. 3, *є* є тим взірцем, до якого прямує графік з рис. 4 при поступовому зменшенні ступеня деформованості квадрата D чи прямої M. Проте, прийняти таке означення функції $y = y(x)$ за єдино правдиве вагомих і беззастережних підстав все одно немає; відчувається певна штучність, неприродність запропонованого доозначення.

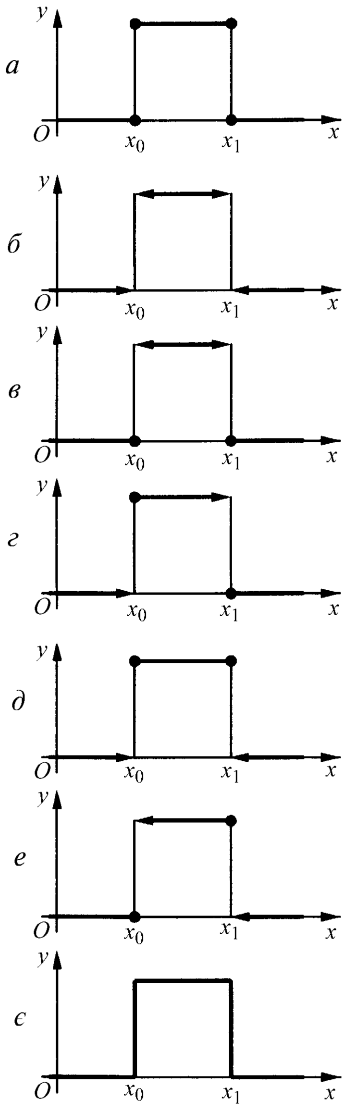
Розглянемо таку альтернативу. Означимо функцію $y = y(x)$ у випадку відсутності перпендикулярних до восі Ox частин межі квадратної області разом з кутовими точками, рис. 5. Тут процес означування виглядає простішим, і наведений графік сприймається як правдивий. А отже він не може зображати функцію $y = y(x)$ у випадку обмеженої квадратної області (див. рис. 2 та 3, *в*); тут логічніше надати перевагу означенню, графічно відображеному на рис. 3, *д*. Водночас, ситуація ускладниться, якщо усунути ще й верхню (нижню) межу квадратної області, а далі, — взагалі розглядати цю область без межі.

Наведений приклад засвідчує вагомість інтуїтивного чуття правдивості та відносність і обмеженість формальних алгоритмів означення функцій.

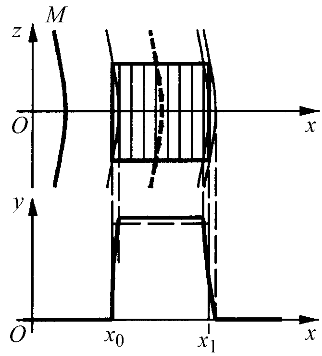
Необхідно підкреслити, що клопоти з точковою (на множині виміру нуль) неозначеністю функційної залежності між величинами виникають доволі часто. З подібними клопотами доведеться неодноразово зустрітись ще в даному розділі. Проте, точкова неозначеність відносно рідко принципово позначається на результатах дослідження динамічних процесів. А тому нею пересічно (свідомо чи несвідомо) нехтують.

1.3 Неперервність і розподіл значень функції

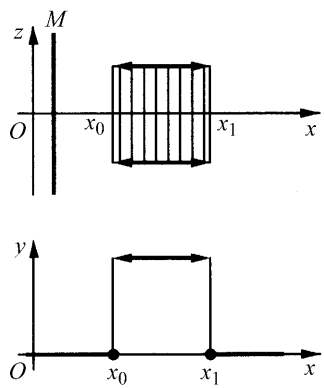
Однією з найважливіших властивостей **функцій** є їх **неперервність-перервність**. Звернемося до функції $y = y(x)$. Кажуть: якщо за будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $|y(x) - y(x_0)| < \varepsilon$, лиш тільки $|x - x_0| < \delta$, то функція $y = y(x)$ є неперервною в точці $x = x_0$. Іншими словами: функція $y = y(x)$ неперервна при $x = x_0$, якщо зникаюче малому приростові $x - x_0 = h$ аргумента x відповідатиме зникаюче малий приріст $y(x) - y(x_0) = y(x_0 + h) - y(x_0)$ функції $y = y(x)$. Таким чином, означувану в деякому околі точки x_0 функцію $y = y(x)$ називають неперервною при $x = x_0$, якщо при прямуванні h за будь яким законом (!)



3 **Варіанти графічного зображення формально недоозначеної функції.**



4 **Означуваність функції за малих деформацій прямої.**



5 **Означування функції у випадку квадратної області, в якій відсутня частина її межі.**

до нуля справджується рівність $\lim\limits_{h\to 0} y(x_0+h)-y(x_0)=0$ ($\lim\limits_{h\to 0} y(x_0+h)=y(x_0)$). **Умову неперервності** можна записати ще й так: $\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=y(\lim\limits_{x\to x_0} x)$. Отже функція неперервна в точці $x=x_0$, якщо її границя при прямуванні x до x_0 збігається зі значенням самої ж функції в точці $x=x_0$. Якщо висловлена у будь-якій формі умова неперервності функції $y=y(x)$ в точці $x=x_0$ не виконується, то кажуть, що в цій точці **функція** $y=y(x)$ **розривна**.

Функція називається **неперервною на відрізку** $[a,b]$, якщо вона неперервна за будь-якого $x \in [a,b]$. Всі неперервні на $[a,b]$ функції мають властивості, окреслювані твердженнями (доведення яких спирається на теорію ірраціональних чисел):

1° Неперервна на $[a,b]$ функція досягає на $[a,b]$ принаймні один раз найбільшого і один раз найменшого значень.

2° Нехай неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $y = y(x)$ на кінцях цього відрізку набуває значень $y(a) = m$ і $y(b) = M$; і якщо K — будь-яке число, що міститься між m і M, то існує принаймні одне таке значення $x = c \in [a,b]$, при якому $y = y(x)$ набуває значення K ($y(c) = K$). Зокрема, якщо $y(a) = m$ і $y(b) = M$ мають різні знаки, то всередині $[a,b]$ існує принаймні одна точка $x = c \in (a,b)$, в якій $y = y(x)$ перетворюється на нуль ($y(c) = 0$).

В означенні неперервності функції $y = y(x)$ в точці $x = x_0$ підкреслювалось, що при обчисленні $y(x_0)$ аргумент x прямує до x_0 довільним чином. Зокрема, прямуючи до x_0, x може весь час залишатись ліворуч від x_0; на цьому наголошують записом $x \to x_0 - 0$. Якщо ж, прямуючи до x_0, x залишається тільки праворуч, то пишуть $x \to x_0 + 0$. Відповідно до цього розрізняють **однобічні ліву та праву границі функції** $y(x)$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} y(x) = y(x_0 - 0) \text{ і } \lim_{x \to x_0 + 0} y(x) = y(x_0 + 0).$$

Очевидно, що коли існують $y(x_0 - 0)$, $y(x_0)$, $y(x_0 + 0)$, і всі вони попарно однакові, то функція $y = y(x)$ неперервна в точці $x = x_0$. Якщо ж попарна рівність як-небудь порушується (не виказується), то говорять, що функція $y = y(x)$ перервна (губить неперервність, розривна, терпить розрив) в точці $x = x_0$.

Розрізняють два типи розривів функції — першого та другого роду. Точкою розриву першого роду функції $y = y(x)$ називають точку, в якій функція $y = y(x)$ має однобічні ліву $y(x_0 - 0)$ та праву $y(x_0 + 0)$ границі, які, однак, не збігаються: $y(x_0 - 0) \neq y(x_0 + 0)$. В точці розриву першого роду функція стрибкоподібно змінює своє значення (здійснює стрибок) на величину $\Delta y = y(x_0 + 0) - y(x_0 - 0)$.

Точкою розриву другого роду функції $y = y(x)$ називають таку точку, в якій хоча б одна (ліва $y(x_0 - 0)$ чи права $y(x_0 + 0)$) з однобічних границь не існує або прямує до безмежності.

Нехай функція задана (означена) рівнянням

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Вона визначувана (обчислювана арифметичними операціями) у будь-якій точці $x \neq 1$, рис. 6. Отже графіком функції слід було б вважати пряму $y = x + 1$

з вилученою точкою A. В точці ж $x=1$ доводиться мати справу з невизначеністю типу $\frac{0}{0}$. Але очевидно, що

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=2\,.$$

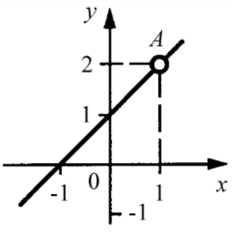
В даному випадку операцію знаходження границі формально можна ототожнити з операцією обчислення функції, а тому A є сенс вважати належною графіку. До того ж, логічно вважати правомірною операцію ділення x^2-1 на $x-1$ незалежно від того, яких значень набуває x. Це означає, що запис функції у вигляді дробу рівносильний запису $y=x+1$.

Розглянемо функцію, рис. 7,

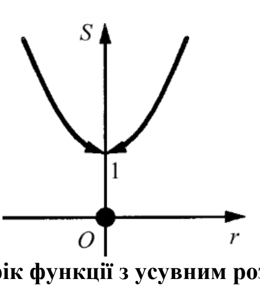
$$y(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{якщо } x\neq 0, \\ \quad 0, \quad \text{якщо } x=0. \end{cases}$$

Тут $\lim\limits_{x\to 0-0} y(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} y(x)=0$, але $y(0)=1\neq 0$. Отже ця **функція розривна**. Такого типу розриви називають усувними (поняття усувного розриву загалом не належить до конструктивних, і наголошувати на його змісті особливо нема потреби).

Розрив сприймається як штучний, чисто формально завбачений означенням функції. Проте, можна навести відомий приклад, коли ця функція відображає цілком природний стан речей. Візьмемо послідовність



6 **Графік “лінійної” функції.**



7 **Графік функції з усувним розривом.**

$$S_1 = r^2,\ S_2 = r^2 + \frac{r^2}{1+r^2},\ S_3 = r^2 + \frac{r^2}{1+r^2} + \frac{r^2}{\left(1+r^2\right)^2},\ \ldots,$$

$$S_n = r^2 + \frac{r^2}{1+r^2} + \frac{r^2}{\left(1+r^2\right)^2} + \ldots + \frac{r^2}{\left(1+r^2\right)^{n-1}},\ \ldots,$$

всі члени якої є нулями при $r = 0$ (тобто нуль є границею цієї послідовності при $r \to 0$). З другого боку, величина S_n є сумою членів геометричної прогресії зі знаменником $\frac{1}{1+r^2} < 1$, а отже — величиною, яка при $n \to \infty$ прямує до "суми" $S = 1 + r^2$ членів нескінченної спадної геометричної прогресії. Хоча і тут, щоб графік з рис. 7 відображав функцію $S(r)$ необхідно попередньо "домовитись" про однозначність.

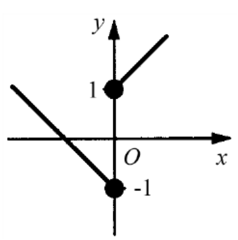
Функція (рис. 8)

$$y = \frac{x + x^2}{|x|}$$

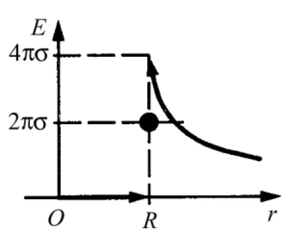
невизначувана в точці $x = 0$. До того ж не існує границя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+x^2}{|x|}$. Але, натомість, лівостороння та правостороння границі набувають конкретних значень

$$\lim_{x\to -0} \frac{x+x^2}{|x|} = -1,\quad \lim_{x\to +0} \frac{x+x^2}{|x|} = 1.$$

Можна вважати, що функція є принаймні двозначною.



8 **Графік неоднозначної функції з розривом першого роду.**



9 **Графік однозначної функції з розривом першого роду.**

Коли хочуть проілюструвати існування **однозначної розривної функції**, вдаються до такого прикладу. Електричний заряд, розосереджений з однаковою густиною σ на сфері радіуса R, створює в точці, розташованій на віддалі r від центра сфери, поле напруженості E. Функція $E(r)$ означувана у всіх точках проміжку ($0, \infty$). При $0 \le r < R$ вона записується формулою

$$E(r) = 0 ,$$

а при $r > R$ — формулою

$$E(r) = 4\pi\sigma\frac{R^2}{r^2} ,$$

рис. 9. При цьому

$$\lim_{r \to R-0} E(r) = 0 , \quad \lim_{r \to R+0} E(r) = 4\pi\sigma .$$

Якщо зі сфери вилучити сегмент, обмежуваний паралеллю малого радіуса ρ з полюсом в деякій точці M, через яку проходить сфера, то частина сфери, що залишилася, створюватиме в точці M простору деяку напруженість E_ρ, залежну від ρ. $E_\rho \to 2\pi\sigma$ при $\rho \to 0$, і отже $E(r) = 2\pi\sigma$ при $r = R$. Таким чином, функція $E(r)$ не наділена навіть однобічною неперервністю, проте вона — однозначна (за фізичним змістом, зрозуміло).

Звернемо увагу ще на такий факт. Значення функції $\sin x$ при $x \to \pm\infty$ (чи $\sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$) заповнюють проміжок від -1 до $+1$. Тобто можна говорити, що функції $\sin x$ при $x \to \pm\infty$ (чи $\sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$) нема можливості поставити у відповідність конкретне число, спираючись на саме означення $\sin(\cdot)$. В подібних випадках є сенс розрізняти **найбільшу і найменшу границю функції** $y(x)$:

$$\overline{\lim_{x \to a}}\, y(x) \ \text{ і } \ \underline{\lim_{x \to a}}\, y(x)$$

Однаковість найбільшої і найменшої границь є умовою, необхідною і достатньою, для існування конкретної границі функції у звичайному розумінні цього терміна.

Справедливими є такі твердження: результатом додавання, віднімання, множення, ділення (за умови, що знаменник не перетворюється на нуль) двох неперервних у деякій точці функцій є знову неперервна у цій точці функція; якщо функція $u = u(x)$ є неперервною в точці $x = x_0$, а функція $y(u)$ — неперервною в точці $u = u_0 = u(x_0)$, то складна функція $y = y\big(u(x)\big)$ обов'язково також буде неперервною в точці $x = x_0$. На підставі цих тверджень з неперервності одних функцій можна виснувати неперервність зумовлених ними інших функцій. Проте, неперервні результати можна отримати, виконуючи перелічені операції (додавання, віднімання, множення, ділення, накладання) і над двома функціями, що разом терплять відповідні розриви. Отже наведені твердження не мають оберненої сили. Наприклад, сумою функцій

$$y_1 = \frac{x}{1+x} \text{ і } y_2 = \frac{x^2}{1+x},$$

що мають розриви другого роду в точці $x = -1$, є неперервна функція $y = x$.

Функцію $y(x)$ інколи вигідно аналізувати в термінах **розподілів** чи **густин розподілів значень** x і y. Звернемося до функції $y(t) = \varphi(x(t))$. Припустимо, що існує однозначна обернена функція $x(t) = \psi(y(t))$. Якщо залежності $y(t)$ і $x(t)$ однозначно відповідні (тобто кожному значенню $x(t)$ відповідає одне цілком конкретне значення $y(t)$, і навпаки), то з того, що значення $x(t)$ належить деякій області $(x_0,\ x_0 + \Delta x]$, випливає, що відповідне значення $y(t)$ належить відповідній ж області $(y_0 = y(x_0),\ y(x_0 + \Delta x)]$. Можна сказати так: якщо величина $x(t)$ з імовірністю $P(x)$ задовольняє умову $x_0 < x(t) \le x_0 + \Delta x$, то з такою самою імовірністю $P(y) = P(x)$ величина $y(t)$ задовольняє умову $y_0 = y(x_0) < y(t) \le y(x_0 + \Delta x)$. Це означає, що справджується рівність $P(x) = |p(x)\,dx| = |p(y)\,dy| = P(y)$, де $p(x)$ і $p(y)$ — густини розподілів значень величин відповідно $x(t)$ і $y(t)$. Звідси

$$p(y) = p(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = p(\psi(y))\left|\frac{d\psi(y)}{dy}\right|. \tag{1.5}$$

(Знаки модуля в наведених виразах гарантують невід'ємність величин $P(x)$, $P(y)$, $p(x)$, $p(y)$, а отже не дозволяють втратити вкладений в ці величини зміст.) Якщо обернена функція $x(t) = \psi(y(t))$ неоднозначна і має дві гілки $\psi_1(y)$ і $\psi_2(y)$, то

$$p(y) = p(\psi_1(y))\left|\frac{d\psi_1(y)}{dy}\right| + p(\psi_2(y))\left|\frac{d\psi_2(y)}{dy}\right|; \tag{1.6}$$

якщо ж гілок ще більше, то

$$p(y) = \sum_{i=1}^{n} p(\psi_i(y))\left|\frac{d\psi_i(y)}{dy}\right|. \tag{1.7}$$

Припустимо, йдеться про лінійну функцію $y = ax + b$, $a \ne 0$, b — сталі, $x_0 \le x \le x_1$. В такому разі $\varphi(x) = ax + b$ і обернена до неї функція $\psi(y) = (y - b)/a$ — однозначна. Тому на підставі (1.5)

$$p(y) = \frac{1}{|a|}\,p\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Зокрема, якщо значення x розподілені рівномірно в $[x_0, x_1]$, то й значення y розподілені рівномірно в $[y_0 = ax_0 + b, y_1 = ax_1 + b]$; якщо розподіл x відповідає нормальному закону

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{1.8}$$

то і розподіл y відповідатиме нормальному закону:

$$p(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right),$$

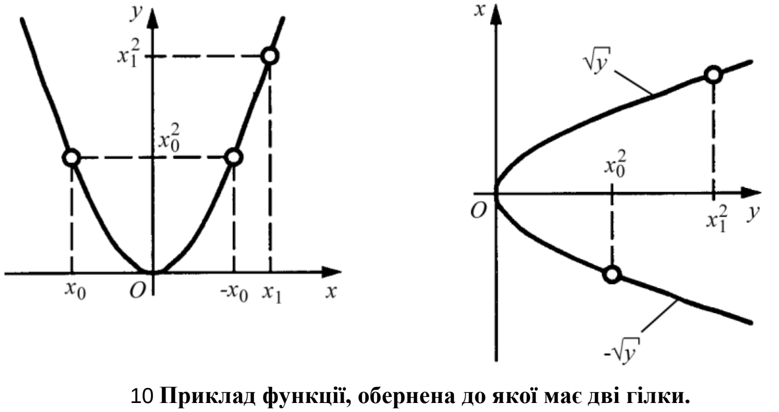
де σ, $\sigma_y = |a|\sigma$, μ, $\mu_y = a\mu + b$ — параметри розподілів.

Розглянемо випадок, коли $y(x) = x^2 \ge 0$, $x_0 \le x \le x_1$, $x_0 < 0$, $x_1 > 0$, $x_1 > |x_0|$ (рис. 10). При $x_0 \le x \le -x_0$ обернена до $y = x^2$ функція $x = \psi(y)$ має дві гілки — $\psi_1(y) = +\sqrt{y}$ (за умов $0 \le x \le -x_0$, $0 \le y \le y(-x_0) = y(x_0) = x_0^2$) та $\psi_2(y) = -\sqrt{y}$ (за умов $x_0 \le x \le 0$, $0 \le y \le y(x_0)$), а при $-x_0 \le x \le x_1$ вона є однозначною — $\psi = \psi_1(y) = +\sqrt{y}$ ($x_0^2 = y(x_0) \le y \le y(x_1) = x_1^2$). Отже, при $y \le 0$ справджується тотожність $p(y) \equiv 0$; при $x_0 \le x \le -x_0$ відповідно до (1.6)

$$p(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(p\left(\sqrt{y}\right) + p\left(-\sqrt{y}\right)\right);$$

при $-x_0 \le x \le x_1$ відповідно до (1.5)

$$p(y) = \frac{p(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}.$$



10 **Приклад функції, обернена до якої має дві гілки.**

Таким чином,

$$p(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\le 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(p\left(\sqrt{y}\right)+p\left(-\sqrt{y}\right)\right), & \text{коли } 0<y\le x_0^2,\\ \dfrac{p(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, & \text{коли } x_0^2<y\le x_1^2,\\ 0, & \text{коли } y>x_1^2.\end{cases}$$

І якщо значення x розподілені з однаковою густиною $p(x)=1/(x_1-x_0)$, то (рис. 11)

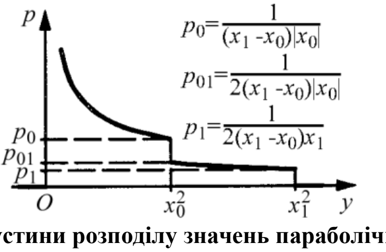
$$p(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\le 0,\\ \dfrac{1}{(x_1-x_0)\sqrt{y}}, & \text{коли } 0<y\le x_0^2,\\ \dfrac{1}{2(x_1-x_0)\sqrt{y}}, & \text{коли } x_0^2<y\le x_1^2,\\ 0, & \text{коли } y>x_1^2.\end{cases}$$

Якщо ж значення x розподілені за нормальним законом (1.8), то, рис. 12,

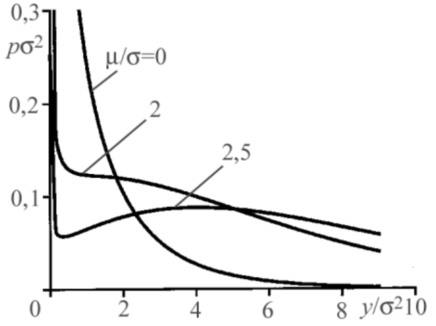
$$p(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\le 0,\\ \dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi y}}\,e^{-\frac{y+\mu^2}{2\sigma^2}}, & \text{коли } y>0.\end{cases}$$

Беручи в останньому виразі $\mu=0$, отримаємо так званий χ^2-закон розподілу, рис. 12,

$$p(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\le 0,\\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}\,e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, & \text{коли } y>0.\end{cases}$$



11 **Функція густини розподілу значень параболічної функції при рівномірному розподілі значень аргумента.**



12 **Функція густини розподілу значень параболічної функції при розподілі значень аргумента за нормальним законом.**

В наведених прикладах наголос на рівномірний розподіл значень x зроблено умисно. Повертаючись до функції $y(x)$, підкреслимо, що в її означенні x — незалежна змінна, а величина t зовсім не фігурує. Це дає підстави стверджувати, що кожне зі значень x є рівноправним серед всіх інших, а отже — однаково ймовірним: $p(x) = \text{const}$. В такому разі вираз (1.7) набуває вигляду

$$p(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|y_{1i} - y_{0i}|} \left| \frac{d\psi_i(y)}{dy} \right|,$$

де y_{0i}, y_{1i} — межі значень, яких набуває y на i-й гілці оберненої залежності $x(t) = \psi(y(t))$, коли x перебігає значення від x_0 до x_1.

Нехай значення x рівномірно розподілені на відрізку $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{коли } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{коли } |x| > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

з'ясуємо, як розподілені значення величини $y = \cos x$ (рис. 13), оперуючи функцією розподілу

$$P(y) = \int_{-\pi/2}^{\alpha} p(x)\,dx + \int_{\beta}^{\pi/2} p(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{-\arccos y} p(x)\,dx + \int_{\arccos y}^{\pi/2} p(x)\,dx,$$

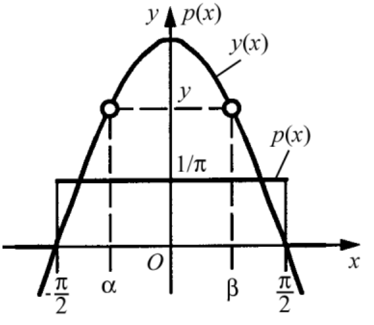
де α, β — значення x, що відповідають деякому значенню y. Отже (рис. 14, штрихова лінія),

$$p(y) = \frac{dP(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{коли } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{коли } x < 0 \text{ і } x > 1. \end{cases}$$

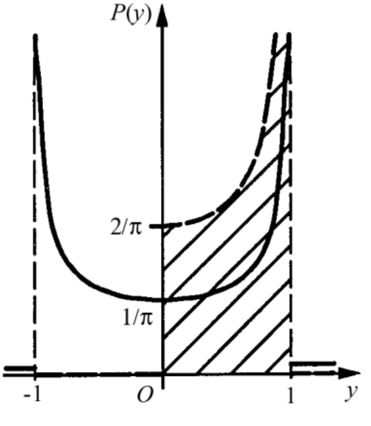
Звернемося тепер до функції

$$y = a\sin(\omega x + \varphi), \qquad (1.9)$$

заданої на всій числовій восі $x \in [-\infty, +\infty]$; $a > 0$ — амплітуда зміни y, ω — частота, $\varphi \in [0; 2\pi]$ — початкова фаза. При рівномірному розподілі значень x ймовір-



13 **Приклад тригонометричної функції, означеної на обмеженому відрізку.**



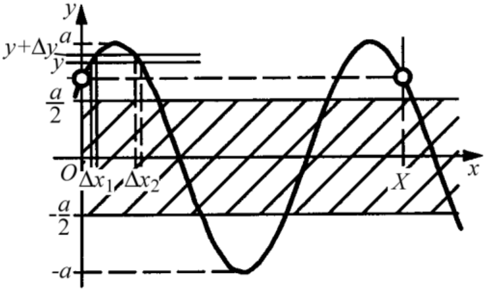
14 **Функції густин розподілів значень тригонометричних функцій.**

ність того, що значення y належать деякому відрізку $[y,\ y+\Delta y]$, пропорційна певній частці $(\Delta x_\alpha + \Delta x_\beta)/X = 2\Delta x/X$ періоду $X = 2\pi/\omega$ гармонічної функції, (рис. 15): $\Delta P = \Delta x\,\omega/\pi$ З (1.9) випливає, що

$$\Delta y = \omega a\cos(\omega x + \varphi)\Delta x = \omega\sqrt{a^2 - \sin^2(\omega x + \varphi)}\Delta x = \omega\sqrt{a^2 - y^2}\,\Delta x\,.$$

Отже, враховуючи, що $p \approx \Delta P/\Delta y$, матимемо, рис. 14 (суцільна лінія):

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & \text{коли } |x| < a, \\ 0, & \text{коли } |x| > a. \end{cases}$$



15 **Приклад тригонометричної функції, означеної на необмеженому відрізку.**

Виділимо на рис. 15 смугу $[-a/2, a/2]$ завширшки в амплітуду a, смугу, що охоплює половину смуги всіх можливих значень y. Виявляється, що ймовірність належності значень функції (1.9) цій “половинній” смузі становить лише $1/3$. Надаючи умовно величині x статусу часу, можна говорити, що $2/3$ тривалості коливного процесу (1.9) значення y знаходяться поза смугою $[-a/2, a/2]$ ($1/3$ часу процес перебігає в “четвертинній” смузі, що прилягає до прямої $y=-a$, а $1/3$ — в “четвертинній” смузі, що прилягає до прямої $y=+a$).

На рис. 16, *а* відображено графік функції

$$y = kx + y_0 = \frac{(y_\beta - y_\alpha)x - (x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta)}{(x_\beta - x_\alpha)}, \; x_0 < x_\alpha < 0 < x_\beta < x_1. \qquad (1.10)$$

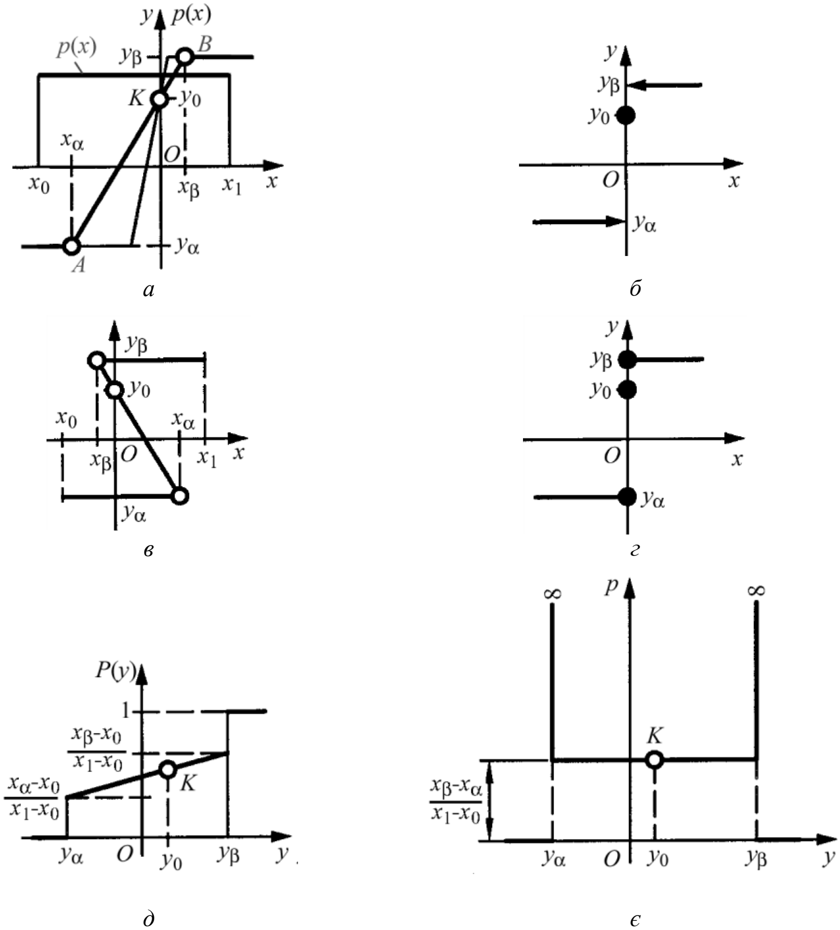
Не змінюючи значення параметра

$$y_0 = -\frac{(x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta)}{(x_\beta - x_\alpha)},$$

збільшимо значення параметра

$$k = \frac{(y_\beta - y_\alpha)}{(x_\beta - x_\alpha)} > 0.$$

Наведений графік перетвориться у новий з більш крутішою ділянкою переходу з гілки $y = y_\alpha$ на гілку $y = y_\beta$. При цьому всі точки з гілок $y = y_\alpha$ (разом з точкою A) та $y = y_\beta$ (разом з точкою B), а також точка K, що належали первісному графіку, належатимуть і новому графіку. Здавалося б, що результатом послідовних перетворень, при яких $k \to \infty$, повинен бути графік, зображений на рис. 16, *б* (так само, як графік з рис. 16, *в* за аналогічних дій, ймовірно, мав би перерости у графік з рис. 16, *г*; тут і далі затемнена точка є елементом графіка, а точка, в яку впирається стрілка, графіку не належить).



16 **Розподіл значень ламаної лінійної функції.**

Нехай розподіл значень x відображає функція (див. рис. 16, *а*)

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1 - x_0}, & x_0 < x \le x_1, \\ 0, & x \le x_0,\ x > x_1. \end{cases}$$

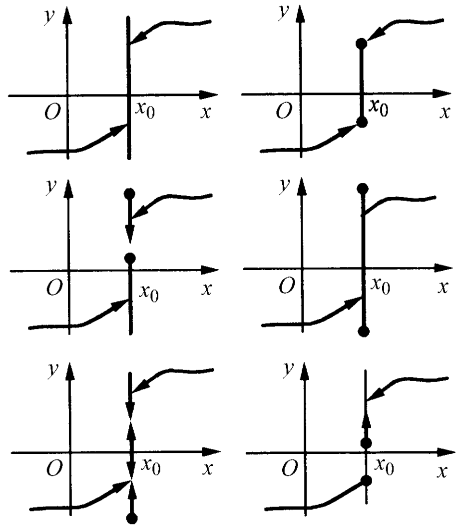
Тоді функцію розподілу $P(y)$ і функцію густини розподілу $p(y)$ значень функції (1.10) відображатимуть відповідно графіки з рис. 16, *д* і 16, *є*. З цих графіків випливає, зокрема, що значення $y = y_0$ нічим не вирізняється серед всіх значень $y_\alpha < y < y_\beta$. Більш того, коли $x_\beta - x_\alpha \to 0$ (чи $x_1 - x_0 \to \infty$), то $p(y_0) = 0$, а отже точка K (див. рис. 16, *а*) не має підстав належати графіку, якого слід сподіватись при $k \to \infty$ (див. рис. 16, *б*).

Принагідно зазначимо, що функції, відображеній на рис. 16, *в*, неможливо поставити у відповідність яку-небудь змістовну функцію розподілу $P(y)$ і відповідну функцію густини розподілу $p(y)$ на відрізку неоднозначності $[x_\beta, x_\alpha]$. Зрештою, подібна проблема виникає і у випадку локальної (спостережуваної в окремій точці $x = x_0$) неоднозначності, різні типи якої графічно унаочнює рис. 17 (якщо кінець лінії не завершується ні точкою, ні стрілкою, то лінія прямує у безмежність). Повна (спостережувана у будь-якій точці восі Ox) неоднозначність, приклад якої наведено на рис. 18, унеможливлює застосування апарату аналізу густин розподілів взагалі на всій восі Ox.

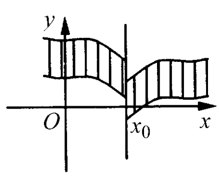
Нема, однак, жодних вагомих підстав вважати, що наведені приклади якось засвідчують обмежені можливості аналітичних засобів аналізу функції в термінах розподілів. Навпаки, ці приклади відбивають в собі ту обставину, що в означеннях неоднозначних функцій пересічно не розкриваються сутність неоднозначностей і механізм їх виникнення, а тому неоднозначні функції пересічно є недоозначеними. Варто лише вказати в означенні, наприклад, що всі значення, яких набуває функція при одному і тому самому значенні аргумента, є рівноправними в тому чи іншому розумінні, як ситуація принципово зміниться.

Якщо деяка змінна T є незалежною, то функція $Q = Q(T)$, відображена на рис. 19, *а*, вимушено здійснює стрибки AB при $T = T_A$ і CD при $T = T_B$. При цьому змінна Q правити за незалежну не може, оскільки порушується принцип рівноправності всіх значень Q (не існує підстав обґрунтувати переходи значень Q від Q_A до Q_B та від Q_C до Q_D, рис. 19, *б*; функція $T = T(Q)$ сприймається як недоозначена при $Q_A < Q < Q_B$ і $Q_C < Q < Q_D$).

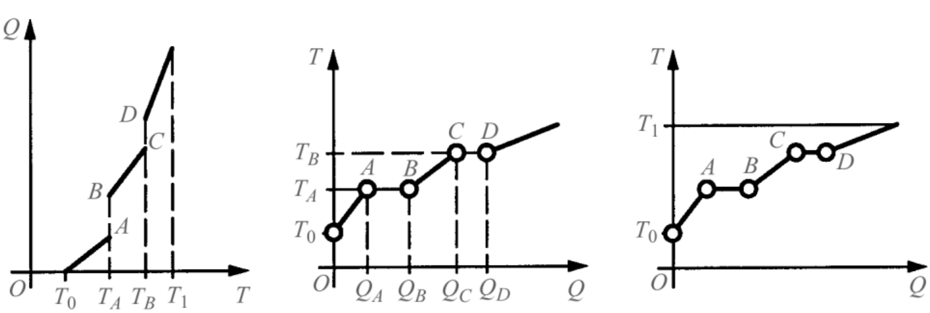
Надамо функції $T = T(Q)$ фізичного змісту. Нехай T — поточна температура деякого тіла, що з початковою температурою T_0 перебуває у твердому стані, а Q — теплота, що до тіла підводиться. З нагріванням (підведенням теплоти) температура підвищуватиметься, доки тіло не набуде температури $T = T_A$ топлення. Температура залишатиметься сталою, поки тіло цілком не набуде рідкого стану, а вже потім підвищуватиметься температура рідини, що утворилася. Далі, при сталій температурі $T = T_B$ почнеться паротворення. Аж досягнувши цілком стану пари, тіло знову почне "набирати" температуру. Описаному процесу відповідатиме графік $T = T(Q)$, наведений на рис. 19, *в*. Він, зрозуміло, принципово відрізняється від графіка з рис. 19, *б*; ділянки AB, CD, що неперервно сполучають інші ділянки графіка, відображають цілком реальні процеси накопичення прихованих теплот відповідно топлення і паріння. В цьому випадку Q за визначальними ознаками — незалежна змінна. Більш того, Q можна пов'язати лінійно з фізичним часом t: $Q = Q(t) = at$; тоді рівномірність розподілу значень величини Q стає фізично зумовленою.



17 **Графіки локально неоднозначних функцій.**



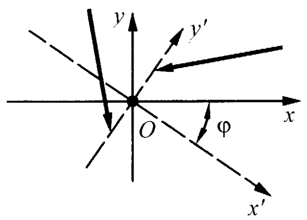
18 **Графік неоднозначної функції.**



а *б* *в*

19 **Приклад різного тлумачення залежності величин.**

Функція $y(x)$ може бути **розривною одночасно за обома змінними**. Приклад такої функції графічно відображає рис. 20 (графіку належить і точка $(0;\, 0)$). В цьому випадку взагалі не доводиться говорити про якусь “рівноправність” значень незалежної змінної x. Проте, ця ж функція є однозначною і нерозривною за незалежною змінною в деякій іншій системі координат $x'Oy'$, яку можна отримати поворотом первісної системи координат xOy на деякий кут φ. Повертання системи xOy на ще більший кут спричинить неоднозначність функції $y'(x')$.



20 **Функція, розривна за двома змінними.**

Таким чином, поняття незалежної змінної є значно складнішим, ніж це сприймається з першого погляду. Найпростіше, зрозуміло, оперувати функцією, у якої незалежна змінна ототожнюється з фізичним часом. Привабливим в цьому сенсі є параметричне означення функцій, коли роль параметра відведена власне фізичному часові t, або ж деякій величині τ, що однозначно і монотонно залежить від t.

1.4 Основні операції аналізу функцій

До найважливіших операцій над функціями поряд з алгебричними та суперпозиційними слід віднести диференціювання, інтегрування, згортання функцій у визначник. Кожна з цих операцій породжує часто принципово нові функції, в яких, проте, багатогранно відбиваються властивості первісних функцій. Наголосимо тільки на деяких таких поєднаннях перелічених операцій, які обов’язково знадобляться в подальшому [2, 4, 8, 10, 11, 13, 15, 23, 25, 37, 39, …].

Якщо функція $f(x,s)$ і її частинна похідна $\partial f(x,s)/\partial s$ неперервні на множині $a \le s \le b$, $x_0 \le x \le x_1$, а функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні в інтервалі $x_0 \le x \le x_1$ та задовольняють в ньому умови $a \le u(x) \le b$, $a \le v(x) \le b$, то при $x_0 \le x \le x_1$

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,s)\,ds = \int\limits_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,s)}{\partial x}\,ds + \frac{dv(x)}{dx}\, f(x, v(x)) - \frac{du(x)}{dx}\, f(x, u(x)) \;, \quad (1.11)$$

звідки, зокрема,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,s)ds = \int_a^x \frac{\partial f(x,s)}{\partial x}ds + f(x,x),$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,s)ds = \frac{1}{x-a}\int_a^x \left[f(x,s) + (x-a)\frac{\partial f(x,s)}{\partial x} + (s-a)\frac{\partial f(x,s)}{\partial s} \right] ds .$$

Похідна від визначника

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \cdots & a_{1m}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \cdots & a_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(s) & a_{m2}(s) & \cdots & a_{mm}(s) \end{vmatrix}$$

визначається за формулою

$$\frac{d}{ds}D = \frac{d}{ds}\begin{vmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \cdots & a_{1m}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \cdots & a_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(s) & a_{m2}(s) & \cdots & a_{mm}(s) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{da_{11}(s)}{ds} & \frac{da_{12}(s)}{ds} & \cdots & \frac{da_{1m}(s)}{ds} \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \cdots & a_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(s) & a_{m2}(s) & \cdots & a_{mm}(s) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \cdots & a_{1m}(s) \\ \frac{da_{21}(s)}{ds} & \frac{da_{22}(s)}{ds} & \cdots & \frac{da_{2m}(s)}{ds} \\ a_{31}(s) & a_{32}(s) & \cdots & a_{3m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(s) & a_{m2}(s) & \cdots & a_{mm}(s) \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \cdots & a_{1m}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \cdots & a_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-1)1}(s) & a_{(m-1)2}(s) & \cdots & a_{(m-1)m}(s) \\ \frac{da_{m1}(s)}{ds} & \frac{da_{m2}(s)}{ds} & \cdots & \frac{da_{mm}(s)}{ds} \end{vmatrix}, \qquad (1.12)$$

або за подібною формулою, у якій диференціювання визначника здійснюється стовпцями, а не рядками.

Похідна від визначника (1.12) — досить ефективний засіб аналізу властивостей сукупності, системи функцій. Вона неодноразово використовуватиметься при викладі теорії лінійних диференціальних рівнянь. Зрештою, сам по собі визначник є вельми цікавим як засіб математичного розумування на безліч тем.

Зазначимо, що кожний визначник задовольняє **нерівність Адамара**

$$|D|^2 \le \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left|a_{ij}\right|^2 ,$$

а при $a_{11} \ne 0$, $m > 2$ справджується рівність

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}^{m-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{2m} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{m1} & a_{m3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1m} \\ a_{m1} & a_{mm} \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \qquad (1.13)$$

Справді: віднімемо від i-го ($i = \overline{2,m}$) рядка визначника D_m перший рядок, помножений на a_{i1}/a_{11}; в результаті отримаємо рівний первісному визначник вигляду

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & a_{2m} - a_{1m}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} - a_{12}\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} & \dots & a_{mm} - a_{1m}\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} - a_{12}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & a_{2m} - a_{1m}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m2} - a_{12}\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} & \dots & a_{mm} - a_{1m}\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a_{11}}{a_{11}^{m-1}} \begin{vmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & \dots & a_{2m}a_{11} - a_{1m}a_{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m2}a_{11} - a_{12}a_{m1} & \dots & a_{mm}a_{11} - a_{1m}a_{m1} \end{vmatrix},$$

звідки й випливає наведена рівність (1.13). Нехай в системі рівнянь

$$a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots a_{1n}z_n = 0,$$

$$a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \dots a_{2n}z_n = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots a_{nn}z_n = 0$$

як коефіцієнти, так і невідомі є комплексними числами

$$a_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda\mu} + i\beta_{\lambda\mu}, \; z_\mu = x_\mu + iy_\mu,$$

де $\alpha_{\lambda\mu}$, $\beta_{\lambda\mu}$, x_μ, y_μ — дійсні. Щоб ці рівняння давали не тільки тривіальний (нульовий) розв'язок $z_1 = z_2 = \ldots z_n = 0$, тобто $x_1 = x_2 = \ldots x_n = y_1 = y_2 = \ldots y_n = 0$, необхідно і достатньо, що визначник $\left|a_{\lambda\mu}\right|$ дорівнював нулю. Це дає два рівняння, які зумовлюють взаємозв'язок між $2n^2$ дійсними величинами $\alpha_{\lambda\mu}$, $\beta_{\lambda\mu}$. З іншого боку цю систему можна подати як систему $2n$ однорідних лінійних з $2n$ дійсними невідомими. Але тоді за необхідну і достатню умову наявності нетривіального розв'язку буде правити рівність нулю деякого дійсного визначника — лише одне рівняння зв'язку між $\alpha_{\lambda\mu}$, $\beta_{\lambda\mu}$. Проте тут немає жодного протиріччя, оскільки оперуючи визначником порядку $2n$ (не плутати з визначником другого порядку з елементами $\left|\alpha_{\lambda\mu}\right|$, $\left|-\beta_{\lambda\mu}\right|$, $\left|\beta_{\lambda\mu}\right|$, $\left|\alpha_{\lambda\mu}\right|$), матимемо:

$$\begin{vmatrix} (\alpha_{\lambda\mu}) & (-\beta_{\lambda\mu}) \\ (\beta_{\lambda\mu}) & (\alpha_{\lambda\mu}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\alpha_{\lambda\mu} + i\beta_{\lambda\mu}) & (-\beta_{\lambda\mu} + i\alpha_{\lambda\mu}) \\ (\beta_{\lambda\mu}) & (\alpha_{\lambda\mu}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\alpha_{\lambda\mu} + i\beta_{\lambda\mu}) & (0) \\ (\beta_{\lambda\mu}) & (\alpha_{\lambda\mu} - i\beta_{\lambda\mu}) \end{vmatrix} = \left|\alpha_{\lambda\mu} + i\beta_{\lambda\mu}\right| \cdot \left|\alpha_{\lambda\mu} - i\beta_{\lambda\mu}\right| = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2,$$

де позначено $\left|\alpha_{\lambda\mu} + i\beta_{\lambda\mu}\right| = \mathrm{A} + i\mathrm{B}$, A і B — дійсні; обертання на нуль суми $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$, зрозуміло, рівноцінно обертанню на нуль одночасно і A, і B. Нехай рівняння

$$\chi(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - z & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - z \end{vmatrix} = 0,$$

яке називають **характеристичним рівнянням системи** n^2 **величин** $a_{\lambda\mu}$, має корені α_1, α_2, …, α_n, не всі рівні нулю. Позначимо через $\chi_{\lambda\mu}(z)$ алгебричні доповнення елементів визначника $\chi(z)$. Виявляється, що характеристичне рівняння величин $\chi_{\lambda\mu}(z)$ має корені

$$\psi_\zeta = \frac{\chi(z)}{\alpha_\zeta - z}, \; \zeta = \overline{1, n}.$$

Нерівність Адамара, рівність (1.13) та інші щойно наведені співвідношення відображають найзагальніші властивості визначників. Властивості ж конкретних визначників, зрозуміло, невичерпні у своїй різноманітності. Хіба не цікавим і не корисним є таке примітивне твердження: всі шість членів

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32},\ -a_{11}a_{23}a_{32},\ -a_{12}a_{21}a_{33},\ -a_{13}a_{22}a_{31}$$

в розкладі визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

не можуть бути одночасно додатними (справді, добуток перших трьох членів дорівнює за абсолютною величиною добутку решти трьох, але має протилежний знак)?

Відомо, що **похідна порядку** m **від добутку функцій** $f(x)=u(x)v(x)$ визначається за формулою

$$\frac{d^m f}{dx^m}=\frac{d^m}{dx^m}(uv)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{d^{m-i}u}{dx^{m-i}}\frac{d^i v}{dx^i}=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{d^i u}{dx^i}\frac{d^{m-i}v}{dx^{m-i}} \tag{1.14}$$

($u(x), v(x)$ — диференційовні в точці x функції до m-го порядку включно). Доречно звернути увагу ще таку корисну формулу:

$$u^{(m)}v=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i (uv^{(i)})^{(m-i)}\,.$$

Тут C_m^r — кількість поєднань з m елементів по r (**біномні коефіцієнти**). Числа C_n^r ще позначають через $\binom{n}{r}$.

Наведемо кілька критеріїв, що вирізняють числа C_n^r з посеред інших:

1° Для всіх невід’ємних цілих n і r ($0\le r\le n$)

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}, \tag{1.15}$$

де $m!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m$, $0!=1!=1$;

2° $C_n^0=1$, $C_n^n=1$, для кожного $r=\overline{1,n-1}$

$$C_n^r=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^r; \tag{1.16}$$

3° Числа C_n^r — коефіцієнти многочлена

$$(a+x)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}x+\ldots+C_n^ra^{n-r}x^r+\ldots+C_n^nx^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^ra^{n-r}x^r \tag{1.17}$$

(детальніше про многочлени йтиметься в розділі 3).

Кожен з критеріїв 1°—3° можна взяти за означення чисел C_n^r. Найбільш “прозорим” є, напевне, означення (1.15). Означення (1.16), натомість, можна вважати найбільш формальним.

Суму $a+x$ називають **біномом** (“біном” означає те саме, що й “двочлен”), а вираз (1.17) — **біномом Ньютона**. Через це числа C_n^r є сенс називати, власне, біномними коефіцієнтами.

Для будь-яких відмінних від нуля (!) дійсних чисел a_1, a_2, …, a_n і довільного натурального r

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^r = \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots\nu_n=r} C_r(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)\, a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2}\ldots a_n^{\nu_n}\,. \qquad (1.18)$$

Тут додавання поширюється на всі набори $(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$ невід’ємних цілих чисел ν_i $(i=\overline{1,n})$ такі, що $\sum_{i=1}^{n}\nu_i = r$; $C_r(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$ чи $\begin{pmatrix} r \\ \nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n\end{pmatrix}$ позначають так звані **поліномні коефіцієнти**:

$$C_r(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n) = \frac{r!}{\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_n!}\,.$$

Поняття поліномного коефіцієнта узагальнює поняття біномного коефіцієнта, а власне, біномний коефіцієнт C_n^k є окремим випадком поліномного коефіцієнта $C_n(k_1,k_2)$, коли $k_1=k$ і $k_2=n-k$. Беручи в (1.18) $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$, переконуємося, що поліномні коефіцієнти задовольняють рівність

$$\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots\nu_n=r} C_r(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n) = n^r\,.$$

Покладемо в (1.17) $a=1$ і отримаємо рівність

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^r x^r + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r\,. \qquad (1.19)$$

При $x=-1$ на підставі (1.19) матимемо:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - + \ldots + (-1)^r C_n^r + \ldots + (-1)^n C_n^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r = 0\,.$$

Диференціюємо рівність (1.19):

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r C_n^r x^{r-1} = \sum_{r=0}^{n} r C_n^r x^{r-1}\,. \qquad (1.20)$$

Покладаючи в (1.20) $x=1$ і $x=-1$, відповідно знайдемо

$$\sum_{r=1}^{n} r\,C_n^r = \sum_{r=0}^{n} r\,C_n^r = n\cdot 2^{n-1} \text{ і } \sum_{r=1}^{n} (-1)^r r\,C_n^r = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r r\,C_n^r = 0\,.$$

Застосуємо операцію диференціювання до (1.20):

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{r=2}^{n} r(r-1) C_n^r x^{r-2} = \sum_{r=1}^{n} r(r-1) C_n^r x^{r-2} = \sum_{r=0}^{n} r(r-1) C_n^r x^{r-2}\,.$$

Знову покладаючи $x=1$ і $x=-1$, відповідно знайдемо

$$\sum_{r=2}^{n} r(r-1)\,C_n^r = \sum_{r=0}^{n} r(r-1)\,C_n^r = n(n-1)\cdot 2^{n-2} \text{ і}$$

$$\sum_{r=2}^{n} (-1)^r\, r\,(r-1)C_n^r = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, r(r-1)\,C_n^r = 0\,.$$

Подібно можна знайти і багато інших нетривіальних співвідношень між біномними коефіцієнтами і іншими натуральними числами.

Вірною є система рівностей

$$-C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + - \ldots + (-1)^n nC_n^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, r\, C_n^r = 0\,,$$

$$-C_n^1 + 2^2 C_n^2 - 3^2 C_n^3 + - \ldots + (-1)^n n^2 C_n^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, r^2 C_n^r = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-C_n^1 + 2^{n-1} C_n^2 - 3^{n-1} C_n^3 + - \ldots + (-1)^n n^{n-1} C_n^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, r^{n-1} C_n^r = 0\,.$$

Тобто при кожному натуральному $m<n$

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, r^m C_n^r = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r\, r^m C_n^r = 0\,.$$

За довільного натурального n

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} r^n C_n^r = (-1)^{n+1} n!\,;$$

справді,

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} r^n C_n^r = -\lim_{x\to 0} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} C_n^r\, e^{rx} = -\lim_{x\to 0} \frac{d^n}{dx^n} (1-e^{rx})^n =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{d^n}{dx^n} \left(-x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \ldots \right)^n = (-1)^{n+1} \lim_{x\to 0} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n + \frac{nx^{n+1}}{2!} + \ldots \right) = (-1)^{n+1} n!\,.$$

Цікавими є також рівності

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \frac{C_n^2}{x+2} - + \ldots + (-1)^n\, \frac{C_n^n}{x+n} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\,,$$

$$C_n^1 - \frac{1}{2} C_n^2 + \frac{1}{3} C_n^3 - + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} C_n^n = \frac{1}{1!\,2!\,3!\ldots n!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

Знайдемо похідну порядку m від частки функцій $f(x)=u(x)/v(x)$, покладаючи $v(x)\neq 0$. Застосовуючи послідовно при $m=1,2,\ldots$ формулу (1.14) до диференціювання тотожності $f(x)v(x)=u(x)$, укладемо m рівностей

$$C_1^1\, v\, f' = u' - v'f\,,$$

$$C_2^1 v' f' + C_2^2 v\, f'' = u'' - v''\, f\,,$$

$$C_3^1 v'' f' + C_3^2 v' f'' + C_3^3 v\, f''' = u''' - v'''\, f\,,$$

…………………………………………

$$C_m^1 v^{(m-1)} f' + C_m^2 v^{(m-2)} f'' + C_m^3 v^{(m-3)} f''' + \ldots + C_m^m v\, f^{(m)} = u^{(m)} - v^{(m)} f\,.$$

Розглядатимемо їх сукупно як систему рівнянь відносно $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(m)}(x)$:

$$\begin{bmatrix} C_1^1 v & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ C_2^1 v' & C_2^2 v & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ C_3^1 v'' & C_3^2 v' & C_3^3 v & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_m^1 v^{(m-1)} & C_m^2 v^{(m-2)} & C_m^3 v^{(m-3)} & C_m^4 v^{(m-4)} & \ldots & C_m^m v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f' \\ f'' \\ f''' \\ \vdots \\ f^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' - v'f \\ u'' - v''\, f \\ u''' - v'''\, f \\ \vdots \\ u^{(m)} - v^{(m)} f \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї системи за умови $v(x)\neq 0$ не дорівнює нулю:

$$D(x) = v^m(x) \neq 0\,.$$

Отже $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(m)}(x)$ — однозначно визначувані.

Зокрема,

$$f^{(m)} = \frac{D_m^*(x)}{v^m(x)} = \frac{v(x)D_m(u(x)) - u(x)D_m(v(x))}{v^{m+1}(x)}\,, \tag{1.21}$$

де

$$D_m^*(x) = \begin{vmatrix} C_1^1 v & 0 & 0 & \ldots & 0 & u' - v'f \\ C_2^1 v' & C_2^2 v & 0 & \ldots & 0 & u'' - v''f \\ C_3^1 v'' & C_3^2 v' & C_3^3 v & \ldots & 0 & u''' - v'''f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{m-2}^1 v^{(m-3)} & C_{m-2}^2 v^{(m-4)} & C_{m-2}^3 v^{(m-5)} & \ldots & 0 & u^{(m-2)} - v^{(m-2)} f \\ C_{m-1}^1 v^{(m-2)} & C_{m-1}^2 v^{(m-3)} & C_{m-1}^3 v^{(m-4)} & \ldots & C_{m-1}^{m-1} v & u^{(m-1)} - v^{(m-1)} f \\ C_m^1 v^{(m-1)} & C_m^2 v^{(m-2)} & C_m^3 v^{(m-3)} & \ldots & C_m^{m-1} v' & u^{(m)} - v^{(m)} f \end{vmatrix} =$$

$$= D_m(u(x)) - f(x)D_m(v(x)) = D_m(u(x)) - \frac{u(x)}{v(x)} D_m(v(x))\,,$$

$$D_m(z)=\begin{vmatrix} C_1^1 v & 0 & 0 & \dots & 0 & z' \\ C_2^1 v' & C_2^2 v & 0 & \dots & 0 & z'' \\ C_3^1 v'' & C_3^2 v' & C_3^3 v & \dots & 0 & z''' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{m-2}^1 v^{(m-3)} & C_{m-2}^2 v^{(m-4)} & C_{m-2}^3 v^{(m-5)} & \dots & 0 & z^{(m-2)} \\ C_{m-1}^1 v^{(m-2)} & C_{m-1}^2 v^{(m-3)} & C_{m-1}^3 v^{(m-4)} & \dots & C_{m-1}^{m-1} v & z^{(m-1)} \\ C_m^1 v^{(m-1)} & C_m^2 v^{(m-2)} & C_m^3 v^{(m-3)} & \dots & C_m^{m-1} v' & z^{(m)} \end{vmatrix},$$

$z=\{u,v\}$. При $u(x)\equiv 1$, $v(x)\equiv z(x)$, наприклад, на підставі (1.21) матимемо:

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{(j)}=-\frac{1}{z^{j+1}}\begin{vmatrix} C_1^1 z & 0 & 0 & \dots & 0 & z' \\ C_2^1 z' & C_2^2 z & 0 & \dots & 0 & z'' \\ C_3^1 z'' & C_3^2 z' & C_3^3 z & \dots & 0 & z''' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{j-2}^1 z^{(j-3)} & C_{j-2}^2 z^{(j-4)} & C_{j-2}^3 z^{(j-5)} & \dots & 0 & z^{(j-2)} \\ C_{j-1}^1 z^{(j-2)} & C_{j-1}^2 z^{(j-3)} & C_{j-1}^3 z^{(j-4)} & \dots & C_{j-1}^{j-1} z & z^{(j-1)} \\ C_j^1 z^{(j-1)} & C_j^2 z^{(j-2)} & C_j^3 z^{(j-3)} & \dots & C_j^{j-1} z' & z^{(j)} \end{vmatrix}. \qquad (1.22)$$

Диференціювання і інтегрування не завжди зводиться до чисто формальних дій. Інколи виникає необхідність логічного осмислення здавалося б досить простих результатів цих операцій.

Наприклад, відомо, що коли похідні від двох функцій тотожно збігаються, то ці функції відрізняються на сталу. Зокрема, похідні від функцій

$$y_1=\frac{1}{1-x^3},\quad y_2=\frac{x^3}{1-x^3},$$

що принципово відрізняються ($y_2=x^3y_1$), збігаються, оскільки їх різниця є сталою: $y_1-y_2=1=\mathrm{const}$. В принципі, збігаються і похідні функцій

$$y_1=\ln|x|\ln x,\ y_2=\begin{cases}\ln x+b\quad (b\neq 0),\ \text{якщо}\ x>0,\\ \ln -x+a\ (a\neq b),\ \text{якщо}\ x<0.\end{cases}$$

Проте, ці функції на різних ділянках зміни x відрізняються на різні сталі.

Розглянемо функцію

$$f(x,y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

задану при $x^2+y^2\geq 0$ і таку, що $f(0,0)=0$. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=y\,\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=x\,\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)=\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Легко переконатись, що

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)=0\,,\quad \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)=0\,.$$

Водночас

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=-1 \text{ при } x=0 \text{ і } \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=1 \text{ при } y=0\,,$$

і, отже, в точці $(x,y)=(0,0)$ змішана частинна похідна є неоднозначною.

В [33] цю обставину пов'язують з тим, що значення змішаної похідної залежить від послідовності диференціювання за змінними x, y (що, очевидно, не зовсім відповідає дійсності).

Тоді як похідна

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1.23}$$

функції $f(x)$ може існувати чи не існувати, кожен з виразів

$$D^{+} f(x)=\overline{\lim_{h\to +0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,,\quad D_{+} f(x)=\underline{\lim_{h\to +0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,,$$

$$D^{-} f(x)=\overline{\lim_{h\to -0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,,\quad D_{-} f(x)=\underline{\lim_{h\to -0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1.24}$$

обов'язково матиме певний сенс, перетворюючись на скінченне число чи "невласні" числа $-\infty$, $+\infty$ *). Ці вирази називають **похідними числами функції** — верхнім правим, нижнім правим, верхнім лівим, нижнім лівим. Якщо $D^{+} f(x)=D_{+} f(x)$, то кажуть, що функція має праву похідну, якщо $D^{-} f(x)=D_{-} f(x)$ — ліву похідну.

---

*) Досить часто вважається за можливе оперувати "невласними" числами $-\infty$, $+\infty$ так само, як будь-якими скінченними дійсними числами a. В [25], наприклад, для них встановлено такі правила дій:

$$+\infty \pm a=+\infty\,;\ +\infty+(+\infty)=+\infty\,;\ +\infty-(-\infty)=+\infty\,;\ -\infty\pm a=-\infty\,;\ -\infty+(-\infty)=-\infty\,;$$

$$-\infty-(+\infty)=-\infty\,;\ |+\infty|=|-\infty|=+\infty\,;\ +\infty\cdot a=a\cdot(+\infty)=+\infty\,;\ -\infty\cdot a=a\cdot(-\infty)=-\infty\,,$$

якщо $a>0$; $+\infty\cdot a=a\cdot(+\infty)=-\infty$ і $-\infty\cdot a=a\cdot(-\infty)=+\infty$, якщо $a<0$;

$$0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0=0\,;\ (+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty\,;$$

$$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty\,;\ \frac{a}{\pm\infty}=0\,.$$

Натомість, символи $+\infty-(+\infty)$, $-\infty-(-\infty)$, $+\infty+(-\infty)$, $-\infty+(+\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{a}{0}$ віднесено до таких, що не мають сенсу. Підкреслимо, що зазвичай числа $0\cdot(\pm\infty)$ і $(\pm\infty)\cdot 0$ не вважаються нулями, а відносяться до тих, що не мають сенсу.

Необхідною і достатньою **умовою існування звичайної похідної** (1.23) є однаковість всіх похідних чисел (1.24). Якщо $f(x)$ неперервна в (a,b) і одне з її похідних чисел невід'ємне в (a,b), то $f(a)\le f(b)$. Якщо одне з похідних чисел функції $f(x)$ неперервне в деякій точці, то $f(x)$ має в цій точці похідну.

Дуже часто вигідно вдаватись до формули

$$\int_\gamma^s \overset{r}{\cdots} \int_\gamma^s f(s)\,ds \overset{r}{\ldots} ds = \int_\gamma^x ds_{r-1} \int_\gamma^{s_{r-1}} ds_{r-2} \ldots \int_\gamma^{s_2} ds_1 \int_\gamma^{s_1} f(s)\,ds = \frac{1}{(r-1)!}\int_\gamma^x (x-s)^{r-1} f(s)\,ds \,. \tag{1.25}$$

Проте, слід взяти до уваги такі ситуації.

Звернемося до функції

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,.$$

Легко бачити, що

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

Звідси при $x \ne 0$ матимемо:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \frac{1}{x^2+1}\,, \quad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

Подібно знайдемо

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Все це означає, що для подвійного інтеграла

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx\,dy$$

повторні інтеграли існують, але не збігаються за значеннями.

Натомість, для подвійного інтеграла

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx\,dy$$

обидва повторні інтеграли існують, і значення їх збігаються, але сам подвійний інтеграл не існує.

І справді, можна переконатись, що обидва повторні інтеграли дорівнюють нулю. Якщо б подвійний інтеграл існував взагалі, то він існував би і на множині $\{0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\}$, і була б застосовна теорема Фубіні; але при $x\ne 0$

$$\int_0^1 \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dy = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2\left(x^2+1\right)}\,,$$

і ця функція несумовна в $(0,1]$.

Зміст **теореми Фубіні** можна розкрити, вдаючись до такого більш конкретного твердження.

Якщо деяка функція $f(x,y)$ від двох змінних (x і y) є сумовною в R^2, то функція $f(x_c,y)$ при фіксованому x теж є сумовною за y всюди, окрім деяких виняткових, особливих значень x, які утворюють множину виміру нуль. Отже величина-інтеграл

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

— функція від x, означена майже всюди. Ця функція, в свою чергу, сумовна і інтеграл від неї

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x)dx$$

є нічим іншим, як інтегралом

$$\iint_{\mathrm{R}^2} f(x,y)\,dxdy\,.$$

Таким чином,

$$\iint_{\mathrm{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,.$$

Поняття сумовності є поширенням, узагальненням поняття абсолютної збіжності на випадок, коли члени ряду занумеровані довільною множиною індексів, через що члени ряду залишаються невпорядкованими.

Необхідною умовою сумовності функції є її вимірність. Звичайно, функція також не повинна набувати "надто великих" значень. Необхідною і достатньою умовою сумовності функції $f(x)$ є сумовність функції $|f(x)|$; якщо функція $g(x) \geq 0$ — сумовна і якщо $|f(x)| \leq g(x)$, то сумовна і $f(x)$.

Кажуть, що **функція** $f(x)$ **вимірна**, якщо вона майже всюди є границею деякої послідовності неперервних функцій:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

для кожної точки x, окрім деякої множини особливих точок x виміру нуль. Невимірні функції мають настільки особливу будову, що ні одна з них у явному вигляді не відома і мало шансів зустрітися з ними в прикладних дослідженнях. Їх існування простежується лише теоретично на підставі так званої аксіоми вибору, яка, проте, не містить жодного практичного алгоритму побудови хоча б одної невимірної функції. Тому безпосередньо оперувати поняттям невимірності функцій доводиться тільки в особливих ситуаціях.

1.5 Основні елементарні функції

Укладемо вираз [21]

$$F_m(x)=a_1\frac{\overset{m}{\Delta}_1(x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}}+a_2\frac{\overset{m}{\Delta}_2(x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}}+\ldots+a_j\frac{\overset{m}{\Delta}_j(x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}}+\ldots+$$

$$+a_m\frac{\overset{m}{\Delta}_m(x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}}=\frac{1}{\overset{m}{\Delta}}\sum_{i=1}^{m}a_i\overset{m}{\Delta}_i(x-x_0), \tag{1.26}$$

в якому

$$\overset{m}{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_m^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \cdots & k_m^{m-1}\end{vmatrix},\ \overset{m}{\Delta}_1(x-x_0)=\begin{vmatrix}e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_m(x-x_0)}\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_m^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \cdots & k_m^{m-1}\end{vmatrix},$$

$$\ldots,\ \overset{m}{\Delta}_j(x-x_0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_m^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{j-1} & k_2^{j-1} & \cdots & k_m^{j-1}\\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_m(x-x_0)}\\ k_1^{j+1} & k_2^{j+1} & \cdots & k_m^{j+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \cdots & k_m^{m-1}\end{vmatrix},\ \ldots$$

$$\overset{m}{\Delta}_m(x-x_0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_m^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{m-2} & k_2^{m-2} & \cdots & k_m^{m-2}\\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_m(x-x_0)}\end{vmatrix}, \tag{1.27}$$

$k_1,k_2,\ldots,k_m$ — корені алгебричного рівняння

$$B_m[k]\equiv b_0k^m+b_1k^{m-1}+\cdots+b_{m-1}k+b_m=0\,, \tag{1.28}$$

$a_1,a_2,\ldots,a_m$ — дійсні сталі — коефіцієнти виразу (1.26), $b_0,b_1,b_2,\ldots,b_m$ — дійсні сталі — коефіцієнти допоміжного алгебричного рівняння (1.28), x_0 — наперед заданий параметр.

Цей вираз можна тлумачити як **узагальнену елементарну функцію**, що поєднує в собі як окремі випадки деякі (елементарні) степеневий (при $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), експонентний (поканиковий), тригонометричний, гіперболічний тощо многочлени. Функцію F_m визначають незалежна змінна x та $2m+2$ параметрів — m, $a_1, a_2, \ldots, a_m$, b_1/b_0, $b_2/b_0, \ldots, b_m/b_0$ (чи $k_1, k_2, \ldots, k_m$), x_0. Зокрема: якщо $m=1$, то

$$B_1[k] \equiv b_0 k + b_1 = 0, \quad k_1 = -\frac{b_1}{b_0}, \quad \overset{1}{\Delta} = \left| 1 \right| = 1,$$

$$\overset{1}{\Delta}_1 (x - x_0) = e^{-\frac{b_1}{b_0}(x - x_0)}, \quad F_1(x) = e^{-\frac{b_1}{b_0}(x - x_0)};$$

якщо $m = 2$, то

$$B_2[k] \equiv b_0 k^2 + b_1 k + b_2 = 0, \quad k = \alpha \mp \beta i, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \alpha = \frac{b_1}{2b_0},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{b_2}{b_0} - \frac{1}{4}\left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2}, \quad \overset{2}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = k_2 - k_1,$$

$$\overset{2}{\Delta}_1 (x - x_0) = \begin{vmatrix} e^{k_1(x - x_0)} & e^{k_2(x - x_0)} \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix},$$

$$\overset{2}{\Delta}_2 (x - x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_1(x - x_0)} & e^{k_2(x - x_0)} \end{vmatrix},$$

$$F_2 = e^{\alpha(x - x_0)} \left(a_1 \cos \beta(x - x_0) + \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta} \sin \beta(x - x_0) \right)$$

(при $\alpha = \beta = 0$, $k_2 = k_1 = 0$, $F_2 = a_1 + a_2(x - x_0)$).

Функція (1.26) може правити за модель деякої функції $z(x) \in \mathrm{C}^m$. Означимо коефіцієнти функції (1.26) як значення функції $z(x)$ та її похідних в точці $x = x_0$: $a_j = z^{(j-1)}(x_0)$, $j = \overline{1, m}$. Таким чином,

$$F_m(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\overset{m}{\Delta}_i (x - x_0)}{\overset{m}{\Delta}} = \sum_{i=1}^{m} z^{(i-1)}(x_0) \frac{\overset{m}{\Delta}_i (x - x_0)}{\overset{m}{\Delta}}. \qquad (1.29)$$

Легко бачити, що в деякій точці $x = x_0$ функція $F_m(x)$ "точно" відтворює функцію $z(x)$ в тому розумінні, що справджується низка рівностей

$$F_m(x_0) = z(x_0), \; F_m'(x_0) = z'(x_0), \; \ldots, \; F_m^{m-1}(x_0) = z_m^{m-1}(x_0).$$

Подамо $z(x)$ у вигляді

$$z(x) = F_m(x) + R_m(x), \tag{1.30}$$

де $R_m(x)$ — функція, що відображає невідповідність між $z(x)$, $F_m(x)$. Виявляється,

$$R_m(x) = \frac{1}{\overset{m}{\Delta}} \int_{x_0}^{x} \xi(s) \overset{m}{\Delta}_m (x-s)\, ds, \tag{1.31}$$

де

$$\xi(s) = z^{(m)}(s) + b_1 z^{(m-1)}(s) + b_2 z^{(m-2)}(s) + \ldots + b_{m-1} z'(s) + b_m z(s); \tag{1.32}$$

тут $b_1, b_2, \ldots, b_m$ є коефіцієнтами алгебричного рівняння (див. (1.28))

$$B_m[k] \equiv k^n + b_1 k^{n-1} + b_2 k^{n-2} + \cdots + b_{m-1} k + b_m = 0, \tag{1.33}$$

а $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — його коренями. Порядкуючи величинами $b_1, b_2, \ldots, b_m$, можна помітно впливати на функцію невідповідності (1.31). Диференціювання ж дає формули для відображення похідних:

$$z^{(\nu)}(x) = F_m^{(\nu)}(x) + R_m^{(\nu)}(x),$$

$$F_m^{(\nu)}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{z^{(i-1)}(x_0)}{\overset{m}{\Delta}} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \overset{m}{\Delta}_m (x - x_0),$$

$$R_m^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\overset{m}{\Delta}} \int_{x_0}^{x} \xi(s) \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \overset{m}{\Delta}_m (x-s)\, ds \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Розглянемо окремі приклади.

Хай $m = 1$. Відповідно до (1.33), (1.27), (1.32), (1.29), (1.31) послідовно матимемо:

$$B_1[k] \equiv k + b_1 = 0,\ k = -b_1;$$

$$\overset{1}{\Delta} = |\,1\,| = 1,\ \overset{1}{\Delta}_1 (x - x_0) = \left|\, e^{k(x-x_0)} \,\right| = e^{-b_1(x-x_0)};$$

$$\xi(s) = z'(s) + b_1 z(s); \quad F_1(x) = z(x_0) \frac{\overset{1}{\Delta}_1 (x - x_0)}{\overset{1}{\Delta}} = z(x_0)\, e^{-b_1(x-x_0)};$$

$$R_1(x) = \frac{1}{\overset{1}{\Delta}} \int_{x_0}^{x} \xi(s) \overset{1}{\Delta}_1 (x-s)\, ds = \int_{x_0}^{x} \left(z'(s) + b_1 z(s) \right) e^{-b_1(x-s)}\, ds.$$

Беручи

$$k=-b_1\neq 0\,,\; u=e^{-b_1(x-s)}\,,\; du=b_1\,e^{-b_1(x-s)}ds\,,\; dv=z'(s)\,ds\,,\; v=z(s)\,,$$

інтегруємо останній вираз частинами:

$$R_1(x)=\int_{x_0}^{x} z'(s)\,e^{-b_1(x-s)}\,ds+b_1\int_{x_0}^{x} z(s)\,e^{-b_1(x-s)}\,ds=$$

$$=\left(z(s)\,e^{-b_1(x-s)}\right)\Big|_{x_0}^{x}=z(x)-z(x_0)\,e^{-b_1(x-x_0)}\,.$$

Підставляючи отримані вирази для $F_1(x)$ та $R_1(x)$ в (1.30), отримаємо тотожність $z(x)\equiv z(x)$. У випадку, коли $k=-b_1=0$,

$$F_1(x)=z(x_0),\quad R_1(x)=\int_{x_0}^{x} z'(s)\,ds=z(x)-z(x_0)\,;$$

знову переконуємося у справедливості (1.30). Аналогічно можна довести справджуваність формули (1.30) при довільному натуральному m.

Покладемо $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$. В такому разі $\xi(s)=z^{(m)}(s)$,

$$\frac{\overset{m}{\Delta}_m(x-s)}{\overset{m}{\Delta}}\to\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)\,!}\,,\; R_m(x)=\int_{x_0}^{x} z^{(m)}(s)\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}\,ds\,,$$

$$F_m(x)\to z(x_0)+z'(x_0)(x-x_0)+z''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+\ldots+z^{(m-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}\,.$$

Останній вираз є **формулою Тейлора**.

Нехай $z(x)=\sin x$, $x_0=0$. При $m=1$ матимемо:

$$k+b_1=0\,,\; k=-b_1\,,\; \overset{1}{\Delta}=1\,,\; \overset{1}{\Delta}_1(x-x_0)=e^{-b_1(x-x_0)}\,,$$

$$F_1(x)=\sin(x_0)e^{-b_1(x-x_0)}\equiv 0\,,\; \xi(s)=z'(s)+b_1\,z(s)=\cos s+b_1\sin s\,,$$

$$R_m=\int_0^x(\cos s+b_1\sin s)\,e^{-b_1(x-s)}\,ds\,.$$

При $m=2$

$$\xi(s)=z''(s)+b_1 z'(s)+b_2 z(s)=b_1\cos s+(b_2-1)\sin s\,.$$

В цьому випадку функцію $R_2(x)$ можна звести на нуль, покладаючи $b_1 = 0$, $b_2 = 1$; тоді $F_2(x) \equiv z(x) = \sin x$. Виходячи з рівняння $B_2[k] \equiv k^2 + 1 = 0$, знайдемо $k_1 = -i$, $k_2 = i$, звідки

$$F_2(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x .$$

Подібно оперуючи функцією $z(x) = \cos x$, можна віднайти ще одну точну формулу

$$F_2(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x ,$$

а відтак укласти **формулу Ойлера**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x .$$

Функція (1.26) має лише одну незалежну змінну — x. Однак, ніщо не заважає побудувати аналогічну функцію і у випадку довільної кількості незалежних змінних. При двох незалежних змінних, наприклад, таку функцію відображатиме вираз

$$F_{m,n}(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{\overset{m}{\Delta}_{xi}(x - x_0)}{\overset{m}{\Delta}_x} \frac{\overset{n}{\Delta}_{yj}(y - y_0)}{\overset{n}{\Delta}_y} .$$

Тут $\overset{m}{\Delta}_x$, $\overset{n}{\Delta}_y$ — визначники Ван-дер-Монда з коренів алгебричних рівнянь відповідно

$$B_m[k] \equiv k^m + b_1 k^{m-1} + \cdots + b_{m-1} k + b_m = 0 ,$$

$$\mathrm{B}_m[\kappa] \equiv \kappa^n + \beta_1 k^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} k + \beta_n = 0 ;$$

$\overset{m}{\Delta}_{xi}(x - x_0)$, $\overset{n}{\Delta}_{yj}(y - y_0)$ — визначники, що будуються на основі відповідно визначників $\overset{m}{\Delta}_x$, $\overset{n}{\Delta}_y$ так само, як наведений раніше визначник $\overset{m}{\Delta}_j$ будується на основі визначника $\overset{m}{\Delta}$.

При розв'язуванні багатьох задач математичного аналізу стає в нагоді терема Лагранжа про скінчені прирости функції. На підставі співвідношень (1.30), (1.29), (1.31)—(1.33), виявляється, можна отримати непересічні загальні твердження.

1° Якщо на відрізку $[x_0, x_1]$ функція $y(x)$ є неперервною і має неперервну ж похідну $y'(x)$, то існує така точка $x = \gamma \in [x_0, x_1]$, що

$$y(x_1) = y(x_0) e^{p(x_1 - x_0)} + \xi(\gamma) \frac{e^{p(x_1 - x_0)} - 1}{p} , \tag{1.34}$$

де $\xi(\gamma) = y'(\gamma) - p y(\gamma)$; p — дійсний параметр.

2° Якщо на відрізку $[x_0, x_1]$ функція $y(x)$ є неперервною і має неперервні ж першу $y'(x)$ та другу $y''(x)$ похідні, то існує така точка $x = \gamma \in [x_0, x_1]$, що

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)\frac{e^{p(x_1-x_0)} - 1}{p} + \xi(\gamma)\frac{e^{p(x_1-x_0)} - 1 - p(x_1 - x_0)}{p^2}, \quad (1.35)$$

де $\xi(\gamma) = y''(\gamma) - py'(\gamma)$; p — дійсний параметр.

3° Якщо на відрізку $[x_0, x_1]$ функція $y(x)$ є неперервною і має неперервні ж похідні до m-го порядку включно і, до того ж, функція

$$\frac{\overset{m}{\Delta}_m(x_1 - s)}{\overset{m}{\Delta}}, \quad s \in [x_0, x_1],$$

— знаком стала, то існує така точка $x = \gamma \in [x_0, x_1]$, що

$$y(x_1) = F_m(x_1) + \xi(\gamma)\int_{x_0}^{x_1} \frac{\overset{m}{\Delta}_m(x_1 - s)}{\overset{m}{\Delta}}\,ds,$$

де $\xi(\gamma) = y^{(m)}(\gamma) + b_1 y^{(m-1)}(\gamma) + \ldots + b_{m-1}y'(\gamma) + b_m y(\gamma)$.

Щоб довести твердження 1°, покладемо $m = 1$, $z(x) = y(x)$, $b_1 = -p$ і запишемо (1.30) у вигляді

$$y(x) = y(x_0)\frac{\overset{1}{\Delta}_1(x - x_0)}{\overset{1}{\Delta}} + \int_{x_0}^{x} \xi(s)\frac{\overset{1}{\Delta}_1(x - s)}{\overset{1}{\Delta}}\,ds.$$

В даному випадку

$$\overset{1}{\Delta} = 1, \quad \overset{1}{\Delta}_1(x - x_0) = e^{p(x-x_0)}, \quad \xi(s) = z'(s) - pz(s).$$

Оскільки функція $e^{p(x-x_0)}$ — неперервна і знаком стала, то на підставі теореми про середнє значення функції на відрізку можна писати

$$\int_{x_0}^{x} \xi(s)\frac{\overset{1}{\Delta}_1(x - s)}{\overset{1}{\Delta}}\,ds = \int_{x_0}^{x} \xi(s)e^{p(x-s)}\,ds = \xi(\gamma)\int_{x_0}^{x} e^{p(x-s)}\,ds = \xi(\gamma)\frac{e^{p(x-s)} - 1}{p},$$

де $\xi(\gamma) = z'(\gamma) - pz(\gamma)$, $x_0 \le \gamma \le x$. То ж при $x = x_1$ справді матимемо висновок (1.34) твердження 1°, яке пов'язує між собою довжину відрізка $[x_0, x_1]$, значення функції $y(x)$ на кінцях цього відрізка, значення функцій $y(x)$, $y'(x)$ у деякій проміжній точці $x=\gamma$ відрізка $[x_0, x_1]$ та значення параметра p. Беручи, зокрема, $p=0$, після розкриття невизначеності в (1.34) дійдемо **формули Лагранжа**

$$y(x_1)=y(x_0)+y'(\gamma)(x_1-x_0), \quad \gamma\in[x_0, x_1].$$

Цілком подібно доводяться і твердження 2°, 3°. Зазначимо лише, що для доведення твердження 2° слід покласти $m=2$, $z(x)=y(x)$, $b_1=-p$, $b_2=0$, і що з (1.35) при $p=0$ випливає формула Тейлора

$$y(x_1)=y(x_0)+y'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{2}y''(x_0)(x_1-x_0)^2$$

для випадку $m=2$.

Звернемо увагу на такі формули:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots, \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots=\sum_{i=1}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Підставимо в останню формулу замість x величину ix і, враховуючи дві передостанні формули, отримаємо **формулу Ойлера (Котеса)**

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=\cos x+i\sin x. \tag{1.36}$$

Покладаючи $x=\pi$, дійдемо до **формули Ойлера (Муавра)**

$$e^{i\pi}+1=0,$$

яка здивувала світ, засвідчуючи взаємозумовленість чисел e, π, $i=\sqrt{-1}$, 1, 0.

Формула Ойлера (1.36) дозволяє підносити число e у довільний комплексний степінь, наприклад:

$$e^{a+\frac{\pi}{4}i}=e^a e^{\frac{\pi}{4}i}=e^a\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^a(1+i).$$

На підставі неї легко з’ясувати, що

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x. \tag{1.37}$$

Додаючи (1.36) і (1.37), а потім віднімаючи їх, відповідно знайдемо:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{1.38}$$

Формули (1.36), (1.37), (1.38) справджуються не тільки для дійсних, а й для комплексних значень x. Зокрема, на підставі (1.38)

$$\cos i=\frac{e^{-1}+e}{2}\approx 1{,}6.$$

Отже косинус не перевищує одиниці лише для дійсних значень x. В області ж комплексних x косинус може набувати як завгодно великих значень.

Формула Ойлера дозволяє з'ясувати, що **показникова функція** є періодичною (**з періодом** $2\pi i$), про що не можливо здогадатись, оперуючи цією функцією лише в області дійсних чисел. Справді, за формулою Ойлера

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1,$$

а тому

$$e^{x+2\pi i} = e^x e^{2\pi i} = e^x.$$

За допомогою формули Ойлера, легко обчислювати **логарифми комплексних** (а разом з тим і від'ємних) **чисел**. Наприклад, для $r = 0, 1, 2, \ldots$ справджується рівність

$$e^{(1+2r)\pi i} = e^{\pi i + 2r\pi i} = -1,$$

а тому є підстави писати

$$\ln(-1) = (1+2r)\pi i, \; r = 0, 1, 2, \ldots .$$

Отже кожному комплексному (окрім нуля) числу відповідає безліч значень логарифма. Про різні застосування комплексних чисел йдеться в [17, 34].

Принагідно зазначимо, що ні $\sin z$, ні $\cos z$, ні жодна похідна від e^{-z^2} не мають уявних коренів. Натомість, принаймні одна з похідних

$$\frac{dF}{dx}, \; \frac{d^2F}{dx^2}$$

від функції $F(x) = e^{P_n(x)}$, $P_n(x)$ — поліном степеня $n \geq 3$, має не тільки дійсні корені.

Оскільки $e^{inx} = (e^{ix})^n$, з формули Ойлера випливає **формула Муавра**

$$\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n.$$

За допомогою неї легко визначити $\cos 3x$, $\sin 3x$ через $\cos x$ та $\sin x$. Справді,

$$\cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3 =$$

$$= \left(\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\right) + i\left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right),$$

звідки

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

$$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Підкреслимо також, що комплексні числа дозволяють більш компактно записувати і **ряди Фур'є**:

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_r e^{irx}.$$

Та обставина, що в області комплексних значень основні елементарні функції тісно пов'язані між собою, пояснює, чому в одних випадках розв'язки одного і того самого диференціального рівняння визначаються через тригонометричні функції, а в інших — через показникові.

Заслуговують на увагу і обернені тригонометричні функції

$$y = \mathrm{Arcsin}\, x = \arcsin x + 2k\pi = (2k+1)\pi - \arcsin x \quad (-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}),$$

$$y = \mathrm{Arccos}\, x = \pm \arccos x + 2k\pi \quad (0 \le \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \le \pi),$$

$$y = \mathrm{Arctan}\, x = \arctan x + k\pi \quad (-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}),$$

$$y = \mathrm{Arcctan}\, x = \mathrm{arcco\ tan}\, x + k\pi \quad (0 < \mathrm{arcctan}\, x = \frac{\pi}{2} - \arctan x < \pi)$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

На основі формули додавання для синуса

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

можна укласти формулу додавання для арксинуса. Для цього слід покласти

$$\alpha = \arcsin x,\ \beta = \arcsin y,\ x, y \in [-1,\ +1];$$

тоді

$$\sin\alpha = x,\ \sin\beta = y,\ \cos\alpha = \sqrt{1 - x^2},\ \cos\beta = \sqrt{1 - y^2},$$

а отже

$$\sin(\alpha + \beta) = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2},$$

звідки

$$\alpha + \beta = \arcsin x + \arcsin y = \mathrm{Arc}\sin\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$(-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x,\ \arcsin y \le \frac{\pi}{2})\,. \tag{1.39}$$

Формула (1.39) може бути записана у вигляді

$$\alpha + \beta = \arcsin x + \arcsin y = \mathrm{arc}\sin\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right)$$

тільки в тому разі, коли разом з α, β проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ належить і $\alpha + \beta$. Ця умова дотримується сама по собі, коли x і y (а з ними α і β) мають різні знаки. Якщо ж знаки однакові, зазначена умова рівносильна такій:

$$x^2 + y^2 \le 1\,.$$

Формула додавання для тангенса

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha},$$

якщо покласти $\alpha=\arctan x$, $\beta=\arctan y$, при $xy\neq 1$ веде до рівності

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{x+y}{1-xy},$$

а отже

$$\alpha+\beta=\arctan x+\arctan y=\operatorname{Arc}\tan\frac{x+y}{1-xy}.$$

І тут

$$\arctan x+\arctan y=\operatorname{arc}\tan\frac{x+y}{1-xy}$$

лише якщо $-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, тобто, коли $xy<1$.

Можна пересвідчитися у справедливості рівностей

$$\underset{(-\infty<x<+\infty)}{\arctan x}=\operatorname{arc}\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \underset{(-1<x<+1)}{\arcsin x}=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подібними до тригонометричних є гіперболічні функції

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ \operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

(гіперболічні синус, косинус, тангенс, котангенс). Вони задовольняють, зокрема, співвідношення

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}y\operatorname{ch}x,\ \operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}y\operatorname{sh}x,$$

звідки при $y=x$

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,\quad \operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x,\quad \operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x.$$

Особливе місце серед елементарних посідають ціла

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

та дробова

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^\nu+b_1x^{\nu-1}+\ldots+b_{\nu-1}x+b_\nu},$$

раціональні функції, де a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n, b_0, b_1, …, $b_{\nu-1}$, b_ν — сталі. Похідна порядку, вищого за n, від цілої функції є тотожним нулем. Натомість, дробову функцію операції диференціювання в загальному випадку на тотожний нуль не перетворюють. Наприклад, якщо

$$y = \frac{a_0 x + a_1}{b_0 x + b_1}$$

($n = \nu = 1$), то на підставі (1.21)

$$y^{(m)} = (-1)^{m+1} m!\, \frac{b_0^{m-1}(a_0 b_1 - a_1 b_0)}{(b_0 x + b_1)^{m+1}}\,;$$

тут

$$D_m(z) = \begin{vmatrix} v & 0 & 0 & \dots & 0 & z' \\ 2b_0 & v & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3b_0 & v & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & mb_0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m+1} m!\, b_0^{m-1} z'\,,$$

$$z \in \{u, v\}\,, \quad u(x) = a_0 x + a_1\,, \quad v(x) = b_0 x + b_1\,.$$

Для гіперболи

$$y = \frac{1}{b_0 x + b_1}$$

на підставі формули (1.22), наприклад, матимемо:

$$y^{(j)} = -\frac{1}{(b_0 x + b_1)^{j+1}} \begin{vmatrix} b_0 x + b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 2b_0 & b_0 x + b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3b_0 & b_0 x + b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 x + b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & jb_0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^j\, j!\, b_0^j}{(b_0 x + b_1)^{j+1}}\,.$$

В 1963 році В. Л. Рвачов зробив один з найоригінальніших внесків в теорію функцій — запровадив так звані ***R*-функції**. *R*-Функції не належать до якихось спеціальних функцій (подібно, наприклад, до функцій Бесселя, Матьє тощо), а утворюють множину, що природно перетинається з множиною звичайних елементарних функцій і задовільно якісно відображається в ній. Це дає змогу оперувати *R*-функціями так само, як і звичайними — залучати звичайні засоби формульного запису і обчислення, аналізу і синтезу. Визначальною особливістю цих функцій є те, що кожній з них відповідає певна функція двозначної (булевої), а в загальному випадку — *k*-значної, логіки [22, 26, 27].

1.6 Функціонал і варіаційна (функціональна) похідна

Якщо окреслено правило, за яким функції з деякої множини ставиться у відповідність число, то кажуть, що задано деякий **функціонал***). Серед можливих функціоналів можна вирізнити:

— **лінійний**

$$F[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} w(x)\, y(x)\, dx\,, \tag{1.40}$$

де $w(x)$ — задана неперервна функція, а x_0, x_1 можуть набувати як скінченних, так і нескінченних значень;

— **квадратичний**

$$F[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} W(x,\gamma)\, y(x)\, y(\gamma)\, d\gamma dx\,, \tag{1.41}$$

де $W(x,\gamma)$ — задана симетрична відносно x і γ функція, а γ_0, γ_1 та x_0, x_1, можуть набувати як обмежених, так і нескінченних значень;

— **функція від функціонала**

$$F[y(x)] = f(\Phi[y])\,, \tag{1.42}$$

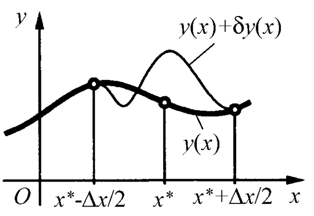
де $f(\cdot)$ — задана функція, а $\Phi[y(x)]$ — функціонал.

В деякому околі $x_0, \gamma_0 < x* - \Delta x/2 < x < x* + \Delta x/2 < x_1, \gamma_1$ певного значення $x*$ незалежної змінної x надамо функції $y = y(x)$ приросту (варіації) $\delta y = \delta y(x) \not\equiv 0$ $\forall x \in (x* - \Delta x/2,\, x* + \Delta x/2)$ ($\delta y(x) \equiv 0\ \forall x \notin (x* - \Delta x/2,\, x* + \Delta x/2)$); графічно це можна відобразити за допомогою рис. 21. Локальна варіація функції $y = y(x)$ призведе до зміни функціонала $F = F[y(x)]$. Лінійна відносно $\delta y(x)$ частина

$$\delta F[y] = \{F[y + \delta y] - F[y]\}_L$$

різниці

$$\Delta F[y] = F[y + \delta y] - F[y]$$



21 **Графічне зображення варіації функції.**

---

*) Більш загально, функціонал — відображення $\mathscr{F}$ довільної множини X у множину $\mathbf{R}$ дійсних чисел чи множину $\mathbf{C}$ комплексних чисел.

називається **варіацією функціонала** $F = F[y(x)]$, а границя

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} F[y] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta F[y]}{\int\limits_{\Delta x} \delta y(x)\, dx} \tag{1.43}$$

— **варіаційною** (або **функціональною**) **похідною**.

Варіаційна похідна (1.43) є також функціоналом, залежним до того ж від x як від параметра. Тому її можна диференціювати і звичайно — за параметром x, і функціонально — за функцією $y(x)$ в околі деякого $x = \tilde{x}$, формуючи тим самим другу варіаційну похідну

$$\frac{\delta}{\delta y(\tilde{x})} \left\{ \frac{\delta}{\delta y(x)} F[y] \right\} = \frac{\delta^2}{\delta y(x)\delta y(\tilde{x})} F[y]. \tag{1.44}$$

Друга варіаційна похідна (1.44) знову ж таки є функціоналом, залежним вже від двох параметрів — x та $\tilde{x}$. Отже її можна диференціювати далі як звичайно, так і функціонально…

Знайдемо варіаційні похідні лінійного (1.40) та квадратичного (1.41) функціоналів, а також **функції-функціонала** (1.42).

У випадку лінійного функціонала (1.40)

$$\delta F = F(y + \delta y) - F(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} w(x)\delta y(x)\, dx = \int\limits_{x* - \Delta x/2}^{x* + \Delta x/2} w(x)\delta y(x)\, dx .$$

Враховуючи, що у випадку неперервної функції $w = w(x)$ за теоремою про середнє

$$\int\limits_{x* - \Delta x/2}^{x* + \Delta x/2} w(x)\delta y(x)\, dx = w(x') \int\limits_{\Delta x} \delta y(x)\, dx ,$$

де $x' \in (x* - \Delta x/2,\, x* + \Delta x/2)$, знайдемо:

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} F[y] = \lim_{\Delta x \to 0} w(x') \frac{\int\limits_{\Delta x} \delta y(x)\, dx}{\int\limits_{\Delta x} \delta y(x)\, dx} = w(x). \tag{1.45}$$

У випадку квадратичного функціонала (1.41)

$$\Delta F[y] = F[y + \delta y] - F[y] =$$

$$= \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma_1} \int\limits_{x_0}^{x_1} W(x,\gamma)\,(y(x) + \delta y(x))(y(\gamma) + \delta y(\gamma))\, dx d\gamma - \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma_1} \int\limits_{x_0}^{x_1} W(x,\gamma)\, y(x)\, y(\gamma)\, dx d\gamma =$$

$$= \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma_1} \int\limits_{x_0}^{x_1} W(x,\gamma)(y(x)\delta y(\gamma) + y(\gamma)\delta y(x) + \delta y(x)\delta y(\gamma))\, dx d\gamma ;$$

$$\delta F[y] = \int_{x_0}^{x_1} W(x, \gamma') y(x)\, dx \int_{x^*-\Delta x/2}^{x^*+\Delta x/2} \delta y(\gamma)\, d\gamma + \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} W(x', \gamma) y(\gamma)\, d\gamma \int_{x^*-\Delta x/2}^{x^*+\Delta x/2} \delta y(x)\, dx\,;$$

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} F[y] = \int_{x_0}^{x_1} W(x, \gamma) y(x)\, dx + \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} W(x, \gamma) y(\gamma)\, d\gamma\,. \tag{1.46}$$

У випадку симетричної $W(x, \gamma)$ при $\gamma_0 = x_0$, $\gamma_1 = x_1$ матимемо:

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} F[y] = \int_{x_0}^{x_1} (W(x, \gamma) + W(\gamma, x)) y(x)\, dx, \quad x \in (x_0, x_1)\,. \tag{1.47}$$

У випадку функції-функціонала (1.42)

$$F(y + \delta y) = f(\Phi[y + \delta y]) = f(\Phi[y] + \delta\Phi[y]) =$$

$$= f(\Phi[y]) + \frac{\partial f(\Phi[y])}{\partial \Phi}\delta\Phi + \ldots = F[y] + \frac{\partial f(\Phi[y])}{\partial \Phi}\delta\Phi + \ldots$$

і отже

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} f(\Phi[y]) = \frac{\partial f(\Phi[y])}{\partial \Phi} \frac{\delta}{\delta y(x)} \Phi[y]\,. \tag{1.48}$$

Нехай $F[y] = \Phi_1[y]\Phi_2[y]$. В цьому випадку

$$\delta F = \{F[y + \delta y] - F[y]\}_L = \{F_1[y + \delta y]F_2[y + \delta y] - F_1[y]F_2[y]\}_L =$$

$$= F_1[y]\,\delta F_2[y] + F_2[y]\,\delta F_1[y]$$

і, отже,

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} F = \frac{\delta}{\delta y(x)} (F_1[y]F_2[y]) = F_1[y] \frac{\delta}{\delta y(x)} F_2[y] + F_2[y] \frac{\delta}{\delta y(x)} F_1[y]\,. \tag{1.49}$$

Формально можна означити і варіаційну похідну від функціонала $F = y(x_0)$, який функції $y = y(x)$ ставить у відповідність її ж значення при певному $x = x_0$:

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} y(x_0) = \delta(x - x_0)\,, \tag{1.50}$$

де $\delta(\cdot)$ — імпульсна функція Дірака (δ-функція Дірака).

Розглянемо, наприклад, лінійний функціонал

$$F[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right) dx \tag{1.51}$$

(математичне сподівання величини y при нормальному розподілі величини x; π, σ — параметри розподілу), для якого

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} F[y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right). \tag{1.52}$$

Здійснюючи граничний перехід в (1.51) і (1.52), власне і отримаємо (1.50).

Формули (1.45)—(1.52) знаходять застосування у багатьох прикладних задачах. До того ж, формула (1.50) дає можливість суттєво формалізувати операцію диференціювання.

Наприклад, застосовуючи (1.50) до функціонального диференціювання квадратичного функціонала

$$F[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} W(\lambda, \gamma)\, y(\lambda)\, y(\gamma)\, d\gamma d\lambda\,,$$

знайдемо:

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} W(\lambda, \gamma)\, y(\lambda)\, y(\gamma)\, d\gamma d\lambda = \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} W(\lambda, \gamma) \frac{\delta}{\delta y(x)} (y(\lambda) y(\gamma))\, d\gamma d\lambda =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} W(\lambda, \gamma) \left(y(\lambda) \frac{\delta}{\delta y(x)} y(\gamma) + y(\gamma) \frac{\delta}{\delta y(x)} y(\lambda) \right) d\gamma d\lambda =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} W(\lambda, \gamma) (y(\lambda)\, \delta(\gamma - x) + y(\gamma)\, \delta(\lambda - x))\, d\gamma d\lambda =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (W(x, s) + W(s, x))\, y(s)\, ds, \quad x_0 < x < x_1\,.$$

У випадку функціонала

$$F[y] = \int_{x_0}^{x_1} L\left(s, y(s), \frac{dy(s)}{ds} \right) ds\,,$$

який пересічно зустрічається у варіаційному численні, матимемо:

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} \int_{x_0}^{x_1} L\left(s, y(s), \frac{dy(s)}{ds} \right) ds = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial (dy/ds)} \frac{d}{ds} \right) \frac{\delta y(s)}{\delta y(x)}\, ds =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial (dy/ds)} \frac{d}{ds} \right) \delta(s - x)\, ds = \left(-\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y} \right) L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx} \right).$$

1.7 Функціонал і узагальнена функція

Коли йдеться про **узагальнені функції**, поряд з ними якісь інші функції, природно, треба відносити до **звичайних**. Звичайною пересічно вважають кожну функцію $y = y(x)$, означену в проміжку $-\infty < x < \infty$ і таку, що набуває дійсних значень та інтегрується (за Лебегом) в кожному скінченному проміжку $a \le x \le b$. Дві звичайні функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ вважаються однією і тією самою звичайною функцією, якщо майже всюди $y_1(x) = y_2(x)$. Звичайні функції можна додавати і множити на дійсні числа, отримуючи знову звичайні функції; через це кажуть, що вони утворюють лінійний дійсний простір E. В рамках простору E звичайних функцій можна виконувати операції граничного переходу; зокрема, якщо послідовність $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_\nu(x), \ldots$ збігається майже всюди до деякої звичайної функції $y(x)$ і при цьому дотримується нерівність $|y_\nu(x)| \le y_0(x)$ ($y_0(x)$ — деяка фіксована звичайна функція), то гранична функція $y(x)$ буде (відповідно до теореми Лебега) інтегровною в кожному скінченному проміжку, тобто також звичайною функцією. Натомість, диференціюванню підлягає не кожна звичайна функція: навіть неперервні звичайні функції Вейєрштрасса і Ван-дер-Вардена зовсім не мають похідних; від деяких звичайних функцій похідна існує, але вона сама не належить до звичайних функцій (це стосується, наприклад, функції $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$); інколи похідна від звичайної функції існує (майже всюди) і сама є звичайною функцією, але обернена операція —інтегрування — не відтворює первісної функції за її похідною (приклад — так звана канторова функція $y = C(x)$ яка є, до речі, неперервною); далеко не завжди із збіжності $y_\nu \to y$ випливає збіжність похідних $y'_\nu \to y'$, навіть якщо вони й існують. Тут доречно згадати ще про так звані **абсолютно неперервні звичайні функції**; власне абсолютно неперервні функції (і тільки вони) мають такі звичайні похідні, що справджують рівності

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(s)\,ds$$

(канторова функція $y = C(x)$ є неперервною, але не абсолютно неперервною).

Звичайну (дійсну) функцію $\varphi(\cdot)$ прийнято називати **основною**, якщо вона має похідні будь-якого порядку і є **фінітною**, тобто обертається на нуль поза скінченним проміжком. Сукупність основних функцій позначають через $\mathscr{D}$. Не полишаючи сукупності $\mathscr{D}$ основних функцій, основні функції можна додавати одну до одної і множити на нескінченно диференційовні (абсолютно гладкі) функції. Ніщо не заважає за основну брати також і комплексну функцію вигляду $\varphi_1(\cdot) + i\varphi_2(\cdot)$, в якій $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ — належні $\mathscr{D}$ дійсні функції. Якщо до $\mathscr{D}$ зарахувати ще й функції $\varphi_1(\cdot) + i\varphi_2(\cdot)$, то стає можливим виконувати в рамках $\mathscr{D}$ поряд з переліченими ще й операції множення на комплексні числа і на комплексні нескінченно диференційовні функції.

Поняття інтеграла і основної функції дають можливість подивитися на звичайну функцію під принципово іншим кутом зору. А власне, кожній звичайній функції $f(\,\cdot\,)$ можна поставити у відповідність функціонал f (число) у просторі $\mathscr{D}$ за правилом

$$(f,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\varphi(s)\,ds \tag{1.53}$$

Оскільки основна функція, яку називають також **пробною**, фінітна, то насправді границі інтегрування — скінченні.

Такий функціонал є лінійним, оскільки для будь-яких основних функцій φ_1 та φ_2 і дійсних чисел α_1 та α_2 справджується співвідношення

$$(f,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(f,\varphi_1)+\alpha_2(f,\varphi_2)\,.$$

До того ж, він неперервний: для послідовності основних функцій $\{\varphi_\nu(\cdot)\}$, збіжної до основної функції $\varphi(\cdot)$, справджується співвідношення $\lim\limits_{\nu\to\infty}(f,\varphi_\nu)=(f,\varphi)$. Дійсно, має місце оцінка

$$\left|(f,\varphi-\varphi_\nu)\right|\le\max\{|\,\varphi(s)-\varphi_\nu(s)\,|\,|\,s\,|\le A\}\int\limits_{-A}^{A}|\,f(s)\,|\,ds\,,$$

де число A таке, що всі функції $\varphi(s)-\varphi_\nu(s)$ дорівнюють нулю при $|\,s\,|>A$; ця нерівність гарантує властивість неперервності.

Якщо $f(\,\cdot\,)$ абсолютно неперервна і має звичайну похідну $f'(\,\cdot\,)$, то без жодних застережень має сенс вираз

$$(f',\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(s)\,\varphi(s)\,ds\,.$$

Якщо функція $\varphi(\cdot)$ також абсолютно неперервна і має обмежену похідну $\varphi'(\cdot)$, то можна виконати операцію інтегрування частинами:

$$(f',\varphi)=f(x)\,\varphi(x)\big|_{-\infty}^{\infty}-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\varphi'(s)\,ds\,.$$

Позаінтегральний член дорівнює нулю, оскільки $\varphi(\cdot)$ — фінітна. Тому

$$(f',\varphi)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\varphi'(s)\,ds=-(f,\varphi')\,. \tag{1.54}$$

Але якщо навіть $f'(\,\cdot\,)$ і не існує, то вираз

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\varphi'(s)\,ds \tag{1.55}$$

все одно має сенс для кожної фінітної обмеженої функції $\varphi(\cdot)$ з обмеженою похідною $\varphi'(\cdot)$. Отже, для обчислення інтеграла від добутку $f'(\,\cdot\,)$ на яку-небудь фінітну обмежену функцію $\varphi(\cdot)$ з обмеженою похідною $\varphi'(\cdot)$ не виникає жодних перешкод навіть тоді, коли функції $f'(\,\cdot\,)$ реально немає, як такої: добуток "ніби наявної" $f'(\,\cdot\,)$ на задану $\varphi(\cdot)$ дорівнює інтегралу (1.55) з оберненим знаком.

Звично вважати, що функція $f(\,\cdot\,)$ в кожній (або майже в кожній) точці набуває цілком певних значень. Натомість, тут ваги набирають значення інтеграла від добутків $f(\,\cdot\,)$ на деякі "пробні" функції, а не значення самої $f(\,\cdot\,)$. Коли для $f(\,\cdot\,)$ відомі такі інтеграли, то кажуть, що задано узагальнену функцію. Сукупність узагальнених функцій позначають символом $\mathcal{D}'$.

Функціонал (1.53) є окремим прикладом лінійного неперервного функціонала в просторі $\mathcal{D}$. Узагальнені функції, які можна означити через інтеграл (1.53), називають **регулярними**. Можна вказати і безліч функціоналів, які не можливо подати як інтеграл (1.53). Їх називають **сингулярними**. Найпростішим, а водночас наочним, повчальним і корисним, прикладом є функціонал, який ставить у відповідність кожній основній функції $\varphi(x)$ її значення у точці $x=0$, тобто число $\varphi(0)$. Цей функціонал $(\delta(x),\varphi(x))=\varphi(0)$ називають **дельта-функцією** (про неї ще йтиметься в розділі 2). Тому в запис

$$(\delta,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(s)\,\varphi(s)\,dx=\varphi(0) \tag{1.56}$$

жодного змісту з позицій класичного аналізу не вкладають, бо не існує жодної звичайної функції, для цей запис мав би конструктивний сенс.

Звичайно, пробні функції можна задавати по-різному, будуючи при цьому різні класи узагальнених функцій. Але коли мова заходить про диференціювання узагальненої функції (як засвідчує, зокрема, приклад визначення (f',φ)), то виникає необхідність вимагати, щоб і (звичайна) похідна $\varphi'(\cdot)$ від пробної функції $\varphi(\cdot)$ також була пробною функцією, тобто належала $\mathcal{D}$. З цих міркувань випливає, що $\varphi(\cdot)$, взагалі, повинна бути нескінченно диференційовною; це і задекларовано при означенні основної функції. Далі, щоб кожна звичайна функція $f(\,\cdot\,)$, яка як завгодно зростає-спадає при $|x|\to\infty$, потрапила до класу узагальнених, тобто щоб інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\varphi(s)\,ds$$

існував для будь-якої звичайної функції, доводиться вимагати від $\varphi(\cdot)$ ще й фінітності.

Вираз (1.53) можна вважати означенням **похідної від узагальненої функції**. Знайдемо похідні, наприклад, від функцій (що задані з точністю до значень на множині виміру нуль, яка тут збігається з точкою $x=0$)

$$\theta(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ 0 \text{ при } x<0,\end{cases}$$

$$x_+^{\lambda}=x^{\lambda}\theta(x)=\begin{cases}x^{\lambda} \text{ при } x>0,\\ 0 \quad \text{при } x<0,\ -1<\lambda<0,\end{cases}$$

$$\ln x_+=\ln(x\,\theta(x))=\begin{cases}\ln x \text{ при } x>0,\\ \ 0 \quad \text{при } x<0.\end{cases}$$

Означувані через поняття функціонала похідні, можна записати у вигляді:

$$(\theta',\varphi)=(\theta,-\varphi')=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)\,dx=\varphi(0)=(\delta,\varphi)\ ,$$

звідки $\theta'=\delta$;

$$((x^{\lambda}\theta)',\varphi)=(x^{\lambda}\theta,-\varphi')=\int_0^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)dx\ ;$$

$$((\ln(x\theta))',\varphi)=(x^{\lambda}\theta,-\varphi')=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\,\theta(1-x)\big)dx\ .$$

За тим самим алгоритмом можна з’ясувати, що

$$(x_+^{r})^{(\nu)}=(x^{r}\theta(x))^{(\nu)}=\begin{cases}r!\,\delta^{(\nu-r-1)}(x) \text{ при } \nu\ge r+1,\\ \dfrac{r!}{(r-\nu)!}\,x^{r-\nu}\theta(x) \text{ при } \nu\le r,\end{cases}\qquad r=0,1,2,\dots$$

Очевидно, що

$$(f'',\varphi)=(f',-\varphi')=(f,\varphi'')\ ,$$

а при довільному ν

$$(f^{(\nu)},\varphi)=(f,(-1)^{\nu}\varphi^{(\nu)})=(-1)^{\nu}(f,\varphi^{(\nu)})\ .$$

Легко з’ясувати, що похідна має звичайні лінійні властивості: якщо f_1 і f_2 — звичайні функції, а α_1 і α_2 — сталі, то

$$((\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)',\varphi)=(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,-\varphi')=\alpha_1(f_1,-\varphi')+\alpha_2(f_2,-\varphi')=$$

$$=\alpha_1(f_1',\varphi)+\alpha_2(f_2',\varphi)=(\alpha_1 f_1'+\alpha_2 f_2',\varphi)\ .$$

Звідси

$$(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)'=\alpha_1 f_1'+\alpha_2 f'\ .$$

Важко (якщо навіть вважати за можливе) змістовно і коректно говорити про значення узагальненої функції в кожній окремій точці. Проте, можна вільно говорити, що узагальнена функція набуває нульового значення на деякій множині G і ненульових значень поза нею. Найменшу замкнуту множину F, поза якою узагальнена функція f є нулем, називають **носієм функції** f і позначають її як $\operatorname{supp} f$; кажуть також, що f зосереджена на множині F. Носієм функції, наприклад, $y = \delta(x)$ є точка $x = 0$.

Нехай $\mathcal{D}_0(\mathrm{R})$ — підпростір $\mathcal{D}(\mathrm{R})$ ($\mathcal{D}_0(\mathrm{R}) \subset \mathcal{D}(\mathrm{R})$), що містить основні функції вигляду

$$\varphi_0(x) = \varphi'(x), \ \varphi \in \mathcal{D};$$

зрозуміло, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = 0.$$

Нехай $\varphi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{R})$ — деяка фіксована основна функція така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\, dx = 1,$$

а $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{R})$ — довільна основна функція і

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = \lambda. \tag{1.57}$$

Вірним є таке твердження: будь-яку основну функцію $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{R})$ можна єдиним способом подати у вигляді

$$\phi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x), \ \varphi_0(x) \in \mathcal{D}_0(\mathrm{R}). \tag{1.58}$$

Дійсно, оскільки $\varphi_1(x)$ — фіксована функція і λ визначається з (1.57), то функція $\varphi_0(x)$ однозначно визначається співвідношенням (1.58). Далі,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\, dx.$$

Отже, $\varphi_0(x) \in \mathcal{D}_0(\mathrm{R})$ і $\varphi_0(x)$ — нескінченно диференційовна функція з компактним носієм.

Певні застереження виникають тоді, коли йдеться про добуток звичайної функції $\alpha(x)$ на узагальнену f. Пересічно є сенс говорити про добуток будь-якої узагальненої функції тільки на будь-яку нескінченно диференційовну [35], бо операція множення для звичайних функцій повинна збігатись зі звичайним множенням, а операція множення для узагальнених функцій повинна бути у всякому разі неперервною операцією в класі $\mathcal{D}'$ узагальнених функцій, тобто такою операцією, щоб з умови $f_\nu \to f$ в $\mathcal{D}'$ випливало, що $\alpha f_\nu \to \alpha f$. Якщо, наприклад, r-а похідна від $\alpha(x)$ має розрив при $x = 0$, то можна побудувати послідовність $f_\nu(x) \to \delta^{(r)}(x)$ таку, що вирази $\big(\alpha(x) f_\nu(x), \varphi(x)\big)$ для деяких $\varphi(x)$ не матимуть границі ($\varphi(x)$ — так звана основна чи пробна функція, яка означена у проміжку $-\infty < x < \infty$, є неперервною і має похідні у звичайному сенсі будь-якого порядку, до того ж є фінітною, тобто такою, що набирає нульового значення поза певним скінченним проміжком).

Очевидно, що якщо $f(x)$ — звичайна функція, а $\alpha(x)$ — нескінченно диференційовна, то $\alpha(x) f(x)$ є звичайною, а $\alpha(x)\varphi(x)$ — основною, і тому

$$(\alpha(x) f(x), \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha(x) f(x))\varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\alpha(x)\varphi(x))\, dx = (f(x), \alpha\varphi)\,.$$

Диференціювання добутку функції $\alpha(x)$, що має похідні довільного порядку, на узагальнену функцію f здійснюється за формулою диференціювання добутку звичайних функцій: $(\alpha(x), f)' = \alpha'(x) f + \alpha(x) f'$. Справді,

$$((\alpha(x) f)', \varphi) = (\alpha f, -\varphi') = (f, -\alpha\varphi') =$$

$$= (f, -(\alpha\varphi)') + (f, \alpha'\varphi) = (f', \alpha\varphi) + (\alpha' f, \varphi) = (\alpha f' + \alpha' f, \varphi)\,.$$

Проте, виникають ситуації, коли слушно не перейматися такими застереженнями, турбуючись лише про те, щоб виконувані поточні операції були вірними. Окремі властивості узагальнених функцій наводяться також в додатку А.

Підкреслимо, що значення звичайної функції на множині виміру нуль не позначається на результаті її інтегрування, а отже і значення узагальненої функції не залежить від значень відповідної звичайної функції на множині виміру нуль, хоча з багатьох причин всі значення звичайної функції є принципово важливими. Наприклад, навряд чи існують вагомі підстави вважати однаковими функції

$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > x_0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } x = x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0; \end{cases} \quad \theta^\nu(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > x_0, \\ \dfrac{1}{2^\nu} & \text{при } x = x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0; \end{cases}$$

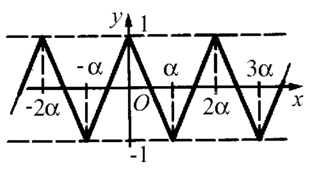
$$\lim_{\nu\to\infty} \theta^\nu(x - x_0) = \theta_0(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > x_0, \\ 0 & \text{при } x \le x_0. \end{cases}$$

Більш-менш вичерпний виклад теорії узагальнених функцій потребує значно більшої уваги і місця, ніж це можна собі дозволити, пробуючи розв'язати поставлені в даній роботі задачі.

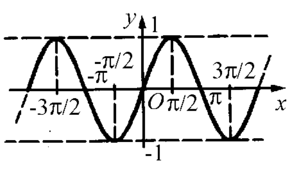
2 *МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ: ОСОБЛИВІ ФУНКЦІЇ* 2

2.1 Функції з нескінченною кількістю екстремумів

Можна вирізнити означені і неперервні всюди (на всій числовій осі) **функції** $y = y(x)$, **що мають нескінченно багато екстремумів** (максимумів і мінімумів). Такими є, наприклад, стріхата (рис. 22, *а*) та синусоїдна $y = \sin x$ (рис. 22, *б*) функції.



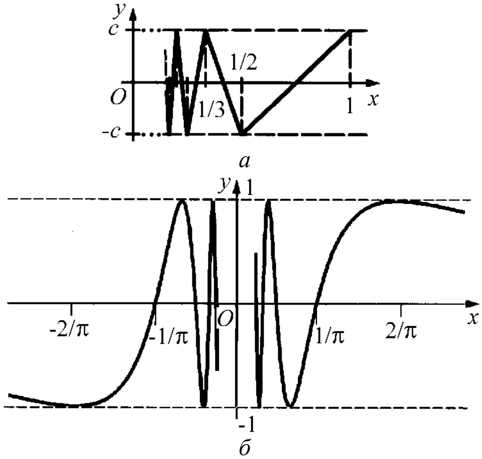
а



б

22 **Функції з нескінченною кількістю екстремумів на всій числовій осі.**

Але існують і функції, що мають нескінченно багато екстремумів в деякому околі значень x. Такою, зокрема, є відображена на рис. 23, *а* функція, яка означена і неперервна на відрізку $[0; 1]$ і яку складають відтинки прямих так, що її екстремуми $y_0 = \pm c$ відповідають точкам $x_n = 1/n$ ($n = 1; 2; \ldots$); причому парним n відповідають мінімуми, а непарним — максимуми. Наведений графік, однак, не визначає значення y в точці $x = 0$. Подібною є функція $y = \sin\frac{1}{x}$ (рис. 23, *б*), про яку вже згадувалося в 1. Вона як і $y = \sin x$ здійснює нескінченну множину коливань, але якщо нескінченна кількість коливань $y = \sin x$ розосереджена (до того ж рівномірно) у нескінченному проміжку значень x, то нескінченна кількість коливань $y = \sin\frac{1}{x}$ зосереджується в будь-якому околі $x = 0$ з $\left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ (через це відтворити достеменно графік цієї функції в околі початку системи координат не можливо).



23 **Функції з нескінченною кількістю екстремумів в околі однієї точки, які не набувають конкретного значення в цій точці.**

Поведінка функції $y = \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$ має в загальних рисах ті самі особливості, що й поведінка функції $y = \sin x$ при $x \to +\infty\ (-\infty)$. Спираючись на поняття числової послідовності, можна показати, що функція $y = \sin x$ при $x \to +\infty\ (-\infty)$ не прямує до якогось конкретного числа, тобто не має границі. Справді, послідовностям

$$\{x_n\} = \left\{\left(2n + \frac{h}{2}\right)\pi\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

що відрізняються різними значеннями $h\,(-1 \le h \le 1)$ але мають одну і ту саму границю $+\infty$, відповідають послідовності

$$\{y_n\} = \{y(x_n)\} = \left\{\sin\left(2n + \frac{h}{2}\right)\pi = \sin\frac{h}{2}\pi\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

які мають різні границі $\sin\dfrac{h}{2}\pi$ (за різних значень параметра $h\,(-1 \le h \le 1)$): $\lim\limits_{n\to\infty}\{y_n\} = \sin\dfrac{h}{2}\pi$. Натомість, послідовність

$$\{x_n\} = \left\{\left(n + \frac{h}{2}\right)\pi\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

з границею $+\infty$ породжує послідовність

$$\{y_n\} = \{y(x_n)\} = \left\{\sin\left(n + \frac{h}{2}\right)\pi = (-1)^n \sin\frac{h}{2}\pi\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

що взагалі не має границі за будь-якого $h\ (-1 \le h \le 1)$. Звідси, власне, й випливає, що ні функція $y = \sin x$ при $x \to +\infty\ (-\infty)$, ні функція $y = \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$ не мають границь.

Графіку з рис. 23, *а* можна поставити у відповідність графік з рис. 24, *а*. В даному випадку для функції, нескінченна кількість екстремумів якої зосереджується на скінченому проміжку $[0;1]$, спостерігається при $n \to \infty$ очевидна збіжність до нуля екстремальних її значень $y(x_n)$, а отже і збіжність до нуля функції в цілому при $x \to 0$. Подібно, графік на рис. 24, *б*, обмежений бісектрисами $y = x$ і $y = -x$ координатних кутів, відображає збіжність функції $y = x\sin\frac{1}{x}$ до нуля при $x \to 0$. Тобто

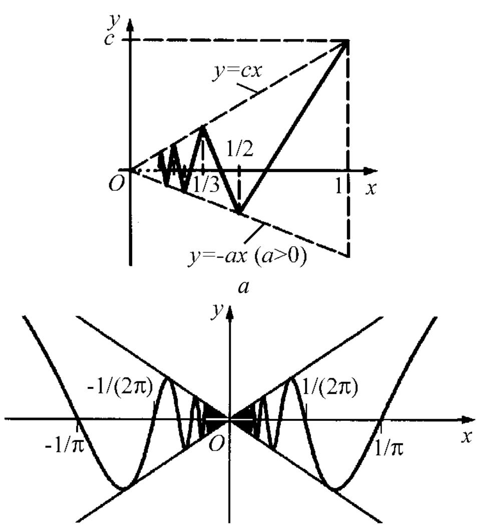
$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$

що є очевидним ще й тому, що

$$\left| x\sin\frac{1}{x} \right| \le |x|.$$

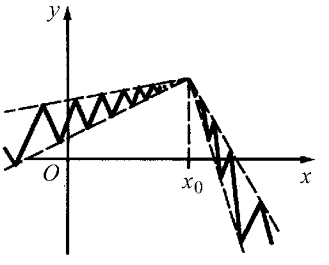
Похідні числа (1.18) для функції $y = x\sin\frac{1}{x}$ при $x = 0$ набувають значень

$$D_{+}y = -1, \quad D^{+}y = 1, \quad D_{-}y = -1, \quad D^{-}y = 1.$$



24 **Функції з нескінченною кількістю екстремумів в околі точки, які набувають нульового значення в цій точці.**

Нехай ідеться про неперервну всюди функцію $y(x)$. Якщо існує такий окіл $]x_0-\delta,\ x_0+\delta[$ точки x_0, у лівому півоколі $]x_0-\delta,\ x_0[$ якого $y(x)$ зростає, а у правому півоколі $]x_0,\ x_0+\delta[$ — спадає, то x_0 є точкою максимуму функції $y(x)$. Це твердження — достатня умова існування максимуму. В загальному випадку вона не може правити за необхідну, тобто не завжди вірним є обернене твердження: якщо всюди неперервна функція $y(x)$ має в точці x_0 максимум, то ліворуч від точки x_0 вона зростає, а праворуч від x_0 — спадає. Обернене твердження губить сенс, наприклад, у випадку, зображеному на рис. 25.



25 **Функція з нескінченною кількістю екстремумів в околі точки, яка має і загальний максимум в цій точці.**

Перебіг більшості функцій досить наочно характеризують критичні точки. Згадаємо, що кожна внутрішня **точка** x_0 області означення функції $y(x)$ називається **критичною** для цієї функції, якщо $y'(x_0)=0$ чи $y'(x_0)$ не існує. Якщо існує такий окіл $]x_0-\delta,\ x_0+\delta[$ точки x_0, у лівому півоколі $]x_0-\delta,\ x_0[$ якого $y'(x_0)>0$, тоді як у правому півоколі $]x_0,\ x_0+\delta[$ справджується протилежна нерівність — $y'(x_0)<0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y(x)$. Це є достатня умова існування максимуму, яка в загальному випадку, знову ж таки, не може правити за необхідну.

Припустимо, що функція $y(x)$ є диференційовною в деякому околі точки $x=x_0$ і в цій точці набуває максимального значення. Виявляється, що не завжди існує окіл точки $x=x_0$, в якому ліворуч від x_0 похідна цієї функції від'ємна, а праворуч додатна. Переконатися в цьому можна на багатьох прикладах. Зокрема, функція

$$y(x)=a-x^2\left(b+\sin\frac{1}{x}\right)\quad (\,y(0)=a\,) \tag{2.1}$$

диференційовна за будь-якого $x\neq 0$:

$$y'(x)=-2bx-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\,; \tag{2.2}$$

вона диференційовна і при $x = x_0 = 0$ (див. (1.17)):

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(h) - y(0)}{h - 0} = \lim_{h \to 0} \left[-h \left(b + \sin \frac{1}{h} \right) \right] = 0 \tag{2.3}$$

(остання рівність випливає з того, що $b - 1 \le b + \sin \frac{1}{x} \le b + 1$, а $\lim_{h \to 0} (-h) = 0$).

Нехай $b > 1$. Тоді, рис. 26, *а*, в точці $x = x_0 = 0$ функція (2.1) набуває максимального значення $y(x_0) = y(0) = y_0 = a$ (справді, оскільки $-1 \le \sin(1/x) \le 1$, то $b + \sin(1/x) > 0$ і отже $y(x) < y(0) = a$ при $x \ne 0$). Окантовують цю функцію криві

$$y^+ = a - (b-1)\, x^2 \text{ і } y^- = a - (b+1)\, x^2 .$$

Орієнтуючись на окантовувальні криві, можна вирізнити такі ситуації: якщо $b = 1$, рис. 26, *б*, то функція (2.1) набуває максимального значення $y_0 = a$ як у самій точці $x_0 = 0$, так і у нескінченній кількості точок з будь-якого околу точки $x_0 = 0$; якщо $-1 < b < 1$, рис. 26, *в*, то говорити визначено про максимум в точці $x_0 = 0$ без додаткової інформації не доводиться; якщо $b = -1$, рис. 26, *г*, то функція (2.1) набуває мінімального значення $y_0 = a$ як у самій точці $x_0 = 0$, так і у нескінченній кількості точок з будь-якого околу точки $x_0 = 0$; якщо $b < -1$, рис. 26, *д*, то в точці $x_0 = 0$ вона набуває мінімального значення $y_0 = a$.

Наведена **функція** належить до таких, **що в будь-якому околі** деякої **точки** x_0 **мають нескінченну кількість критичних точок**. Можна довести, що якщо похідна $y'(x)$ функції $y(x)$ неперервна в точці x_0 і в будь-якому околі $]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[$ цієї точки функція $y(x)$ має нескінченну кількість критичних точок, то і сама точка x_0 є критичною точкою $y(x)$. В інших випадках можливі різні ситуації.

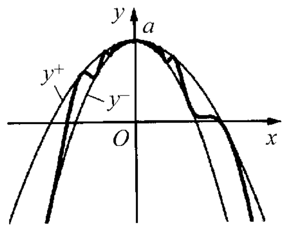
В будь-якому околі точки $x = x_0 = 0$ функція, рис. 27,

$$y(x) = x + x^2 \cos \frac{1}{x^2} \quad \bigl(y(0) = 0 \bigr), \tag{2.4}$$

така що

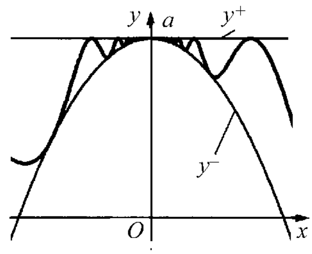
$$y'(x) = 1 + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2} + 2x \cos \frac{1}{x^2} \quad \bigl(y'(0) = 1 \bigr), \tag{2.5}$$

має нескінченну кількість критичних точок (в цьому можна переконатись, враховуючи, що в будь-якому околі точки $x_0 = 0$ функція $y'(x)$ нескінченну кількість разів змінює знак, а отже в будь-якому околі $x_0 = 0$ нескінченну кількість разів набуває нульового значення), але сама точка $x = x_0 = 0$ до критичних не належить (оскільки $y'(0) = 1$).



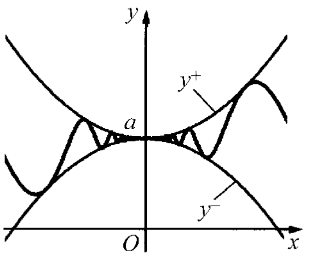
$b > 1$

а



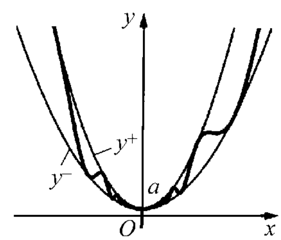
$b = 1$

б



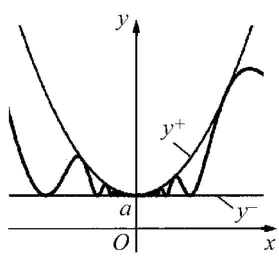
$-1 < b < 1$

в



$b < -1$

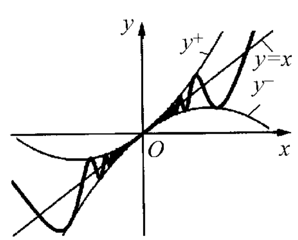
г



$b = -1$

д

26 **Перебіг функції з нескінченною кількістю екстремумів в околі окремої точки.**



27 **Функція з нескінченною кількістю екстремумів в околі точки, не належної до критичних.**

Подібні властивості має, зрозуміло, і функція

$$y(x) = x + x^2 \sin\frac{1}{x^2} \quad (y(0) = 0),$$

така що

$$y'(x) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \quad (y'(0) = 1).$$

Для звичайної функції $y(x)$ рівність $y'(0) = 1$ означала б, що в точці $x_0 = 0$ ця функція є монотонною (зростаючою). В даному ж випадку легко пересвідчитися якраз у протилежному.

Справді. Очевидно, що $\cos\frac{1}{x^2} = 1$ при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, $n \in \mathrm{N}$. При цих значеннях аргумента $\sin\frac{1}{x^2} = 0$, звідки $y'(\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}) = 1 \mp 2\sqrt{2\pi n}$. Візьмемо інтервал $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, і таке $n = n_0$, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n_0}} < 0, \quad n_0 > \frac{1}{2\pi\delta^2}.$$

Матимемо

$$y'(\frac{1}{\sqrt{2\pi n_0}}) = 1 - 2\sqrt{2\pi n_0} \le 1 - 2\sqrt{2\pi} < 0, \quad y'(-\frac{1}{\sqrt{2\pi n_0}}) = 1 + 2\sqrt{2\pi n_0} > 0.$$

Отже в $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, існують дві точки, в яких похідна $y'(x)$ набуває значень різних знаків, і отже функція $y(x)$ не є монотонною.

Існують диференційовні в R функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, такі що для всіх однакових x з деякого околу точки $x = 0$ похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ мають однаковий знак, однак для однієї з них точка $(x, y) = (0, 0)$ є точкою максимуму, а для іншої — точкою мінімуму (рис. 28). Такими є, зокрема, функції

$$y = f(x) = x^2\left(\sin\frac{1}{x} + 2\right) \quad (f(0) = 0) \text{ і}$$

$$y = g(x) = x^2\left(\sin\frac{1}{x} - 2\right) \quad (g(0) = 0); \tag{2.6}$$

для них відповідно

$$f'(x) = 4x + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad (f'(0) = 0) \text{ і}$$

$$g'(x) = -4x + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad (g'(0) = 0). \tag{2.7}$$

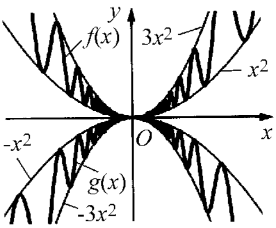
Цікавими з огляду на особливості прояву екстремальних властивостей можна вважати і такі функції, рис. 29:

$$y(x)=x\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)\quad (\,y(0)=0\,,\qquad y^{+}=3x\,,\quad y^{-}=x\,);$$

$$y(x)=x^{2}\left(1+\cos\frac{1}{x}\right)\quad (\,y(0)=0\,,\qquad y^{+}=2x^{2}\,,\quad y^{-}\equiv 0\,);$$

$$y(x)=|x|\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\quad (\,y(0)=0\,,\qquad y^{+}=3|\,x\,|,\quad y^{-}=|\,x\,|\,);$$

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x},\ \text{якщо}\ x\ge 0 & (y(0)=0,\ y^{+}=\sqrt{x},\ y^{-}=-\sqrt{x}),\\[2ex] \sqrt{-x},\ \text{якщо}\ x<0. & \end{cases}$$



28 **Функції, похідні яких мають однакові знаки.**

Звернемо увагу на таку обставину. З формального порівняння чисел

$$y'(x)\big|_{x=0}=\left(1+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^{2}}+2x\cos\frac{1}{x^{2}}\right)\bigg|_{x=0}=\left(1+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^{2}}\right)\bigg|_{x=0}$$

(див. (2.4), (2.5)) і

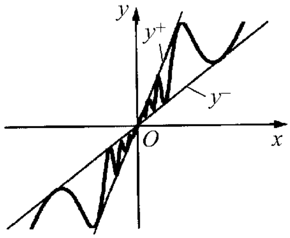
$$y'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{y(h)-y(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0}\left[1+h\cos\frac{1}{h^{2}}\right]=1$$

випливає, що

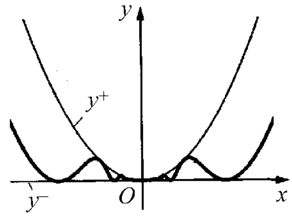
$$\left(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^{2}}\right)\bigg|_{x=0}=0\,.$$

З другого боку, оскільки $-1\le\sin(1/x^{2})\le 1$, то доводиться визнавати, що

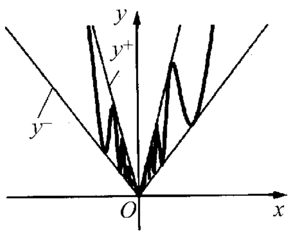
$$\left(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^{2}}\right)\bigg|_{x=-0}=\pm\infty\,,\quad \left(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^{2}}\right)\bigg|_{x=+0}=\mp\infty\,.$$



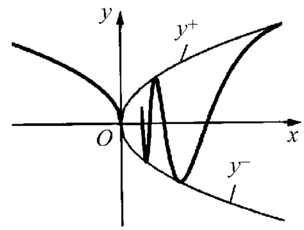
$$y(x) = x\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right)$$



$$y(x) = x^2\left(1 + \cos\frac{1}{x}\right)$$

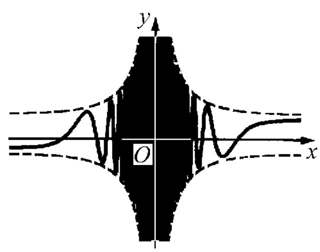


$$y(x) = |x|\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$$



$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \ge 0, \\ \sqrt{-x}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

29 **Окремі приклади функцій з нескінченною кількістю екстремумів в околі точки.**



30 **Окремий випадок перебігу похідної функції з нескінченною кількістю екстремумів в околі точки.**

В такому разі

$$y'(-0) = -y'(+0) = \pm\infty .$$

Про характер перебігу графіка функції $y' = y'(x)$ поза околом точки $x = 0$ до певної міри дає уявлення рис. 30.

Порівнюючи (2.2) при $x = 0$ з (2.3), формально маємо: $\cos(1/x)\big|_{x=0} = 0$. Подібно, оперуючи функцією

$$y(x) = a - x^2\left(b - \cos\frac{1}{x}\right) \quad (\, y(0) = 2 \,),$$

дійдемо висновку, що і $\sin(1/x)\big|_{x=0}=0$. Такий самий результат випливає також з (2.6)—(2.7). Напрошується таке означення функцій $s(x)=\sin(1/x)$ і $c(x)=\cos(1/x)$:

$$s(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 0, \text{ якщо } x=0;\end{cases} \quad \text{і} \quad c(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 0, \text{ якщо } x=0.\end{cases}$$

Але недоречним в такому доозначенні функцій $s(x)$ і $c(x)$ у точці $x_0=0$ є хоча б те, що власне у точці $x_0=0$ не дотримується умова $s^2(x)+c^2(x)=1$. Привабливішим в цьому сенсі є означення

$$s(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 0, \text{ якщо } x=0;\end{cases} \quad \text{і} \quad c(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 1, \text{ якщо } x=0,\end{cases}$$

або ж навіть означення, подане графічно на рис. 31 (графікам $y=s(x)$ і $y=c(x)$ належать точки відрізка $\{x=0; -1\le y\le 1\}$, але з дотриманням умови $s^2(x)+c^2(x)=1$).

Проте, можна "мудрувати" і зовсім інакше. Порівняємо $s(x)=\sin(1/x)$ з одиницею при $x\to 0$ таким чином:

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}+1=\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}+1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+x}{x}=1;$$

отже $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$? Далі, припускаючи, що похідна $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{d}{dx}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+x\right)$ — скінченна, застосуємо формально правило Лопіталя для розкриття невизначеності типу $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(x\sin\frac{1}{x}+x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)+1.$$

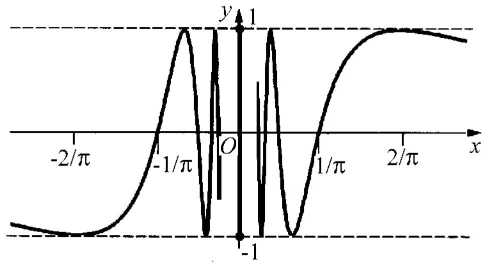
Порівнюючи отриманий результат з попереднім, матимемо

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)=0 \ (?).$$

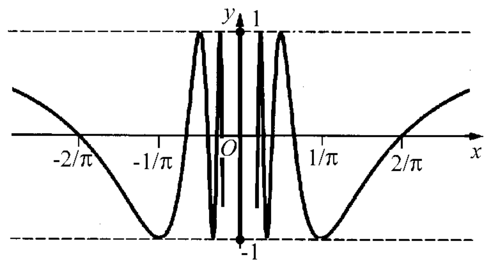
Отже можна казати, що величина

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

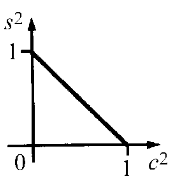
є малою вищого порядку, ніж мала величина $x\to 0$.



$y = s(x)$



$y = c(x)$



$s^2(x) + c^2(x) = 1$

31 **Приклад доозначення функції.**

Звернемося (разом з Е. Тітчмаршем) до функції

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2} \right) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \ .$$

В будь-якому інтервалі $(\varepsilon, 1)$ функція неперервна і

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} y(x)\, dx$$

існує. В кожному з інтервалів

$$\left\{ \left(2n + \frac{1}{3} \right) \pi \right\}^{-\frac{1}{2}} \le x \le \left\{ \left(2n - \frac{1}{3} \right) \pi \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

справджується нерівність

$$|y(x)| \ge \frac{2}{x}\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| - 2x \ge \frac{1}{x} - 2x\,,$$

звідки випливає, що

$$\int_0^1 \{\, |y(x)|\,\}_n\, dx > A\log n\,.$$

А це означає, що

$$\int_0^1 |y(x)|\, dx = \infty\,,$$

а відтак і те, що функція

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right)$$

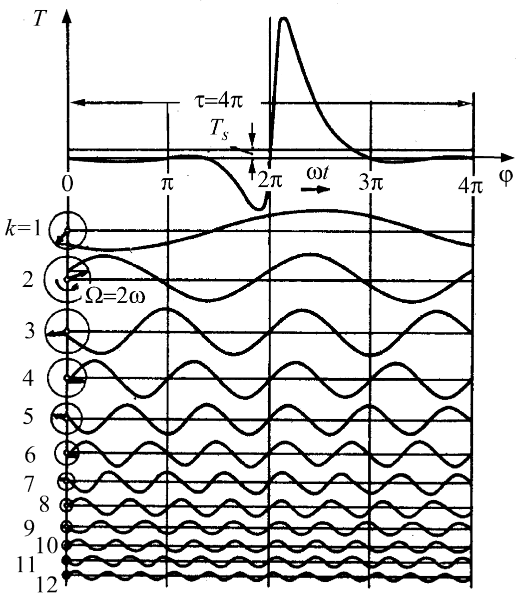
неінтегровна за Лебегом в $[0;1]$.

2.2 Функції-ряди (тригонометричні)

Суми тригонометричних функцій дають можливість моделювати найрізноманітніші збурення і реакції динамічних систем. Для прикладу на рис. 32 наведено графік періодичної зміни тангенціальної сили T від одного циліндра на колінчатому валі автомобільного двигуна, що працює у номінальному режимі: $\tau = 4\pi$ — період зміни сили; T_s — середнє значення T; ω — середня швидкість обертання вала; φ — кут повороту вала; t — час. Виявляється, що функцію $T = T(\varphi)$ з задовільним рівнем точності можна подати як суму восьми-дванадцяти гармонік $c_k \sin\Omega_k t$ (c_k — сталі, $\Omega_k = k\omega$, $k = 1;\ 2;\ \dots$) з відповідними зсувами фаз та амплітудами, сумірними з величиною T_s. Нескінченні ж тригонометричні суми називають рядами (Фур'є). Власне, за допомогою тригонометричних рядів можна аналітично відображати в першу чергу непересічні особливості функцій.

Нехай функція $y(x)$ дійсної змінної $x \in [-\pi, \pi]$ означена і неперервна всюди в $[-\pi, \pi]$, за винятком, хіба що, окремих точок, в яких вона терпить розриви першого роду (робить обмежені стрибки); до того ж, вона кусками монотонна (тобто $[-\pi, \pi]$ можна розбити на окремі частини, у кожній з яких $y(x)$ строго або зростає, або спадає). Умови, які накладаються тут на $y(x)$ називаються **умовами Діріхле**. Позначатимемо ліву і праву границю функції $y(x)$ в довільній точці x_0 через $y(x_0 - 0)$ і $y(x_0 + 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<0}} y(x) = y(x_0 - 0)\,, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>0}} y(x) = y(x_0 + 0)\,.$$



32 **Графік зміни тангенціальної сили на валу автомобільного двигуна та його складові гармоніки.**

Виявляється, що за умов Діріхле справедливою є рівність

$$\frac{y(x-0)+y(x+0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}(a_r\cos rx+b_r\sin rx)\,, \tag{2.8}$$

яку називають **зображенням функції** $y(x)$ **рядом Фур'є**; тут

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(x)\,dx\;;\;\; a_r=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(x)\cos rx\,dx\,,\quad b_r=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(x)\sin rx\,dx\;\;(r=1;\,2;\,\ldots).$$

З (2.8) випливає, що ряд Фур'є дає значення функції $y(x)$ в точках її неперервності та середнє арифметичне лівої та правої границь функції $y(x)$ в точках її розриву. На кінцях $x=-\pi$ і $x=\pi$ відрізка $[-\pi,\pi]$ сума ряду становить

$$\frac{y(-\pi+0)+y(\pi-0)}{2}\,.$$

Вдаючись до формул (див. (1.32))

$$\cos rx=\frac{e^{irx}+e^{-irx}}{2}\,,\quad \sin rx=\frac{e^{irx}-e^{-irx}}{2i}\,,$$

як вже зазначалось, можна подати у формі (комплексній)

$$\frac{y(x-0)+y(x+0)}{2}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}c_r e^{irx},$$

де

$$c_r=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(x)e^{-irx}\,dx\ \ (r=\overline{-\infty,+\infty})$$

($c_r=\dfrac{a_r-ib_r}{2}$ і $c_{-r}=\dfrac{a_r+ib_r}{2}$ — комплексно спряжені, $c_0=\dfrac{a_0}{2}$).

Якщо йдеться про проміжок $[-l,\ l]$, то (в розумінні (2.8))

$$y(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}(a_r\cos\frac{\pi}{l}rx+b_r\sin\frac{\pi}{l}rx), \tag{2.9}$$

де

$$a_r=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}y(x)\cos\frac{\pi}{l}rx\,dx\ \ (r=0;\ 1;\ 2;\ \ldots),\ b_r=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}y(x)\sin\frac{\pi}{l}rx\,dx\ \ (r=1;\ 2;\ \ldots).$$

Зображення (2.9) дає можливість аналітично записати досить привабливі неелементарні функції, які моделюють “тестувальні” збурення в різноманітних динамічних системах. Ряди, наприклад,

$$y(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right), \tag{2.10.1}$$

$$y(x)=\frac{4}{\pi}\left(\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-+\ldots\right), \tag{2.10.2}$$

$$y(x,\alpha)=\frac{4}{\pi}\left(\cos\alpha\sin x+\frac{\cos 3\alpha}{3}\sin 3x+\frac{\cos 5\alpha}{5}\sin 5x+\ldots\right), \tag{2.10.3}$$

$$y(x)=\frac{8}{\pi^2}\left(\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-+\ldots\right), \tag{2.10.4}$$

$$y(x)=\frac{8}{\pi^2}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right), \tag{2.10.5}$$

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{8}{\pi^2}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)\right], \tag{2.10.6}$$

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)\right], \tag{2.10.7}$$

$$y(x)=\frac{2}{\pi}\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-+\ldots\right), \tag{2.10.8}$$

$$y(x)=-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\right), \tag{2.10.9}$$

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\right)\right], \tag{2.10.10}$$

$$y(x,\alpha)=\frac{4}{\alpha\pi}\left(\sin\alpha\sin x+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\sin 3x+\frac{\sin 5\alpha}{5^2}\sin 5x+\ldots\right), \tag{2.10.11}$$

$$y(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-+\ldots\right), \tag{2.10.12}$$

$$y(x)=\frac{1}{\pi}\left[1+\frac{\pi}{2}\sin x-2\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)\right], \tag{2.10.13}$$

$$y(x)=\frac{2}{\pi}\left[1-2\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)\right], \tag{2.10.14}$$

$$y(x)=\frac{3}{\pi}\left[1-2\left(\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\frac{\cos 12x}{11\cdot 13}+\frac{\cos 18x}{17\cdot 19}+\ldots\right)\right]. \tag{2.10.15}$$

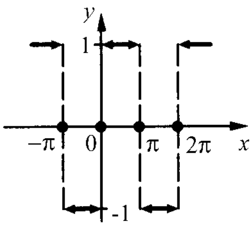
відтворюють функції, які напевне важко записати іншими аналітичними засобами так, щоб мати можливість виконувати над ними традиційні операції. Фрагменти графіків функцій (2.10) подано на рис. 33.

Лише в деяких випадках існує загалом повноцінна альтернатива відображенню складної функції тригонометричним рядом. Щоб наголосити на цьому, наведемо один приклад — функцію

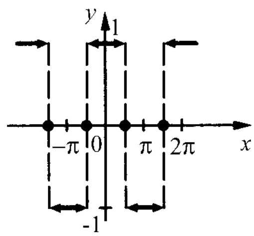
$$y=\arctan(\tan\ x),$$

графік якої відтворено на рис. 34. Ця функція за основними ознаками відповідає функції (2.10.8). Аналітично вона означена елементарними засобами, хоча властивості її є далеко неелементарними. До таких самих можна віднести також функції

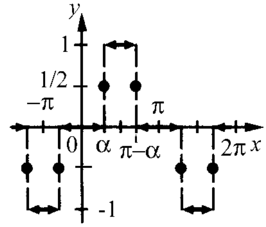
$$y=\arccos(\cos\ x),\ \ y=\arcsin(\sin x),\ \ y=\operatorname{arccot}(\cot x).$$



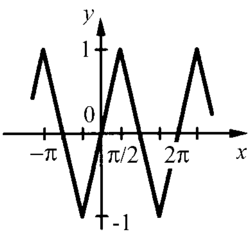
(2.10.1)



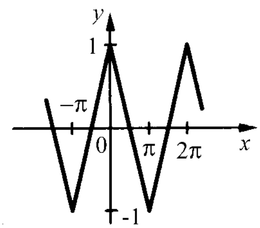
(2.10.2)



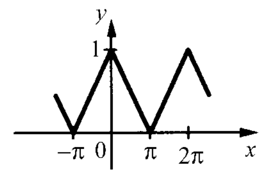
(2.10.3)



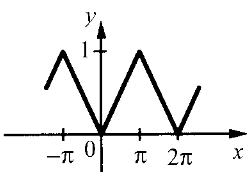
(2.10.4)



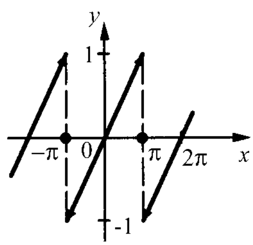
(2.10.5)



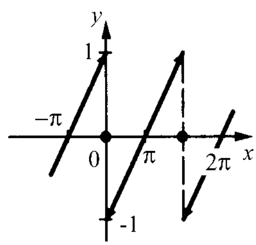
(2.10.6)



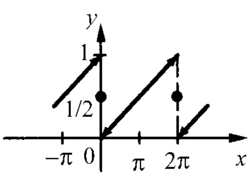
(2.10.7)



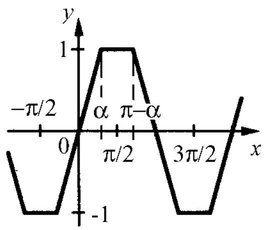
(2.10.8)



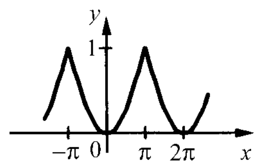
(2.10.9)



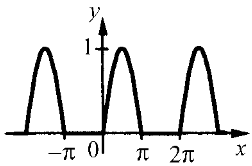
(2.10.10)



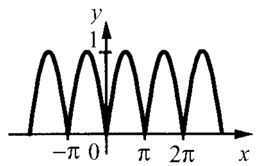
(2.10.11)



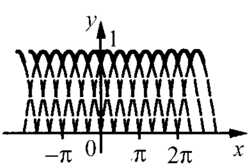
(2.10.12)



(2.10.13)

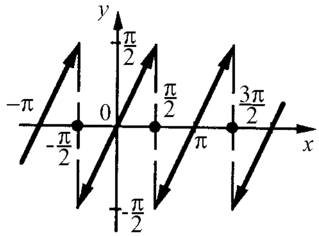


(2.10.14)

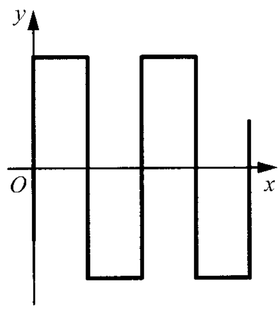


(2.10.15)

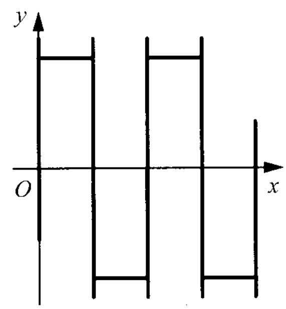
33 **Графіки функцій, відображуваних тригонометричними рядами.**



34 **Функція** $y = \mathbf{arctan(tan}x\mathbf{)}$.



а



б

35 **"Дефект" згортання ряду Фур'є (явище Гіббса).**

При розгортанні в тригонометричний ряд функції зі стрибками першого роду належить зважати на **явище Дж. Гіббса** (відкрите спочатку за допомогою обчислювальної машини, а вже потім обґрунтоване теоретично). Суть явища полягає в тому, що якщо тригонометричний ряд, який відображає функцію зі стрибком першого роду, таку, наприклад, як на рис. 35, *а*, спробувати згорнути, беручи до уваги усе більше і більше членів-доданків, то виявиться, що сума ряду в дійсності відтворюватиме функцію з подовженими ділянками розриву, таку, наприклад, як на рис. 35, *б*. При цьому довжини вертикальних відрізків відтворюваної функції будуть більшими приблизно на 18 % за відповідні стрибки первісної функції.

2.3 Узагальнені функції

Звернемося до функцій

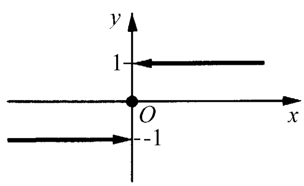
$$\theta_-(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \quad \theta_+ = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \ge 0; \end{cases} \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Вони слугують моделями процесу переходу деякого об'єкта з "нульового" стану в "одиничний". Якщо під x розуміти час, то можна стверджувати, що перехід об'єкта з "нульового" стану в "одиничний", і навпаки, здійснюється миттєво. Останню з функцій (2.11), (рис. 36, *а*), прийнято називати функцією вмикання або **функцією (одиничною) Гевісайда**. Для неї справджуються рівності

$$\theta(x)+\theta(-x)=1\,, \quad \theta(x)-\theta(-x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ \ \ 0, & x=0, \\ \ \ 1, & x>0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Функцію $\operatorname{sgn} x$, рис. 37, називають **знак-функцією** (від лат. signum — "знак").

36 **Одинична функція Гевісайда.**



37 **Знак-функція.**

Одиничну функцію Гевісайда більш загально подають у вигляді (рис. 36, *б*)

$$y=\theta(x-x_0)=\begin{cases} 1 & \text{при } x>x_0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } x=x_0, \\ 0 & \text{при } x<x_0. \end{cases}$$

Функціям (2.11) можна поставити у відповідність різні еквіваленти. Наприклад, неперервна функція

$$z_n=\frac{1}{1+e^{-nx}} \qquad (n=1,2,\ldots),$$

зі зростанням n все точніше відтворює власне функції (2.11):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-nx}}=\theta(x)\,. \tag{2.13}$$

Тут не йдеться лише про точку $x=0$. Якщо згадати поняття густини розподілу значень функції при рівномірному розподілі значень незалежної змінної (див. 1.3), то виявиться, що при $n\to\infty$ густина розподілу значень лівої частини (2.13) дорівнює нулю при $0<\lim\limits_{n\to\infty} z_n<1$, а значення $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=1$ — однаково ймовірні.

Можна навести низку неперервних функцій, що є еквівалентами одиничної функції Гевісайда:

$$\lim_{\kappa\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\,\kappa x\right)=\theta(x);\qquad(2.14)$$

$$\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{1}{2}(\operatorname{erf}(\kappa x)+1)=\theta(x);\qquad(2.15)$$

$$\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\kappa x}\frac{\sin s}{s}\,ds=\theta(x);\qquad(2.16)$$

$$\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{1}{2^{-e^{-\kappa x}}}=\theta(x),\qquad(2.17)$$

де через $\operatorname{erf}(\cdot)$ позначено функцію "інтеграл ймовірностей"; про характер перебігу функції

$$y=\operatorname{erf}\,x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}\,ds=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\,x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}$$

дає уявлення рис. 38. Зауважимо, що на відміну від (2.13) функція (2.14), наприклад, є такою, що похідна від неї за x при значенні функції $1/2$ стає нулем; а це означає, що значення $1/2$ функції має густину розподілу $p=\infty$. **Функції-границі**, подібні до (2.13)—(2.17), пізніше розглядатимуться окремо.

Функція Гевісайда $\theta=\theta(x)$ є однорідною функцією нульового степеня, оскільки

$$\theta(rx)=r^0\theta(x)=\theta(x).$$

Поряд (2.12) вирізнимо також співвідношення

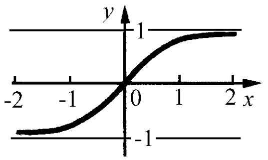
$$\theta(e^x)=1,\quad \theta[(x-\alpha)(x-\beta)]=\theta(x-\max(\alpha,\,\beta))+\theta(\min(\alpha,\,\beta)-x),$$

$$\frac{d}{dx}(\theta(x)\sin x)=\theta(x)\cos x,\quad 2\theta(x)-1=\frac{d}{dx}|\,x|=\operatorname{sgn}x,$$

$$\theta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega}\,d\omega+\frac{1}{2}.$$

Узагальненою похідною функції Гевісайда є так звана **дельта-функція (**δ **-функція чи імпульсна функція Дірака)**:

$$\frac{d}{dx}\theta(x)=\theta'(x)=\delta(x).\qquad(2.18)$$



38 **Функція “інтеграл ймовірностей”.**

Її можна означити так:

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(s)\delta(s-x)ds = \begin{Bmatrix} 0, & \text{якщо } x<\alpha \text{ або } x>\beta, \\ \frac{1}{2}p(x+0), & \text{якщо } x=\alpha, \\ \frac{1}{2}p(x-0), & \text{якщо } x=\beta, \\ \frac{1}{2}(p(x-0)+p(x+0)), & \text{якщо } \alpha<x<\beta \end{Bmatrix} =$$

$$=\frac{1}{2}\left[p(x-0)(\theta(x-\alpha-0)-\theta(x-\beta-0))+p(x+0)(\theta(x-\alpha+0)-\theta(x-\beta+0))\right],$$

$$\alpha<\beta, \qquad (2.19)$$

де $p(x)$ — довільна функція обмеженої варіації в околі точки x. δ-Функція є непарною:

$$\delta(x-\gamma)=-\delta(\gamma-x).$$

Звернемо увагу на те, що

$$\frac{\theta(x-\gamma-0)+\theta(x-\gamma+0)}{2}=\theta(x-\gamma).$$

Отже, якщо $p(x)$ — неперервна в точці x, то (2.19) набуває вигляду

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(s)\delta(s-x)ds = \begin{Bmatrix} 0, & \text{якщо } x<\alpha \text{ або } x>\beta, \\ \frac{1}{2}p(x), & \text{якщо } x=\alpha \text{ або } x=\beta, \\ p(x), & \text{якщо } \alpha<x<\beta \end{Bmatrix} =$$

$$=p(x)(\theta(x-\alpha)-\theta(x-\beta)), \quad \alpha<\beta.$$

Зокрема, можна з’ясувати такі формальні співвідношення:

$$\frac{d}{dx}(\theta(x)\cos x)=\delta(x)-\theta(x)\sin x;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sgn} x = 2\delta(x);$$

$$\delta(x+\alpha)+\delta(x-\alpha)=2\alpha\ \delta\left(x^2-\alpha^2\right),\quad \alpha>0\,;$$

$$p(x)\delta(x-\alpha)=\frac{1}{2}\left[p(\alpha-0)+p(\alpha+0)\right]\delta(x-\alpha)\,;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha-x)\,\delta(x-\beta)dx=\delta(\alpha-\beta)\,.$$

Імпульсну функцію Дірака можна апроксимувати звичайними функціями

$$\delta(x,\kappa)=\frac{\kappa}{\pi(\kappa^2x^2+1)}\ \text{ за умови }\ \kappa\to\infty\,, \tag{2.20}$$

$$\delta(x,\kappa)=\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}e^{-\kappa^2x^2}\ \text{ за умови }\ \kappa\to\infty\,, \tag{2.21}$$

$$\delta(x,\kappa)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\kappa x}{x}\ \text{ за умови }\ \kappa\to\infty\,, \tag{2.22}$$

маючи на увазі, що $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\delta(x,\kappa)=0\ (x\neq 0)$ і

$$\lim_{\kappa\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(s)\delta(x-s,\kappa)ds=\frac{1}{2}\left(p(x-0)+p(x+0)\right) \tag{2.23}$$

за умови існування $p(x-0)$, $p(x+0)$. Зауважимо, що

$$\lim_{\kappa\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(s,\kappa)ds=1\,;$$

Інтегрування функцій (2.20)—(2.22) веде до відповідних апроксимацій (2.14)—(2.16) сходинчатих функцій.

Відомо також, що і функції

$$\delta(x,\kappa)=\frac{\kappa}{\pi(x^2+\kappa^2)}\,,\ \delta(x,\kappa)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa}}\,,\ \delta(x,\kappa)=\frac{\kappa}{\pi x}\sin\frac{x}{\kappa}\,,\ \delta(x,\kappa)=\frac{\kappa}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{\kappa}$$

збігаються до $\delta(x)$ за умови $\kappa\to+0$.

Підкреслимо також, що ряд

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}a_r\delta(x-r)$$

збігається за будь-яких a_r .

Інтегральному перетворенню (2.23) можна поставити у відповідність **інтегральну формулу Діріхле**

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p(s)\frac{\sin\omega(x-s)}{x-s}ds=\frac{1}{2}\big(p(x-0)+p(x+0)\big)\ (-\infty<x<\infty),$$

де $p(x)$ — довільна функція обмеженої варіації в околі точки x.

Подібно до першої похідної функції Гевісайда, можна ввести й вищі похідні:

$$\frac{d^2}{dx^2}\theta(x)=\theta''(x)=\frac{d}{dx}\delta(x)=\delta'(x),\ldots,$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\theta(x)=\theta^{(m)}(x)=\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\delta(x)=\delta^{(m-1)}(x).$$

Означити похідну порядку m від δ-функції (тобто $\boldsymbol{\delta^{(m)}}$**-функцію**) можна так:

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(s)\delta^{(m)}(s-x)ds=\left\{\begin{array}{ll}0, & \text{якщо } x<\alpha \text{ або } x>\beta,\\ \frac{1}{2}(-1)^m p^{(m)}(x+0), & \text{якщо } x=\alpha,\\ \frac{1}{2}(-1)^m p^{(m)}(x-0), & \text{якщо } x=\beta,\\ \frac{1}{2}(-1)^m\Big(p^{(m)}(x-0)+p^{(m)}(x+0)\Big), & \text{якщо } \alpha<x<\beta\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{(-1)^m}{2}\Big[p^{(m)}(x-0)\big(\theta(x-\alpha-0)-\theta(x-\beta-0)\big)+$$

$$+p^{(m)}(x+0)\big(\theta(x-\alpha+0)-\theta(x-\beta+0)\big)\Big],\ \alpha<\beta, \tag{2.24}$$

де $p(x)$ — довільна функція, для якої існують $p^{(m)}(x-0)$ та $p^{(m)}(x+0)$.

Послідовні похідні функції (2.20) можуть слугувати апроксимувальними функціями для похідних δ', …, $\delta^{(m)}$ від δ-функції:

$$\delta^{(m)}(x,\kappa)=\frac{(-1)^m m!}{\pi}\frac{\sin\left((m+1)\arctan\frac{\kappa}{x}\right)}{(x^2+\kappa^2)^{(m+1)/2}}\ \text{за умови } \kappa\to\infty\ \ (m=0,1,2,\ldots). \tag{2.25}$$

Зокрема,

$$\delta'(x,\kappa)=-\frac{2}{\pi}\frac{\kappa^3 x}{(\kappa^2x^2+1)^2}\ \text{за умови } \kappa\to\infty. \tag{2.26}$$

Властивості δ -функції та її похідних зумовлюють, зокрема, такі співвідношення:

$$\delta'(-x) = -\delta'(x);$$

$$x\,\delta'(x) = -\delta(x); \quad x^2\delta'(x) = 0;$$

$$x^n\,\delta^{(n-r)}(x) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n, \quad n \in \mathrm{N}_0;$$

$$x^n\,\delta^{(n+r)}(x) = (-1)^n \frac{(n+r)!}{r!}\delta^{(r)}(x), \quad r, n \in \mathrm{N},$$

звідки, зокрема

$$x^n\,\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,\delta(x), \quad n \in \mathrm{N};$$

$$p(x)\delta'(x) = p(0)\delta'(x) - p'(0)\delta(x), \quad p(x) \in \mathrm{C}^0;$$

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(s)\,ds = \theta(x), \quad \int_{-\infty}^{x}\delta'(s)\,ds = \delta(x), \quad \ldots, \quad \int_{-\infty}^{x}\delta^{(m)}(s)\,ds = \delta^{(m-1)}(x),$$

де N_0 — множина натуральних чисел, N — множина цілих невід'ємних чисел.

Нехай йдеться про вираз $p(x)\,\delta(x)$, в якому $p(x)$ — неперервна функція така, що $p(0) = 0$. Обчислимо його значення, покладаючи $-\infty < p'(0) < \infty$:

$$p(x)\,\delta(x) = p(0)\,\delta(x) = \lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}\cdot x\delta(x) = p'(0)\cdot(x\delta(x)) = 0.$$

Остання рівність дуже важлива і часто використовується. Вона, зрозуміло, охоплює рівність $x^{\nu}\,\delta(x) = 0$ як окремий випадок.

Спираючись, наприклад, на формулу (2.25), дослідимо вираз

$$p(x)\,\delta^{(m)}(x,\kappa) = p(x)\frac{(-1)^m m!}{\pi}\,\frac{\sin((m+1)\arctan \kappa/x)}{(x^2+\kappa^2)^{(m+1)/2}}.$$

При довільному x

$$\left.\frac{\sin((m+1)\arctan \kappa/x)}{(x^2+\kappa^2)^{(m+1)/2}}\right|_{\kappa\to\infty} = 0,$$

і умова $p(x)\,\delta^{(m)}(x) = 0$ гарантовано дотримується, якщо $|\,p(x)\,| < \infty$. Зокрема, якщо $|\,p(0)\,| < \infty$, то точкова умова $\left(p(x)\,\delta^{(m)}(x)\right)_{x=0} = 0$ справджується вже через те, що $\left.\delta^{(m)}(x)\right|_{x=0} = 0$. Але це не означає, що рівність $p(x)\,\delta^{(m)}(x) = 0$ повинна дотримуватися тотожно в будь-якому околі точки $x = 0$.

Розглянемо вираз

$$\lim_{x\to 0}\left(p(x)\,\delta^{(m)}(x,\kappa)\right)=\frac{(-1)^m m!}{\pi}\lim_{x\to 0}\left(\frac{p(x)}{x^{m+1}}\,\frac{\sin((m+1)\arctan s)}{(1+s^2)^{(m+1)/2}}\right),$$

де $s=\dfrac{\kappa}{x}$ — дійсна величина. При $|x|\neq\infty$ гарантовано $s=\pm\infty$, звідки

$$S=\frac{\sin((m+1)\arctan s)}{(1+s^2)^{(m+1)/2}}=0,$$

а отже всюди, де $\left|\dfrac{p(x)}{x^{m+1}}\right|<\infty$, справджується рівність $p(x)\,\delta^{(m)}(x,\kappa)=0$; зрозуміло, що $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{p(x)}{x^{m+1}}\right|<\infty$ тільки тоді, коли $\lim\limits_{x\to 0}p(x)=\lim\limits_{x\to 0}p'(x)=\ldots=\lim\limits_{x\to 0}p^{(m)}(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to 0}p^{(m+1)}(x)=a\neq\pm\infty$.

На підставі викладеного раніше

$$p(x)\,\delta^{(m)}(x)=\frac{p(x)}{x^m}\left(x^m\,\delta^{(m)}(x)\right)=(-1)^m m!\,\frac{p(x)}{x^m}\,\delta(x)=(-1)^m m!\left(\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{x^m}\right)\delta(x).$$

Звідси випливає, що якщо

$$\lim_{x\to 0}p(x)=\lim_{x\to 0}p'(x)=\ldots=\lim_{x\to 0}p^{(m)}(x)=0,$$

то $p(x)\,\delta^{(m)}(x)=0$.

Як зазначалося раніше, рівність $x^{\nu}\,\delta^{(m)}(x)=0$, $m=1,2,\ldots$, справджується за будь-якого цілого $\nu=n>m$. Але, оскільки

$$x^{\nu}\,\delta^{(m)}(x)=(-1)^m m!\left(\lim_{x\to 0}x^{\nu-m}\right)\delta(x),$$

то можна бути переконаним, що вона справджується і за довільного дійсного $\nu>m$.

Дельта-функції та її похідним відповідають інтеграли Фур'є

$$\delta(x-\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\alpha}e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(x-\alpha)}\,d\omega,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \delta^{(m)}(x-\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^m\,e^{-i\omega\alpha}e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^m\,e^{i\omega(x-\alpha)}\,d\omega;$$

$$\frac{1}{2}(\delta(x-\alpha)+\delta(x+\alpha))=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega\alpha\,\cos\omega x\,d\omega.$$

Формула (2.19) веде до співвідношення (перетворення Лапласа)

$$\mathscr{L}[\delta(x-\alpha)]=\int_0^\infty \delta(x-\alpha)e^{-sx}dx=e^{-\alpha s}=s\,\mathscr{L}[\theta(x-\alpha)],$$

звідки випливає рівність (див. (2.18))

$$\delta(x)=\frac{d}{dx}\theta(x)$$

як символьна. Наголосимо ще й на таких зображеннях Лапласа:

$$\mathscr{L}[\delta(x)]=\frac{1}{2},\ \mathscr{L}[2\delta(x)\theta(x)]=1,$$

$$\mathscr{L}\left[2(\delta(x)\,\theta(x))'\right]=s,\quad \mathscr{L}\left[2(\delta(x)\theta(x))''\right]=s^2,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \mathscr{L}[\delta(x-\alpha)]=\mathscr{L}[2\delta(x-\alpha)\theta(x-\alpha)]=e^{-\alpha x}\ (\alpha>0),$$

$$\mathscr{L}\left[\delta^{(m)}(x-\alpha)\right]=\mathscr{L}\left[2\frac{d^m}{dx^m}(\delta(x-\alpha)\theta(x-\alpha))\right]=s^m e^{-\alpha x}\ (\alpha>0,\ m=1,2,\ldots),$$

і якщо $p(x)$ неперервна при $x=\alpha\geq 0$, то

$$\mathscr{L}[2p(x)(\delta(x-\alpha)\theta(x-\alpha))]=e^{-\alpha s}p(\alpha).$$

Для кожної з функцій (2.20)—(2.22) $\mathscr{L}[\delta(x-\alpha,\kappa)]$ ($\alpha>0$) збігається до величини $e^{-\alpha s}=\mathscr{L}[\delta(x-\alpha)]$ при $\kappa\to\infty$.

Означені відповідно до (2.19) і (2.24) функції разом з функцією Гевісайда складають окремий клас серед так званих узагальнених функцій. Подібно до позначень похідних можна запровадити також і позначення інтегралів:

$$\delta^{(-1)}(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(s)\,ds=\theta(x),$$

$$\delta^{(-2)}(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta^{(-1)}(s)\,ds=\int_{-\infty}^{x}\theta(s)\,ds=x\theta(x),$$

$$\delta^{(-3)}(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta^{(-2)}(s)\,ds=\int_{-\infty}^{x}s\,\theta(s)\,ds=\frac{x^2}{2}\theta(x),\ \ldots,\ \delta^{(-n)}(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\theta(x).$$

Множину узагальнених функцій, пов’язаних операціями диференціювання та інтегрування, відображає табл. 1.

1 **Множина узагальнених функцій, пов'язаних операціями диференціювання і інтегрування**

	Формула		Назва
	$\delta^{(n)}(x)=(-1)^n n!\dfrac{\delta(x)}{x^n}$		Імпульсна функція n -го порядку
	$\dots$		$\dots$
	$\delta^{(3)}(x)=\delta'''(x)=-6\dfrac{\delta(x)}{x^3}$		Імпульсна функція третього порядку
	$\delta^{(2)}(x)=\delta''(x)=2\dfrac{\delta(x)}{x^2}$		Імпульсна функція другого порядку
	$\delta^{(1)}(x)=\delta'(x)=-\dfrac{\delta(x)}{x}$		Імпульсна функція першого порядку
↑ Диференціювання ↑	$\delta^{(0)}(x)=\delta(x)$	↓ Інтегрування ↓	δ -Функція
	$\delta^{(-1)}(x)=\theta(x)$		Одинична функція Гевісайда
	$\delta^{(-2)}(x)=x\theta(x)$		Лінійно-одинична функція
	$\delta^{(-3)}(x)=\dfrac{x^2}{2}\theta(x)$		Параболічно-одинична функція
	$\dots$		$\dots$
	$\delta^{(-n)}(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\theta(x)$		($n-1$)-параболічно-одинична функція

В прикладних задачах особливо цінуються співвідношення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(s)\delta(s-\alpha)\,ds = p(\alpha) \quad (\,p(s)\in \mathrm{C}^0\,),$$

$$\int_a^b p(s)\delta(s-\alpha)\,ds = p(\alpha)[\theta(\alpha-a)-\theta(\alpha-b)] \quad (\,p(s)\in \mathrm{C}^0\,),$$

$$\int_a^b p(s)\theta(s-\alpha)\,ds = \theta(a-\alpha)\int_a^{\alpha} p(s)\,ds + \theta(b-\alpha)\int_{\alpha}^{b} p(s)\,ds \quad (\,p(s)\in \mathrm{C}^0\,),$$

$$\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} s\,\delta'(s-\alpha)\,ds = -1, \quad \beta>0\,,$$

$$\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} p(s)\delta'(s-\alpha)ds = -p'(\alpha)\;, \quad (\beta>0, \quad p(s)\in \mathrm{C}^0\,).$$

До важливих можна віднести і формули

$$|\,x\,|' = \operatorname{sgn} x\,; \quad |\,x\,|'' = \left(\operatorname{sgn} x\right)' = 2\,\delta(x).$$

Розглянемо функцію (узагальнену)

$$z(x) = f(x)\theta(x),$$

де $f(x)$ — належно диференційовна функція. Якщо $f(0)=0$, то $z(x)$ є неперервною. Перша похідна цієї функції визначається за формулою

$$z'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)\theta(x)] = f'(x)\theta(x) + f(x)\theta'(x) = f'(x)\theta(x) + f(0)\delta(x)\,. \quad (2.27)$$

Визначимо другу похідну. З одного боку,

$$z''(x) = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)\theta(x)] = \frac{d}{dx}[f'(x)\theta(x) + f(x)\theta'(x)] =$$

$$= f''(x)\theta(x) + 2f'(x)\delta(x) + f(x)\delta'(x) = f''(x)\theta(x) + 2f'(0)\delta(x) + f(x)\delta'(x)\,,$$

а з іншого (див. (2.27)),

$$z''(x) = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)\theta(x)] = f''(x)\theta(x) + f'(0)\delta(x) + f(0)\delta'(x)\,. \quad (2.28)$$

Звідси випливає, що

$$f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x)\,. \quad (2.29)$$

Ще одне диференціювання дає: з одного боку,

$$z'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)\theta(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[f''(x)\theta(x) + 2f'(x)\delta(x) + f(x)\delta'(x)] =$$

$$= f'''(x)\theta(x) + 3f''(x)\delta(x) + 3f'(x)\delta'(x) + f(x)\delta''(x) =$$

$$= f'''(x)\theta(x) + 3f'(0)\delta'(x) + f(x)\delta''(x)$$

(тут на підставі (2.29) враховано, що $f'(x)\,\delta'(x) = f'(0)\,\delta'(x) - f''(0)\,\delta(x)$), а з іншого (див. (2.28)),

$$z'''(x)=\frac{d^3}{dx^3}[f(x)\theta(x)]=f'''(x)\theta(x)+f''(0)\delta(x)+f'(0)\delta'(x)+f(0)\delta''(x)\,.$$

Звідси випливає, що

$$f(x)\delta''(x)=f(0)\delta''(x)-2f'(0)\delta'(x)+f''(0)\delta(x)\,.$$

Подібно можна з'ясувати, що в загальному випадку

$$z^{\{n\}}(x)=\frac{d^n}{dx^n}[f(x)\theta(x)]=\sum_{i=0}^{n}C_n^i f^{(n-i)}(x)\theta^{(i)}(x)=$$

$$=f^{(n)}(x)\theta(x)+f^{(n-1)}(0)\delta(x)+f^{(n-2)}(0)\delta'(x)+\ldots+f(0)\delta^{(n-1)}(x)\,,$$

а відтак, що

$$z^{(n)}(x,\alpha)=\frac{\partial^n}{\partial x^n}[f(x)\theta(x-\alpha)]=\sum_{i=0}^{n}C_n^i f^{(n-i)}(x)\theta^{(i)}(x-\alpha)=$$

$$=f^{(n)}(x)\theta(x-\alpha)+f^{(n-1)}(\alpha)\delta(x-\alpha)+f^{(n-2)}(\alpha)\delta'(x-\alpha)+\ldots$$

$$\ldots+f(\alpha)\delta^{(n-1)}(x-\alpha)\,, \tag{2.30}$$

$$f(x)\delta^{(m)}(x-\alpha)=C_m^0\, f(\alpha)\delta^{(m)}(x-\alpha)-C_m^1\, f'(\alpha)\delta^{(m-1)}(x-\alpha)+$$

$$+C_m^2\, f''(\alpha)\delta^{(m-2)}(x-\alpha)-\ldots+(-1)^m C_m^m f^{(m)}(\alpha)\delta(x-\alpha)\,,$$

$$f(x)\in \mathrm{C}^m,\quad x,\alpha\in \mathrm{R}^n\,. \tag{2.31}$$

Формулу (2.31) можна отримати ще й так.

Розглянемо функцію

$$z=f(x)\delta(x-\alpha),\ \ f(x)\in \mathrm{C}^m,\quad x,\alpha\in \mathrm{R}^n\,.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{\partial^m z}{\partial\alpha^m}=(-1)^m f(x)\delta^{(m)}(x-\alpha)\,. \tag{2.32}$$

Але, з іншого боку, $f(x)\delta(x-\alpha)=f(\alpha)\delta(x-\alpha)$, а тому

$$\frac{\partial^m z}{\partial\alpha^m}=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i f^{(m-i)}(\alpha)\delta^{(i)}(x-\alpha)\,. \tag{2.33}$$

Порівнюючи (2.32), (2.33), отримаємо (2.31):

$$f(x)\delta^{(m)}(x-\alpha)=(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}(f(\alpha)\delta(x-\alpha))=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i f^{(i)}(\alpha)\delta^{(m-i)}(x-\alpha),\quad f(x)\in C^m,\ x,\alpha\in R^n, \tag{2.34}$$

Звідси, зокрема, випливають формули

$$\delta(x)+x\delta'(x)=0,$$

$$2\delta'(x)+x\delta''(x)=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$n\delta^{(n-1)}(x)+x\delta^{(n)}(x)=0\quad(n\in N_0);$$

$$x^n\delta^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,\delta(x)\quad(n\in N_0),$$

$$x^n\delta^{(n+1)}(x)=(-1)^n(n+1)!\,\delta'(x)\quad(n\in N_0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x^n\delta^{(n+r)}(x)=(-1)^n\frac{(n+r)!}{r!}\delta^{(r)}(x)\quad(r,n\in N_0).$$

Позначаючи $n+r=m$, надамо останній формулі вигляду

$$\delta^{(r)}(x)=(-1)^{m-r}\frac{r!}{m!}x^{m-r}\ \delta^{(m)}(x).$$

На підставі отриманого результату вираз (2.31) набирає вигляду

$$f(x)\delta^{(m)}(x-\alpha)=\left(f(\alpha)+f'(\alpha)x+\frac{1}{2}f''(\alpha)x^2+\ldots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(\alpha)x^m\right)\delta^{(m)}(x-\alpha)=$$

$$=\delta^{(m)}(x-\alpha)\sum_{i=0}^{m}\frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}x^i.$$

Отже добуток довільної функції $f(x)$ на узагальнену функцію $\delta^{(m)}(x-\alpha)$ збігається з добутком многочлена

$$P_m[x]=\sum_{i=0}^{m}\frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}x^i$$

m-го порядку на ту саму функцію $\delta^{(m)}(x-\alpha)$.

Зокрема,

$$\sin x\,\delta^{(m)}(x)=\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)!}x^{2r-1}-\ldots\right)_{2r-1\le m}\delta^{(m)}(x)\,.$$

Якщо ж взяти до уваги співвідношення $x^n\delta^{(n+k)}(x)=(-1)^n\frac{(n+k)!}{k!}\delta^{(k)}(x)$, то останній вираз можна подати у вигляді

$$\sin x\,\delta^{(m)}(x)=-C_m^1\delta^{(m-1)}(x)+C_m^3\delta^{(m-3)}(x)-\ldots+(-1)^r C_m^{2r-1}\delta^{(m-2r+1)}(x)-\ldots,$$

що безпосередньо підтверджує формула (2.31).

Коли $f(x)$ має скінченну чи нескінченну кількість простих коренів x_j, то

$$\delta(f(x))=\sum_j\frac{1}{\left|f'(x_j)\right|}\delta\left(x-x_j\right),\quad x,x_j\in\mathrm{R}\,.$$

Наприклад,

$$\delta(\sin x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-\pi n)\,,$$

$$\delta(\cos x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-(2n+1)\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\delta(\alpha x)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(x)\,;$$

$$\delta(\alpha x+\beta)=\frac{1}{|\alpha|}\delta\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right);$$

$$\delta(p(x)(x-\alpha))=\frac{1}{|\,p(\alpha)|}\delta(x-\alpha)=\frac{1}{|\,p(x)|}\delta(x-\alpha)\,,\ \ p(x)\neq 0\,;$$

$$\delta((x-\alpha)(x-\beta))=\frac{1}{|\beta-\alpha|}\left[\delta(x-\alpha)+\delta(x-\beta)\right],\quad \alpha\neq\beta\,;$$

$$\delta\left(x^n-1\right)=\frac{1}{n}\delta(x-1)=\delta(n(x-1))<\delta(x-1).$$

У різному поєднанні окреслені тут узагальнені функції правлять за розв’язки різноманітних рівнянь. Наприклад, рівняння (недиференціальне)

$$(x-\gamma)^n\,y(x)=0$$

задовольняє узагальнена функція

$$y(x)=c_0\,\delta(x-\gamma)+c_1\,\delta'(x-\gamma)+c_2\,\delta''(x-\gamma)+\ldots+c_{n-1}\,\delta^{(n-1)}(x-\gamma)$$

(c_0, c_1, c_2, …, c_{n-1} — сталі). Розв'язком диференціального рівняння, наприклад,

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=\delta(x)$$

є узагальнена функція

$$y(x)=\theta(x)+c_0+c_1\delta(x)+c_2\frac{1}{x}\,.$$

Привертають до себе увагу і такі операції множення:

$$\theta(x-\gamma)\,\delta(x-\gamma)=\frac{1}{2}\delta(x-\gamma)\,,$$

$$\theta^2(x-\gamma)\,\delta(x-\gamma)=\frac{1}{3}\delta(x-\gamma)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta^n(x-\gamma)\,\delta(x-\gamma)=\frac{1}{n+1}\delta(x-\gamma)\,.$$

Нехай функція $f(x)$ має в точці $x=\gamma$ розрив неперервності першого роду, до того ж в околі точки $x=\gamma$ можна вважати, що $f(x)=f(\gamma-0)+\Delta f(\gamma)\theta(x-\gamma)$. З першої серед щойно наведених рівностей випливає, що

$$f(x)\,\delta(x-\gamma)=\left(f(\gamma-0)+\frac{1}{2}\Delta f(\gamma)\right)\delta(x-\gamma)\,.$$

Очевидно, що при $x_0=\gamma\pm 0$

$$\theta(x-x_0)\,\delta(x-\gamma)=\begin{cases}\theta(x-\gamma) & \text{при } x_0=\gamma-0,\\ 0 & \text{при } x_0=\gamma+0.\end{cases}$$

Неперєсічними є такі приклади перетворення функцій (за В. А. Лазаряном і С. Й. Конашенком):

$$\frac{\delta(x-x_i)}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\theta(x-x_j)\right)^2}=\frac{\delta(x-x_i)}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j\right)\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i}\alpha_j\right)}\,,$$

$$\frac{\delta'(x-x_i)}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\theta(x-x_j)\right)^2}=\frac{\delta'(x-x_i)}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j\right)\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i}\alpha_j\right)}+\frac{2\alpha_i\delta^2(x-x_i)}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\theta(x-x_j)\right)^3}\,;$$

цікаво, що в останньому виразі поряд з $\delta'(x-x_i)$ фігурує ще й квадрат $\delta(x-x_i)$. В окремому випадку ($n=1$)

$$\frac{\delta(x-\gamma)}{\left(1+\alpha\theta(x-\gamma)\right)^2}=\frac{\delta(x-\gamma)}{1+\alpha},$$

$$\frac{\delta'(x-\gamma)}{\left(1+\alpha\theta(x-\gamma)\right)^2}=\frac{\delta'(x-\gamma)}{1+\alpha}+\frac{2\alpha\delta^2(x-\gamma)}{\left(1+\alpha\theta(x-\gamma)\right)^3}.$$

Серед інших типів узагальнених функцій вирізнимо тільки ті, що означуються через поняття **головного значення (за Коші) розбіжного інтеграла** від якої-небудь звичайної функції.

Нехай (a,b) — деякий (скінченний чи нескінченний) проміжок дійсної прямої, а $f(x)$ — функція, сумовна в $(a,b-\varepsilon)$ за будь-якого $\varepsilon>0$. Незалежно від того, чи буде ця функція сумовною в (a,b), може виявитися, що інтеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ має границю при $\varepsilon\to 0$; тоді кажуть, що **інтеграл** від $f(x)$ вздовж (a,b) **збігається** і його позначають символом $\int_a^{\to b} f(x)dx$ (чи символом $\int_a^{b} f(x)dx$, як і у випадку сумовної функції).

Якщо збігається $\int_a^{\to b} |f(x)|dx$, то інтеграл від $f(x)$ називають **абсолютно збіжним**. При цьому $f(x)$ є сумовною в (a,b), і навпаки; в протилежному випадку збіжний **інтеграл** від $f(x)$ називають **умовно збіжним**.

Зазначене має сенс стосовно як інтеграла $\int_{\to a}^{b} f(x)dx$, так і інтеграла $\int_{\to a}^{\to b} f(x)dx$, який наділений змістом, якщо для деякого $c\in(a,b)$ мають зміст водночас інтеграли $\int_{\to a}^{c} f(x)dx$ та $\int_{c}^{\to b} f(x)dx$.

Нехай означена для всіх $a\le x\le b$ функція $f(x)$ є сумовною в $(a,c-\varepsilon)$ та $(c+\varepsilon,b)$, але не обов'язково сумовною в (a,b). Зазвичай вважається, що інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ має зміст, якщо зміст мають кожен з інтегралів $\int_a^{\to c} f(x)dx$ і $\int_{\to c}^{b} f(x)dx$, а це означає, що сума $\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$ ($\varepsilon_1>0\,,\varepsilon_2>0$) має границю, коли $\varepsilon_1\to 0$ і $\varepsilon_2\to 0$ незалежно один від одного.

Може виявитися, що такої границі не існує, але зате існує границя, коли $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \to 0$. Власне у такому випадку кажуть, що інтеграл від $f(x)$ збігається в сенсі головного значення за Коші і засвідчують це записом

$$\mathrm{Vp}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right).$$

Звернемося, наприклад, до гіперболи $\frac{1}{x}$ ($x \in \mathrm{R}$). Очевидно, що при $\alpha < 0$ і $\beta > 0$ інтеграл

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}$$

не існує (функція $\frac{1}{x}$ не інтегровна в околі точки $x = 0$). Зате головне значення (Vp) цього інтеграла набуває цілком конкретного значення:

$$\mathrm{Vp}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\alpha^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^\beta \frac{dx}{x}\right) = \ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|, \quad \alpha < 0 < \beta .$$

Зокрема,

$$\mathrm{Vp}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dx}{x} = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x} = 0, \quad \alpha > 0 .$$

В такому разі є можливість функції $1/x$ поставити у відповідність функцію $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ і функціонал

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{\mathrm{R}}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \ ,$$

де $\varphi(x)$ — нескінченну разів диференційовна функція з компактним носієм.

Цей лінійний неперервний функціонал і є узагальненою функцією. Зауважимо, що **узагальнена функція** $\mathcal{P}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ всюди, окрім точки $x = 0$, збігається з функцією $\frac{1}{x}$, і при цьому

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1 \text{ (подібно як } x\frac{1}{x} = 1\text{)}.$$

Через ці властивості функцію $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ називають регуляризацією функції $\frac{1}{x}$.

Цілком подібно, звичайній функції $\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$, $x \in \mathrm{R}$) можна поставити у відповідність **узагальнену функцію** $\mathcal{P}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}}$, оперуючи функціоналом

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{\mathrm{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx = 0$$

Їй властива рівність

$$x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = 1 \text{ (подібно як } x^2\frac{1}{x^2} = 1\text{)}.$$

До того ж,

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\; x^2\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' = -x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = 1.$$

Для існування інтеграла $\mathrm{Vp}\int_a^b f(x)\,dx$, необхідно і достатньо, щоб функція $f(x)$ в околі точки c була сумою антисиметричної функції $f_1(x)$ ($f_1(c+s) = -f_1(c-s)$) і такої симетричної функції $f_2(x)$ ($f_2(c+s) = f_2(c-s)$) (a,b), інтеграл $\int_{\to c} f_2(x)\,dx$ якої існує.

Покладемо $c = 0$ (заміною $x = c + s$ завжди можна дійти власне до цього випадку). При $c = 0$ терміни антисиметричності і симетричності заміняють на терміни відповідно на терміни парності і непарності. Кожну функцію $f(x)$ в околі точки $x = 0$ можна завжди подати як суму парної $f_1(x)$ і непарної $f_2(x)$ функцій:

$$f(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} + \frac{f(x)+f(-x)}{2} = f_1(x) + f_2(x).$$

Інтеграли від непарної функції $f_2(x)$ вздовж симетричних проміжків скорочуються; отже, якщо взяти α таким, щоб дотримувалась умова $a \le -\alpha < 0 < \alpha \le b$, то

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} f_1(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\alpha} f_1(x)\,dx = 0.$$

Тому збіжність в сенсі головного значення Vp інтеграла вздовж проміжку (a,b), або, що те саме, вздовж проміжку $(-\alpha,\alpha)$, від функції $f(x)$ збігається зі збіжністю інтеграла від функції $f_2(x)$. Парність $f_2(x)$ веде до того, що

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} f_2(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\alpha} f_2(x)\,dx = 2\int_{\varepsilon}^{\alpha} f_2(x)\,dx\ .$$

Таким чином, інтеграл в сенсі Vp від функції $f(x)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує інтеграл $\int\limits_{\to 0}^{\alpha} f_2(x)\,dx$.

Наприклад, якщо функція $f(x)$ в околі точки $x=c$ надається до асимптотичного розгортання

$$f(x)=\frac{C}{x-c}+c_0+c_1(x-c)+\ldots,$$

то інтеграл від $f(x)$ в сенсі Vp існує, оскільки $\dfrac{1}{x-c}$ — антисиметрична. Якщо $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x-c}$, де $\varphi(x)$ — неперервна в околі точки $x=c$ і диференційовна в самій точці c, то Vp-інтеграл від $f(x)$ існує через те, що

$$f(x)=\frac{\varphi(c)}{x-c}+\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c},$$

де перший доданок — антисиметрична функція, а другий — функція, обмежена в околі $x=c$. Очевидно, що функціонал

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(-x)}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx$$

збігається абсолютно.

Принагідно згадаємо такі твердження, що дуже часто стають в нагоді: функцію з обмеженою зміною можна подати як різницю двох неспадних функцій [15]; будь-яку функцію, означену на всій числовій восі, можна подати у вигляді суми двох функцій, графік кожної з яких має центр симетрії. При цьому функцію $f(x)$, означену на відрізку $I=[a,b]$, називають **функцією з обмеженою зміною (варіацією)**, якщо за будь-якого поділу відрізка $I=[a,b]$ на частини точками поділу

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

сума

$$\sum_{r=0}^{n+1}\left|f(x_{r+1})-f(x_r)\right|$$

залишається меншою від фіксованої сталої. Зокрема, кожна неспадна функція $f(x)$ має обмежену зміну, бо для неї зазначена сума не залежить від способу поділу I на частини і дорівнює $f(b)-f(a)$.

Зауважимо, що $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}=(\ln|x|)'$. Це випливає з того, що

$$\left((\ln|x|)',\varphi\right)=\left(\ln|x|,-\varphi'\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\cdot\varphi'\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\ln|x|\cdot\varphi'\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\ln|x|\cdot\varphi'\,dx\right)=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\varepsilon\cdot\varphi(-\varepsilon)-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx-\ln\varepsilon\cdot\varphi(\varepsilon)-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right)=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln\varepsilon\left(\varphi(-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon)\right)-\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right).$$

Ще одна **узагальнена функція** окресленого тут типу виникає, коли функції $\dfrac{1}{|x|}$ ставлять у відповідність функцію $\mathcal{P}\dfrac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{x}|}$:

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|},\varphi(x)\right)=\int_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}dx+\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|}dx\,.$$

Таким чином, узагальнені функції означують або через поняття лінійного функціонала (яке було в загальних рисах окреслено в 1), або з використанням фундаментальних послідовностей в певному розумінні звичайних функцій. В першому випадку йдуть шляхом узагальнення поняття функції, а в другому узагальнена функція тлумачиться як окремий випадок звичайної (див., наприклад, (2.14), (2.20), (2.26), (2.25)).

На завершення теми — кілька слів про застосовність операції множення до узагальнених функцій (див. також 1.7 та додаток А).

Добуток локально інтегровних функцій не завжди залишається інтегровною функцією (наприклад, $\left(|x|^{-1/2}\right)^2=|x|^{-1}$). Подібне стається з узагальненими функціями: Л. Шварц засвідчив, що в загальному випадку не існує означення операції множення узагальнених функцій такої, яка б давала також узагальнену функцію і при цьому залишалась асоціативною і комутативною. Для доказу наводять такий приклад протиріччя (В. С. Владіміров):

$$0=0\mathcal{P}\frac{1}{x}=\left(x\delta(x)\right)\mathcal{P}\frac{1}{x}=\left(\delta(x)x\right)\mathcal{P}\frac{1}{x}=\delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)=\delta(x)\,.$$

Для однозначного означування добутку узагальнених двох функцій $g_1(x)$ і $g_2(x)$ достатньо, щоб ці функції були наділені, вільно висловлюючись, властивостями: наскільки $g_1(x)$ є “нерегулярною” в околі (довільної) точки, настільки $g_2(x)$ повинна бути “регулярною” в цьому околі, і навпаки. Наприклад, природними вважаються добутки $\delta(x-\alpha)\,\delta(x-\beta)$ ($\alpha\neq\beta$), $f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$ ($f(x)$ — неперервна в околі точки $x=0$ функція). Зрозуміло, уникання операції множення суттєво звужує можливості апарату узагальнених функцій.

2.4 Функції-границі

Оскільки за будь-якого дійсного x

$$y(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,,$$

то

$$y(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{\frac{x}{n}\to 0,\, x\neq 0}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x\,.$$

Остання рівність є прикладом означення функції у формі граничного переходу. Звичайно, в даному випадку доцільність такого означення елементарної функції $y = e^x$ оправдати важко. Проте існує безліч обставин, за яких такий спосіб означення є набагато конструктивнішим за інші. Розглянемо низку нетривіальних прикладів **функцій-границь**, що переконують у цьому.

Функція

$$y_{\mathrm{sgn}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}} = -\lim_{t\to 0}\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}} \tag{2.35}$$

можна записати і у вигляді

$$y_{\mathrm{sgn}} = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Отже вона збігається зі знак-функцією $y = \operatorname{sgn} x$ (див. (2.12) і рис. 37).

Виявляється, що

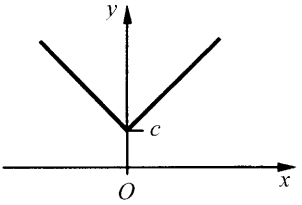
$$\overset{\circ}{y}_{\mathrm{sgn}} \equiv \lim_{t\to\infty}\int\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}}\,dx = x\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left[\left(1+t^{-2x}\right)\left(1+t^{2x}\right)\right]}{\ln t^{2x}} + c =$$

$$= x\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{\partial}{\partial(t^{2x})}\ln\left[\left(1+t^{-2x}\right)\left(1+t^{2x}\right)\right]}{\dfrac{\partial}{\partial(t^{2x})}\ln t^{2x}} + c = x\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+t^{-2x}} - \frac{1}{1+t^{2x}}\right) + c =$$

$$= x\lim_{t\to\infty}\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}} + c = xy_{\mathrm{sgn}} + c\,,$$

де c — стала інтегрування. Звідси (рис. 39)

$$\overset{\circ}{y}_{\mathrm{sgn}} = |\,x\,| + c = \begin{cases} -x + c & \text{при } x \le 0, \\ x + c & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$



39 **Зміщена модуль-функція.**

І навпаки,

$$\frac{dy_{\text{sgn}}}{dx} = y_{\text{sgn}}^{\circ\prime} = \lim_{t\to\infty}\frac{d}{dx}\left(x\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}} + c\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}} + \frac{\ln t^{4x}}{\left(t^x + t^{-x}\right)^2}\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}} = y_{\text{sgn}}\,.$$

Диференціюючи функцію (2.35), знайдемо:

$$y'_{\text{sgn}} = \lim_{t\to\infty}\frac{d}{dx}\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}} = \lim_{t\to\infty}\frac{4\ln t}{\left(t^x + t^{-x}\right)^2}\,.$$

То ж, при $x=0$ маємо: $y'_{\text{sgn}}\big|_{x=0} = \lim\limits_{t\to\infty}\ln t = \infty$. Натомість, при $x \neq 0$

$$y'_{\text{sgn}}\big|_{x\neq 0} = 4\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\ln t}{\frac{\partial}{\partial t}\left(t^x + t^{-x}\right)^2} = \frac{2}{x}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(t^{2x} + t^{-2x}\right)} = 0\,.$$

Друга похідна тієї ж функції має вигляд:

$$y''_{\text{sgn}} = \lim_{t\to\infty}\frac{d^2}{dx^2}\frac{t^x - t^{-x}}{t^x + t^{-x}} = \lim_{t\to\infty}\frac{d}{dx}\frac{4\ln t}{\left(t^x + t^{-x}\right)^2} =$$

$$= -8\lim_{t\to\infty}\left\{(\ln t)^2\frac{t^x - t^{-x}}{\left(t^x + t^{-x}\right)^3}\right\} = -2yy'\lim_{t\to\infty}\ln t\,.$$

Можна показати, що при $x<0$

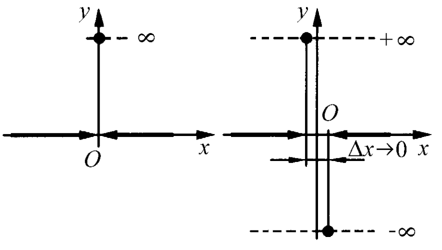
$$y''_{\text{sgn}} = \frac{1}{3x^2}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{-2x}} = 0\,,$$

а при $x>0$

$$y''_{\text{sgn}} = -\frac{1}{3x^2}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{2x}}\,.$$

Водночас можна з'ясувати, що

$$y''_{\text{sgn}}\big|_{x=-0} = \frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{1}{t^{-2x}} = \infty\,,\quad y''_{\text{sgn}}\big|_{x=+0} = -\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{1}{t^{2x}} = -\infty\,.$$



40 **Похідні від знак-функції.**

Зарисовки похідних

$$y'_{\text{sgn}} = \begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \infty & \text{при } x=0, \\ 0 & \text{при } x>0; \end{cases}$$

$$y''_{\text{sgn}} = \begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \infty & \text{при } x=-0, \\ -\infty & \text{при } x=+0, \\ 0 & \text{при } x>0. \end{cases}$$

функції (2.35) подано на рис. 40.

Перейдемо до функції

$$y_\theta = \frac{y_{\text{sgn}}+1}{2}. \tag{2.37}$$

На підставі (2.35)—(2.37) матимемо (див. рис. 34):

$$y_\theta = \lim_{t\to\infty}\frac{t^x}{t^x+t^{-x}} = \begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } x=0, \\ 1 & \text{при } x>0. \end{cases} \tag{2.38}$$

При цьому

$$y'_\theta = \frac{y'_{\text{sgn}}}{2}, \qquad y''_\theta = \frac{y''_{\text{sgn}}}{2}.$$

Навіть розривну в кожній точці, наприклад, відрізка $[0;1]$, **функцію Діріхле**

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x\in[0;1] - \text{раціональне}, \\ 1, \text{ якщо } x\in[0;1] - \text{ірраціональне} \end{cases}$$

можна записати в аналітичному вигляді як функцію-границю

$$D(x) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\,nx)\right).$$

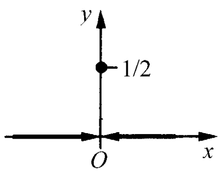
Цікавою є функція (рис. 41)

$$y_{1/2}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^x+t^{-x}}=\begin{cases}0 & \text{при } x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2} & \text{при } x=0.\end{cases} \tag{2.39}$$

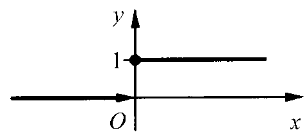
Вона набуває єдиного відмінного від нуля значення $1/2$ при $x=0$.

Сума (2.38) і (2.39) є функцією, що набуває лише двох значень (рис. 42):

$$y_{\theta+}=y_\theta+y_{1/2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^x+1}{t^x+t^{-x}}=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1 & \text{при } x\geq 0.\end{cases} \tag{2.40}$$



41 **Функція “число 1/2 в нулі”.**



42 **Функція “стрибок в одиницю”.**

Функція

$$y=\lim_{n\to\infty}\sin^{2n}x \tag{2.41}$$

має такі властивості: якщо $|\sin x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x=0$, а отже $y=0$; якщо ж $|\sin x|=1$, то $y=1$. Таким чином:

$$y=\begin{cases}0 & \text{при } x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ 1 & \text{при } x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k \quad (k\in \mathrm{Z}).\end{cases}$$

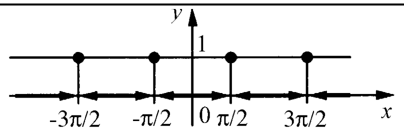
Графічно функція (2.41) відображена на рис. 43.

Аналогічно, функція

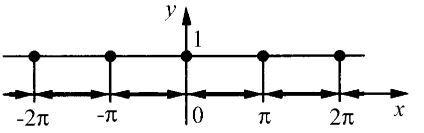
$$y=\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}x \tag{2.42}$$

може бути подана як (рис. 44)

$$y=\begin{cases}0 & \text{при } x\neq\pi k,\\ 1 & \text{при } x=\pi k \quad (k\in \mathrm{Z}).\end{cases}$$



43 **Функція “синус-одиниця”.**



44 **Функція “косинус-одиниця”.**

Функції

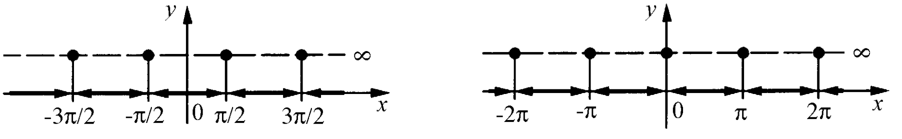
$$y = \lim_{n \to -\infty}\left(\sin^{2n} x - 1\right), \quad y = \lim_{n \to -\infty}\left(\cos^{2n} x - 1\right)$$

мають відповідно зображення (рис. 45)

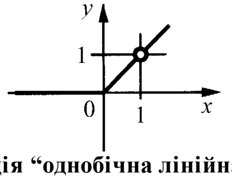
$$y = \begin{cases} \infty & \text{при } x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ 0 & \text{при } x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathrm{Z}), \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \infty & \text{при } x \neq \pi k, \\ 0 & \text{при } x = \pi k \quad (k \in \mathrm{Z}). \end{cases}$$

На рис. 46 зображено графік функції

$$y = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + e^{xt}\right)}{\ln\left(1 + e^{t}\right)} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$



45 **Функції “синус-безмежність” і “косинус-безмежність ”.**



46 **Функція “однобічна лінійна в’язь”.**

Періодичні прямокутні імпульси (рис. 47, 48) можна описати формулами:

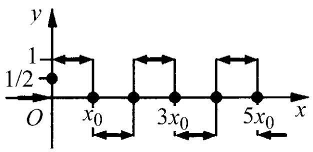
$$y = \theta(x) - 2\theta(x - x_0) + 2\theta(x - 2x_0) - \ldots,$$

$$y = \theta(x) - \theta(x - x_0) + \theta(x - X) - \theta(x - X - x_0) + \theta(x - 2X) - \ldots .$$

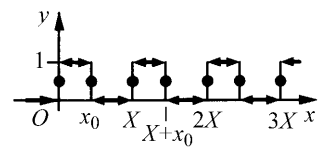
Ще один різновид періодичного прямокутного імпульсу можна побудувати, вдаючись до перетворення (2.40), рис. 49:

$$y = y_{\theta+}(x) - 2y_{\theta+}(x - x_0) + 2y_{\theta+}(x - 2x_0) - + \ldots,$$

$$y = y_{\theta+}(x) - y_{\theta+}(x - x_0) + y_{\theta+}(x - X) - y_{\theta+}(x - X - x_0) + y_{\theta+}(x - 2X) - + \ldots .$$



47 **Функція "періодичні прямокутні знак-імпульси".**



48 **Функція "періодичні прямокутні одиничні імпульси".**

49 **Різновиди функцій "періодичні прямокутні імпульси".**

Формула

$$y = \theta(x) + \theta(x - x_0) + \theta(x - 2x_0) - + \ldots,$$

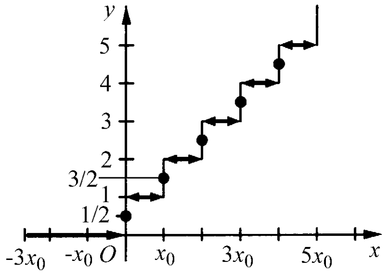
натомість, відображає східчасту функцію (рис. 50). Вона локально принципово відрізняється від функції $y = [x] \equiv E(x)$ (рис. 51), що вирізняє цілу частину числа x (якщо $x = n + r$, де n — ціле число і $0 \le r < 1$, то $[x] = n$, тобто y є найбільшим цілим числом, що не перевищує x; E — початкова літера французького слова **Entier** — "антьє", що означає "цілий"):

$$E(x+1) = 1 + E(x), \quad E(n) = E(n+0) = n, \quad E(n-0) = n - 1.$$

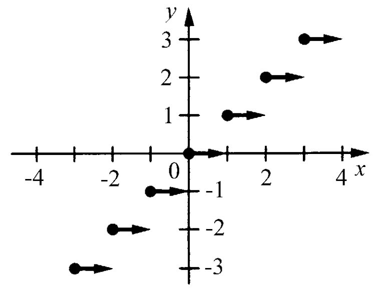
Можна наголосити ще на таких властивостях функції $y = [x] \equiv E(x)$: 1° якщо s — ціле число, то $E(x+s) = E(x) + s$; 2° для довільних дійсних чисел x_1, x_2, …, x_m справджується співвідношення

$$E(x_1 + x_2 + \ldots + x_m) = E(x_1) + E(x_2) + \ldots + E(x_m);$$

3° якщо $E(x) = E(y)$, то $|x - y| < 1$; 4° якщо n — натуральне число, то $E(E(x)/n) = E(x/n)$. Функція $y = [x] \equiv E(x)$ може бути елементом досить змістовних рівнянь.



50 **Східчаста функція.**



51 **Функція "ціла частина числа".**

Розглянемо, наприклад задачу: розв'язати рівняння

$$E\left(\frac{3+7x}{5}\right)=3x-4\,.$$

Позначимо $3x-4=s$. В такому разі $x=\dfrac{s+4}{3}$ і рівняння набуває вигляду

$$E\left(\frac{37+7s}{15}\right)=s\,.$$

За означенням цілої частини

$$0\le\frac{37+7s}{15}-s<1\,.$$

Звідси

$$\frac{11}{4}<\frac{37+7s}{15}-s\le\frac{37}{8}\,.$$

Як ціле число s може набувати лише значень 3 і 4, а тому розв'язками наведеного рівняння будуть числа $x_1=7/3$ і $x_1=8/3$.

Пилкоподібні періодичні імпульси відображають функція (рис. 52)

$$y=x-x\theta(x-x_0)+(x-X)\theta(x-X)-(x-X)\theta(x-X-x_0)+$$

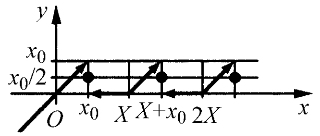
$$+(x-2X)\theta(x-2X-x_0)-\ldots\quad(X\ge x>0)$$

і функція **"дробова частина числа x"** (рис. 53)

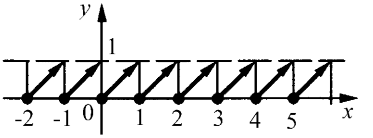
$$y=D(x)=x-[x]\equiv x-E(x)\quad(D(x+1)=x+1-E(x+1)=x-E(x)=D(x)\,,$$

$$D(n+0)=D(n)=D(0)=0\,,$$

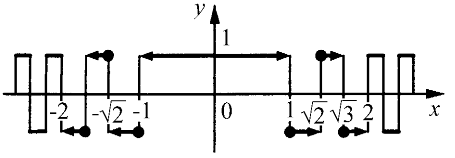
$$D(n-0)=1).$$



52 **Пакет пилкоподібних імпульсів.**



53 **Функція "дробова частина числа".**



54 **Пакет імпульсів.**

Функція

$$y=(-1)^{\left[x^2\right]}$$

відображає пакет прямокутних імпульсів (рис. 54), знак яких змінюється на протилежний при $x=1;\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3};\pm 2;\pm\sqrt{5};\ldots$.

Функція

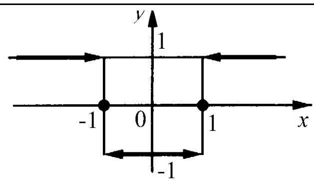
$$y=\lim_{t\to\infty}\frac{x^t-x^{-t}}{x^t+x^{-t}}$$

має такі властивості. Якщо $x\neq 0$, то $y=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x^{2t}-1}{x^{2t}+1}$. То ж відразу видно, що $y=0$ при $|x|=1$. Якщо ж $0<|x|<1$, то $\lim\limits_{t\to\infty}x^{2t}=0$ і $y=-1$. Далі, якщо $|x|>1$, то $y=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x^{2t}-1}{x^{2t}+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1-x^{-2t}}{1+x^{-2t}}=1$. Нарешті, при $x=0$ матимемо:

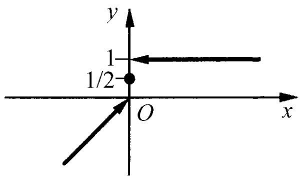
$$y=\lim_{t\to\infty}\lim_{x\to 0}\frac{x^t-x^{-t}}{x^t+x^{-t}}=\lim_{t\to\infty}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{2t}}{x^{2t}+1}-\frac{1}{x^{2t}+1}\right)=-1.$$

Таким чином (рис. 55),

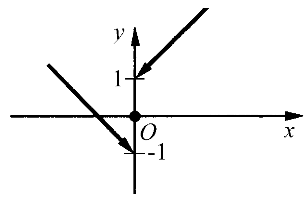
$$y=\begin{cases}1 & \text{при } x<-1,\\ 0 & \text{при } x=-1,\\ -1 & \text{при } -1<x<1,\\ 0 & \text{при } x=1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$



55 **Функція “одинична яма”.**



56 **Функція “одинична пряма”.**



57 **Функція “розірваний модуль”.**

Прикладами залежностей y від x, що задаються у формі границь, є також функція

$$y = \lim_{t\to\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}} = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ \dfrac{1}{2} \text{ при } x = 0, \\ x \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

(рис. 56), а також функція (рис. 57)

$$y = \lim_{t\to\infty} (1 + x)\operatorname{th} tx = \begin{cases} 1 + x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 - x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Наведена низка прикладів наочно засвідчує можливість відображення особливих за якісними ознаками функцій елементарними аналітичними засобами. В “дограничному стані” функція-границя є пересічною функцією, до аналізу якої можна залучати всі звичні засоби.

2.5 Неперервна недиференційовна функція

Близько 1830 р. чеський учений Б. Больцано (1781—1848) у праці “Вчення про функції” побудував приклад неперервної кривої, у якої не існує дотичної (формально — похідної) в жодній точці (через особливі обставини та несприятливі умови, в яких працював учений, сталось так, що рукопис його праці був знайдений лише в 1920 р.). А в 1871 р. німецький математик К. Вейєрштрасс (1815—1897) побудував приклад іншої неперервної і не диференційовної в жодній точці функції. Автором найпростішого з відомих прикладів неперервної але не диференційовної в жодній точці на множині R функції є голландський математик Б. Л. Ван-дер-Варден. До цього прикладу і звернемося.

В основу алгоритму побудови **неперервної всюди, але не диференційовної в жодній точці на множині R функції** покладемо функцію $f_0(x)$, графік якої наведено на рис. 58, *а*. Функція $f_0(x)$ неперервна всюди і періодична (з періодом 1); її графік симетричний відносно кожної вертикальної прямої $x-\frac{k}{2}=0$ $(k\in\mathrm{Z})$; в точках $x=\frac{k}{2}$ $(k\in\mathrm{Z})$ вона не має похідної; $0\le f_0(x)\le\frac{1}{2}$ $\forall x\in\mathrm{R}$. Побудуємо функції: $f_1(x)=\frac{1}{2}f_0(2x)$, що не має похідної в точках $x=\frac{k}{2^2}$ $(k\in\mathrm{Z})$ ($0\le f_1(x)\le\frac{1}{2^2}$ $\forall x\in\mathrm{R}$, рис. 58, *б*); $f_2(x)=\frac{1}{2^2}f_0(2^2x)$, що не має похідної в точках $x=\frac{k}{2^3}$ $(k\in\mathrm{Z})$ ($0\le f_2(x)\le\frac{1}{2^3}$ $\forall x\in\mathrm{R}$, рис. 58, *в*); $f_3(x)=\frac{1}{2^3}f_0(2^3x)$, що не має похідної в точках $x=\frac{k}{2^4}$ $(k\in\mathrm{Z})$ ($0\le f_3(x)\le\frac{1}{2^4}$ $\forall x\in\mathrm{R}$, рис. 58, *г*); …; $f_n(x)=\frac{1}{2^n}f_0(2^nx)$ ($n\in\mathrm{N}$), що не має похідної в точках $x=\frac{k}{2^{n+1}}$ $(k\in\mathrm{Z})$ ($0\le f_n(x)\le\frac{1}{2^{n+1}}$ $\forall x\in\mathrm{R}$). На заданому проміжку кількість точок недиференційовності функції $f_n(x)$ зростає зі зростанням $n\in\mathrm{N}$. Саму функцію $f_n(x)$ можна тлумачити як відстань між точкою x і найближчою з точок виду $\frac{m}{2^n}$, де m — деяке ціле число:

$$f_n(x)=\min_{m\in\mathrm{Z}}\left|x-\frac{m}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}\min_{m\in\mathrm{Z}}\left|2^nx-m\right|.$$

Періодом цієї функції є число $X=\frac{1}{2^n}$. Справді:

$$f_n(x+X)=\frac{1}{2^n}\min_{m\in\mathrm{Z}}\left|2^n(x+X)-m\right|=\frac{1}{2^n}\min_{m\in\mathrm{Z}}\left|2^nx+1-m\right|=f_n(x).$$

Зрозуміло, що функцію $f_n(x)$ можна будувати і як відстань від точки x до найближчої з точок виду $\frac{m}{10^n}$, а також інших точок подібного типу.

Укладемо послідовність функцій:

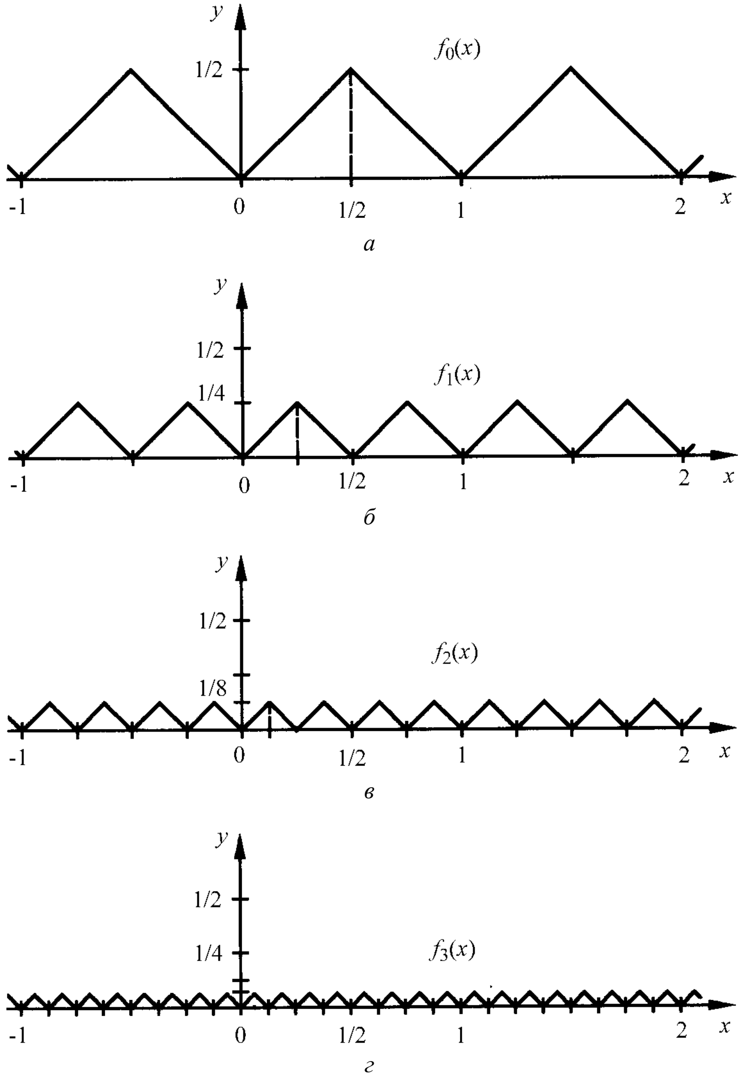
$F_1(x)=f_0(x)+f_1(x)$ (рис. 59, *а*),

$F_2(x)=F_1(x)+f_2(x)=f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)$ (рис. 59, *б*),

$F_3(x)=F_2(x)+f_3(x)=f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$ (рис. 59, *в*),

……………………………………………………………

$F_n(x)=F_{n-1}(x)+f_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)$.

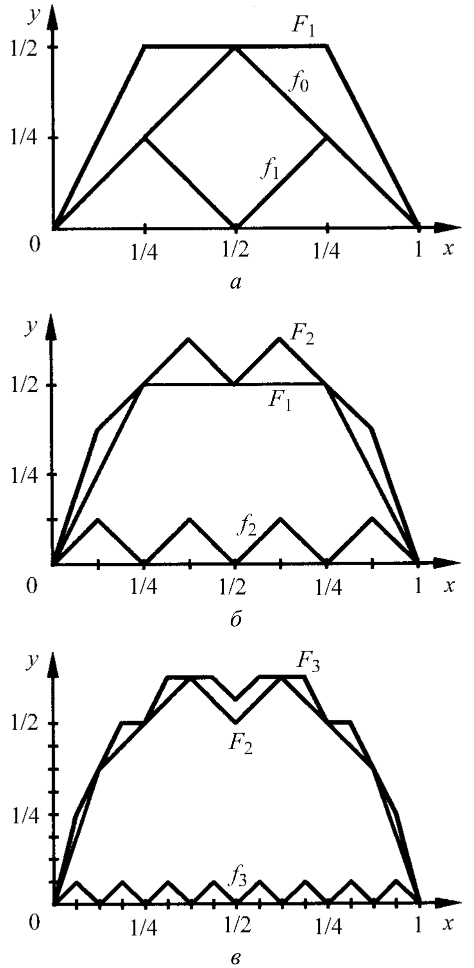


58 **Система періодичних функцій.**

З нерівності $f_{n+1}(x) \geq 0$ випливає, що $F_{n+1}(x) = F_n(x) + f_{n+1}(x) \geq F_n(x)$. То ж укладена послідовність функцій $\{F_n(x)\}$ — монотонна. Оскільки

$$F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1,$$

то вона ще й обмежена. А це означає, що існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$.



59 **Алгоритм побудови функції Ван-дер-Вардена.**

Таким чином, на всій числовій осі вдалося означити періодичну (з періодом 1) функцію $F(x) = \lim\limits_{n \to \infty} F_n(x)$ $(0 \le F(x) \le 1)$, графік якої симетричний відносно будь-якої прямої $x - \frac{k}{2} = 0$ $(k \in \mathrm{Z})$ (побудувати, однак, цей графік неможливо). Можна говорити, що функцію означено методом нагромадження особливостей [16].

Функція $F(x)$ всюди неперервна.

Це здається очевидним, таким, що не потребує якогось доведення. Але спиратись лише на інтуїцію у випадках з рядами вельми ризиковано. Наприклад, таке саме в загальних рисах відношення до себе викликає і ряд

$$F(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

в якому $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, $x\in[0;1]$. Проте, хоча за будь-якого $x\in[0;1]$ сума n членів ряду

$$F_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)=x-x^{n+1}$$

є неперервною функцією, сума ж самого ряду є розривною в точці $x=1$:

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\{x\}=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\in[0;1),\\ 0, \quad \text{ якщо } x=1.\end{cases}$$

Таким чином, сума ряду, елементами якого є неперервні функції, може виявитися розривною функцією.

Оцінимо спочатку величину $r_n(x)=F(x)-F_n(x)$ за різних n при довільному фіксованому x. Для різниці

$$F_{n+m}(x)-F_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+m}(x),$$

очевидно, матимемо таку оцінку

$$0\le F_{n+m}(x)-F_n(x)\le\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+3}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+m+1}}=\frac{1}{2^{n+2}}\frac{1-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^{n+1}},$$

не залежну від m. Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty}(F_{n+m}(x)-F_n(x))=F(x)-F_n(x)$, то можна писати

$$0\le r_n(x)\le\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Відповідно до наведеного вище означення, якщо за будь-якого заданого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$, лиш тільки $|x-x_0|<\delta$, то функція $F=F(x)$ є неперервною в точці $x=x_0$. В даному випадку матимемо:

$$|F(x_0+h)-F(x_0)|=|(F_n(x_0+h)+r_n(x_0+h))-(F_n(x_0)+r_n(x_0))|\le$$

$$\le|F_n(x_0+h)-F_n(x_0)|+|r_n(x_0+h)|+|r_n(x_0)|;$$

через те, що і $r_n(x_0)\le\frac{1}{2^{n+1}}$, і $r_n(x_0+h)\le\frac{1}{2^{n+1}}$,

$$|F(x_0+h)-F(x_0)|\le|F_n(x_0+h)-F_n(x_0)|+\frac{1}{2^n}.$$

При заданому ε достатньо великому n

$$\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Функція $F_n(x)$, як сума скінченної кількості неперервних функцій, є обов'язково неперервною в точці x_0. Отже, відповідним підбором числа $\delta > 0$ можна зробити так, що при $|h| < \delta$ справджувалась нерівність

$$\left| F_n(x_0+h) - F_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Звідси, при вибраному δ

$$\left| F(x_0+h) - F(x_0) \right| < \varepsilon,$$

що є свідченням неперервності функції $F = F(x)$ в точці x_0.

Функція $F = F(x)$ не диференційовна всюди.

Ідучи від супротивного, вважатимемо, що для деякого $x_0 \in \mathrm{R}$, яке вкладемо у послідовність двійкових наближень з нестачею і лишком

$$\alpha_k = \frac{s_k}{2^{k+1}} \le x_0 < \frac{s_k+1}{2^{k+1}} = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots;\ s_k \in \mathrm{Z};\ \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k = x_0),$$

існує похідна $F'(x_0)$. Оскільки $\alpha_k \le x_0 < \beta_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то

$$0 < \frac{\beta_k - x_0}{\beta_k - \alpha_k} \le 1, \quad 0 \le \frac{x_0 - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} < 1.$$

Звідси, на підставі рівності $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = x_0$ і очевидної тотожності

$$\frac{F(\beta_k) - F(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} - F'(x_0) =$$

$$= \frac{\beta_k - x_0}{\beta_k - \alpha_k}\left(\frac{F(\beta_k) - F(x_0)}{\beta_k - x_0} - F'(x_0) \right) + \frac{x_0 - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k}\left(\frac{F(x_0) - F(\alpha_k)}{x_0 - \alpha_k} - F'(x_0) \right)$$

випливає, що значенням похідної функції $F(x)$ в точці x_0 слід (раче, можна) вважати число

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(\beta_k) - F(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = F'(x_0).$$

Але, чи існує

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(\beta_k) - F(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}?$$

Відповідно до означення функції $F_n(x)$

$$\frac{F_n(\beta_k) - F_n(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{f_0(2^i\beta_k) - f_0(2^i\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}.$$

При $i > k$ маємо, що $2^{i-k-1} \in \mathrm{Z}$ і

$$f_0(2^i \alpha_k) = f_0(2^{i-k-1} s_k) = 0, \quad f_0(2^i \beta_k) = f_0(2^{i-k-1}(s_k + 1)) = 0.$$

Отже

$$\frac{F_n(\beta_k) - F_n(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{f_0(2^i \beta_k) - f_0(2^i \alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k};$$

втрачається залежність $\dfrac{F_n(\beta_k) - F_n(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}$ від n, а тому при $n \to \infty$ маємо рівність

$$\frac{F(\beta_k) - F(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{f_0(2^i \beta_k) - f_0(2^i \alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}.$$

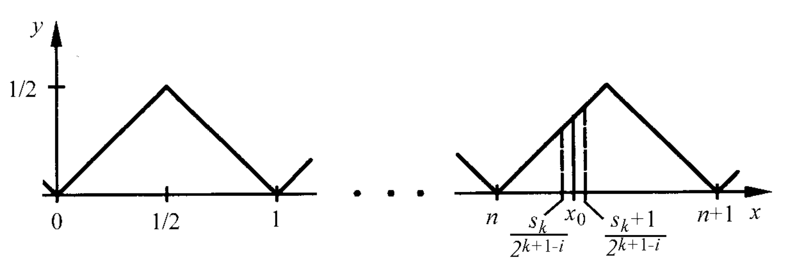
При $i \le k$

$$\frac{1}{2^i} \frac{f_0(2^i \beta_k) - f_0(2^i \alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \frac{f_0\left(\dfrac{s_k + 1}{2^{k+1-i}}\right) - f_0\left(\dfrac{s_k}{2^{k+1-i}}\right)}{\dfrac{1}{2^{k+1-i}}}.$$

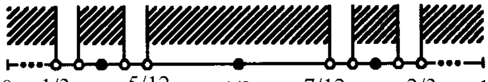
У проміжку $\left[\dfrac{s_k}{2^{k+1-i}}, \dfrac{s_k + 1}{2^{k+1-i}}\right]$ функція $f_0(x)$ — пряма лінія (рис. 60), а відношення у правій частині останньої рівності — кутовий коефіцієнт цієї прямої, через що воно може набувати або значення $+1$, або значення -1. Таким чином,

$$\frac{F(\beta_k) - F(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = p \cdot 1 + q \cdot (-1),$$

де $p + q = k + 1$. Число $p \cdot 1 + q \cdot (-1)$ має ту саму парність-непарність, що і число $p \cdot 1 + q \cdot (-1 + 2) = k + 1$. Отже відношення $\dfrac{F(\beta_k) - F(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}$ парне при непарному k, і навпаки. Тому $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{F(\beta_k) - F(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}$ не існує.



60 **До визначення недиференційовності функції Ван-дер-Вардена.**



61 **Алгоритм побудови множини** Е .

Функція $F(x)$ має нескінченну кількість максимумів.

Оскільки 1 є періодом функції $F(x)$, то x_0 тоді і тільки тоді є точкою максимуму функції $F(x)$, коли точкою максимуму є дробова частина $\{x_0\}\in[0;1]$. Тому, щоб віднайти всю множину точок максимуму, достатньо знайти множину Е у проміжку $[0;1]$, а потім "розмножити" її на всій осі, керуючись періодичністю функції $F(x)$.

Можна з'ясувати, що:

1° $\max\limits_{R} F(x)=\max\limits_{[0;1]} F(x)=\dfrac{2}{3}$;

2° $\mathrm{E}\subset\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right]$;

3° $F\left(\dfrac{1}{3}\right)=F\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$

(точки $x_0=\dfrac{1}{3}$ і $x_0=\dfrac{2}{3}$ є точками максимуму функції $F(x)$);

4° Множину Е формують числа

$$x_0=\frac{\alpha_1}{4}+\frac{\alpha_2}{4^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{4^n}+\ldots,$$

де $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots$ — або одиниці, або двійки;

5° Множина Е можна побудувати геометрично за таким нескладним алгоритмом, рис. 61: відрізок $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right]$ необхідно поділити на чотири однакові частини і усунути внутрішні точки двох середніх частин разом з їх спільною граничною точкою; кожен з відрізків-частин, що залишились недоторканими знову необхідно поділити на чотири однакові частини і усунути внутрішні точки двох середніх частин разом з їх спільною граничною точкою і так далі (множини вилучених точок на рис. 61 вирізнено перевивистою заштрихованою смугою). Все, що залишилося б після виконання нескінченної кількості таких операцій, склало б, власне, множину Е .

Довший час неперервну і недиференційовну в жодній точці функцію сприймали вельми скептично щодо можливостей її практичного і теоретичного застосувань і як таку, що нічого спільного з дійсністю не має. А ж раптом виявилося, що кожна траєкторія броунівського руху — це, власне, і є неперервна функція, що не має похідних.

2.6 Гамма-функція

Функцію

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}ds\,,\quad x>0 \tag{2.43}$$

(тут йдеться про дійсну незалежну змінну) називають **гамма-функцією** (Ойлера). Інтегруванням частинами знайдемо:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty (s^x)\,(e^{-s}ds)=\int_0^\infty u\,dv=\left(uv\right)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty v\,du=\left(-e^{-s}s^x\right)\Big|_0^\infty+x\int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}ds\,,$$

звідки випливає функціональне рівняння

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\,. \tag{2.44}$$

Безпосередньо можна з'ясувати, що

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-s}ds=1\,. \tag{2.45}$$

На підставі функціонального рівняння (2.44) переконуємося, що гамма-функція (2.43) не втрачає сенсу і при $-1<x<0$ чи $0<x+1<1$ (рис. 62), бо не губить змісту вираз

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}\,.$$

Аналогічного висновку можна дійти, розглядаючи й інші “одиничні” інтервали при $x<0$: $(-2;-1)$, $(-3;-2)$ тощо. З останнього виразу випливає також, що при $x\to 0;-1;-2;\ldots$ функція $\Gamma(x)$ набуває значень $\pm\infty$. Локальні екстремуми функції $\Gamma(x)$ вирізняють наближено рівності

$$\Gamma(1{,}462)=0{,}886\,;\ \Gamma(-0{,}5040)=-3{,}545\,;$$

$$\Gamma(-1{,}573)=2{,}302\,;\ \Gamma(-2{,}611)=-0{,}888\,;\ \ldots\,.$$

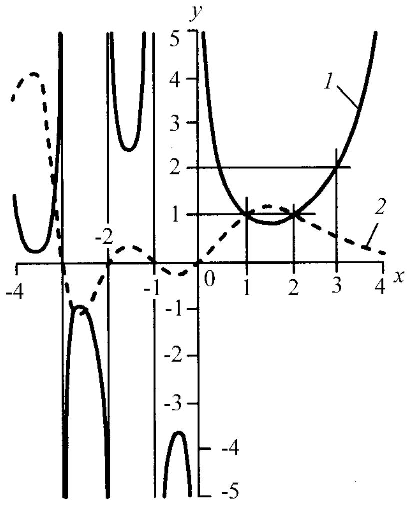
Можна з'ясувати також, що

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\,ds=2\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds=\sqrt{\pi}\,.$$

Тому, зважаючи на (2.44), дійдемо висновку, що

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\,,$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\,\frac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\sqrt{\pi}=(-1)^n\,\frac{n!}{(2n)!}2^{2n}\sqrt{\pi}\qquad\forall n\in\mathrm{N}\,.$$



62 **Гамма-функція $y=\Gamma(x)$ (*1*) і функція $y=1/\Gamma(x)$ (*2*).**

На підставі рівностей (2.44) і (2.45) матимемо:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=n(n-1)\cdots2\cdot1\cdot\Gamma(1)=n!$$

(n — натуральне число). Отже гамма-функцію можна тлумачити як формальне поширення поняття факторіала на ненатуральні числа.

З гамма-функцією тісно пов’язана так звана бета-функція (в даному разі йдеться про комплексні незалежні змінні)

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\mathrm{B}(q,p),$$

яка також може бути задана за допомогою аналітичного продовження інтеграла

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad (\operatorname{Re}p>0,\ \operatorname{Re}q>0;\ \text{інтеграл Ойлера першого роду}),$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1-t)^{p+q}}dt=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\, d\varphi .$$

Ця функція наділена, зокрема, властивостями

$$\mathrm{B}(p,q)\mathrm{B}(p+q,r)=\mathrm{B}(q,r)\mathrm{B}(q+r,p);$$

$$\frac{1}{\mathrm{B}(n,m)}=mC_{n+m-1}^{m}=nC_{n+m-1}^{n} \quad (m,n=1,2,\ldots).$$

3 АЛГЕБРИЧНИЙ МНОГОЧЛЕН 3

3.1 Корені алгебричного (характеристичного) многочлена

Число k називається **коренем алгебричного многочлена**

$$P_n[k] \equiv p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n \,, \tag{3.1}$$

якщо воно є розв’язком **рівняння (алгебричного)**

$$P_n[k] = 0 \,. \tag{3.2}$$

Забігаючи наперед, розглянемо **рівняння зі звичайними похідними**

$$L[y] \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \,, \quad -\infty < x < \infty \,, \tag{3.3}$$

в якому коефіцієнти $p_0, \ p_1, \ \ldots, p_n$ є сталими ($p_0 \neq 0$); $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y^{(r)} = \dfrac{d^r y}{dx^r}$.

Звернемося до **експонентної функції** $y = e^{kx}$, де $k = \mathrm{const}$, похідними якої також є експонентні функції

$$y' = ke^{kx}, \; y'' = k^2 e^{kx}, \cdots, \; y^{(j)} = k^j e^{kx}, \ldots \tag{3.4}$$

Підставляючи функцію $y = e^{kx}$ у рівняння (3.3) і зважаючи на (3.4), знайдемо:

$$L\left[e^{kx}\right] \equiv e^{kx}\left(p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1} k + p_n\right) = 0 \,. \tag{3.5}$$

Зрозуміло, що при $k \to \infty$ рівність (3.5) порушується. Натомість,

$$\lim_{k \to -\infty} L\left[e^{kx}\right] = \lim_{k \to -\infty} e^{kx} P[k] = \lim_{k \to -\infty} \frac{k^n}{e^{-kx}}\left(p_0 + \frac{p_1}{k} + \cdots + \frac{p_{n-1}}{k^{n-1}} + \frac{p_n}{k^n}\right) =$$

$$= (-1)^n p_0 \lim_{k \to \infty} \frac{k^n}{e^{kx}} = (-1)^n p_0 \lim_{\substack{k \to \infty, \\ r = n}} \frac{\dfrac{d^r}{dk^r} k^n}{\dfrac{d^r}{dk^r} e^{kx}} = (-1)^n p_0 \lim_{\substack{k \to \infty, \\ r = n}} \frac{\dfrac{n!}{(n-1)!} k^{n-r}}{e^{kx}\left(\ln e^x\right)^r} =$$

$$= (-1)^n p_0 \lim_{k \to \infty} \frac{n!}{e^{kx}\left(\ln e^x\right)^n} = 0 \,. \tag{3.6}$$

З (3.5) та (3.6) випливає, що функція $y = e^{kx}$ є розв'язком рівняння (3.3) в тому разі, якщо $k \to -\infty$, або ж якщо число k є коренем алгебричного многочлена (3.1), тобто розв'язком рівняння (3.2). Через таку властивість **многочлен** (3.1) і **рівняння** (3.2) називатимемо далі також **характеристичними**.

Алгебричний многочлен $P_n[k]$ можна подати у вигляді

$$P_n[k] \equiv p_0(k-k_1)(k-k_2)\cdots(k-k_n) = p_0\prod_{i=1}^{n}(k-k_i), \tag{3.7}$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — корені цього многочлена. Виконуючи у правій частині останньої тотожності операції множення (розкривання дужок) і порівнюючи отриманий результат з правою ж частиною тотожності (3.1), знайдемо **формули Вієта**:

$$p_1 = -p_0 S_1 = -p_0\sum_{i=1}^{n} k_i = -p_0(k_1 + k_2 + \cdots + k_n),$$

$$p_2 = (-1)^2 p_0\, S_2 = (-1)^2 p_0 \sum_{\substack{i=1,\, j\\ i<j}}^{n} k_i k_j = p_0(k_1k_2 + k_1k_3 + \cdots + k_{n-1}k_n),$$

$$p_3 = (-1)^3 p_0\, S_3 =$$

$$= (-1)^3 p_0 \sum_{\substack{i=1,\, j,\, l\\ i<j<l}}^{n} k_i k_j k_l = -p_0(k_1k_2k_3 + k_1k_2k_4 + \cdots + k_{n-2}k_{n-1}k_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_{n-1} = (-1)^{n-1} p_0\, S_{n-1} = (-1)^{n-1} p_0 \sum_{\substack{i=1,\, j,\, \ldots,\, l\\ i<j<\ldots<l}}^{n} k_i k_j \ldots k_l =$$

$$= (-1)^{n-1} p_0(k_1k_2\ldots k_{n-1} + k_1k_2\ldots k_{n-2}k_n + \ldots + k_2k_3\ldots k_n),$$

$$p_n = (-1)^n p_0\, S_n = (-1)^n p_0 k_1 k_2 \ldots k_n. \tag{3.8}$$

В правих частинах щойно наведених виразів фігурують суми S_r $(r = \overline{1, n})$ всіх тих $C_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$ добутків, кожен з яких містить r множників k_j з індексами, що не збігаються:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i = k_1 + k_2 + \cdots + k_n,$$

$$S_2 = \sum_{\substack{i=1,\, j \\ i<j}}^{n} k_i k_j = k_1k_2 + k_1k_3 + \cdots + k_{n-1}k_n ,$$

$$S_3 = \sum_{\substack{i=1,\, j,\, l \\ i<j<l}}^{n} k_i k_j k_l = k_1k_2k_3 + k_1k_2k_4 + \cdots + k_{n-2}k_{n-1}k_n \,,\ \ldots,$$

$$S_{n-1} = \sum_{\substack{i=1,\, j,\, \ldots,\, l \\ i<j<\ldots<l}}^{n} k_i k_j \ldots k_l = k_1k_2 \ldots k_{n-1} + \ldots + k_2k_3 \ldots k_n ,$$

$$S_n = k_1k_2 \ldots k_n . \tag{3.9}$$

Поряд з цими сумами інколи вигідно оперувати сумами

$$s_0 = \sum_{i=1}^{r} k_i^0 = r\,,\ s_1 = \sum_{i=1}^{r} k_i\,,\ s_2 = \sum_{i=1}^{r} k_i^2\,,\ \ldots,\ s_{r-1} = \sum_{i=1}^{r} k_i^{r-1}\,,$$

$$s_r = \sum_{i=1}^{r} k_i^r\,,\ \ s_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} k_i^{r+1}\,,\ \ldots \tag{3.10}$$

Між функціями (3.9) і (3.10) при $r = n$ існують співвідношення

$$s_\nu - s_{\nu-1}S_1 + s_{\nu-2}S_2 - + \ldots + (-1)^{\nu-1} s_1 S_{\nu-1} + (-1)^\nu \nu S_\nu = 0 \quad (\nu \le n), \tag{3.11}$$

$$s_\nu - s_{\nu-1}S_1 + s_{\nu-2}S_2 - + \ldots + (-1)^n s_{\nu-n} S_\nu = 0 \qquad (\nu > n). \tag{3.12}$$

Зважаючи на співвідношення (3.9) та (3.11), можна навести такі формули, що відображають взаємозв’язок між сумами (3.10) та коефіцієнтами алгебричного рівняння (3.2):

$$\nu p_\nu + p_{\nu-1}s_1 + p_{\nu-2}s_2 + \ldots + p_0 s_\nu = 0 \quad (\nu = \overline{1, n}),$$

звідки

$$\frac{p_\nu}{p_0} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & & 0 & \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ s_{\nu-2} & s_{\nu-3} & s_{\nu-4} & s_{\nu-5} & \ldots & n-2 & \\ s_{\nu-1} & s_{\nu-2} & s_{\nu-3} & s_{\nu-4} & \ldots & s_1 & n-1 \\ s_\nu & s_{\nu-1} & s_{\nu-2} & s_{\nu-3} & \ldots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

Поставимо у відповідність співвідношенням (3.11) і (3.12) визначник

$$D^*=\begin{vmatrix}
-\frac{p_1}{p_0} & -1 & & & & & & & \\
-2\frac{p_2}{p_0} & -\frac{p_1}{p_0} & -1 & & & & \mathbf{0} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
-n\frac{p_n}{p_0} & -\frac{p_{n-1}}{p_0} & \cdots & -\frac{p_1}{p_0} & -1 & & & & \\
 & -\frac{p_n}{p_0} & -\frac{p_{n-1}}{p_0} & \cdots & -\frac{p_1}{p_0} & -1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & \mathbf{0} & & -\frac{p_n}{p_0} & -\frac{p_{n-1}}{p_0} & \cdots & -\frac{p_1}{p_0} & -1 & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{vmatrix},$$

порядок якого не окреслений. Діагональні мінори цього визначника визначують відповідні суми через коефіцієнти p_i $(i=\overline{0,\nu})$ (в (3.13), навпаки, ці суми визначують коефіцієнти):

$$s_\nu=\left(-\frac{1}{p_0}\right)^\nu\begin{vmatrix}
p_1 & p_0 & & & & & \\
2p_2 & p_1 & p_0 & & & \mathbf{0} & \\
3p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(\nu-1)p_{\nu-1} & p_{\nu-2} & p_{\nu-3} & p_{\nu-4} & \cdots & p_1 & p_0 \\
\nu p_\nu & p_{\nu-1} & p_{\nu-2} & p_{\nu-3} & \cdots & p_2 & p_1
\end{vmatrix}\quad (\nu=\overline{1,n}),$$

$$s_\nu=\left(-\frac{1}{p_0}\right)^\nu\begin{vmatrix}
p_1 & p_0 & & & & & & \\
2p_2 & p_1 & p_0 & & & & \mathbf{0} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
np_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 & & & \\
 & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & \mathbf{0} & & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 \\
 & & & & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1
\end{vmatrix}_{\nu\times\nu}\quad (\nu>n). \quad (3.14)$$

Звертаючись до виразу (див. (3.1), (3.7))

$$P_n'[k]=\frac{dP_n[k]}{dk}=p_0nk^{n-1}+p_1(n-1)k^{n-2}+\ldots+2p_{n-2}k+p_{n-1}\equiv$$

$$\equiv p_0\,[(k-k_2)(k-k_3)\cdots(k-k_n)+(k-k_1)(k-k_3)(k-k_4)\cdots(k-k_n)+\ldots+$$

$$+(k-k_1)(k-k_2)\cdots(k-k_{j-1})(k-k_{j+1})\cdots(k-k_n)+\cdots+$$

$$+(k-k_1)(k-k_2)\cdots(k-k_{n-2})(k-k_{n-1})], \tag{3.15}$$

зауважуємо, що якщо число k_i є кратним коренем многочлена $P_n[k]$, то воно обов'язково є коренем і многочлена $P_n'[k]$. В загальному випадку можна стверджувати, що якщо число k_i є коренем кратності r многочлена $P_n[k]$, то воно є коренем кратності $r-1$ многочлена $P_n'[k]$ (якщо $r=1$, то це означає, що $k-k_i$ у праву частину (3.15) не входить). Можна у стислій формі висловити таке твердження: k^* є **коренем кратності r многочлена** $P_n[k]$ тоді і тільки тоді, коли

$$P[k^*]=P'[k^*]=\ldots=P^{(r-1)}[k^*]=0,\quad P^{(r)}[k^*]\neq 0\,.$$

З (3.15) випливає, що

$$P_n'[k_j]=\left.\frac{dP_n[k_j]}{dk}\right|_{k=k_j}=p_0\prod_{i\neq j}^{n}(k_j-k_i)=$$

$$=(-1)^{n-1}p_0(k_1-k_j)(k_2-k_j)\cdots(k_{j-1}-k_j)(k_{j+1}-k_j)\cdots(k_n-k_j)\,. \tag{3.16}$$

3.2 Якобіян

Розглянемо алгебричне рівняння

$$p_0k^n-p_1k^{n-1}+p_2k^{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}p_{n-1}k+(-1)^n p_n=0\,. \tag{3.17}$$

Вважатимемо корені $k_1,k_2,\ldots,k_n$ цього рівняння незалежними змінними, а коефіцієнти $p_1,p_2,\ldots,p_n$ — визначуваними через $k_1,k_2,\ldots,k_n$ функціями:

$$\left.\begin{aligned} p_1&=p_1(k_1,k_2,\ldots,k_n),\\ p_2&=p_2(k_1,k_2,\ldots,k_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_n&=p_n(k_1,k_2,\ldots,k_n).\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Укладемо **визначник Якобі-Остроградського (якобіян)** системи функцій (3.18), відповідної рівнянню (3.17):

$$\frac{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)}{D(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial k_1} & \frac{\partial p_1}{\partial k_2} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial k_n} \\ \frac{\partial p_2}{\partial k_1} & \frac{\partial p_2}{\partial k_2} & \cdots & \frac{\partial p_2}{\partial k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial k_1} & \frac{\partial p_n}{\partial k_2} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial k_n} \end{vmatrix}. \tag{3.19}$$

Беручи до уваги формули Вієта (3.8) за позначень (3.9), знайдемо:

$$\frac{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)}{D(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = (-1)^{n(n+1)/2} p_0^n \frac{D(S_1, S_2, \ldots, S_n)}{D(k_1, k_2, \ldots, k_n)},$$

де

$$\frac{D(S_1, S_2, \ldots, S_n)}{D(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial k_1} & \frac{\partial S_1}{\partial k_2} & \cdots & \frac{\partial S_1}{\partial k_n} \\ \frac{\partial S_2}{\partial k_1} & \frac{\partial S_2}{\partial k_2} & \cdots & \frac{\partial S_2}{\partial k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial S_n}{\partial k_1} & \frac{\partial S_n}{\partial k_2} & \cdots & \frac{\partial S_n}{\partial k_n} \end{vmatrix} \tag{3.20}$$

є **якобіяном** функцій (3.9) $S_1(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $S_2(k_1, k_2, \ldots, k_n), \ldots,$ $S_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Принагідно зауважимо, що

$$\frac{D(S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1)}{D(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = (-1)^{n(n-1)/2} \frac{D(S_1, S_2, \ldots, S_n)}{D(k_1, k_2, \ldots, k_n)}.$$

Легко безпосередньо з'ясувати, що при $n = 2, 3$ справджується рівність

$$\frac{D(S_1, S_2, \ldots, S_n)}{D(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = \prod_{n \ge i \ge j \ge 1} \left(k_i - k_j\right) = \overset{n}{\Delta}. \tag{3.21}$$

Хочеться сподіватись, що рівність (3.21) справджується й при довільному n.

Отже рівність (3.21) справджується при $n = 2, 3$. Нехай вона справджується ще й при $m = n - 1$.

Звернемо увагу на співвідношення (покладаючи $S_0(k_1, k_2, \ldots, k_n) = 1$)

$$\frac{\partial}{\partial k_i} S_r(k_1, k_2, \ldots, k_n) = S_{r-1}(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_n),$$

$$S_{r-1}(k_2, k_3, \ldots, k_n) - S_{r-1}\left(k_1, \ldots, k_{j-1}, k_{j+1}, \ldots, k_n\right) =$$

$$= \left(x_j - x_1\right) S_{r-2}\left(k_2, \ldots, k_{j-1}, k_{j+1}, \ldots, k_n\right) \quad (j, r = \overline{2, n}).$$

Враховуючи їх, в якобіяні (3.20) віднімемо перший стовпець від кожного наступного і розкладемо отриманий визначник за елементами першого рядка; далі, виносячи за знак визначника величину $\prod_{j=2}^{n}\left(k_1-k_j\right)$, отримаємо:

$$\frac{D(S_1, S_2, \ldots, S_n)}{D(k_1, k_2, \ldots, k_n)}=\frac{D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})}{D(k_2, k_3, \ldots, k_n)}\prod_{j=2}^{n}\left(k_1-k_j\right),$$

$$\sigma_i=S_i\left(k_2, k_3, \ldots, k_n\right).$$

Звідси за індукцією висновуємо, що передбачуване вірне і при $m=n$. Тобто справедливою є формула

$$\frac{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)}{D(k_1, k_2, \ldots, k_n)}=(-1)^{n(n+1)/2}p_0^n\overset{n}{\Delta}.$$

Отже якобіян (3.19) системи функцій (3.18) визначається через величину $\overset{n}{\Delta}=\prod_{n\ge i\ge j\ge 1}\left(k_i-k_j\right)$, яку можна записати у формі так званого алгебричного **визначника Ван-дер-Монда**, про який детальніше йтиметься далі.

3.3 Результант і дискримінант

Результантами многочленів

$$P[z]=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n,$$

$$Q[z]=b_0z^m+b_1z^{m-1}+b_2z^{m-2}+\ldots+b_{m-1}z+b_m \tag{3.22}$$

називають числа

$$R(P,Q)=a_0^m\,Q(\alpha_1)Q(\alpha_2)\ldots Q(\alpha_n), \tag{3.23}$$

$$R(Q,P)=b_0^n\,P(\beta_1)P(\beta_2)\ldots P(\beta_m), \tag{3.24}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n$ — корені многочлена $P[z]$ n-го степеня, а $\beta_1, \beta_2, \ldots\beta_m$ — корені многочлена $Q[z]$ m-го степеня.

При означенні результанта $R(P,Q)$ істотною є вимога, щоб дотримувалась умова $a_0\ne 0$, а при означенні результанта $R(Q,P)$ — вимога, щоб справджувалась нерівність $b_0\ne 0$.

Більш загально (не пов'язуючись з вимогами $a_0 \neq 0$ чи $b_0 \neq 0$) результант многочленів (3.22) можна означити як визначник степеня $n+m$

$$R(P,Q)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix}. \qquad (3.25)$$

При $a_0 \neq 0$ визначник (3.25) збігається з (3.23), а при $b_0 \neq 0$ — з (3.24).

Основну властивість результанта виражає формула

$$R(P,Q)=(-1)^{nm}R(Q,P)=a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\alpha_i-\beta_j\right). \qquad (3.26)$$

В загальному випадку справедливим є таке твердження: якщо результант $R(P,Q)$, означуваний формулою (3.25), дорівнює нулю, то або а) многочлени $P[z]$ і $Q[z]$ мають спільний корінь, або б) обидва їх старші коефіцієнти (a_0 і b_0) дорівнюють нулю; якщо многочлени $P[z]$ і $Q[z]$ мають спільний корінь, то $R(P,Q)=0$; якщо $R(P,Q)\neq 0$, то $P[z]$ і $Q[z]$ — взаємно прості.

Поняття результанта можна застосувати до аналізу кратності коренів характеристичного многочлена. Як стверджувалося раніше, кратний корінь многочлена $P[k]$ повинен одночасно бути коренем похідної $P'[k]$ цього многочлена (а також похідних вищих порядків, коли кратність є більшою від двох).

Результантом многочленів

$$P_n[k]=p_0k^n+p_1k^{n-1}+\dots+p_{n-1}k+p_n,$$

$$P_n'[k]=\frac{dP_n[k]}{dk}=p_0nk^{n-1}+p_1(n-1)k^{n-2}+\ldots+2p_{n-2}k+p_{n-1},$$

за означенням є визначник порядку $2n-1$

$$R(P_n,P_n')=$$

$$=\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & p_1 & \dots & p_{n-2} & p_{n-1} & p_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ np_0 & (n-1)p_1 & (n-2)p_2 & \dots & p_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & np_0 & (n-1)p_1 & \dots & 2p_{n-2} & p_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & np_0 & (n-1)p_1 & \dots & 2p_{n-2} & p_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Відповідно до (3.26) в цьому випадку

$$R(P_n, P_n') = (-1)^{n(n-1)/2} p_0^{2n-1} \prod_{1\le j<i\le n} (k_i - k_j)^2 =$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} p_0^{2n-1} \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (k_i - k_j)^2 . \qquad (3.27)$$

Величину

$$D(P_n) = p_0^{2n-2} \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (k_i - k_j)^2$$

називають **дискримінантом многочлена** $P[k]$. Зважаючи на (3.27), дискримінант можна подати у вигляді

$$D(P_n) = (-1)^{n(n-1)/2} \frac{R(P_n, P_n')}{p_0} .$$

Дискримінант характеристичного рівняння (3.2) можна визначити через суми $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{2n-2}$ (див. (3.10) і (3.14)):

$$D = p_0^{2(n-1)} \prod_{i=2}^{m} \prod_{j=1}^{i-1} (k_i - k_j)^2 = p_0^{2(n-1)} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} . \qquad (3.28)$$

З означення дискримінанта і властивостей результанта випливає, що многочлен $P[k]$ має кратний корінь тоді і тільки тоді, коли дискримінант (див., наприклад, (3.28)) дорівнює нулю.

3.4 Характеристичні визначники

Розглянемо **характеристичний визначник**

$$\overset{m}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \ldots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} , \qquad (3.29)$$

який пов’язують з іменем **Ван-дер-Монда**.

Віднімемо у цьому визначнику від кожного рядка, починаючи з другого, попередній, помножений на k_1:

$$\overset{m}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & k_2 - k_1 & \dots & k_m - k_1 \\ 0 & k_2(k_2 - k_1) & \dots & k_m(k_m - k_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_2^{m-2}(k_2 - k_1) & \dots & k_m^{m-2}(k_m - k_1) \end{vmatrix}.$$

Далі, розкладемо отриманий результат за елементами першого стовпця і винесемо за знак визначника спільні множники елементів інших стовпців:

$$\overset{m}{\Delta}[k_1, k_2, \dots, k_m] = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)\dots(k_m - k_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_2 & k_3 & \dots & k_m \\ k_2^2 & k_3^2 & \dots & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_2^{m-2} & k_3^{m-2} & \dots & k_m^{m-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=2}^{m} (k_i - k_1) \underset{\bar{1}}{\overset{m-1}{\Delta}}. \tag{3.30}$$

То ж виявилося, що визначник Ван-дер-Монда порядку m (з елементами $k_1, k_2, \dots, k_m$) можна записати знову ж таки через визначник Ван-дер-Монда, але вже порядку $m-1$ (з елементами $k_2, k_3, \dots, k_m$). Повторюючи ті самі дії пониження порядку визначника Ван-дер-Монда, аж доки не виникне визначник другого порядку

$$\underset{j=m-1,\, m}{\overset{2}{\Delta}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_{m-1} & k_m \end{vmatrix} = k_m - k_{m-1},$$

врешті-решт, можна побудувати вираз-добуток

$$\begin{aligned} \overset{m}{\Delta} = (k_2 - k_1)\,(k_3 - k_1)(k_4 - k_1)\dots(k_{m-1} - k_1)(k_m - k_1)\times \\ \times(k_3 - k_2)(k_4 - k_2)\dots(k_{m-1} - k_2)(k_m - k_2)\times \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \times(k_{m-1} - k_{m-2})(k_m - k_{m-2})\times \\ \times(k_m - k_{m-1}) \end{aligned}$$

(що містить $m(m-1)/2$ множників), або стисліше

$$\overset{m}{\Delta} = \prod_{1 \le j < i \le m} \left(k_i - k_j\right) = \prod_{i=2}^{m} \prod_{j=1}^{i-1} \left(k_i - k_j\right). \tag{3.31}$$

Якщо у визначнику Ван-дер-Монда (3.29) від кожного рядка, починаючи з другого, відняти попередній, помножений на k_j $(1 < j < m)$, а потім виконати операції знаходження в стовпцях і винесення за знак визначника спільних множників, то отримаємо рівність

$$\overset{m}{\Delta} = (-1)^{1+j}\left(k_1 - k_j\right)\left(k_2 - k_j\right), \ldots, \left(k_{j-1} - k_j\right)\left(k_{j+1} - k_j\right), \cdots, \left(k_m - k_j\right) \underset{\bar{j}}{\overset{m-1}{\Delta}} =$$

$$= (-1)^{1+j} \underset{\bar{j}}{\overset{m-1}{\Delta}} \prod_{i \neq j}^{m} \left(k_i - k_j\right) \quad (j = \overline{2, m-1}) \qquad (3.32)$$

де

$$\underset{\bar{j}}{\overset{m-1}{\Delta}} = \overset{m-1}{\Delta}\left[k_1, k_2, \ldots, k_{j-1}, k_{j+1}, \ldots, k_m\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_{j-1} & k_{j+1} & \ldots & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_{j-1}^2 & k_{j+1}^2 & \ldots & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-2} & k_2^{m-2} & \ldots & k_{j-1}^{m-2} & k_{j+1}^{m-2} & \ldots & k_m^{m-2} \end{vmatrix}. \qquad (3.33)$$

Аналогічно, у випадку $j = m$

$$\overset{m}{\Delta} = (-1)^{1+m} \underset{\bar{m}}{\overset{m-1}{\Delta}} \prod_{i=1}^{m-1} (k_i - k_m) = \overset{m-1}{\Delta} \prod_{i=1}^{m-1} (k_m - k_i), \qquad (3.34)$$

$$\underset{\bar{m}}{\overset{m-1}{\Delta}} = \overset{m-1}{\Delta}\left[k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{m-1} \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_{m-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-2} & k_2^{m-2} & \ldots & k_{m-1}^{m-2} \end{vmatrix}. \qquad (3.35)$$

Визначник Ван-дер-Монда має, зокрема, такі властивості:

$$\overset{m}{\Delta}\left[-k_1, -k_2, \ldots, -k_m\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_m \\ (-k_1)^2 & (-k_2)^2 & \cdots & (-k_m)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-k_1)^{m-1} & (-k_2)^{m-1} & \cdots & (-k_m)^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{(m-1)m/2} \overset{m}{\Delta}[k_1, k_2, \dots, k_m];$$

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j \neq i} \left(k_j - k_i\right) = (-1)^{(m-1)m/2} \left(\overset{m}{\Delta}\right)^2;$$

$$\overset{m-1}{\underset{\bar{1}}{\Delta}} \overset{m-1}{\underset{\bar{2}}{\Delta}} \cdots \overset{m-1}{\underset{\bar{m}}{\Delta}} = \left(\overset{m}{\Delta}\right)^{m-2}. \tag{3.36}$$

Нехай $k_1, k_2, \cdots, k_m$ — корені алгебричного многочлена $P_m[k]$ степеня m. Вирази (3.30), (3.32)—(3.35), беручи до уваги (3.16), можна подати також і у вигляді

$$\overset{m}{\Delta} = (-1)^{m+1} \frac{P'_m(k_1)}{p_0} \overset{m-1}{\underset{\bar{1}}{\Delta}} = \cdots = (-1)^{m+j} \frac{P'_m(k_j)}{p_0} \overset{m-1}{\underset{\bar{j}}{\Delta}} = \cdots = (-1)^{2m} \frac{P'_m(k_m)}{p_0} \overset{m-1}{\underset{\bar{m}}{\Delta}}. \tag{3.37}$$

Звертаючись до (3.16) (чи до (3.37), (3.36)), можна з’ясувати, що

$$(-1)^{(m-1)m/2} p_0^m \left(\overset{m}{\Delta}\right)^2 = \prod_{i=1}^{m} P'_m[k_i]$$

Побудуємо **визначник (степеневий)**

$$\overset{m}{\Delta}_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{m-1} & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_{m-1}^2 & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^{m-2} & k_2^{m-2} & \cdots & k_{m-1}^{m-2} & k_m^{m-2} \\ k_1^\nu & k_2^\nu & \cdots & k_{m-1}^\nu & k_m^\nu \end{vmatrix}. \tag{3.38}$$

Легко бачити, що $\overset{m}{\Delta}_\nu = 0$ при $0 \le \nu \le m-2$ (в цьому випадку у визначнику (3.38) обов’язково знайдуться два однакових рядки) і $\overset{m}{\Delta}_\nu = \overset{m}{\Delta}$ при $\nu = m-1$. Легко також пересвідчитись, що

$$\frac{\overset{m}{\Delta}_\nu}{\overset{m}{\Delta}} = p_0 \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i^\nu}{P'_m[k_i]}.$$

На підставі характеристичного рівняння (3.2) можна писати (тут вважаємо, що $m=n$)

$$k_j^{\nu-n}\,P_n\left[k_j\right]=0,\quad \nu\ge n,\quad j=\overline{1,n}.$$

А отже для знаходження визначників (3.38) при $\nu\ge m=n$ можна укласти низку формул

$$\begin{aligned}
&p_0\overset{n}{\Delta}_n &&=-p_1\overset{n}{\Delta},\\
&p_1\overset{n}{\Delta}_n+p_0\overset{n}{\Delta}_{n+1} &&=-p_2\overset{n}{\Delta},\\
&p_2\overset{n}{\Delta}_n+p_1\overset{n}{\Delta}_{n+1}+p_0\overset{n}{\Delta}_{n+2} &&=-p_3\overset{n}{\Delta},\\
&p_3\overset{n}{\Delta}_n+p_2\overset{n}{\Delta}_{n+1}+p_1\overset{n}{\Delta}_{n+2}+p_0\overset{n}{\Delta}_{n+3} &&=-p_4\overset{n}{\Delta},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &&\;\;\dots\\
&p_{n-1}\overset{n}{\Delta}_n+p_{n-2}\overset{n}{\Delta}_{n+1}+\ldots+p_2\overset{n}{\Delta}_{2n-3}+p_1\overset{n}{\Delta}_{2n-2}+p_0\overset{n}{\Delta}_{2n-1} &&=-p_n\overset{n}{\Delta},
\end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_n\overset{n}{\Delta}_{n+j-1}+p_{n-1}\overset{n}{\Delta}_{n+j}+\ldots+p_2\overset{n}{\Delta}_{2n+j-3}+p_1\overset{n}{\Delta}_{2n+j-2}+p_0\overset{n}{\Delta}_{2n+j-1}=0$$
$$(j=1,2,\ldots).$$

Зрештою, наведену систему рівностей можна замінити системою

$$p_n\overset{n}{\Delta}_{n+j-1}+p_{n-1}\overset{n}{\Delta}_{n+j}+\ldots+p_2\overset{n}{\Delta}_{2n+j-3}+p_1\overset{n}{\Delta}_{2n+j-2}+p_0\overset{n}{\Delta}_{2n+j-1}=0,$$

$$j=-n+1,-n+2,\ldots,-1,1,2,\ldots\,.$$

Інколи виникає необхідність розглядати й визначники (3.38), коли ν є від'ємними цілими числами. При $\nu=-1$, зокрема, матимемо **степеневий визначник**

$$\overset{n}{\Delta}_{\nu=-1}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\ k_1&k_2&\cdots&k_n\\ k_1^2&k_2^2&\cdots&k_n^2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ k_1^{n-2}&k_2^{n-2}&\cdots&k_n^{n-2}\\ \dfrac{1}{k_1}&\dfrac{1}{k_2}&\cdots&\dfrac{1}{k_n}\end{vmatrix}=\left(k_1k_2\cdots k_n\right)^{-1}\begin{vmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_n\\ k_1^2&k_2^2&\cdots&k_n^2\\ k_1^3&k_2^3&\cdots&k_n^3\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ k_1^{n-1}&k_2^{n-1}&\cdots&k_n^{n-1}\\ 1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{p_0}{p_n}\overset{n}{\Delta},$$

а при $\nu=-2$ —

$$\overset{n}{\Delta}_{\nu=-2}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ \dfrac{1}{k_1^2} & \dfrac{1}{k_2^2} & \cdots & \dfrac{1}{k_n^2} \end{vmatrix}=\left(\frac{p_0}{p_n}\right)^2\frac{p_{n-1}}{p_0}\overset{n}{\Delta}.$$

Таким чином степеневі визначники є визначуваними через визначник Ван-дер-Монда, що також належить до степеневих.

Зважаючи на (3.10), можна, зокрема, знайти:

$$\overset{n}{\Delta}_{\nu}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & s_0-(n-1) \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} & s_1-k_1-k_2-\ldots-k_{n-1} \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_{n-1}^2 & s_2-k_1^2-k_2^2-\ldots-k_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_{n-1}^{n-2} & s_{n-2}-k_1^{n-2}-k_2^{n-2}-\ldots-k_{n-1}^{n-2} \\ k_1^{\nu} & k_2^{\nu} & \cdots & k_{n-1}^{\nu} & s_{\nu}-k_1^{\nu}-k_2^{\nu}-\ldots-k_{n-1}^{\nu} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} & s_1 \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_{n-1}^2 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_{n-1}^{n-2} & s_{n-2} \\ k_1^{\nu} & k_2^{\nu} & \cdots & k_{n-1}^{\nu} & s_{\nu} \end{vmatrix}.$$

При $\nu=n-1$ чи $\nu=n$ тут є сенс брати до уваги співвідношення (3. 13).

Зазначимо також, що відповідно до (3.28) і (3.31)

$$\left(\overset{n}{\Delta}\right)^2=\prod_{i=2}^{m}\prod_{j=1}^{i-1}\left(k_i-k_j\right)^2=p_0^{-2(n-1)}D(P_n)=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}. \qquad (3.39)$$

Характеристичні визначники (серед яких і визначник (3.39)) стають у нагоді при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, при аналізі і синтезі лінійних моделей динамічних систем з реальними чи оптимальними властивостями. Визначник Ван-дер-Монда, зокрема, відіграє важливу роль при побудові так званої фундаментальної функції, відповідної лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

3.5 Співвідношення між коренями характеристичних многочленів

Характеристичні многочлени можна еквівалентно записувати у різних формах, зокрема — у вигляді виразів (3.1) і (3.7) чи за допомогою **формули (Тейлора)**

$$P[k]=P[\alpha]+\frac{P'[\alpha]}{1!}(k-\alpha)+\frac{P''[\alpha]}{2!}(k-\alpha)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}[\alpha]}{n!}(k-\alpha)^n . \qquad (3.40)$$

Найуживанішими, є все-таки записи (3.1) і (3.7), хоча формула (3.40) як засіб аналізу нічим їм не поступається. Наведемо приклади співвідношень між коренями характеристичних многочленів, записаних власне у формі (3.1), (3.7).

Спочатку нагадаємо собі таке.

Якщо k_1 — корінь рівняння

$$P_n[k]\equiv p_0k^n+p_1k^{n-1}+\cdots+p_{n-1}k+p_n=0,$$

то многочлен $P_n[k]$, що стоїть в рівнянні ліворуч, ділиться без залишку на $(k-k_1)$, і часткою від ділення є многочлен $P_{n-1}[k]$ степеня $n-1$:

$$P_n[k]=(k-k_1)P_{n-1}[k].$$

В загальному ж випадку справджується рівність

$$P_n[k]=(k-k_1)P_{n-1}[k]+P_n[k_1],$$

засвідчуючи, що залишок від ділення многочлена $P_n[k]$ на $(k-k_1)$ дорівнює значенню цього многочлена при $k=k_1$. Якщо $P_n[k]$ ділиться без залишку на $(k-k_1)^r$, але вже не ділиться на $(k-k_1)^{r+1}$, то k_1 називають r-кратним коренем (коренем кратності r); в цьому випадку k_1 спільним коренем многочлена $P_n[k]$ і всіх його похідних до $r-1$ порядку включно.

Припустимо, що $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — корені многочлена

$$P_n[k]\equiv p_0k^n+p_1k^{n-1}+\cdots+p_{n-1}k+p_n,$$

а $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}$ — корені многочлена $P_n'[k]=\dfrac{dP_n[k]}{dk}$. Отже ці многочлени можна записати у вигляді

$$P_n[k]=p_0\prod_{i=1}^{n}(k-k_i), \quad P_n'[k]=np_0\prod_{i=1}^{n-1}(k-\kappa_i).$$

Можна угледіти, що

$$P_n'[k]=P_n[k]\sum_{i=1}^{n}(k-k_i)^{-1} . \qquad (3.41)$$

Припустимо, що $P_n[k]$ не має кратних коренів. Отже $P_n[\kappa_j] \neq 0$, $j = \overline{1, n-1}$. Підставляючи $k = \kappa_j$ у співвідношення (3.41), отримаємо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\kappa_j - k_i\right)^{-1} = 0 \qquad (j = \overline{1, n-1}), \tag{3.42}$$

а разом з тим і рівність

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\kappa_j - k_i\right)^{-1} = 0 . \tag{3.43}$$

Якщо многочлен $P_n[k] \equiv p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1} k + p_n$ має кратні корені, то рівняння $P_n[k] = 0$ і $P_n'[k] = 0$ мають спільні корені. А отже величини (3.42), (3.43) обертаються на нескінченність.

Припустимо, що $k_1, k_2, \ldots, k_n$ є коренями многочлена

$$P_n[k] \equiv p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1} k + p_n ,$$

не обов’язково попарно різними (!). Тоді

$$P_n'[k_i] = p_0 (k_i - k_1)(k_i - k_2) \ldots (k_i - k_{i-1})(k_i - k_{i+1}) \ldots (k_i - k_n) ,$$

де $n > 1$. Легко пересвідчитися, що при $n = m = 2$

$$\frac{p_0}{P_2'[k_1]} + \frac{p_0}{P_2'[k_2]} = \frac{1}{k_1 - k_2} + \frac{1}{k_2 - k_1} = 0 . \tag{3.44}$$

Аналогічно, при $m = 3$

$$\frac{p_0}{P_3'[k_1]} + \frac{p_0}{P_3'[k_2]} + \frac{p_0}{P_3'[k_3]} =$$

$$= \frac{1}{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)} + \frac{1}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} + \frac{1}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)} = 0 . \tag{3.45}$$

Зауважимо, що

$$p_0 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{P_\nu'[k_i]} = p_0 \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{1}{P_{\nu-1}'[k_i]} \frac{1}{k_i - k_\nu} + \prod_{i=1}^{\nu-1} \frac{1}{k_\nu - k_i} =$$

$$= p_0 \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{1}{P_{\nu-1}'[k_i]} \frac{1}{k_i - k_\nu} + \frac{p_0}{P_\nu'[k_\nu]} , \tag{3.46}$$

або

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{1}{P_\nu'[k_i]} = \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{1}{P_{\nu-1}'[k_i]} \frac{1}{k_i - k_\nu} .$$

Припустимо, умови типу (3.44), (3.45) виконуються для всіх $m \le n-1$:

$$p_0 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{P'_m[k_i]} = 0 \quad \left(m = \overline{2, n-1}, \quad \frac{p_0}{P'_2[k_1]} = \frac{1}{k_1 - k_2} \right). \tag{3.47}$$

При $m = n$ відповідно до (3.46) матимемо:

$$p_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'_n[k_i]} = \frac{1}{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\dots(k_1 - k_n)} +$$

$$+ \frac{1}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)\dots(k_2 - k_n)} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(k_i - k_1)(k_i - k_2)\dots(k_i - k_{i-1})(k_i - k_{i+1})\dots(k_i - k_n)} +$$

$$+ \dots + \frac{1}{(k_n - k_1)(k_n - k_2)\dots(k_n - k_{n-1})} =$$

$$= p_0 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P'_{n-1}[k_i]} \frac{1}{k_i - k_n} + \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_n - k_i} \tag{3.48}$$

З (3.47) при $m = n-1$ знайдемо величину

$$\frac{p_0}{P'_{n-1}[k_{n-1}]} = -p_0 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{P'_{n-1}[k_i]},$$

і підставляючи її в (3.48), отримаємо:

$$p_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'_n[k_i]} = p_0 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{P'_{n-1}[k_i]} \frac{k_{n-1} - k_i}{(k_i - k_n)(k_{n-1} - k_n)} + \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_n - k_i} =$$

$$= \frac{p_0}{k_n - k_{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{P'_{n-2}[k_i]} \frac{1}{(k_i - k_n)} + \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{k_n - k_i} \right). \tag{3.49}$$

Звертаючись знову до (3.47), при $m = n-2$ знайдемо величину

$$\frac{p_0}{P'_{n-2}[k_{n-2}]} = -p_0 \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{P'_{n-2}[k_i]}$$

і підставимо її в (3.49):

$$p_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'_n[k_i]} = \frac{p_0}{(k_n - k_{n-1})(k_n - k_{n-2})} \left(\sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{P'_{n-3}[k_i]} \frac{1}{(k_i - k_n)} + \prod_{i=1}^{n-3} \frac{1}{k_n - k_i} \right).$$

Подальше застосування описаного алгоритму перетворень з залученням співвідношень (3.47), врешті-решт приводить до рівності

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P_n'[k_i]} = 0 . \qquad (3.50)$$

Тепер є підстави стверджувати, що рівність (3.50) справджується за довільного $n > 1$. За наявності кратних коренів окремі доданки в (3.50) обертаються на нескінченність.

Звернемося тепер до многочлена

$$P_n'[k] \equiv np_0 k^{n-1} + (n-1)p_1 k^{n-2} + \cdots + p_{n-1} ,$$

що є похідною многочлена $P_n[k]$. Припустимо, що він має (не обов'язково попарно різні) корені $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}$. (вважатимемо, що $k_i < \kappa_i < k_{i+1}$). Йому можна поставити у відповідність величини

$$\frac{np_0}{P_n''[\kappa_i]} = \frac{1}{(\kappa_i - \kappa_2)(\kappa_i - \kappa_3)\ldots(\kappa_i - \kappa_{n-1})} , \quad i = \overline{1, n-1} .$$

З попереднього випливає, що тут повинна справджуватись рівність

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_n''[\kappa_i]} = 0 ,$$

подібна до (3.50).

Якщо многочлен

$$\frac{d^r}{dk^r} P_n[k] = P_n^{(r)}[k] =$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} p_0 k^{n-r} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} p_1 k^{n-r-1} + \ldots +$$

$$+ \frac{(r+2)!}{2!} p_{n-r-2} k^2 + (r+1)!\, p_{n-r-1} k + r!\, p_{n-r}$$

має корені $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_{n-r}$, то і для нього можна записати аналогічну до (3.50) рівність

$$\sum_{i=1}^{n-r} \frac{1}{P_n^{(r+1)}[\varsigma_i]} = 0 .$$

Зокрема, при $r = n-2$

$$P_n^{(n-2)}[k]=\frac{n!}{2}p_0k^2+(n-1)!\,p_1k+(n-2)!\,p_2\,,$$

$$\varsigma=\frac{-p_1\pm\sqrt{p_1^2-2\dfrac{n}{n-1}p_0p_2}}{n\,p_0}\,,$$

і справді,

$$\frac{1}{P_n^{(n-3)}[\varsigma_1]}+\frac{1}{P_n^{(n-3)}[\varsigma_2]}=\frac{1}{n!\,p_0\varsigma_1+(n-1)!\,p_1}+\frac{1}{n!\,p_0\varsigma_2+(n-1)!\,p_1}=0\,.$$

Величину $1/P_n'[k_i]$ формально можна тлумачити як котангенс кута, під яким лінія $z=z(k)=P_n[k]$ перетинає вісь Ok ортогональної системи координат Okz в точці $k=k_i$. Натомість, величину $1/P_n''[\kappa_i]$ формально можна тлумачити і як котангенс кута, під яким лінія $z'=z'(k)=P_n'[k]$ перетинає вісь Ok ортогональної системи координат Okz в точці $k_i<\kappa_i<k_{i+1}$, і як радіус кривини лінії $z=z(k)=P_n[k]$ в точці її формального екстремуму $k_i<k=\kappa_i<k_{i+1}$. У випадку всіх дійсних $k_1,k_2,\ldots,k_n$ формальні кут нахилу, екстремум, радіус кривини стають геометрично реальними.

3.6 Оцінки коренів дійсних характеристичних многочленів

Алгебричне рівняння

$$P_n[k]\equiv p_0k^n+p_1k^{n-1}+\cdots+p_{n-1}k+p_n=0\,,\;\; p_0\neq 0\,,$$

і відповідний йому многочлен $P_n[k]\equiv p_0k^n+p_1k^{n-1}+\cdots+p_{n-1}k+p_n$ називають дійсними, якщо коефіцієнти p_i ($i=\overline{0,n}$) є дійсними числами. Дійсний многочлен $P_n[k]$ за дійсних значень k також набуває тільки дійсних значень.

Комплексні корені дійсного алгебричного рівняння виникають парами спряжених комплексних чисел (а тому кількість комплексних коренів завжди парна). Отже, якщо в розкладі на множники лівої частини рівняння

$$P_n[k]\equiv k^n+p_1k^{n-1}+\cdots+p_{n-1}k+p_n=0$$

з дійсними коефіцієнтами зустрічається множник $(k-k_r)^{\beta_r}$, в якому k_r — комплексний корінь, то обов'язково існує і множник $(k-\tilde{k}_r)^{\beta_r}$, в якому $\tilde{k}_r$ — спряжене з k_r число. Об'єднуючи попарно такі множники, многочлен $P_n[k]$ можна записати як добуток тільки дійсних множників:

$$P_n[k]\equiv(k-k_1)^{\alpha_1}\ldots(k-k_\nu)^{\alpha_\nu}(k^2+a_1k+b_1)^{\beta_1}\ldots(k^2+a_\mu k+b_\mu)^{\beta_\mu}\,,\;\;\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i+2\sum_{j=1}^{\mu}\beta_j=n\,.$$

Тут безпосередньо фігурують дійсні корені $k_1,\ldots,k_\nu$, а 2μ комплексних коренів випливають як спряжені комплексні корені μ квадратних рівнянь $k^2+a_jk+b_j=0$ ($j=\overline{1,\mu}$), в яких $(a_j/2)^2-b_j<0$. Оскільки кожний з квадратних множників $k^2+a_jk+b_j$ додатний за будь-яких дійсних значень k, то вірним є твердження: якщо рівняння $P_n[k]\equiv p_0k^n+p_1k^{n-1}+\cdots+p_{n-1}k+p_n=0$ не має дійсних коренів, то за будь-яких k ліва частина цього рівняння має знак числа p_0. Звідси, в свою чергу, випливає твердження: якщо у рівнянні парного степеня $p_n/p_0<0$, то рівняння має принаймні два дійсних кореня різного знаку. Дійсне алгебричне рівняння непарного степеня завжди має принаймні один дійсний корінь. Всі корені рівняння $P_n[k]=0$ за модулем не перевищують числа

$$M=1+\frac{\Pi}{|\,p_0\,|},$$

де Π — найбільше з чисел $|\,p_1\,|$, $|\,p_2\,|$, …, $|\,p_n\,|$; це твердження справедливе і для рівнянь з комплексними коефіцієнтами.

Звернемося до матриці (вважатимемо, що $p_0>0$)

$$H=\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & & & & \\ & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & & \mathbf{0} & \\ & & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}_{n\times(2n)}.$$

Викреслимо у ній всі непарні стовпці і отримаємо квадратну матрицю

$$H_n=\begin{bmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & p_7 & p_9 & p_{11} & p_{13} & p_{15} & \cdots & 0 & 0 \\ p_0 & p_2 & p_4 & p_6 & p_8 & p_{10} & p_{12} & p_{14} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & p_3 & p_5 & p_7 & p_9 & p_{11} & p_{13} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & p_2 & p_4 & p_6 & p_8 & p_{10} & p_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_3 & p_5 & p_7 & p_9 & p_{11} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 & p_2 & p_4 & p_6 & p_8 & p_{10} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & p_3 & p_5 & p_7 & p_9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & p_2 & p_4 & p_6 & p_8 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-2} & p_n \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Їй відповідатиме визначник $T_n = \det H_n$. В свою чергу, визначнику T_n відповідатимуть діагональні мінори

$$T_1 = p_1,\ T_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_1 \end{vmatrix},\ T_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & p_5 \\ p_0 & p_2 & p_4 \\ 0 & p_1 & p_3 \end{vmatrix},\ T_4 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & p_7 \\ p_0 & p_2 & p_4 & p_6 \\ 0 & p_1 & p_3 & p_5 \\ 0 & p_0 & p_2 & p_4 \end{vmatrix},\ \ldots$$

Вірною є така **теорема (Раута-Гурвіца)**: кількість коренів з додатною дійсною частиною дійсного алгебричного рівняння $P_n[k]=0$ дорівнює кількості змін знаку в будь-якій з послідовностей

$$T_0 = p_0 > 0,\ T_1,\ \frac{T_2}{T_1},\ \frac{T_3}{T_2},\ \ldots,\ \frac{T_n}{T_{n-1}}$$

чи

$$T_0 = p_0 > 0,\ T_1,\ T_1T_2,\ T_2T_3,\ \ldots,\ T_{n-2}T_{n-1},\ p_n$$

(за умови, що всі $T_i \neq 0$; порушення цієї умови ускладнює обліковування). Водночас чинним є **критерій (Раута-Гурвіца)**: для того, щоб всі корені дійсного алгебричного рівняння $P_n[k]=0$ мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб справджувалися нерівності

$$T_0 > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0,\ \ldots,\ T_n > 0.$$

З додатності всіх T_i випливає додатність всіх коефіцієнтів p_i рівняння $P_n[k]=0$. Звідси можна виснувати таке твердження: для того, щоб всі корені дійсного алгебричного рівняння $P_n[k]=0$ з додатними коефіцієнтами p_i ($p_0 > 0, p_1 > 0, \ldots, p_n > 0$) мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб серед визначників $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n$ були додатними або всі визначники з парними, або всі визначники з непарними індексами.

Наголосимо також на таких класичних є твердженнях про дійсні корені.

1° **Правило знаків Декарта**. Кількість додатних коренів дійсного алгебричного рівняння $P_n[k]=0$ або дорівнює кількості N змін знаку в послідовності p_0, $p_1,\ \ldots,\ p_n$ коефіцієнтів (коефіцієнти, що дорівнюють нулю, до уваги не беруться), або є меншою від N на парне число.

Якщо зміна знаку не відбувається, то рівняння $P_n[k]=0$ додатних коренів не має; якщо знак змінюється один раз, то наявний точно один додатний корінь.

Застосування правила Декарта до многочлена $P_n[-k]$ веде до подібного твердження про від'ємні корені.

2° **Верхня границя дійсних коренів**.

1) Якщо перші r коефіцієнтів $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{r-1}$ дійсного алгебричного рівняння $P_n[k]=0$ є невід'ємними (p_r — перший зі всього нумерованого переліку від'ємний коефіцієнт), то всі додатні корені рівняння $P_n[k]=0$, якщо вони існують, є меншими

за $1+\sqrt[r]{g/p_0}$, де g — найбільше з абсолютних значень від'ємних коефіцієнтів. Застосовуючи це твердження до виразу $P_n[-k]$, матимемо подібного змісту нижню оцінку для від'ємних коренів.

2) Якщо при $k=\kappa$ многочлен $P_n[k]$ і похідні від нього $P_n'[k]$, $P_n''[k]$, …, $P_n^{(n)}[k]$ набувають додатних значень, то κ є верхньою границею дійсних коренів рівняння $P_n[k]=0$.

3° **Теорема Бюдана-Фур'є**. Нехай $N(k)$ — кількість змін знаку в послідовності чисел $P_n[k]$, $P_n'[k]$, $P_n''[k]$, …, $P_n^{(n)}[k]$, відповідних деякому довільному дійсному алгебричному рівнянню $P_n[k]=0$. Тоді кількість дійсних коренів рівняння $P_n[k]=0$, що лежать між двома дійсними числами a і $b>a$, які не є коренями цього рівняння ($P_n[a]\neq 0$, $P_n[b]\neq 0$), або дорівнює $N(a)-N(b)$, або є меншою за $N(a)-N(b)$ на парне число. При лiченні $N(a)$ члени послідовності, які дорівнюють нулю, до уваги не беруться; якщо при визначенні $N(b)$ виявиться, що $P_n^{(i)}(b)=0$ для $\mu+1\le i\le \nu-1$, а $P_n^{(\mu)}[b]\neq 0$ і $P_n^{(\nu)}[b]\neq 0$, то $P_n^{(i)}(b)$ слід замінити на $(-1)^{\nu-1}\operatorname{sgn}P_n^{(\nu)}(b)$. Кількість дійсних коренів рівняння $P_n[k]=0$, розташованих між дійсними числами a і $b>a$, непарна або парна залежно від того, чи будуть $P_n[a]$ і $P_n[b]$ мати протилежні або однакові знаки.

Приклад Нехай многочлен n-го степеня $P_n[k]=p_0k^n+p_1k^{n-1}+\ldots+p_{n-1}k+p_0$ з дійсними коефіцієнтами має тільки дійсні корені. Необхідно на підставі правила Декарта оцінити кількість від'ємних і додатних коренів цього многочлена, а також з'ясувати як співвідносяться знаки коефіцієнтів p_{r-1} і p_{r+1}, коли $p_r=0$ ($0<r<n$).

Позначимо через n_1 кількість змін знака у послідовності ненульових коефіцієнтів многочлена $P_n[k]$, а через n_2 — кількість змін знака у послідовності ненульових коефіцієнтів многочлена $P_n[-k]$. Оскільки зміні знака у послідовності ненульових коефіцієнтів многочлена $P_n[k]$ відповідає збереження знака у послідовності ненульових коефіцієнтів многочлена $P_n[-k]$, то загальна кількість змін знака в першій і другій послідовностях разом не може перевищувати степеня n многочлена $P_n[k]$. Тобто, $n_1+n_2\le n$. Отже, якщо многочлен $P_n[k]$ n-го степеня з дійсними коефіцієнтами має n дійсних коренів, то кількість додатних коренів не може бути меншою за n_1, а кількість від'ємних коренів — меншою за n_2.

Якщо $p_r=0$, а коефіцієнти p_{r-1} і p_{r+1} многочлена $P_n[k]$ мають однакові знаки, то коефіцієнти p_{r-1} і p_{r+1} супутнього многочлена $P_n[-k]$ також повинні мати однакові знаки. Це означає, що загальна кількість змін знака разом в послідовностях коефіцієнтів многочленів $P_n[k]$ і $P_n[-k]$ не перевищує $n-2$, а отже многочлен $P_n[k]$ всупереч висловленій умові не повинен би мати n дійсних коренів. Звідси випливає, що коефіцієнти p_{r-1} і p_{r+1} многочлена $P_n[k]$ мають різні знаки: $p_{r-1}p_{r+1}<0$.

3.7 Окрема ознака існування недійсних коренів дійсних характеристичних многочленів

Звернемо увагу на одну **достатню умову існування недійсних коренів характеристичного многочлена** [20].

Нехай як коефіцієнти p_i $(i=\overline{1,n})$, так і корені k_i $(i=\overline{1,n})$ характеристичного рівняння $P_n[k]\equiv k^n+p_1k^{n-1}+\dots+p_{n-1}k+p_n=0$ є дійсними числами. Беручи до уваги співвідношення

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

між середнім арифметичним і середнім геометричним будь-яких невід'ємних чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$, запишемо нерівність

$$\frac{k_1^2+k_2^2+\ldots+k_n^2}{n}\geq\sqrt[n]{k_1^2k_2^2\ldots k_n^2}\,. \tag{3.51}$$

На підставі формул Вієта (3.8) матимемо:

$$k_1^2+k_2^2+\ldots+k_n^2=(k_1+k_2+\ldots+k_3)^2-2(k_1k_2+k_1k_3+\ldots+k_{n-1}k_n)=p_1^2-2p_2\,,$$

$$k_1^2k_2^2\ldots k_n^2=p_n^2\,.$$

Таким чином, нерівність (3.51) можна подати у вигляді

$$\frac{p_1^2-2p_2}{n}\geq\sqrt[n]{p_n^2}\,. \tag{3.52}$$

Отже нерівність (3.52) справджується за умови, що всі корені характеристичного рівняння дійсні. Тоді, якщо для деякого характеристичного рівняння справджується нерівність

$$p_1^2-2p_2<n\sqrt[n]{p_n^2}\,, \tag{3.53}$$

то це означає, що корені такого рівняння не можуть бути всі дійсними. Тому, наприклад, якщо $p_n\neq 0$ і $p_1^2\leq 2p_2$ (зокрема, коли $p_1=p_2=0$), то незалежно від значень інших коефіцієнтів характеристичного рівняння серед коренів цього рівняння обов'язково наявні недійсні корені.

Таким чином, нерівність (3.53) є достатньою ознакою існування недійсних коренів характеристичного рівняння.

Наголосимо, що поняття **необхідності** і **достатності** не належать до прозорих. Дуже часто їх сенс доводиться уточнювати, спираючись на конкретний зміст задачі, яка розв'язується. Звернемо увагу на такі викладені в [32] міркування щодо цих понять.

Перш за все, зазначимо, що кожне твердження поєднує в собі умову (підставу) і висновок. Наприклад, твердження "Сума двох парних чисел є парним числом" містить умову "два доданки — парні" і висновок "сума — парна". Умова і висновок чітко розрізняються у твердженнях типу "якщо …, то …". Тому, щоб вирізнити умову і висновок у складних твердженнях іншого типу, інколи доводиться хоча б подумки зводити ці твердження до однозначно відповідних за суттю тверджень типу "якщо …, то …".

Поміняємо у твердженні місцями умову і висновок. В результаті отримаємо нове твердження — обернене до первісного (прямого). Якщо справджується пряме твердження, то це зовсім не означає, що справджується і обернене. Наприклад, з тверджень “якщо число ділиться на 5, то воно закінчується цифрою 0” і “якщо число закінчується цифрою 0, то воно ділиться на 5” вірним є тільки друге.

В одних задачах на підставі “умов” доводиться висновувати “висновок”, а в інших — з’ясовувати умови, за яких той чи інший висновок є вірним (чи невірним). Коли ж розв’язки цих задач стають відомі, при бажанні їх можна сформулювати в обох випадках однаково за формою — у вигляді твердження “якщо …, то …”.

В задачах другого типу, коли на підставі висновку окреслюють відповідні йому підстави, пересічно розрізняють умови необхідні і умови достатні.

Наприклад, можна стверджувати: “Щоб число ділилось на 5, достатньо, щоб воно ділилось на 10”. Тут “достатньо” не заміниш на “необхідно” і не поєднаєш з ним, оскільки нема потреби вимагати лише подільності на 10, щоб гарантувати подільність на 5 (45 ділиться на 5, хоча на 10 не ділиться). По суті, тут твердиться “Якщо число ділиться на 10, то воно ділиться й на 5”.

Натомість, у твердженні “Щоб число ділилось на 10, необхідно, щоб воно ділилось на 5” “необхідно” не заміниш на “достатньо” і не поєднаєш з ним, оскільки для достатності замало вимагати подільності на 5 (45 ділиться на 5, але на 10). По суті, тут знову ж таки стверджується “Якщо число ділиться на 10, то воно ділиться й на 5”.

“Необхідно” і “достатньо” цілком природно поєднуються у твердженні “Для того, щоб число ділилось на 10, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 2 і на 5”. Це твердження складають два твердження типу “якщо …, то …”: 1) “Якщо число ділиться на 10, то воно ділиться на 2 і на 5” і 2) “Якщо число ділиться на 2 і на 5, то воно ділиться на 10”. Перше з них висловлює необхідність подільності на 2 і на 5 для того, що мати властивість ділитися на 10, а друге — достатність властивості подільності на 2 і на 5 (достатність необхідного) для того, щоб мати властивість ділитися на 10. Друге твердження є оберненим до першого.

Зрозуміло, що у випадку несумісності умови і висновку поєднання їх у правильне твердження за допомогою одного з термінів “достатньо” чи “необхідно” (або ж обох разом) стає неможливим. Подібно до вірного твердження “Число ділиться на 3, якщо сума цифр числа ділиться на 3” не можливо написати твердження “Для того, щоб число ділилось на 7, …, щоб сума цифр числа ділилась на 7”, вставляючи замість багатокрапки “необхідно” чи/і “достатньо” (те, що 25 не ділиться на 7, а сума цифр 2 і 5 ділиться на 7, заперечує можливість написання “достатньо”; те, що 35 ділиться на 7, а сума цифр 3 і 5 не ділиться на 7, заперечує можливість написання “необхідно”).

Факт, що із справедливості прямого твердження не випливає справедливість оберненого твердження, і навпаки, означає те саме, що із необхідності не випливає достатність, і навпаки. Іншими словами, з того, що деякі умови є необхідними, ще не випливає, що вони є достатніми, а з того, що деякі умови є достатніми, ще не випливає, що вони є необхідними. Але, коли справджуються і пряме, і обернене твердження водночас, то це означає, що деякі умови є водночас і необхідними, і достатніми.

Наприклад, вірним є твердження “Якщо число ділиться на 3, то й сума цифр числа ділиться на 3”. Водночас справджується й обернене твердження “Число ділиться на 3, якщо сума цифр числа ділиться на 3”. Пряме твердження висловлює факт, що для подільності числа на 3 достатньо подільності на 3 суми цифр числа; обернене твердження висловлює факт, що для подільності числа на 3 необхідна подільність суми цифр числа на 3. Разом вони висловлюють, по суті, одне твердження “Для того, щоб число ділилося на 3, необхідно і достатньо, щоб сума цифр числа ділилася на 3”, або твердження того самого змісту “Число ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума цифр числа ділиться на 3” (“тоді” висловлює факт достатності, а “тільки тоді” — факт необхідності умови, яка полягає в подільності на 3 суми цифр числа).

Природним при розв'язуванні різних задач є просування від необхідного до достатнього, тобто стягування "кілець необхідності", аж доки не буде досягнуто межі достатності. Власне, на межі необхідності-достатності виникає можливість у твердженнях вживати словосполучення "тоді і тільки тоді". Але якщо "кільця необхідності" затягнути надмірно, то умова твердження, маючи ознаки достатності, втратить, однак, ознаки необхідності.

Ніщо, проте, не заперечує можливості просування до межі необхідності-достатності, навпаки, від достатнього до необхідного. Поставимо за мету "послабити ступінь достатності" умови існування недійсних коренів характеристичного рівняння.

В даному випадку наведена достатня умова ніяк не може бути необхідною. Цю обставину можна підкреслити таким прикладом [20]. Коренями рівняння $k^3-11k^2+36k-26=0$ є числа $k_1=1$, $k_2=5+i$, $k_3=5-i$ ($i=\sqrt{-1}$). Тут

$$p_1^2-2p_2=(-11)^2-2\cdot 36=49\,,\ 3\sqrt[3]{p_3^2}=3\sqrt[3]{26^2}\,,\ p_1^2-2p_2>3\sqrt[3]{p_3^2}\,.$$

Таким чином, серед коренів є недійсні, але це не зумовило справджуваність нерівності (3.53).

Тільки для квадратного рівняння $k^2+pk+q=0$ з дійсними p і q нерівність (3.53), яка зводиться до нерівності $p^2-2(q+|q|)<0$, стає необхідною і достатньою умовою існування недійсних коренів. Нерівність $p^2-2(q+|q|)<0$ при $q<0$ не можлива, а при $q>0$ вона перетворюється у нерівність $p^2-4q<0$, яка, як відомо, є ознакою відсутності дійсних коренів (або, що те саме, ознакою наявності недійсних коренів).

Такі самі міркування можна застосувати і до рівняння

$$P_n[\kappa]\equiv p_n\kappa^n+p_{n-1}{}_1\kappa^{n-1}+\cdots+p_1\kappa+1=0\,,$$

до якого зводиться рівняння $P_n[k]\equiv k^n+p_1k^{n-1}+\cdots+p_{n-1}k+p_n=0$ заміною $k=\dfrac{1}{\kappa}$ (за припущення, що $p_n\neq 0$ і, отже, жоден з коренів k_i ($i=\overline{1,n}$) не дорівнює нулю). Тоді достатня умова існування недійсних коренів $k_i=\dfrac{1}{\kappa_i}$ ($i=\overline{1,n}$) матиме вигляд

$$p_{n-1}^2-2p_{n-2}p_n<n\sqrt[n]{p_n^{2(n-1)}}\,. \tag{3.54}$$

Нерівність (3.54), зрештою, безпосередньо випливає з (3.53). З неї, зокрема, можна виснувати, що якщо обидва передостанні коефіцієнти p_{n-1} і p_n рівняння $k^n+p_1k^{n-1}+\cdots+p_{n-1}k+p_n=0$ дорівнюють нулю (або $p_{n-1}^2\leq 2p_{n-2}p_n$) і $p_n\neq 0$, то деякі з коренів цього рівняння є недійсними.

Подібного змісту умови можна отримати, вдаючись до сум (3.10) при $r=n$. До уваги, зрозуміло, слід брати лише суми парних степенів $s_{2\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$.

Для піднесення комплексного числа, заданого в алгебричній формі $\alpha=a+bi$, до цілого додатного степеня можна вдатись до формули бінома Ньютона і врахувати, що за будь-якого невід'ємного цілого r ($r=0,1,2,\ldots$)

$$i^{4r}=1\,,\ i^{4r+1}=i\,,\ i^{4r+2}=-1\,,\ i^{4r+3}=-i\,.$$

А можна спочатку це число (якщо воно не нуль) задати в тригонометричній формі

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\ ,$$

а потім при виконанні операції піднесення до цілого степеня n застосувати формулу Муавра (див. 1.5; формула вірна як для додатного, так і від'ємного цілого степеня):

$$\big(\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\big)^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

(модулем комплексного числа є величина $\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, а аргументом — величина $\operatorname{Arg}z=\arg z+2\pi r$, $r=0,1,2,\ldots$; $\arg z=\varphi$ — головне значення аргумента; φ визначається з рівностей

$$\cos\varphi=\frac{a}{\rho},\ \sin\varphi=\frac{b}{\rho}\ ).$$

Наведемо приклад [11].

Приклад 1 Піднесемо до степеня 6 число

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right). \tag{3.55}$$

За формулою Муавра

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}\right)=8\ .$$

Приклад засвідчує, що парний степінь комплексного числа може виявитись дійсним додатним числом. Але коли йдеться про алгебричне рівняння з дійсними коефіцієнтами, то слід пам'ятати, що комплексні корені існують спряженими парами. Отже, якщо число (3.55) є коренем алгебричного рівняння, то коренем цього рівняння буде і число

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right);$$

проте, і для нього

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\frac{6\cdot5\pi}{3}+i\sin\frac{6\cdot5\pi}{3}\right)=8\ .$$

З формули Муавра випливає, що степінь комплексного числа є дійсним числом, коли $n\varphi=2\pi r$ ($r=0,1,2,\ldots$). Але забезпечити додатність і дійсність парного степеня комплексного числа z (і спряженого з ним комплексного числа $\bar{z}$) одночасно за різних значень показника n степеня можливо лише тоді, коли $\varphi=0$, тобто коли z само є дійсним числом.

Отже наявність недійсних коренів певним чином обов'язково позначиться на значеннях сум (3.10), хоча у випадку многочлена з дійсними коефіцієнтами суми (3.10) завжди залишатимуться дійсними числами, про що свідчать рівності (3.14).

Таким чином, існує можливість замість однієї нерівності (3.51) оперувати цілою низкою нерівностей

$$s_{2\nu} \equiv k_1^{2\nu} + k_2^{2\nu} + \ldots + k_n^{2\nu} \geq n\sqrt[n]{k_1^{2\nu} k_2^{2\nu} \ldots k_n^{2\nu}} \equiv n\sqrt[n]{\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^{2\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

(за припущення, що $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — дійсні числа). Отже, беручи до уваги (3.14), можна стверджувати, що якщо $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — дійсні числа, то

$$s_2 = \frac{1}{p_0^2}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ 2p_2 & p_1 \end{vmatrix} \geq n\sqrt[n]{\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^2}, \quad s_4 = \frac{1}{p_0^4}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 3p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ 4p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix} \geq n\sqrt[n]{\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^4}, \ldots,$$

$$s_{2\nu} = \frac{1}{p_0^{2\nu}}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 & & & & & \\ 2p_2 & p_1 & p_0 & & & \mathbf{0} & \\ 3p_3 & s_2 & p_1 & p_0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ (2\nu-1)p_{2\nu-1} & p_{2\nu-2} & p_{2\nu-3} & p_{2\nu-4} & \cdots & p_1 & p_0 \\ 2\nu p_{2\nu} & p_{2\nu-1} & p_{2\nu-2} & p_{2\nu-3} & \cdots & p_2 & p_1 \end{vmatrix} \geq n\sqrt[n]{\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^{2\nu}} \quad (2\nu \leq n),$$

$$s_{2\nu} = \frac{1}{p_0^{2\nu}}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 & & & & & & \\ 2p_2 & p_1 & p_0 & & & \mathbf{0} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ np_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 & & & \\ & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 \\ & & & & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}_{2\nu\times 2\nu} \geq n\sqrt[n]{\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^{2\nu}} \quad (2\nu > n).$$

Якщо ж яка-небудь нерівність з наведеної послідовності перетвориться на протилежну за змістом нерівність, то це означатиме, що серед коренів характеристичного рівняння існують недійсні.

Приклад 2 Для алгебричного рівняння $k^3 - 11k^2 + 36k - 26 = 0$, про яке йшлося раніше, матимемо:

$$s_2 = \frac{1}{p_0^2}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ 2p_2 & p_1 \end{vmatrix} = 49 > 3\sqrt[3]{(-26)^2} = 3\sqrt[3]{\left(\frac{p_3}{p_0}\right)^2}, \quad s_4 = \frac{1}{p_0^4}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 3p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ 0 & p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{p_1(4p_0p_3-p_1p_2)}{p_0^3}+\frac{p_1^2-p_0p_2}{p_0^2}s_2=953>3\sqrt[3]{(-26)^4}=3\sqrt[3]{\left(\frac{p_3}{p_0}\right)^4}\ .$$

Подібно,

$$s_6=\frac{(p_1p_2-3p_0p_3)(p_1p_2-p_0p_3)}{p_0^4}-\frac{p_1(p_1p_2-2p_0p_3)}{p_0^3}s_2+\frac{p_1^2-p_0p_2}{p_0^2}s_4=13249>3\sqrt[3]{(-26)^6}\ ,$$

і нарешті,

$$s_8=-\frac{p_2(p_1p_2-3p_0p_3)(p_1p_2-p_0p_3)}{p_0^5}+\frac{(p_1p_2-p_0p_3)^2}{p_0^4}s_2-$$

$$-\frac{p_1(p_1p_2-2p_0p_3)}{p_0^3}s_4+\frac{p_1^2-p_0p_2}{p_0^2}s_6=-7647<3\sqrt[3]{(-26)^8}\ .$$

Зміст останньої нерівності не збігається зі змістом попередніх. А це є свідченням існування недійсних коренів.

3.8 Інтерполяційна задача

Нехай деяка означена в проміжку $[a,b]$ функція $f(x)$ в заданих точках x_0, x_1, …, x_n того самого проміжку $[a,b]$ набуває значень $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$. Потрібно за цими значеннями обчислити значення $f(x)$ при деякому новому значенні x, належному $[a,b]$, але відмінному від x_0, x_1, …, x_n. Так в загальному випадку формулюється найпростіша **інтерполяційна задача** (обчислити значення $f(x)$ при деякому новому значенні x з-поза $[a,b]$ означає розв'язати **задачу екстраполювання)**.

Задачу інтерполювання можна звести до знаходження покликаного наближено відтворювати функцію $f(x)$ з заданими властивостями такого многочлена якомога нижчого степеня m

$$M_m[x_i]=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)$$

($c_0,c_1,c_2,\ldots,c_m$ — сталі коефіцієнти, $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)$ — певний набір функцій), який би в точках x_i ($i=\overline{0,n}$) набував значень $f(x_i)$, тобто задовольняв рівності $M_m[x_i]=f(x_i)$ ($i=\overline{0,n}$).

Функцію $f(x)$ можна наближено ототожнити, зокрема, з цілим многочленом $L[x]$ якнайнижчого степеня, який би в точках x_i ($i=\overline{0,n}$) набував значень $f(x_i)$ (тих самих, що й функція $f(x)$). Знайти такий многочлен означає побудувати **інтерполяційну формулу (Лагранжа)**.

До многочлена $L[x]$, який би задовольняв умови

$$L[x_i] = f(x_i) \quad (i = \overline{0,n}), \tag{3.56}$$

можна дійти, зокрема, використовуючи многочлени

$$Q_r = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)\ldots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n)} \quad (r = \overline{0,n}),$$

які набувають значень 1 при $x = x_r$ і обертаються на 0 при $x = x_i$, коли $i \neq r$.

Очевидно, що многочлен

$$L[x] = \sum_{r=0}^{n} f(x_r) Q_r[x], \tag{3.57}$$

задовольнятиме всі умови (3.56). Степінь цього многочлена не вищий за n і тому умови (3.56) визначають його однозначно. Вираз (3.57) називають **інтерполяційним многочленом** Лагранжа, а точки x_i $(i = \overline{0,n})$ — **вузлами інтерполювання**.

Розглянемо також вираз

$$P[x] = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

який обертається на 0 власне у вузлах інтерполювання x_i $(i = \overline{0,n})$. Очевидно, що

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n) = \frac{P[x]}{x-x_r} \quad (x \neq x_r),$$

$$(x_r-x_0)(x_r-x_1)\ldots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n) =$$

$$= \lim_{x\to x_r} \frac{P[x]}{x-x_r} = \lim_{x\to x_r} \frac{P[x]-P[x_r]}{x-x_r} = P'[x_r].$$

В такому разі

$$Q_r = \frac{P[x]}{P'[x_r](x-x_r)} \quad (r = \overline{0,n}),$$

$$L[x] = \sum_{r=0}^{n} \frac{P[x]}{P'[x_r](x-x_r)} f(x_r). \tag{3.58}$$

Якщо $f(x)$ має в $[a,b]$ похідні всіх порядків до $(n-1)$-го включно, то її можна визначити за **інтерполяційною формулою Лагранжа** з додатковим членом [18]

$$f(x) = L[x] + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(m+1)!} P[x] =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{P[x]}{P'[x_r](x-x_r)} f(x_r) + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(m+1)!} P[x] \quad (a < \xi < b).$$

Вирізнимо два окремих випадки формули Лагранжа (3.58): при $n=1$

$$L_1[x]=y=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1,$$

при $n=2$

$$L_2[x]=y=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

Перша з наведених формул в геометричному сенсі є рівнянням прямої, що проходить через точки (x_0,y_0), (x_1,y_1); її називають **формулою лінійної інтерполяції**. Друга формула є рівнянням параболи (другого порядку), що проходить через точки (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) і має вісь симетрії, паралельну восі ординат; її називають **формулою квадратичної інтерполяції**.

Можна говорити, що інтерполяційна формула Лагранжа (3.58), яку запишемо у вигляді

$$L_n[x]=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}y_2+\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n,$$

є розв'язком "прямої" **інтерполяційної задачі**, якщо під "оберненою" розуміти задачу знаходження значення аргумента, відповідного заданому значенню функції. У формулі Лагранжа, що пов'язує змінні x,y як рівноправні. Тому будь-яку з них можна вважати незалежною. Якщо відомі значення $y_0,y_1,\ldots,y_{r-1},y_r,y_{r+1},\ldots,y_n$ змінної y функції $y=f(x)$ і відповідні значення $x_0,x_1,\ldots,x_{r-1},x_{r+1},\ldots,x_n$ змінної x, то значення x_r змінної x можна знайти за формулою

$$x_r=\frac{(y_r-y_1)(y_r-y_2)\ldots(y_r-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\ldots(y_0-y_n)}x_0+\frac{(y_r-y_0)(y_r-y_2)\ldots(y_r-y_n)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)\ldots(y_1-y_n)}x_1+\ \ldots+$$

$$+\frac{(y_r-y_0)\ldots(y_r-y_{r-1})(y_r-y_{r+1})\ldots(y_r-y_n)}{(y_{r-1}-y_0)\ldots(y_{r-1}-y_{r-2})\ldots(y_{r-1}-y_n)}x_{r-1}+$$

$$+\frac{(y_r-y_0)\ldots(y_r-y_{r-1})(y_r-y_{r+1})\ldots(y_r-y_n)}{(y_{r+1}-y_0)\ldots(y_{r+1}-y_r)(y_{r+1}-y_{r+2})\ldots(y_{r+1}-y_n)}x_{r+1}+\ \ldots+$$

$$+\frac{(y_r-y_0)(y_r-y_1)\ldots(y_r-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\ldots(y_n-y_{n-1})}x_n.$$

В задачі інтерполювання природно випливає поняття **визначника Ван-дер-Монда**. Дійсно, побудувати многочлен

$$y = f(x) \approx p_n + p_{n-1}x + \ldots + p_1 x^{n-1} + p_0 x^n$$

степеня не вищого за n, який би задовольняв умови

$$f(x_i) = y_i \ \ (i = \overline{0, n}),$$

означає розв'язати відносно коефіцієнтів $p_0, p_1, \ldots, p_n$ систему рівнянь

$$y_0 = f(x_0) = p_n + p_{n-1}x_0 + \ldots + p_1 x_0^{n-1} + p_0 x_0^n,$$

$$y_1 = f(x_1) = p_n + p_{n-1}x_1 + \ldots + p_1 x_1^{n-1} + p_0 x_1^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = f(x_n) = p_n + p_{n-1}x_n + \ldots + p_1 x_n^{n-1} + p_0 x_n^n.$$

Ця система відносно $p_0, p_1, \ldots, p_n$ є лінійною алгебричною, головним визначником якої є, власне, визначник Ван-дер-Монда

$$\overset{n+1}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Відомо, що якщо ранг матриці системи лінійних алгебричних рівнянь дорівнює кількості невідомих, то система має один-єдиний розв'язок. Якщо покласти $m = n$, то ознакою існування і єдиності розв'язку системи буде нерівність

$$\overset{n+1}{\Delta} \neq 0,$$

яка справджується, коли всі x_i $(i = \overline{0, n})$ попарно різні. В цьому випадку

$$p_i = \frac{\overset{n+1}{\Delta}_i}{\overset{n+1}{\Delta}} \quad (i = \overline{0, n}),$$

де

$$\overset{n+1}{\Delta}_0 = \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ y_1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix},$$

$$\overset{n+1}{\Delta}_1=\begin{vmatrix}1 & y_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ 1 & y_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & y_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix},$$

$$\overset{n+1}{\Delta}_j=\begin{vmatrix}1 & x_0 & \dots & x_0^{j-1} & y_0 & x_0^{j+1} & \dots & x_0^n\\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{j-1} & y_1 & x_1^{j+1} & \dots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & \dots & x_n^{j-1} & y_n & x_n^{j+1} & \dots & x_n^n\end{vmatrix}\quad (j=\overline{2,n-1}),$$

$$\overset{n+1}{\Delta}_n=\begin{vmatrix}y_0 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & y_0\\ y_1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & y_0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ y_n & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & y_0\end{vmatrix}.$$

Але припустимо, що деякі два x_i є однаковими, наприклад, $x_n=x_{n-1}$. Тоді $\overset{n+1}{\Delta}=0$. Можливі дві ситуації. Якщо $y_n\neq y_{n-1}$, то функція $f(x)$ — принаймні двозначна, а оскільки поліном — однозначна функція, то інтерполяційна задача розв'язку не має. Якщо ж $y_n=y_{n-1}$, то задача, виявляється, може мати розв'язок і як $(n+1)$-вузлова при

$$\overset{n+1}{\Delta}_0=\overset{n+1}{\Delta}_1=\ldots=\overset{n+1}{\Delta}_n=\overset{n+1}{\Delta}=0$$

і як (n)-вузлова при $\overset{n}{\Delta}\neq 0$.

Звернемося для прикладу до **тривузлової інтерполяційної задачі**. Позначимо

$$\overset{3}{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2\\ 1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\end{vmatrix},\ \overset{3}{\Delta}_0=\begin{vmatrix}1 & x_0 & y_0\\ 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\end{vmatrix},\ \overset{3}{\Delta}_1=\begin{vmatrix}1 & y_0 & x_0^2\\ 1 & y_1 & x_1^2\\ 1 & y_2 & x_2^2\end{vmatrix},\ \overset{3}{\Delta}_2=\begin{vmatrix}y_0 & x_0 & x_0^2\\ y_1 & x_1 & x_1^2\\ y_2 & x_2 & x_2^2\end{vmatrix}.$$

При $\overset{3}{\Delta}\neq 0$ матимемо звичайний розв'язок

$$p_0=\frac{\overset{3}{\Delta}_0}{\overset{3}{\Delta}},\ p_1=\frac{\overset{3}{\Delta}_1}{\overset{3}{\Delta}},\ p_2=\frac{\overset{3}{\Delta}_2}{\overset{3}{\Delta}}.$$

Якщо ж $\overset{3}{\Delta}=0$, то

$$p_0 = \frac{\overset{3}{\Delta}_{0(x_2=x_1)}}{\overset{3}{\Delta}_{(x_2=x_1)}} = \frac{(x_1 - x_0)(y_2 - y_1)}{0},$$

$$p_1 = \frac{\overset{3}{\Delta}_{1(x_2=x_1)}}{\overset{3}{\Delta}_{(x_2=x_1)}} = \frac{(x_0^2 - x_1^2)(y_2 - y_1)}{0},$$

$$p_2 = \frac{\overset{3}{\Delta}_{2(x_2=x_1)}}{\overset{3}{\Delta}_{(x_2=x_1)}} = \frac{x_0 x_1 (x_1 - x_0)(y_2 - y_1)}{0},$$

і отже $|p_0| = |p_1| = |p_2| = \infty$ при $x_1 \neq x_0, y_2 \neq y_1$, що можна тлумачити, власне, як відсутність розв'язку.

Припустимо, що $y_2 = y_1$, $x_1 \neq x_0$. В цьому випадку виникає невизначеність

$$p_i = \frac{\overset{3}{\Delta}_{i(x_2=x_1,\, y_2=y_1)}}{\overset{3}{\Delta}_{(x_2=x_1,\, y_2=y_1)}} = \frac{0}{0},$$

Розкриваючи її за правилом Лопіталя

$$p_i = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x_2}\overset{3}{\Delta}_{i(x_2=x_1)}}{\dfrac{\partial}{\partial x_2}\overset{3}{\Delta}_{(x_2=x_1)}},$$

отримаємо нетривіальний розв'язок

$$p_0 = \frac{y_0 - y_1}{(x_0 - x_1)^2}, \quad p_1 = -2x_1 \frac{y_0 - y_1}{(x_0 - x_1)^2},$$

$$p_2 = \frac{x_1^2 y_0 - 2x_0 x_1 y_1 + x_0^2 y_1}{(x_0 - x_1)^2}$$

(якщо, звичайно, $x_0 \neq x_1$).

Якщо задачу розглядати як двовузлову (точка ж (x_2, y_2) збігається з точкою (x_1, y_1)), то матимемо двочлен з коефіцієнтами

$$p_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}, \quad p_1 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}.$$

Можна вимагати, щоб у вузлах інтерполювання x_0, x_1, …, x_n не тільки сама належно диференційована в проміжку $[a,b]$ функція $f(x)$, але і її послідовні похідні набували наперед окреслених значень

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ \ldots,\ f^{(m_0)}(x_0);$$

$$f(x_1),\ f'(x_1),\ \ldots,\ f^{(m_1)}(x_1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x_n),\ f'(x_n),\ \ldots,\ f^{(m_n)}(x_n), \tag{3.58}$$

де m_i — невід'ємні цілі числа ($i=\overline{0,n}$; $\sum\limits_{i=0}^{n} m_i = m$). Подібно до попередньої задачі, можна знайти цілий многочлен $H[x]$ найнижчого степеня, який в кожному інтерполяційному вузлі x_i, разом зі своїми похідними до порядку m_i включно, набуває тих самих значень (3.58), що і функція $f(x)$ і її відповідні похідні. Вузли x_i в цьому випадку називаються інтерполяційними вузлами, відповідно кратності m_i+1.

Виявляється, що обов'язково існує, і до того є єдиний, многочлен $H[x]$ степеня не вищого за $m-1$, який задовольняє всім висунутим вимогам. Його називають інтерполяційним **многочленом Ерміта**.

Розглянемо інтерполяційну задачу, в якій задано такі параметри:

$$\begin{gathered} x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n; \\ y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n; \\ y_0',\ y_1',\ \ldots,\ y_{n-1}',\ y_n'; \\ y_0'',\ y_1'',\ \ldots,\ y_{n-1}'',\ y_n''. \end{gathered}$$

Отже треба побудувати многочлен степеня не вищого за m, який би задовольняв умови

$$H_m[x_i] = f(x_i) = y_i,\quad H_m'[x_i] = f'(x_i) = y_i',\quad H_m''[x_i] = f''(x_i) = y_i'' \quad (i=\overline{0,n}). \tag{3.59}$$

Шукатимемо його у вигляді

$$H_m[x] = L_n[x] + P_{n+1}[x]H_{m-(n+1)}[x], \tag{3.60}$$

де $L_n[x]$ — многочлен Лагранжа степеня n, побудований для системи інтерполяційних вузлів x_0, x_1, …, x_n; $P_{n+1}[x] = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$; $H_{m-(n+1)}[x]$ — деякий поки що невідомий многочлен степеня $m-(n+1)$. При $x=x_i$ $(i=\overline{0,n})$ матимемо рівність $H_m[x_i] = L_n[x_i]$, оскільки

$$P_{n+1}[x_i] = 0. \tag{3.61}$$

Знайдемо похідні від (3.60)

$$H'_m[x] = L'_n[x] + P'_{n+1}[x]H_{m-(n+1)}[x] + P_{n+1}[x]H'_{m-(n+1)}[x]\,,$$

$$H''_m[x] = L''_n[x] + P''_{n+1}[x]H_{m-(n+1)}[x] + 2P'_{n+1}[x]H'_{m-(n+1)}[x] + P_{n+1}[x]H''_{m-(n+1)}[x]\,,$$

і на підставі (3.59), (3.61) з'ясуємо, що

$$H_{m-(n+1)}[x_i] = \frac{y'_i - L'_n[x_i]}{P'_{n+1}[x_i]}, \quad H'_{m-(n+1)}[x_i] = \frac{y''_i - L''_n[x_i] - P''_{n+1}[x_i]H_{m-(n+1)}[x_i]}{2P'_{n+1}[x_i]}\,.$$

Таким чином, стає можливим побудувати вирази

$$H_{m-(n+1)}[x_0],\ \ H_{m-(n+1)}[x_1],\ \ \ldots,\ \ H_{m-(n+1)}[x_n];$$

$$H'_{m-(n+1)}[x_0],\ \ H'_{m-(n+1)}[x_1],\ \ \ldots,\ \ H'_{m-(n+1)}[x_n],$$

далі — многочлен $H_{m-(n+1)}[x]$, і нарешті — многочлен $H[x]$. Степінь многочлена $H[x]$ дорівнюватиме числу $3n-1$.

За допомогою многочлена Ерміта можна записати **формули (інтерполяційні Ерміта)** наближеного

$$f(x) = H[x]$$

і точного

$$f(x) = H[x] + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}\Pi[x]$$

відображення функції $f(x)$, де

$$\Pi[x] = (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\ldots(x-x_n)^{m_n+1}\,.$$

Якщо покласти всі m_i рівними нулю, то формули Ерміта зведуться до розглянутих раніше відповідних формул Лагранжа. Можна також обмежитися лише одним вузлом x_0, але кратності $n+1$, вимагаючи тепер від інтерполяційного многочлена $T[x]$ степеня не вищого за n, щоб він і n його послідовних похідних набували в точці x_0 тих самих значень, яких набувають в точці x_0 відповідно функція $f(x)$ та n її послідовних похідних. В такому разі можна отримати наближену

$$f(x) = T[x] = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

і точну (з додатковим членом у формі Лагранжа)

$$f(x) = T[x] + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad x_0 < c < x \ \ (\text{чи } x < c < x_0)$$

формули Тейлора.

Інтерполяційні задачі можна формулювати також з залученням узагальненої елементарної функції (1.26) чи **узагальненої елементарної функції**

$$F_m(x)=a_0+a_1\frac{\overset{m}{\delta}_1(x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}}+a_2\frac{\overset{m}{\delta}_2(x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}}+\ldots+a_j\frac{\overset{m}{\delta}_j(x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}}+\ldots+$$

$$+a_m\frac{\overset{m}{\delta}_m(x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}}=a_0+\frac{1}{\overset{m}{\Delta}}\sum_{i=1}^{m}a_i\,\overset{m}{\delta}_i(x-x_0), \tag{3.62}$$

де

$$\overset{m}{\delta}_1(x-x_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{e^{k_1(x-x_0)}-1}{k_1} & \dfrac{e^{k_2(x-x_0)}-1}{k_2} & \cdots & \dfrac{e^{k_m(x-x_0)}-1}{k_m} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \cdots & k_m^{m-1} \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

$$\overset{m}{\delta}_j(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{j-1} & k_2^{j-1} & \cdots & k_m^{j-1} \\ \dfrac{e^{k_1(x-x_0)}-1}{k_1} & \dfrac{e^{k_2(x-x_0)}-1}{k_2} & \cdots & \dfrac{e^{k_m(x-x_0)}-1}{k_m} \\ k_1^{j+1} & k_2^{j+1} & \cdots & k_m^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \cdots & k_m^{m-1} \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

$$\overset{m}{\delta}_m(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-2} & k_2^{m-2} & \cdots & k_m^{m-2} \\ \dfrac{e^{k_1(x-x_0)}-1}{k_1} & \dfrac{e^{k_2(x-x_0)}-1}{k_2} & \cdots & \dfrac{e^{k_m(x-x_0)}-1}{k_m} \end{vmatrix},$$

$$\overset{m}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \cdots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} = \frac{\partial^{m-1} \overset{m}{\Delta}_m (x-x_0)}{\partial x^{m-1}}_{\big| x-x_0},$$

$$\overset{m}{\Delta}_m (x-x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-2} & k_2^{m-2} & \cdots & k_m^{m-2} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_m(x-x_0)} \end{vmatrix},$$

$k_1, k_2, \ldots, k_m$ — корені алгебричного рівняння

$$B_m[k] \equiv b_0 k^m + b_1 k^{m-1} + \cdots + b_{m-1} k + b_m = 0,$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$ — дійсні сталі, x_0 — наперед заданий параметр. Очевидно, що наведена в 1.5 узагальнена функція є похідною за x від щойно наведеної функції через те, що $\overset{m}{\Delta}_i (x-x_0) = \overset{m}{\delta}{}_i' (x-x_0)$.

Функція (3.62) може правити за модель деякої дійсної функції $z(x) \in C^m$ від дійсної змінної x. Означимо коефіцієнти функції (3.62) як значення функції $z(x)$ та її похідних в точці $x = x_0$: $a_j = z^{(j-1)}(x_0)$, $j = \overline{0,m}$. Таким чином (див. також 1.5),

$$F_m(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\overset{m}{\delta}_i (x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}} = z(x_0) + \sum_{i=1}^{m} z^{(i-1)}(x_0) \frac{\overset{m}{\delta}_i (x-x_0)}{\overset{m}{\Delta}}. \qquad (3.63)$$

Легко бачити, що в деякій точці $x = x_0$ функція $F_m(x)$ “точно” відтворює функцію $z(x)$ в тому розумінні, що справджується низка рівностей

$$F_m(x_0) = z(x_0),\ F_m'(x_0) = z'(x_0),\ \ldots,\ F_m^{m-1}(x_0) = z_m^{m-1}(x_0).$$

Подамо $z(x)$ у вигляді

$$z(x) = F_m(x) + R_m(x),$$

де $R_m(x)$ — функція, що відображає невідповідність між $z(x)$, $F_m(x)$. Виявляється,

$$R_m(x) = \frac{1}{\overset{m}{\Delta}} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t} \xi(s) \overset{m}{\Delta}_m (x-s)\, ds dt,$$

де

$$\xi(s)=z^{(m+1)}(s)+b_1 z^{(m)}(s)+b_2 z^{(m-1)}(s)+\ldots+b_{m-1}z''(s)+b_m z'(s);$$

тут $b_1, b_2, \ldots, b_m$ є коефіцієнтами алгебричного рівняння (див. (1.28))

$$B_m[k]\equiv k^n+b_1 k^{n-1}+b_2 k^{n-2}+\cdots+b_{m-1}k+b_m=0,$$

а $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — його коренями.

Припустимо, що функція $z(x)$ задана на відрізку $[x_0, x_\text{k}]$ і всюди на цьому відрізку існують похідні $z'(x)$, $z''(x)$, …, $z^{(m+1)}(x)$. При цьому функція (3.63) в наперед заданих точках x_i, $i=\overline{0,m}$, $x_0<x_1<\ldots<x_m\le x_\text{k}$ (вузлах інтерполювання) збігається з функцією $z(x)$:

$$z(x_i)=F_m(x_i).$$

Тоді похибку апроксимації функції $z(x)$ функцією $F_m(x)$ визначатиме формула (М. Куліков)

$$\varepsilon(x)=z(x)-F_m(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)}{(n+1)!}\left(z^{(m+1)}(\zeta)-F_m^{(m+1)}(\zeta)\right)$$

$$(x_0\le x\le x_\text{k},\ x_0\le\zeta\le x_\text{k})$$

чи формула

$$\varepsilon(x)=z(x)-F_m(x)=$$

$$=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)}{(n+1)!}\left(\xi(\zeta)+\frac{1}{\overset{m}{\Delta}}\int_{x_0}^{\zeta}\xi(t)\frac{\partial^m \overset{m}{\Delta}_m(x-t)}{\partial x^m}\bigg|_{x=\zeta}dt\right)$$

$$(x_0\le\zeta\le x_\text{k}).$$

Такі самі результати можна отримати і тоді, коли замість функції (3.62) оперувати функцією (1.26).

4 ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЬ 4

4.1 Диференціальний оператор і диференціальне рівняння

Якщо кожній функції $y(x)$ з певної множини M поставлено у відповідність функцію $z(x)$ з множини N (M і N можуть частково чи повністю збігатись), то кажуть, що задано **оператор** A, який переводить, перетворює $y(x)$ в $z(x)$. Зокрема, якщо $z = y'(x) = dy(x)/dx$, то оператор $A[y(x)] = y'(x) = dy(x)/dx$ є **оператором диференціювання**. Оператор диференціювання ставить функції у відповідність знову ж функцію, тоді як функція покликана числу поставити у відповідність знову число.

Візьмемо функцію $F = F(u, v_0, v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n)$ (n+2)-х змінних u, v_0, $v_1, \ldots,$ $v_r, \ldots,$ v_n, які можна вважати рівноправними, незалежними, і поставимо їй у відповідність число нуль: $F \equiv F(u, v_0, v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n) = 0$. В цьому випадку змінні сукупно втрачають свою незалежність, а вираз $F = 0$ набуває змісту неявно заданої функції. Покладаючи $u = x$ (вважатимемо x незалежною змінною), $v_0 = y$ (вважатимемо y залежною змінною), $v_1 = y' = \dfrac{dy}{dx}$, $\ldots$, $v_r = y^{(r)} = \dfrac{d^{\nu}\left(d^{r-\nu} y / dx^{r-\nu}\right)}{dx^{\nu}} = \dfrac{dy^r}{dx^r}$ $(\nu = \overline{1, r})$, $\ldots$, $v_n = y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$, отримаємо вираз

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(r)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{4.1}$$

(тут $r = \overline{0, n}$), який називають **звичайним диференціальним рівнянням *n*-го порядку** (підкреслюючи тим самим відсутність частинних або особливих похідних). Натомість вираз

$$F\left(x, \frac{d^0}{dx^0}, \frac{d}{dx}, \ldots, \frac{d^r}{dx^r}, \ldots, \frac{d^n}{dx^n}\right) \tag{4.2}$$

можна назвати **звичайним диференціальним оператором**. Викладене в цьому абзаці є, по суті, описовим означенням поняття звичайного диференціального рівняння і оператора. Це означення підкреслює тісний взаємозв’язок між поняттями диференціального оператора і функції.

Властивості диференціальних операторів і рівнянь в значній мірі зумовлені властивостями функції $F = F(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$.

Функція $F = F(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$, означена (задана) в деякій області Ω, називається **однорідною функцією** степеня m відносно змінних $v_0, v_1, \ldots, v_n$, якщо

$$F(u, tv_0, tv_1, \ldots, tv_n) = t^m F(u, v_0, v_1, \ldots, v_n) . \tag{4.3}$$

Стосовно такої однорідної функції справедлива формула

$$\frac{\partial F(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_0} v_0 + \frac{\partial F(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_1} v_1 + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial F(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_n} v_n = mF(u, v_0, v_1, \ldots, v_n) . \tag{4.4}$$

Зокрема, якщо йдеться про однорідність першого степеня функції (4.1), коли в (4.3) $m = 1$, то формула (4.4) набуває вигляду

$$\frac{\partial F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{\partial y} y + \frac{\partial F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{\partial y'} y' + \ldots + \frac{\partial F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{\partial y^{(n)}} y^{(n)} =$$

$$= F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) . \tag{4.5}$$

Такого типу однорідність дозволяє заміною $\tilde{y} = y'/y$ знизити порядок диференціальних оператора і рівняння.

Вважатимемо, що функція $F = F(u, v_0, v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n)$ та її частинні похідні $\partial F / \partial v_0, \partial F / \partial v_1, \ldots, \partial F / \partial v_r, \ldots, \partial F / \partial v_n$ є неперервними в деякій області Ω точок $(u, v_0, v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n)$ (n+2)-вимірного простору. За таких умов рівняння (4.1) можна розв'язати відносно старшої похідної, і отримати похідне рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(r)}, \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{4.6}$$

щодо якого справедливим є таке **твердження про "існування та єдиність розв'язку"** [9, 24, 29, 38].

Якщо функція $f(u, v_0, v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_{n-1})$, яка відображає праву частину рівняння (4.6), і її похідні $\dfrac{\partial f}{\partial v_0}, \dfrac{\partial f}{\partial v_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial v_r}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial v_{n-1}}$ є неперервними в Ω-околі деякої точки $(u^0, v_0^0, v_1^0, \ldots, v_r^0, \ldots, v_{n-1}^0)$, то при $u = x$, $v_0 = y$, $v_1 = y' = \dfrac{dy}{dx}, \ldots,$ $v_r = y^{(r)} = \dfrac{d^r y}{dx^r}, \ldots,$ $v_n = y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ існує інтервал (a, b) і означена в ньому n разів неперервно диференційовна функція $y = y(x)$, що задовольняє рівняння (4.6) та **початкові умови**

$$y(x_0)=y_0,\, y'(x_0)=y_0',\, \ldots,\, y^{(r)}(x_0)=y_0^{(r)},\, \ldots,\, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\,. \qquad (4.7)$$

(є розв'язком рівняння (4.6) за умов (4.7)). Функція $y=y(x)$ з такими властивостями є єдиною.

При заданому $x=x_0$ кожній системі чисел $c_1=y_0$, $c_2=y_0'$, …, $c_{r+1}=y_0^{(r)}$, …, $c_n=y_0^{(n-1)}$ таких, що $(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}, \ldots, c_n)\in\Omega$, відповідатиме **розв'язок диференціального рівняння** (4.6), який (при фіксованому x_0 !) можна записати у вигляді

$$y=y(x, c_1, c_2 \ldots, c_n)\,. \qquad (4.8)$$

В підсумку отримаємо множину розв'язків вказаного диференціального рівняння, залежних від *n* параметрів $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Кожній системі $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ параметрів, такій що $(x_0, c_1, c_2 \ldots, c_n)\in\Omega$, відповідає свій розв'язок (4.8) диференціального рівняння (зі своїм інтервалом означення).

Серед всіх диференціальних операторів (4.2) особливий клас складають ті, які виявляють властивості **однорідності**

$$F[Cy]=CF[y] \qquad (4.9)$$

та **адитивності**

$$F[y_1+y_2]=F[y_1]+F[y_2]\,, \qquad (4.10)$$

де C — стала. Диференціальні оператори, які поєднують в собі властивості однорідності і адитивності, називаються **лінійними диференціальними операторами**. До лінійних, зокрема, належать найпростіші звичайні диференціальні оператори

$$\frac{d^0}{dx^0}, \frac{d}{dx}, \ldots, \frac{d^r}{dx^r}, \ldots, \frac{d^n}{dx^n}$$

(першого з наведених операторів це стосується чисто формально).

Серед **лінійних** найважливіше місце посідає **диференціальний оператор *n*-го порядку**

$$L[\cdot]\equiv p_0(x)\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+p_n(x)\frac{d^0}{dx^0} \qquad (4.11)$$

і відповідний вираз

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y\,, \qquad (4.12)$$

що за структурою нагадує ліву частину виразу (4.5) або збігається з нею, коли

$$\frac{\partial F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{\partial y^{(i)}}\equiv p_{n-i}(x),\; i=\overline{0, n}\,.$$

Лінійний диференціальний оператор сукупно поєднує в собі операції диференціювання, множення на відомі функції та додавання. Легко бачити, що для лінійного диференціального оператора n-го порядку (4.11) справджується умова

$$L[\sum_{k=1}^{m} c_k y_k] = \sum_{k=1}^{m} c_k L[y_k], \tag{4.13}$$

c_k — сталі. Це є проявом властивостей, власне, однорідності та адитивності (див. (4.9), (4.10)).

Рівняння

$$L[y] = L_n[y] = q(x), \quad a < x < b, \tag{4.14}$$

в якому $L_n[y]$ є лінійним диференціальним виразом n-го порядку (4.12), називається аналогічно — лінійним диференціальним n-го порядку. Рівняння ж

$$L[y] = L_n[y] = 0, \quad a < x < b, \tag{4.15}$$

яке є частковим випадком рівняння (4.14), коли $q(x) \equiv 0$, називають **лінійним однорідним диференціальним рівнянням *n*-го порядку**. Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ є розв'язками однорідного рівняння (4.15), то їх лінійна комбінація $\sum_{k=1}^{m} c_k y_k$ також є розв'язком цього рівняння. Це випливає з рівності (4.13).

Таким чином, **звичайним лінійним диференціальним рівнянням (n -го порядку)** називають рівняння, яке лінійно у сукупності співвідносить функцію $y = y(x)$ та її звичайні похідні $y' = \dfrac{dy(x)}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2 y(x)}{dx^2}, \ldots, y^{(n)} = \dfrac{d^n y(x)}{dx^n}$ (y — залежна, визначувана, шукана величина чи змінна, x — незалежна величина чи змінна):

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x); \tag{4.16}$$

функції $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_{n-1}(x), p_n(x)$, $q(x)$ вважаються заданими (при цьому $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ називають коефіцієнтами рівняння, а $q(x)$ — вільним членом).

Коли наголошують на тому, що рівняння (4.16) має порядок n, то є сенс вважати, що коефіцієнт $p_0(x)$ не дорівнює тотожно нулю (точки, в яких $p_0(x) = 0$, називаються особливими; питання про побудову розв'язків в околі таких точок вивчається окремо). То ж напевне існує проміжок

$$I = (a, b) \quad (a < x < b), \tag{4.17}$$

в якому $p_0(x) \neq 0$. Ділячи обидві (ліву і праву) частини рівняння (4.16) на $p_0(x)$ і вдаючись до позначень $p_i / p_0 = h_i$ ($i = \overline{1, n}$), $q / p_0 = f$, прийдемо до еквівалентного (в інтервалі (4.17)) рівняння

$$L[y] \equiv y^{(n)} + h_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x) y' + h_n(x) y = f(x), \tag{4.16$'$}$$

яке називають канонічним за формою запису. **Канонічні рівняння** вирізняються тим, що вони не мають якихось особливих розв'язків, пошук яких виходить за рамки загальної канонічної методології.

Рівняння (4.16) чи $(4.16')$, як вже зазначалося, називають неоднорідним (з правою частиною), якщо $q(x)\not\equiv 0$ чи $f(x)\not\equiv 0$. Натомість, рівняння

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0\,, \qquad (4.18)$$

та відповідне канонічне рівняння

$$L[y]\equiv y^{(n)}+h_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+h_{n-1}(x)y'+h_n(x)y=0 \qquad (4.18')$$

називають однорідними (без правої частини). Якщо однорідне рівняння (4.18) (чи $(4.18')$) має ті самі коефіцієнти, що й неоднорідне рівняння (4.16) (чи $(4.16')$, яке також належить до канонічних), то воно називається **однорідним рівнянням, відповідним неоднорідному рівнянню** (4.16) (чи $(4.16')$). Легко переконатись, що лінійне однорідне рівняння завжди має розв'язок $y\equiv 0$. Його пересічно називають тривіальним.

Нехай функції $q(x)$, $p_0(x)\neq 0$, $p_1(x)$, …, $p_n(x)$ неперервні в $I=(a,b)$. Можна довести, що для таких функцій рівняння (4.16) має єдиний розв'язок, означуваний в $I=(a,b)$, який задовольняє наперед задані початкові умови

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y_0'\,,\ y''(x_0)=y_0''\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\,.$$

Крім того, якщо функції $q(x)$, та $p_i(x)$ $(i=\overline{0,n})$ мають в $I=(a,b)$ неперервні похідні порядку ν, то розв'язок $y(x)$ має в $I=(a,b)$ неперервні похідні порядку $n+\nu$. Отже, щоби висловлене раніше твердження про "існування та єдиність розв'язку" було чинним і стосовно рівняння (4.16), $p_0(x),p_1(x),\cdots,p_{n-1}(x),p_n(x)$, $q(x)$ повинні бути принаймні неперервними функціями змінної x (зокрема, вони можуть бути сталими).

В окремих випадках важливу роль можуть відігравати **диференціальні операції зі степеневими рядами**.

Звернемося до необмежену кількість разів диференційовної функції $y=y(x)$. Означимо операцію $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^n y$ рекурентною формулою

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n y=x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-1}y\,,\ \left(x\frac{d}{dx}\right)y=x\frac{d}{dx}y=xy'\,.$$

Зокрема,

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^m=m^n x^m\,.$$

В свою чергу, кожному поліному $P_n=f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$ поставимо у відповідність операцію

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = c_0 y + c_1 x\frac{d}{dx}y + c_2\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 y + \ldots + c_n\left(x\frac{d}{dx}\right)^n y .$$

Запишемо поліном через його корені:

$$P_n = f(x) = c_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) .$$

Для нього матимемо:

$$\left(x\frac{d}{dx}-x_i\right)^n x^m = (m-x_i)x^m ,\ i=\overline{1,n} .$$

Звідси випливає, що

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)x^m = f(m)x^m .$$

З означеною операцією пов’язані такі відомі результати:

1) Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — два загалом довільні поліноми, але $g(x)$ не має невід’ємних цілих коренів. Тоді ряд

$$y = \frac{f(0)}{g(0)} + \frac{f(1)}{g(1)}x + \frac{f(2)}{g(2)}x^2 + \ldots + \frac{f(n)}{g(n)}x^n + \ldots$$

задовольняє диференціальне рівняння

$$g\left(x\frac{d}{dx}\right)y = f\left(x\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{1-x} ,$$

розв’язуваному через низку послідовних квадратур.

2) Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — два взаємно прості поліноми. При цьому степінь $g(x)$ є не нижчим за степінь $f(x)$; $g(0)=0$, але $g(1)$, $g(2)$, …, $g(n)$, … відмінні від нуля. Тоді ряд

$$y = 1 + \frac{f(1)}{g(1)}x + \frac{f(1)}{g(1)}\frac{f(2)}{g(2)}x^2 + \ldots + \frac{f(1)}{g(1)}\frac{f(2)}{g(2)}\cdots\frac{f(n)}{g(n)}x^n + \ldots$$

задовольняє однорідне лінійне диференціальне рівняння

$$g\left(x\frac{d}{dx}\right)y = f\left(x\frac{d}{dx}\right)xy .$$

3) Ряд

$$y = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^2 + \ldots + \left(\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2 x^n + \ldots$$

задовольняє диференціальне рівняння

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2x)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}y = 0 .$$

4.2 Лінійна залежність-незалежність функцій

Функції $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,y_m(x)$ називаються **лінійно залежними** в інтервалі (a,b), якщо хоча б одна з них є лінійною комбінацією інших для кожного $x\in(a,b)$. Іншими словами (більш формально), $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,y_m(x)$ — лінійно залежні в (a,b), якщо існують числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля $\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2>0\right)$, такі що

$$\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\ldots+\lambda_m y_m(x)=0 \quad \forall x\in(a,b). \tag{4.19}$$

Якщо ж тотожність (4.19) справджується в (a,b) лише за умови, що всі $\lambda_i=0$, то функції $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,y_m(x)$ називаються **лінійно незалежними** в (a,b).

В загальному випадку за **критерій лінійної залежності-незалежності функцій** править власне первісне означення цього поняття. Проте у випадках, коли властивості функцій

$$y_1(x),\, y_2(x),\ldots,y_m(x)$$

конкретно означувані, виникають підстави залучити до аналізу лінійної залежності-незалежності цих функцій більш формальні критерії, в яких первісне означення безпосередньо не прочитується.

Один різновид критеріїв будується з використанням визначників системи інтегралів від системи функції. Так, якщо $2m$ функцій

$$\begin{matrix} f_1(x), & f_2(x), & \ldots, & f_m(x), \\ \phi_1(x), & \phi_2(x), & \ldots, & \phi_m(x) \end{matrix}$$

інтегровні в проміжку $a\le x\le b$, то

$$\begin{vmatrix} \int_a^b f_1(x)\phi_1(x)\,dx & \int_a^b f_1(x)\phi_2(x)\,dx & \ldots & \int_a^b f_1(x)\phi_m(x)\,dx \\ \int_a^b f_2(x)\phi_1(x)\,dx & \int_a^b f_2(x)\phi_2(x)\,dx & \ldots & \int_a^b f_2(x)\phi_m(x)\,dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b f_m(x)\phi_1(x)\,dx & \int_a^b f_m(x)\phi_2(x)\,dx & \ldots & \int_a^b f_m(x)\phi_m(x)\,dx \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{m!}\int_a^b \overset{m}{\cdots}\int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_m) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(x_1) & f_m(x_2) & \ldots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \ldots & \phi_1(x_m) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \ldots & \phi_2(x_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m(x_1) & \phi_m(x_2) & \ldots & \phi_m(x_m) \end{vmatrix} dx_1\,dx_2\ldots dx_m .$$

Системі дійсних неперервних в $I=[a,b]$ функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$ можна поставити у відповідність **визначник Ґрама**

$$\Gamma(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & (y_1,y_2) & \ldots & (y_1,y_m)\\ (y_2,y_1) & (y_2,y_2) & \ldots & (y_2,y_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_m,y_1) & (y_m,y_2) & \ldots & (y_m,y_m)\end{vmatrix},$$

де

$$\left(y_i\,,\,y_j\right)=\int_a^b y_i(x)\,y_j(x)\,dx\quad\left(i,\,j=\overline{1,\,m}\right),$$

Йому відповідає квадратична форма

$$\int_a^b\left(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\ldots+\lambda_m f_m(x)\right)^2 dx\,,$$

яка, зрозуміло, є невід'ємною; вона дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всюди в $I=[a,b]$ тотожно справджується рівність

$$\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\ldots+\lambda_m f_m(x)=0\,.$$

Отже, щоби неперервні (!) в $I=(a,b)$ функції $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_m(x)$ були лінійно незалежними в $I=(a,b)$, необхідно і достатньо, щоб визначник Ґрама не був нулем: $\Gamma(y_1,y_2,\ldots,y_m)\neq 0$.

В той самий час, визначник

$$\begin{vmatrix}\int_a^b\left(f_2^2+f_3^2+\ldots+f_m^2\right)dx & -\int_a^b f_1\,f_2\,dx & \ldots & -\int_a^b f_1\,f_m\,dx\\ -\int_a^b f_2\,f_1\,dx & \int_a^b\left(f_1^2+f_3^2+\ldots+f_m^2\right)dx & \ldots & -\int_a^b f_2\,f_m\,dx\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\int_a^b f_m\,f_1\,dx & -\int_a^b f_m\,f_2\,dx & \ldots & \int_a^b\left(f_1^2+f_2^2+\ldots+f_{m-1}^2\right)dx\end{vmatrix},$$

завжди набуваючи невід'ємних значень, стає нулем тоді і тільки тоді, коли функції $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_m(x)$ відрізняються одна від одної лише сталими множниками, тобто коли всі вони є кратними одній з них. Це твердження випливає з того, що відповідна квадратична форма

$$\int_a^b\Big(\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_m^2\right)\left(f_1^2(x)+f_2^2(x)+\ldots+f_m^2(x)\right)-$$

$$-\left(\lambda_1 f_1\ (x)+\lambda_2 f_2\ (x)+\ldots+\lambda_m f_m(x)\right)^2\Big)dx=\int\limits_a^b\sum_{i>r}^{\overline{1,m}}\left(\lambda_i f_r(x)-\lambda_r f_i(x)\right)^2 dx$$

невід’ємна і при $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_m^2>0$ обертається на нуль тоді тільки тоді, коли $f_\nu(x)=\lambda_\nu\phi(x)$, $\nu=\overline{1,m}$ ($\phi(x)$ від ν не залежить).

Натомість, визначник

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix}\overset{b}{\int} f_1(x)\,f_1(x)\,dx\\ e^{a}\end{matrix} & \begin{matrix}\overset{b}{\int} f_1(x)\,f_2(x)\,dx\\ e^{a}\end{matrix} & \ldots & \begin{matrix}\overset{b}{\int} f_1(x)\,f_m(x)\,dx\\ e^{a}\end{matrix}\\ \begin{matrix}\overset{b}{\int} f_2(x)\,f_1(x)\,dx\\ e^{a}\end{matrix} & \begin{matrix}\overset{b}{\int} f_2(x)\,f_2(x)\,dx\\ e^{a}\end{matrix} & \ldots & \begin{matrix}\overset{b}{\int} f_2(x)\,f_m(x)\,dx\\ e^{a}\end{matrix}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{matrix}\overset{b}{\int} f_m(x)\,f_1(x)\,dx\\ e^{a}\end{matrix} & \begin{matrix}\overset{b}{\int} f_m(x)\,f_2(x)\,dx\\ e^{a}\end{matrix} & \ldots & \begin{matrix}\overset{b}{\int} f_m(x)\,f_m(x)\,dx\\ e^{a}\end{matrix} \end{vmatrix}$$

— невід’ємний і обертається на нуль тоді і тільки тоді, коли які-небудь дві з функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ тотожно збігаються.

Ознаки ж лінійної залежності-незалежності функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$, що є неперервними разом зі своїми похідними до (m–1)-го порядку включно, доцільно пов’язувати з властивостями **визначника Вронського (*W*-визначника)**

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m]\equiv W(x)\equiv\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m\\ y_1' & y_2' & \ldots & y_m'\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \ldots & y_m^{(m-1)}\end{vmatrix}.$$

Справедливим є таке твердження.

Щоби неперервні в $I=(a,b)$ разом зі своїми похідними до (m–1)-го порядку включно функції

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)\ \ (y_i(x)\in C^{m-1};\ x\in I,\ i=\overline{1,m})$$

були лінійно незалежними в $I=(a,b)$ достатньо (про необхідність не йдеться), щоби *W*-визначник цих функцій набував ненульового значення хоча б в одній з $I=(a,b)$ точці:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m]\equiv W(x)\neq 0, \quad x\in I.$$

Якщо ж ці функції є лінійно залежними, то

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m]\equiv W(x)\equiv 0, \quad x\in I$$

(остання умова є необхідною, але не достатньою).

У справедливості твердження можна впевнитись таким чином. Якщо $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ — лінійно залежні в $I=(a,b)$, то існують такі не всі рівні нулю числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, які забезпечують тотожність (4.19). Послідовно диференціюючи цю тотожність (m–1) разів, складемо нову систему тотожностей

$$\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\ldots+\lambda_m y_m(x)\equiv 0,$$

$$\lambda_1 y_1'(x)+\lambda_2 y_2'(x)+\ldots+\lambda_m y_m'(x)\equiv 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 y_1^{(m-1)}(x)+\lambda_2 y_2^{(m-1)}(x)+\ldots+\lambda_m y_m^{(m-1)}(x)\equiv 0,$$

Отримана однорідна система рівнянь-тотожностей, повинна, як було умовлено, мати нетривіальний розв'язок $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ (хоча б одне λ_i повинно бути відмінним від нуля) $\forall x\in(a,b)$. А таке можливе, коли визначник системи, яким є тут власне *W*-визначник, тотожно дорівнює нулю.

Наведемо деякі приклади.

Приклад 1 Степеневі функції x^k, $k=\overline{0,m-1}$ — лінійно незалежні в довільному (a,b). Справді, співвідношення

$$\lambda_1\cdot 1+\lambda_2 x+\ldots+\lambda_m x^{m-1}=0,$$

в якому не всі $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ дорівнюють нулю, не може справджуватись тотожно, бо, як відомо, алгебричне рівняння ($n-1$)-го степеня має не більше, як $n-1$ різних коренів. Та й, з іншого боку,

$$W[1,x,x^2,\ldots,x^{m-1}]=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \ldots & x^{m-1}\\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (m-1)x^{m-2}\\ 0 & 0 & 2! & \ldots & (m-2)(m-1)x^{m-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)!\end{vmatrix}=1\cdot 1!\,2!\ldots(m-1)!\neq 0.$$

Приклад 2 Експоненти e^{k_1x}, e^{k_2x}, …, e^{k_mx} в довільному (a,b) є лінійно незалежними, якщо $k_1,k_2,\ldots,k_m$ — різні числа. Тут

$$W\left[e^{k_1x},e^{k_2x},\ldots,e^{k_mx}\right]=\begin{vmatrix}e^{k_1x} & e^{k_2x} & \ldots & e^{k_mx}\\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & \ldots & k_me^{k_mx}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{m-1}e^{k_1x} & k_2^{m-1}e^{k_2x} & \ldots & k_m^{m-1}e^{k_mx}\end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2\ldots+k_m)x}\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \ldots & k_m^{m-1}\end{vmatrix}.$$

За будь-якого значення x величина $e^{(k_1+k_2+\ldots+k_m)x}$ відмінна від нуля (додатна). Натомість визначник праворуч в останньому рівнянні є визначником Ван-дер-Монда, який відмінний від нуля тоді і тільки тоді, коли всі $k_1,k_2,\ldots,k_m$ попарно різні, і дорівнює нулю, якщо хоча б два з чисел $k_1,k_2,\ldots,k_m$ — однакові (див. 3.4).

Приклад 3 Функції $x^\nu e^{kx}$, $\nu=\overline{0,m-1}$, є лінійно незалежними в довільному (a,b). Оскільки

$$\lambda_1e^{kx}+\lambda_2xe^{kx}+\ldots+\lambda_mx^{m-1}e^{kx}=e^{kx}\left(\lambda_1+\lambda_2x+\ldots+\lambda_mx^{m-1}\right)$$

і $e^{kx}\neq 0$, то для висновку про лінійну незалежність зазначених функцій важить висновок про аналогічне щодо степеневих функцій x^ν $(\nu=\overline{0,m-1})$. Власне, незалежність функцій x^ν $(\nu=\overline{0,m-1})$ (див. приклад 1) править на користь незалежності функцій $x^\nu e^{kx}$, $\nu=\overline{0,m-1}$.

Якщо в $I=(a,b)$ функції $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ — неперервно диференційовні (n–1) разів ($\psi_i(x)\in C^{n-1}$; $x\in I$, $i=\overline{1,n}$) і до того ж $\psi_1(x)\neq 0$ в I, то порядок W-визначника можна понизити:

$$W[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n]\equiv \psi_1^n\, W\left[\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)', \left(\frac{\psi_3}{\psi_1}\right)', \ldots, \left(\frac{\psi_n}{\psi_1}\right)'\right]\equiv 0, \quad x\in I. \qquad (4.20)$$

В цьому випадку ознаки лінійної залежності-незалежності функцій випливають з властивостей визначника

$$W\left[\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)', \left(\frac{\psi_3}{\psi_1}\right)', \ldots, \left(\frac{\psi_n}{\psi_1}\right)'\right]\equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)' & \left(\frac{\psi_3}{\psi_1}\right)' & \cdots & \left(\frac{\psi_n}{\psi_1}\right)' \\ \left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)'' & \left(\frac{\psi_3}{\psi_1}\right)'' & \cdots & \left(\frac{\psi_n}{\psi_1}\right)'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)^{(n-1)} & \left(\frac{\psi_3}{\psi_1}\right)^{(n-1)} & \cdots & \left(\frac{\psi_n}{\psi_1}\right)^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (4.21)$$

(n–1)-го порядку. При $n=2$ **формула пониження порядку визначника** збігається з формулою

$$\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)' = \frac{\psi_2'\psi_1 - \psi_2\psi_1'}{\psi_1^2} = \frac{W[\psi_1,\psi_2]}{\psi_1^2}.$$

Справедливим є таке твердження: щоби розв'язки $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ однорідного лінійного диференціального рівняння $L_n[y]=0$ n-го порядку з неперервними в $I=(a,b)$ коефіцієнтами $p_i(x)$ $(i=\overline{0,n})$ були лінійно незалежними в (a,b), необхідно і достатньо, щоб дотримувалась умова

$$W[y_1,y_2,\ldots,y_n]=W(x)\neq 0 \quad \forall x\in I=(a,b).$$

Це твердження випливає з таких міркувань.

Якщо $W(x)\neq 0$ в (a,b), то функції $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ лінійно незалежні, поза тим, чи є вони розв'язками рівняння $L_n[y]=0$, чи ні.

Припустимо тепер, що $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ є лінійно незалежними в (a,b) функціями і до того ж, розв'язками рівняння $L_n[y]=0$.

Доведемо, що $W(x)\neq 0$ всюди в (a,b). Припустимо протилежне: хай існує таке $x=x_0\in I=(a,b)$, для якого $W(x_0)=0$. Підберемо числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, не всі заразом рівні нулю $\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^2>0\right)$, так, щоб вони були розв'язками системи рівнянь

($y_1(x_0)$, $y_2(x_0)$, …, $y_n(x_0)$, $y_1'(x_0)$, $y_2'(x_0)$,…, $y_n'(x_0)$, $y_1^{(n-1)}(x_0)$, $y_2^{(n-1)}(x_0)$, …, $y_n^{(n-1)}(x_0)$ вважаються заданими коефіцієнтами)

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1 y_1(x_0)+\lambda_2 y_2(x_0)+\ldots+\lambda_n y_n(x_0)=0,\\&\lambda_1 y_1'(x_0)+\lambda_2 y_2'(x_0)+\ldots+\lambda_n y_n'(x_0)=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\lambda_2 y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+\lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

А це, звичайно, можна зробити, оскільки визначник останньої системи є нуль: $W(x_0)=0$. Тоді, згідно до викладеного вище, функція

$$y=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j(x)$$

буде розв'язком рівняння $L_n[y]=0$ з **нульовими початковими умовами**

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=0,$$

які випливають з (4.22). Тим самим початковим умовам задовольняє й тривіальний розв'язок $y(x)\equiv 0$. Але за теоремою "про існування і єдиність" заданим початковим умовам може задовольняти лише один розв'язок.

Отже, $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j(x)\equiv 0$ в (a,b), тобто функції $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ — лінійно залежні, що перечить зробленим припущенням. Залишається визнати, що $W(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$.

Вдаючись до первісного означення та формальних критеріїв лінійної залежності-незалежності функцій, можна виснувати безліч конструктивних наслідків. Тут обмежимося низкою таких з них:

— Означені в $I=(a,b)$ функції $\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots,\psi_n(x)$ сукупно є лінійно залежними, якщо хоча б одна з них — тотожний нуль. Такого ж висновку дійдемо, якщо серед цих функцій хоча б дві є тотожно однаковими.

— Якщо означені в $I=(a,b)$ функції $\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots,\psi_n(x)$ лінійно залежні в I, то вони є лінійно залежними і в будь-якому $\widetilde{I}=\left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right)\subset I$. З лінійної незалежності функцій в $I=(a,b)$ в загальному випадку, проте, зовсім не випливає, що вони лінійно незалежні і в довільному $\widetilde{I}=\left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right)\subset I$ (наприклад, функції x, $|x|$ — лінійно незалежні в $I=(a<0,b>0)$, але лінійно залежні в $\widetilde{I}=(a<b,b<0)$ чи $\widetilde{I}=(a>0,b>a)$). Якщо означені в $I=(a,b)$ функції $\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots,\psi_n(x)$ лінійно незалежні в $\widetilde{I}=\left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right)\subset I$, то вони лінійно незалежні і в $I=(a,b)$;

— Будь-яка підсистема системи лінійно незалежних в $I=(a,b)$ функцій $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ також містить лінійно незалежні в $I=(a,b)$ функції; система означених в $I=(a,b)$ функцій $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ є лінійно залежною в $I=(a,b)$, якщо будь-яка підсистема цієї системи лінійно залежна в $I=(a,b)$;

— Хай функції $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ означені і (n–1) разів неперервно диференційовні в $I=(a,b)$; тоді якщо $W[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n] \equiv W(x) \not\equiv 0$ при $x \in I$, то функції $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ лінійно незалежні в $I=(a,b)$ (про це вже йшлося раніше). Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ є лінійно незалежними в $I=(a,b)$ розв'язками рівняння $L_n[\, y \,]=0$, $m \le n$, то ці $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ задовольняють в $I=(a,b)$ умову $W(x)=W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)] \not\equiv 0$ і є лінійно незалежними у будь-якому $\widetilde{I}=(\widetilde{a}, \widetilde{b}) \subset I=(a,b)$.

Властивість функцій задовольняти лінійне однорідне диференціальне рівняння $L_n[\, y \,]=0$, зрозуміло, суттєво позначається на ознаках їх лінійної залежності-незалежності. Зокрема, W-визначник, складений для системи n розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння, або тотожно дорівнює нулю, або не обертається в нуль в жодній точці того проміжку, де коефіцієнти рівняння неперервні. То ж виникають підстави окреслити **критерій лінійної залежності-незалежності розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння** так:

— Щоби n розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ однорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку $L[\, y \,]=L_n[\, y \,]=0$ з неперервними у проміжку I коефіцієнтами $p_0(x) \ne 0, p_1(x), \ldots, p_n(x)$ можна було сукупно визнати лінійно залежними, необхідно і достатньо існування точки $x_0 \in I$, такої що $W(x_0)=W[y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)]=0$. Якщо точка $x_0 \in I$, в якій $W(x_0)=0$, існує, то $W(x)=W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]=0 \;\; \forall x \in I$;

— Щоби n розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння $L[\, y \,]=0$ n-го порядку з неперервними в I коефіцієнтами $p_0(x) \ne 0$, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ можна було сукупно визнати лінійно незалежними необхідно і достатньо існування точки $x_0 \in I$, такої що $W(x_0) \ne 0$. Якщо точка $x_0 \in I$, в якій $W(x_0) \ne 0$, існує, то $W(x) \ne 0 \;\; \forall\, x \in I$.

Оцінюючи властивості довільних функцій (наприклад, функцій x, $|x|$), довелося визнати, що з їх лінійної незалежності у деякому проміжку I зовсім не випливає їх лінійна незалежність на дещо вужчому проміжку $\widetilde{I} \subset I$. Звернемося тепер до функцій, що є розв'язками диференціального рівняння. А власне (на противагу висловленому щодо довільних функцій), доведемо, що якщо $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ — лінійно незалежні в деякому $I=(a,b)$ розв'язки однорідного лінійного рівняння (4.18) порядку $n \ge m$ з неперервними в $I=(a,b)$ коефіцієнтами $p_0(x) \ne 0$, $p_1(x)$, …, $p_n(x)$, то ці $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ є лінійно незалежними в будь-якому $\widetilde{I}=(\widetilde{a}, \widetilde{b}) \subset I=(a,b)$.

Припустимо протилежне: функції $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ — лінійно залежні в $\tilde{I} = \left(\tilde{a}, \tilde{b}\right) \subset I = (a, b)$. Тоді в $\tilde{I}$ справджується тотожність (4.19); до того ж, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^2 > 0$. Розглянемо функцію $y = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_m y_m(x)$. Вона є розв'язком рівняння (4.18). Нехай $x_0 \in \tilde{I}$; оскільки з тотожності (4.19) випливає, що $y(x_0) = y'(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, то за твердженням "про існування та єдиність" матимемо $y \equiv 0$, тобто $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_m y_m(x) \equiv 0$ в $I = (a, b)$ ($\forall x \in I$), до того ж $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^2 > 0$. Але це перечить умові лінійної незалежності функцій $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ в $I = (a, b)$.

Доведемо тепер, що якщо функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ — лінійно незалежні в деякому $I = (a, b)$ розв'язки однорідного лінійного рівняння (4.18) порядку $n \ge m$ з неперервними в $I = (a,b)$ коефіцієнтами $p_0(x) \ne 0$, $p_1(x)$, …, $p_n(x)$, то $W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)] \not\equiv 0$ в $I = (a, b)$.

При $m = 1$ останнє твердження є очевидним. При $m = 2$ воно випливає з **формули Остроградського-Ліувіля**, про яку йтиметься далі. Нехай $1 < m < n$; припустимо протилежне — $W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)] \equiv 0$ в $I = (a, b)$.

Розглянемо проміжок $I_0 = (\alpha, \beta)$, в якому $y_1 \ne 0$ ($\forall x \in I_0$). За передостаннім твердженням, розв'язки $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ — лінійно незалежні в I_0. За формулами (4.20), (4.21) пониження порядку визначника:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m] \equiv y_1^m \, W\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \ldots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right] \quad x \in I_0 . \tag{4.23}$$

Позначаючи

$$u_{0j} = y_j \ (j = \overline{1, m}), \qquad u_{1j} = \left(\frac{u_{0\,j+1}}{u_{01}}\right)' = \left(\frac{y_{j+1}}{y_1}\right)' \ (j = \overline{1, m-1}), \tag{4.24}$$

розглянемо функції, визначувані за рекурентною формулою $u_{ij} = \left(\dfrac{u_{i-1,\,j+1}}{u_{i-1,1}}\right)'$, в якій при фіксованому i $(1 \le i \le m-1)$ індекс j змінюється від 1 до $m - i$, а функції u_{0j} визначаються за формулами (4.24). Покажемо, що існує послідовність проміжків

$$I_{m-1} \subset I_{m-2} \subset \ldots \subset I_i \subset \ldots \subset I_0 \subset I \tag{4.25}$$

таких, що $u_{i1} \ne 0 \quad \forall x \in I_i$, $i = \overline{0, m-1}$. Зазначимо, що якщо існування проміжку I_{i-1} вдається підтвердити, то з'являються підстави функції u_{ij} $(j = \overline{1, m-i})$ вважати $n-1$ разів неперервно диференційовними в I_{i-1}.

То ж $u_{01} = y_1 \neq 0 \quad \forall x \in I_0$. Далі, $u_{11} = \left(\dfrac{u_{02}}{u_{01}}\right)' = \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' \not\equiv 0$ в I_0, оскільки якщо $u_{11} \equiv 0$, то $y_2 - c_1 y_1 \equiv 0$ ($c_1 = \text{const}$) в I_0, що заперечує лінійну незалежність функцій y_1, y_2 в I_0. Тому, завдяки неперервності функції u_{11} в I_0, існує проміжок $I_1 = (\alpha_1, \beta_1) \subset I_0$ такий, що $u_{11} \neq 0 \quad \forall x \in I_1$. Припустимо, що існування проміжка I_{i-1} з'ясовано. Доведемо існування проміжка I_i, $i = \overline{2, m-1}$. Маємо $u_{i1} = \left(\dfrac{u_{i-1,2}}{u_{i-1,1}}\right)' \not\equiv 0$ в I_{i-1}, оскільки якщо $u_{i1} \equiv 0$, то $u_{i-1,2} - c_1 u_{i-1,1} \equiv 0$, тобто $\left(\dfrac{u_{i-2,3}}{u_{i-2,1}}\right)' - c_1\left(\dfrac{u_{i-2,2}}{u_{i-2,1}}\right)' \equiv 0$ в I_{i-1}, звідки $u_{i-2,3} - c_1 u_{i-2,2} - c_2 u_{i-2,1} \equiv 0$ в I_{i-1}, …, $u_{0,i+1} - c_1 u_{0i} - c_2 u_{0i-1} - c_3 u_{0i-2} - \ldots - c_i u_{01} \equiv 0$ в I_{i-1}, тобто $y_{i+1} - c_1 y_i - c_2 y_{i-1} - c_3 y_{i-2} - \ldots - c_i y_1 \equiv 0$ в I_{i-1} ($c_1, c_2, \ldots, c_i = \text{const}$, $i = \overline{2, m-1}$), що заперечує лінійну незалежність функцій $y_1, y_2, \ldots, y_{i+1}$ в I_{i-1}. Тому, завдяки неперервності функції u_{i1} в I_{i-1}, існує проміжок $I_i \subset I_{i-1}$ такий, що $u_{i1} \neq 0 \quad \forall x \in I_i$. Таким чином, існування послідовності (4.25) підтверджується. Звернемося до вронскіяна $W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)] \not\equiv 0$, заданого в I_{m-1}. Застосовуючи формулу (4.23) $m-1$ разів поспіль, дійдемо такого результату:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m] = y_1^m W[u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1m-1}] =$$

$$= u_{01}^m u_{11}^{m-1} W[u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2m-2}] = \ldots = u_{01}^m u_{11}^{m-1} \ldots u_{m-3,1}^3 W\left[u_{m-2,1}, u_{m-2,2}\right] =$$

$$= u_{01}^m u_{11}^{m-1} u_{21}^{m-2} \ldots u_{m-3,1}^3 u_{m-2,1}^2 u_{m-1,1}, \quad x \in I_{m-1}.$$

Оскільки

$$u_{01} = y_1 \neq 0 \quad u_{i1} \neq 0 \ (i = \overline{1, m-1}) \ \forall x \in I_{m-1},$$

то справджується умова $W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)] \neq 0 \quad \forall x \in I_{m-1}$, що перечить зробленому припущенню. Отже

$$W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)] \not\equiv 0 \text{ в } I = (a, b).$$

Окрім загальних, привабливими для аналізу є деякі часткові властивості визначника Вронського.

Спираючись на алгоритм множення визначників (матриць), можна з'ясувати, що за довільних сталих c_{ij} справджується рівність

$$W[c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1m}y_m, c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2m}y_m, \ldots, c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \ldots + c_{mm}y_m] =$$

$$=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix} W[y_1, y_2, \dots, y_m].$$

Легко довести, що

$$W[y_1(f(x)), y_2(f(x)), \dots, y_m(f(x))] = (f'(x))^{\frac{m(m-1)}{2}} W[y_1(z), y_2(z), \dots, y_m(z)]$$

(під z слід розуміти вираз $f(x)$). Правило знаходження похідної $(uv)^{(n)}$ (див. (1.14)) дає можливість з'ясувати, що **визначнику Вронського** властива **однорідність**; вона полягає в тому, що визначник Вронського системи n функцій $\varphi(x) f_1(x)$, $\varphi(x) f_2(x)$, …, $\varphi(x) f_n(x)$ визначається за формулою

$$W[\varphi f_1, \varphi f_2, \dots, \varphi f_n] = \varphi^n W[f_1, f_2, \dots, f_n].$$

До речі, якщо в останньому виразі покласти $\varphi = f_1^{-1}$, то знову отримаємо формулу (4.23). Цікаво, що

$$\frac{d}{dx}\frac{W[y_1, \dots, y_{m-2}, y_m]}{W[y_1, \dots, y_{m-2}, y_{m-1}]} = \frac{W[y_1, \dots, y_{m-2}]\, W[y_1, \dots, y_{m-2}, y_{m-1}, y_m]}{(W[y_1, \dots, y_{m-2}\ y_{m-1}])^2}.$$

За допомогою останньої формули можна переконатися у вірності твердження: якщо визначник $W[y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m]$ обертається на нуль у всіх точках проміжку $I = (a, b)$, а визначник $W[y_1, y_2, \dots, y_{m-1}]$ — у жодній точці, то існують $m-1$ таких сталих c_1, c_2, …, c_{m-1}, що всюди в $I = (a, b)$ справджується тотожність

$$y_m = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{m-1} y_{m-1}.$$

Справді: система $m-1$ рівнянь

$$c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_1(x) + \dots c_{m-1}(x)\, y_{m-1}(x) = y_m(x),$$
$$c_1(x)\, y_1'(x) + c_2(x)\, y_1'(x) + \dots c_{m-1}(x)\, y_{m-1}'(x) = y_m'(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_1(x)\, y_1^{(m-2)}(x) + c_2(x)\, y_2^{(m-2)}(x) + \dots c_{m-1}(x)\, y_{m-1}^{(m-2)}(x) = y_m^{(m-2)}(x)$$

однозначно визначає $m-1$ функцій $c_1(x)$, $c_2(x)$, …, $c_{m-1}(x)$, оскільки головний визначник цієї системи за припущенням не дорівнює нулю; звідси, зокрема, випливає, що

$$\frac{dc_{m-1}}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{W[y_1, \dots, y_{m-2}, y_m]}{W[y_1, \dots, y_{m-2}, y_{m-1}]} = 0,\ c_{m-1} = \text{const};$$

за аналогією знайдемо, що й інші c_i є сталими: $c_i = \text{const}$, $i = \overline{1, m-2}$.

Нехай низка функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ у відкритому проміжку (a,b) має властивість підлягати **правилу знаків Декарта**: якою не була б низка a_1, a_2, …, a_n дійсних чисел, що разом не дорівнюють нулю, кількість розташованих в (a,b) нулів лінійної комбінації $F(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)$, не перевищує кількості змін знака в послідовності a_1, a_2, …, a_n. Тоді в інтервалі (a,b) низка функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ повинна володіти властивістю: визначники Вронського $W[\varphi_{\nu_1}(x),\varphi_{\nu_2}(x),\ldots,\varphi_{\nu_r}(x)]$, укладені для всіх можливих систем цілих чисел ν_1, ν_2, …, ν_r таких, що $1\le\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_r\le n$, не повинні обертатись на нуль ($r=\overline{1,n}$ — порядок визначника). При цьому будь-які два з цих визначників однакового порядку мають обов'язково однаковий знак.

Дійсно, якщо б вронскіян $W[\varphi_{\nu_1}(x),\varphi_{\nu_2}(x),\ldots,\varphi_{\nu_r}(x)]$ обертався на нуль в деякій точці $x_0\in(a,b)$, то можна було б знайти r сталих c_1, c_2, …, c_r, не рівних одночасно нулю ($c_1^2+c_2^2+\ldots+c_r^2>0$), що задовольняють систему однорідних рівнянь

$$c_1\varphi_{\nu_1}(x_0)+c_2\varphi_{\nu_2}(x_0)+\ldots+c_r\varphi_{\nu_r}(x_0)=0\,,$$

$$c_1\varphi'_{\nu_1}(x_0)+c_2\varphi'_{\nu_2}(x_0)+\ldots+c_r\varphi'_{\nu_r}(x_0)=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1\varphi_{\nu_1}^{(r-1)}(x_0)+c_2\varphi_{\nu_2}^{(r-1)}(x_0)+\ldots+c_r\varphi_{\nu_r}^{(r-1)}(x_0)=0\,,$$

і тому функція $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$ мала б в точці $x_0\in(a,b)$ нуль r-го порядку (оскільки нульового значення набували б як сама ця функція, так і $r-1$ послідовних похідних від неї). Але це суперечить тому, що в низці коефіцієнтів c_1, c_2, …, c_r можна простежити щонайбільше $r-1$ зміну знака. Отже в (a,b) всі визначники $W[\varphi_{\nu_1}(x),\varphi_{\nu_2}(x),\ldots,\varphi_{\nu_r}(x)]$ не дорівнюють нулю.

Пересвідчимося для прикладу що однаковий знак мають всі визначники ($n-1$)-го порядку. Нехай задано точку $x_0\in(a,b)$; знайдемо a_1, a_2, …, a_n на підставі системи рівнянь

$$a_1\varphi_1(x_0)+a_2\varphi_2(x_0)+\ldots+a_n\varphi_n(x_0)=0\,,$$

$$a_1\varphi'_1(x_0)+a_2\varphi'_2(x_0)+\ldots+a_n\varphi'_n(x_0)=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1\varphi_1^{(n-2)}(x_0)+a_2\varphi_2^{(n-2)}(x_0)+\ldots+a_n\varphi_n^{(n-2)}(x_0)=0\,,$$

$$a_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+a_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+a_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=1\,,$$

визначник якої, як стверджувалося раніше, в середині інтервалу $[a,b]$ має $n-1$ нуль (нуль ($n-1$)-го порядку в точці $x_0\in(a,b)$). Тому послідовність чисел a_1, a_2, …, a_n змінює знак точно $n-1$ раз.

Покладемо

$$(-1)^{n-1}W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\ldots,\varphi_n(x_0)]=W .$$

Тоді всі числа

$$a_1W=W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\ldots,\varphi_n(x_0)],\ -a_2W=W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\ldots,\varphi_n(x_0)],$$

$$a_3W=W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\ldots,\varphi_n(x_0)],\ \ldots,$$

тобто вронскіяни ($n-1$)-го порядку, обчислені в точці $x_0\in(a,b)$, будуть мати однаковий знак.

Викладене розкриває зміст необхідної умови застосовності правила Декарта. Зокрема, для застосовності правила Декарта необхідно, щоб в інтервалі (a,b) відношення $\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$, $\dfrac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}$, …, $\dfrac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$ всі залишалися додатними та або всі постійно спадали, або всі постійно зростали при зростанні x.

Справді, з ознак застосовності правила Декарта (з окреслених властивостей визначників Вронського) випливає, що, по-перше, всі функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ мають однаковий знак (випадок $r=1$), а по-друге, однаковий знак мають величини (випадок $r=2$)

$$W[\varphi_1,\varphi_2]=\varphi_1^2\frac{d}{dx}\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ W[\varphi_2,\varphi_3]=\varphi_2^2\frac{d}{dx}\frac{\varphi_3}{\varphi_2},\ \ldots,$$

в чому можна впевнитися й безпосередньо.

Нехай α — ціле число, $1\le\alpha\le n$. Перелічені вище умови, що накладаються на визначники Вронського, разом з $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ задовольняють $n-1$ функція

$$\Phi_1=-\frac{d}{dx}\frac{\varphi_1}{\varphi_\alpha},\ \Phi_2=-\frac{d}{dx}\frac{\varphi_2}{\varphi_\alpha},\ \ldots,\ \Phi_{\alpha-1}=-\frac{d}{dx}\frac{\varphi_{\alpha-1}}{\varphi_\alpha},$$

$$\Phi_\alpha=\frac{d}{dx}\frac{\varphi_{\alpha+1}}{\varphi_\alpha},\ \ldots,\ \Phi_{n-2}=\frac{d}{dx}\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_\alpha},\ \Phi_{n-1}=\frac{d}{dx}\frac{\varphi_n}{\varphi_\alpha}.$$

Це випливає з того, що

$$W[\varphi_{\nu_1},\varphi_{\nu_2},\ldots,\varphi_{\nu_i},\varphi_\alpha,\varphi_{\nu_{i+1}},\ldots,\varphi_{\nu_r}]=\varphi_\alpha^{r+1}W\left[\frac{\varphi_{\nu_1}}{\varphi_\alpha},\frac{\varphi_{\nu_2}}{\varphi_\alpha},\ldots,\frac{\varphi_{\nu_i}}{\varphi_\alpha},1,\frac{\varphi_{\nu_{i+1}}}{\varphi_\alpha},\ldots,\frac{\varphi_{\nu_r}}{\varphi_\alpha}\right]=$$

$$=\varphi_\alpha^{r+1}W\left[-\left(\frac{\varphi_{\nu_1}}{\varphi_\alpha}\right)',-\left(\frac{\varphi_{\nu_2}}{\varphi_\alpha}\right)',\ldots,-\left(\frac{\varphi_{\nu_i}}{\varphi_\alpha}\right)',\left(\frac{\varphi_{\nu_{i+1}}}{\varphi_\alpha}\right)',\ldots,\left(\frac{\varphi_{\nu_r}}{\varphi_\alpha}\right)'\right],$$

де $r<n-1,\ 1\le\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_i<\nu_\alpha<\nu_{i+1}<\ldots<\nu_r$.

Виявляється, що необхідна умова застосовності правила Декарта одночасно є й достатньою.

4.3 Структура загального розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння

Система n лінійно незалежних в (a,b) розв'язків $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ **однорідного рівняння** (4.18) з неперервними в $I=(a,b)$ коефіцієнтами $p_i(x)$ $(i=\overline{0,n})$ називається **фундаментальною системою розв'язків** цього рівняння в $I=(a,b)$. Щоб розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку (4.18) з неперервними коефіцієнтами $p_i(x)$ $(i=\overline{0,n})$, достатньо знайти його фундаментальну систему розв'язків. Це випливає з таких міркувань.

З викладеного раніше відомо, що довільна лінійна комбінація

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \tag{4.21}$$

де c_i $(i=\overline{1,n})$ — довільні сталі, розв'язків $y_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$, належних фундаментальній системі, є також розв'язком рівняння (4.18) в (a,b); причому

$$a<x<b, \quad -\infty<y,\, y',\dots,\, y^{(n-1)}<+\infty\,. \tag{4.22}$$

Виявляється, справедливим є й обернене твердження: будь-який розв'язок диференціального рівняння (4.18) в (a,b) можна подати у вигляді лінійної комбінації його фундаментальної системи розв'язків, відповідно підбираючи значення сталих c_i $(i=\overline{1,n})$.

Підтвердимо, що функція (4.21) за відповідного добору сталих $c_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ відображає розв'язок, що задовольняє будь-які початкові умови з області (4.22).

Нехай деякий розв'язок $z(x)$ задовольняє початкові умови

$$z(x_0)=z_0, z'(x_0)=z_0',\dots,z^{(n-1)}(x_0)=z_0^{(n-1)}\,, \tag{4.23}$$

де x_0 — довільне число з проміжка $I=(a,b)$, а $z_0, z_0', \dots, z_0^{(n-1)}$ — будь-які задані числа. Вважаючи c_k невідомими і беручи до уваги (4.23), укладемо систему n рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0)=z_0\,,\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0)=z_0'\,,\ \dots,\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0)=z_0^{(n-1)}\,. \tag{4.24}$$

Визначник $W(x_0)$ системи (4.24) не дорівнює нулеві, оскільки $y_1(x),\dots,y_n(x)$ — лінійно незалежні в (a,b) розв'язки рівняння $L[y]=0$. А тому існує єдина система чисел $c_1^0,\dots,c_n^0$, що задовольняють (4.24). Якщо підставити їх в (4.21), то отримаємо розв'язок

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i^0 y_i(x),$$

який задовольняє початкові умови (4.23), — ті самі, що і $z(x)$. Але на підставі "твердження про існування та єдиність", залишається визнати, що $z(x) = y(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

Підкреслимо, що фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння $L[y] = 0$ з неперервними коефіцієнтами існує завжди. Пересвідчимося в цьому, пам'ятаючи, що існує єдиний розв'язок рівняння $L[y] = 0$, який за будь-якого заданого $x = x_0 \in I = (a,b)$ задовольняє умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ за будь-яких значень параметрів y_0, y_0', y_0'', …, $y_0^{(n-1)}$.

Нехай $y_i(x), i = \overline{1,n}$ — розв'язки однорідного рівняння $L[y] = 0$, які задовольняють деякі конкретні початкові умови

$$y_1(x_0) = y_{10}^{(0)}, y_2(x_0) = y_{20}^{(0)}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}^{(0)};$$

$$y_1'(x_0) = y_{10}^{(1)}, y_2'(x_0) = y_{20}^{(1)}, \ldots, y_n'(x_0) = y_{n0}^{(1)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)},$$

$$x_0 \in I = (a,b).$$

Вимагатимемо лише, щоби параметри $y_{i0}^{(j)}$ ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,n-1}$) задовольняли умову

$$\det\left[y_{i0}^{(j)}\right] = \begin{vmatrix} y_{10}^{(0)} & y_{20}^{(0)} & \cdots & y_{n0}^{(0)} \\ y_{10}^{(1)} & y_{20}^{(1)} & \cdots & y_{n0}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \cdots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Через те, що $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = W(x_0) = \det\left[y_{i0}^{(j)}\right] \neq 0$, функції y_1, y_2, …, y_n утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння $L[y] = 0$.

Вимагатимемо тепер, щоб розв'язки задовольняли початкові умови

$$y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, \ldots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, y_2''(x_0) = 0, \ldots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_\nu(x_0) = 0, y_\nu'(x_0) = 0, \ldots,$$

$$y_\nu^{(\nu-2)}(x_0)=0,\ y_\nu^{(\nu-1)}(x_0)=1,\ y_\nu^{(\nu)}(x_0)=0,\ldots,y_\nu^{(n-1)}(x_0)=0\ ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0,\ldots,y_n^{(n-2)}(x_0)=0,\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1\ ,$$

які компактно можна записати у вигляді:

$$y_\nu^{(m)}(x_0)=\begin{cases}1 & \text{при } m=\nu-1,\\ 0 & \text{при } m\neq\nu-1,\end{cases}$$

де $\nu=\overline{1,n}$; $m=\overline{0,n-1}$. Такі **початкові умови** та відповідні їм **розв'язки** називаються **нормальними** (в точці $x=x_0$).

Визначник Вронського наведеної системи розв'язків $y_\nu(x)$, $\nu=\overline{1,n}$ при $x=x_0$ набуває значення

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Оскільки $W(x_0)\neq 0,$ то система розв'язків $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ не містить в собі ознак лінійної залежності (для залежної системи визначник Вронського був би тотожно рівним нулю).

Якщо $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ — **нормальна фундаментальна система розв'язків** рівняння $L[y]=0$, то розв'язок задачі з довільними початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

має вигляд

$$y=y_0y_1(x)+y_0'y_2(x)+\ldots+y_0^{(n-1)}y_n(x)\ .$$

4.4 Відтворення однорідного рівняння за системою його розв'язків

Щоб побудувати диференціальне рівняння, яке задовольняє деяка функція, задана рівнянням

$$F(x,y;c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$$

(x і y — змінні; $c_1,c_2,\ldots,c_n$ — вільні сталі), треба це рівняння n разів продиференціювати за x чи y, а потім n отриманих рівнянь та первісне рівняння $F(x,y;c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$ згорнути в одне, усуваючи вільні сталі c_1, c_2, $\ldots$, c_n.

Нехай, наприклад, задано рівняння

$$F(x,y,\alpha,\beta)\equiv \alpha x+(y-\beta)^2=0 .$$

Йому відповідатимуть різні диференціальні рівняння залежно від змісту величин α, β, x і y:

$$4xy'^2=-\alpha ,$$

коли α — стала-параметр, β — вільна стала (стала інтегрування), x — незалежна змінна;

$$2xy'-y=-\beta$$

коли α — вільна стала, β — стала-параметр, x — незалежна змінна;

$$\alpha x'^2+4x=0$$

коли α — стала-параметр, β — вільна стала, y — незалежна змінна;

$$(y-\beta)x'-2x=0$$

коли α — вільна стала, β — стала-параметр, y — незалежна змінна;

$$2xy''+y'=0$$

коли α, β — вільні сталі, x — незалежна змінна;

$$2xx''-x'^2=0$$

коли α, β — вільні сталі, y — незалежна змінна.

Тут враховано, що

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F'_x=\alpha,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=F'_y=2(y-\beta),$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=F''_{xx}\right)=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial xy}=F''_{xy}\right)=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial yx}=F''_{yx}\right)=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=F''_{yy}=2;$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{dx/dy}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\alpha}{2(y-\beta)},$$

$$\frac{d^2y}{d^2x}=y''=-\frac{F''_{xx}F'^2_y-2F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}F'^2_x}{F'^3_y}=-\frac{\alpha^2}{4(y-\beta)^3},$$

$$\frac{d^2x}{d^2y}=x''=-\frac{F''_{yy}F'^2_x-2F''_{yx}F'_yF'_x+F''_{xx}F'^2_y}{F'^3_x}=-\frac{2}{\alpha}.$$

Нехай функції $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ є неперервно диференційовними n разів у деякому проміжку $I=(a,b)$ $(a<x<b)$. Якщо до того ж $W(x)=W[y_1, y_2,\ldots,y_n]\neq 0$ $\forall x\in I$, то існує єдине однорідне лінійне рівняння n-го порядку (див. $(4.18')$)

$$L[y]\equiv y^{(n)}+\frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)}+\cdots+\frac{p_{n-1}}{p_0(x)}(x)\,y'+\frac{p_n(x)}{p_0(x)}y=0 \qquad (4.25)$$

з неперервними в проміжку $I=(a,b)$ коефіцієнтами $p_1(x)/p_0(x)$, $p_2(x)/p_0(x),\ldots$, $p_n(x)/p_0(x)$, для якого задані функції $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ складають фундаментальну систему розв'язків.

Доведемо це твердження таким чином.

Нехай $p_1(x)/p_0(x)$, $p_2(x)/p_0(x),\ldots$, $p_n(x)/p_0(x)$ — коефіцієнти шуканого рівняння. Функції $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ повинні задовольняти це рівняння, а отже справедливою є система n рівнянь

$$L[y]\equiv y_\nu^{(n)}+\frac{p_1(x)}{p_0(x)}y_\nu^{(n-1)}+\cdots+\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}y_\nu'+\frac{p_n(x)}{p_0(x)}y_\nu=0 \quad (\nu=\overline{1,n}).$$

Головний визначник цієї системи не дорівнює нулю:

$$D\equiv\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \cdots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_2' & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \cdots & y_n' & y_n \end{vmatrix}=(-1)^{n(n-1)/2}W[y_1,y_2,\ldots,y_n]\neq 0\ \forall x\in I$$

(інакше систему функцій $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ не можна було б визнати фундаментальною системою розв'язків однорідного рівняння). А тому коефіцієнти $p_1(x)/p_0(x)$, $p_2(x)/p_0(x),\ldots$, $p_n(x)/p_0(x)$ визначаються однозначно:

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)}=-\frac{1}{W_n(x)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=-\frac{W_n'(x)}{W_n(x)},\ \ldots,$$

$$\frac{p_j(x)}{p_0(x)}=\frac{(-1)^j}{W_n(x)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-j-1)} & y_2^{(n-j-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-j-1)} & y_n^{(n-j-1)} \\ y_1^{(n-j+1)} & y_2^{(n-j+1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-j+1)} & y_n^{(n-j+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$\frac{p_n(x)}{p_0(x)}=\frac{(-1)^n}{W_n(x)}\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_{n-1}'' & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{4.26}$$

Підставляючи (4.26) в (4.25), отримаємо шукане рівняння

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n, y] \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_{n-1}(x) & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n)}(x) & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (4.27)$$

На підставі першої рівності (4.26) легко віднайти **формулу Остроградського—Ліувіля**

$$W(x) \equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}\,. \qquad (4.28)$$

З формули Остроградського-Ліувіля (4.28), зокрема, випливає таке твердження: для того, щоби розв’язки $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ однорідного лінійного рівняння n-го порядку (4.25) були лінійно незалежними в $I=(a,b)$, необхідно і достатньо, щоби вронскіян $W(x) \equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не обертався на нуль хоча б одній точці $x = x_0 \in I$.

Нехай функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, що є неперервно диференційовними n разів у деякому проміжку $I=(a,b)$ $(a<x<b)$, складають фундаментальну систему розв’язків рівняння (4.18) у зазначеному проміжку. Це, зокрема, означає, що $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0\ \forall x \in I$.

Розглянемо **диференціальний вираз** ($n-1$)-го порядку

$$\Psi_{ni}[y] = \frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]} =$$

$$= \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{i-1} & y & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{i-1}' & y' & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_{i-1}^{(n-1)} & y^{(n-1)} & y_{i+1}^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (4.29)$$

Легко бачити, що $\Psi_{ni}[y_j] = 0$ при $j \neq i$ і $\Psi_{ni}[y_i] = 0$. Отже похідна

$$\Lambda_{ni}[y] = \frac{d}{dx}\Psi_{ni}[y] \qquad (4.30)$$

представляє собою диференціальний вираз n-го порядку, який обертається на нуль тоді, коли $y = y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. А це означає, що $\Lambda_{ni}[y]$ лише незалежним від y множником може відрізнятись від диференціального оператора

$$L_n[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y\,.$$

Цей множник $\mu_i(x)$ можна знайти, порівнюючи коефіцієнти при $y^{(n)}$ у виразах $L_n[y]$ і $\Lambda_{ni}[y]$. У виразі $L_n[y]$ при $y^{(n)}$ фігурує функція $p_0(x)$, а у виразі $\Lambda_{ni}[y]$ — та сама функція $\pi_{0i}(x)$, що й при $y^{(n-1)}$ у виразі $\Psi_{ni}[y]$:

$$\pi_{0i}(x) = (-1)^{n+i}\frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]} \equiv \frac{\partial \ln W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}{\partial y_i^{(n-1)}}\,.$$

Таким чином,

$$\mu_i(x) = \frac{\pi_{0i}(x)}{p_0(x)} = \frac{(-1)^{n+i}}{p_0(x)}\frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]} =$$

$$= \frac{1}{p_0(x)}\frac{\partial \ln W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}{\partial y_i^{(n-1)}}\,. \tag{4.31}$$

Отже, вирази (4.29)—(4.31) також (подібно до рівняння (4.27)) дають змогу за відомою фундаментальною системою розв'язків відтворити відповідне диференціальне рівняння $L_n[y] = 0$.

Розглянемо приклад.

Легко пересвідчитися, що функції $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ складають фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$L_3[y] \equiv x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0 \tag{4.32}$$

в областях

$$-\infty < x < 0, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \quad |y''| < +\infty\,;$$

$$0 < x < +\infty, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \quad |y''| < +\infty\,.$$

Укладемо вирази

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = W(x) = 2x^3\,;$$

$$\Psi_{31}[y] = \frac{1}{2x^3}\begin{vmatrix} y & y_2 & y_3 \\ y' & y_2' & y_3' \\ y'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \frac{1}{2x^3}\begin{vmatrix} y & x^2 & x^3 \\ y' & 2x & 3x^2 \\ y'' & 2 & 6x \end{vmatrix} = \frac{x}{2}y'' - 2y' + \frac{3}{x}y\,,$$

$$\Psi_{32}[y] = \frac{1}{2x^3}\begin{vmatrix} y_1 & y & y_3 \\ y_1' & y' & y_3' \\ y_1'' & y'' & y_3'' \end{vmatrix} = \frac{1}{2x^3}\begin{vmatrix} x & y & x^3 \\ 1 & y' & 3x^2 \\ 0 & y'' & 6x \end{vmatrix} = -y'' + \frac{3}{x}y' - \frac{3}{x^2}y\,,$$

$$\Psi_{33}[y]=\frac{1}{2x^3}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix}=\frac{1}{2x^3}\begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix}=\frac{1}{2x}y''-\frac{1}{x^2}y'+\frac{1}{x^3}y\,; \qquad (4.33)$$

$$\Lambda_{31}[y]=\frac{d}{dx}\Psi_{31}[y]\equiv\frac{x}{2}y'''-\frac{3}{2}y''+\frac{3}{x}y'-\frac{3}{x^2}y\,,$$

$$\Lambda_{32}[y]=\frac{d}{dx}\Psi_{32}[y]\equiv -y'''+\frac{3}{x}y''-\frac{6}{x^2}y'+\frac{6}{x^3}y\,,$$

$$\Lambda_{33}[y]=\frac{d}{dx}\Psi_{33}[y]\equiv\frac{1}{2x}y'''-\frac{3}{2x^2}y''+\frac{3}{x^3}y'-\frac{3}{x^4}y\,. \qquad (4.34)$$

Можна переконатися, що функція $y_1=x$ задовольняє рівняння

$$\Psi_{31}[y]=1\,,\ \Psi_{32}[y]=0\,,\ \Psi_{33}[y]=0 \ \text{(див. (4.33))},$$

$$\Lambda_{31}[y]=0\,,\ \Lambda_{32}[y]=0\,,\ \Lambda_{33}[y]=0 \ \text{(див. (4.34))},$$

тоді як функція $y_2=x^2$ — рівняння

$$\Psi_{31}[y]=0\,,\ \Psi_{32}[y]=1\,,\ \Psi_{33}[y]=0\,,\ \Lambda_{31}[y]=0\,,\ \Lambda_{32}[y]=0\,,\ \Lambda_{33}[y]=0\,,$$

а функція $y_3=x^3$ — рівняння

$$\Psi_{31}[y]=0\,,\ \Psi_{32}[y]=0\,,\ \Psi_{33}[y]=1\,,\ \Lambda_{31}[y]=0\,,\ \Lambda_{32}[y]=0\,,\ \Lambda_{33}[y]=0\,.$$

Похідні від (4.33) диференціальні вирази (4.34) зводяться до диференціального виразу $L_3[y]$ рівняння (4.32) множенням їх відповідно на $2x^2$ x^3 $2x^4$. Це випливає з безпосереднього зіставлення відповідних диференціальних виразів. Такий самий висновок можна зробити і формально на підставі (4.31):

$$\mu_1(x)=\frac{1}{p_0(x)}\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}=\frac{1}{x^3}\frac{1}{2x^3}\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2x^2}\,,$$

$$\mu_2(x)=\frac{1}{p_0(x)}\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix}=\frac{1}{x^3}\frac{1}{2x^3}\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}=\frac{1}{x^3}\,,$$

$$\mu_3(x)=\frac{1}{p_0(x)}\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\frac{1}{x^3}\frac{1}{2x^3}\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=\frac{1}{2x^4}\,.$$

То ж, рівняння (4.32) є відтворюваним з точністю до множника.

Отже на підставі викладеного вище можна стверджувати таке: якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ є розв'язками однорідного лінійного диференціального рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0\,,$$

то для кожної функції y справджується співвідношення (див. (4.27))

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + \cdots + \frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}y' + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y \equiv \frac{W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y]}{W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]}\,.$$

Остання формула, по суті, відтворює диференціальний вираз за відомою фундаментальною системою розв'язків. До наведеної рівності можна дійти дуже просто — розглядаючи систему функцій $\{\, p_0(x),\ p_1(x),\ \ldots,\ p_{n-1}(x), p_n(x)\,\}$ як нетривіальний розв'язок однорідної системи $n+1$ рівнянь

$$p_n(x)\,y_1(x) + p_{n-1}(x)\,y_1'(x) + \ldots + p_1(x)\,y_1^{(n-1)}(x) + p_0(x)\,y_1^{(n)}(x) = 0\,,$$

$$p_n(x)\,y_2(x) + p_{n-1}(x)\,y_2'(x) + \ldots + p_1(x)\,y_2^{(n-1)}(x) + p_0(x)\,y_2^{(n)}(x) = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n(x)\,y_n(x) + p_{n-1}(x)\,y_n'(x) + \ldots + p_1(x)\,y_n^{(n-1)}(x) + p_0(x)\,y_n^{(n)}(x) = 0\,,$$

$$p_n(x)\,y + p_{n-1}(x)\,y' + \ldots + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_0(x)\left(y^{(n)} - L\right) = 0$$

і обчислюючи L через нулі відповідного визначника.

Позначимо: $1 = W_0$, $y_1 = W_1$, $W[y_1, y_2] = W_2$, …, $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = W_n$; $y = Y_0$, $W[y_1, y] = Y_1$, $W[y_1, y_2, y] = Y_2$, …, $W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] = Y_n$. Згадуючи (див. 4.2), що

$$\frac{d}{dx}\frac{Y_0}{W_1} = \frac{W_0 Y_1}{W_1^2}\,,\quad \frac{d}{dx}\frac{Y_1}{W_2} = \frac{W_1 Y_2}{W_2^2}\,,\ \ldots,\ \frac{d}{dx}\frac{Y_{n-1}}{W_n} = \frac{W_{n-1} Y_n}{W_n^2}\,,$$

і визначаючи звідси величину Y_n / W_n, дійдемо висновку, що для всіх функцій $y(x)$ справедливим є співвідношення

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + \cdots + \frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}y' + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y \equiv$$

$$\equiv \frac{W_n}{W_{n-1}}\frac{d}{dx}\left(\frac{W_{n-1}^2}{W_{n-2}W_n}\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\left(\frac{W_2^2}{W_1 W_3}\frac{d}{dx}\left(\frac{W_1^2}{W_0 W_2}\frac{d}{dx}\frac{y}{W_1}\right)\right)\right)\right).$$

Описаний щойно підхід до відтворення диференціального виразу n-го порядку, який передбачає наявність n незалежних розв'язків відповідного диференціального рівняння, нагадує розклад многочлена n-го степеня на множники, коли передбачається наявність n коренів цього многочлена (див. 3).

4.5 Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \qquad (4.35)$$

де $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ (коефіцієнти) та $q(x)$ (вільний член) вважаються заданими в $I = (a,b)$ неперервними функціями змінної x.

Припустимо, що вдалося віднайти окремий розв'язок $y = y^*(x)$ рівняння (4.35):

$$L[y^*] \equiv q(x). \qquad (4.36)$$

Введемо нову невідому функцію

$$y = y^* + z \qquad (4.37)$$

і підставимо її в (4.35):

$$L[y] = L[y^* + z] = L[y^*] + L[z] \equiv q(x). \qquad (4.38)$$

Звідси (порівнюючи (4.38) з (4.36)) доходимо висновку, що

$$L[z] \equiv p_0(x)z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)z' + p_n(x)z = 0. \qquad (4.39)$$

Однорідне рівняння (4.39) називають відповідним неоднорідному рівнянню (4.35).

Загальним розв'язком рівняння (4.39) є функція

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n, \qquad (4.40)$$

в якій $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — довільні сталі.

Підставляючи (4.40) в (4.37), отримаємо:

$$y = y^* + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n. \qquad (4.41)$$

Формула (4.41) відбиває в собі **загальний розв'язок неоднорідного рівняння** (4.35) в області

$$a < x < b, |y| < +\infty, |y'| < +\infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < +\infty. \qquad (4.42)$$

Доведемо це.

За побудовою функція (4.41) є розв'язком рівняння (4.35). То ж залишається довести, що за відповідного добору сталих $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ця функція відповідатиме розв'язку рівняння (4.35) за довільних початкових умов з області (4.42).

Нехай $\widetilde{y} = y(x)$ — розв'язок рівняння (4.35), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; y''(x_0) = y_0'', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (4.43)$$

такі що $\left(x_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ — точка з області (4.42). Підставимо ці умови в систему рівнянь

$$
\begin{aligned}
&y = y^* + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n,\\
&y' = y^{*\prime} + c_1 z_1' + c_2 z_2' + \ldots + c_n z_n',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n-1)} = y^{*(n-1)} + c_1 z_1^{(n-1)} + c_2 z_2^{(n-1)} + \ldots + c_n z_n^{(n-1)},
\end{aligned}
$$

що випливають з (4.41), і отримаємо систему n рівнянь на n довільних сталих $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$
\left.
\begin{aligned}
&y_0 - y_0^* = c_1 z_{10} + c_2 z_{20} + \ldots + c_n z_{n0},\\
&y_0' - y_0^{*\prime} = c_1 z_{10}' + c_2 z_{20}' + \ldots + c_n z_{n0}',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_0^{(n-1)} - y_0^{*(n-1)} = c_1 z_{10}^{(n-1)} + c_2 z_{20}^{(n-1)} + \ldots + c_n z_{n0}^{(n-1)},
\end{aligned}
\right\} \tag{4.44}
$$

де

$$y_0^* = y^*(x_0),\ y_0^{*\prime} = y^{*\prime}(x_0), \ldots, y_0^{*(n-1)} = y^{*(n-1)}(x_0);$$

$$z_{10} = z_1(x_0),\ z_{20} = z_2(x_0), \ldots, z_{n0} = z_n(x_0);$$

$$z_{10}' = z_1'(x_0),\ z_{20}' = z_2'(x_0), \ldots, z_{n0}' = z_n'(x_0); \ldots;$$

$$z_{10}^{(n-1)} = z_1^{(n-1)}(x_0),\ z_{20}^{(n-1)} = z_2^{(n-1)}(x_0), \ldots, z_{n0}^{(n-1)} = z_n^{(n-1)}(x_0).$$

Визначником цієї системи є вронскіян системи розв'язків $z_1, z_2, \ldots, z_n$, обчислений при $x = x_0$. Оскільки він відмінний від нуля, то система (4.44) має єдиний розв'язок

$$c_1 = c_{10},\ c_2 = c_{20}, \ldots, c_n = c_{n0}.$$

То ж формула (4.41) набуває вигляду:

$$y = y^* + c_{10} z_1 + c_{20} z_2 + \ldots + c_{n0} z_n. \tag{4.45}$$

Розв'язок (4.45), відповідно до (4.44), задовольняє ті самі початкові умови (4.43), що і розглядуваний розв'язок $\tilde{y} = y(x)$. За теоремою про єдиність обидва ці розв'язки повинні збігатись, через що можна стверджувати: розв'язок неоднорідного рівняння (4.35) за будь-яких початкових умов (4.43) з області (4.42) відбиває в собі формула (4.41) при відповідно підібраних значеннях сталих $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

4.6 Загальний розв'язок неоднорідного рівняння. Метод варіації довільних сталих

Покажемо, що **загальний розв'язок неоднорідного рівняння** $L[y]=q(x)$ можна знайти в квадратурах, якщо попередньо знайдено загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $L[y]=0$. При цьому вдамося до **методу (Лагранжа) варіації довільних сталих**. А власне, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $L[y]=q(x)$ ($p_0(x)\neq 0$) будемо шукати у вигляді функції

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i\ , \tag{4.46}$$

де $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots, y_n(x)$ — фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння $L[y]=0$, яка тут вважається відомою, заданою; $c_1(x),\ c_2(x),\ \dots, c_n(x)$ — функції, що задовольняють рівняння

$$c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2+\ldots+c_n'(x)y_n=0\ ,$$

$$c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'+\ldots+c_n'(x)y_n'=0\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1'(x)y_1^{(n-2)}+c_2'(x)y_2^{(n-2)}+\ldots+c_n'(x)y_n^{(n-2)}=0\ ,$$

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}+c_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}=\frac{q(x)}{p_0(x)}\ . \tag{4.47}$$

Відносно функцій c_i' ($i=\overline{1,n}$) система (4.47) — алгебрична лінійна неоднорідна з головним визначником

$$D=W(x)\equiv W[y_1,\ y_2,\dots,\ y_n]\neq 0\ \forall x\in I\ .$$

Тому існує єдиний розв'язок

$$c_i'=\psi_i(x)\qquad (\ i=\overline{1,n}\ ),$$

з якого випливає, що

$$c_i(x)=\int\psi_i(x)dx+\alpha_i\qquad (\ i=\overline{1,n}\ ), \tag{4.48}$$

де α_i ($i=\overline{1,n}$) — довільні сталі.

Таким чином, на підставі (4.46) і (4.48) загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння $L[y]=q(x)$ можна подати у вигляді

$$y=\sum_{i=1}^{n} y_i\int\psi_i(x)\ dx+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\ .$$

За **окремий розв'язок неоднорідного рівняння** можна взяти функцію

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i \int \psi_i(x)\, dx \,.$$

Тоді загальний розв'язок цього неоднорідного рівняння можна буде подати у вигляді (див. (4.41))

$$y = y^* + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \int \psi_i(x)\, dx + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n \,,$$

де $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — деяка фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — довільні сталі.

4.7 Загальний розв'язок неоднорідного рівняння. Метод функції впливу

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $L[y] = q(x)$ на підставі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $L[z] = 0$ подібно до методу варіації довільних можна знайти в квадратурах з залученням функції впливу.

Нехай

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = q(x) \qquad (4.49)$$

— лінійне рівняння зі звичайними похідними, в якому коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ та вільний член $q(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому інтервалі $I = (a, b)$ ($a<x<b$), і до того ж $p_0(x) \neq 0$ в $I = (a, b)$. В такому разі, як доводилось раніше, це рівняння має єдиний визначуваний в тому самому $I = (a, b)$ розв'язок $y = y(x)$, який при деякому конкретному $x = x_0 \in (a, b)$ задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (4.50)$$

Якщо функції $p_0(x) \neq 0$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ мають в $I = (a, b)$ неперервні похідні порядку $r \geq 0$, то розв'язок $y = y(x)$ має в $I = (a, b)$ неперервні похідні порядку $n + r$ включно.

За умови $q(x) \equiv 0$ неоднорідне рівняння (4.49) зводиться до відповідного йому однорідного рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0 \,. \qquad (4.51)$$

Надаючи величині x_0 різних значень $\gamma \in (a, b)$, серед умов (4.50) можна вирізнити такі, що

$$y(\gamma)=y'(\gamma)=\ldots=y^{(n-2)}(\gamma)=0,\qquad y^{(n-1)}(\gamma)=\frac{1}{p_0(\gamma)}, \tag{4.52}$$

і підпорядкувати їм розв'язки рівняння (4.51).

Задача "віднайти розв'язок рівняння (4.51) за умов (4.52)" є похідною від основної **задачі Коші** "віднайти розв'язок рівняння (4.49) за умов (4.50)". Тому можна стверджувати, що існує напевне, і до того ж єдиний, належно гладкий розв'язок рівняння (4.51), який задовольняв би умови (4.52). Називатимемо цей розв'язок **функцією впливу** і позначатимемо його як $K(x,\gamma)$.

Нехай функції

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x)$$

є лінійно-незалежними розв'язками рівняння $L[y]=0$. Загальний інтеграл цього рівняння в такому разі має вигляд:

$$y=c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)+\ldots+c_n\psi_n(x). \tag{4.53}$$

Підставляючи (4.53) в (4.52), одержимо неоднорідну систему n лінійних алгебричних рівнянь на довільні сталі c_i $(i=\overline{1,\,n})$:

$$\begin{gathered}
c_1\psi_1(\gamma)+c_2\psi_2(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n(\gamma)=0,\\
c_1\psi_1'(\gamma)+c_2\psi_2'(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n'(\gamma)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_1\psi_1^{(n-2)}(\gamma)+c_2\psi_2^{(n-2)}+\ldots+c_n\psi_n^{(n-2)}=0,\\
c_1\psi_1^{(n-1)}(\gamma)+c_2\psi_2^{(n-1)}+\ldots+c_n\psi_n^{(n-1)}=\frac{1}{p_0(\gamma)}.
\end{gathered}$$

Її головний визначник

$$W(\gamma)=\begin{vmatrix}\psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \cdots & \psi_n(\gamma)\\ \psi_1'(\gamma) & \psi_2'(\gamma) & \cdots & \psi_n'(\gamma)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_1^{(n-1)}(\gamma) & \psi_2^{(n-1)}(\gamma) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(\gamma)\end{vmatrix}$$

обов'язково відмінний від нуля (оскільки він є заданим в точці $x=\gamma\in(a,b)$ визначником Вронського системи лінійно незалежних розв'язків $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ рівняння $L[y]=0$). Тому сталі c_i є однозначно визначуваними функціями параметра γ: $c_i=c_i(\gamma)$. Отже і розв'язок рівняння $L[y]=0$, який задовольняє умови (4.52), також — однозначно визначуваний:

$$\kappa(x,\gamma)=c_1(\gamma)\psi_1(x)+c_2(\gamma)\psi_2(x)+\ldots+c_n(\gamma)\psi_n(x). \tag{4.54}$$

Розглянемо функцію

$$K(x,\gamma)=\frac{1}{W(\gamma)p_0(\gamma)}\begin{vmatrix}\psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \dots & \psi_n(\gamma)\\ \psi_1'(\gamma) & \psi_2'(\gamma) & \dots & \psi_n'(\gamma)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_1^{(n-2)}(\gamma) & \psi_2^{(n-2)}(\gamma) & \dots & \psi_n^{(n-2)}(\gamma)\\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \dots & \psi_n(x)\end{vmatrix}. \quad (4.55)$$

Вона, як легко пересвідчитися, є розв'язком рівняння (4.51), що задовольняє власне умови (4.52). На підставі теореми про єдиність розв'язку задачі Коші залишається визнати, що (4.54) та (4.55) збігаються, є одним і тим самим — **фундаментальною функцією**: $\kappa(x,\gamma)\equiv K(x,\gamma)$.

Легко пересвідчитися, що функція

$$y_*=\int_{x_0}^{x}K(x,\gamma)q(\gamma)d\gamma \quad (x_0,x\in I) \quad (4.56)$$

є розв'язком (окремим) неоднорідного рівняння (4.49) таким, що задовольняє умови

$$y_*(x_0)=y_*'(x_0)=\ldots=y_*^{(n-1)}(x_0)=0\,. \quad (4.57)$$

Враховуючи викладене в 4.5, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.49) з залученням функції (4.56), що задовольняє умови (4.57), можна подати у формі суми

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n+y_*\,.$$

Нехай відома **нормальна фундаментальна система** $\{Y_j(x,\,x_0)\}$ $(j=\overline{1,\,n})$ **розв'язків** рівняння $L[y]=0$ (див. (4.51)), тобто фундаментальна система розв'язків, що задовольняють умови

$$Y_1(x_0)=1,\ Y_1'(x_0)=0,\ Y_1'(x_0)=0,\ldots,\ Y_1^{(n-2)}(x_0)=0,\ Y_1^{(n-1)}(x_0)=0\,;$$

$$Y_2(x_0)=0,Y_2'(x_0)=1,\ Y_2'(x_0)=0,\ldots,\ Y_2^{(n-2)}(x_0)=0,\ Y_2^{(n-1)}(x_0)=0\,;$$

……………………………………………………………………

$$Y_n(x_0)=0,\ Y_n'(x_0)=0,\ Y_n''(x_0)=0,\ldots,\ Y_n^{(n-2)}(x_0)=0,\ Y_n^{(n-1)}(x_0)=1\,, \quad (4.58)$$

які в стислому записі мають вигляд

$$Y_i^{(j)}(x_0,\,x_0)=\begin{cases}0 \text{ для } i\neq j,\\ 1 \text{ для } i=j\end{cases} \quad (i,\ j=\overline{0,n-1}). \quad (4.59)$$

В такому разі розв'язок неоднорідного рівняння (4.49) за умов (4.50) можна записати у вигляді

$$y=y_0Y_1(x)+y_0'Y_2(x)+\ldots+y_0^{(n-1)}Y_n(x)+\int_{x_0}^{x}K(x,\gamma)q(\gamma)d\gamma\,. \quad (4.60)$$

4.8 Крайова задача. Метод функції Ґріна

Нехай задано **лінійне однорідне рівняння зі звичайними похідними**

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \qquad (4.61)$$

в якому коефіцієнти $p_0(x) \neq 0,\ \ p_1(x),\ \ \ldots, p_n(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому замкненому інтервалі $I = [a, b]$ ($a \le x \le b$), і **лінійно незалежні лінійні форми**

$$F_j[y] \equiv \alpha_j^{(0)} y(a) + \alpha_j^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_j^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) +$$

$$+ \beta_j^{(0)} y(b) + \beta_j^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_j^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) \equiv \mathrm{A}_j(y) + \mathrm{B}_j(y) = 0,$$

$$(\,\mathrm{A}_j(y) \equiv \alpha_j^{(0)} y(a) + \alpha_j^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_j^{(n-1)} y^{(n-1)}(a),$$

$$\mathrm{B}_j(y) \equiv \beta_j^{(0)} y(b) + \beta_j^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_j^{(n-1)} y^{(n-1)}(b), \quad j = \overline{1, n}\,), \qquad (4.62)$$

від $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a),\ y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$, що відображають **крайові умови** ($\alpha_j^{(0)}, \alpha_j^{(1)}, \ldots, \alpha_j^{(n-1)},\ \ \beta_j^{(0)}, \beta_j^{(1)}, \ldots, \beta_j^{(n-1)}$ — сталі). Вважатимемо, що ця **крайова (гранична) задача** (однорідна) має лише тривіальний розв’язок $y(x) \equiv 0$.

Задачі (4.61)—(4.62) поставимо у відповідність функцію $G(x, \gamma)$, побудовану для будь-якої точки $x = \gamma$ ($\gamma \in I = [a, b]$) і наділену такими властивостями:

1° $G(x, \gamma)$ неперервна за x разом зі своїми похідними до $(n-2)$-го порядку включно $\forall x, \gamma \in I = [a, b]$.

2° Похідна $G(x, \gamma)$ за x $(n-1)$-го порядку в точці $x = \gamma \in I = [a, b]$ має розрив першого роду зі стрибком

$$\left.\frac{\partial^{n-1} G(x, \gamma)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\gamma+0} - \left.\frac{\partial^{n-1} G(x, \gamma)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\gamma-0} = 1.$$

3° $G(x, \gamma)$ як функція від x всюди в $I_- = [a, \gamma)$ та $I_+ = (\gamma, b]$ є розв’язком рівняння (4.61), тобто

$$L[G(x, \gamma)]\big|_{a \le x \le \gamma,\ \gamma \le x \le b} = 0;$$

або ж $G(x, \gamma)$ як функція від x всюди в $I = [a, b]$ є розв’язком рівняння

$$L[G(x, \gamma)] = \delta(x - \gamma),$$

звідки випливає, що

$$L[G(x, \gamma)] = 0\ (x \neq \gamma) \ \text{ та } \int_a^b L[G(x, \gamma)]\, d\gamma = 1.$$

4° $G(x,\gamma)$ задовольняє крайові умови (4.62):

$$F_j[G(x,\gamma)]=0, \qquad (j=\overline{1,n}).$$

Означену функцію називають **функцією Ґріна** або **функцією впливу**.

Нехай функції

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \dots,\ \psi_n(x)$$

є лінійно-незалежними розв'язками рівняння $L[y]=0$. Вважатимемо, що задача (4.61)—(4.62) має лише очевидний розв'язок $y(x)\equiv 0$. Зважаючи на властивість 3°, покладемо

$$G(x,\gamma)=\tilde{K}_a(x,\gamma)=a_1(\gamma)\psi_1(x)+a_2(\gamma)\psi_2(x)+\ldots+a_n(\gamma)\psi_n(x) \text{ при } a\le x<\gamma,$$

$$G(x,\gamma)=\tilde{K}_b(x,\gamma)=b_1(\gamma)\psi_1(x)+b_2(\gamma)\psi_2(x)+\ldots+b_n(\gamma)\psi_n(x) \text{ при } \gamma<x\le b.$$

Беручи до уваги властивості 1° і 2°, мусимо визнати, що при $x=\gamma$

$$\left(\tilde{K}_b-\tilde{K}_a\right)_{x=\gamma}=\sum_{i=1}^n a_i(\gamma)\psi_i(\gamma)-\sum_{i=1}^n b_i(\gamma)\psi_i(\gamma)=\sum_{i=1}^n c_i(\gamma)\psi_i(\gamma)=0,$$

$$\left(\tilde{K}'_b-\tilde{K}'_a\right)_{x=\gamma}=\sum_{i=1}^n a_i(\gamma)\psi'_i(\gamma)-\sum_{i=1}^n b_i(\gamma)\psi'_i(\gamma)=\sum_{i=1}^n c_i(\gamma)\psi'_i(\gamma)=0,$$

$$\left(\tilde{K}_b^{(n-2)}-\tilde{K}_a^{(n-2)}\right)_{x=\gamma}=$$

$$=\sum_{i=1}^n a_i(\gamma)\psi_i^{(n-2)}(\gamma)-\sum_{i=1}^n b_i(\gamma)\psi_i^{(n-2)}(\gamma)=\sum_{i=1}^n c_i(\gamma)\psi_i^{(n-2)}(\gamma)=0,$$

$$\left(\tilde{K}_b^{(n-1)}-\tilde{K}_a^{(n-1)}\right)_{x=\gamma}=$$

$$=\sum_{i=1}^n a_i(\gamma)\psi_i^{(n-1)}(\gamma)-\sum_{i=1}^n b_i(\gamma)\psi_i^{(n-1)}(\gamma)=\sum_{i=1}^n c_i(\gamma)\psi_i^{(n-1)}(\gamma)=1, \qquad (4.63)$$

де $c_i(\gamma)=b_i(\gamma)-a_i(\gamma)$. Відносно $c_i(\gamma)$ останні рівності складають систему алгебричних лінійних рівнянь з головним визначником, значення якого збігається зі значенням Вронскіяна в точці $x=\gamma$

$$W(\gamma)=\begin{vmatrix} \psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \cdots & \psi_n(\gamma) \\ \psi'_1(\gamma) & \psi'_2(\gamma) & \cdots & \psi'_n(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(\gamma) & \psi_2^{(n-1)}(\gamma) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(\gamma) \end{vmatrix},$$

а отже не дорівнює нулю. А це означає, що система (4.63) визначає функції $c_i(\gamma)$ ($i=\overline{1,n}$) однозначно.

Задовольняючи **граничні умови** (4.62) (зважаючи на властивість 4°), матимемо:

$$F_j[G] \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \,\mathrm{A}_j(\psi_i) + b_i \,\mathrm{B}_j(\psi_i) \right) = 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} b_i F_j(\psi_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \,\mathrm{A}_j(\psi_i) \qquad (j = \overline{1, n}). \tag{4.64}$$

Таким чином, одержимо неоднорідну систему n лінійних алгебричних рівнянь на довільні сталі $b_i \ (i = \overline{1, n})$. Її визначник не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} F_1(\psi_1) & F_1(\psi_2) & \dots & F_1(\psi_n) \\ F_2(\psi_1) & F_2(\psi_2) & \dots & F_2(\psi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n(\psi_1) & F_n(\psi_2) & \dots & F_n(\psi_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки за припущенням форми F_1, F_2, …, F_n — лінійно незалежні. А отже, система рівнянь (4.64) має єдиний розв'язок $\{ b_1(\gamma), b_2(\gamma), \dots, b_n(\gamma) \}$. Через це однозначно визначаються і функції $a_i(\gamma) = b_i(\gamma) - c_i(\gamma)$.

З викладеного випливає існування та єдиність функції $G(x, \gamma)$, відповідної задачі (4.61)—(4.62). До того ж, якщо задача (4.61)—(4.62) з належно гладких розв'язків має лише тривіальний $y(x) \equiv 0$, то функція $G(x, \gamma)$ стає взагалі єдиним розв'язком цієї задачі.

Зазначимо, що якщо **однорідна крайова задача** (4.61)—(4.62) є **самоспряженою**, то відповідна **функція Ґріна — симетрична***):

$$G(x, \gamma) = G(\gamma, x).$$

Вірним є й обернене твердження.

У випадку, коли на одному з кінців відрізка $I = [a, b]$ коефіцієнт $p_0(x)$ при старшій похідній в рівнянні (4.61) обертається на нуль, природно вимагати обмеженості розв'язку $y = y(x)$ на цьому кінці, тоді як на другому кінці повинна справджуватися звичайна гранична умова.

Нехай задано диференціальне рівняння з правою частиною

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = q(x),$$

$$\{ p_0(x) \neq 0, \ \ p_1(x), \ \ \dots, \ p_n(x) \} \in \mathrm{C}^1 \ \forall x \in I = [a, b] \tag{4.65}$$

і крайові умови

---

*) Про самоспряжені рівняння йтиметься далі (розділ 6).

$$F_i(y)=0,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{4.66}$$

причому $F_i,\ i=\overline{1,n}$ є лінійно незалежними лінійними формами від $y(a)$, $y'(a)$, …, $y^{(n-1)}(a)$, $y(b)$, $y'(b)$, …, $y^{(n-1)}(b)$. Справедливим є таке твердження.

Якщо $G(x,\gamma)$ — функція Ґріна однорідної крайової задачі (4.61)—(4.62)

$$L[y]=0\,,\quad F_j(y)=0,\ j=\overline{1,n}\,,$$

що має лише тривіальний розв’язок $y(x)\equiv 0$, то розв’язок відповідної неоднорідної крайової задачі (4.65)—(4.66) визначається за формулою

$$y(x)=\int_a^b G(x,\gamma)\frac{q(\gamma)}{p_0(x)}\,d\gamma\,.$$

Розглянемо приклад. Необхідно розв’язати крайову задачу

$$y''(x)-y(x)=x\,, \tag{4.67}$$

$$y(0)=y(1)=0\,, \tag{4.68}$$

використовуючи функцію Ґріна.

Очевидно, що функції $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{x}$ складають фундаментальну систему розв’язків однорідного рівняння

$$y''(x)-y(x)=0\,, \tag{4.69}$$

відповідного заданому неоднорідному (4.67). То ж загальний розв’язок цього однорідного рівняння має вигляд

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}\,.$$

Він задовольнятиме умови (4.68) лише тоді, коли $c_1=c_2=0$; а отже крайова задача (4.69)—(4.68) має тільки тривіальний розв’язок $y(x)\equiv 0$.

Можна пересвідчитися, що функція

$$G(x,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}(\gamma-1)}{\operatorname{sh}1}, & 0\le x\le\gamma,\\[2mm] \dfrac{\operatorname{sh}\gamma\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}, & \gamma\le x\le 1\end{cases} \tag{4.70}$$

є функцією Ґріна для крайової задачі (4.69)—(4.68). Тому розв’язок крайової задачі (4.67)—(4.68) можна подати у вигляді

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\gamma)\gamma\,d\gamma\,.$$

Враховуючи (4.70), матимемо

$$y(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sh}\gamma\,\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}\gamma\,d\gamma+\int_x^1 \frac{\operatorname{sh}x\,\operatorname{sh}(\gamma-1)}{\operatorname{sh}1}\gamma\,d\gamma=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}\int_0^x \gamma\operatorname{sh}\gamma\,d\gamma+\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}\int_x^1 \gamma\operatorname{sh}(\gamma-1)\,d\gamma=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}-x$$

(тут взято до уваги співвідношення $\operatorname{sh}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta$ та непарність функції $\operatorname{sh}x$). Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що функція

$$y(x)=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}-x$$

задовольняє і рівняння (4.67), і граничні умови (4.68).

4.9 Принцип суперпозиції розв’язків неоднорідного рівняння

Якщо функції $y_i=y_i(x)$ ($i=\overline{1,m}$) є розв’язками неоднорідних лінійних рівнянь

$$L[y]=q_i(x)\quad (i=\overline{1,m}),$$

то функція $y=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\,y_i(x)$ (α_i — сталі) є розв’язком неоднорідного рівняння

$$L[y]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\,q_i(x).$$

Цей факт відповідає так званому **принципу суперпозиції розв’язків**.

Зокрема, якщо функція $q=q(x)$ відображувана сумою ряду — $q(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,q_i(x)$, — а функції $y_i(x)$ ($i=1,2,\ldots$) є розв’язками неоднорідних лінійних рівнянь

$$L[y]=q_i(x)\quad (i=1,2,\ldots),$$

і до того ж ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,y_i(x)$ збігається і підлягає n-кратному почленному диференціюванню, то функція $y=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i y_i(x)$ є розв’язком неоднорідного лінійного рівняння

$$L[y]=q(x).$$

Функція $y = u(x) + iv(x)$ ($i = \sqrt{-1}$) називається **комплексною функцією дійсної змінної** x. Приклад такого типу функції віддзеркалює рівність (формула Ойлера) $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (функції $\cos x$ і $\sin x$ — дійсна і уявна частини комплексної функції e^{ix}). Оскільки $\cos x$ і $\sin x$ означені при всіх x, то і e^{ix} означена при всіх значеннях x. Наприклад, при $x = \pi/4$, $x = \pi/2$, $x = \pi$ відповідно

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \quad e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Подібно визначається показникова функція більш загального вигляду $e^{\alpha x}$, в якій $\alpha = a + ib$, а a і b — дійсні числа:

$$e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx),$$

де $e^{ax}\cos bx = \mathrm{Re}\, e^{\alpha x}$, $e^{ax}\sin bx = \mathrm{Im}\, e^{\alpha x}$ ($\mathrm{Re}\, e^{\alpha x}$, $\mathrm{Im}\, e^{\alpha x}$, а разом з ними і $e^{\alpha x}$ означувані при всіх значеннях x).

Припустимо, що $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні m-го порядку. Тоді похідна m-го порядку комплексної функції $y = u(x) + iv(x)$ записується у вигляді. Зокрема, легко знайти:

$$(e^{\alpha x})' = e^{(a+ib)x} = (e^{ax}\cos bx)' + i(e^{ax}\sin bx)' =$$

$$= (ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx) + i(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx) =$$

$$= ae^{ax}e^{ibx} + ibe^{ax}e^{ibx} = (a+ib)e^{(a+ib)x} = \alpha e^{\alpha x}.$$

Спираючись на поняття похідної комплексної функції, можна переконатись, що

$$L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)],$$

тобто значення диференціального оператора від комплексної змінної є комплексною функцією дійсної змінної x; до того ж, дійсною і уявною частинами цієї функції є значення диференціального оператора від дійсної $u(x)$ і уявної $v(x)$ частин первісної комплексної функції $y = u(x) + iv(x)$.

Функція $y = u(x) + iv(x)$ називається **комплексним розв'язком диференціального рівняння** $L[y] = 0$ в інтервалі $I = (a,b)$, якщо вона в $I = (a,b)$ обертає це рівняння на тотожність

$$L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)] \equiv 0,$$

звідки випливає, що

$$L[u(x)] \equiv 0, \; L[v(x)] \equiv 0 \quad \forall x \in I.$$

Таким чином, дійсна і уявна частини комплексного розв’язку однорідного лінійного диференціального рівняння є дійсними розв’язками цього ж рівняння, так що один комплексний розв’язок розкриває два дійсних.

Наприклад, диференціальне рівняння другого порядку $L[y]=y''+y=0$ має комплексний розв’язок $y=e^{ix}=\cos x+i\sin x$, бо

$$L[e^{ix}]=(e^{ix})''+e^{ix}=i^2e^{ix}+e^{ix}\equiv 0\,.$$

А тому функції $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ є дійсними розв’язками цього рівняння, в чому можна переконатися безпосередньо.

Принцип суперпозиції в даному випадку дає змогу стверджувати таке: якщо неоднорідне лінійне рівняння

$$L[y]=\varphi(x)+i\psi(x)\,,$$

в якому $i=\sqrt{-1}$, а коефіцієнти $p_i(x)$ ($i=\overline{0,n}$) і функції $\varphi(x),\psi(x)$ — дійсні, має комплексний розв’язок $y=u(x)+iv(x)$, то функції $u=\operatorname{Re}y$ (дійсна частина y), $v=\operatorname{Im}y$ (уявна частина y) є розв’язками відповідно рівнянь $L[y]=\varphi(x)$, $L[y]=\psi(x)$.

4.10 Про ступінь загальності диференціального рівняння

Коефіцієнти $p_i(x)$ ($i=\overline{0,n}$) та вільний член $q(x)$ диференціального рівняння $L[y]=q(x)$ можуть певним чином співвідноситись, відповідаючи чи не відповідаючи, зокрема, тим самим критеріям, за якими оцінюються розв’язки $y_i(x)$.

Якщо, зокрема, коефіцієнти $p_i(x)\in \mathrm{C}^{n-1}$ ($i=\overline{0,n}$) є лінійно залежними функціями, то вони задовольняють рівняння

$$W[p_1(x),p_2(x),\ldots,p_n(x)]=0\,. \tag{4.71}$$

Отже, при необхідності синтезувати лінійне **диференціальне рівняння n-го порядку з лінійно залежними коефіцієнтами** чи проаналізувати, як позначається на властивостях розв’язків лінійного диференціального рівняння n-го порядку лінійна залежність його коефіцієнтів, доведеться оперувати (4.71) як лінійним диференціальним рівнянням ($n-1$)-го порядку (відносно якогось коефіцієнта $p_i(x)$, вважаючи всі інші коефіцієнти відомими чи довільними).

Зрештою, самі коефіцієнти (окремі чи всі) можуть бути розв’язками лінійного диференціального рівняння. Наприклад, якщо коефіцієнт $p_0(x)$ рівняння

$$p_0y'+p_1y=0$$

є його розв’язком, то він задовольняє умову $p_0(p_0'+p_1)=0$, якщо ж розв’язком цього рівняння є коефіцієнт $p_1=p_1(x)$, то справджується умова $p_0p_1'+p_1^2=0$;

далі, якщо коефіцієнти $p_1(x)$, $p_2(x)$ рівняння $p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ є його лінійно незалежними розв'язками, то вони повинні задовольняти умови

$$p_0 p_1'' + p_1 p_1' + p_2 p_1 = 0, \quad p_0 p_2'' + p_1 p_2' + p_2^2 = 0 \tag{4.72}$$

тощо. Наведені рівності сприймаються як тотожності, коли йдеться про перевірку належності заданих коефіцієнтів до множини розв'язків заданого рівняння, і як рівняння (зокрема, диференціальні), коли йдеться про ідентифікацію диференціальних рівнянь з відповідними властивостями.

Кожна умова, яка формально пов'язує функції $p_i(x)$ ($i = \overline{0,n}$) одна з одною, зрозуміло, звужує **ступінь загальності лінійного диференціального рівняння**

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = q(x),$$

коефіцієнтами якого ці функції є (в певній мірі це стосується і вільного члена $q(x)$). Спроби дослідити в таких випадках взаємозумовленість функцій $p_i(x)$ ($i = \overline{0,n}$), $q(x)$ та розв'язків лінійного диференціального рівняння породжують нові диференціальні задачі. В одних випадках ці нові задачі залишаються лінійними, а в інших набувають ознак нелінійності (наприклад, система рівнянь (4.72), відповідна лінійному рівнянню другого порядку, є очевидно нелінійною). Можна навіть стверджувати, що незагальні лінійні задачі майже завжди містять в собі різноманітні аспекти прояву нелінійності.

За приклад суто лінійної може правити задача віднайти розв'язок рівняння

$$L[y] \equiv y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = q(x),$$

в якому коефіцієнти пов'язані диференціальним співвідношенням першого порядку

$$p_1'(x) + \left(k - \frac{p_2'(x)}{p_2(x)} \right) p_1(x) = k \frac{p_2'(x)}{p_2(x)} - p_2(x) - k^2,$$

лінійним відносно $p_1(x)$ ($k \neq 0$ — довільне дійсне число). Можна довести, що в цьому випадку рівняння другого порядку розв'язується в квадратурах. Натомість, досить просте рівняння

$$y'' + \frac{1}{x} y' + 1 + \frac{m}{x^2} = 0, \quad m = \text{const},$$

як відомо, в елементарних функціях не розв'язується; при $m \leq 0$ воно перетворюється у **рівняння Беселя**.

Ступінь загальності рівняння може сприйматися по-різному у різних ситуаціях.

Рівняння кривої другого порядку, розв'язане відносно y, має вигляд

$$y = ax + b + \frac{c}{x+d} \quad (c \neq 0)$$

(a, b, c, d — сталі), чи вигляд

$$y = ax + b + \lambda\sqrt{cx^2 + dx + e} \quad (\lambda \neq 0,\ 4ec - d^2 \neq 0,\ \lambda,\ e \text{ — сталі}))$$

Першому випадку еквівалентна рівність

$$y'' = \frac{2c}{(x+d)^3},$$

а другому — рівність

$$y'' = \lambda \frac{4ec - d^2}{4(cx^2 + dx + e)^{3/2}}.$$

Об’єднуючи ці рівності, дійдемо висновку, що криві другого порядку описуються рівнянням вигляду

$$y'' = \frac{1}{(cx^2 + dx + e)^{3/2}},$$

або

$$(y'')^{-2/3} = cx^2 + dx + e,$$

що є еквівалентним описанню їх рівнянням

$$((y'')^{-2/3})''' = 0,$$

яке можна вважати нелінійним.

Звернемося до такого відомого диференціального рівняння

$$\int_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos w}{16 + 9\sin^2 w} dw = \frac{1}{12} \arctan x.$$

Його можна віднести до **“приховано” лінійних диференціальних рівнянь**. Беручи інтеграл у лівій частині наведеної рівності, матимемо

$$\arctan\left(\frac{3}{4}\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \arctan x,$$

звідки

$$\frac{dy}{dx} = \pi n + (-1)^n \arcsin\frac{4(x+\pi r)}{3}, \ |x + \pi r| \le \frac{3}{4},$$

де n і r — довільні цілі числа. Розв’язком останнього рівняння є функція

$$y = \pi n x + (-1)^n \left((x+\pi r)\arcsin\frac{4(x+\pi r)}{3} + \frac{1}{4}\left(9 - 16(x+\pi r)^{1/2}\right)\right) + c, \ |x + \pi r| \le \frac{3}{4},$$

де — довільне ціле число, а c — довільна стала.

5 ЗАМІНА ЗМІННИХ 5

5.1 Лінійна комбінація фундаментальної системи розв'язків

Нехай $y_i(x) \quad (i=\overline{1,n})$ — фундаментальна система розв'язків однорідного лінійного рівняння n-го порядку

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \tag{5.1}$$

з неперервними в $I=(a,b)$ коефіцієнтами $p_0(x) \neq 0$ та $p_i(x) \quad (i=\overline{1,n})$. Доведемо, що система функцій

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} y_i \quad \left(j=\overline{1,n}, \alpha_{ji} = \mathrm{const}\right) \tag{5.2}$$

утворює фундаментальну систему розв'язків рівняння n-го порядку (5.1) тоді і тільки тоді, коли $\det[\alpha_{ji}] \neq 0$.

З властивостей лінійного диференціального оператора випливає, що кожна **лінійна комбінація** (5.2) **фундаментальної системи розв'язків** $y_i(x) \quad (i=\overline{1,n})$ **однорідного лінійного рівняння *n*-го порядку** (5.1) також є розв'язком цього рівняння. То ж всі $z_j(x) \quad (j=\overline{1,n})$ — розв'язки рівняння (5.1) за будь-яких $\alpha_{ji} = \mathrm{const}$ ($j, i = \overline{1,n}$), а тому залишається довести, що стосовно системи (5.2) $W[z_1, z_2, \ldots, z_n] \neq 0 \; \forall x \in I = (a,b)$ тоді і тільки тоді, коли $\det[\alpha_{ji}] \neq 0$.

Знайдемо

$$W[z_1, z_2, \ldots, z_n] = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{1i} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{2i} y_i & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ni} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{1i} y_i' & \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{2i} y_i' & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ni} y_i' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{1i} y_i^{(n-1)} & \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{2i} y_i^{(n-1)} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ni} y_i^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$=\left|\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)}\\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)}\end{bmatrix}\right| =$$

$$= \det[\alpha_{ji}]\ W[y_1, y_2, \dots, y_n].$$

Оскільки $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0 \quad \forall x \in I = (a,b)$, то $W[z_1, z_2, \dots, z_n] \neq 0 \quad \forall x \in I$ тоді і тільки тоді, коли $\det[\alpha]_{ji} \neq 0$.

5.2 Заміна незалежної змінної

Звернемося до лінійного рівняння зі звичайними похідними

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = q(x), \tag{5.3}$$

в якому коефіцієнти $p_0(x),\ p_1(x),\ \dots, p_n(x)$ та вільний член $q(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому замкненому інтервалі $I = (a, b)$ ($a < x < b$), і до того ж $p_0(x) \neq 0$ в $I = (a, b)$. Незалежній змінній x поставимо у відповідність нову змінну, таку що $x = x(t)$ ($t \in \tilde{I} = (\alpha, \beta)$, $x \in I = (a, b)$), де $x(t)$ — неперервна n разів диференційовна функція, похідна якої $x'(t) = dx(t)/dt$ не обертається на нуль в $\tilde{I} = (\alpha, \beta)$ (ці **умови** є **достатніми для існування** в $I = (a, b)$ **оберненої функції** $t = t(x)$).

Зважаючи на те, що $dx = x'(t)dt$, знайдемо похідні

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'(t)}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'(t)}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x'(t)}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'^2(t)}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{x''(t)}{x'^3(t)}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'^2(t)}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{x''(t)}{x'^3(t)}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x'^2(t)}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{x''(t)}{x'^3(t)}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{1}{x'^3(t)}\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{x''(t)}{x'^4(t)}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{x'''(t)x'(t) - 3x''^2(t)}{x'^5(t)}\frac{dy}{dt} \ \dots \tag{5.4}$$

Легко зауважити, що кожна похідна d^jy/dx^j визначається лінійно (й однорідно) через похідні dy/dt, d^2y/dt^2, $\dots$, d^jy/dt^j з коефіцієнтами, що є неперервними функціями t. То ж, підставляючи визначені таким чином похідні $d^j y/dx^j$ у рівняння (5.3) і здійснюючи в коефіцієнтах $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_n(x)$ та вільному члені $q(x)$ заміну $x = x(t)$, обов'язково знову отримаємо лінійне рівняння:

$$L[y] \equiv \tilde{p}_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + \tilde{p}_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + \tilde{p}_n(t)y = \tilde{q}(t), \tag{5.5}$$

причому

$$\tilde{p}_0(t) = \frac{p_0(x(t))}{(x'(t))^n} \neq 0 \ \forall t \in \tilde{I} = (\alpha, \beta).$$

Зрозуміло, що **заміна незалежної змінної** $x = x(t)$ однорідне рівняння перетворює в однорідне ж.

Загальний розв'язок перетвореного рівняння (5.5), покладанням у ньому $t = t(x)$, зводиться до загального розв'язку первісного рівняння (5.3).

Звернемося до такого прикладу.

Задано рівняння другого порядку $p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$ і функція $x = \phi(t)$ (де $t \in \tilde{I} = (\alpha, \beta)$, $x \in I = (a, b)$, $\phi(x)$ — двічі неперервно диференційовна функція, така що $\phi'(t) \neq 0 \ \ \forall t \in \tilde{I}$). Перетворимо це рівняння.

Виразимо похідні y за x через похідні y за t, див. (5.4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\phi'(t)}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\phi'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\phi'(t)}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{(\phi'(t))^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\phi''(t)}{(\phi'(t))^3}\frac{dy}{dt}.$$

Підставляючи отримані вирази у первісне рівняння, отримаємо перетворене

$$\frac{p_0(\phi(t))}{(\phi'(t))^2}\frac{d^2y}{dt^2} - p_0(\phi(t))\frac{\phi''(t)}{(\phi'(t))^3}\frac{dy}{dt} + \frac{p_1(\phi(t))}{\phi'(t)}\frac{dy}{dt} + p_2(\phi(t))y = q(\phi(t)),$$

або

$$\tilde{p}_0(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \tilde{p}_1(t)\frac{dy}{dt} + \tilde{p}_2(t)y = \tilde{q}(t),$$

де

$$\tilde{p}_0(t) = p_0(\phi(t)), \quad \tilde{p}_1(t) = p_1(\phi(t))\phi'(t) - p_0(\phi(t))\frac{\phi''(t)}{(\phi'(t))},$$

$$\tilde{p}_2(t) = p_2(\phi(t))\,(\phi'(t))^2, \quad \tilde{q}(t) = q(\phi(t))\,(\phi'(t))^2.$$

Таким чином, заміна незалежної змінної $x=\phi(t)$ зводить лінійне рівняння другого порядку до лінійного ж рівняння другого порядку, причому, якщо первісне рівняння є однорідним, то й зведене рівняння виявиться однорідним. Добираючи функцію $\phi(t)$, можна, зокрема, висунути умову

$$\tilde{p}_1 = p_1(\phi(t))\phi'(t) - p_0(\phi(t))\frac{\phi''(t)}{(\phi'(t))} = 0\,,$$

звідки

$$\frac{x''}{(x')^2} = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\ .$$

Покладаючи $x' = p(x)$, $x'' = p'p$, послідовно отримаємо:

$$\frac{p'p}{p^2} = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\,, \qquad \frac{dp}{p} = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx\,, \qquad p = c_0\exp\left(\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx\right),$$

$$\exp\left(-\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx\right)dx = c_0dt\,, \quad c_0t + c_1 = \int\exp\left(-\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx\right)dx\,,$$

c_0, c_1 — довільні сталі. Шукану заміну змінної при $c_0 = 1, c_1 = 0$ виражатиме формула

$$t = \int\exp\left(-\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx\right)dx\ .$$

Важливим є випадок, коли змінні x і y змінюють свою сутність — y стає незалежною змінною, x — залежною, функцією y. Кладучи $t = y$, формули (5.4) можна подати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'(y)}\,,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x''(y)}{x'^3(y)}\,,\ \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{x'''(y)x'(y) - 3x''^2(y)}{x'^5(y)}\,,\ \ldots \tag{5.6}$$

Нехай, наприклад, диференціальний оператор має вигляд

$$V[y] = y'y''' - 3y''^2\,.$$

Беручи y за нову незалежну змінну, на підставі (5.6) матимемо:

$$V = \frac{1}{x'}\frac{-x'''x' + 3x''^2}{x'^5} - 3\frac{x''^2}{x'^6} = -\frac{x'''}{x'^5}\ .$$

Зокрема, рівняння $V = 0$, що є лінійним, розв'язується вельми просто:

$$x = c_1y^2 + c_2y + c_3\,, \quad c_1^2 + c_2^2 = 0\ .$$

5.3 Заміна незалежної змінної і звідність загальних рівнянь до рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Якщо однорідне лінійне рівняння зі звичайними похідними

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

(в якому коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому замкненому інтервалі $I = (a, b)$, і до того ж $p_0(x) \neq 0$ і $p_n(x) \neq 0$ в $I = (a, b)$) за допомогою **заміни незалежної змінної**

$$t = \varphi(x)$$

(де $x \in I = (a, b)$, $t \in \tilde{I} = (\alpha, \beta)$, $\varphi(x)$ — n разів неперервно диференційовна функція, така що $\phi'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$) може бути зведене до однорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами, то необхідно, щоби

$$\varphi(x) = \int \sqrt[n]{C \frac{p_n(x)}{p_0(x)}}\, dx\,, \tag{5.7}$$

де $C = \text{const} \neq 0$. Іншими словами, якщо **рівняння** $L[y] = 0$ є **звідним до рівняння зі сталими коефіцієнтами** за допомогою заміни незалежної змінної, то тільки відповідно до (5.7).

Зробимо, наприклад заміну $t = \varphi(x)$ в однорідному лінійному рівнянні другого порядку

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,.$$

З попереднього викладу випливає, що рівняння можна подати у вигляді

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\tilde{p}_1(t)}{\tilde{p}_0(t)}\frac{dy}{dt} + \frac{\tilde{p}_2(t)}{\tilde{p}_0(t)}y = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\tilde{p}_1(t)}{\tilde{p}_0(t)}\frac{dy}{dt} + \frac{p_2(x)}{p_0(x)(\varphi'(x))^2}y = 0\,.$$

Останнє рівняння є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, якщо, зокрема,

$$\frac{p_2(x)}{p_0(x)(\varphi'(x))^2} = c = \text{const} \neq 0\,.$$

Звідси

$$\varphi'(x) = \sqrt{C \frac{p_n(x)}{p_0(x)}} \qquad \left(C = \frac{1}{c}\right),$$

а отже

$$\varphi(x) = \int \sqrt{C \frac{p_n(x)}{p_0(x)}}\, dx\,.$$

5.4 Лінійне перетворення залежної змінної

Звернемося до лінійного рівняння зі звичайними похідними

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = q(x)\,, \tag{5.8}$$

в якому коефіцієнти $p_0(x),\ \ p_1(x),\ \ \ldots,\ p_n(x)$ та вільний член $q(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому проміжку $I = (a, b)$ ($a < x < b$), і до того ж $p_0(x) \neq 0$ в $I = (a, b)$. Залежній змінній y поставимо у відповідність нову змінну z так, щоби дотримувалась в I умова $y = v(x)z + w(x)$, де $v(x) \neq 0$ і $w(x)$ є в I неперервно диференційовними n разів функціями. Підставляючи в (5.8) вирази

$$y^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i\ v^{(i)}(x)\, z^{(k-i)} + w^{(k)}(x) \quad \left(k = \overline{0, n}\right),$$

отримаємо рівняння

$$p_0\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i v^{(i)} z^{(n-i)} + w^{(n)}\right) + p_1\left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i v^{(i)} z^{(n-i-1)} + w^{(n-1)}\right) +$$

$$+ \ldots + p_{n-1}(v\, z' + v'\, z + w') + p_n(vz + w) = q\,,$$

яке за позначень

$$h_j(x) = \sum_{i=0}^{j} p_i(x)\, C_{n-i}^{j-i}\ v^{(j-i)}(x) = \sum_{i=0}^{j} p_{j-i}(x)\, C_{n-j+i}^{i}\ v^{(i)}(x) \quad \left(j = \overline{0, n}\right),$$

$$g(x) = q(x) - L[w(x)] \tag{5.9}$$

можна подати у вигляді

$$L[z] \equiv h_0(x)z^{(n)} + h_1(x)z^{(n-1)} + \ldots + h_n(x)z = g(x)\,. \tag{5.10}$$

З (5.9), зокрема, маємо

$$h_0 = p_0 C_n^0 v = p_0 v, \quad h_1 = p_0 C_n^1 v' + p_1 C_{n-1}^0 v = p_0 n v' + p_1 v,$$

$$h_n = \sum_{i=0}^{n} p_i v^{(n-i)} = L[v]. \tag{5.11}$$

Функції $v = v(x)$ і $w = w(x)$ в значній мірі довільні, чим можна скористатися для **зведення** рівняння (5.8) до зручного з тих чи інших міркувань вигляду.

У рівнянні (5.10), зокрема, можна позбутися члена з похідною $z^{(j)}$ ($j = \overline{1, n-1}$), якщо знайти функцію $v = v(x)$, яка б задовольняла диференціальне рівняння ($n - j$)-го порядку (див. (5.9))

$$h_{n-j}(x) \equiv \sum_{i=0}^{n-j} p_{n-j-i}(x)\, C_{j+i}^{i}\ v^{(i)}(x) = 0\,.$$

Наприклад, щоб рівняння (5.10) не містило в собі члена з похідною $z^{(n-1)}$, функція $v = v(x)$ повинна задовольняти рівняння $h_1 \equiv p_0 n v' + p_1 v = 0$ (див. (5.11)). Розділяючи змінні, легко знайти

$$v = c\exp\left(-\frac{1}{n}\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx\right),$$

де $c \neq 0$ — довільна стала. Тут функція $v = v(x)$ визначається однозначно з точністю до сталого множника.

Якщо за функцію $v = v(x)$ взяти таку, що є нетривіальним розв'язком однорідного рівняння $L[y] = 0$, і отже $h_n(x) = L[v] = 0$, то первісне рівняння $L[y] = q(x)$ **допускає зниження порядку на одиницю**. В цьому випадку належить застосувати заміну $y = v(x)\int u(x)dx$, де $s' = u$ — нова невідома функція.

Рівняння (5.10) зводиться до однорідного, якщо функція $w = w(x)$ є такою, що

$$L[w(x)] = q(x).$$

А це означає, що перетворенням $y = v(x)\,z + w(x)$ залежної змінної можна дійти однорідного рівняння, якщо за $w = w(x)$ взяти який-небудь окремий (частковий) розв'язок цього ж первісного рівняння $L[y] = q(x)$.

Підкреслимо, що **лінійна заміна** $y = v(x)\,z + w(x)$ **залежної змінної** перетворює лінійне рівняння знову ж у лінійне. При цьому заміна $y = v(x)z$ перетворює однорідне рівняння знову ж в однорідне.

Розглянемо рівняння

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{5.12}$$

де $p(x)$ — неперервна функція.

Покладемо

$$y = z\exp\left\{-\int_0^x p(s)\,ds\right\}$$

(z — нова змінна). На підставі (5.12) матимемо:

$$z' = q(x)\exp\left\{\int_0^x p(s)\,ds\right\},$$

звідки $z = y^* + c$ (y^* — первісна функції $q(x)\exp\left\{\int_0^x p(s)\,ds\right\}$; c — довільна стала).

Повертаючись до змінної y, знайдемо загальний розв'язок рівняння (5.12):

$$y = (y^* + c)\exp\left\{-\int_0^x p(s)\,ds\right\}.$$

5.5 Диференціальна заміна залежної змінної

Проведемо в однорідному лінійному рівнянні зі звичайними похідними

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (5.13)$$

(в якому коефіцієнти $p_0(x),\ p_1(x),\ \ldots, p_n(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому замкненому інтервалі $I = (a, b)$, і до того ж $p_0(x) \neq 0$ в $I = (a, b)$) заміну залежної змінної за формулою ($y \neq 0$)

$$y' = yu \quad \left(u = \frac{y'}{y}\right). \qquad (5.14)$$

На підставі (5.14) маємо:

$$y^{(i)} = (y')^{(i-1)} = (yu)^{(i-1)} = \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}^{j} y^{(i-j-1)} u^{(j)} . \qquad (5.15)$$

Зокрема, при $i = 1$ $y' = yu$, а при $i = 2, 3$

$$y'' = y'u + yu' = (yu)u + yu' = y\left(u^2 + u'\right),$$

$$y''' = y''u + 2y'u + yu'' = y\left(u^2 + u'\right)u + 2y'uu' + yu'' = y\left(u^3 + 3uu' + u''\right). \quad (5.16)$$

Можна сподіватись, що похідна $y^{(i)}$ ($i = \overline{2, n}$) визначається за формулою

$$y^{(i)} = y\left(u^i + u^{(i-1)} + f_i\right), \qquad (5.17)$$

де $f_i = f_i\left(u, u', \ldots, u^{(i-2)}\right)$ — деяка загалом нелінійна функція, залежна від функції u та похідних від u до ($i-2$)-го порядку включно (зокрема, $f_2 \equiv 0$, $f_3 = 3uu'$, див. (5.16)).

Вдамося до міркувань за індукцією. Справедливість формули (5.17) при $i = 2, 3$ засвідчують рівності (5.16). Припустимо, що (5.17) справджується при всіх $2 \le i < m < n$, і з'ясуємо її справедливість при $i = m$. На підставі (5.15) за індукцією матимемо:

$$y^{(m)} = \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^{j} y^{(m-j-1)} u^{(j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-4} C_{m-1}^{j} y^{(m-j-1)} u^{(j)} + C_{m-1}^{m-3} y'' u^{(m-1)} + C_{m-1}^{m-2} y' u^{(m-2)} + C_{m-1}^{m-1} yu^{(m-1)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-4} C_{m-1}^{j} y\left(u^{m-j-1} + u^{m-j-2} + f_{m-j-1}\right) u^{(j)} +$$

$$+ C_{m-1}^{m-3} y\left(u^2 + u'\right) u^{(m-3)} + C_{m-1}^{m-2} yuu^{(m-2)} + C_{m-1}^{m-1} yu^{(m-1)} =$$

$$= y\left[\left(u^{m-1} + u^{(m-2)} + f_{m-1}\right) u + C_{m-1}^{1}\left(u^{m-2} + u^{(m-3)} + f_{m-2}\right) u' + \ldots +\right.$$

$$+ C_{m-1}^{m-4}\left(u^3 + u'' + f_3\right) u^{(m-4)} + C_{m-1}^{m-3}\left(u^2 + u' + f_2\right) u^{(m-3)} +$$

$$\left.+ C_{m-1}^{m-2} u\, u^{(m-2)} + u^{(m-1)}\right] = y\left[u^m + u^{(m-1)} + f_m\right],$$

де

$$f_m = \left(u^{(m-2)} + f_{m-1}\right) u + \sum_{j=1}^{m-4} C_{m-1}^{j}\left(u^{m-j-1} + u^{(m-j-2)} + f_{m-j-1}\right) u^{(j)} +$$

$$+ C_{m-1}^{m-3}\left(u^2 + u'\right) u^{(m-1)} + C_{m-1}^{m-2}\, u\, u^{(m-2)}$$

є нелінійною функцією u та похідних u до ($m-2$)-го порядку включно. То ж, справді, формула (5.17) достовірна.

Підставляючи (5.14), (5.16), (5.17) у рівняння (5.13) і скорочуючи результат підстановки на $y \neq 0$, отримаємо рівняння ($n-1$)-го порядку відносно залежної змінної u:

$$p_0(x)\left(u^n + u^{(n-1)} + f_n\right) + p_1(x)\left(u^{n-1} + u^{(n-2)} + f_{n-1}\right) + \ldots +$$

$$+ p_{n-2}(x)\left(u^2 + u'\right) + p_{n-1}(x)\, u + p_n(x) = 0,$$

або

$$p_0(x)\, u^{(n-1)} + p_1(x)\, u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-2}(x)\, u' + p_{n-1}(x)\, u +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-2} p_i(x) u^{n-i} + p_n(x) + f\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-2)}\right) = 0, \qquad (5.18)$$

де

$$f\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-2)}\right) = \sum_{i=0}^{n-3} p_i(x) f_{n-i}.$$

Таким чином, **заміна** (5.14) **залежної змінної** зводить однорідне лінійне рівняння n-го порядку до **нелінійного рівняння (Ойлера—Ріккаті)** (5.18) ($n-1$)-го порядку.

5.6 Пониження порядку рівняння заміною залежної змінної

Нехай $y = y_1(x)$ є окремий розв'язок рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (5.19)$$

в деякому проміжку $x \in (a,b)$. За незалежну змінну візьмемо функцію $z = z(x)$, таку що

$$y = y_1 z \qquad (5.20)$$

Співвідношення (5.19) розв'язуване відносно z там, де $y_1(x)$ не обертається на нуль; надалі, власне, і вважатимемо, що йдеться про ті x, при яких $y_1(x) \neq 0$.

На підставі (5.19) знайдемо похідні

$$y' = y_1 z' + y_1' z,$$

$$y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(i)} = C_i^0 y_1 z^{(i)} + C_i^1 y_1' z^{(i-1)} + C_i^2 y_1'' z^{(i-2)} + \ldots + C_i^i y_1^{(i)} z,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = C_n^0 y_1 z^{(n)} + C_n^1 y_1' z^{(n-1)} + C_n^2 y_1'' z^{(n-2)} + \ldots + C_n^n y_1^{(n)} z.$$

Підставляючи їх у рівняння (5.19), матимемо:

$$C_n^0 p_0 y_1 z^{(n)} + \left(C_n^1 p_0 y_1' + C_{n-1}^0 p_1 y_1\right) z^{(n-1)} + \ldots +$$

$$+\left(p_0 y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y_1\right) z = 0. \qquad (5.21)$$

В отриманому рівнянні коефіцієнт при z є лінійним виразом $L[y_1]$ і дорівнює нулю, оскільки за домовленістю y_1 — розв'язок рівняння (5.19). Ділячи (5.21) на p_0 і покладаючи $u = z'$, дійдемо до рівняння

$$L[u] \equiv u^{(n-1)} + h_1(x)u^{(n-2)} + \ldots + h_{n-1}(x)u = 0 \qquad (5.22)$$

— лінійного однорідного порядку $n-1$, в якому коефіцієнти є неперервними функціями у всьому проміжку (a,b), за винятком, хіба що, точок, в яких $y_1(x) = 0$. Таким чином, рівняння (5.19) n-го порядку зведено до рівняння (5.22) порядку $n-1$ за допомогою заміни

$$y = y_1 \int u\,dx \text{ або } u = z' = \frac{d}{dx}\frac{y}{y_1}.$$

Нехай u_1, u_2, …, u_{n-1} — фундаментальна система розв'язків рівняння (5.22). Тоді фундаментальну систему z-розв'язків складатимуть функції 1 *), $\int u_1\,dx$, $\int u_2\,dx$, …, $\int u_{n-1}\,dx$, а фундаментальну систему y-розв'язків — функції

$$y_1,\ y_2 = y_1\int u_1\,dx,\ y_3 = y_1\int u_2\,dx,\ \ldots,\ y_n = y_1\int u_{n-1}\,dx. \tag{5.23}$$

Пересвідчимося, що функції (5.23) справді складають фундаментальну систему розв'язків рівняння (5.19).

З попереднього викладу зрозуміло, що функції (5.23) є розв'язками рівняння (5.19). Припустимо, що вони лінійно залежні, а отже справджується тотожність $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 0$, яку за умови $y_1(x) \neq 0$ можна подати у вигляді

$$c_1 + c_2\int u_1\,dx + c_3\int u_2\,dx + \ldots + c_n\int u_{n-1}\,dx = 0.$$

Диференціюючи останню тотожність за x, знайдемо: $c_2u_1 + c_3u_2 + \ldots + c_nu_{n-1} = 0$. Але це перечить умові лінійної незалежності функцій u_1, u_2, …, u_{n-1}. Отже $c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$, а оскільки $y_1(x) \neq 0$, то й $c_1 = 0$; звідси випливає, що y_1, y_2, …, y_n справді утворюють фундаментальну систему.

Таким чином, якщо відомий окремий розв'язок лінійного однорідного рівняння (5.19) n-го порядку, то задача розв'язування цього рівняння **зводиться** до задачі розв'язування **лінійного однорідного рівняння порядку** $n-1$.

Тепер припустимо, що відомі два лінійно незалежні розв'язки рівняння (5.19) — $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$. Як і раніше, введемо нову змінну $u = (y/y_1)'$ і отримаємо для u рівняння (5.22) порядку $n-1$. Але тепер це рівняння має один відомий розв'язок $u_1 = (y_2/y_1)'$, а тому воно, в свою чергу, підлягає зниженню порядку на одиницю **).

Таким чином, якщо відомі два окремі розв'язки лінійного однорідного рівняння (5.19) n-го порядку, то задача розв'язування цього рівняння зводиться до задачі розв'язування лінійного однорідного рівняння порядку $n-2$. Якщо відомі два окремі розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння n-го порядку, то заміною

$$v = \frac{y_1y''W[y_1, y_2] + y'W'[y_1, y_2] + y(y_1'y_2'' - y_1''y_2')}{W^2[y_1, y_2]}$$

це рівняння відразу можна звести до рівняння ($n-2$)-го порядку.

---

*) Неважко переконатися, що якщо в лінійному однорідному рівнянні коефіцієнт при залежній змінній є нулем, то стала є окремим розв'язком цього рівняння, і навпаки, якщо рівняння задовольняє стала, то коефіцієнт при залежній змінній є нулем.

**) Розв'язок $(y_1/y_1)'$ — тривіальний; з іншого боку, u_1 — нетривіальний розв'язок, якщо y_1 і y_2 лінійно незалежні; справді, якщо $u_1 \equiv 0$, то $y_2/y_1 = c = \mathrm{const}$, звідки $cy_1 - y_2 = 0$, чого не повинно бути.

Нехай загалом відомі $r<n$ лінійно незалежних окремих розв'язків рівняння (5.19) — $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, …, $y=y_r(x)$. Підстановка $u=(y/y_1)'$ знову веде до рівняння (5.22) порядку $n-1$, для якого тепер, однак, відомими є $r-1$ окремих розв'язків $u_1=(y_2/y_1)'$, $u_2=(y_3/y_1)'$, …, $u_{r-1}=(y_r/y_1)'$. Вони лінійно незалежні; справді, якщо припустити існування співвідношення

$$\lambda_2 u_1+\lambda_3 u_2+\ldots+\lambda_r u_{r-1}=0,$$

то інтегруючи його за x, дійдемо до співвідношення

$$\lambda_2 \frac{y_2}{y_1}+\lambda_3 \frac{y_3}{y_1}+\ldots+\lambda_r \frac{y_r}{y_1}=-\lambda_1$$

($-\lambda_1$ — стала інтегрування), або

$$\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\ldots+\lambda_r y_r=0,$$

що перечить припущенню про лінійну незалежність функцій y_1, y_2, …, y_r.

Рівняння (5.22), таким чином, має $r-1$ відомих лінійно незалежних окремих розв'язків. Беручи $v=(u/u_1)'$ за нову шукану функцію, дійдемо до лінійного рівняння (відносно v) порядку $n-2$, такого що має $r-2$ лінійно незалежних окремих розв'язків $(u_2/u_1)'$, $(u_3/u_1)'$, …, $(u_{r-1}/u_1)'$. Стосовно цього рівняння можна знову застосувати викладені міркування; врешті-решт прийдемо до рівняння порядку $n-r$.

Таким чином, якщо відомі r окремих розв'язків лінійного однорідного рівняння (5.19) n-го порядку, то **порядок рівняння** можна **знизити на** r **одиниць**. Зокрема, якщо відомими є $n-1$ окремих лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку, то це рівняння можна звести до рівняння першого порядку, яке розв'язується в квадратурах; отже, в такому разі в квадратурах розв'язується і первісне рівняння n-го порядку.

5.7 Загальний випадок заміни змінних

В загальному випадку одночасно незалежній x і залежній y змінним можна поставити у відповідність нові змінні u і v так, що

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\phi(u,v) \tag{5.24}$$

($\varphi(u,v)$ і $\phi(u,v)$ вважаються неперервними і належно диференційовними). Оскільки y є функцією x, то (5.24) можна вважати записом функційного зв'язку між u і v; зокрема, можна вважати, що v є функцією u: $v=v(u)$.

Диференціюючи рівності (5.24) за x, отримаємо:

$$1=\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}v'\right)\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{dy}{dx}=\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}v'\right)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.25}$$

($(\cdot)'=\partial(\cdot)/\partial u$). Елімінуючи з останніх рівностей величину $\partial u/\partial x$, матимемо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial y}{\partial v}v'}{\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}v'}\,. \tag{5.26}$$

Другу похідну знаходимо за формулою

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{dy}{dx}v'\right)\frac{\partial u}{\partial x},$$

в якій необхідно ще виконати операції диференціювання величини dy/dx за u та v і, далі, елімінування $\partial u/\partial x$ з отриманого виразу за допомогою системи рівностей (5.25). Аналогічно знаходяться третя й наступні похідні, що фігурують в рівняннях (5.19) і (5.8).

Зрештою, можна діяти й інакше: продовжити диференціювання виразу (5.26) в "незавершеному" вигляді; отже

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}v'\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}v'\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}v'+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}v'^2+\frac{\partial y}{\partial v}v''\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}v'\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тощо; далі замінити похідні $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$, … їх виразами через u і v. Відповідний вираз для $\partial u/\partial x$ випливає з (5.25), а вирази для $\partial^2 u/\partial x^2$ тощо можна знайти за допомогою диференціювання першої рівності (5.25):

$$0=\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}v'+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}v'^2+\frac{\partial x}{\partial v}v''\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}v'\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x}$$

тощо. Зокрема, для визначення похідної d^2y/dx^2 знайдемо вираз

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}v'+\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}v'^2+\dfrac{\partial y}{\partial v}v''}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}v'\right)^2}-$$

$$-\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}v'\right)\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}v'+\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}v'^2+\dfrac{\partial x}{\partial v}v''}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}v'\right)^3}=$$

$$=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}v'\right)^3}\left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}v'+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}v'^2+\frac{\partial y}{\partial v}v''\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}v'\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}v'+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}v'^2+\frac{\partial x}{\partial v}v''\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}v'\right)\right]. \tag{5.27}$$

Закон, що відображає як величини u, v, $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$, … формують похідні dy/dx, $d^2 y/dx^2$, … в загальному випадку є досить складним. Тому в конкретних задачах краще застосовувати наведений алгоритм перетворень, аніж безпосередньо загальні формули для визначення величин dy/dx, $d^2 y/dx^2$, … через величини u, v, $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$, …

Вдаючись до формул (5.24), (5.26), (5.27), можна, наприклад, рівняння

$$p_0(x)y''+p_1(x)y+p_2(x)y=q(x)$$

звести до нелінійного

$$\frac{p_0(\varphi)}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}v'\right)^3}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial u\,\partial v}v'+\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}v'^2+\frac{\partial\phi}{\partial v}v''\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}v'\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}v'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}v'^2+\frac{\partial\varphi}{\partial v}v''\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial v}v'\right)\right]+$$

$$+\frac{p_1(\varphi)}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}v'}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial v}v'\right)-p_2(\varphi)\phi=q(\varphi).$$

Формули перетворення (5.24) можна тлумачити як аналітичний запис відображення заданої рівнянням $y=y(x)$ лінії l з площини Oxy, в означувану рівнянням $\phi(u,v)=y(\varphi(u,v))$ лінію λ на площині Ouv, або ж як відповідне перетворення координат — декартових прямокутних (x,y) у деякі криволінійні (v,u), в яких рівняння лінії має вигляд $\phi(u,v)=y(\varphi(u,v))$. Зазначимо, що якщо ϕ не залежить від u, а φ від v, то перетворення (5.24) зводиться до двох послідовних окремих перетворень незалежної і залежної змінних.

Буває вигідно **необмежену координатну площину згортати в обмежену просторову чи обмежену пласку поверхню** певної конфігурації. Таке згортання дозволяє, зокрема, більш наочними засобами досліджувати такі **траєкторії руху системи, які сягають нескінченно віддалених околів координатної площини**. Одним з можливих засобів згортання координатної площини є проектування її точок на певну просторову поверхню чи **проектування координатної площини саму на себе через задану просторову поверхню**.

Розглянемо в прямокутній системі координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ сферу радіуса R

$$(\tilde{x}-x_0)^2+(\tilde{y}-y_0)^2+(\tilde{z}-z_0)^2=R^2,$$

з центром в точці $P'(x_0,y_0,z_0)$ та пряму

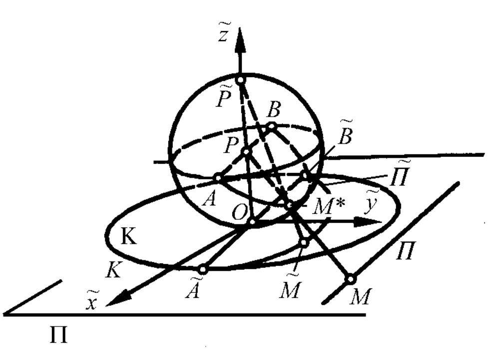
$$\frac{\tilde{x}-x_1}{x-x_1}=\frac{\tilde{y}-y_1}{y-y_1}=\frac{\tilde{z}-z_1}{z-z_1},$$

яка проходить через дві певні точки $M(x,y,z)$ і $N(x_1,y_1,z_1)$, що не збігаються. Покладаючи $R=1$, сумістимо точки P' і N з точкою $P(0,0,1)$ осі $O\tilde{z}$ (P називатимемо полюсом прямого проектування). Сфера при цьому описуватиметься рівнянням

$$\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+(\tilde{z}-1)^2=1;$$

вона дотична в точці $O(0,0,0)$ до координатної площини Π (рис. 63). Точку ж $M(x,y,z)$ вважатимемо завжди належною координатній площині Π ($z=0$, $M(x,y,z)=M(x,y,z=0)=M(x,y)$). Тоді точку M^* (менш чи більш віддалену від M) перетину прямої

$$\frac{\tilde{x}}{x}=\frac{\tilde{y}}{y}=1-\tilde{z}$$



63 **Схема згортання площини в круг.**

з одиничною сферою можна тлумачити як відображення точки $M(x, y)$ координатної площини Π на сферу. В такому разі нижня півсфера є відображенням всієї площини Π на сферу. При цьому деякій прямій $\mathit{\Pi}$ площини Π (прямій, що проходить через точку M) відповідатиме на сфері півдуга AM^*B великого кола одиничного діаметра APB; "безмежно віддаленим" точкам прямої $\mathit{\Pi}$ відповідатимуть крайні точки A і B власне того діаметра APB, що є паралельним до прямої $\mathit{\Pi}$. Таким чином, між сферою (її нижньою половиною) і площиною існує взаємна однозначна відповідність. Проте, слід взяти до уваги те, що кожна точка екватора сфери відповідає "безмежно віддаленим" точкам безлічі паралельних прямих, а отже однозначно не відтворювана на площині (як тут не наполягати на тому, що паралельні прямі перетинаються у безмежності?).

Спроектуємо тепер сферу назад на площину Π, беручи на цей раз за полюс проектування (зворотного) верхній геометричний полюс $\widetilde{P}$ сфери. Проекція M^* точки $M(x, y)$ на сферу тепер відобразиться на площині Π точкою $\widetilde{M}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ перетину прямої $\widetilde{P}M^*$ з цією площиною. При такому проектуванні нижня півсфера відобразиться на площині Π кругом K, охоплюваним колом K, що є образом екватора сфери. Велике півколо AM^*B сфери відобразиться на площині Π дугою $\widetilde{\mathit{\Pi}}$, обмеженою діаметрально протилежними точками $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ кола K.

Таким чином, вся **площина** Π в результаті двократного послідовного центрального проектування (з полюсом проектування спочатку в центрі одиничної сфери, а потім — у верхньому геометричному полюсі сфери) буде **"згорнута" у круг** K діаметром 2 зі збереженням взаємної однозначної відповідності у зазначеному вище сенсі. Цей круг K є частиною площини Π, а коло K, що його охоплює, — образом "безмежно віддаленого краю" (якщо так можна казати) цієї площини. Кожна належна площині Π пряма $\mathit{\Pi}$ перетворюється у дугу $\widetilde{\mathit{\Pi}}$ круга K, яка перетинається з колом K у двох діаметрально протилежних точках.

Полюс $\widetilde{P}$ зворотного проектування можна пересунути у нескінченність вздовж додатного напряму координатної осі $O\widetilde{z}$. Тоді зворотне проектування набуде змісту ортогонального перетворення нижньої півсфери в **одиничний плаский круг**, що лежить на Π. Зв'язок між первісною точкою (x, y) і її проекцією $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ на одиничний плаский круг відображає формула

$$\frac{\widetilde{x}}{x} = \frac{\widetilde{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = \sqrt{1 - \widetilde{x}^2 - \widetilde{y}^2}\ .$$

Якщо вдатися до сферичного **проективного перетворення рівнянь**, то оператор першого порядку

$$L[\,y] = p_0(x)\frac{dy}{dx} + p_1(x)\,y$$

набуде вигляду

$$L[\,\widetilde{y}] = p_0\left(\frac{\widetilde{x}}{\sqrt{1 - \widetilde{x}^2 - \widetilde{y}^2}}\right)\frac{1 - \widetilde{x}^2 + \widetilde{x}\,\widetilde{y}\,\dfrac{d\widetilde{y}}{d\widetilde{x}}}{\widetilde{x}\widetilde{y} + (1 - \widetilde{y}^2)\dfrac{d\widetilde{y}}{d\widetilde{x}}} + p_1\left(\frac{\widetilde{x}}{\sqrt{1 - \widetilde{x}^2 - \widetilde{y}^2}}\right)\frac{\widetilde{y}}{\sqrt{1 - \widetilde{x}^2 - \widetilde{y}^2}}\ .$$

5.8 Заміна залежної змінної і зведення диференціального рівняння до системи рівнянь першого порядку

Розглядатимемо рівняння

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \tag{5.28}$$

в якому за незалежну змінну править x; $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_n(x) \neq 0$, $q(x)$ — дійсні неперервні і неперервно диференційовні в $I = [a,b]$ функції. Поставимо цьому рівнянню у відповідність алгебричне рівняння

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0 \tag{5.29}$$

зі сталими дійсними коефіцієнтами $a_0 \neq 0$, a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n та диференціальне рівняння з тими самими сталими коефіцієнтами

$$a_0z^{(n)}(x) + a_1z^{(n-1)}(x) + a_2z^{(n-2)}(x) + \ldots + a_{n-1}z'(x) + a_nz(x) = q(x); \tag{5.30}$$

введемо також функції $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, …, $\Psi_n(x)$ такі, що задовольняють рівняння

$$y'(x) - z'(x) = \Psi_1k_1e^{k_1x} + \Psi_2k_2e^{k_2x} + \ldots + \Psi_nk_ne^{k_nx} = \sum_{i=1}^{n}\Psi_ik_ie^{k_ix},$$

$$y''(x) - z''(x) = \Psi_1k_1^2e^{k_1x} + \Psi_2k_2^2e^{k_2x} + \ldots + \Psi_nk_n^2e^{k_nx} = \sum_{i=1}^{n}\Psi_ik_i^2e^{k_ix},$$

…………………………………………………………………

$$y^{(n)}(x) - z^{(n)}(x) = \Psi_1k_1^ne^{k_1x} + \Psi_2k_2^ne^{k_2x} + \ldots + \Psi_nk_n^ne^{k_nx} = \sum_{i=1}^{n}\Psi_ik_i^ne^{k_ix} \tag{5.31}$$

(k_i — корені алгебричного рівняння (5.29), $i = \overline{1,n}$; $z(x)$ — окремий розв'язок рівняння (5.30), який вироджується у тривіальний $z(x) \equiv 0$, коли у рівнянні (5.28) $q(x) \equiv 0$).

Рівняння (5.28) розв'яжемо відносно y:

$$y(x) = \frac{1}{p_n(x)}\left[q(x) - \left(p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}(x)y'(x)\right)\right].$$

Далі, зважаючи на (5.31), подамо останній вираз у вигляді

$$y(x) = \frac{1}{p_n(x)}\Bigg[q(x) - \left(p_0(x)z^{(n)}(x) + p_1(x)z^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}(x)z'(x)\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\left(p_0(x)k_i^n + p_1(x)k_i^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x)k_i\right)\Psi_ie^{k_ix}\Bigg]. \tag{5.32}$$

На підставі (5.32), (5.31) можна побудувати рівняння

$$\Psi_1' e^{k_1 x} + \Psi_2' e^{k_2 x} + \ldots + \Psi_n' e^{k_n x} = \alpha + \alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2 + \ldots + \alpha_n \Psi_n = \mu ,$$

$$\Psi_1' k_1 e^{k_1 x} + \Psi_2' k_2 e^{k_2 x} + \ldots + \Psi_n' k_n e^{k_n x} = 0 ,$$

$$\Psi_1' k_1^2 e^{k_1 x} + \Psi_2' k_2^2 e^{k_2 x} + \ldots + \Psi_n' k_n^2 e^{k_n x} = 0 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Psi_1' k_1^{n-1} e^{k_1 x} + \Psi_2' k_2^{n-1} e^{k_2 x} + \ldots + \Psi_n' k_n^{n-1} e^{k_n x} = 0 . \qquad (5.33)$$

Дійсно. Диференціюючи перше рівняння (5.31) за x і порівнюючи результат з другим рівнянням (5.31), отримаємо друге рівняння (5.33); …; диференціюючи передостаннє рівняння (5.31) за x і порівнюючи результат з останнім рівнянням (5.31), отримаємо останнє рівняння (5.33). Диференціюючи (5.32) за x та побіжно враховуючи, що

$$z^{(n+1)} = \frac{1}{a_0}\Big(q'(x) - a_1 z^{(n)}(x) - a_2 z^{(n-1)}(x) - \ldots - a_{n-1} z''(x) - a_n z'(x)\Big)$$

$$k_j^n = -\frac{a_1}{a_0} k_j^{n-1} - \frac{a_2}{a_0} k_j^{n-2} - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_0} k_j - \frac{a_n}{a_0}$$

(див. (5.30), (5.29)), одержимо вираз для похідної $y'(x)$; порівнюючи цей вираз з рівняннями (5.31), отримаємо перше з рівнянь (5.33), в якому позначено

$$\alpha = \Omega + \Omega_{n-1} z'(x) + \Omega_{n-2} z''(x) + \ldots + \Omega_1 z^{(n-1)}(x) + \Omega_0 z^{(n)}(x) ,$$

$$\alpha_j = \Big(\Omega_{n-1} k_j + \Omega_{n-2} k_j^2 + \ldots + \Omega_1 k_j^{n-1} + \Omega_0 k_j^n \Big) e^{k_j x} ,$$

$$\Omega = \frac{a_0}{a_n} P(x) + \frac{1}{a_n} q'(x), \quad \Omega_j = \frac{a_0}{a_n} P_j(x) - \frac{a_{j+1}}{a_n} ,$$

$$P(x) = \frac{p_n'(x)}{p_n(x)} \frac{q(x)}{p_0(x)} - \frac{q'(x)}{p_0(x)}, \quad P_j(x) = \frac{p_{j+1}(x)}{p_0(x)} - \frac{p_n'(x)}{p_n(x)} \frac{p_j(x)}{p_0(x)} + \frac{p_j'(x)}{p_0(x)} ,$$

$$j = \overline{0, n-1} . \qquad (5.34)$$

Виявляється, якщо відповідні рівнянню (5.28) функції $y'(x)$, $y''(x)$, …, $y^{(n)}(x)$ є однозначними і неперервними, то при заданих a_0, a_1, a_2, …, a_n функції $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, …, $\Psi_n(x)$ — також однозначні і неперервні.

Можна довести, що

$$\alpha+\alpha_1\Psi_1+\alpha_2\Psi_2+\ldots+\alpha_n\Psi_n=\Omega+\Omega_0 y^{(n)}+\Omega_1 y^{(n-1)}+\ldots+\Omega_{n-1}y'=$$

$$=q'-\left(a_0 y^{(n+1)}+a_1 y^{(n)}+\ldots+a_n y'\right)=\mu\,. \qquad (5.35)$$

Величина μ є дійсною однозначною неперервною функцією змінної x.

Таким чином, в процесі наведених перетворень одну залежну змінну y замінено на n невідомих функцій Ψ_j. При цьому одне **рівняння** (5.28) ***n*-го порядку перетворено** в **систему** (5.33) ***n*** **рівнянь першого порядку**. Наприклад, рівняння другого порядку $p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=q(x)$ зводиться до двох рівнянь першого порядку

$$\Psi_1' e^{k_1x}+\Psi_2' e^{k_2x}=\Omega+\Omega_0 z''+\Omega_1 z'+$$

$$+\left(\Omega_0 k_1^2+\Omega_1 k_1\right)\Psi_1 e^{k_1x}+\left(\Omega_0 k_2^2+\Omega_1 k_2\right)\Psi_2 e^{k_2x}=\mu\,,$$

$$\Psi_1' k_1 e^{k_1x}+\Psi_2' k_2 e^{k_2x}=0\,;$$

$$\Omega=\frac{a_0}{a_2}\left(\frac{p_2'(x)}{p_2(x)}\frac{q(x)}{p_0(x)}-\frac{q'(x)}{p_0(x)}\right)+\frac{1}{a_2}q'(x),$$

$$\Omega_0=\frac{a_0}{a_2}\left(\frac{p_1(x)}{p_0(x)}-\frac{p_2'(x)}{p_2(x)}+\frac{p_0'(x)}{p_0(x)}\right)-\frac{a_1}{a_2}\,,$$

$$\Omega_1=\frac{a_0}{a_2}\left(\frac{p_2(x)}{p_0(x)}-\frac{p_2'(x)}{p_2(x)}\frac{p_1(x)}{p_0(x)}+\frac{p_1'(x)}{p_0(x)}\right)-1\,.$$

Систему (5.33) можна розв’язати відносно похідних. Зокрема, при попарно різних коренях рівняння (5.29) цю систему можна подати у вигляді

$$\Psi_j'=(-1)^{j+1}\mu\frac{\Delta_j}{\Delta}e^{-k_jx}\,,\quad j=\overline{1,n}\,, \qquad (5.36)$$

де Δ — визначник Ван-дер-Монда з коренів рівняння (5.29); а визначник

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_{j-1} & k_{j+1} & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_{j-1}^2 & k_{j+1}^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_{j-1}^{n-1} & k_{j+1}^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

випливає з Δ при викреслюванні в ньому першого рядка та j-го стовпця.

Справедливим є твердження: якщо можна підібрати такі дійсні сталі $a_0 \neq 0$, a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n, при яких $k_1, k_2, \ldots, k_n$ є попарно різними і задовольняються при цьому $n-1$ тотожностей

$$\Omega_1 + k_2\Omega_2 + k_2^2\Omega_2 + \ldots + k_2^{n-1}\Omega_n = 0,$$

$$\Omega_1 + k_3\Omega_2 + k_3^2\Omega_2 + \ldots + k_3^{n-1}\Omega_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega_1 + k_n\Omega_2 + k_n^2\Omega_2 + \ldots + k_n^{n-1}\Omega_n = 0, \qquad (5.37)$$

то за допомогою рівняння (5.32) розв’язок рівняння (5.28) відображається в квадратурах. Твердження має такі підстави.

За умов (5.37) функції α_j, $j = \overline{2,n}$ (див. (5.34)) обертаються тотожно на нуль, через що функція (5.35) набуває вигляду

$$\mu = \alpha + \alpha_1\Psi_1. \qquad (5.38)$$

То ж на підставі (5.36) матимемо:

$$\Psi_1' = \left(\alpha + \alpha_1\Psi_1\right)\frac{\Delta_j}{\Delta}e^{-k_1 x}.$$

Остання рівність є диференціальним рівнянням першого порядку, яке завжди розв’язується в квадратурах (визначається через змінну x, параметри a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n і початкові умови). Конкретної означеності набувають функція (5.38), а разом з нею і функції $\Psi_2, \Psi_3, \ldots, \Psi_n$, підставляючи які в (5.32), отримаємо розгорнутий запис точного розв’язку диференціального рівняння (5.28).

Якщо можна підібрати такі m чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ($0 < m \leq n$), які б забезпечували дотримання m рівностей

$$P_0 k_\nu^n + P_1 k_\nu^{n-1} + \ldots + P_n k_\nu = 0, \quad \nu = \overline{1,m}, \qquad (5.39)$$

то лінійне рівняння (5.28) n-го порядку зводиться до лінійного ж рівняння ($n-m$)-го порядку. Справді, у випадку дотримання наведених рівностей функції α_1, α_2, …, α_m (див. (5.34)) обертаються тотожно на нуль, а тому функція (5.35) набуває вигляду

$$\mu = \alpha + \alpha_{m+1}\Psi_1 + \alpha_{m+2}\Psi_2 + \ldots + \alpha_n\Psi_n.$$

То ж, елімінуванням змінних система (5.33) може бути зведена до системи $n-m$ рівнянь, а потім і до одного рівняння ($n-m$)-го порядку.

Співвідношення (5.37), (5.39) дозволяють вирізнити класи рівнянь, які розв’язуються в елементарних функціях чи квадратурах.

6 СПРЯЖЕНІ РІВНЯННЯ 6

6.1 Множник диференціального оператора

Розглянемо у проміжку $I=(a,b)$ $(a<x<b)$ добуток

$$z(x)L[y]\equiv z(x)\left[p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y\right], \qquad (6.1)$$

деякої n разів диференційовної у цьому проміжку функції $z(x)$ і лінійного диференціального оператора (виразу) $L[y]$, в якому коефіцієнти $p_0(x)\neq 0$, $p_1(x),\cdots,p_{n-1}(x),p_n(x)$ вважаються заданими неперервними і необхідну кількість разів неперервно диференційовними функціями від змінної x ($x\in I=(a,b)$). Припустимо, існує такий **множник** $\tilde{z}(x)$ (назвемо його **інтегровним**), при якому добуток (6.1) за будь-якої n разів диференційовної функції $y(x)$ стає точною похідною за незалежною змінною x. Тобто, якщо $\tilde{z}(x)$ — який-небудь інтегровний множник оператора $L[y]$, то справджується рівність

$$\tilde{z}L[y]=\frac{d}{dx}\Psi_0[y]=\frac{d}{dx}\Psi_0\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right), \qquad (6.2)$$

в якій, як легко бачити, $\Psi_0[y]$ є лінійним виразом відносно $y,\,y',\,\ldots,\,y^{(n-1)}$:

$$\Psi_0[y]\equiv\alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\alpha_{n-2}(x)y^{(n-2)}+\cdots+\alpha_1(x)y'+\alpha_0(x)y. \qquad (6.3)$$

Вважаючи $z(x)$ (як і $y(x)$) довільною, обчислимо неозначені інтеграли

$$\int p_i(x)z(x)y^{(n-i)}(x)dx, \quad i=\overline{0,n},$$

вдаючись послідовно до інтегрування частинами стільки разів, скільки необхідно для того, щоб під знаком інтеграла похідну $y^{(n-i)}(x)$ замістила відповідна їй первісна функція $y(x)$:

$$\int p_0zy^{(n)}\,dx=p_0zy^{(n-1)}-(p_0z)'y^{(n-2)}+(p_0z)''y^{(n-3)}-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}(p_0z)^{(n-1)}y+(-1)^n\int y\,(p_0z)^{(n)}\,dx,$$

$$\int p_1 z y^{(n-1)}\,dx = p_1 z y^{(n-2)} - (p_1 z)' y^{(n-3)} + (p_1 z)'' y^{(n-4)} - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-2} (p_1 z)^{(n-2)} y + (-1)^{n-1} \int y (p_1 z)^{(n-1)}\,dx\,,$$

…………………………………………………………………

$$\int p_{n-2} z y''\,dx = p_{n-2} z y' - (p_{n-2} z)' y + \int y (p_{n-2} z)''\,dx\,,$$

$$\int p_{n-1} z y''\,dx = p_{n-1} z y - \int y (p_{n-1} z)'\,dx\,,$$

$$\int p_n z y''\,dx = \int y\, p_n z\,dx\,.$$

Отже неозначений інтеграл добутку (6.1) можна подати у вигляді

$$\int z(x) L[y]\,dx = \sum_{i=0}^{n} \int p_i(x) z(x) y^{(n-i)}(x)\,dx =$$

$$= \left[p_{n-1} z - (p_{n-2} z)' + \ldots + (-1)^{n-1} (p_0 z)^{(n-1)} \right] y +$$

$$+ \left[p_{n-2} z - (p_{n-3} z)' + \ldots + (-1)^{n-2} (p_0 z)^{(n-2)} \right] y' +$$

……………………………

$$+ \left[p_1 z - (p_0 z)' \right] y^{(n-2)} +$$

$$+ [\, p_0 z] y^{(n-1)} +$$

$$+ \int \left[p_n z - (p_{n-1} z)' + (p_{n-2} z)'' - \ldots + (-1)^n (p_0 z)^{(n)} \right] y\,dx\,,$$

або ж у вигляді

$$\int \{ z(x) L[y] - y(x) l[z] \}\,dx = \Psi[y,z], \tag{6.4}$$

де

$$l[z] = p_n z - (p_{n-1} z)' + (p_{n-2} z)'' - \ldots + (-1)^{n-1} (p_1 z)^{(n-1)} + (-1)^n (p_0 z)^{(n)}; \tag{6.5}$$

$$\Psi[y,z] = \left[p_{n-1}\, z - (p_{n-2}\, z)' + \ldots + (-1)^{n-1} (p_0 z)^{(n-1)} \right] y +$$

$$+ \left[p_{n-2} z - (p_{n-3} z)' + \ldots + (-1)^{n-2} (p_0 z)^{(n-2)} \right] y' +$$

……………………………

$$+ \left[p_1 z - (p_0 z)' \right] y^{(n-2)} +$$

$$+ \left[p_0 z \right] y^{(n-1)}\,. \tag{6.6}$$

Оператор $l[z]$ (6.5) називають **спряженим** з оператором $L[y]$. Аналогічно, **рівняння**

$$l[z]=0 \tag{6.7}$$

називають **спряженим** з рівнянням

$$L[y]=0 \tag{6.8}$$

Функція $\Psi[y,z]$ (6.6) є двоїсто лінійною формою (відносно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, з одного боку, і $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$, з іншого боку).

Нагадаємо, співвідношення (6.4) є справедливим за довільних належно диференційовних функцій $y(x)$, $z(x)$. Візьмемо за $z(x)$ розв'язок $\tilde{z}(x)$ рівняння (6.7). В цьому випадку рівняння (6.4) набуває вигляду

$$\int \tilde{z}L[y]\,dx=\Psi[y,\tilde{z}],$$

звідки

$$\tilde{z}L[y]=\frac{d}{dx}\Psi[y,\tilde{z}].$$

Таким чином, існує множник $\tilde{z}(x)$ (інтегровний) лінійного диференціального оператора $L[y]$), при якому добуток $\tilde{z}L[y]$ цих функції і оператора стає точною похідною деякого диференціального оператора ($n-1$)-го порядку за змінною x. Цей множник є розв'язком однорідного лінійного диференціального рівняння (6.7), спряженого з однорідним лінійним диференціальним рівнянням (6.8). І навпаки, для того щоб множник $\tilde{z}(x)$ за будь-якої функції $y(x)$ перетворював добуток $\tilde{z}L[y]$ в точну похідну за x, необхідно, щоб $l[\tilde{z}]\equiv 0$.

Справді. З одного боку, якщо $\tilde{z}(x)$ — інтегровний множник, то справджується співвідношення (6.2). З іншого боку, підставляючи $\tilde{z}$ замість z в (6.4) і диференціюючи результат за x, матимемо:

$$\tilde{z}L[y]=\frac{d}{dx}\Psi[y,\tilde{z}]+yl[\tilde{z}]. \tag{6.9}$$

З (6.2) і (6.9) випливає, що

$$\frac{d}{dx}\{\Psi[y,\tilde{z}]-\Psi_0[y]\}-yl[\tilde{z}]=0\,. \tag{6.10}$$

В лівій частині (6.10) міститься лінійний диференціальний вираз (див. (6.3), (6.5), (6.6)) n-го порядку відносно y. І оскільки рівняння (6.10) повинно справджуватись тотожно за довільної функції $y(x)$, то коефіцієнти при $y, y', \ldots, y^{(n)}$ є тотожними нулями (якщо б це було не так, то вираз (6.9) довелося б розглядати як диференціальне рівняння щодо y):

$$\alpha_{n-1} = p_0\tilde{z}, \alpha_{n-2} = p_1\tilde{z} - (p_0\tilde{z})', \ldots,$$

$$\alpha_0 = p_{n-1}\tilde{z} - (p_{n-2}\tilde{z})' + \ldots + (-1)^{n-1}(p_0\tilde{z})^{(n-1)}.$$

Звідси випливає, що

$$\Psi[y, \tilde{z}] \equiv \Psi_0[y],$$

і тому (6.10) веде до тотожності $l[\tilde{z}] \equiv 0$.

Отже правдивим є твердження: функція $z(x)$ за будь-якої функції $y(x)$ обертає добуток $zL[y]$ в точну похідну за x тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком $\tilde{z}$ рівняння $l[z] = 0$, спряженого з рівнянням $L[y] = 0$.

6.2 Перший інтеграл лінійного диференціального рівняння

Кожний розв'язок рівняння

$$l[z] \equiv p_n(x)z - (p_{n-1}(x)z)' + (p_{n-2}(x)z)'' - \ldots + (-1)^{n-1}(p_1(x)z)^{(n-1)} +$$

$$+ (-1)^n (p_0(x)z)^{(n)} = 0, \tag{6.11}$$

що є спряженим з рівнянням

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{6.12}$$

в якому коефіцієнти $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ — належно гладкі функції, обертає добуток $z(x)L[y]$ на точну похідну за x:

$$z(x)L[y] \equiv z(x)\left[p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y\right] = \frac{d}{dx}\Psi[y, z].$$

Це означає, що рівність

$$\Psi[y, z] = c = \text{const}$$

є **першим інтегралом** рівняння (6.12) і представляє собою (неоднорідне) лінійне диференціальне рівняння ($n-1$)-го порядку.

Той самий множник $z(x)$ залишається інтегровним і у випадку неоднорідного рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$$

(вільний член $q(x)$ — неперервна функція). В цьому випадку перший інтеграл набуває вигляду

$$\Psi[y, z] = \int q(x)z(x)\,dx + c.$$

Щоби ліва частина рівняння (6.11) сама по собі була точною похідною за незалежною змінною x, необхідно і достатньо, щоби спряжене рівняння (6.11) допускало розв’язок $z(x)=1$, тобто щоби дотримувалась умова

$$p_n - \frac{dp_{n-1}}{dx} + \frac{d^2 p_{n-2}}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n p_0}{dx^n} = 0 . \tag{6.13}$$

У випадку рівнянь зі сталими коефіцієнтами ця умова вироджується у тривіальну рівність $p_n = 0$. Умова (6.13), звичайно, звужує ступінь загальності диференціального рівняння (про це йшлося в 4.11).

6.3 Самоспряжені рівняння

Оператор $L[y]$ парного порядку $n = 2m$ називають **самоспряженим***), якщо він збігається зі спряженим оператором: $L[y] \equiv l[y]$ чи $L[z] \equiv l[z]$. В такому випадку **рівняння** $L[y] = 0$ також називають **самоспряженим**.

Розглянемо, наприклад, **оператор другого порядку**

$$L[y] = p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y$$

і **спряжений** з ним **оператор**

$$l[z] = (p_0(x)z)'' - (p_1(x)z)' + p_2(x)z =$$

$$= p_0(x)z'' + (2p_0'(x) - p_1(x))z' + (p_0''(x) - p_1'(x) + p_2(x))z .$$

Умови самоспряженості

$$p_0(x) = p_0(x),\ 2p_0'(x) - p_1(x) = p_1(x),\ p_0''(x) - p_1'(x) + p_2(x) = p_2(x)$$

зводяться тут до однієї: $p_0'(x) - p_1(x) = 0$. А отже самоспряжений оператор другого порядку має вигляд:

$$L[y] = (p_0(x)y')' + p_2(x)y . \tag{6.14}$$

Розглянемо так звану **формулу Ґріна**.

Покладемо у **формулі Ньютона-Лейбніця**

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dX}{dx} dx$$

*) Поняття самоспряженості щодо операторів непарного порядку губить сенс, оскільки одна з умов самоспряженості $p_0 = 0$ все одно зводить спряжені оператори непарного n-го порядку до операторів парного ($n-1$)-го порядку.

$X = u\dfrac{dv}{dx}$, де u, v — двічі неперервно диференційовні в заданому інтервалі $[x_1, x_2]$ функції незалежної змінної x. Оскільки

$$\frac{dX}{dx} = u\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx},$$

формула Ньютона-Лейбніця набуде вигляду

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(u\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right)dx = v\frac{du}{dx}\bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

Ніщо не заважає поміняти місцями змінні u, v:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(v\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}\right)dx = u\frac{dv}{dx}\bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

Враховуючи, що $u\dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{du}{dx}$ є первісною для $u\dfrac{d^2v}{dx^2} - v\dfrac{d^2u}{dx^2}$, знайдемо різницю двох останніх інтегралів:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(u\frac{d^2v}{dx^2} - v\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx = \left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x_1}^{x_2}. \tag{6.15}$$

Останню рівність і називають формулою Ґріна (для лінійного випадку). Вона дозволяє звичайний інтеграл від заданого **"симетричного" диференціального виразу другого порядку** подати у вигляді деякого також "симетричного" диференціального виразу першого порядку.

Знайдемо тепер інтеграл

$$\int_{x_1}^{x_2}(uL[v] - vL[u])\,dx$$

для самоспряженого диференціального виразу $L[y]$ другого порядку. Отож, приходимо до виразу

$$I = \int_{x_1}^{x_2}\left(p_0u\frac{d^2v}{dx^2} + p_1u\frac{dv}{dx} + p_2uv - p_0v\frac{d^2u}{dx^2} - p_1v\frac{du}{dx} - p_2vu\right)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} p_0\left(u\frac{d^2v}{dx^2} - v\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx + \int_{x_1}^{x_2}\frac{dp_0}{dx}\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)dx.$$

Інтегруючи перший член останнього виразу частинами і беручи до уваги, що функція

$$u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}$$

є первісною для функції

$$u\frac{d^2v}{dx^2}-v\frac{d^2u}{dx^2},$$

матимемо:

$$\int_{x_1}^{x_2}(uL[v]-vL[u])\,dx=p_0\left(u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}, \tag{6.16}$$

де $L[y]$ визначається за формулою (6.14). Рівність (6.16) можна вважати **узагальненою формулою Ґріна в лінійному випадку** ((6.15) випливає з (6.16) за умови $p_0(x)\equiv 1$).

6.4 Фундаментальні системи розв’язків спряжених рівнянь

Спряженість двох операторів є взаємною: якщо $l[z]$ — диференціальний оператор, спряжений з диференціальним оператором $L[y]$, то й навпаки, $L[y]$ — оператор, спряжений з оператором $l[z]$; $l[z]$ однозначно визначається за $L[y]$, а $L[y]$ — однозначно за $l[z]$; розв’язок рівняння $l[z]=0$ є інтегровним множником для рівняння $L[y]=0$, а розв’язок рівняння $L[y]=0$ — інтегровним множником для рівняння $l[z]=0$. Це випливає з аналізу структури рівняння (6.4).

За допомогою одного відомого (якого-небудь окремого) розв’язку спряженого рівняння стає можливим знайти перший інтеграл даного первісного рівняння, не вдаючись до квадратурних операцій. Це є рівнозначним зниженню порядку цього первісного рівняння на одиницю. Якщо відомими є $r<n$ лінійно незалежних окремих розв’язків рівняння $l[z]=0$ (6.11), то можна побудувати r різних перших інтегралів рівняння $L[y]=0$ (6.12). Усуваючи з перших інтегралів величини $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y^{(n-r+1)}$ (можна переконатись, що ця операція завжди можлива і веде до одного-єдиного співвідношення), отримаємо рівняння ($n-r$)-го порядку; порядок первісного рівняння буде знижено на r одиниць.

Нехай відомим є повний розв’язок рівняння (6.12) у формі фундаментальної системи окремих розв’язків

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \ \ (W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\equiv W(x)\neq 0,\ x\in I).$$

Укладемо диференціальний вираз (див. 4.4)

$$\Psi_i[y] = \frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}$$

($n-1$)-го порядку відносно y (чисельник є W-визначником, в якому y_i замінено на y). Очевидно, що $\Psi_i[y_r]=0$ ($r \neq i$) і $\Psi_i[y_i]=1$. Отже вираз $d\Psi_i[y]/dx$ представляє собою лінійний диференціальний вираз n-го порядку, що обертається на нуль при $y = y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Це означає, що $d\Psi_i[y]/dx$ може відрізнятись від $L[y]$ тільки множником, що не залежить від y.

Щоби визначити цей множник, порівняємо коефіцієнти при $y^{(n)}$ у виразах $L[y]$ і $d\Psi_i[y]/dx$. У виразі $L[y]$ цим коефіцієнтом є p_0, а у виразі $d\Psi_i[y]/dx$ він збігається з коефіцієнтом

$$(-1)^{n+i}\frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]} \equiv \frac{\partial \ln W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}{\partial y_i^{(n-1)}}$$

при $y^{(n-1)}$ у виразі $\Psi_i[y]$. То ж виявляється, що

$$\frac{d}{dx}\Psi_i[y] = z_i L[y],$$

де

$$z_1 = (-1)^{n+1}\frac{1}{p_0}\frac{W[y_2, y_3, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}, \ \ldots,$$

$$z_i = (-1)^{n+i}\frac{1}{p_0}\frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}, \ \ldots,$$

$$z_n = \frac{1}{p_0}\frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}, \tag{6.17}$$

тут

$$W[y_2, y_3, \ldots, y_n], \ \ldots, \ W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n], \ \ldots, \ W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]$$

— мінори, що відповідають елементам останнього рядка і відповідно першого, $\ldots$, i-го, $\ldots$, n-го стовпців визначника Вронського.

Відповідно до викладеного вище, вираз z_i є інтегровним множником рівняння (6.12) і водночас розв'язком рівняння (6.11). Надаючи i послідовно значень 1, 2, $\ldots, n$, можна без жодних інтегрувальних операцій побудувати всі n окремих розв'язків рівняння (6.11) на підставі фундаментальної системи розв'язків рівняння (6.12).

На підставі (6.17) легко з'ясувати, що

$$z_1 y_1^{(n-1)} + z_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + z_n y_n^{(n-1)} = \frac{1}{p_0}. \tag{6.18}$$

Далі: у визначнику $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ на місце останнього рядка поставимо по черзі перший, другий, …, ($n-1$)-й рядок цього ж визначника, і отримаємо $n-1$ нульових за значенням визначників (з двома однаковими рядками у кожному); розкладаючи отримані визначники за елементами останнього рядка і ділячи результат на $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, на підставі (6.17) сукупно з рівнянням (6.18) отримаємо систему n рівнянь

$$z_1\, y_1 + z_2\, y_2 + \ldots + z_n\, y_n = 0,$$

$$z_1\, y_1' + z_2\, y_2' + \ldots + z_n\, y_n' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_1\, y_1^{(n-2)} + z_2\, y_2^{(n-2)} + \ldots + z_n\, y_n^{(n-2)} = 0,$$

$$z_1\, y_1^{(n-1)} + z_2\, y_2^{(n-1)} + \ldots + z_n\, y_n^{(n-1)} = \frac{1}{p_0}. \tag{6.19}$$

Тепер, диференціюючи перше з рівнянь (6.19) з врахуванням другого, друге з врахуванням третього, …, передостаннє з врахуванням останнього, одержимо $n-1$ рівнянь

$$z_1'\, y_1 + z_2'\, y_2 + \ldots + z_n'\, y_n = 0,$$

$$z_1'\, y_1' + z_2'\, y_2' + \ldots + z_n'\, y_n' = 0,$$

$$z_1'\, y_1'' + z_2'\, y_2'' + \ldots + z_n'\, y_n'' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_1'\, y_1^{(n-2)} + z_2'\, y_2^{(n-2)} + \ldots + z_n'\, y_n^{(n-2)} = -\frac{1}{p_0}. \tag{6.20}$$

Подібно, диференціюючи кожне з рівнянь (6.20) і беручи до уваги відповідне наступне, одержимо нові $n-2$ рівнянь:

$$z_1''\, y_1^{(i)} + z_2''\, y_2^{(i)} + \ldots + z_n''\, y_n^{(i)} = 0 \quad \left(i = \overline{0, n-4}\right),$$

$$z_1''\, y_1^{(n-3)} + z_2''\, y_2^{(n-3)} + \ldots + z_n''\, y_n^{(n-3)} = \frac{1}{p_0}.$$

Продовжуючи ті самі операції далі, в підсумку дійдемо рівностей

$$z_1^{(i)} y_1^{(j)} + z_2^{(i)} y_2^{(j)} + \ldots + z_n^{(i)} y_n^{(j)} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 0 \le i + j \le n-2, \\ \dfrac{(-1)^i}{p_0}, \text{ якщо } i + j = n-1. \end{cases} \tag{6.21}$$

Обчислимо добуток D визначників $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ і $W[z_1, z_2, \ldots, z_n]$. Відомо, що добуток довільних визначників n-го порядку $\det[a_{ir}]$ і $\det[b_{ir}]$ можна знайти за однією з низки таких формул:

$$\det[a_{ir}]\det[b_{ir}] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jr}\right] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{rj}\right] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{rj}\right] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{jr}\right].$$

Використаємо останню з них (що відображає **правило множення "рядок на рядок"**). Виявиться, що побічну діагональ визначника D формують елементи $(-1)^n/p_0, (-1)^{n-1}/p_0, \ldots, 1/p_0$, а елементами, що знаходяться вище цієї діагоналі, є нулі. Тому

$$D = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]W[z_1, z_2, \ldots, z_n] = \frac{(-1)^n}{p_0}\frac{(-1)^{n-1}}{p_0}\ldots\frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_0^n} \neq 0 . \quad (6.22)$$

А це означає, що

$$W[z_1, z_2, \ldots, z_n] \neq 0 ,$$

і отже функції $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (як лінійно незалежні) складають фундаментальну систему розв'язків спряженого рівняння (6.11).

Таким чином, формули (6.17) однозначно визначають фундаментальну систему $z_1, z_2, \ldots, z_n$ розв'язків спряженого рівняння (6.11) за фундаментальною системою $y_1, y_2, \ldots, y_n$ розв'язків первісного рівняння (6.12). Функції $z_1, z_2, \ldots, z_n$ можна назвати спряженими з функціями y_1, y_2, $\ldots$, y_n (такими, що задовольняють умови (6.21)). Загалом, задачі інтегрування основного і спряженого рівнянь є еквівалентними.

7 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 7

7.1 Про систему лінійних диференціальних рівнянь

Поєднання співвідношень (див. також додаток Б)

$$F_1(x; y_1, y_2, \cdots y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0,$$
$$F_2(x; y_1, y_2, \cdots y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n(x; y_1, y_2, \cdots y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \qquad (7.1)$$

де $y_1, y_2, \cdots, y_n$ — шукані функції змінної x, називають **системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку**. Нехай функції F_1, F_2, …, F_n такі, що дозволяють розв'язати систему (7.1) відносно похідних $y_1', y_2', \cdots, y_n'$ (причому, не обов'язково однозначно). Тоді цій системі можна ставити у відповідність систему

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x; y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (7.2)$$

яку називають **нормальною системою диференціальних рівнянь *n*-го порядку**. Якщо функції f_1, f_2, …, f_n — лінійні за $y_1, y_2, \cdots, y_n$, то систему (7.2), яка має вигляд

$$\frac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \cdots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{2n}(x)y_n + q_2(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x), \qquad (7.3)$$

де p_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ та q_i $(i = \overline{1,n})$ є заданими функціями від x, називають **системою (нормальною) лінійних диференціальних рівнянь** або просто лінійною системою. Якщо всі $q_i \equiv 0$ $(i = \overline{1,n})$, то систему називають **однорідною**, якщо ж хоча б одна з функцій q_i не дорівнює тотожно нулю, то систему залишається називати **неоднорідною**.

Лінійна система (7.3) збереже свій загальний вигляд за будь-якої заміни $x = \varphi(t)$ незалежної змінної, де $\varphi(t)$ — довільна диференційовна функція від t. Вона збереже свій загальний вигляд і за будь-якого **лінійного перетворення**

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) y_j\ ,\ i = \overline{1,n}$$

залежних змінних $y_1, y_2, \cdots, y_n$; тут $\alpha_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$ — диференційовні в наперед окресленому інтервалі $I = (a, b)$ функції, визначник яких $\left| \alpha_{ij}(x) \right|_{n\times n}$ відмінний від нуля всюди в $I = (a, b)$.

Нехай $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$ та $q_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ є неперервними функціями в наперед окресленому інтервалі $I = (a, b)$ $(a < x < b)$. Тоді за теоремою Пікара (про "існування та єдиність") існує єдиний, визначуваний і неперервний в тому самому (!) $I = (a, b)$, розв'язок $\{ y_1(x),\ y_2(x), \cdots, y_n(x) \}$ системи (7.3), який при деякому конкретному $x = x_0 \in (a, b)$ задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_{10},\quad y_2(x_0) = y_{20},\quad \ldots,\quad y_n(x_0) = y_{n0}\,. \tag{7.4}$$

Теорема про "існування та єдиність" є чи не найголовнішою в теорії диференціальних рівнянь. Пересічно вона доводиться для класу систем рівнянь, значно ширшого за лінійні, див., наприклад, [9, 29].

7.2 Векторна форма запису системи лінійних диференціальних рівнянь

При оперуванні системами лінійних диференціальних рівнянь часто вигідно покладатись на матричне числення. З-посеред основних положень теорії матриць можна вирізнити такі (див. також додаток В).

1° **Матрицею** A розмірності $n\times m$ (або $(n\times m)$-матрицею) називають таблицю чисел a_{ij} вигляду

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Числа a_{ij} є елементами матриці. Надалі доведеться оперувати **квадратними** матрицями, коли $n=m$, і **матрицями-стовпцями** (($n\times 1$)-матрицями)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \text{ чи просто } A=\begin{bmatrix} a_{1} \\ a_{2} \\ \vdots \\ a_{n} \end{bmatrix}.$$

2° Матриця A дорівнює матриці B, якщо $a_{ij}=b_{ij}$ (тобто, якщо відповідні елементи матриць однакові). Матриця A дорівнює нулю (є **нульовою**), якщо $a_{ij}=0$ (тобто, якщо всі її елементи a_{ij} є нулями). Матриця A називається **невиродженою**, коли $\mathrm{Det}A=|a_{ij}|\neq 0$, і виродженою, коли $\mathrm{Det}A=|a_{ij}|=0$.

3° Над ($n\times m$)-матрицями означені **операції додавання і множення** на число (скаляр): сумою матриць A і B називається матриця $C=A+B$, елементами якої є числа $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$; добутком матриці A на число (скаляр) α називається матриця $C=\alpha A$ така, що $c_{ij}=\alpha\, a_{ij}$.

4° Добутком ($n\times m$)-матриці A на ($m\times \nu$)-матрицю B називається матриця ($n\times \nu$)-матриця $C=AB$ така, що $c_{ij}=\sum\limits_{l=1}^{m} a_{il}b_{lj}$ (множення A на B має сенс, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B). **Множення матриць** підлягає **законам асоціативності** ($(AB)C=A(BC)=ABC$) та **дистрибутивності** вправоруч і вліворуч ($A(B+C)=AB+AC$ і $(A+B)C=$ $=AC+BC$; це означає, зокрема, що

$$ABCD=A((BC)D)=(A(BC))D=(AB)(CD)\ ).$$

Для ($n\times m$)-матриці A і ($m\times n$)-матриці B має сенс як добуток AB (розміру $m\times m$), так і добуток BA (розміру $n\times n$). Зрозуміло, ці добутки не можуть бути однаковими вже через те, що неоднаковими є розміри результуючих матриць. Але навіть для квадратних матриць однакового розміру ($m=n$) добутки AB і BA не обов'язково збігаються (тобто в загальному випадку $AB\neq BA$, і отже, множенню матриць не властива комутативність).

5° Матрицею, **оберненою** до ($n\times n$)-матриці A, називається матриця $C=A^{-1}$ така, що $c_{ij}=\dfrac{1}{\Delta}A_{ij}$, де $\Delta=\mathrm{Det}A$, а A_{ij} — алгебричне доповнення до елемента a_{ij}. Завжди справджується умова $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, де

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

— так звана **одинична** матриця.

6° **Похідною** $A'(x)$ від матриці $A(x)$ з елементами $a_{ij}(x)$ називається матриця з елементами $a'_{ij}(x)$. **Правила диференціювання суми і добутку** матриць залишаються такими самими, як при диференціюванні суми і добутку звичайних функцій, але при оперуванні добутком обов'язково треба зберігати послідовність множників:

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

7° **Інтеграл** $\int\limits_{x_0}^{x} A(x)\,dx$ від матриці $A(x)$ з елементами $a_{ij}(x)$ означується як матриця з елементами

$$\int\limits_{x_0}^{x} a_{ij}(x)\,dx.$$

Звертаючись до матриць, лінійну систему (див. (7.3))

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j + q_i(x), \ i = \overline{1,n}, \tag{7.5}$$

можна подати у **векторній формі**

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + Q(x), \tag{7.6}$$

де Y — ***n*-вимірний вектор** з координатами $y_1, y_2, \cdots, y_n$, який є сенс записувати у вигляді матриці-стовпця

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \tag{7.7}$$

Q — n-вимірний вектор з координатами $q_1, q_2, \cdots, q_n$, який є сенс записувати у вигляді матриці-стовпця

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}; \tag{7.8}$$

P — $n \times n$-матриця вигляду

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

Справді, відповідно до правил диференціювання, множення і додавання матриць

$$\frac{dY}{dx}=\begin{bmatrix}\frac{dy_1}{dx}\\ \frac{dy_2}{dx}\\ \vdots\\ \frac{dy_n}{dx}\end{bmatrix},\quad PY=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}p_{1j}y_j\\ \sum_{j=1}^{n}p_{2j}y_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}p_{nj}y_j\end{bmatrix},\quad PY+Q=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}p_{1j}y_j+q_1\\ \sum_{j=1}^{n}p_{2j}y_j+q_2\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}p_{nj}y_j+q_n\end{bmatrix}.$$

Рівність матриць, як стверджувалося, означає рівність всіх попарно відповідних їх елементів, а отже відповідна рівнянню (7.6) рівність

$$\begin{bmatrix}\frac{dy_1}{dx}\\ \frac{dy_2}{dx}\\ \vdots\\ \frac{dy_n}{dx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}p_{1j}y_j+q_1\\ \sum_{j=1}^{n}p_{2j}y_j+q_2\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}p_{nj}y_j+q_n\end{bmatrix}$$

еквівалентна системі рівнянь (7.5).

Називатимемо вираз

$$L[Y]=\frac{dY}{dx}-P(x)Y$$

лінійним диференціальним виразом першого порядку (векторним), а матричний оператор $L:\mathrm{C}^1(\mathbf{R}^n)\to\mathrm{C}(\mathbf{R}^n)$ — **лінійним векторним диференціальним оператором першого порядку**. Цей оператор має вигляд

$$L=E\frac{d}{dx}-P(x)\,.$$

За допомогою щойно означеного лінійного диференціального оператора систему (7.5) можна подати у вигляді

$$L[Y]=Q(x)\,. \tag{7.10}$$

Якщо всі $q_i(x)$ ($i=\overline{1,n}$) тотожно рівні нулю (матриця (7.8) є нульовою), то система (7.10) перетворюється в однорідну

$$L[Y]=0\,. \tag{7.11}$$

Оператор $L[\cdot]$ має **властивості однорідності і адитивності**, відповідно:

1° $L[CY]=cL[Y]$,

де c — довільна стала;

2° $L[Y_1+Y_2]=L[Y_1]+L[Y_2]$.

Справді,

$$L[cY]=\frac{d(cY)}{dx}-P(x)(cY)\equiv c\left(\frac{dY}{dx}-P(x)Y\right)=cL[Y],$$

$$L[Y_1+Y_2]=\frac{d(Y_1+Y_2)}{dx}-P(x)(Y_1+Y_2)\equiv\left(\frac{dY_1}{dx}-P(x)Y_1\right)+\left(\frac{dY_2}{dx}-P(x)Y_2\right)=$$

$$=L[Y_1]+L[Y_2].$$

Звідси, зокрема, за довільних сталих c_i $(i=\overline{1,m})$

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}c_iY_i\right]\equiv\sum_{i=1}^{m}c_i\ L[Y_i].$$

На підставі основних властивостей лінійного диференціального оператора можна довести аналогічні твердження, які окреслюють найважливіші загальні властивості розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь (7.10), (7.11).

1° Якщо Y — розв'язок лінійної однорідної системи $L[Y]=0$, то cY (c — довільна стала) також є розв'язком цієї системи.

2° Сума Y_1+Y_2 двох розв'язків Y_1 і Y_2 лінійної однорідної системи $L[Y]=0$ також є розв'язком цієї системи.

Звідси випливає, що лінійна комбінація $\sum\limits_{i=1}^{m}c_iY_i$ з довільними сталими скалярами c_i (дійсними або комплексними, $i=\overline{1,m}$) розв'язків Y_i $(i=\overline{1,m})$ лінійної однорідної системи $L[Y]=0$ також є розв'язком цієї системи.

3° Якщо лінійна однорідна система $L[Y]=0$ з матрицею (7.9), елементами якої є дійсні функції $p_{ij}(x)$ $(i, j=\overline{1,n})$, має **комплексний розв'язок** $Y=U+iH$, то дійсна і уявна його частини

$$\operatorname{Re}Y=U=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}\ \text{і}\ \operatorname{Im}Y=H=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_n\end{bmatrix}$$

кожна окремо також є розв'язками цієї системи.

Нехай задано n векторів типу (7.7)

$$Y_i=\begin{bmatrix}y_{1i}\\y_{2i}\\\vdots\\y_{ni}\end{bmatrix},\quad i=\overline{1,n}. \tag{7.12}$$

Складемо з них матрицю

$$V(x)=\begin{bmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

і укладемо рівняння

$$V'=P(x)V, \tag{7.14}$$

в якому V править за незалежну змінну, і порівняємо його з рівнянням

$$\frac{dY}{dx}=P(x)Y \tag{7.15}$$

(однорідним типу $L[Y]=0$).

Якщо права і ліва частини рівняння (7.15) — матриці-стовпці, то права і ліва частини рівняння (7.14) — матриці виміру $n\times n$. Стосовно цих рівнянь вірним є таке твердження.

Нехай n векторів Y_1, Y_2, …, Y_n є розв'язками рівняння (7.15). Тоді побудована ($n\times n$)-матриця $V(x)$ (див. (7.13)) є розв'язком рівняння (7.14). І зворотно, якщо матриця $V(x)$ — розв'язок рівняння (7.14), то кожен її стовпець Y_1, Y_2, …, Y_n є розв'язком (7.15).

Для доведення цього твердження достатньо розписати (7.14) і (7.15) за елементами. Рівність елементів в (7.14)

$$v'_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n} p_{i\nu}v_{\nu j}, \tag{7.16}$$

означає, що

$$y'_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n} p_{i\nu}y_{\nu j}, \tag{7.17}$$

а з (7.15) для вектора (7.7) випливає, що

$$y'_{i}=\sum_{\nu=1}^{n} p_{i\nu}y_{\nu}. \tag{7.18}$$

Тому, якщо Y_j є розв'язками (7.15), то кожен Y_j задовольняє (7.18), тобто вірним є (7.17), або, що те саме, (7.16), а отже і (7.14), і навпаки, якщо вірним є (7.14), то вірним є і (7.17), а це у порівнянні з (7.18) означає, що Y_j ($j=\overline{1,n}$) є розв'язками рівняння (7.15).

Так само просто доводиться і твердження: якщо $V(x)$ — розв'язок рівняння (7.14), то VB є розв'язком рівняння (7.15), коли B — довільний сталий стовпець, і розв'язком рівняння (7.14), коли B — довільна стала ($n\times n$)-матриця.

7.3 Поняття про лінійну залежність-незалежність функцій та розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь

Вектори (7.12) називаються **лінійно залежними** в $I=(a,b)$ ($a<x<b$), якщо існують сталі α_i ($i=\overline{1,n}$) такі, що хоча б одне з них не дорівнює нулю і при цьому

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Y_i \equiv 0 \tag{7.19}$$

при $x\in I=(a,b)$. Якщо ж тотожність (7.19) справджується лише за умови $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, то вектори Y_i, $i=\overline{1,n}$, називаються **лінійно незалежними**.

Те саме можна висловити і в термінах матриць, якщо вдатись до матриці (7.13) і сталої матриці-стовпця

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}.$$

То ж, вектори $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ лінійно залежні в $I=(a,b)$, якщо існує сталий стовпець $\mathrm{A}\neq 0$ такий, що тотожно справджується в $I=(a,b)$ рівність $V\mathrm{A}=0$; якщо рівність $V\mathrm{A}=0$ будь-де в $I=(a,b)$ дотримується лише за умови $\mathrm{A}=0$ (яка відповідно до означення нульової матриці еквівалентна системі рівностей $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, …, $\alpha_n=0$), то вектори $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ лінійно незалежні в $I=(a,b)$.

Нехай йдеться про m n-вимірних **вектор-функцій** $Y_i(x)$ ($i=\overline{1,m}$), **інтегровних з квадратом**, тобто таких, для яких $\int_a^b Y_i^{\mathsf{T}} Y_i\,dx<\infty$ ($i=\overline{1,m}$, $a=\inf I$, $b=\sup I$; "T" позначає **операцію транспонування**). На підставі ($n\times m$)-матриці

$$V(x)=\begin{bmatrix}y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1m}(x)\\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2m}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nm}(x)\end{bmatrix}$$

можна побудувати так звану **матрицю Ґрама**

$$\Gamma=\int_a^b V^{\mathsf{T}}(x)V(x)\,dx=\left[v_{ij}\right]_{m\times m},\quad v_{ij}=\int_a^b Y^{\mathsf{T}}(x)Y(x)\,dx\,.$$

Виявляється, що ознаку лінійної залежності (незалежності) зазначених векторів Y_i ($i=\overline{1,m}$) окреслює таке твердження: для **лінійної залежності (незалежності)**

системи інтегровних з квадратом у проміжку I **вектор-функцій** $Y_i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ необхідно і достатньо, щоб матриця Ґрама цієї системи була в I виродженою (невиродженою).

Зауважимо, що векторна тотожність (7.19) еквівалентна n скалярним тотожностям

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\, y_{ij}\equiv 0,\ i=\overline{1,n}. \tag{7.20}$$

Щоб система чисел α_i $(i=\overline{1,n})$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, задовольняла систему тотожностей (7.20), визначник матриці (7.13)

$$W=W\left[Y_1,Y_2,\dots,Y_n\right]=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn}\end{vmatrix} \tag{7.21}$$

повинен дорівнювати нулю всюди в $I=(a,b)$. Отже, якщо вектори Y_i, $i=\overline{1,n}$, — лінійно залежні, то $W(x)\equiv 0$ в $I=(a,b)$ (це є необхідна, але не достатня, умова лінійної залежності). Визначник (7.21) називають **визначником Вронського системи векторів** $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$.

В подібних термінах можна сформулювати достатню (!) умову лінійної незалежності: якщо матриця $V(x)$ системи n-компонентних неперервних вектор-функцій $Y_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ не вироджена в $I=(a,b)$, то система в $I=(a,b)$ є лінійно незалежною.

Вірним є таке твердження. Якщо визначник Вронського $W=W\left[Y_1,Y_2,\dots,Y_n\right]$ векторів $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$, що є розв'язками однорідного лінійного векторного рівняння (7.11) з неперервними в $I=(a,b)$ коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, дорівнює нулю хоча б в одній точці $x=x_0\in I=(a,b)$, то розв'язки $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ рівняння (7.11) — лінійно залежні в $I=(a,b)$, і, отже, $W(x)\equiv 0$ в $I=(a,b)$.

Справді. Оскільки коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$ неперервні в $I=(a,b)$, то система (7.11) відповідає умовам теореми про "існування і єдиність". Отже умова $Y(x_0)=0$ (яка відповідає рівностям $y_1(x_0)=0$, $y_2(x_0)=0$, $\dots$, $y_n(x_0)=0$) визначатиме єдиний розв'язок системи (7.11), яким є, очевидно, тривіальний розв'язок $Y(x)\equiv 0$ ($y_1(x)\equiv 0$, $y_2(x)\equiv 0$, $\dots$, $y_n(x)\equiv 0$). Зрозуміло, що $W(x_0)=0$. Тому існує нетривіальна система параметрів $c_1,c_2,\dots,c_n$, яка задовольняє рівняння

$$c_1Y_1(x_0)+c_2Y_2(x_0)+\ldots+c_nY_n(x_0)\equiv 0,$$

оскільки одне векторне рівняння еквівалентне системі n однорідних рівнянь відносно $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_{1i}(x_0) = 0, \; \sum_{i=1}^{n} c_i y_{2i}(x_0) = 0, \; \ldots, \; \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ni}(x_0) = 0$$

з нульовим головним визначником. Відповідний цій нетривіальній системі чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ розв'язок $Y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i(x)$ векторного рівняння (7.11) задовольняє нульові початкові умови $Y(x_0) = 0$ і, отже, збігається з тривіальним розв'язком: $\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i(x) \equiv 0$. Таким чином, вектори $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — лінійно залежні.

Можна навести безліч прикладів, які б засвідчували. що останнє твердження не поширюється на довільні вектори $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ (вектори, що не є розв'язками рівняння (7.11) з неперервними коефіцієнтами). Зокрема, вектори

$$Y_1 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \; Y_2 = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

є лінійно незалежними, оскільки з тотожності

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \equiv 0,$$

або із системи тотожностей

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \equiv 0 \\ \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \equiv 0 \end{array}\right\}$$

випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (вираз $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ в загальному випадку має не більше двох коренів). Натомість, визначник Вронського тотожно дорівнює нулю:

$$W[Y_1, Y_2] = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Це означає, що вектори Y_1, Y_2 не можуть бути розв'язками одного і того самого рівняння (7.11) з неперервними коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Необхідну і достатню умову лінійної незалежності n розв'язків рівняння (7.11) порядку n окреслює така теорема: якщо n розв'язків (7.12) однорідного векторного лінійного рівняння (7.11) з неперервними у проміжку $I = (a, b)$ коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$ є лінійно незалежними, то їх визначник Вронського $W = W[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ не обертається на нуль в жодній точці з $I = (a, b)$.

Припустимо протилежне. Нехай $W = W(x_0) = 0$ в деякій точці $x_0 \in I = (a, b)$. Укладемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_{1i}(x_0) = 0, \ \sum_{i=1}^{n} c_i y_{2i}(x_0) = 0, \ \dots, \ \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ni}(x_0) = 0. \tag{7.22}$$

Її визначник збігається з $W(x_0)$ і, отже, дорівнює нулю. Тому система (7.22) має ненульовий розв’язок

$$c_1 = C_1, \ c_2 = C_2, \ \dots, \ c_n = C_n. \tag{7.23}$$

Побудуємо розв’язок

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ji}(x_0), \ j = \overline{1, n}. \tag{7.24}$$

Оскільки параметри (7.23) задовольняють систему (7.22), то зрозуміло, що наведений розв’язок має нульовий початок в точці $x = x_0$:

$$y_j(x_0) = 0, \ j = \overline{1, n}.$$

Але тоді на підставі теореми “про єдиність” розв’язок (7.24) є нульовим ($y_j(x) \equiv 0$, $j = \overline{1, n}$), так що справджуються тотожності

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_{ji}(x) \equiv 0, \ j = \overline{1, n},$$

в яких не всі C_i, $i = \overline{1, n}$, дорівнюють нулю, тобто розв’язки (7.24) є лінійно залежними в $I = (a, b)$ на противагу зробленому припущенню.

Отже, теорему доведено. Беручи до уваги ще й теорему про лінійну залежність довільних векторів, доходимо висновку: для того, щоб n розв’язків рівняння (7.11) були лінійно незалежними в $I = (a, b)$, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського цих розв’язків не обертався на нуль в жодній точці з $I = (a, b)$.

Визначник Вронського має такі властивості (про них вже йшлося в розділі 4), які дозволяють необхідні і достатні умови лінійної незалежності розв’язків формулювати ще простіше. По-перше, якщо $W(x)$ обертається на нуль хоча б в одній точці з проміжку $I = (a, b)$, в якому неперервні $p_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$), то $W(x)$ дорівнює нулю всюди в $I = (a, b)$. По-друге, якщо визначник $W(x)$ не дорівнює нулю хоча б в одній точці з проміжку $I = (a, b)$, то він не обертається на нуль ні в одній точці з $I = (a, b)$. Тобто вірною є така альтернатива: визначник Вронського або тотожно дорівнює нулю, і це означає, що розв’язки $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ лінійно залежні, або не обертається на нуль в жодній точці з I, що засвідчує лінійну незалежність розв’язків $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Таким чином, для лінійної незалежності n розв'язків рівняння (7.11) в проміжку $I=(a,b)$, в якому функції $p_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$ є неперервними, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського цих розв'язків не обертався на нуль хоча б в одній точці з $I=(a,b)$.

Зазначені щойно властивості визначника Вронського розв'язків однорідної системи (7.11) природно випливають з **формули Остроградського — Ліувіля — Якобі**

$$W(x)=W(x_0)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x}\left(p_{11}(s)+p_{22}(s)+\ldots+p_{nn}(s)\right)ds}=W(x_0)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x}\mathrm{Sp}P(s)ds}, \tag{7.25}$$

де p_{11}, p_{22}, …, p_{nn} — елементи головної діагоналі матриці P (див. (7.9)); сума $\mathrm{Sp}P=p_{11}+p_{22}+\ldots+p_{nn}$ називається **слідом матриці** P.

Для доведення правдивості цієї формули визначимо **похідну від визначника Вронського**, диференціюючи його стовпцями:

$$W'(x)=\begin{vmatrix}\frac{dy_{11}}{dx} & y_{12} & \cdots & y_{1n}\\ \frac{dy_{21}}{dx} & y_{22} & \cdots & y_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{dy_{n1}}{dx} & y_{n2} & \cdots & y_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_{11} & \frac{dy_{12}}{dx} & y_{13} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & \frac{dy_{22}}{dx} & y_{23} & \cdots & y_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1} & \frac{dy_{n2}}{dx} & y_{n3} & \cdots & y_{nn}\end{vmatrix}+\ldots$$

$$\ldots+\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,n-1} & \frac{dy_{1n}}{dx}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{1,n-1} & \frac{dy_{2n}}{dx}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,n-1} & \frac{dy_{nn}}{dx}\end{vmatrix}.$$

Далі, в отриманий результат замість $\frac{dy_{ij}}{dx}$ $(i,j=\overline{1,n})$ підставимо вирази $\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}(x)y_{ij}$ (відповідно до (7.5) при $Q(x)\equiv 0$) і розкладемо визначники за доданками. Враховуючи, що отримані визначники з пропорційними стовпцями дорівнюють нулю, матимемо рівність

$$W'(x)=\left(p_{11}(x)+p_{22}(x)+\ldots+p_{nn}(x)\right)W(x)=\left(\mathrm{Sp}P(x)\right)W(x),$$

звідки і випливає (7.25).

То ж, якщо $W(x_0)\neq 0$ в точці x_0 з проміжку I, в якому функції $p_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$ є неперервними, то $W(x)\neq 0$ всюди в I.

7.4 Фундаментальна матриця

Систему n лінійно незалежних розв'язків $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ однорідного рівняння (7.15) називатимемо **фундаментальною системою розв'язків**, а відповідну їм матрицю $V(x)$ (див. (7.13)) — **фундаментальною матрицею**. На підставі викладеного раніше можна дати ще й таке означення фундаментальної матриці: розв'язок $V(x)$ (матричний) рівняння (7.14), якому в наперед заданому проміжку I властива нерівність $W(x) \neq 0 \; \forall x \in I$, називається фундаментальною матрицею.

Вірним є твердження: лінійна однорідна система диференціальних рівнянь завжди має фундаментальну матрицю.

Справді, пам'ятаючи про те, що визначник Вронського або тотожно дорівнює нулю в I, або ж не обертається на нуль в жодній точці з I, можна взяти довільну матрицю $\mathrm{B} = \mathrm{const}$ з відмінним від нуля визначником і окреслити за допомогою рівності $V(x_0) = \mathrm{B}$ $(x_0 \in I)$ довільні початкові умови для розв'язку рівняння (7.14).

Наголосимо на справедливості ще такого твердження: якщо $V(x)$ — фундаментальна матриця, то будь-який розв'язок $Y(x)$ рівняння (7.15) відтворюється за формулою

$$Y(x) = V(x)\,C$$

(C — деяка стала матриця-стовпець). Або іншими словами, лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$ n лінійно незалежних розв'язків $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ однорідного рівняння (7.15) з неперервними в I коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$ є загальним розв'язком цього рівняння в I.

Вірність твердження можна виснувати таким чином. Нехай (подібно до (7.4))

$$Y(x_0) = Y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}. \tag{7.26}$$

Задамо C таким, щоб задовольнялось рівняння $V(x_0)\,C = Y_0$, яке обов'язково має розв'язок завдяки тому, що $W(x_0) \neq 0$. Далі побудуємо функцію $\widetilde{Y}(x) = V(x)C$. Оскільки $\widetilde{Y}(x_0) = V(x_0)C = Y_0$, то відповідно до теореми про "існування і єдиність" $Y(x) \equiv \widetilde{Y}(x) = V(x)C$, що і декларує наведене твердження.

Побудуємо розв'язок однорідного рівняння (7.15), який би задовольняв умову (7.26). З рівності $Y(x_0) = V(x_0)\,C = Y_0$ знайдемо $C = V^{-1}(x_0)\,Y_0$. Звідси

$$Y(x) = V(x)V^{-1}(x_0)\,Y_0\,.$$

Матрицю $\mathcal{K}(x, x_0) = V(x)V^{-1}(x_0)$, що є функцією двох змінних x і x_0, називають **імпульсною матрицею** або **матрицянтом**.

Згідно з викладеним вище, якщо $V(x)$ — розв'язок рівняння (7.14), то добуток $V(x)$ на сталу ($n\times n$)-матрицю також є розв'язком цього рівняння. Отже $\mathcal{K}(x,x_0)$ як функція від x задовольняє (7.14). Очевидно, що

$$\mathcal{K}(x_0,x_0)=E\,.$$

Звідси випливає таке твердження: розв'язок задачі (7.15), (7.26) відображає формула

$$Y(x)=\mathcal{K}(x,x_0)\,Y_0\,,$$

у якій $\mathcal{K}(x,x_0)$ задовольняє за змінною x матричне рівняння (7.14) і умову $\mathcal{K}(x_0,x_0)=E$.

Кожну систему диференційовних лінійно незалежних функцій можна тлумачити як фундаментальну систему розв'язків деякої системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Процес **відтворення системи** n **лінійних рівнянь за відомою фундаментальною системою її розв'язків**

$$y_{1i},y_{2i},\ldots,y_{ni}\,,\ i=\overline{1,n}\,,$$

зводиться до укладання і перетворення системи n рівностей

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dy_i}{dx} & \dfrac{dy_{i1}}{dx} & \dfrac{dy_{i2}}{dx} & \cdots & \dfrac{dy_{in}}{dx} \\ y_1 & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_2 & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}=0,\quad i=\overline{1,n}\,. \tag{7.27}$$

Між $y_{1i},y_{2i},\ldots,y_{ni}$, $i=\overline{1,n}$, і (7.27), зрозуміло, існує однозначна взаємна відповідність.

7.5 Спряжені рівняння

Системі

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(x)y_j\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{7.28}$$

поставимо у відповідність систему

$$\frac{dz_i}{dx}=-\sum_{j=1}^{n}p_{ji}(x)\,z_j\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{7.29}$$

матриця коефіцієнтів

$$P^{\circ}(x)=\begin{bmatrix}-p_{11}(x) & -p_{21}(x) & \dots & -p_{n1}(x)\\ -p_{12}(x) & -p_{22}(x) & \dots & -p_{n2}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -p_{1n}(x) & -p_{2n}(x) & \dots & -p_{nn}(x)\end{bmatrix}$$

якої випливає з матриці (7.9) рівняння (7.28) при здійсненні над нею операцій транспонування і зміни знаку. Система (7.29) у відношенні до системи (7.28) називається **приєднаною** або **спряженою**.

Основну систему (7.28) можна записати у вигляді

$$\frac{dY}{dx}=PY\,, \tag{7.30}$$

де

$$Y=\begin{bmatrix}y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1}\\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn}\end{bmatrix},\quad P(x)=\begin{bmatrix}p_{11}(x) & p_{12}(x) & \dots & p_{1n}(x)\\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \dots & p_{nn}(x)\end{bmatrix}; \tag{7.31}$$

натомість, спряжену систему (7.29) — у вигляді

$$\frac{dZ}{dx}=-P^{*}Z\,, \tag{7.32}$$

де

$$Z=\begin{bmatrix}z_{11} & z_{21} & \cdots & z_{n1}\\ z_{12} & z_{22} & \cdots & z_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z_{1n} & z_{2n} & \dots & z_{nn}\end{bmatrix},\quad P^{*}(x)=-P^{\circ}(x)=\begin{bmatrix}p_{11}(x) & p_{21}(x) & \dots & p_{n1}(x)\\ p_{12}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{n2}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{1n}(x) & p_{2n}(x) & \dots & p_{nn}(x)\end{bmatrix},$$

P^{*} — матриця, транспонована у відношенні до матриці P.

Транспонуючи обидві частини рівняння (7.32), отримаємо

$$\frac{dZ^{*}}{dx}=-Z^{*}P\,, \tag{7.33}$$

де

$$Z^{*}=\begin{bmatrix}z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n}\\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn}\end{bmatrix}. \tag{7.34}$$

Рівняння (7.33) у відношенні до рівняння (7.30) називається **приєднаним**.

Звернемо увагу на те, що у відповідній спряженому рівнянню (7.33) матриці (7.34) розв'язки розташовані рядками тоді, як відповідна основному рівнянню (7.30) перша матриця (7.31) містить розв'язки стовпцями.

Легко з'ясувати, що

$$\frac{d(Z^*Y)}{dx} = \frac{dZ^*}{dx}Y + Z^*\frac{dY}{dx} = -Z^*PY + Z^*PY \equiv 0,$$

і тому

$$Z^*Y = C \equiv \text{const} \;\; \text{і} \;\; Z^* = CY^{-1}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що якщо Y — матриця-розв'язок рівняння (7.30), то Y^{-1} — матриця-розв'язок спряженого рівняння (7.34), бо

$$\frac{dY^{-1}}{dx} = -Y^{-1}\frac{dY}{dx}Y^{-1} = -Y^{-1}YPY^{-1} = -PY^{-1}$$

(треба зважати на те, що в матриці Y^{-1} розв'язки розташовані рядками).

Разом з тим, переконуємося, що задача інтегрування системи (7.28) рівноцінна задачі інтегрування спряженої системи (7.29).

Якщо $p_{ij} = -p_{ji}$, тобто матриця P (див. (7.31)) є кососиметричною, то спряжена (приєднана) система (7.29) має вигляд

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)\, z_j\,, \;\; i = \overline{1,n},$$

Тобто спряжена (приєднана) система (7.29) збігається за виглядом з основною системою (7.28). В цьому випадку **система** (7.28) називається **самоспряженою**.

Спряжене рівняння (7.33) в даному випадку можна подати у вигляді

$$\frac{dZ^*}{dx} = P^*Z^*, \tag{7.35}$$

і зрозуміло, що за матрицю Z^* розв'язків тут може правити матриця Y^*. Дійсно, якщо Y — матриця розв'язків рівняння (7.30), то тотожно справджується рівність

$$\frac{dY}{dx} = PY,$$

транспонуючи обидві частини якої, дійдемо висновку, що

$$\frac{dY^*}{dx} = Y^*P^*.$$

Це означає, що Y^* є матрицею-розв'язком рівняння (7.35).

Підставляючи $Z^* = Y^*$ в тотожність $Z^* Y = C \equiv \text{const}$, яку було отримано раніше, одержимо

$$Y Y^* = C \equiv \text{const}$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} y_{ji} = c_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Звідси, зокрема, при $i = j$ випливає, що кожний розв'язок самоспряженої системи задовольняє тотожність

$$y_{i1}^2 + y_{i2}^2 + \ldots + y_{in}^2 \equiv \text{const}, \ i = \overline{1, n}. \tag{7.36}$$

Доречно звернутися до поняття першого інтеграла.

В загальному випадку рівнянню

$$F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

ліва частина якого є точною похідною за x деякого диференціального виразу ($n-1$)-го порядку $F_1\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, тобто

$$F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = \frac{dF_1\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)}{dx},$$

відповідає **перший інтеграл**

$$F_1\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) = c_1 = \text{const},$$

що є рівнянням ($n-1$)-го порядку. Кожен розв'язок рівняння $F = 0$ є розв'язком рівняння $F_1 = c_1 = \text{const}$, і навпаки. Таким чином рівняння "в точних похідних" допускає зниження порядку на одиницю.

Розглянемо задачу про перший інтеграл **автономної системи на площині**

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

Скалярна функція $H = H(x, y)$ є **першим інтегралом** системи (7.37), якщо

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} g(x, y) = 0. \tag{7.38}$$

В загальному випадку задача розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь анітрохи не простіша від задачі знаходження функції $H = H(x, y)$, що є розв'язком хай навіть одного диференціального рівняння в частинних похідних (лінійного, типу (7.38)). Натомість дуже просто розв'язується обернена задача — записати систему (7.37) за відомим першим інтегралом.

В рамках оберненої задачі рівняння (7.38) сприймається як лінійне відносно f та g алгебричне (а не диференціальне), з якого легко знайти величини або f, або g. Наприклад, можна записати:

$$g(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y}}f(x,y). \tag{7.39}$$

У виразі (7.39), однак, функцію $f=f(x,y)$ не можна задавати вільно, якщо остерігатись того, щоб $g(x,y)$ перетворювалась у нескінченність на лінії, де $\partial H/\partial y=0$. Проте, враховуючи цю обставину, функцію $f=f(x,y)$ можна подати як

$$f(x,y)=-\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\varphi(x,y). \tag{7.40}$$

Тоді відповідно до (7.39) матимемо:

$$g(x,y)=\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\varphi(x,y). \tag{7.41}$$

В такому випадку функцію $\varphi=\varphi(x,y)$ можна буде задавати вільно.

Таким чином, для будь-якої системи

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\varphi(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\varphi(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{7.42}$$

функція $H=H(x,y)$ є першим інтегралом. В цьому легко пересвідчитись: при виконанні умов (7.40), (7.41) рівність (7.38) задовольняється тотожно. Справедливим є й обернене твердження: якщо $H=H(x,y)$ — перший інтеграл системи (7.37), то ця система може бути подана у вигляді (7.42), де функція $\varphi=\varphi(x,y)$ неперервна в кожній точці, в якій

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\neq 0.$$

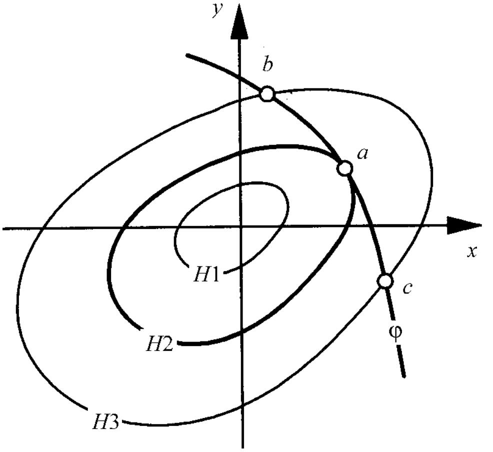
Форма (7.42) відбиває в собі найзагальніший вигляд інтегровної системи на площині. Коли $\varphi\equiv 1$ (або більш загально $\varphi=\text{const}$) система (7.42) є **гамільтоновою**, а $H=H(x,y)$ — її **гамільтоніан**.

Функція $H=H(x,y)$ залишається першим інтегралом системи (7.37) за будь-якої $\varphi=\varphi(x,y)$. Всі траєкторії руху цієї системи розташовуються на лініях рівня $H(x,y)=C$. Тобто при різних $\varphi=\varphi(x,y)$ "геометрія" системи не змінюється. Проте, $\varphi=\varphi(x,y)$ відіграє роль "регулятора" швидкості.

Припустимо, що $\varphi = \varphi(x, y)$ ніде не перетворюється на нуль. Тоді можна ввести новий час τ так, щоб $d\tau = \varphi(x, y)dt$. Цей час називають гамільтоновим (оскільки в ньому система стає гамільтоновою) або ж природнім чи власним (своїм). Час t, натомість, називають зовнішнім.

Розглянемо тепер точки, де $\varphi(x, y) = 0$. Ці точки є стаціонарними, тобто такими, що $\dfrac{dx}{dt} = 0,\ \ \dfrac{dy}{dt} = 0$. Вважатимемо лінії рівня $H(x, y) = C$ замкненими і такими, що деякі з них перетинають лінію $\varphi(x, y) = 0$ (рис. 64; часткове збігання ліній $H(x, y) = C$ і $\varphi(x, y) = 0$ не передбачається).

Коли б виконувалась умова $\varphi \equiv 1$, то лінії рівня $H(x, y) = C$ відображали б періодичні рухи гамільтонової системи. Наявність множника $\varphi(x, y)$ руйнує деякі періодичності. Лінія $\varphi(x, y) = 0$ (лінія φ на рис. 64) ділить площину на частину, де $\varphi > 0$, і частину, де $\varphi < 0$. Тому траєкторії, що перетинаються з лінією φ, також розпадаються на дві частини, рух по яких принципово не подібний на рух гамільтонової системи.



64 **Траєкторії автономної системи на площині.**

Наведемо приклади. Лінія H_1 не перетинає лінії φ, а тому рух вздовж неї залишається періодичним, лише з деякими змінами швидкості. При зростанні амплітуди коливного руху його траєкторія наближатиметься до тієї, яку відображає лінія H_2. При цьому зростає й період руху. На самій лінії H_2, що дотикається до лінії φ в точці a, він стає нескінченно великим, а отже періодичність зникає. Лінія ж H_3 розпадається на чотири траєкторії: дві стаціонарні (точки b і c) та дві, відображувані частинами кривої H_3, одна з яких знаходиться в області, де $\varphi > 0$, а друга — в області, де $\varphi < 0$.

Таким чином, кожен вираз (7.36) є першим інтегралом самоспряженої системи. Тому порядок самоспряженої системи завжди можна знизити на одиницю. Зокрема, самоспряжена система (неавтономна) двох лінійних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p(x)\,z, \\ \frac{dz}{dx} &= -p(x)\,y \end{aligned}\right\}$$

має перший інтеграл $y^2 + z^2 = c^2$ і завжди інтегрується в квадратурах. Інтегрування самоспряженої системи трьох рівнянь зводиться до інтегрування рівняння Ріккаті, а інтегрування самоспряженої системи чотирьох рівнянь — до інтегрування системи двох рівнянь Ріккаті.

7.6 Загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь

Нехай $\widetilde{Y}$ є розв'язком неоднорідного векторного рівняння $L[Y] = Q$, а Y° — розв'язком відповідного однорідного рівняння $L[Y] = 0$. Керуючись властивостями лінійного оператора, дійдемо висновку, що

$$L[Y^\circ + \widetilde{Y}] = L[Y^\circ] + L[\widetilde{Y}] \equiv Q.$$

Таким чином, сума $Y^\circ + \widetilde{Y}$ розв'язку Y° однорідного рівняння $L[Y] = 0$ і розв'язку $\widetilde{Y}$ похідного неоднорідного рівняння $L[Y] = Q$ знову є розв'язком неоднорідного рівняння $L[Y] = Q$.

Можна довести справедливість такого твердження: **загальний розв'язок** Y **неоднорідного лінійного рівняння** $L[Y] = Q$ з неперервними в I коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$) складають окремий розв'язок $\widetilde{Y}$ цього неоднорідного рівняння і загальний розв'язок $\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$ відповідного однорідного рівняння $L[Y] = 0$ (тобто $Y = \widetilde{Y} + \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$). Це твердження можна висловити й інакше: якщо $V(x)$ — фундаментальна матриця, а $\widetilde{Y}$ — окремий розв'язок неоднорідного рівняння $L[Y] = Q$, то будь-який розв'язок цього неоднорідного рівняння $L[Y] = Q$ відображуваний у вигляді

$$Y(x) = \widetilde{Y} + V(x)C,$$

де C — деяка стала матриця-стовпець.

Знайдемо окремий розв'язок $\widetilde{Y}(x)$ рівняння (7.6), який би задовольняв нульову початкову умову

$$\widetilde{Y}(x_0)=0.$$

Будуватимемо його у вигляді

$$\widetilde{Y}(x)=V(x)C(x),$$

де $C(x)$ — невідома матриця-стовпець. Підставляючи $\widetilde{Y}(x)=V(x)C(x)$ у рівняння

$$\frac{dY}{dx}=P(x)Y+Q(x),$$

отримаємо:

$$V'(x)\,C+V(x)\,C'=P(x)V(x)\,C+Q(x).$$

Оскільки матриця $V(x)$ задовольняє рівняння (7.14), то останній вираз зводиться до рівності

$$V(x)\,C'=Q(x),$$

звідки

$$C'=V^{-1}(x)\,Q(x).$$

А оскільки за домовленістю

$$\widetilde{Y}(x_0)=V(x_0)C(x_0)=0,$$

то $C(x_0)=0$ і отже

$$C(x)=\int\limits_{x_0}^{x}V^{-1}(s)\,Q(s)\,dx.$$

Таким чином,

$$\widetilde{Y}(x)=V(x)C(x)=\int\limits_{x_0}^{x}V(x)V^{-1}(s)Q(s)\,dx=\int\limits_{x_0}^{x}\mathcal{K}(x,s)Q(s)\,dx.$$

Підсумуємо викладене таким твердженням: окремий розв'язок рівняння (7.6), який задовольняє нульову початкову умову $\widetilde{Y}(x_0)=0$, має вигляд

$$\widetilde{Y}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\mathcal{K}(x,s)Q(s)\,dx,$$

де $\mathcal{K}(x,s)$ — імпульсна матриця (матрицянт) — розв'язок матричного рівняння (7.14), який задовольняє умову $\mathcal{K}(s,s)=E$.

Загальний розв'язок неоднорідної задачі (7.6), (7.26) в такому разі є підстави записати у вигляді

$$Y(x) = Y^{\circ} + \widetilde{Y}(x) = \mathscr{K}(x, x_0) Y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}(x,s) Q(s) dx\,, \tag{7.43}$$

де Y° — загальний розв'язок однорідної задачі (7.15), (7.26).

Розглянемо рівняння

$$L[Y] = \sum_{i=1}^{m} Q_i\,, \quad Q_i = \begin{bmatrix} Q_{1i}(x) \\ Q_{2i}(x) \\ \vdots \\ Q_{ni}(x) \end{bmatrix}. \tag{7.44}$$

Нехай функція $Y_i(x)$ є розв'язком рівняння $L[Y] = Q_i$ $(i = \overline{1, m})$. З лінійності оператора L випливає, що

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} Y_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} L[Y_i] = \sum_{i=1}^{m} Q_i$$

Отже справджується так званий **принцип суперпозиції**: розв'язком рівняння (7.44) $L[Y] = \sum_{i=1}^{m} Q_i$ є вектор $Y(x) = \sum_{i=1}^{m} Y_i(x)$, у якому $Y_i(x)$ є розв'язками рівнянь $L[Y] = Q_i$ $(i = \overline{1, m})$.

Якщо в неоднорідному рівнянні

$$L[Y] = Q(x)$$

вектор $Q(x)$ є лінійною комбінацією векторів $Q_i(x)$ $(i = \overline{1, \nu})$, тобто

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i Q_i(x)\,,$$

де α_i $(i = \overline{1, \nu})$ — сталі, і вектори $Y_i(x)$ $(i = \overline{1, \nu})$ є розв'язками відповідних рівнянь

$$\frac{dY_i}{dx} = P(x) Y_i + Q_i(x)\,,$$

то лінійна з тими самими числами α_i $(i = \overline{1, \nu})$ комбінація векторів $Y_i(x)$ $(i = \overline{1, \nu})$, тобто вектор

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i Y_i(x)\,,$$

є розв'язком рівняння $L[Y] = Q(x)$.

Принцип суперпозиції поширюється і на випадок, коли $m \to \infty$, якщо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x)$ збіжний і підлягає почленному диференціюванню. Простежується його чинність і у випадку рівняння з комплексною правою частиною: якщо векторне рівняння

$$L[Y] = U + iH\,, \quad U = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{bmatrix},$$

у якому $p_{ij}(x)$, $u_i(x)$, $h_i(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$ — дійсні функції, має розв'язок

$$Y = \tilde{U} + i\tilde{H}\,, \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1(x) \\ \tilde{u}_2(x) \\ \vdots \\ \tilde{u}_n(x) \end{bmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1(x) \\ \tilde{h}_2(x) \\ \vdots \\ \tilde{h}_n(x) \end{bmatrix},$$

то дійсна $\tilde{U}$ і уявна $\tilde{V}$ частини цього розв'язку самі є розв'язками відповідно рівнянь $L[Y] = U$ і $L[Y] = H$. Справді,

$$L[\tilde{U} + i\tilde{H}] = L[\tilde{U}] + iL[\tilde{H}] = U + iH\,,$$

звідки $L[\tilde{U}] = U$ і $L[\tilde{H}] = \tilde{H}$.

Теорію лінійних систем першого порядку без принципових труднощів можна перенести на системи лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку

$$L_m[Y] = Y^{(m)} - P_1(x)Y^{(m-1)} - P_2(x)Y^{(m-2)} - \ldots - P_{m-1}(x)Y' - P_m(x)Y = Q(x)\,,\,, \quad (7.45)$$

де $x \in I = (a,b)$, Y — n-компонентний вектор; $P_i(x)$ — задані в I квадратні матриці n-го порядку; $Q(x)$ — задана n-компонентна функція.

Справді. Заміною $Y = Y_1$, $Y' = Y_2$, $\cdots$, $Y^{(m-1)} = Y_m$ (Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_m — нові змінні n-компонентні вектори) векторне рівняння (7.45) m-го порядку можна звести до системи векторних рівнянь першого порядку

$$Y_1' = Y_2\,,\ Y_2' = Y_3\,,\ \ldots,\ Y_{m-1}' = Y_m\,,\ Y_m' = P_1(x)Y_{m-1} + P_1(x)Y_{m-2} + \ldots + P_m(x)Y_1 + Q(x)\,.$$

Далі, застосувати до неї всі викладені тут твердження і знову вернутися до старих змінних Y, Y', $\cdots$, $Y^{(m-1)}$.

Легко бачити, що зміст теорії системи n лінійних рівнянь першого порядку загалом збігається зі змістом теорії одного лінійного рівняння n-го порядку. Це пояснюється тим, що лінійне рівняння n-го порядку

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x),$$

де $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_n(x)$ (коефіцієнти) та $q(x)$ (вільний член) вважаються заданими в $I=(a,b)$ неперервними функціями від змінної x, еквівалентне нормальній системі n рівнянь вигляду

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\ \frac{dy_1}{dx}=y_2,\ \ldots,\ \frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=-\frac{p_n(x)}{p_0(x)}y-\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}y_1-\ldots-\frac{p_2(x)}{p_0(x)}y_{n-2}-\frac{p_1(x)}{p_0(x)}y_{n-1}+\frac{q(x)}{p_0(x)}.$$

Тому, зокрема, структура загального розв’язку (7.43) системи n лінійних рівнянь першого порядку в загальному нагадує структуру розв’язку одного лінійного рівняння n-го порядку.

Приклад Візьмемо за приклад неоднорідну систему (k — стала)

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2+y_3,$$
$$\frac{dy_2}{dx}=y_1+y_3+kx,$$
$$\frac{dy_3}{dx}=y_1+y_2.$$

Знаходячи з першого рівняння $y_3=\frac{dy_1}{dx}-y_2$, два наступні зведемо до вигляду

$$\frac{dy_2}{dx}=y_1+\frac{dy_1}{dx}-y_2+kx,$$
$$\frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{dy_2}{dx}=y_1+y_2.$$

Додаванням двох останніх рівнянь можна усунути змінну y_2. Таким чином первісна система зводиться до трикутної

$$y_3=\frac{dy_1}{dx}-y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx}+y_2=\frac{dy_1}{dx}+y_1+kx,$$
$$\frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{dy_1}{dx}-2y_1=kx.$$

Розв’язком останнього диференціального рівняння другого порядку є функція

$$y_1=\frac{k}{4}-\frac{k}{2}x+c_1e^{-x}+c_2e^{2x},$$

а тому

$$y_2=\frac{k}{4}-\frac{k}{2}x+c_2e^{2x}+c_3e^{-x},$$

$$y_3=-\frac{3k}{4}+\frac{k}{2}x-(c_1+c_3)e^{-x}+c_2e^{2x}.$$

7.7 Звідні системи лінійних диференціальних рівнянь

Нехай йдеться про систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\,x_j \quad (i = \overline{1,n}) \tag{7.46}$$

з неперервними обмеженими в проміжку $I_\infty = [t_0, \infty)$ коефіцієнтами $p_{ij}(t)$ ($i,\, j = \overline{1,n}$). У матричній формі ця система має вигляд

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X\ . \tag{7.47}$$

Замість x_1, x_2, …, x_n (див. (7.46)) ведемо нові невідомі функції y_1, y_2, …, y_n змінної t, вдаючись до перетворення

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t)y_j \quad (i = \overline{1,n}), \tag{7.48}$$

або

$$X = H(t)Y \quad (H(t) = \left[h_{ij}(t)\right]_{n\times n}), \tag{7.49}$$

щодо якого висунуто вимоги:

1° матриця $H(t)$ має неперервну похідну $\dfrac{dH(t)}{dt}$ в проміжку $I_\infty = [t_0, \infty)$;

2° $H(t)$ і $\dfrac{dH(t)}{dt}$ обмежені в $I_\infty = [t_0, \infty)$;

3° існує стала μ така, що

$$0 < \mu < \operatorname{mod}|H(t)|,\ t \ge t_0$$

(визначник $|H(t)|$ здолу обмежений додатною сталою μ).

Таке перетворення називають **перетворенням Ляпунова**. Можна перевірити, що властивості 1° — 3° матриці $H(t)$ гарантують існування оберненої матриці $H^{-1}(t)$, і що ця обернена матриця також задовольняє властивості 1° — 3°. Отже перетворення, обернене до перетворення Ляпунова, також є перетворенням Ляпунова. Можна пересвідчитися і в тому, що два послідовні перетворення Ляпунова в підсумку є перетворенням Ляпунова. Таким чином, перетворення Ляпунова утворюють групу.

Результатом перетворення (7.48) системи (7.46) буде нова система

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t)\,y_j \quad (i = \overline{1,n}). \tag{7.50}$$

Між розв'язками систем (7.50) і (7.46) існує взаємна однозначна відповідність, при цьому лінійна незалежність розв'язків однієї системи зберігається і після перетворення її в іншу. Отже перетворення Ляпунова зводить фундаментальну матрицю X системи (7.46) до деякої фундаментальної матриці Y системи (7.50) так, що задовольняється рівність (7.49).

Таким чином, рівнянню (7.47) можна поставити у відповідність рівняння

$$\frac{dY}{dt} = G(t)Y \ , \tag{7.51}$$

в якому $G(t) = [g_{ij}]_{n\times n}$ — матриця коефіцієнтів системи (7.50). Підставляючи (7.49) в (7.47) і порівнюючи отриманий результат з (7.51), доходимо висновку, що

$$G(t) = H^{-1}PH - H^{-1}\frac{dH}{dt} \ .$$

Система (7.46) називається **звідною**, якщо існує матриця Ляпунова Z (обмежена разом з матрицею $\frac{dZ}{dx}$ і визначником $\mathrm{Det}(Z^{-1})$), така, що підстановка

$$Y = ZX \ ,$$

зводить рівняння (7.47) до рівняння

$$\frac{dY}{dt} = BY \tag{7.52}$$

зі сталою матрицею B коефіцієнтів.

Інакше кажучи, система (7.46) є звідною, якщо існує лінійне перетворення

$$y_1 = z_{11}(t)\,x_1 + z_{12}(t)\,x_2 + \ldots + z_{1n}(t)\,x_n \ ,$$

$$y_2 = z_{21}(t)\,x_1 + z_{22}(t)\,x_2 + \ldots + z_{2n}(t)\,x_n \ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = z_{n1}(t)\,x_1 + z_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + z_{nn}(t)\,x_n \ ,$$

де коефіцієнти перетворення $z_{ij}(t)$ ($i, j = \overline{1,n}$) є функціями, обмеженими разом зі своїми похідними і визначником зворотного перетворення, таке, що нові невідомі y_1, y_2, …, y_n задовольняють систему рівнянь

$$\frac{dy_1}{dt} = b_{11}\,y_1 + b_{12}\,y_2 + \ldots + b_{1n}\,y_n \ ,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = b_{21}\,y_1 + b_{22}\,y_2 + \ldots + b_{2n}\,y_n \ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = b_{n1}\,x_1 + b_{n2}\,x_2 + \ldots + b_{nn}\,x_n$$

зі сталими коефіцієнтами b_{ij} $(i,\, j = \overline{1, n})$. Виявляється, якщо не вимагати обмеженості від матриці Z прямого і матриці Z^{-1} оберненого перетворень, то система (7.46) завжди зводиться до системи зі сталими коефіцієнтами.

Разом з **Єругіним** наведемо (без доведення) важливу **теорему** такого змісту.

Для того, щоб система (7.47) $\dfrac{dX}{dt} = P(t)X$ була звідною до системи (7.52) $\dfrac{dY}{dt} = BY$ зі сталою матрицею B, необхідно і достатньо, щоби матриця розв'язків системи (7.47) мала структуру

$$X = Z(t)e^{Bt},$$

де Z — матриця, обмежена разом з матрицею $\dfrac{dZ}{dt}$ і визначником $\mathrm{Det}(Z^{-1})$.

7.8 Про системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Вирізняти звідні системи є особливий сенс хоча б через те, що для систем зі сталими коефіцієнтами, до яких вони зводяться, завжди можна побудувати точний аналітичний розв'язок (в квадратурах).

Нехай йдеться про однорідну диференціальну задачу

$$\frac{dy_i}{dx} = p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + \ldots + p_{in}y_n = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}y_j, \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_1(x_0) = y_{10},\; y_2(x_0) = y_{20},\; \ldots,\; y_n(x_0) = y_{n0}, \tag{7.53}$$

в якій p_{i1}, p_{i2}, …, p_{in} — задані дійсні числа (дійсні сталі). Ця задача (з n лінійними диференціальними рівняннями першого порядку) зводиться до задачі з одним лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку. Тому до неї застосовні всі викладені щойно аналітичні засоби. Зокрема можна засвідчити, що окремі розв'язки задачі (7.53) можна записати у вигляді

$$y_j(x) = \sum_{i=1}^{n} y_j^{(i-1)}(x_0)\,\frac{\overset{n}{\Delta}_i\,(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{7.54}$$

де

$$\overset{n}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

— визначник Ван-дер-Монда, укладений з коренів характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} p_{11}-k & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-k & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-k \end{vmatrix} = 0\,; \tag{7.55}$$

як і раніше, $\overset{n}{\Delta}_i(x-x_0)$ — визначник, який виникає при заміні в $\overset{n}{\Delta}$ i -го рядка на рядок $\left\{e^{k_1(x-x_0)}, e^{k_2(x-x_0)}, \ldots, e^{k_n(x-x_0)}\right\}$:

$$\overset{n}{\Delta}_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \ldots & e^{k_n(x-x_0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array}.$$

Зазначимо, що формули (7.54) дають прийнятні розв'язки за довільних коренів характеристичного рівняння (7.55), серед яких, зокрема, можуть бути нульові і кратні. Водночас підкреслимо, що вони безпосередньо враховують граничні умови задачі ($y_j^{(i-1)}(x_0)$ знаходяться на підставі (7.53) з застосуванням операцій диференціювання).

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j + q_i(x) = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{in}y_n + q_i(x)\,, \quad i = \overline{1, n}\,, \tag{7.56}$$

в якій $q_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) є неперервними функціями в заданому інтервалі $I = (x_0, x_1)$. Подамо систему в матричному записі

$$\frac{dY}{dx} = BY + Q(x)\,, \tag{7.57}$$

де $B = \left[b_{ij}\right]$ — ($n \times n$)-матриця коефіцієнтів; $Q(x)$ — матриця-стовпець з елементами $q_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$). Початкові умови задаватимемо у вигляді системи n звичайних рівностей

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0} \tag{7.58}$$

або у вигляді однієї рівноцінної матричної рівності

$$Y(x_0) = Y_0\,. \tag{7.59}$$

Замість Y введемо нову невідому змінну Z відповідно до співвідношення

$$Y = e^{Bx} Z . \tag{7.60}$$

Беручи до уваги, що $\frac{d}{dx} e^{Bx} = Be^{Bx} = e^{Bx} B$, матричне рівняння (7.57) можна звести до вигляду

$$e^{Bx} \frac{dZ}{dx} = Q(x) .$$

Звідси

$$Z = C + \int_{x_0}^{x} e^{-Bs} Q(s)\, ds ;$$

тут враховано, що **інтеграл від матричної функції**

$$A(s) = \left[a_{ij}(s) \right] \;\; (i = \overline{1, m} ,\;\; j = \overline{1, n})$$

за скалярним аргументом s визначається як

$$\int_{x_1}^{x_2} A(s)\, ds = \left[\int_{x_1}^{x_2} a_{ij}(s)\, ds \right] .$$

Отже, відповідно до (7.60)

$$Y = e^{Bx} \left[C + \int_{x_0}^{x} e^{-Bs} Q(s)\, ds \right] = e^{Bx} C + \int_{x_0}^{x} e^{B(x-s)} Q(s)\, ds , \tag{7.61}$$

де C — матриця-стовпець з довільними сталими елементами c_i ($i = \overline{1, n}$).

Надаючи у виразі (7.61) незалежній змінній x значення x_0, на підставі (7.59) знайдемо

$$C = e^{-Bx_0} Y_0 ,$$

що дає підстави записати розв’язок рівняння (7.57) записати у вигляді

$$Y = e^{B(x-x_0)} Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{B(x-s)} Q(s)\, ds .$$

Покладаючи $e^{Bx} = \left[g_{ij}(x) \right]$, розв’язок можна записати у вигляді

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x - x_0) y_{j0} + \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x-s)\, q_j(s)\, ds ,\;\; i = \overline{1, n} ,$$

що більше пасує формі запису диференціальної задачі у вигляді системи рівностей (7.56) і (7.58).

До попереднього випадку зводиться і **однорідна** так звана **система Коші**

$$\frac{dY}{dx} = \frac{A}{x-\alpha} Y \ ,$$

в якій сталій матриці A відповідає змінна матриця

$$B = \frac{A}{x-\alpha} \ .$$

Для цього достатньо скористатися заміною аргументу

$$t = \ln(x-\alpha) \ .$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$Y = e^{A\ln(x-\alpha)} C = (x-\alpha)^A C \ .$$

До матричних квадратур зводяться розв'язки багатьох інших систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, зокрема — **систем другого порядку**

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j = q_i(x) \ , \quad i = \overline{1,n} \ ,$$

або

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + BY = Q(x) \ . \qquad (7.62)$$

Справді, можна пересвідчитися, що за умов

$$Y(x_0) = Y_0 \ , \quad \frac{dY(x_0)}{dx} = \dot{Y}_0$$

розв'язком матричного рівняння (7.62) є матрична функція

$$Y = \cos\left(\sqrt{B}(x-x_0)\right) Y_0 + \left(\sqrt{B}\right)^{-1} \sin\left(\sqrt{B}(x-x_0)\right)\dot{Y}_0 + \left(\sqrt{B}\right)^{-1} \int_{x_0}^{x} \sin\left(\sqrt{B}(x-s)\right) Q(s)\, ds \ ,$$

де слід читати (в першу чергу, коли $\left|B\right| = 0$)

$$\cos\left(\sqrt{B}(x-x_0)\right) = E - \frac{1}{2!} B(x-x_0)^2 + \frac{1}{4!} B^2 (x-x_0)^4 - + \ldots \ ,$$

$$\left(\sqrt{B}\right)^{-1} \sin\left(\sqrt{B}(x-x_0)\right) = E(x-x_0) - \frac{1}{3!} B(x-x_0)^3 + \frac{1}{5!} B^2 (x-x_0)^5 - + \ldots \ ;$$

під $\sqrt{B}$ слід розуміти будь-яку матрицю, квадратом якої є матриця B ($\sqrt{B}$ існує завжди, якщо $|B| \neq 0$).

7.9 Матрицянт і його основні властивості

Звернемося до рівняння

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y \,, \quad x \in I = (a,b) \,, \tag{7.63}$$

де $P(x) = [p_{ij}(x)]_{n\times n}$ — матриця, елементами якої є комплексні функції $p_{ij}(x)$ ($i,\, j = \overline{1,n}$) дійсної змінної x, неперервні в деякому довільно заданому (скінченному чи нескінченному) проміжку $I = (a,b)$; подальший виклад залишиться вірним, зрештою, і тоді, коли замість неперервності від $p_{ij}(x)$ ($i,\, j = \overline{1,n}$) вимагати лише обмеженості і інтегровності за Ріманом в будь-якому скінченному проміжку $\tilde{I} \subset I = (a,b)$. Спробуємо побудувати **нормальний розв'язок** цього **рівняння**, тобто розв'язок, який обертається в одиничну матрицю E при деякому $x = x_0 \in I$.

Побудову здійснюватимемо методом послідовних наближень. Низку послідовних наближень Y_j, $j = 0, 1, 2, \dots$, визначатимемо за рекурентними формулами

$$\frac{dY_j}{dx} = P(x)Y_{j-1} \,, \ j = 1, 2, \dots,$$

беручи за Y_0 одиничну матрицю E . Отже, покладаючи $Y_j(x_0) = E$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), матимемо

$$Y_j = E + \int_{x_0}^{x} P(s)Y_{j-1}\,ds \ \ (\, j = 1, 2, \dots).$$

Таким чином,

$$Y_0 = E \,,\ Y_1 = E + \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds \,, \quad Y_2 = E + \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s)\int_{x_0}^{s} P(s_1)\,ds_1\,ds \,,$$

$$Y_3 = E + \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s)\int_{x_0}^{s} P(s_1)\,ds_1\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s)\int_{x_0}^{s} P(s_1)\int_{x_0}^{s_1} P(s_2)\,ds_2\,ds_1\,ds \,, \ \dots,$$

тобто Y_j, $j = 0, 1, 2, \dots$, є сумою перших $j+1$ членів матричного ряду

$$E + \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s)\int_{x_0}^{s} P(s_1)\,ds_1\,ds + \int_{x_0}^{x} P(s)\int_{x_0}^{s} P(s_1)\int_{x_0}^{s_1} P(s_2)\,ds_2\,ds_1\,ds + \dots \tag{7.64}$$

Для того, щоб можна було зорієнтуватися щодо збіжності ряду (7.64), доцільно побудувати деякий мажорантний ряд.

Побудуємо функції

$$g(x) = \max\bigl(|\, p_{11}(x)\,|, |\, p_{12}(x)\,|, \dots, |\, p_{1n}(x)\,|, \dots, |\, p_{nn}(x)\,|\bigr), \quad h(x) = \left|\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds\right| .$$

Значення функції $g(x)$ при кожному значенні x дорівнює найбільшому з n^2 модулів значень функцій $p_{ij}(x)$, $i,j=\overline{1,n}$, при тому самому значенні x. З того, що різниця $g(x)-g(x_1)$ при x, достатньо близькому до x_1, завжди збігається з однією з n^2 різниць $\left|p_{ij}(x)\right|-\left|p_{ij}(x_1)\right|$, $i,j=\overline{1,n}$, випливає неперервність функції $g(x)$ $\forall x\in I$. Зрозуміло, що функція $h(x)$ також неперервна в I.

Матричному ряду (7.64) відповідають n^2 скалярних рядів, кожен з яких мажорується рядом

$$1+h(x)+\frac{nh^2(x)}{2!}+\frac{n^2h^3(x)}{3!}+\ldots, \tag{7.65}$$

бо

$$\left|\left\{\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds\right\}_{ij}\right|=\left|\int_{x_0}^{x}p_{ij}(s)\,ds\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds\right|=h(x),$$

$$\left|\left\{\int_{x_0}^{x}P(s)\int_{x_0}^{s}P(s_1)\,ds_1\,ds\right\}_{ij}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}p_{ik}(s)\int_{x_0}^{s}p_{kj}(s_1)\,ds_1\,ds\right|\le$$

$$\le n\left|\int_{x_0}^{x}g(s)\int_{x_0}^{s}g(s_1)\,ds_1\,ds\right|=\frac{nh^2(x)}{2},\ \ldots$$

Ряд (7.65) є збіжним в проміжку I, до того ж він збігається рівномірно у будь-якій замкнутій частині I. А це означає, що і матричний ряд (7.64) збіжний в I, до того ж — абсолютно і рівномірно у будь-якій замкнутій частині I.

Почленне диференціювання ряду (7.64) веде до нового ряду, який відрізняється від первісного множником P. Отже ряд-похідна, як і (7.64), є рівномірно збіжним у будь-якій замкнутій частині I. Почленним ж диференціюванням переконуємося, що сума ряду (7.64) є розв'язком рівняння (7.63). Цей розв'язок обертається на E при $x=x_0$.

Таким чином, для випадку неперервної матриці $P(x)$ вдалося довести як існування нормованого розв'язку рівняння (7.63) (про що вже йшлося), так і можливість його відображення абсолютно і рівномірно збіжним у будь-якій замкнутій частині I рядом (за Пеано)

$$\mathcal{K}(x,x_0)=E+\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds+\int_{x_0}^{x}P(s)\int_{x_0}^{s}P(s_1)\,ds_1\,ds+\int_{x_0}^{x}P(s)\int_{x_0}^{s}P(s_1)\int_{x_0}^{s_1}P(s_2)\,ds_2\,ds_1\,ds+\ldots \tag{7.66}$$

Цей розв'язок також називатимемо **матрицянтом**.

Наголосимо на таких непересічних **властивостях матрицянта**.

1° $\mathcal{K}(x,x_0)=\mathcal{K}(x,x_1)\mathcal{K}(x_1,x_0)$, $x,x_0,x_2\subset I=(a,b)$.
Справді, оскільки $\mathcal{K}(x,x_0)$ і $\mathcal{K}(x,x_1)$ — два різні розв'язки рівняння (7.63), то $\mathcal{K}(x,x_0)=\mathcal{K}(x,x_1)C$ (C — стала матриця). Беручи $x=x_1$, матимемо $C=\mathcal{K}(x_1,x_0)$.

2° $\mathcal{K}(x,x_0;P+G)=\mathcal{K}(x,x_0;P)\mathcal{K}(x,x_0;S)$, де $S=K^{-1}(x,x_0;P)GK(x,x_0;P)$.
Дійсно. Покладемо $Y=\mathcal{K}(x,x_0;P)$, $X=\mathcal{K}(x,x_0;P+G)$ і $X=YZ$. Диференціюючи вираз $X=YZ$, за прийнятих позначень матимемо: $(P+G)YZ=PYZ+Y\dfrac{dZ}{dx}$.
Звідси $\dfrac{dZ}{dx}=Y^{-1}GYZ$ і, отже, $Z=\mathcal{K}(x,x_0;Y^{-1}GY)$. Підставляючи в рівність $X=YZ$ замість Y, X, Z відповідні матрицянти, отримаємо шуканий результат.

3° $\ln\left|\mathcal{K}(x,x_0;P)\right|=\int\limits_{x_0}^{x}\mathrm{Sp}P\,dx$.

Задекларована формула випливає з **формули Остроградського—Ліувіля—Якобі** (див. також (7.25))

$$|Y|=ce^{\int\limits_{x_0}^{x}(p_{11}(s)+p_{22}(s)+\ldots+p_{nn}(s))ds}=ce^{\int\limits_{x_0}^{x}\mathrm{Sp}P(s)ds},$$

в яку замість $Y(x)$ підставлено $\mathcal{K}(x,x_0;P)$.

4° Якщо A — стала матриця, то $\mathcal{K}(x,x_0;A)=e^{A(x-x_0)}$.

5° Матриці $P=[p_{ij}]_{n\times n}$ поставимо у відповідність матрицю $\mathrm{mod}P=[|p_{ij}|]_{n\times n}$. Вважатимемо, що $A\le B$, якщо $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ і $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ — дійсні матриці, у яких $a_{ij}\le b_{ij}$ ($i,j=\overline{1,n}$). Тоді з (7.66) випливає твердження: якщо $\mathrm{mod}P(x)\le G(x)$, то $\mathrm{mod}\mathcal{K}(x,x_0;P)\le\mathcal{K}(x,x_0;G)$ при $x>x_0$.

6° Позначимо матрицю, у якої всі елементи є одиницями через J ($J=[1]_{n\times n}$). Звернемося до раніше означеної функції $g(x)=\max\limits_{1\le i,j\le n}\{|p_{ij}(x)|\}$ і запишемо співвідношення $\mathrm{mod}P(x)\le g(x)J$. Звідси в силу 5° $\mathrm{mod}\mathcal{K}(x,x_0;P(x))\le\mathcal{K}(x,x_0;g(x)J)$ ($x>x_0$). Матриця $\mathcal{K}(x,x_0;g(x)J)$ є нормальним розв'язком диференціального рівняння $\dfrac{dY}{dx}=g(x)JY$. Вводячи заміну x на $h=\int\limits_{x_0}^{x}g(x)dx$, на підставі 4° матимемо: $\mathcal{K}(x,x_0;g(x)J)=e^{h(x)J}\le\left(1+h(x)+\dfrac{nh^2(x)}{2!}+\dfrac{n^2h^3(x)}{3!}+\ldots\right)J$. Тому з нерівності $\operatorname{mod}\mathcal{K}(x,x_0;P(x)) \le \mathcal{K}(x,x_0;g(x)J)$ ($x > x_0$) випливає таке співвідношення:

$$\operatorname{mod}\mathcal{K}(x,x_0;P(x)) \le \left(\frac{1}{n}e^{nh(x)} + \frac{n-1}{n}\right)J \le e^{nh(x)}J \ \ (x > x_0),$$

де $h = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\,dx$, $g(x) = \max\limits_{1\le i,j\le n}\{|\,p_{ij}(x)\,|\}$.

Для повноти викладу теми матрицянта доцільно розглянути ще раз питання побудови розв'язку неоднорідного рівняння

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + Q(x),\ \ x \in I = (a,b)\,. \tag{7.67}$$

Шукатимемо розв'язок цього рівняння у вигляді

$$Y = \mathcal{K}(x,x_0;P(x))\,Z(x)\,, \tag{7.68}$$

де $Z(x)$ — залежний від x невідомий стовпець. Підставимо (7.68) в (7.67):

$$P\mathcal{K}(x,x_0;P)\,Z + \mathcal{K}(x,x_0;P)\frac{dZ}{dx} = P\mathcal{K}(x,x_0;P)\,Z + Q\,.$$

Звідси

$$\frac{dZ}{dx} = \mathcal{K}^{-1}(x,x_0;P(x))\,Q(x)\,,$$

або після інтегрування

$$Z = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}^{-1}(\gamma,x_0;P)\ Q(\gamma)\,d\gamma + C\,,$$

де C — довільний сталий вектор. Підставляючи останній вираз в (7.68), отримаємо:

$$Y = \mathcal{K}(x,x_0;P)\int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}^{-1}(\gamma,x_0;P)\ Q(\gamma)\,d\gamma + \mathcal{K}(x,x_0;P)\,C\,. \tag{7.69}$$

Надаючи змінній x значення x_0, знайдемо $Y(x_0) = C$. А отже формула (7.69) набирає вигляду

$$Y = \mathcal{K}(x,x_0;P)\,Y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}(x,x_0;P)\mathcal{K}^{-1}(\gamma,x_0;P)\ Q(\gamma)\,d\gamma =$$

$$= \mathcal{K}(x,x_0;P)\,Y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{\mathcal{K}}(x,\gamma;P)\,Q(\gamma)\,d\gamma\,,$$

де $\widetilde{\mathcal{K}}(x,\gamma;P) = \mathcal{K}(x,x_0;P)\mathcal{K}^{-1}(\gamma,x_0;P)$.

8 ФУНДАМЕНТАЛЬНА ФУНКЦІЯ 8

8.1 Поняття фундаментальної функції

Довільній системі функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ поставимо у відповідність визначник Вронського

$$W \equiv W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \tag{8.1}$$

та визначник

$$W_j(x, \gamma) = \begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \ldots & y_n(\gamma) \\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) & \ldots & y_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(j-2)}(\gamma) & y_2^{(j-2)}(\gamma) & \ldots & y_n^{(j-2)}(\gamma) \\ y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1^{(j)}(\gamma) & y_2^{(j)}(\gamma) & \ldots & y_n^{(j)}(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\gamma) & y_2^{(n-1)}(\gamma) & \ldots & y_n^{(n-1)}(\gamma) \end{vmatrix} \quad (j = \overline{1, n}). \tag{8.2}$$

який випливає з визначника

$$W(\gamma) = W[y_1(\gamma), y_2(\gamma), \ldots, y_n(\gamma)],$$

при заміні в ньому j-го рядка на рядок $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$; γ править за параметр. Побудуємо функцію

$$y = z_j(x, \gamma) = \frac{W_j(x, \gamma)}{W(\gamma)}, \tag{8.3}$$

для якої

$$L[y]=L[z_j(x,\gamma)]=L\left[\frac{W_j(x,\gamma)}{W(\gamma)}\right]=$$

$$=\frac{p_0(x)}{W(\gamma)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}W_j(x,\gamma)+\frac{p_1(x)}{W(\gamma)}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}W_j(x,\gamma)+\ldots+\frac{p_n(x)}{W(\gamma)}W_j(x,\gamma)=$$

$$=\frac{1}{W(\gamma)}\begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \ldots & y_n(\gamma) \\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) & \ldots & y_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(j-1)}(\gamma) & y_2^{(j-1)}(\gamma) & \ldots & y_n^{(j-1)}(\gamma) \\ L[y_1(x)] & L[y_2(x)] & \ldots & L[y_n(x)] \\ y_1^{(j+1)}(\gamma) & y_2^{(j+1)}(\gamma) & \ldots & y_n^{(j+1)}(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\gamma) & y_2^{(n-1)}(\gamma) & \ldots & y_n^{(n-1)}(\gamma) \end{vmatrix}. \tag{8.4}$$

Якщо останній вираз є нулем, то функцію $y=z_j(x,\gamma)$ можна вважати **розв’язком лінійного однорідного рівняння**

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0\,. \tag{8.5}$$

Зокрема, якщо кожна з $y_i(x)$ — розв’язок цього рівняння, то розкритий в рівності (8.4) визначник дорівнює нулю за довільних x, γ. Якщо до того ж $W(\gamma)\neq 0$ (тобто всі $y_i(x)$ — лінійно незалежні в околі деякої довільної точки $x=\gamma$), то функцію $y=z_j(x,\gamma)=W_j(x,\gamma)/W(\gamma)$ беззастережно належить визнати розв’язком однорідного рівняння (8.5). Цей розв’язок задовольняє умови

$$z_j(x,\gamma)|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}}=z_j'(x,\gamma)|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}}=\ldots=z_j^{(j-2)}(x,\gamma)|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}}=0,\ \ z_j^{(j-1)}(x,\gamma)|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}}=1,$$

$$z_j^{(j)}(x,\gamma)|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}}=z_j^{(j+1)}(x,\gamma)|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}}=\ldots z_j^{(n-1)}(x,\gamma)|_{\substack{x=\gamma\\ \gamma=x}}=0\ \left(z_j^{(i)}(x,\gamma)=\frac{\partial^i z_j(x,\gamma)}{\partial x^i}\right). \tag{8.6}$$

При цьому і всі частинні похідні функції $y=z_j(x,\gamma)=W_j(x,\gamma)/W(\gamma)$ за параметром γ також є розв’язками однорідного рівняння.

Таким чином, функції

$$z_j(x,\gamma),\quad \frac{\partial z_j(x,\gamma)}{\partial\gamma},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1}z_j(x,\gamma)}{\partial\gamma^{n-1}},\ldots \tag{8.7}$$

є розв’язками однорідного рівняння $L[y]=0$ (незалежно, взагалі кажучи, від ступеня диференційовності коефіцієнтів цього рівняння). Серед них можна віднайти n лінійно незалежних, які для рівняння (8.5) з належно гладкими коефіцієнтами $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_n(x)$ складали б фундаментальну систему розв’язків.

Вимога належної гладкості коефіцієнтів покликана забезпечити чинність теореми про “існування та єдиність розв’язку” та необхідністю при побудові розв’язків чи аналізі-синтезі диференціальних рівнянь оперувати лише неперервними залежностями (функціями і їх похідними). Коли у фундаментальну систему розв’язків входить, наприклад, похідна функції (8.3) за параметром γ, яка має найвищий серед усіх інших похідних порядок N, то коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ слід вважати належно гладкими тоді, коли вони при $j=\overline{1,n-1}$ мають неперервні похідні порядку, не нижчого від $N-1$, а при $j=n$ — аналогічні похідні порядку, не нижчого від $N-2$. Звідси випливає доцільність при кожному j брати до уваги лише перші n функцій з множини (8.7); в цьому випадку вимоги щодо гладкості коефіцієнтів будуть найпомірнішими.

Таким чином, якщо б була відома одна з n функцій (8.3), відповідних однорідному рівнянню $L[y]=0$, то можна було б відтворити всю фундаментальну систему розв’язків цього рівняння, вдаючись лише до операції диференціювання вказаної функції за параметром γ. Така непересічна властивість функцій (8.3) дає підстави принаймні одну з них назвати **фундаментальною**, а задачу розв’язування рівняння (8.5) тлумачити як **задачу знаходження** відповідної **фундаментальної функції**.

Підкреслимо, що функції (8.3) взаємопов’язані; легко, зокрема, з’ясувати такі співвідношення:

$$\dot{z}_1(x,\gamma)=\frac{\partial z_1(x,\gamma)}{\partial\gamma}=\frac{p_n(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma),$$

$$\dot{z}_2(x,\gamma)=\frac{\partial z_2(x,\gamma)}{\partial\gamma}=-z_1(x,\gamma)+\frac{p_{n-1}(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma),\ldots,$$

$$\dot{z}_j(x,\gamma)=\frac{\partial z_j(x,\gamma)}{\partial\gamma}=-z_{j-1}(x,\gamma)+\frac{p_{n-j+1}(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma),\ldots,$$

$$\dot{z}_{n-1}(x,\gamma)=\frac{\partial z_{n-1}(x,\gamma)}{\partial\gamma}=-z_{n-2}(x,\gamma)+\frac{p_2(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma),$$

$$\dot{z}_n(x,\gamma)=\frac{\partial z_n(x,\gamma)}{\partial\gamma}=-z_{n-1}(x,\gamma)+\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}z_n(x,\gamma), \tag{8.8}$$

Беручи до уваги (8.1) — (8.3), (8.6), можна показати також, що

$$W\equiv W[z_1(x,\gamma),\, z_2(x,\gamma),\ldots,\, z_n(x,\gamma)]_{|x=\gamma}=1\neq 0\,.$$

А це є свідченням сукупної лінійної незалежності функцій (8.3). Таким чином, функції $z_j(x,\gamma)$ самі також складають **фундаментальну систему розв’язків однорідного рівняння** (8.5), до того ж — **нормальну** (див. умови (8.6)).

8.2 Фундаментальна система розв'язків і фундаментальна функція

Нехай в однорідному лінійному рівнянні (8.5) коефіцієнти $p_0(x),\ p_1(x),\ \ldots, p_n(x)$ є функціями, що в наперед окресленому інтервалі $I=(a,b)$ ($a<x<b$) мають неперервні похідні до ($n-2$)-го порядку включно, коли $n>2$, або є неперервними при $n=1,2$, і до того ж $p_0(x)\neq 0$ в $I=(a,b)$. В такому разі це рівняння має єдиний визначуваний в тому самому (!) $I=(a,b)$ розв'язок $y=y(x)$, який при деякому конкретному $x=x_0\in(a,b)$ задовольняє умови

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{8.9}$$

А оскільки за припущенням функції $p_0(x)\neq 0,\ p_1(x),\ \ldots, p_n(x)$ мають в $I=(a,b)$ неперервні похідні порядку $r=n-2>0$ при $n>2$ або є неперервними при $n=1,2$, то розв'язок $y=y(x)$ має в $I=(a,b)$ неперервні похідні до порядку $2(n-1)$ включно при $n>1$ або є гладкими при $n=1$.

Надаючи величині x_0 різних значень $\gamma\in(a,b)$, серед умов (8.9) можна вирізнити такі, що

$$y(\gamma)=y'(\gamma)=\ldots=y^{(n-2)}(\gamma)=0,\qquad y^{(n-1)}(\gamma)=1, \tag{8.10}$$

і підпорядкувати їм розв'язки рівняння (8.5).

Задача "віднайти розв'язок рівняння (8.9) за умов (8.10)" є похідною від основної задачі Коші "віднайти розв'язок неоднорідного рівняння $L[y]=q(x)$ за умов (8.9)" (вільний член $q(x)$ наділений тими самими властивостями гладкості, що і коефіцієнти $p_0(x),\ p_1(x),\ \ldots, p_n(x)$). Тому можна стверджувати, що існує напевне, і до того ж єдиний, належно гладкий розв'язок рівняння (8.5), який задовольняв би умови (8.10). Називатимемо цей розв'язок **фундаментальною функцією** і позначатимемо його через $K(x,\gamma)$.

Нехай функції $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ є лінійно-незалежними розв'язками рівняння $L[y]=0$. Загальний інтеграл цього рівняння в такому разі має вигляд:

$$y=c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)+\ldots+c_n\psi_n(x). \tag{8.11}$$

Підставляючи (8.11) в (8.10), одержимо неоднорідну систему n лінійних алгебричних рівнянь на довільні сталі c_i $(i=\overline{1,n})$:

$$c_1\psi_1(\gamma)+c_2\psi_2(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n(\gamma)=0,$$

$$c_1\psi_1'(\gamma)+c_2\psi_2'(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n'(\gamma)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1\psi_1^{(n-2)}(\gamma)+c_2\psi_2^{(n-2)}(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n^{(n-2)}(\gamma)=0,$$

$$c_1\psi_1^{(n-1)}(\gamma)+c_2\psi_2^{(n-1)}(\gamma)+\ldots+c_n\psi_n^{(n-1)}(\gamma)=1.$$

Її головний визначник

$$W(\gamma)=\begin{vmatrix} \psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \dots & \psi_n(\gamma) \\ \psi_1'(\gamma) & \psi_2'(\gamma) & \dots & \psi_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(\gamma) & \psi_2^{(n-1)}(\gamma) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(\gamma) \end{vmatrix}$$

обов'язково відмінний від нуля (оскільки він є заданим в точці $x=\gamma\in(a,b)$ визначником Вронського (див. (8.1)) системи лінійно незалежних розв'язків $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$ рівняння $L[y]=0$). Тому сталі c_i є однозначно визначуваними функціями параметра γ: $c_i=c_i(\gamma)$. Отже і розв'язок рівняння $L[y]=0$, який задовольняє умови (8.10), також — однозначно визначуваний:

$$K(x,\gamma)=c_1(\gamma)\psi_1(x)+c_2(\gamma)\psi_2(x)+\ldots+c_n(\gamma)\psi_n(x)\,. \tag{8.12}$$

Розглянемо функцію

$$K(x,\gamma)=\frac{1}{W(\gamma)}\begin{vmatrix} \psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \dots & \psi_n(\gamma) \\ \psi_1'(\gamma) & \psi_2'(\gamma) & \dots & \psi_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-2)}(\gamma) & \psi_2^{(n-2)}(\gamma) & \dots & \psi_n^{(n-2)}(\gamma) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \dots & \psi_n(x) \end{vmatrix}. \tag{8.13}$$

Вона, виявляється, є означеною раніше функцією $z_n(x,\gamma)=W_n(x,\gamma)/W(\gamma)$, що задовольняє рівняння (8.5) і умови (8.10). На підставі теореми про єдиність розв'язку задачі Коші залишається визнати, що (8.12) та (8.13) є одним і тим самим — **фундаментальною функцією**.

Із структури виразу (8.12) безпосередньо випливає, зокрема, що змішані похідні від фундаментальної функції $K(x,\gamma)$ за x і γ будь-якого порядку (якщо вони існують) не залежать від послідовності диференціювання.

Приклади **лінійних диференціальних операторів зі змінними коефіцієнтами** наведено в табл. 2.

2 **Фундаментальні функції деяких операторів зі змінними коефіцієнтами**

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
1	y'	1
2	$xy'-y$	$\frac{x}{\gamma}$
3	$xy'+y$	$\frac{\gamma}{x}$

2 **Фундаментальні функції деяких операторів зі змінними коефіцієнтами**
(продовження)

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
4	$y' + p(x)y$	$e^{-\int_\gamma^x p(s)\,ds}$
5	$(2x+1)y'' + 2(2x-1)y' - 8y$	$\dfrac{(4x^2+1)e^{2x} + (4\gamma^2+1)e^{2\gamma}}{2(4\gamma^2+4\gamma+1)e^{2x}}$
6	$x^4 y'' + 2x^3 y' + y$	$\dfrac{1}{\gamma^2}\sin\dfrac{x-\gamma}{x\gamma}$
7	$2x^2 y'' + y$	$2\sqrt{x\gamma}\,\sin\ln\sqrt{\dfrac{x}{\gamma}}$
8	$p(x)y'' - p'(x)y' + p^3(x)y$, $p(x) \neq 0$	$\dfrac{1}{p(x)}\sin\int_\gamma^x p(s)ds$
9	$x^3 \tan\dfrac{1}{x}\, y'' + xy' - y$	$x\gamma\dfrac{\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{\gamma}}{\sin\frac{1}{\gamma}}$
10	$(f(x)y')'$	$\int_\gamma^x \dfrac{ds}{f(s)}$
11	$y''' + f(x)y'' + y' + f(x)y$	$\sin x\int_\gamma^x \cos s\, e^{-\int_\gamma^s f(t)dt}\,ds - \cos x\int_\gamma^x \sin s\, e^{-\int_\gamma^x f(t)dt}\,ds$
12	$(f(x)y')''$	$\int_\gamma^x\int_t^x \dfrac{1}{f(s)}\,ds\,dt \equiv \int_\gamma^x \dfrac{s-\gamma}{f(s)}\,ds$
13	$16x^2 y'' + 32xy' - (4x+5)y$	$\gamma^2\Big[\left(\gamma^{-3/4} - \gamma^{-5/4}\right)\left(x^{-3/4} + x^{-5/4}\right)e^{\sqrt{x}-\sqrt{\gamma}} - \left(\gamma^{-3/4} + \gamma^{-5/4}\right)\left(x^{-3/4} - x^{-5/4}\right)e^{-(\sqrt{x}-\sqrt{\gamma})}\Big]$

1

2 **Фундаментальні функції деяких операторів зі змінними коефіцієнтами**
(продовження)

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
14	$\left(f(x)y'\right)'''$	$\int\limits_{\gamma}^{x}\int\limits_{t}^{x}\frac{(s-t)}{f(s)}\,ds\,dt \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{(s-\gamma)^2}{f(s)}\,ds$
15	$\left(f(x)y''\right)'$	$\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{x-s}{f(s)}\,ds$
16	$(f(x)y'')''$	$\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{(x-s)(s-\gamma)}{f(s)}\,ds,\quad \int\limits_{\gamma}^{x}\int\limits_{t}^{x}\frac{(x-s)}{f(s)}\,ds\,dt$
17	$(f(x)y^{(n)})^{(n)}$	$\frac{1}{((n-1)!)^2}\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{1}{f(s)}(x-s)^{n-1}(s-\gamma)^{n-1}\,ds$
18	$y'-\frac{k}{x}y$	$\left\|\frac{x}{\gamma}\right\|^k$
19	$y'+axy$, $a=\mathrm{const}$	$e^{-\frac{a}{2}\left(x^2-\gamma^2\right)}$
20	$y'+a\cos x\cdot y$, $a=\mathrm{const}$	$e^{-a(\sin x-\sin\gamma)}$
21	$y'\sin x-y\cos x$	$\left\|\frac{\sin x}{\sin\gamma}\right\|$
22	$y''+\frac{1}{x}y'$	$\gamma\ln\frac{x}{\gamma}$
23	$y''+\frac{2}{x}y'+k^2y,\quad k=\mathrm{const}$	$\frac{\gamma}{kx}\sin k(x-\gamma)$
24	$y''+\frac{p^2}{(1+kx)^4}y;$ $p,k=\mathrm{const}$	$\frac{1}{\psi(x,\gamma)}\sin\psi(x,\gamma)(x-\gamma)$, $\psi(x,\gamma)\equiv\frac{p}{(1+k\gamma)(1+kx)}$
25	$y''+\frac{p}{f(x)}y,\quad p=\mathrm{const}$	$\sum\limits_{r=0}^{\infty}(-p)^r u_r(x,\gamma)\equiv U(x,\gamma)$; $u_0(x,\gamma)=x-\gamma$, $u_r(x,\gamma)=\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{x-s}{f(s)}u_{r-1}(s,\gamma)\,ds$, $r=1,2,\ldots$

2 **Фундаментальні функції деяких операторів зі змінними коефіцієнтами**
(закінчення)

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
26	$(f(x)y'')''+py''$, $p=\text{const}$	$\frac{1}{p}[x-\gamma-U(x,\gamma)]\equiv\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{(x-s)}{f(s)}U(s,\gamma)\,ds$; $U(x,\gamma)\equiv\sum\limits_{r=0}^{\infty}(-p)^r u_r(x,\gamma)$, $u_0(x,\gamma)=x-\gamma$, $u_r(x,\gamma)=\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{x-s}{f(s)}u_{r-1}(s,\gamma)\,ds$, $r=1,2,\ldots$
27	$y''''+\frac{2}{x}y'''-\frac{1}{x^2}y''+\frac{1}{x^3}y'$	$\frac{1}{4}\gamma\left[(\gamma^2+x^2)\ln\frac{x}{2}+\gamma^2-x^2\right]$
28	$\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) & y_1 \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix}$; $L[y_i]\equiv p_0(x)y_i^{(n)}(x)+p_1(x)y_i^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)y_i(x)\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$	$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{W_{ni}(\gamma)}{W(\gamma)}y_i(x)$; $W(\gamma)\equiv W[y_1(\gamma),\ldots,y_n(\gamma)]$, $W_{ni}(\gamma)$ — алгебричне доповнення i-го елемента n-го рядка визначника Вронського

8.3 Окремий розв'язок неоднорідного рівняння

Нехай (див. розділ 4)

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=q(x) \tag{8.14}$$

— лінійне рівняння зі звичайними похідними, в якому коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ та вільний член $q(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому інтервалі $I=(a,b)$ ($a<x<b$), і до того ж $p_0(x)\neq 0$ в $I=(a,b)$. В такому разі це рівняння має єдиний визначуваний в тому самому (!) $I=(a,b)$ розв'язок $y=y(x)$, який при деякому конкретному $x=x_0\in(a,b)$ задовольняє умови $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Якщо функції $p_0(x)\neq 0$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$, $q(x)$ мають в $I=(a,b)$ неперервні похідні порядку $r\geq 0$, то розв'язок $y=y(x)$ має в $I=(a,b)$ неперервні похідні порядку $n+r$ включно.

Виявляється, **окремий розв'язок неоднорідного рівняння** $L[y]=q(x)$ (див. (8.14)) можна знайти **в квадратурах на підставі фундаментальної функції** $K(x,\gamma)$, що є **окремим розв'язком** відповідного (супровідного) **однорідного рівняння** $L[y]=0$ (8.5) за умов (8.10):

$$y_*(x,\gamma)=\int_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\,, \tag{8.15}$$

Переконаємося, що функція $y_*(x,\gamma)$ (8.15) справді задовольняє рівняння (8.14). Для цього, вдаючись до загального правила диференціювання інтеграла за параметром (див. (1.11)), спочатку знайдемо:

$$y_*^{(r)}=\int_\gamma^x\frac{\partial^r K(x,s)}{\partial x^r}\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds+\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left(K(x,\gamma)\Big|_{\gamma=x}\frac{q(x)}{p_0(x)}\right)+$$

$$+\frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}}\left(\frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial x}\bigg|_{\gamma=x}\frac{q(x)}{p_0(x)}\right)+\ldots+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{r-2}K(x,\gamma)}{\partial x^{r-2}}\bigg|_{\gamma=x}\frac{q(x)}{p_0(x)}\right)+$$

$$+\frac{\partial^{r-1}K(x,\gamma)}{\partial x^{r-1}}\bigg|_{\gamma=x}\frac{q(x)}{p_0(x)}\,,\qquad r=\overline{1,n}\,. \tag{8.16}$$

Далі, застосовуючи загальне правило диференціювання визначника (див. (1.12)) до конкретного виразу (8.13), з'ясуємо, що

$$\frac{\partial^\nu K(x,\gamma)}{\partial x^\nu}\bigg|_{\gamma=x}=0,\quad \nu=\overline{0,n-2}\,;\qquad \frac{\partial^{n-1}K(x,\gamma)}{\partial x^{n-1}}\bigg|_{\gamma=x}=1\,, \tag{8.17}$$

і вирази (8.16) зведемо до вигляду:

$$y_*^{(r)}=\int_\gamma^x\frac{\partial^r K(x,s)}{\partial x^r}\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\quad (r=\overline{1,n-1}),$$

$$y_*^{(n)}=\int_\gamma^x\frac{\partial^n K(x,s)}{\partial x^n}\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds+\frac{q(x)}{p_0(x)}\,. \tag{8.18}$$

Нарешті, підставляючи (8.15) і (8.18) в (8.14) та вносячи коефіцієнти p_0, p_1, …, p_n під знак інтеграла, дійдемо рівності

$$\int_\gamma^x L_n[K(x,s)]\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds+q(x)=q(x),$$

яка є тотожністю $q(x)\equiv q(x)$, оскільки $L_n[K(x,s)]\equiv 0$.

Отже функція $y_* = y_*(x,\gamma)$, означувана формулою (8.15), справді є розв'язком (окремим) неоднорідного диференціального рівняння (8.14), причому таким, що задовольняє нульові початкові умови

$$y_*(\gamma,\gamma) = y_*'(\gamma,\gamma) = \ldots = y_*^{(n-1)}(\gamma,\gamma) = 0\,,$$

див. (8.18).

Зважаючи на (8.12), (8.13), **фундаментальну функцію** і відповідний **окремий розв'язок неоднорідного рівняння** можна подати у вигляді:

$$K(x,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma) y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{(ni)}(\gamma)}{W(\gamma)} y_i(x)\,, \quad y_*(x,\gamma) = \int_{\gamma}^{x} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{W_{(ni)}(s)}{W(s)} y_i(x) \right) q(s)\,ds\,,$$

де $W_{(ni)}(\,\cdot\,)$ — алгебричне доповнення i -го елемента n -го рядка вронскіяна $W(\,\cdot\,)$.

8.4 Фундаментальна функція і загальний розв'язок лінійного рівняння з належно гладкими коефіцієнтами

Структура виразів (8.12), (8.13) дає можливість легко пересвідчитись, що частинні за параметром γ похідні (будь-якого порядку) від фундаментальної функції задовольняють рівняння $L[y]=0$. Зокрема, систему функцій

$$K(x,\gamma),\ \dot{K} = \frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial \gamma}, \ldots, \overset{(n-1)}{K} = \frac{\partial^{n-1} K(x,\gamma)}{\partial \gamma^{n-1}}\,, \tag{8.19}$$

можна було б визнати фундаментальною системою розв'язків рівняння (8.14), коли б її визначник Вронського (складений за аргументом x) виявився відмінним від нуля в $I=(a,b)$, засвідчуючи тим самим лінійну незалежність цієї системи функцій. Але якщо є підстави сподіватись на сукупну лінійну незалежність функцій (8.19), що є розв'язками однорідного рівняння, то достатньо пересвідчитись, що визначник Вронського відмінний від нуля у будь-якій одній точці з $I=(a,b)$.

За допомогою формули (8.13) та умов (8.17) можна з'ясувати, що:

$$\left.\frac{\partial^{i+j} K(x,\gamma)}{\partial \gamma^i \partial x^j}\right|_{x=\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{при } i+j \le n-2, \\ (-1)^i & \text{при } i+j = n-1, \\ (-1)^{i+1} \dfrac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)} & \text{при } i+j = n, \end{cases} \qquad i,\, j \ge 0\,,$$

$$\left.\frac{\partial^{i+j} K(x,\gamma)}{\partial \gamma^i \partial x^j}\right|_{\gamma=x} = \begin{cases} 0 & \text{при } i+j \le n-2, \\ (-1)^i & \text{при } i+j = n-1, \\ (-1)^{i+1} \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)} & \text{при } i+j = n, \end{cases} \qquad i,\, j \ge 0\,. \tag{8.20}$$

Завдяки співвідношенням (8.20), визначник Вронського

$$W\left[K, \dot{K}, \dots, \overset{(n-1)}{K}\right] = W(x,\gamma) = \begin{vmatrix} K & \dot{K} & \cdots & \overset{(n-1)}{K} \\ K' & \dot{K}' & \cdots & \overset{(n-1)}{K'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(n-1)} & \dot{K}^{(n-1)} & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

при $x=\gamma$ стає трикутним, і тому легко пересвідчитись, що він в цьому випадку відмінний від нуля:

$$W\big|_{x=\gamma} = \begin{vmatrix} & & & & (-1)^{n-1} \\ & 0 & & \iddots & \overset{(n-1)}{K'}\Big|_{x=\gamma} \\ & & & & \vdots \\ & & (-1)^2 & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-3)}\Big|_{x=\gamma} \\ & (-1)^1 & \ddot{K}^{(n-2)}\Big|_{x=\gamma} & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-2)}\Big|_{x=\gamma} \\ (-1)^0 & \dot{K}^{(n-1)}\Big|_{x=\gamma} & \ddot{K}^{(n-1)}\Big|_{x=\gamma} & \cdots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}\Big|_{x=\gamma} \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Отже система функцій (8.19) справді завжди є лінійно незалежною. Якщо б її можна було визнати фундаментальною системою розв’язків однорідного рівняння (8.5), то загальний розв’язок цього рівняння (8.5) були б підстави подати у вигляді

$$y_\circ = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i K(x,\gamma)}{\partial \gamma^i}, \tag{8.21}$$

а відповідного неоднорідного рівняння (8.14) — у вигляді

$$y = y_\circ(x,\gamma) + y_*(x,\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i K(x,\gamma)}{\partial \gamma^i} + \int_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds . \tag{8.22}$$

Тут $K(x,\gamma)$ — фундаментальна функція, що є окремим розв’язком однорідного рівняння (8.5) за умов (див. (8.10), (8.17))

$$K(x,\gamma)\big|_{x=\gamma} = K'(x,\gamma)\big|_{x=\gamma} = \ldots = K^{(n-2)}(x,\gamma)\Big|_{x=\gamma} = 0, \; K^{(n-1)}(x,\gamma)\Big|_{x=\gamma} = 1;$$

c_i — довільні сталі, а $y_*(x,\gamma)$ — окремий, відповідний нульовим умовам $y_*(\gamma,\gamma) = y_*'(\gamma,\gamma) = \ldots = y_*^{(n-1)}(\gamma,\gamma) = 0$, розв'язок рівняння (8.14), який визначається за формулою (8.15).

Щодо властивостей коефіцієнтів рівнянь (8.14), (8.5) зазначимо таке. Припущенням, що коефіцієнти $p_0(x),\ \ p_1(x),\ \ \ldots,\ \ p_n(x)$ є неперервними функціями в наперед заданому інтервалі $I=(a,b)$ ($a<x<b$), завбачується в $I=(a,b)$ неперервність функцій $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots,\ \ \psi_n(x)$, що є окремими розв'язками однорідного рівняння $L[y]=0$, та їх похідних до n-го порядку включно. А це означає, що завбачується неперервність лише функцій (див. (8.13)) $K(x,\gamma)$ і $\dot{K}(x,\gamma)$. Отже, якщо не вдаватись до спеціального дослідження впливу гладкості коефіцієнтів $p_0(x),\ \ p_1(x),\ \ \ldots,\ \ p_n(x)$ на гладкість $K(x,\gamma)$, то залишається звузити область чинності формул (8.21) і (8.22), покликаних відображати відповідно загальний розв'язок однорідного рівняння $L[y]=0$ (8.5) і загальний розв'язок неоднорідного рівняння $L[y]=q$ (8.14). А власне, необхідно припустити, що коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x),\ \ \ldots, p_n(x)$ ($p_0(x)\neq 0$) та вільний член $q(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому інтервалі $I=(a,b)$ і до того ж $p_0(x),\ \ p_1(x),\ \ \ldots, p_n(x)$ в $I=(a,b)$ мають неперервні похідні за x до ($n-2$)-го порядку включно. Тоді загальний розв'язок рівняння вигляду (8.14) можна будувати за досить зручною формулою (8.22), якщо відома відповідна цьому рівнянню фундаментальна функція $K(x,\gamma)$. Ця функція, в свою чергу, є розв'язком відповідного (супровідного) рівняння вигляду (8.5) за умов (8.10).

Тоді, як функція

$$\frac{\partial^i K(x,\gamma)}{\partial\gamma^i}\ \ (i=0,1,\ldots)$$

є **окремим розв'язком однорідного рівняння** $L[y]=0$ (8.5) з належно гладкими коефіцієнтами, функція

$$\int\limits_x^\gamma \overset{i}{\ldots}\int\limits_x^\gamma K(x,\gamma)\,d\gamma \overset{i}{\ldots} d\gamma\ \ (i=1,2,\ldots)$$

є розв'язком неоднорідного рівняння

$$L[y]=-p_0(x)\frac{(\gamma-x)^{i-1}}{(i-1)!}$$

з неперервними коефіцієнтами (та вільним членом). Справді: на підставі (1.19)

$$\int\limits_x^\gamma \overset{i}{\ldots}\int\limits_x^\gamma K(x,\gamma)\,d\gamma \overset{i}{\ldots} d\gamma=\frac{1}{(i-1)!}\int\limits_x^\gamma(\gamma-s)^{i-1}K(x,s)\,ds\,; \tag{8.23}$$

то ж порівнюючи (8.23) з (8.15) доходимо висновку, що (8.23) є розв'язком супровідного неоднорідного рівняння $L[y]=q$ (8.14), в якому

$$q=-p_0(x)\frac{(\gamma-x)^{i-1}}{(i-1)!}\,.$$

Загалом, у разі належної диференційовності і інтегровності фундаментальної функції $K(x,\gamma)$ справджуються рівності

$$\ldots,\ \overset{(r)}{\Lambda} = \frac{\partial^r \Lambda}{\partial \gamma^r} = 0\,,\ \ldots,\ \dot{\Lambda} = \overset{(1)}{\Lambda} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma} = 0\,,\ \Lambda = \overset{(0)}{\Lambda} = 0\,,$$

$$\overset{(-1)}{\Lambda} = \int_x^\gamma \Lambda(x,\gamma)\,d\gamma = -p_0(x)\,,$$

$$\overset{(-2)}{\Lambda} = \int_x^\gamma\int_x^\gamma \Lambda(x,\gamma)\,d\gamma d\gamma = -p_0(x)(\gamma - x)\,,$$

$$\ldots,\ \overset{(-m)}{\Lambda} = \int_x^\gamma \overset{m}{\cdots} \int_x^\gamma \Lambda(x,\gamma)\,d\gamma \overset{m}{\ldots} d\gamma = -p_0(x)\frac{(\gamma - x)^{m-1}}{(m-1)!}\,,\ldots,$$

в яких

$$\Lambda = \Lambda(x,\gamma) = L[K] = p_0(x)K^{(n)}(x,\gamma) + p_1(x)K^{(n-1)}(x,\gamma) + \ldots + p_n(x)K(x,\gamma)\,.$$

8.5 Відтворення однорідного диференціального рівняння за відомою фундаментальною функцією

В загальному випадку, рівнянню (8.5) **еквівалентним** є **рівняння**

$$\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-1)}{K}(x,\gamma) & y \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-1)}{K'}(x,\gamma) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n)}(x,\gamma) & \dot{K}^{(n)}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-1)}{K^{(n)}}(x,\gamma) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (8.24)$$

Позначаючи

$$P_0[K(x,\gamma)] = \begin{vmatrix} K & \dot{K} & \ldots & \overset{(n-2)}{K} & \overset{(n-1)}{K} \\ K' & \dot{K}' & \ldots & \overset{(n-2)}{K'} & \overset{(n-1)}{K'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-1)} & \dot{K}^{(n-1)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n-1)}} & \overset{(n-1)}{K^{(n-1)}} \end{vmatrix}\,,$$

$$P_j[K(x,\gamma)] = \begin{vmatrix} K & \dot{K} & \ldots & \overset{(n-2)}{K} & \overset{(n-1)}{K} \\ K' & \dot{K}' & \ldots & \overset{(n-2)}{K}' & \overset{(n-1)}{K}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-j-1)} & \dot{K}^{(n-j-1)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K}{}^{(n-j-1)} & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-j-1)} \\ K^{(n-j+1)} & \dot{K}^{(n-j+1)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K}{}^{(n-j+1)} & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-j+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-1)} & \dot{K}^{(n-1)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K}{}^{(n-1)} & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)} \\ K^{(n)} & \dot{K}^{(n)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K}{}^{(n)} & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n)} \end{vmatrix} \quad (j = \overline{1, n-1}),$$

$$P_n[K(x,\gamma)] = \begin{vmatrix} K' & \dot{K}' & \ldots & \overset{(n-2)}{K}' & \overset{(n-1)}{K}' \\ K'' & \dot{K}'' & \ldots & \overset{(n-2)}{K}'' & \overset{(n-1)}{K}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n)} & \dot{K}^{(n)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K}{}^{(n)} & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{8.25}$$

коефіцієнти рівняння (8.5), відповідного певній фундаментальній функції $K = K(x,\gamma)$, можна визначити на підставі (8.24) за формулою

$$\frac{p_j}{p_0} = (-1)^j \frac{P_j[K(x,\gamma)]}{P_0[K(x,\gamma)]}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{8.26}$$

З (8.26), (8.25) випливає, зокрема, що

$$\frac{p_1}{p_0} = -\frac{P_1[K(x,\gamma)]}{P_0[K(x,\gamma)]} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} P_0[K(x,\gamma)]}{P_0[K(x,\gamma)]}. \tag{8.27}$$

Звідси

$$P_0[K(x,\gamma)] = e^{-\int_\gamma^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds}, \tag{8.28}$$

а отже в загальному випадку

$$(-1)^j \frac{p_0(x)}{p_j(x)} P_j[K(x,\gamma)] = e^{-\int_\gamma^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds}, \quad j = \overline{0, n}. \tag{8.29}$$

З рівності (8.29) випливає, зокрема, що при r разів неперервно за змінною x диференційовних функціях $p_0(x)$ і $p_j(x)$ вирази $(-1)^j \, p_0/p_j \, P_j[K]$ мають неперервні за цією ж змінною похідні до порядку $r+1$ включно.

А чи кожна функція $K(x,\gamma)$ може правити за фундаментальну, відповідну деякому диференціальному рівнянню n-го порядку? Напевне, що ні.

Оскільки коефіцієнти p_0, p_1, …, p_n в загальному випадку від параметра γ не залежать, то (див. (8.26))

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{P_j(x,\gamma)}{P_0(x,\gamma)}=0 \quad (\, j=\overline{1,n}, \quad x,\gamma\in I\,).$$

Звідси, беручи до уваги (8.28), знайдемо, що $\dot{P}_j(x,\gamma)\big/P_0(x,\gamma)$ не залежить від x, тоді як $P_j'(x,\gamma)\big/P_0(x,\gamma)$ не залежить від γ. Вважаючи функцію $\varphi(s)=-p_1(s)/p_0(s)$ довільною і покладаючись на (8.28), матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{P_j(x,\gamma)}{P_0(x,\gamma)}=\frac{\dot{P}_j(x,\gamma)+\varphi(\gamma)P_j(x,\gamma)}{\exp\int\limits_{\gamma}^{x}\varphi(s)\,ds}=0\,.$$

А це означає, що

$$P_j(x,\gamma)=P_j(x,x)e^{\int\limits_{\gamma}^{x}\varphi(s)\,ds}\,, \quad (\, j=\overline{0,n}, \quad x,\gamma\in I\,).$$

Беручи до уваги (8.26), знайдемо:

$$\frac{p_j}{p_0}=(-1)^j\frac{P_j(x,\gamma)}{P_0(x,\gamma)}=(-1)^j\frac{P_j(x,x)}{P_0(x,x)}, \quad j=\overline{1,n}\,. \tag{8.30}$$

З’ясуємо для прикладу, чи може правити за фундаментальну функція

$$K=\frac{u(x,\gamma)}{v(\gamma)}\,,$$

в якій $u(x,\gamma)=\gamma^2e^{x-\gamma}-x^2(\gamma-1)+x\gamma(\gamma-2)$, $v(\gamma)=(\gamma-1)^2+1$. Застосовуючи формулу (1.15), можна переконатися, що визначники порядку m матриці $(m+1)\times m$

$$\begin{bmatrix} K & \dot{K} & \ddot{K} & \dots & \overset{(m-1)}{K} \\ K' & \dot{K}' & \ddot{K}' & \dots & \overset{(m-1)}{K'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(m-1)} & \dot{K}^{(m-1)} & \ddot{K}^{(m-1)} & \dots & \overset{(m-1)}{K^{(m-1)}} \\ K^{(m)} & \dot{K}^{(m)} & \ddot{K}^{(m)} & \dots & \overset{(m-1)}{K^{(m)}} \end{bmatrix}$$

збігаються з відповідними визначниками матриці

$$\begin{bmatrix} \dfrac{u}{v} & \dfrac{\dot{u}}{v} & \dfrac{\ddot{u}}{v} & \cdots & \dfrac{\overset{(m-1)}{u}}{v} \\[2ex] \dfrac{u'}{v} & \dfrac{\dot{u}'}{v} & \dfrac{\ddot{u}'}{v} & \cdots & \dfrac{\overset{(m-1)}{u}'}{v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{u^{(m-1)}}{v} & \dfrac{\dot{u}^{(m-1)}}{v} & \dfrac{\ddot{u}^{(m-1)}}{v} & \cdots & \overset{(m-1)}{u}{}^{(m-1)} \\[2ex] \dfrac{u^{(m)}}{v} & \dfrac{\dot{u}^{(m)}}{v} & \dfrac{\ddot{u}^{(m)}}{v} & \cdots & \dfrac{\overset{(m-1)}{u}{}^{(m)}}{v} \end{bmatrix}.$$

При цьому виявиться, що: $P_0(x,\gamma) = P_1(x,\gamma) = \ldots = P_m(x,\gamma) \equiv 0$, коли $m \ge 4$; $P_0(x,x) = K(x,x) \equiv 0$ і $P_1(x,x) = K'(x,x) \equiv 0$, коли $m = 1$;

$$P_0(x,\gamma)\big|_{\gamma=x} = \begin{vmatrix} K & \dot{K} \\ K' & \dot{K}' \end{vmatrix}_{\gamma=x} = \begin{vmatrix} u/v & \dot{u}/v \\ u'/v & \dot{u}'/v \end{vmatrix}_{\gamma=x} \equiv 0,$$

$$P_1(x,\gamma)\big|_{\gamma=x} = \begin{vmatrix} K & \dot{K} \\ K' & \dot{K}' \end{vmatrix}_{\gamma=x} = \begin{vmatrix} u/v & \dot{u}/v \\ u''/v & \dot{u}''/v \end{vmatrix}_{\gamma=x} \equiv 0,$$

$$P_2(x,\gamma)\big|_{\gamma=x} = \begin{vmatrix} K' & \dot{K}' \\ K'' & \dot{K}'' \end{vmatrix}_{\gamma=x} = \begin{vmatrix} u'/v & \dot{u}'/v \\ u''/v & \dot{u}''/v \end{vmatrix}_{\gamma=x} \equiv 1,$$

коли $m = 2$. То ж, залишається зосередити увагу на випадку, коли $m = 3$ і

$$P_0 = \frac{v(x)}{v(\gamma)} e^{x-\gamma}, \quad P_1 = \frac{x^2}{v(\gamma)} e^{x-\gamma}, \quad P_2 = \frac{2x}{v(\gamma)} e^{x-\gamma}, \quad P_3 = \frac{2}{v(\gamma)} e^{x-\gamma}.$$

На підставі (8.30) матимемо:

$$\frac{p_1}{p_0} = -P_1(x,x) = -\frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}, \quad \frac{p_2}{p_0} = P_2(x,x) = \frac{2x}{x^2 - 2x + 2},$$

$$\frac{p_3}{p_0} = P_3(x,x) = -\frac{2}{x^2 - 2x + 2} \quad (P_0(x,x) = 1).$$

Таким чином, функція $K = K(x,\gamma)$, про яку йшлося, є фундаментальною для рівняння (див. табл. 2)

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

8.6 Взаємозумовлені лінійні рівняння

Нехай функції $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ є лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння

$$L_n[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \tag{8.31}$$

порядку $n \geq 2$ з неперервними в деякому $I = [a, b]$ коефіцієнтами $p_0 \neq 0,\ p_1,$ $\ldots, p_n$, такі що

$$W_{n-1}(x) \equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}] \neq 0 \quad \forall x \in I = [a, b]. \tag{8.32}$$

($W[\,\cdot\,]$ — визначник Вронського (8.1)).

Позначаючи

$$K_{n-1}(x, \gamma) \equiv \frac{1}{W_{n-1}(\gamma)} \begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \ldots & y_{n-1}(\gamma) \\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) & \ldots & y_{n-1}'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-3)}(\gamma) & y_2^{(n-3)}(\gamma) & \ldots & y_{n-1}^{(n-3)}(\gamma) \\ y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_{n-1}(x) \end{vmatrix}, \quad n \geq 2 \tag{8.33}$$

($K_{n-1}(x, \gamma) = K_1(x, \gamma) \equiv \dfrac{y_1(x)}{y_1(\gamma)}$ при $n = 2$), розглянемо функцію

$$y_n = \int_\gamma^x K_{n-1}(x, s)\,\varphi(s)\,ds \quad (x, \gamma \in I), \tag{8.34}$$

$\varphi(\,\cdot\,)$ — довільна поки що функція.

Розкладаючи визначник у виразі (8.33) за елементами останнього рядка, кожен з яких є розв'язком рівняння (8.31), легко пересвідчитись, що й сама функція $K_{n-1}(x, \gamma)$ задовольняє рівняння (8.31):

$$L_n[K_{n-1}] = 0 \tag{8.35}$$

($K_{n-1}(x, \gamma)$ лінійно залежна від $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$).

Обчислимо похідні функції (8.34):

$$y_n' = \int_\gamma^x K_{n-1}'(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n^{(n-2)} = \int_\gamma^x K_{n-1}^{(n-2)}(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

$$y_n^{(n-1)}=\int_\gamma^x K_{n-1}^{(n-1)}(x,s)\,\varphi(s)\,ds+\varphi(x),$$

$$y_n^{(n)}=\int_\gamma^x K_{n-1}^{(n)}(x,s)\,\varphi(s)\,ds+K_{n-1}^{(n-1)}(x,x)\,\varphi(x)+\varphi'(x). \qquad (8.36)$$

Підставляючи (8.34), (8.36) в (8.31), знайдемо:

$$L[y_n]=\int_\gamma^x L_n[K_{n-1}(x,s)]\,\varphi(s)\,ds+p_0(x)\Big(K_{n-1}^{(n-1)}(x,x)\,\varphi(x)+\varphi'(x)\Big)+p_1(x)\,\varphi(x)$$

$$\forall x\in I=[a,b].$$

Враховуючи (8.35), переконуємося, що функція $y_n(x)$ є розв’язком рівняння (8.31), якщо

$$p_0(x)\varphi'(x)+\Big(p_0(x)K_{n-1}^{(n-1)}(x,x)+p_1(x)\Big)\varphi(x)=0 \quad \forall x\in I=[a,b]. \qquad (8.37)$$

Диференціюючи співвідношення (8.33), знаходимо

$$K_{n-1}^{(n-1)}(x,x)=\frac{W'_{n-1}(x)}{W_{n-1}(x)}. \qquad (8.38)$$

З іншого боку, за формулою Остроградського-Ліувіля

$$\frac{W'_{n-1}(x)}{W_{n-1}(x)}=-\frac{\widetilde{p}_1(x)}{\widetilde{p}_0(x)}, \qquad (8.39)$$

де $\widetilde{p}_0(x)\neq 0$ та $\widetilde{p}_1(x)$ — коефіцієнти біля відповідно ($n-1$)-ої та ($n-2$)-ої похідних залежної змінної y у деякому рівнянні ($n-1$)-го порядку

$$L_{n-1}[y]\equiv \widetilde{p}_0 y^{(n-1)}+\widetilde{p}_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+\widetilde{p}_{n-1}(x)\,y=0, \qquad (8.40)$$

для якого функції $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ є лінійно незалежними розв’язками. Тому (8.37) можна записати так:

$$\varphi'(x)-\alpha(x)\,\varphi(x)=0, \qquad (8.41)$$

де

$$\alpha(x)\equiv-\frac{p_1(x)}{p_0(x)}+\frac{\widetilde{p}_1(x)}{\widetilde{p}_0(x)}. \qquad (8.42)$$

Отже, зважаючи на (8.41), (8.42), знайдемо:

$$\varphi(x)=C\,e^{\int_\gamma^x \alpha(s)\,ds} \qquad (x\in I) \qquad (8.43)$$

(C — довільна стала).

Кладучи для визначеності $C=1$, на підставі (8.43) функцію (8.34) можна подати у вигляді

$$y_n(x,\gamma)=\int_\gamma^x K_{n-1}(x,t)\, e^{\int_\gamma^t \alpha(s)\,ds}\,dt \quad (x,\gamma\in I). \tag{8.44}$$

З (8.44) знаходимо:

$$y_n(\gamma)=y_n'(\gamma)=\ldots=y_n^{(n-2)}(\gamma)=0, \quad y_n^{(n-1)}(\gamma)=1.$$

Відтак, переконуємося, що визначник Вронського системи функцій y_1, y_2, …, y_{n-1}, y_n в точці $x=\gamma\in I=[a,b]$ відмінний від нуля:

$$W_n(\gamma)\equiv W[y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},y_n]\big|_{x=\gamma}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \ldots & y_{n-1}(\gamma) & 0\\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) & \ldots & y_{n-1}'(\gamma) & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(\gamma) & y_2^{(n-2)}(\gamma) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(\gamma) & 0\\ y_1^{(n-1)}(\gamma) & y_2^{(n-1)}(\gamma) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(\gamma) & 1 \end{vmatrix}=W_{n-1}(\gamma)\neq 0.$$

Таким чином, функції y_1, y_2, …, y_{n-1}, що задовольняють умову (8.32), разом з функцією y_n утворюють **фундаментальну систему розв'язків** рівняння (8.31). Тому **загальний розв'язок** цього рівняння можна подати у вигляді рівності

$$y=\sum_{i=1}^{n-1}C_i y_i+C_n\int_\gamma^x K_{n-1}(x,t)\, e^{\int_\gamma^t \alpha(s)\,ds}\,dt \quad (x,\gamma\in I), \tag{8.45}$$

$C_i,\ i=\overline{1,n}$ — довільні сталі.

Системі функцій y_1, y_2, …, y_{n-1}, y_n поставимо у відповідність функцію

$$K_n(x,\gamma)=\frac{1}{W_n(\gamma)}\begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \ldots & y_{n-1}(\gamma) & 0\\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) & \ldots & y_{n-1}'(\gamma) & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(\gamma) & y_2^{(n-2)}(\gamma) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(\gamma) & 0\\ y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \end{vmatrix}=$$

$$=\int_\gamma^x K_{n-1}(x,t)\, e^{\int_\gamma^t \alpha(s)\,ds}\,dt, \tag{8.46}$$

так само, як системі функцій y_1, y_2, …, y_{n-1} раніше було поставлено у відповідність функцію (8.33).

Легко угледіти, що функції y_1, y_2, $\ldots, y_{n-1}$ сукупно мають всі ознаки фундаментальної системи розв'язків деякого лінійного диференціального рівняння ($n-1$)-го порядку (8.40). Тому вираз (8.33) — фундаментальна функція, відповідна деякому лінійному диференціальному операторові $L_{n-1}[y]$ ($n-1$)-го порядку. Натомість, вираз (8.46) відображає фундаментальну функцію, відповідну деякому операторові $L_n[y]$ n-го порядку.

На підставі (8.46), зокрема, маємо:

$$\dot{K}_n = -K_{n-1}(x,\gamma) - \alpha(\gamma)\int_\gamma^x K_{n-1}(x,t)e^{\int_\gamma^t \alpha(s)ds}\,dt = -\alpha(\gamma)K_n(x,\gamma) - K_{n-1}(x,\gamma).$$

Укладемо систему рівностей

$$\overset{(i)}{K_n} = -\frac{\partial^{i-1}}{\partial^{i-1}\gamma}(\alpha(\gamma)K_n(x,\gamma)) - \frac{\partial^{i-1}}{\partial^{i-1}\gamma}K_{n-1}(x,\gamma) =$$

$$= -\sum_{r=0}^{i}\frac{d^{i-r}\alpha(\gamma)}{d^{i-r}\gamma}\frac{\partial^r K_n(x,\gamma)}{\partial^r\gamma} - \frac{\partial^{i-1}}{\partial^{i-1}\gamma}K_{n-1}(x,\gamma) =$$

$$= -\sum_{r=0}^{i}\overset{(i-r)}{\alpha}(\gamma)\overset{(r)}{K}_n(x,\gamma) - \overset{(i-1)}{K}_{n-1}(x,\gamma), \quad i = \overline{1,j}.$$

Розглядаючи її як лінійну систему рівнянь відносно величин $\overset{(i)}{K}_n$ ($i = \overline{1,j}$), обчислимо головний визначник

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ C_1^0\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ C_2^1\dot{\alpha} & C_2^0\alpha & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{j-3}^{j-4}\overset{(j-4)}{\alpha} & C_{j-3}^{j-5}\overset{(j-5)}{\alpha} & C_{j-3}^{j-6}\overset{(j-6)}{\alpha} & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ C_{j-2}^{j-3}\overset{(j-3)}{\alpha} & C_{j-2}^{j-4}\overset{(j-4)}{\alpha} & C_{j-2}^{j-5}\overset{(j-5)}{\alpha} & \ldots & C_{j-2}^0\alpha & 1 & 0 \\ C_{j-1}^{j-2}\overset{(j-2)}{\alpha} & C_{j-1}^{j-3}\overset{(j-3)}{\alpha} & C_{j-1}^{j-4}\overset{(j-4)}{\alpha} & \ldots & C_{j-1}^1\dot{\alpha} & C_{j-1}^0\alpha & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Факт, що $D = 1 \neq 0$, засвідчує можливість однозначно розв'язати систему відносно величин $\overset{(i)}{K}_n$ ($i = \overline{1,j}$). То ж, вдаючись до визначника

$$
D_j = -\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha K_n + K_{n-1} \\
C_1^0\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dot\alpha K_n + \dot K_{n-1} \\
C_2^1\dot\alpha & C_2^0\alpha & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ddot\alpha K_n + \ddot K_{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C_{j-3}^{j-4}\overset{(j-4)}{\alpha} & C_{j-3}^{j-5}\overset{(j-5)}{\alpha} & C_{j-3}^{j-6}\overset{(j-6)}{\alpha} & \ldots & 1 & 0 & \overset{(j-3)}{\alpha} K_n + \overset{(j-3)}{K}_{n-1} \\
C_{j-2}^{j-3}\overset{(j-3)}{\alpha} & C_{j-2}^{j-4}\overset{(j-4)}{\alpha} & C_{j-2}^{j-5}\overset{(j-5)}{\alpha} & \ldots & C_{j-2}^0\alpha & 1 & \overset{(j-2)}{\alpha} K_n + \overset{(j-2)}{K}_{n-1} \\
C_{j-1}^{j-2}\overset{(j-2)}{\alpha} & C_{j-1}^{j-3}\overset{(j-3)}{\alpha} & C_{j-1}^{j-4}\overset{(j-3)}{\alpha} & \ldots & C_{j-1}^1\dot\alpha & C_{j-1}^0\alpha & \overset{(j-1)}{\alpha} K_n + \overset{(j-1)}{K}_{n-1}
\end{vmatrix},
$$

знайдемо:

$$
\overset{(j)}{K}_n = \frac{D_j}{D} = D_j\left(\alpha, \dot\alpha, \ldots, \overset{(j-1)}{\alpha}, K_n, K_{n-1}, \dot K_{n-1}, \ldots, \overset{(j-1)}{K}_{n-1}\right) =
$$

$$
= \left(\overset{(j-1)}{\alpha} K_n + \overset{(j-1)}{K}_{n-1}\right) + C_{j-1}^0\alpha\left(\overset{(j-2)}{\alpha} K_n + \overset{(j-2)}{K}_{n-1}\right) + \ldots + d_2\left(\ddot\alpha K_n + \ddot K_{n-1}\right) +
$$

$$
+ d_1\left(\dot\alpha K_n + \dot K_{n-1}\right) + d_0\left(\alpha K_n + K_{n-1}\right), \tag{8.47}
$$

де $d_0, d_1, d_2, \ldots$ — функції, що залежать від функції α та її похідних. Вираз (8.47) відображає, по суті, правило послідовного диференціювання фундаментальної функції за змінною γ. Окремо можна наголосити і на співвідношеннях (див. (8.38), (8.39))

$$
\frac{W'_{n-1}(x)}{W_{n-1}(x)} = K_{n-1}^{(n-1)}(x, x) = -\frac{\widetilde{p}_1(x)}{\widetilde{p}_0(x)}, \quad \frac{W'_n(x)}{W_n(x)} = K_n^{(n)}(x, x) = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}. \tag{8.48}
$$

Зазначимо, що на підставі першої з рівностей (8.48) (або безпосередньо формули Остроградського-Ліувіля) функцію (8.34) можна подати і у вигляді

$$
y_n = K_n(x, \gamma) = W_{n-1}(\gamma)\int_\gamma^x \frac{K_{n-1}(x, t)}{W_{n-1}(t)} e^{-\int_\gamma^t \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds} dt. \tag{8.49}
$$

Натомість, з (8.42), (8.28), (8.25) випливає, що

$$
y_n = K_n(x, \gamma) = \int_\gamma^x \frac{K_{n-1}(x, t)}{P_0[K_{n-1}(t, \gamma)]} e^{-\int_\gamma^t \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds} dt, \tag{8.50}
$$

де

$$
P_0[K_{n-1}] = \begin{vmatrix}
K_{n-1} & \dot K_{n-1} & \ldots & \overset{(n-2)}{K}_{n-1} \\
K'_{n-1} & \dot K'_{n-1} & \ldots & \overset{(n-2)}{K'}_{n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
K_{n-1}^{(n-2)} & \dot K_{n-1}^{(n-2)} & \ldots & \overset{(n-2)}{K}{}_{n-1}^{(n-2)}
\end{vmatrix}.
$$

Розглянемо рівняння

$$L_3[y] = y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0, \qquad (8.51)$$

лінійно незалежними розв'язками якого є функції

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2.$$

Поставимо за мету визначити відповідну рівнянню (8.51) фундаментальну функцію $K_3(x,\alpha)$.

Послідовно обчислимо:

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2, \quad W_2'(x) = 2x, \quad \frac{W_2'(x)}{W_2(x)} = \frac{2}{x} = -\tilde{p}_1(x),$$

$$-p_1(x) + \tilde{p}_1(x) = \alpha(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x}, \quad \varphi(x,\gamma) = e^{\int_\gamma^x \frac{ds}{s}} = \frac{x}{\gamma}.$$

Отже

$$K_2(x,\gamma) = \frac{1}{W(\gamma)}\begin{vmatrix} \gamma & \gamma^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\gamma^2}\begin{vmatrix} \gamma & \gamma^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = \frac{x}{\gamma}(x-\gamma),$$

$$P_0[K_2(x,\gamma)] = \begin{vmatrix} K_2(x,\gamma) & \dot{K}_2(x,\gamma) \\ K_2'(x,\gamma) & \dot{K}_2'(x,\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\gamma}(x-\gamma) & -\frac{x^2}{\gamma^2} \\ 2\frac{x}{\gamma} - 1 & -2\frac{x}{\gamma^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{\gamma^2}.$$

То ж, на підставі (8.46)

$$K_3 = y_3 = \frac{x}{\gamma}\int_\gamma^x \left(\frac{x}{s} - 1\right) s\, ds = \frac{1}{2}\frac{x}{\gamma}(x-\gamma)^2,$$

на підставі (8.49)

$$K_3(x,\gamma) = W_2(\gamma)\int_\gamma^x \frac{K_2(x,t)}{W_2(t)} e^{-\int_\gamma^t \frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds} dt =$$

$$= \gamma^2 \int_\gamma^x \frac{\frac{x}{t}(x-t)}{t^2} e^{-\int_\gamma^t -\frac{3}{s}ds} dt = \frac{1}{2}\frac{x}{\gamma}(x-\gamma)^2,$$

на підставі (8.50)

$$K_3(x,\gamma) = \int_\gamma^x \frac{K_2(x,t)}{P_0[K_2(t,\gamma)]} e^{-\int_\gamma^t \frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds} dt = \int_\gamma^x \frac{\frac{x}{\gamma}(x-\gamma)}{\frac{t^2}{\gamma^2}} e^{-\int_\gamma^t -\frac{3}{s}ds} dt = \frac{1}{2}\frac{x}{\gamma}(x-\gamma)^2.$$

Три результати, як і мусило бути, виявились однаковими.

Викладені тут міркування, з одного боку, відтворюють алгоритм побудови загального розв'язку (8.45) лінійного однорідного рівняння (8.31) за $n-1$ відомими функціями $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_{n-1}(x)$, які є окремими розв'язками цього ж рівняння. З іншого боку, через співвідношення (8.46) між фундаментальними функціями $K_n(x,\gamma)$, $K_{n-1}(x,\gamma)$ вони засвідчують існування певної взаємозумовленості між розв'язками рівнянь (8.31), (8.40).

Рівність (8.46) з однаковими підставами можна вважати ознакою **взаємозумовленості** безпосередньо **операторів** $L_{n-1}[y]$ та $L_n[y]$. Через неї можна з'ясувати всі визначальні зв'язки між коефіцієнтами операторів $L_{n-1}[y]$, $L_n[y]$.

Можна довести, що окремий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$L_n[y] = q(x),$$

в якому ліва частина збігається з лівою частиною однорідного рівняння (8.31), а $q(x)$ — неперервна в I функція, що спричиняє початкові умови

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad x_0 \in I,$$

за умови (8.32) і позначень (8.33) можна знайти за формулою

$$y_* = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{s}^{x} K_{n-1}(x,\gamma)\frac{W_{n-1}(s)}{W_{n-1}(\gamma)} e^{-\int\limits_{s}^{\gamma}\frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt} d\gamma\, q(s)\, ds, \quad x_0, x, s \in I.$$

Для цього досить засвідчити, що інтеграл

$$K_n(x,s) = \int\limits_{s}^{x} K_{n-1}(x,\gamma)\frac{W_{n-1}(s)}{W_{n-1}(\gamma)} e^{-\int\limits_{s}^{\gamma}\frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt} d\gamma$$

є фундаментальною функцією. Запишемо цю функцію у вигляді

$$K_n(x,s) = W_{n-1}(s)\, y_n(x,s),$$

де

$$y_n(x,s) = \int\limits_{s}^{x} \frac{K_{n-1}(x,\gamma)}{W_{n-1}(\gamma)} e^{-\int\limits_{s}^{\gamma}\frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt} d\gamma.$$

З попереднього аналізу випливає, що $y_n(x,s)$ при кожному $s \in I$ задовольняє відповідне однорідне рівняння (8.31), і при цьому

$$y_n(s,s) = y_n'(s,s) = \ldots = y_n^{(n-2)}(s,s) = 0, \quad y_n^{(n-1)}(s,s) = \frac{1}{W_{n-1}(s)}.$$

Тому $K_n(x,s)$ також при кожному $s \in I$ задовольняє однорідне рівняння (8.31), і до того ж,

$$K_n(s,s) = W_{n-1}(s)\, y_n(s,s) = 0\,,$$

$$K_n'(s,s) = W_{n-1}(s)\, y_n'(s,s) = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n^{(n-2)}(s,s) = W_{n-1}(s)\, y_n^{(n-2)}(s,s) = 0\,,$$

$$K_n^{(n-1)}(s,s) = W_{n-1}(s)\, y_n^{(n-1)}(s,s) = \frac{W(s)}{W(s)} = 1\,.$$

Таким чином, справді, $K_n(x,s)$ є фундаментальною функцією, відповідною рівнянню $L_n[y] = 0$, а y_* — окремим розв'язком рівняння $L_n[y] = q(x)$.

8.7 Окремий тип взаємозумовленості

Нехай $K_m = K_m(x,\gamma)$ — фундаментальна функція, відповідна деякому лінійному операторові m-го порядку. Сформуємо множину функцій

$$\overset{(\nu)}{K}_m = \frac{\partial^{\nu} K_m(x,\gamma)}{\partial \gamma^{\nu}}, \quad \overset{(\nu+1)}{K}_m = \frac{\partial^{\nu+1} K_m(x,\gamma)}{\partial \gamma^{\nu+1}}, \ \ldots, \ \overset{(m-1)}{K}_m = \frac{\partial^{m-1} K_m(x,\gamma)}{\partial \gamma^{m-1}}$$

$$(0 < \nu \le m-1). \tag{8.52}$$

За будь-якого $0 < \nu \le m-1$ в точці $x = \gamma$ визначник Вронського наведеної множини функцій не дорівнює нулю:

$$W_{m-\nu}(\gamma) \equiv W\left[\overset{(\nu)}{K}_m,\ \overset{(\nu+1)}{K}_m,\ \ldots,\ \overset{(m-1)}{K}_m \right]\Bigg|_{x=\gamma} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overset{(\nu)}{K}_m\big|_{x=\gamma} = 0 & \overset{(\nu+1)}{K}_m\big|_{x=\gamma} = 0 & \ldots & \overset{(m-1)}{K}_m\big|_{x=\gamma} = (-1)^{m-1} \\ \overset{(\nu)}{K}{}_m'\big|_{x=\gamma} = 0 & \overset{(\nu+1)}{K}{}_m'\big|_{x=\gamma} = 0 & \ldots & \overset{(m-1)}{K}{}_m'\big|_{x=\gamma} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \overset{(\nu)}{K}{}_m^{(m-\nu-2)}\Big|_{x=\gamma} = 0 & \overset{(\nu+1)}{K}{}_m^{(m-\nu-2)}\Big|_{x=\gamma} = (-1)^{\nu+1} & \ldots & \overset{(m-1)}{K}{}_m^{(m-\nu-2)}\Big|_{x=\gamma} \\ \overset{(\nu)}{K}{}_m^{(m-\nu-1)}\Big|_{x=\gamma} = (-1)^{\nu} & \overset{(\nu+1)}{K}{}_m^{(m-\nu-1)}\Big|_{x=\gamma} & \ldots & \overset{(m-1)}{K}{}_m^{(m-\nu-1)}\Big|_{x=\gamma} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{(m+1)(m-\nu)} \ne 0\,.$$

Отже функції (8.52) є локально лінійно незалежними і їх можна вважати фундаментальною системою розв'язків деякого диференціального рівняння ($m-\nu$)-го порядку

$$L_{m-\nu}[y] \equiv p_{0(m-\nu)}(x)\, y^{(m-\nu)} + p_{1(m-\nu)}(x)\, y^{(m-\nu-1)} + \ldots + p_{m-\nu(m-\nu)}(x)\, y = 0\,.$$

Відповідною цьому рівнянню фундаментальною за означенням є функція

$$K_{m-\nu}=$$

$$=\frac{1}{W_{m-\nu}\big|_{x=\gamma}}\begin{vmatrix} \overset{(\nu)}{K}_m\big|_{x=\gamma}=0 & \overset{(\nu+1)}{K}_m\big|_{x=\gamma}=0 & \dots & \overset{(m-1)}{K}_m\big|_{x=\gamma}=(-1)^{m-1} \\ \overset{(\nu)}{K'}_m\big|_{x=\gamma}=0 & \overset{(\nu+1)}{K'}_m\big|_{x=\gamma}=0 & \dots & \overset{(m-1)}{K'}_m\big|_{x=\gamma} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \overset{(\nu)}{K}{}_m^{(m-\nu-2)}\big|_{x=\gamma}=0 & \overset{(\nu+1)}{K}{}_m^{(m-\nu-2)}\big|_{x=\gamma}=(-1)^{\nu+1} & \dots & \overset{(m-1)}{K}{}_m^{(m-\nu-2)}\big|_{x=\gamma} \\ \overset{(\nu)}{K}_m & \overset{(\nu+1)}{K}_m & \dots & \overset{(m-1)}{K}_m \end{vmatrix},$$

звідки

$$K_{m-\nu}=(-1)^{\nu}\overset{(\nu)}{K}_m(x,\gamma). \tag{8.53}$$

З (8.29), (8.25), (8.53) випливає, зокрема, що

$$e^{-\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{p_{1(m-\nu)}(s)}{p_{0(m-\nu)}(s)}ds}=\begin{vmatrix} K_{m-\nu} & \dot{K}_{m-\nu} & \dots & \overset{(m-\nu-1)}{K}_{m-\nu} \\ K'_{m-\nu} & \dot{K}'_{m-\nu} & \dots & \overset{(m-\nu-1)}{K'}_{m-\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m-\nu}^{(m-\nu-1)} & \dot{K}_{m-\nu}^{(m-\nu-1)} & \dots & \overset{(m-\nu-1)}{K}{}_{m-\nu}^{(m-\nu-1)} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{\nu(m-\nu)}\begin{vmatrix} \overset{(\nu)}{K}_m & \overset{(\nu+1)}{K}_m & \dots & \overset{(m-1)}{K}_m \\ \overset{(\nu)}{K'}_m & \overset{(\nu+1)}{K'}_m & \dots & \overset{(m-1)}{K'}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{(\nu)}{K}{}_m^{(m-\nu-1)} & \overset{(\nu+1)}{K}{}_m^{(m-\nu-1)} & \dots & \overset{(m-1)}{K}{}_m^{(m-\nu-1)} \end{vmatrix}. \tag{8.54}$$

Звернемося знову до рівняння (8.50) ($m=3$).

В цьому випадку

$$K_3(x,\gamma)=\frac{1}{2}\frac{x}{\gamma}(x-\gamma)^2\,,\quad K_1=\ddot{K}_3=\frac{x^3}{\gamma^3}\quad(\nu=m-1=2)\,,$$

$$K_2=\dot{K}_3=\frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{\gamma^2}-1\right)\quad(\nu=m-1=1)\,.$$

Укладемо рівняння

$$\begin{vmatrix} K_1(x,\gamma) & y \\ K_1'(x,\gamma) & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x^3}{\gamma^3} & y \\ 3\dfrac{x^2}{\gamma^3} & y' \end{vmatrix} = \frac{x^3}{\gamma^3}\left(y' - \frac{3}{x}y\right) = 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} K_2(x,\gamma) & \dot{K}_2(x,\gamma) & y \\ K_2'(x,\gamma) & \dot{K}_2'(x,\gamma) & y' \\ K_2''(x,\gamma) & \dot{K}_2''(x,\gamma) & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x^2}{\gamma^2}-1\right) & -\dfrac{x^3}{\gamma^3} & y \\ \dfrac{1}{2}\left(3\dfrac{x^2}{\gamma^2}-1\right) & -3\dfrac{x^2}{\gamma^3} & y' \\ 3\dfrac{x}{\gamma^2} & -6\dfrac{x}{\gamma^3} & y'' \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^3}{\gamma^3}\left(y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y\right) = 0\,.$$

Таким чином, лінійні оператори

$$L_3[y] = y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y\,, \quad L_2[y] = y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y\,, \quad L_1[y] = y' - \frac{3}{x}y$$

є взаємозумовленими; звернемо увагу також на те, що

$$L_3[y] = L_2'[y] = L_1''[y] \text{ і } p_{13} = p_{12} = p_{11} = -3/x\,.$$

Нехай взаємозумовленими є диференціальний оператор першого порядку

$$L_1[y] = p_{01}(x)y' + p_{11}(x)y$$

та диференціальний оператор другого порядку

$$L_2[y] = p_{02}(x)y'' + p_{12}(x)y' + p_{22}(x)y\,.$$

З (8.54) при $m = 2$, $\nu = 1$ випливає, що відповідною першому з операторів фундаментальною є експонентна функція

$$K_1 = -\dot{K}_2 = \exp\left(-\int_\gamma^x \frac{p_{11}(s)}{p_{01}(s)}\,ds\right)$$

(див. табл. 2, приклад 4). Другому ж, відповідатиме фундаментальна функція

$$K_2 = -\int_x^\gamma \exp\left(-\int_t^x \frac{p_{11}(s)}{p_{01}(s)}\,ds\right)dt$$

(тут враховано (8.20)).

На підставі (8.20) безпосередньо можна з'ясувати, що

$$\frac{p_{12}(x)}{p_{02}(x)} \equiv \frac{p_{11}(x)}{p_{01}(x)}\ .$$

До того ж, щоб $K_2(x,\gamma)$ задовольняла рівняння $L_2[y]=0$, повинна дотримуватись умова

$$\frac{p_{22}(x)}{p_{02}(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{p_{12}(x)}{p_{02}(x)}\right).$$

Таким чином, якщо рівняння другого порядку $L_2[y]=0$ "зумовлене" рівнянням першого порядку $L_1[y]=0$, то справджуються рівності

$$\frac{p_{12}(x)}{p_{02}(x)} = \frac{p_{11}(x)}{p_{01}(x)}\ , \qquad \frac{p_{22}(x)}{p_{02}(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{p_{12}(x)}{p_{02}(x)}\right)$$

і відповідна цьому рівнянню фундаментальна функція відображається квадратурно:

$$K_2 = \int\limits_{\gamma}^{x} e^{-\int\limits_{t}^{x}\frac{p_{11}(s)}{p_{01}(s)}ds}\, dt\ . \tag{8.55}$$

В такому разі рівняння $L_2[y]=0$ розв'язується в квадратурах. При цьому

$$\frac{1}{p_{02}} L_2[y] = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p_{01}} L_1[y]\right).$$

Остання особливість диференціального оператора суттєво спрощує розв'язування рівняння. Наприклад, рівняння $y'' - xy' - y = 0$ рівносильне рівнянню $(y' - xy)' = 0$. Звідси $y' - xy = c_1$ і тому відповідно до (8.22)

$$y = c_0 K_1(x,\gamma) - c_1\int\limits_{\gamma}^{x} K_1(x,s)\,ds = e^{x^2/2}\left(c_0 e^{-\gamma^2/2} - c_1\int\limits_{\gamma}^{x} e^{-s^2/2}\,ds\right).$$

Такого самого результату дійдемо, використовуючи функцію (8.55) і вираз

$$y = -c_1 K_2 - c_0 \dot{K}_2\ .$$

Розглянемо рівняння другого порядку $y'' + 2y' + y = 0$, якому відповідає фундаментальна функція $K_2 = (x-\gamma)e^{-(x-\gamma)}$. Вважатимемо похідну функцію $\dot{K}_2 = (x-\gamma-1)e^{-(x-\gamma)}$ розв'язком деякого рівняння першого порядку $y' + \varphi\, y = 0$. А це можливо, коли $\varphi = \varphi(x,\gamma) = (x-\gamma-2)/(x-\gamma-1)$. Отже коефіцієнт зумовленого рівняння нижчого порядку стає залежним від параметра γ. При цьому не дотримуються наведені щойно співвідношення між коефіцієнтами.

Звернемося тепер до рівняння

$$y' + \frac{x-\alpha-2}{x-\alpha-1} y = 0 .$$

Йому відповідає фундаментальна функція

$$K_1 = e^{x^{\int\limits^{\gamma} \frac{s-\alpha-2}{s-\alpha-1} ds}} = \frac{|x-\alpha-1|}{|\gamma-\alpha-1|} e^{-(x-\gamma)}$$

(вважатимемо, що $\gamma-\alpha-1 \neq 0$). Зрештою, за фундаментальну можна взяти і функцію

$$K_1 = \frac{x-\alpha-1}{\gamma-\alpha-1} e^{-(x-\gamma)} .$$

Якщо $\alpha=\gamma$, то

$$K_1 = -(x-\gamma-1)\, e^{-(x-\gamma)}$$

і відповідно до (8.55)

$$K_2 = \int\limits_{\gamma}^{x} K_1(x,t)\,dt = -\int\limits_{\gamma}^{x} (x-t-1)\, e^{-(x-t)}\, dt = (x-\gamma)\, e^{-(x-\gamma)} ,$$

як і слід було сподіватись. Але якщо $\alpha \neq \gamma$, то

$$K_2 = \int\limits_{\gamma}^{x} K_1(x,t)\,dt = (x-\alpha-1)\, e^{-(x-\alpha-1)} \int\limits_{\gamma-\alpha-1}^{x-\alpha-1} \frac{e^s}{s} ds =$$

$$= (x-\alpha-1)\, e^{-(x-\alpha-1)} \left(\ln|s| + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2\cdot 2!} + \frac{s^3}{3\cdot 3!} + \ldots + \frac{s^n}{n\cdot n!} + \ldots \right)\Bigg|_{s=\gamma-\alpha-1}^{s=x-\alpha-1} ,$$

$$s^2 < \infty .$$

В цьому випадку рівняння першого порядку зумовлює нове рівняння другого порядку.

Покладемо, що $p_{11}/p_{01} = \varphi(x,\gamma)$. Тоді в загальному випадку для рівняння другого порядку фундаментальну функцію можна подати у вигляді

$$K_2 = \int\limits_{\gamma}^{x} e^{t^{\int\limits^{x} \varphi(s,t)\,ds}}\, dt .$$

Відтворюючи за нею власне відповідне рівняння другого порядку (вже неодноразово відтворюваним способом) знайдемо співвідношення

$$\frac{p_{12}}{p_{02}} = -\frac{\int\limits_{\gamma}^{x}\left[\left(\varphi^2(x,t)-\varphi^2(x,\gamma)\right)+\left(\varphi'(x,t)-\varphi'(x,\gamma)\right)\right]e^{\int\limits_t^x \varphi(s,t)\,ds}\,dt+\varphi(x,x)}{\int\limits_{\gamma}^{x}\left(\varphi(x,t)-\varphi(x,\gamma)\right)e^{\int\limits_t^x \varphi(s,t)\,ds}\,dt+1},$$

$$\frac{p_{22}}{p_{02}} = \frac{\int\limits_{\gamma}^{x}\left[\varphi(x,\gamma)\left(\varphi^2(x,t)+\varphi'(x,t)\right)-\varphi(x,t)\left(\varphi^2(x,\gamma)+\varphi'(x,\gamma)\right)\right]e^{\int\limits_t^x \varphi(s,t)\,ds}\,dt}{\int\limits_{\gamma}^{x}\left(\varphi(x,t)-\varphi(x,\gamma)\right)e^{\int\limits_t^x \varphi(s,t)\,ds}\,dt+1} -$$

$$-\frac{\varphi^2(x,\gamma)+\varphi'(x,\gamma)-\varphi(x,\gamma)\varphi(x,x)}{\int\limits_{\gamma}^{x}\left(\varphi(x,t)-\varphi(x,\gamma)\right)e^{\int\limits_t^x \varphi(s,t)\,ds}\,dt+1}.$$

Водночас можна побудувати і співвідношення

$$p_{02}(x)\,(\varphi^2(x,\gamma)+\varphi'(x,\gamma)) - p_{12}(x)\,\varphi(x,\gamma) + p_{22}(x) = 0\,,$$

яке відносно $\varphi(x,\gamma)$ є **рівнянням Ріккаті**.

На підставі (8.53), (8.20), (1.19)

$$K_m = \frac{(-1)^{\nu}}{(\nu-1)!}\int\limits_x^{\gamma}(\gamma-t)^{\nu-1}K_{m-\nu}(x,t)\,dt\,.$$

Отже при $\nu = m-1$

$$K_{m-\nu} = K_1 = e^{\int\limits_{\gamma}^{x}\varphi(s)ds}\,,\ \text{а тому}\ K_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-2)!}\int\limits_x^{\gamma}(\gamma-t)^{m-2}e^{\int\limits_t^x \varphi(s)ds}\,dt\,,$$

де $\varphi(s) = -p_{11}(s)/p_{01}(s)$. Крім того, оскільки

$$\overset{(m-\nu)}{K}_{m-\nu} = \frac{\partial^{m-\nu}}{\partial\gamma^{m-\nu}}K_{m-\nu} = (-1)^{\nu}\frac{\partial^{m-\nu}}{\partial\gamma^{m-\nu}}\overset{(\nu)}{K}_m = (-1)^{\nu}\overset{(m)}{K}_m\,,$$

то відповідно до (8.20)

$$\frac{p_{1,m-\nu}(x)}{p_{0,m-\nu}(x)} = \frac{p_{1,m}(x)}{p_{0,m}(x)} = -\varphi(x)\,.$$

Таким чином, рівнянню m-го порядку можна поставити у відповідність систему функцій

$$\overset{(r)}{K}_m=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-r-2)!}\int\limits_x^{\gamma}(\gamma-t)^{m-r-2}e^{\int\limits_t^x \varphi(s)ds}dt\,,\ \ r=\overline{0,m-2}\,;$$

$$\overset{(m-1)}{K}_m=(-1)^{m-1}e^{\int\limits_\gamma^x \varphi(s)ds}\,,$$

які повинні бути його розв’язками.

Звернемося до функцій

$$\overset{(r)}{k}_m=(-1)^{m-1}(m-r-2)!\overset{(r)}{K}_m\,,\quad \overset{(r)}{k'_m}=(-1)^{m-1}(m-r-2)!\overset{(r)}{K'_m}=\varphi(x)\overset{(r)}{k}_m-(\gamma-x)^{m-r-2}\,,$$

$$r=\overline{0,m-2}\,;$$

$$\overset{(m-1)}{k}_m=(-1)^{m-1}\overset{(m-1)}{K}_m\,,\quad \overset{(m-1)}{k'_m}=(-1)^{m-1}\overset{(m-1)}{K'_m}=\varphi(x)\overset{(m-1)}{k}_m\,.$$

Вдаючись до формули (1.15), укладемо матричне рівняння

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
C_1^1\varphi & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
C_2^1\varphi' & C_2^2\varphi & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
C_{m-2}^1\varphi^{(m-3)} & C_{m-2}^2\varphi^{(m-4)} & C_{m-2}^3\varphi^{(m-5)} & \ldots & C_{m-2}^{m-2}\varphi & -1 & 0\\
C_{m-1}^1\varphi^{(m-2)} & C_{m-1}^2\varphi^{(m-3)} & C_{m-1}^3\varphi^{(m-4)} & \ldots & C_{m-1}^{m-2}\varphi' & C_{m-1}^{m-1}\varphi & -1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix}\overset{(r)}{k'_m}\\ \overset{(r)}{k''_m}\\ \overset{(r)}{k'''_m}\\ \vdots\\ \overset{(r)}{k}{}_m^{(m-1)}\\ \overset{(r)}{k}{}_m^{(m)}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}
(\gamma-x)^{m-r-2}-\varphi\overset{(r)}{k}_m\\
\dfrac{\partial(\gamma-x)^{m-r-2}}{\partial x}-\varphi'\overset{(r)}{k}_m\\
\dfrac{\partial^2(\gamma-x)^{m-r-2}}{\partial x^2}-\varphi''\overset{(r)}{k}_m\\
\vdots\\
\dfrac{\partial^{m-2}(\gamma-x)^{m-r-2}}{\partial x^{m-2}}-\varphi^{(m-2)}\overset{(r)}{k}_m\\
\dfrac{\partial^{m-1}(\gamma-x)^{m-r-2}}{\partial x^{m-1}}-\varphi^{(m-1)}\overset{(r)}{k}_m
\end{bmatrix}$$

і визначимо величини $\overset{(r)}{k}{}_m^{(\nu)}$ через величини $\overset{(r)}{k}_m$.

Позначимо через Δ_{ij} $(i, j = \overline{1, m})$ мінори визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ C_1^1\varphi & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ C_2^1\varphi' & C_2^2\varphi & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m-2}^1\varphi^{(m-3)} & C_{m-2}^2\varphi^{(m-4)} & C_{m-2}^3\varphi^{(m-5)} & \dots & C_{m-2}^{m-2}\varphi & -1 & 0 \\ C_{m-1}^1\varphi^{(m-2)} & C_{m-1}^2\varphi^{(m-3)} & C_{m-1}^3\varphi^{(m-4)} & \dots & C_{m-1}^{m-2}\varphi' & C_{m-1}^{m-1}\varphi & -1 \end{vmatrix} = (-1)^m .$$

Тоді розв'язок матричного рівняння можна буде подати у вигляді

$$\overset{(r)}{k_m^{(\nu)}} = (-1)^m \left(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{\nu+i} \Delta_{i\nu} \frac{\partial^{i-1}(\gamma - x)^{m-r-2}}{\partial x^{i-1}} + \overset{(r)}{k_m} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{\nu+i+1} \Delta_{i\nu} \varphi^{(i-1)} \right),$$

$$r = \overline{0, m-2}, \quad \nu = \overline{1, m};$$

$$\overset{(m-1)}{k_m^{(\nu)}} = (-1)^m \overset{(m-1)}{k_m} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{\nu+i+1} \Delta_{i\nu} \varphi^{(i-1)}, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

За позначень

$$(-1)^{m+\nu} \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \Delta_{i\nu} \frac{\partial^{i-1}(\gamma - x)^{m-r-2}}{\partial x^{i-1}} = a_{r\nu}, \quad r = \overline{0, m-2}, \quad \nu = \overline{1, m};$$

$$(-1)^{m+\nu+1} \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \Delta_{i\nu} \varphi^{(i-1)} = b_\nu, \quad \nu = \overline{1, m}$$

останні вирази набувають вигляду

$$\overset{(r)}{k_m^{(\nu)}} = a_{r,\nu} + b_\nu \overset{(r)}{k_m}, \; r = \overline{0, m-2}, \; \nu = \overline{1, m}; \qquad \overset{(m-1)}{k_m^{(\nu)}} = b_\nu \overset{(m-1)}{k_m}, \; \nu = \overline{1, m}.$$

Функціям $\overset{(r)}{K_m}$, $r = \overline{0, m-1}$, при $\overset{(m-1)}{k_m} \neq 0$ відповідатиме диференціальне рівняння m-го порядку (див. (8.24))

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & y \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{m-2,1} & b_1 & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0m} & a_{1m} & \dots & a_{m-2,m} & b_m & y^{(m)} \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкладаючи визначник в останньому рівнянні у суму визначників за доданками кожного стовпчика та враховуючи, що визначники з пропорційними стовпцями дорівнюють нулю, матимемо:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & y \\ \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{m-1,1} & \Delta_{m1}\varphi^{(m-1)} & y' \\ -\Delta_{12} & -\Delta_{22} & \dots & -\Delta_{m-1,2} & -\Delta_{m2}\varphi^{(m-1)} & y'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{j-1}\Delta_{1j} & (-1)^{j-1}\Delta_{2j} & \dots & (-1)^{j-1}\Delta_{m-1,j} & (-1)^{j-1}\Delta_{mj}\varphi^{(m-1)} & y^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{m-2}\Delta_{1,m-1} & (-1)^{m-2}\Delta_{2,m-1} & \dots & (-1)^{m-2}\Delta_{m-1,m-1} & (-1)^{m-2}\Delta_{mm}\varphi^{(m-1)} & y^{(m-1)} \\ (-1)^{m-1}\Delta_{1m} & (-1)^{m-1}\Delta_{2m} & \dots & (-1)^{m-1}\Delta_{m-1,m} & (-1)^{m-1}\Delta_{mm}\varphi^{(m-1)} & y^{(m)} \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & y \\ \Delta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & y' \\ \Delta_{12} & \Delta_0 & \dots & 0 & 0 & -y'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{1j} & \Delta_{2j} & \dots & 0 & 0 & (-1)^{j-1}y^{(j)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{1,m-1} & \Delta_{2,m-1} & \dots & \Delta_0 & 0 & (-1)^{m-2}y^{(m-1)} \\ \Delta_{1m} & \Delta_{2m} & \dots & \Delta_{m-1,m} & \Delta_0\,\varphi^{(m-1)} & (-1)^{m-1}y^{(m)} \end{vmatrix} = 0\,;$$

тут

$$\Delta_0 = \Delta_{11} = \Delta_{22} = \dots = \Delta_{mm} = (-1)^{m-1},$$

$$\Delta_{\mu+\nu,\mu} = 0 \quad (\mu = \overline{1,m}; \quad \nu = \overline{1,m-\mu}).$$

Звідси випливає, що коефіцієнти рівняння m-го порядку визначаються алгебрично через функцію $\varphi(x)$ та її похідні $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, …, $\varphi^{(m-1)}(x)$. Зокрема, перший, другий та останній члени лівої частини рівняння мають вигляд $(-1)^{m-1}y^{(m)}$, $(-1)^{m-2}C_{m-1}^{m-1}\varphi\, y^{(m-1)}$ та $(-1)^{m-2}\varphi^{(m-1)}y$.

На підставі (1.13) шукане рівняння можна записати і у вигляді

$$\begin{vmatrix} \Delta_0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^0 y' \\ \Delta_{12} & \Delta_0 & \dots & 0 & (-1)^1 y'' \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \dots & 0 & (-1)^2 y''' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{1j} & \Delta_{2j} & \dots & 0 & (-1)^{j-1}y^{(j)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{1,m-1} & \Delta_{2,m-1} & \dots & \Delta_0 & (-1)^{m-2}y^{(m-1)} \\ \Delta_{1m} & \Delta_{2m} & \dots & \Delta_{m-1,m} & (-1)^{m-1}\left(y^{(m)} - \varphi^{(m-1)}y\right) \end{vmatrix} = 0\,.$$

І нарешті, зважаючи на те, що

$$\Delta_{\mu\nu} = (-1)^{\mu-1}\sum_{i=\mu}^{m-1}(-1)^i \alpha_{i\mu}\Delta_{i+1,\nu} \;\; (\alpha_{i\mu} = C_i^{\mu}\varphi^{(i-1)}),$$

матимемо рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^0 y' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & (-1)^1 y'' \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^2 y''' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & (-1)^{m-2} y^{(m-1)} \\ (-1)^0 C_{m-1}^1 \varphi^{(m-2)} & (-1)^1 C_{m-1}^2 \varphi^{(m-3)} & \dots & (-1)^{m-1} C_{m-1}^{m-1}\varphi & (-1)^{m-1}(y^{(m)} - \varphi^{(m-1)} y) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{d^{m-1}}{d\,x^{m-1}}\left(y' - \varphi\, y\right) = 0 \,.$$

Розглянемо приклад, коли $m = 3$. Послідовно знайдемо:

$$\ddot{K}_3 = e^{\int_\gamma^x \varphi ds}, \quad \ddot{K}_3' = \varphi\ddot{K}_3, \quad \ddot{K}_3'' = (\varphi' + \varphi^2)\ddot{K}_3, \quad \ddot{K}_3''' = (\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3)\ddot{K}_3 \,;$$

$$\dot{K}_3 = \int_x^\gamma e^{\int_t^x \varphi ds} dt\,, \quad \dot{K}_3' = \varphi\dot{K}_3 - 1\,, \quad \dot{K}_3'' = (\varphi' + \varphi^2)\dot{K}_3 - \varphi\,,$$

$$\dot{K}_3''' = (\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3)\dot{K}_3 - (2\varphi' + \varphi^2)\,;$$

$$K_3 = \int_x^\gamma (\gamma - t)\, e^{\int_t^x \varphi ds} dt\,, \quad K_3' = \varphi K_3 + (x - \gamma)\,, \quad K_3'' = (\varphi' + \varphi^2)K_3 + \varphi\,(x - \gamma) + 1\,,$$

$$K_3''' = (\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3)K_3 + (2\varphi' + \varphi^2)(x - \gamma) + \varphi\,.$$

Відтворимо за функціями K_3, $\dot{K}_3$, $\ddot{K}_3$ диференціальне рівняння:

$$\begin{vmatrix} K_3 & \dot{K}_3 & \ddot{K}_3 & y \\ K_3' & \dot{K}_3' & \ddot{K}_3' & y' \\ K_3'' & \dot{K}_3'' & \ddot{K}_3'' & y'' \\ K_3''' & \dot{K}_3''' & \ddot{K}_3''' & y''' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K_3 & \dot{K}_3 & \ddot{K}_3 & y \\ \varphi K_3 + (x-\gamma) & \varphi\dot{K}_3 - 1 & \varphi\ddot{K}_3 & y' \\ (\varphi' + \varphi^2)K_3 + \varphi(x-\gamma) + 1 & (\varphi' + \varphi^2)\dot{K}_3 - \varphi & (\varphi' + \varphi^2)\ddot{K}_3 & y'' \\ \begin{matrix}(\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3)K_3 + \\ + (2\varphi' + \varphi^2)(x-\gamma) + \varphi\end{matrix} & \begin{matrix}(\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3)\dot{K}_3 - \\ - (2\varphi' + \varphi^2)\end{matrix} & (\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3)\ddot{K}_3 & y''' \end{vmatrix} = 0\,.$$

Покладаючи $\ddot{K}_3 \neq 0$, це рівняння можна звести до вигляду

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & \varphi & y' \\ 1 & \varphi & \varphi' + \varphi^2 & y'' \\ \varphi & 2\varphi' + \varphi^2 & \varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3 & y''' \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$\frac{p_1}{p_0} = -\varphi, \quad \frac{p_2}{p_0} = -2\varphi', \quad \frac{p_3}{p_0} = -\varphi''.$$

8.8 Фундаментальна функція і нормальна система розв'язків рівняння

Читатимемо рівняння (8.8) так:

$$z_n(x,\gamma) = K(x,\gamma),$$

$$z_{n-1}(x,\gamma) = \frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x,\gamma) - \frac{\partial z_n(x,\gamma)}{\partial\gamma},$$

$$z_{n-2}(x,\gamma) = \frac{p_2(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x,\gamma) - \frac{\partial z_{n-1}(x,\gamma)}{\partial\gamma}, \ \ldots,$$

$$z_j(x,\gamma) = \frac{p_{n-j}(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x,\gamma) - \frac{\partial z_{j+1}(x,\gamma)}{\partial\gamma}, \ \ldots,$$

$$z_1(x,\gamma) = \frac{p_{n-1}(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x,\gamma) - \frac{\partial z_2(x,\gamma)}{\partial\gamma}, \tag{8.56}$$

$$\frac{\partial z_1(x,\gamma)}{\partial\gamma} - \frac{p_n(\gamma)}{p_0(\gamma)} z_n(x,\gamma) = 0. \tag{8.57}$$

Перейменовуючи змінні за правилом $z_i = Y_i$ ($i = \overline{1, n-1}$), $z_n = Y_n = K$, матимемо:

$$Y_i = \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial\gamma^j}\left(\frac{p_{n-i-j}(\gamma)}{p_0(\gamma)} K(x,\gamma)\right), \ i = \overline{1, n-1}; \quad Y_n = K(x,\gamma). \tag{8.58}$$

Функції $Y_i = Y_i(x,\gamma)$ разом з фундаментальною функцією $Y_n = K(x,\gamma)$ складають **нормальну фундаментальну систему розв'язків** однорідного рівняння $L_n[y] = 0$, тобто систему розв'язків, що задовольняють умови (4.58) (чи (4.59)). Зокрема, у випадку рівняння третього порядку $L_3[y]=0$ вирази (8.58) набувають вигляду

$$Y_1=\frac{p_2(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)\right)+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}K(x,\gamma),$$

$$Y_2=\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)-\frac{\partial}{\partial\gamma}K(x,\gamma),\qquad Y_3=K(x,\gamma).$$

Звернемося, наприклад, до рівняння

$$x^2(2x-1)y'''+x(4x-3)y''-2xy'+2y=0. \tag{8.59}$$

Позначимо:

$$w=\begin{vmatrix}\gamma & \gamma^{-1} & \gamma\ln|\gamma|+1\\ 1 & -\gamma^{-2} & \ln|\gamma|+1\\ 0 & 2\gamma^{-3} & \gamma^{-1}\end{vmatrix}=-4\gamma^{-2}+2\gamma^{-3},\quad \frac{\partial w}{\partial\gamma}=\dot w=8\gamma^{-3}-6\gamma^{-4},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\gamma^2}=\ddot w=-24\left(\gamma^{-4}-\gamma^{-5}\right);$$

$$k=\begin{vmatrix}\gamma & \gamma^{-1} & \gamma\ln|\gamma|+1\\ 1 & -\gamma^{-2} & \ln|\gamma|+1\\ x & x^{-1} & x\ln|x|+1\end{vmatrix},\quad \frac{\partial k}{\partial\gamma}=\dot k=\begin{vmatrix}\gamma & \gamma^{-1} & \gamma\ln|\gamma|+1\\ 0 & 2\gamma^{-3} & \gamma^{-1}\\ x & x^{-1} & x\ln|x|+1\end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial\gamma^2}=\ddot k=\begin{vmatrix}1 & -\gamma^{-2} & \ln|\gamma|+1\\ 0 & 2\gamma^{-3} & \gamma^{-1}\\ x & x^{-1} & x\ln|x|+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\gamma & \gamma^{-1} & \gamma\ln|\gamma|+1\\ 0 & -6\gamma^{-4} & -\gamma^{-2}\\ x & x^{-1} & x\ln|x|+1\end{vmatrix};$$

$$K=\frac{k}{w},\quad \dot K=\frac{\dot k}{w}-\frac{k}{w}\frac{\dot w}{w},\quad \ddot K=\frac{\ddot k}{w}-2\frac{\dot k}{w}\frac{\dot w}{w}+2\frac{k}{w}\left(\frac{\dot w}{w}\right)^2-\frac{k}{w}\frac{\ddot w}{w},$$

де K — фундаментальна функція; $x,\gamma\in I=(-\infty,0)\cup(0,1/2)\cup(1/2,+\infty)$ ($(-\infty,0)$, $(0,1/2)$, $(1/2,+\infty)$ — інтервали неперервності коефіцієнтів рівняння (8.59)). В даному випадку нормальну фундаментальну систему розв'язків складатимуть функції

$$Y_1=\left[\frac{p_2(\gamma)}{p_0(\gamma)}-\frac{d}{d\gamma}\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}+\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}\frac{\dot w}{w}+2\left(\frac{\dot w}{w}\right)^2-\frac{\ddot w}{w}\right]\frac{k}{w}-\left(\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}+2\frac{\dot w}{w}\right)\frac{\dot k}{w}+\frac{\ddot k}{w}=$$

$$=-\frac{2}{\gamma(2\gamma-1)}\frac{k}{w}+\frac{4\gamma-3}{\gamma(2\gamma-1)}\frac{\dot k}{w}+\frac{\ddot k}{w},\quad Y_2=\left(\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}+\frac{\dot w}{w}\right)\frac{k}{w}-\frac{\dot k}{w}=-\frac{\dot k}{w},\quad Y_3=\frac{k}{w}.$$

Справді, легко переконатись, що

$$Y_1|_{x=\gamma}=1\,,\quad Y_1'|_{x=\gamma}=-\frac{2}{\gamma(2\gamma-1)}\frac{k'|_{x=\gamma}}{w}+\frac{4\gamma-3}{\gamma(2\gamma-1)}\frac{\dot{k}'|_{x=\gamma}}{w}+\frac{\ddot{k}'|_{x=\gamma}}{w}=0\,,$$

$$Y_1''|_{x=\gamma}=-\frac{2}{\gamma(2\gamma-1)}\frac{k''|_{x=\gamma}}{w}+\frac{4\gamma-3}{\gamma(2\gamma-1)}\frac{\dot{k}''|_{x=\gamma}}{w}+\frac{\ddot{k}''|_{x=\gamma}}{w}=0\,;$$

$$Y_2|_{x=\gamma}=-\frac{\dot{k}|_{x=\gamma}}{w}=0\,,\quad Y_2'|_{x=\gamma}=-\frac{\dot{k}'|_{x=\gamma}}{w}=1\,,\quad Y_2''|_{x=\gamma}=-\frac{\dot{k}''|_{x=\gamma}}{w}=0\,;$$

$$Y_2|_{x=\gamma}=\frac{k|_{x=\gamma}}{w}=0\,,\quad Y_2'|_{x=\gamma}=-\frac{k'|_{x=\gamma}}{w}=0\,,\quad Y_2''|_{x=\gamma}=-\frac{k''|_{x=\gamma}}{w}=1\,.$$

8.9 Спряжені (приєднані) фундаментальні функції

Повернемося до рівняння (6.11),

$$l[z]\equiv p_n(x)z-\big(p_{n-1}(x)z\big)'+\big(p_{n-2}(x)z\big)''-\ldots+(-1)^{n-1}\big(p_1(x)z\big)^{(n-1)}+$$
$$+(-1)^n\big(p_0(x)z\big)^{(n)}=0\,,$$

що є приєднаним до рівняння (6.12)

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0\,.$$

Нехай відомою є фундаментальна функція $K(x,\gamma)$ для рівняння $L[y]=0$. Спробуємо через неї віднайти фундаментальну функцію $\tilde{K}(x,\gamma)$ для рівняння $l[z]=0$.

Фундаментальну систему розв'язків рівняння $L[y]=0$ складають (відповідно до викладеного в 8.4) функції

$$K(x,\gamma),\ \dot{K}=\frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial\gamma},\ldots,\ \overset{(n-1)}{K}=\frac{\partial^{n-1}K(x,\gamma)}{\partial\gamma^{n-1}}\,,$$

а тому (відповідно до викладеного в 6.4) фундаментальну систему (6.17) розв'язків спряженого рівняння $l[z]=0$ можна подати як систему функцій

$$z_1=(-1)^{n+1}\frac{1}{p_0}\frac{W\left[\dot{K},\ddot{K},\ldots,\overset{(n-1)}{K}\right]}{W\left[K,\dot{K},\ddot{K},\ldots,\overset{(n-1)}{K}\right]}=z_1(x,\gamma)\,,\ \ldots,$$

$$z_i=(-1)^{n+i}\frac{1}{p_0}\frac{W\left[\dot{K},\ddot{K},\ldots,\overset{(i-2)}{K},\overset{(i)}{K},\ldots,\overset{(n-1)}{K}\right]}{W\left[K,\dot{K},\ddot{K},\ldots,\overset{(n-1)}{K}\right]}=z_i(x,\gamma)\,,\ \ldots,$$

$$z_n = \frac{1}{p_0} \frac{W\left[K, \dot{K}, \ldots, \overset{(n-2)}{K}\right]}{W\left[K, \dot{K}, \ddot{K}, \ldots, \overset{(n-1)}{K}\right]} = z_n(x, \gamma). \qquad (8.60)$$

З (8.60), зокрема, випливає рівність

$$\frac{z_{n-1}}{z_n} = -\frac{\partial}{\partial \gamma} \ln W\left[K, \dot{K}, \ldots, \overset{(n-2)}{K}\right].$$

За означенням (8.13) фундаментальною для рівняння $l[z] = 0$ є функція

$$\tilde{K}(x, \gamma) = \frac{1}{W[z_1(\gamma,\gamma), z_2(\gamma,\gamma), \ldots, z_n(\gamma,\gamma)]} \begin{vmatrix} z_1(\gamma,\gamma) & z_2(\gamma,\gamma) & \ldots & z_n(\gamma,\gamma) \\ z_1'(\gamma,\gamma) & z_2'(\gamma,\gamma) & \ldots & z_n'(\gamma,\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{(n-2)}(\gamma,\gamma) & z_2^{(n-2)}(\gamma,\gamma) & \ldots & z_n^{(n-2)}(\gamma,\gamma) \\ z_1(x,\gamma) & z_2(x,\gamma) & \ldots & z_n(x,\gamma) \end{vmatrix},$$

тут використано позначення (8.60).

Беручи до уваги (6.22) і те, що

$$W\left[K, \dot{K}, \ddot{K}, \ldots, \overset{(n-1)}{K}\right]\Big|_{x=\gamma} = 1$$

(див. 8.4), матимемо:

$$W[z_1, z_2, \ldots, z_n]\big|_{x=\gamma} = \frac{1}{p_0^n(\gamma)}$$

Тому, зважаючи на (6.21) і (8.20), фундаментальну функцію для рівняння $l[z] = 0$ є можливість записати у вигляді

$$\tilde{K}(x, \gamma) = p_0^n(\gamma) \begin{vmatrix} \frac{1}{p_0(\gamma)} & & & & & \\ z_1'(\gamma,\gamma) & \frac{1}{p_0(\gamma)} & & & 0 & \\ z_1''(\gamma,\gamma) & z_2''(\gamma,\gamma) & \frac{1}{p_0(\gamma)} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ z_1^{(n-2)}(\gamma,\gamma) & z_2^{(n-2)}(\gamma,\gamma) & z_3^{(n-2)}(\gamma,\gamma) & \ldots & \frac{1}{p_0(\gamma)} & \\ z_1(x,\gamma) & z_2(x,\gamma) & z_3(x,\gamma) & \ldots & z_{n-1}(x,\gamma) & z_n(x,\gamma) \end{vmatrix}.$$

Таким чином,

$$\widetilde{K}(x,\gamma)=p_0(\gamma)z_n(x,\gamma)=\frac{p_0(\gamma)}{p_0(x)}\frac{W\left[K(x,\gamma),\dot{K}(x,\gamma),\ldots,\overset{(n-2)}{K}(x,\gamma)\right]}{W\left[K(x,\gamma),\dot{K}(x,\gamma),\ddot{K}(x,\gamma),\ldots,\overset{(n-1)}{K}(x,\gamma)\right]}. \quad (8.61)$$

Фундаментальну функцію (8.61) називатимемо **приєднаною** до фундаментальної функції $K(x,\gamma)$.

Беручи до уваги позначення (8.25) і формулу (8.28), останній вираз можна подати у вигляді

$$\widetilde{K}(x,\gamma)=W\left[K(x,\gamma),\dot{K}(x,\gamma),\ldots,\overset{(n-2)}{K}(x,\gamma)\right]\frac{p_0(\gamma)}{p_0(x)}e^{\int_\gamma^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}. \quad (8.62)$$

Якщо справджується тотожність $L[\cdot]\equiv l[\cdot]$, тобто диференціальні рівняння $L[y]=0$ і $l[z]=0$ є самоспряженими, то обов'язково справджується і рівність $p_1(x)=p_0'(x)$, а тому (8.62) набуває вигляду

$$\widetilde{K}(x,\gamma)=W\left[K(x,\gamma),\dot{K}(x,\gamma),\ldots,\overset{(n-2)}{K}(x,\gamma)\right]. \quad (8.63)$$

Враховуючи (8.20), перетворимо вираз (8.61) так:

$$\widetilde{K}(x,\gamma)=\frac{p_0(\gamma)}{p_0(x)}\frac{\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K}(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K'}(x,\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(n-2)}(x,\gamma) & \dot{K}^{(n-2)}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n-2)}}(x,\gamma) \end{vmatrix}}{W\left[K(x,\gamma),\dot{K}(x,\gamma),\ddot{K}(x,\gamma),\ldots,\overset{(n-1)}{K}(x,\gamma)\right]}=$$

$$=\frac{p_0(\gamma)}{p_0(x)}\frac{\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K}(x,\gamma) & \overset{(n-1)}{K}(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K'}(x,\gamma) & \overset{(n-1)}{K'}(x,\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-2)}(x,\gamma) & \dot{K}^{(n-2)}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n-2)}}(x,\gamma) & \overset{(n-1)}{K^{(n-2)}}(x,\gamma) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}}{W\left[K(x,\gamma),\dot{K}(x,\gamma),\ddot{K}(x,\gamma),\ldots,\overset{(n-1)}{K}(x,\gamma)\right]}=$$

$$
= \frac{p_0(\gamma)}{p_0(x)} \frac{\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K}(x,\gamma) & \overset{(n-1)}{K}(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K'}(x,\gamma) & \overset{(n-1)}{K'}(x,\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-2)}(x,\gamma) & \dot{K}^{(n-2)}(x,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K^{(n-2)}}(x,\gamma) & \overset{(n-1)}{K^{(n-2)}}(x,\gamma) \\ K(\gamma,\gamma) & \dot{K}(\gamma,\gamma) & \ldots & \overset{(n-2)}{K}(\gamma,\gamma) & \overset{(n-1)}{K}(\gamma,\gamma) \end{vmatrix}}{W\left[K(x,\gamma), \dot{K}(x,\gamma), \ddot{K}(x,\gamma), \ldots, \overset{(n-1)}{K}(x,\gamma)\right]} .
$$

Оскільки $K(x,\gamma)$, $\dot{K}(x,\gamma)$, …, $\overset{(n-1)}{K}(x,\gamma)$ складають фундаментальну систему, то ними можна оперувати так само, як функціями $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ при конструюванні виразу (8.13). То ж, порівнюючи структуру щойно отриманого результату перетворення виразу (8.61) зі структурою виразу (8.13), доходимо висновку, що

$$
\tilde{K}(x,\gamma) = \frac{p_0(\gamma)}{p_0(x)} K(\gamma, x) .
$$

Звідси також випливає також, що **взаємно спряженими** можна вважати рівняння

$$
L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 , \quad y = y(x)
$$

та

$$
L[z] \equiv p_0(\gamma) z^{(n)} + p_1(\gamma) z^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(\gamma) z' + p_n(\gamma) z = 0 , \quad z = z(\gamma) .
$$

На підставі викладеного можна дійти висновку, що у випадку самоспряжених рівнянь

$$
p_0(x) K(x,\gamma) = -p_0(\gamma) K(\gamma, x) .
$$

Звернемося для прикладу до самоспряженого рівняння

$$
16x^2 y'' + 32xy' - (4x+5) y = 0 .
$$

Можна пересвідчитися, що лінійно незалежними його розв’язками є функції

$$
y_1 = \left(x^{-3/4} - x^{-5/4}\right) e^{\sqrt{x}} , \quad y_2 = \left(x^{-3/4} + x^{-5/4}\right) e^{-\sqrt{x}}
$$

Будуючи фундаментальну є функцію за алгоритмом

$$
K = \frac{\begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) \\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) \end{vmatrix}} ,
$$

матимемо (див. табл. 2, приклад 13)

$$
K = \gamma^2 \left[\left(\gamma^{-3/4} - \gamma^{-5/4}\right)\left(x^{-3/4} + x^{-5/4}\right) e^{\sqrt{x} - \sqrt{\gamma}} - \left(\gamma^{-3/4} + \gamma^{-5/4}\right)\left(x^{-3/4} - x^{-5/4}\right) e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{\gamma})} \right] .
$$

Рівняння (8.63) дає підстави записати: $\widetilde{K}(x,\gamma)=K(x,\gamma)$. Тут, як легко бачити, справджується рівність $p_0(x)\,K(x,\gamma)=-p_0(\gamma)\,K(\gamma,x)$.

Доречно наголосити ще й на такому факті.

З системи рівностей (8.29) випливає, що

$$z_1(x,\gamma)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\gamma^j}\left(\frac{p_{n-j-1}(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)\right). \tag{8.64}$$

Підставляючи (8.64) у (8.30), отримаємо диференціальне співвідношення

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\gamma^j}\left(\frac{p_{n-j}(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)\right)=0\,. \tag{8.65}$$

Отже фундаментальною функцією $K=K(x,\gamma)$ є такою, що окрім всього іншого справджує співвідношення (8.65). Цьому співвідношенню, зрозуміло, можна поставити у відповідність співвідношення

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{p_{n-j}(x)}{p_0(x)}K(\gamma,x)\right)=0\,,$$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{p_{n-j}(\gamma)}{p_0(\gamma)}\frac{\partial^j}{\partial\gamma^j}K(\gamma,x)=0$$

У випадку рівняння третього порядку, наприклад,

$$\frac{p_3(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{p_2(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)\right)+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\left(\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}K(x,\gamma)\right)-\frac{\partial^3}{\partial\gamma^3}K(x,\gamma)=0$$

або

$$\left(\frac{p_3(\gamma)}{p_0(\gamma)}-\frac{d}{d\gamma}\frac{p_2(\gamma)}{p_0(\gamma)}+\frac{d^2}{d\gamma^2}\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}\right)K-\left(\frac{p_2(\gamma)}{p_0(\gamma)}-2\frac{d}{d\gamma}\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}\right)\dot{K}+\frac{p_1(\gamma)}{p_0(\gamma)}\ddot{K}-\dddot{K}=0\,.$$

Зокрема, легко перевірити, що наведені рівності задовольняє функція

$$K(x,\gamma)=\sin x\int_\gamma^x\cos s\,e^{-\int_\gamma^s f(t)dt}ds-\cos x\int_\gamma^x\sin s\,e^{-\int_\gamma^x f(t)dt}ds\,,$$

яка є фундаментальною для рівняння

$$y'''+f(x)y''+y'+f(x)y=0$$

(див. табл. 2, приклад 11); очевидність цього факту випливає вже з того, що $\dot{K}=f(\gamma)K$.

8.10 Фундаментальна функція і крайова задача

Розглянемо крайову задачу

$$L[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$$

$$(\ p_0(x) \neq 0,\ p_1(x),\ p_2(x), q(x) \in C^0,\ a \leq x \leq b\ ),\ \ y(a) = y(b) = 0\,. \qquad (8.66)$$

Нехай $K(x, \gamma)$ — відповідна цій задачі фундаментальна функція. Беручи по черзі $\gamma = a$ та $\gamma = b$, матимемо два розв'язки однорідного рівняння $L[y] = 0$: $y_1 = K(x, a)$, $y_2 = K(x, b)$. Беручи до уваги визначник

$$W[y_1, y_2]\big|_{x=b} = \begin{vmatrix} K(x, a) & K(x, b) \\ K'(x, a) & K'(x, b) \end{vmatrix}_{x=b} = K(b, a)\,,$$

дійдемо висновку, що за виконання умови $K(b, a) \neq 0$ наведені розв'язки є лінійно-незалежними. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння задачі (8.66) можна подати у вигляді:

$$y = c_1 K(x, a) + c_2 K(x, b) + \int_a^x K(x, s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\,. \qquad (8.67)$$

Підставляючи його у крайові умови (див. (8.66)) і визначаючи сталі c_1, c_2, одержимо розв'язок, власне, задачі (8.66):

$$y = -\frac{K(x, a)}{K(b, a)}\int_a^b K(b, s)q(s)\,ds + \int_a^x K(x, s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\,. \qquad (8.68)$$

Той самий розв'язок (8.68) та умову $K(b, a) \neq 0$ можна отримати, якщо за загальний розв'язок замість (8.67) взяти функцію

$$y = c_0 K(x, a) + c_1 \dot{K}(x, a) + \int_a^x K(x, s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\,.$$

З (8.68) випливає, зокрема, що відповідна однорідна крайова задача ($q(x) \equiv 0$) має тільки тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0$. Ця обставина є визначальною для існування єдиної **функції Ґріна** (див. 5.8). Якщо ж $K(b, a) = 0$, то з умови $y(a) = 0$ випливає, що $c_1 = 0$. Натомість, з умови

$$y(b) = c_0 \cdot 0 + \int_a^b K(b, s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds = 0$$

випливає, що: *а*) коли

$$y_{*ab} = \int_a^b K(b,\, s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds = 0\,,$$

то крайова задача має безліч розв’язків (c_0 — довільне); *б*) коли $y_{*ab} \neq 0$, то вона розв’язків не має.

Звернемося тепер безпосередньо до поняття функції Ґріна.

1^0 Розглянемо диференціальне рівняння

$$L[y] \equiv p_0(\,x)y'' + p_1(\,x)y' + p_2(\,x)y = q(\,x)$$

$$(\,p_0(x) \neq 0,\, p_1(x),\, p_2(x),\, q(x) \in \mathrm{C}^0 \;\; \forall x \in [a,\, b]\,) \tag{8.69}$$

разом з крайовими умовами

$$\left.(f(x)y' - e_1 y)\right|_{x=a} = 0\,,\quad \left.(f(x)y' + e_2 y)\right|_{x=b} = 0\,. \tag{8.70}$$

Задача вигляду (8.69)—(8.70) — це так звана **крайова задача для звичайного диференціального рівняння**. Щоб її розв’язати, потрібно підставити загальний розв’язок рівняння (8.69)

$$y = c_0 K(x,a) + c_1 \dot{K}(x,a) + \int_a^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\,,\quad \left(\dot{K}(x,a) = \frac{\partial K(x,a)}{\partial a}\right) \tag{8.71}$$

в крайові умови (8.70) та визначити на підставі них значення довільних сталих c_0 і c_1. На відміну від задачі з початковими умовами (задачі Коші), крайова задача не завжди має розв’язок.

Підставляючи (8.71) в (8.70), отримаємо систему (неоднорідну) алгебричних рівнянь

$$c_0 A_1(\,a,a) + c_1 \dot{A}_1(\,a,a) = 0\,,\quad c_0 A_2(b,a) + c_1 \dot{A}_2(b,a) = B(b,a)\,, \tag{8.72}$$

де

$$A_i(\,x,\gamma) = f(\,x)K'(\,x,\gamma) - e_i K(\,x,\gamma)\,,\quad \dot{A}_i(\,x,\gamma) = \frac{\partial A_i(\,x,\gamma)}{\partial \gamma} \quad (\,i = 1,\,2\,);$$

$$B(b,a) = -\left[\,f(b)\,y'_*(b,a) + e_2\,y_*(b,a)\right],$$

$$y_*(b,\,a) = \int_a^b K(b,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\,,\quad y'_*(b,\,a) = \frac{\partial y_*(b,\,a)}{\partial b}\;;$$

у виразах $A_1(\,x,\gamma)$, $\dot{A}_1(\,x,\gamma)$ фігурують величини (див. (8.20))

$$K(a,a) = 0\,,\;\; K'(a,a) = 1\,,\;\; \dot{K}(a,a) = -1\,,\;\; \dot{K}'(a,a) = \frac{p_1(a)}{p_0(a)}\,.$$

Головний визначник системи (8.72) має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1(a,a) & \dot{A}_1(a,a) \\ A_2(b,a) & \dot{A}_2(b,a) \end{vmatrix} = A_1(a,a)\dot{A}_2(b,a) - \dot{A}_1(a,a)A_2(b,a).$$

Якщо

$$\Delta = \Delta(b,a) \neq 0,$$

то за формулами Крамера маємо:

$$c_0 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \dot{A}_1(a,a) \\ B(b,a) & \dot{A}_2(b,a) \end{vmatrix} = -B(b,a)\frac{\dot{A}_1(a,a)}{\Delta},$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A_1(a,a) & 0 \\ A_2(b,a) & B(b,a) \end{vmatrix} = B(b,a)\frac{A_1(a,a)}{\Delta}. \qquad (8.73)$$

То ж у випадку $\Delta = \Delta(b,a) \neq 0$ задача (8.69)—(8.70) має єдиний розв'язок. Коли ж виявиться, що $\Delta(b,a) = 0$, то, як відомо з алгебри, неоднорідна система (8.72) або не має розв'язку, або ж має їх безліч.

При $q(x) \equiv 0$ система (8.72) перетворюється в однорідну. В цьому разі вона має ненульовий розв'язок $\{c_0, c_1\}$ тоді, зрозуміло, коли той самий визначник (8.73) дорівнює нулю: $\Delta = \Delta(b,a) = 0$. Отже, неоднорідна крайова задача (з однорідними крайовими умовами) має розв'язок (і до того ж єдиний) тільки тоді, коли відповідна однорідна крайова задача має тривіальний розв'язок $y \equiv 0$.

2^0 Для розв'язування крайових задач часто застосовують функцію Ґріна. Під **функцією Ґріна** крайової задачі (8.69)—(8.70) розуміють таку визначену для $a \le x \le b$, $a \le s \le b$ функцію $G(x,s)$, що для будь-якого s вона як функція x наділена властивостями (див. 4.8):

1° $G(x,s)$ при $x \neq s$ задовольняє однорідне рівняння $L[y] = 0$ (відповідне неоднорідному рівнянню (8.69));

2° $G(x,s)$ при $x = a$ та $x = b$ задовольняє задані крайові умови (зокрема (8.70));

3° $G(x,s)$ при $x = s$ неперервна за змінною x, а її похідна $G'_x(x,s)$ за x при $x = s$ має одиничний стрибок, тобто

$$G(s+0, s) - G(s-0, s) = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=s+0} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=s-0} = 1. \qquad (8.74)$$

Справедливими є твердження (див. 4.8):

а) Якщо відповідна первісній задачі (8.69)—(8.70) однорідна (означувана тотожністю $q(x) \equiv 0$) задача має тільки очевидний розв'язок $y(x) \equiv 0$, то існує одна і тільки одна функція Ґріна $G(x,s)$, що відповідає даному оператору L (тоді, зрозуміло, в системі рівнянь (8.72) $c_0 = c_1 = 0$).

б) Якщо функція $G(x,s)$ з окресленими щойно властивостями існує, то розв'язок крайової задачі (8.69)—(8.70) зображується як

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}ds\,. \tag{8.75}$$

Підкреслимо, що той самий розв'язок, як випливає безпосередньо з (8.71), можна подати і у вигляді

$$y(x)=\int_a^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}ds\,.$$

3^0 Порівняємо наведене в 1^0 і 2^0. Для цього побудуємо функцію $G(x,s)$ задачі (8.69)—(8.70), вважаючи, як і раніше, що $p\equiv f(x)$, $q\equiv f'(x)$.

Підставимо загальний розв'язок однорідного рівняння $L[y]=0$ ($q(x)\equiv 0$)

$$y=c_0K(x,a)+c_1\dot{K}(x,a) \tag{8.76}$$

в крайові умови (8.70) і отримаємо відповідну неоднорідній системі (8.72) систему однорідних рівнянь (бо тут $y_*(x,a)\equiv 0$, а тому й $B(b,a)\equiv 0$). Отже, якщо виконується умова $\Delta=\Delta(b,a)\neq 0$, тобто визначник відповідної однорідної задачі не дорівнює нулеві, то ця однорідна задача має тільки єдиний розв'язок $y(x)\equiv 0$ (це видно й з формул (8.73) і (8.76), бо $c_0=c_1=0$). Тому в цьому випадку відповідна оператору L функція $G(x,s)$ існує і вона єдина.

Щоб її побудувати, потрібно мати два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ (ненульові) рівняння $L(y)=0$, що задовольняють відповідно першу і другу крайові умови (8.70). Якщо $y_1(x)$ не задовольняє відразу обидві крайові умови, то функцію $G(x,s)$ можна шукати у вигляді:

$$G(x,s)=\begin{cases} g_1y_1(x) & (a\le x\le s),\\ g_2y_2(x) & (s\le x\le s).\end{cases}$$

Величини g_1 і g_2 — залежні від s і визначаються на підставі вимоги, щоб $G(x,s)$ задовольняла умови (8.74):

$$g_1y_1(s)=g_2y_2(s),\quad -g_1y_1'(s)+g_2y_2'(s)=1\,.$$

Звідси можна отримати формулу

$$G(x,s)=\begin{cases} \dfrac{y_1(x)\,y_2(s)}{W(s)}, & a\le x\le s,\\ \dfrac{y_1(s)\,y_2(x)}{W(s)}, & s\le x\le b\end{cases} \tag{8.77}$$

($W=W[y_1,y_2]$ — визначник Вронського).

4^0 Доречно зробити таке зауваження.

"Функцію Ґріна" означують також інакше — не пов'язуючись з крайовими умовами (див., наприклад, [29]):

$$G(x, s) = \begin{cases} 0, & a \le x \le s; \\ K(x, s), & s \le x \le b \end{cases}, \tag{8.78}$$

де $K(x, s)$ — відповідна рівнянню (8.69) при $p(x) \equiv 1$ фундаментальна функція. За допомогою цієї функції формулу Коші

$$y_* = \int_a^x K(x, s)\,\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds \tag{8.79$'$}$$

для окремого розв'язку неоднорідного рівняння можна записати у формі (8.75):

$$y_* = \int_a^b G(x, s)\,\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds\,. \tag{8.79$''$}$$

5^0 Розглянемо прості приклади. Звернемося до задачі

$$L[y] \equiv y'' + y = 1\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(\pi/2) = 0\,. \tag{8.80}$$

Беручи до уваги співвідношення

$$p_0(x) = q(x) \equiv 1\,, \quad y_1(x) = \sin x\,, \quad y_2(x) = \cos x\,,$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} \equiv -1 \ne 0\,,$$

відповідно до (8.77) знайдемо:

$$G(x, s) = \begin{cases} -\sin x \cos s & 0 \le x \le s, \\ -\sin s \cos x & s \le x \le \pi/2. \end{cases}$$

На підставі (8.75) запишемо:

$$y = \int_0^{\pi/2} G(x, s) \cdot 1 \cdot ds = -\int_0^x \sin s \cos x\, ds - \int_x^{\pi/2} \sin x \cos s\, ds = 1 - \sin x - \cos x\,.$$

Застосуємо тепер інший спосіб.

В даному випадку фундаментальна функція має вигляд

$$K(x, \gamma) = \frac{1}{W(\gamma)} \begin{vmatrix} \sin\gamma & \cos\gamma \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \sin(\,x - \gamma)\,,$$

а отже

$$y_* = \int_\gamma^x \sin(x - \gamma)\, d\gamma = 1 - \cos(x - \gamma)\,.$$

Тому загальний розв'язок диференціального рівняння задачі (8.80) можна подати, очевидно, так:

$$y = c_0 \sin x + c_1 \cos x + 1,$$

звідки

$$y(0) = c_1 + 1, \; y(\pi/2) = c_0 + 1.$$

Отже, в даному випадку $c_0 = c_1 = -1$ і розв'язок крайової задачі (8.80) має, як і слід було сподіватись, вигляд:

$$y = 1 - \sin x - \cos x.$$

Відповідна ж однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок $y \equiv 0$.

Якщо в задачі (8.80) другу з крайових умов замінити на умову $y(\pi) = 0$, то на підставі першої з цих умов, як і в попередньому випадку, $c_1 = -1$, а от друга умова веде до суперечності: $(c_0 \sin\pi - c_1 \cos\pi + 1 = 0) \Rightarrow (2 = 0)$. Отже, задача { $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ } розв'язку не має. При цьому відповідна однорідна крайова задача { $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ } має безліч розв'язків $y = C \sin x$ (C — довільне число).

Прикладом крайової задачі, що має безліч розв'язків, є така:

$$y'' + y = 2x - \pi; \qquad y(0) = 0; \; y(\pi) = 0. \tag{8.81}$$

В цьому випадку

$$y_*(x, \gamma) = \int_\gamma^x \sin(x - \gamma)(2\gamma - \pi)\, d\gamma = 2x - \pi - 2\sin(x - \gamma) + (\pi - 2\gamma)\cos(x - \gamma).$$

Підставляючи загальний розв'язок диференціального рівняння задачі (8.81)

$$y = c_0\, y_1(x) + c_1\, y_2(x) + y_* = C_0 \sin x + C_1 \cos x + 2x - \pi$$

в задані крайові умови, отримуємо: $C_1 - \pi = 0$; $C_0 \cdot 0 - C_1 + 2\pi - \pi = 0$. З першої рівності однозначно випливає, що $C_1 = \pi$; друга ж рівність задовольняється за будь-якої сталої C_0. То ж розв'язок задачі (8.81)

$$y = 2x + C_0 \sin x + \pi(\cos x - 1)$$

є неоднозначним з огляду на довільність значення сталої C_0 (тобто задача справді має безліч розв'язків, як і, до речі, відповідна їй однорідна крайова задача).

Звернемося тепер до функції Ґріна у формі (8.78).

Для диференціального рівняння, наприклад,

$$y'' + y = 1 \qquad (0 \le x \le \pi/2)$$

(див. задачу (8.80)) як з одного боку (див. (8. 79′)),

$$y_* = \int_0^x \sin(x-s)\cdot 1\cdot ds = -\int_0^x \sin(x-s)\,d(x-s) = \cos x - 1\,;$$

$$(\,y_*(0)=0\,,\ y_*'(0)=0\,),$$

так і з другого (див. (8. 79″)),

$$y_* = \int_0^{\pi/2} G(x,\,s)\cdot 1\cdot ds = \int_0^x K(x,\,s)\cdot 1\cdot ds + \int_x^{\pi/2} 0\cdot 1 ds = \int_0^x \sin(x-s)ds =$$

$$= -\int_0^x \sin(x-s)\,d(x-s) = \cos x - 1$$

$$(\,y_*(0)=0\,,\ y_*'(0)=0\,).$$

Очевидно, що застосування до подібних задач окресленого раніше поняття фундаментальної функції на противагу поняттю функції Ґріна є ефективнішим, раціональнішим.

Поняття фундаментальної функції і функції Ґріна перекликаються з відомим поняттям **фундаментального розв’язку звичайного лінійного диференціального рівняння**

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x) y^{(n-i)} = 0\,, \qquad (8.82)$$

в якому $p_0(x)\neq 0$, $p_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ — неперервні функції при $a<x<b$.

Під фундаментальним розв’язком розуміють означену в квадраті $a\le x,\gamma\le b$ функцію $\Phi(x,\gamma)$, яка наділена властивостями [14]:

1° $\Phi(x,\gamma)$ і в трикутнику $a\le x\le\gamma\le b$, і в трикутнику $a\le\gamma\le x\le b$ має частинні похідні за x до n-го порядку включно, і ці похідні неперервні в кожному з зазначених трикутників як за x, так і за γ;

2° $\Phi(x,\gamma)$ як функція від змінної x в кожному з трикутників $a\le x\le\gamma\le b$ і $a\le\gamma\le x\le b$ задовольняє рівняння (8.82);

3° $\Phi(x,\gamma)$ всюди в квадраті $a\le x,\gamma\le b$ неперервна і має частинні похідні за x до (n–2)-го порядку, неперервні в цьому квадраті як за x, так і за γ;

4° при $a<\gamma<b$ справджується рівність

$$\frac{\partial^{n-1}\Phi(\gamma+0,\gamma)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1}\Phi(\gamma-0,\gamma)}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{p_0(\gamma)}\,.$$

Легко перевірити, що таким розв’язком є функція

$$\Phi(x,\gamma)=\frac{\operatorname{sgn}(x-\gamma)}{2p_0(\gamma)W(\gamma)}\begin{vmatrix} y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \cdots & y_n(\gamma) \\ y_1'(\gamma) & y_2'(\gamma) & \cdots & y_n'(\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\operatorname{sgn}(x-\gamma)}{2p_0(\gamma)}K(x,\gamma)=\frac{|\,x-\gamma\,|}{2p_0(\gamma)(x-\gamma)}K(x,\gamma)=\frac{(x-\gamma)}{2p_0(\gamma)\,|\,x-\gamma\,|}K(x,\gamma)=$$

$$=\frac{\frac{d}{dx}|\,x-\gamma\,|}{2p_0(\gamma)}K(x,\gamma)=\frac{K(x,\gamma)\theta(x-\gamma)}{p_0(\gamma)}\,, \qquad (8.83)$$

де $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, складають деяку фундаментальну систему розв’язків рівняння (8.82), вронскіяном якої є $W(x)$. Функція (8.83) задовольняє умови

$$\Phi(\gamma,\gamma)=\frac{\partial\Phi(x,\gamma)}{\partial x}\bigg|_{x=\gamma}=\frac{\partial^2\Phi(x,\gamma)}{\partial x^2}\bigg|_{x=\gamma}=\ldots=\frac{\partial^{(n-2)}\Phi(x,\gamma)}{\partial x^{(n-2)}}\bigg|_{x=\gamma}=0$$

і окреслює загальний розв’язок рівняння (8.82) у вигляді

$$y_{\circ}=\Phi(x,\gamma)+c_1(\gamma)y_1(x)+c_2(\gamma)y_2(x)+\ldots+c_n(\gamma)y_n(x)\,,$$

де $c_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, —неперервні функції, а окремий розв’язок неоднорідного рівняння

$$\sum_{i=0}^{n}p_i(x)y^{(n-i)}=q(x)$$

— у вигляді

$$y_*=\int_a^b\Phi(x,\gamma)\,q(\gamma)\,d\gamma\,.$$

9 ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ 9

9.1 Загальний вигляд фундаментальної функції

Нехай у рівнянні

$$L[y]=p_0\frac{d^n y(x)}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n y(x)=0 \qquad (9.1)$$

коефіцієнти p_0, p_1, …, p_n є сталими (незалежними від x). **Заміна незалежної змінної** x на нову змінну $x-\gamma=t$ ($dx=dt$; γ — деяке число) перетворить це (первісне) рівняння у нове (похідне) рівняння

$$L[y]=p_0\frac{d^n y(t)}{dt^n}+p_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+p_n y(t)=0$$

без жодних змін самого диференціального оператора. Умови (8.10), яким при $x=\gamma$ повинна задовольняти **фундаментальна функція** $y=K(x,\gamma)$, набувають вигляду

$$y(t)\Big|_{t=0}=y'(t)\Big|_{t=0}=\ldots=y^{(n-2)}(t)\Big|_{t=0}=0\,,\quad y^{(n-1)}(t)\Big|_{t=0}=1\,, \qquad (9.2)$$

тобто стають незалежними від числа γ. В такому разі фундаментальна функція може залежати лише від змінної t. Отже, фундаментальна функція, відповідна рівнянню зі сталими коефіцієнтами, залежить від різниці $x-\gamma$:

$$K(x,\gamma)=K(t)=K(x-\gamma)\,. \qquad (9.3)$$

В такому разі **вираз** (8.24), **що відтворює диференціальне рівняння за відповідною йому фундаментальною функцією**, набуває вигляду

$$\begin{vmatrix} K(x-\gamma) & K'(x-\gamma) & \ldots & K^{(n-1)}(x-\gamma) & y \\ K'(x-\gamma) & K''(x-\gamma) & \ldots & K^{(n)}(x-\gamma) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n)}(x-\gamma) & K^{(n+1)}(x-\gamma) & \ldots & K^{(2n-1)}(x-\gamma) & y^{(n)} \end{vmatrix}=0\,,$$

а вирази (8.29) при цьому — вигляду

$$(-1)^j\frac{p_0}{p_j}P_j[K]=e^{-\frac{p_1}{p_0}(x-\gamma)}\,,\quad j=\overline{0,n}\,.$$

9.2 Взаємозв'язок між розв'язками диференціального і характеристичного рівнянь

Звернемося до виразів (8.1) і (8.2). Покладемо

$$y_i = e^{k_i x} \quad (i = \overline{1, n}, \ j = n);$$

тут k_i — довільні поки що числа (не пов'язані, зокрема, співвідношеннями Вієта (3.8)). В такому разі

$$W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] = e^{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}, \qquad (9.4)$$

$$\left.\frac{W_n(x, \gamma)}{W(\gamma)}\right|_{y_i = e^{k_i x}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \ldots & k_n^{n-2} \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \ldots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-\gamma)} & e^{k_2(x-\gamma)} & \ldots & e^{k_n(x-\gamma)} \end{vmatrix}. \qquad (9.5)$$

Вираз (9.4) можна подати у вигляді

$$W = \prod_{i=1}^{n} e^{k_i x} \prod_{1 \le j < i \le n} \left(k_i - k_j\right) = e^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i x} \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} \left(k_i - k_j\right).$$

Звідси випливає, що відповідний визначник Вронського не дорівнює нулю тільки тоді, коли всі k_i попарно різні і $k_i x \ne -\infty$ ($i = \overline{1, n}$). А в такому разі, многочлену (3.1) з кратними коренями k_i завжди відповідатиме нульовий визначник (9.4).

Якщо k_i є всі різними коренями многочлена (3.1) і всі $k_i x \ne -\infty$, то $y_i = e^{k_i x}$ ($i = \overline{1, n}$) складають систему лінійно незалежних функцій, які до того ж задовольняють відповідне многочлену (3.1) диференціальне рівняння (9.1), див. 3.1. В цьому випадку загальним розв'язком рівняння (9.1) є функція

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{k_i x},$$

в якій C_i — довільні сталі, а k_i — корені (всі різні) многочлена (3.1).

Поставимо оператору $L[\cdot]$ у відповідність оператор $L_\mu[\cdot]$, який діє на функцію $y(x)$ за правилом

$$L_\mu[y(x)] = e^{-\mu x} L[e^{\mu x} y(x)] .$$

Вираз $L_\mu[y(x)]$ є лінійною функцією від $y(x)$ та похідних від $y(x)$ до порядку n включно, тобто $L_\mu[\cdot]$ — лінійний n-го порядку диференціальний оператор. Він є оператором зі сталими коефіцієнтами, бо на функцію e^{kx} діє таким чином:

$$L_\mu[e^{\mu x}] = e^{-\mu x} L[e^{\mu x} e^{kx}] = e^{-\mu x} L[e^{(\mu+k)x}] = e^{-\mu x} P_n[\mu+k] e^{(\mu+k)x} = P_n[\mu+k] e^{kx} ,$$

де $P_n[z] \equiv z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n z$.

Вираз $P_n[\mu+k]$ — відповідний оператору $L_\mu[\cdot]$ характеристичний поліном. За формулою Тейлора (3.40)

$$P_n[\mu+k] = P_n[\mu] + P_n'[\mu]k + \frac{1}{2!} P_n''[\mu]k^2 + \ldots + k^n .$$

Ставлячи параметру k^r у відповідність операцію $\dfrac{d^r}{dx^r}$ ($r = \overline{0,n}$), за характеристичним поліномом $P_n[\mu+k]$ віднайдемо відповідний лінійний n-го порядку диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами:

$$L_\mu[y] = y^{(n)} + \frac{1}{(n-1)!} P_n^{(n-1)}[\mu] y^{(n-1)} + \ldots + P_n[\mu] y .$$

В підсумку отримаємо так звану **формулу зсуву**

$$L[e^{\mu x} y] = e^{\mu x} P_n[\mu + \frac{d}{dx}] y = e^{\mu x} \left(y^{(n)} + \frac{1}{(n-1)!} P_n^{(n-1)}[\mu] y^{(n-1)} + \ldots + P_n[\mu] y \right).$$

У випадку, коли μ є r-кратним коренем многочлена $P_n[k]$, тобто $P_n[\mu] = 0$, $P_n'[\mu] = 0$, $P_n^{(r-1)}[\mu] = 0$, $P_n^{(r)}[\mu] \neq 0$, то вираз $L_\mu[y]$ має вигляд

$$L_\mu[y] = y^{(n)} + \frac{1}{(n-1)!} P_n^{(n-1)}[\mu] y^{(n-1)} + \ldots + \frac{1}{r!} P_n^{(r)}[\mu] y^{(r)} ,$$

а тому $x^j \in \mathrm{Ker} L_\mu$, $j = \overline{0, r-1}$. На підставі формули зсуву можна стверджувати, що

$$y(x) \in \mathrm{Ker} L_\mu \Leftrightarrow e^{\mu x} y(x) \in \mathrm{Ker} L .$$

Отже кожна з функцій $e^{\mu x}$, $x e^{\mu x}$, …, $x^{r-1} e^{\mu x}$ — розв'язок рівняння

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 .$$

Отже, випливає таке твердження [38]: якщо μ — r-кратний корінь характеристичного многочлена $P_n[k]$, то цьому кореню відповідає система з r функцій

$$e^{\mu x},\ xe^{\mu x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\mu x},$$

кожна з яких — розв’язок рівняння $L[y]=0$.

Кратні корені характеристичного многочлена не обов’язково вважати чимось особливим за суттю. Якщо які-небудь числа k_j, k_l є однаковими, то при визначенні величини (9.5) треба лише вдатися до обчислення (розкриття) невизначеностей типу $0/0$. Зокрема,

$$\left.\frac{W_n(x,\gamma)}{W(\gamma)}\right|_{y_i=e^{k_i x};\,k_j=k_l} = \lim_{k_j\to k_l}\frac{\dfrac{\partial}{\partial k_j}W_n(x,\gamma)}{\dfrac{\partial}{\partial k_j}W(\gamma)} =$$

$$=\begin{vmatrix} \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & k_{j-1} & 1 & k_{j+1} & \cdots & k_l & \cdots \\ \cdots & k_{j-1}^2 & 2k_l & k_{j+1}^2 & \cdots & k_l^2 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & k_{j-1}^{n-2} & (n-2)k_l^{n-3} & k_{j+1}^{n-2} & \cdots & k_l^{n-2} & \cdots \\ \cdots & k_{j-1}^{n-1} & (n-1)k_l^{n-2} & k_{j+1}^{n-1} & \cdots & k_l^{n-1} & \cdots \end{vmatrix}^{-1} \times$$

$$\times\begin{vmatrix} \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & k_{j-1} & 1 & k_{j+1} & \cdots & k_l & \cdots \\ \cdots & k_{j-1}^2 & 2k_l & k_{j+1}^2 & \cdots & k_l^2 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & k_{j-1}^{n-2} & (n-2)k_l^{n-3} & k_{j+1}^{n-2} & \cdots & k_l^{n-2} & \cdots \\ \cdots & e^{k_{j-1}(x-\gamma)} & (x-\gamma)e^{k_l(x-\gamma)} & e^{k_{j+1}(x-\gamma)} & \cdots & e^{k_l(x-\gamma)} & \cdots \end{vmatrix}.$$

Розглянемо визначник

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)m} \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{m} A_j y_j(x) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial D_i}{\partial y_j}y_j(x),$$

в якому a_{rj} ($r=\overline{\overline{1,i-1},\overline{i+1,m}}$), а отже і алгебричні доповнення $A_j=\dfrac{\partial D_i}{\partial y_j}$

елементів-функцій $y_j(x)$ ($j=\overline{1,m}$) є сталими (незалежними від x). Враховуючи однорідність і адитивність оператора $L_n[\cdot]$ легко з'ясувати, що

$$L_n[D_i]=\sum_{j=1}^{m} A_j L_n\left[y_j(x)\right]=\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial D_i}{\partial y_j} L_n\left[y_j(x)\right]=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)m} \\ L_n[y_1(x)] & L_n[y_2(x)] & \cdots & L_n[y_m(x)] \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Остання рівність відображає **правило прикладання диференціального оператора до визначника**.

Підставимо (9.5) в (9.1) і на підставі щойно окресленого правила отримаємо такий результат:

$$L\left[\left.\frac{W_n(x,\gamma)}{W(\gamma)}\right|_{y_i=e^{r_i x}}\right]=\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ L\left[e^{k_1(x-\gamma)}\right] & L\left[e^{k_2(x-\gamma)}\right] & \cdots & L\left[e^{k_n(x-\gamma)}\right] \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ P[k_1]\,e^{k_1(x-\gamma)} & P[k_2]e^{k_2(x-\gamma)} & \cdots & P[k_n]e^{k_n(x-\gamma)} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо визначник

$$\overset{m}{\Delta}_e=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-2} & k_2^{m-2} & \ldots & k_m^{m-2} \\ e^{k_1(x-\gamma)} & e^{k_2(x-\gamma)} & \ldots & e^{k_m(x-\gamma)} \end{vmatrix}.$$

Його, зважаючи на (3.32)—(3.33), можна записати у вигляді:

$$\overset{m}{\Delta}_e=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}\overset{m-1}{\underset{\bar{j}}{\Delta}}e^{k_j(x-\gamma)}=(-1)^{m-1}\overset{m}{\Delta}\sum_{j=1}^{m}\frac{e^{k_j(x-\gamma)}}{\prod\limits_{i\neq j}^{m}(k_i-k_j)}.$$

Побудуємо систему функцій

$$\Phi=\Phi_n=\frac{\overset{n}{\Delta}_e}{\overset{n}{\Delta}}=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\overset{n-1}{\underset{\bar{j}}{\Delta}}e^{k_j(x-\gamma)}=(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{k_j(x-\gamma)}}{\prod\limits_{i\neq j}^{n}(k_i-k_j)},$$

$$\overset{(r)}{\Phi}=\frac{\partial^r\Phi}{\partial\gamma^r}=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}(-k_j)^r\overset{n-1}{\underset{\bar{j}}{\Delta}}e^{k_j(x-\gamma)}=(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-k_j)^r e^{k_j(x-\gamma)}}{\prod\limits_{i\neq j}^{n}(k_i-k_j)},$$

$$r=\overline{1,n-1}. \tag{9.6}$$

Вимагатимемо, щоб кожна з них задовольняла рівняння (9.1):

$$L\left[\overset{(r)}{\Phi}\right]=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}(-k_j)^r\overset{n-1}{\underset{\bar{j}}{\Delta}}P_n[k_j]e^{k_j(x-\gamma)}=0,\ r=\overline{0,n-1}. \tag{9.7}$$

Але щоби система рівнянь (9.7) справджувалася за ненульових $e^{k_j(x-\gamma)}$ необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти при $e^{k_j(x-\gamma)}$ задовольняли умову

$$\begin{vmatrix}
(-1)^{n+1}P_n[k_1]\dfrac{\overset{n-1}{\underset{\bar{1}}{\Delta}}}{\overset{n}{\Delta}} & \cdots & (-1)^{2n}P_n[k_n]\dfrac{\overset{n-1}{\underset{\bar{n}}{\Delta}}}{\overset{n}{\Delta}}\\
(-1)^{n+1}(-k_1)P_n[k_1]\dfrac{\overset{n-1}{\underset{\bar{1}}{\Delta}}}{\overset{n}{\Delta}} & \cdots & (-1)^{2n}(-k_n)P_n[k_n]\dfrac{\overset{n-1}{\underset{\bar{n}}{\Delta}}}{\overset{n}{\Delta}}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
(-1)^{n+1}(-k_1)^{n-1}P_n[k_1]\dfrac{\overset{n-1}{\underset{\bar{1}}{\Delta}}}{\overset{n}{\Delta}} & \cdots & (-1)^{2n}(-k_n)^{n-1}P_n[k_n]\dfrac{\overset{n-1}{\underset{\bar{n}}{\Delta}}}{\overset{n}{\Delta}}
\end{vmatrix}=$$

$$
= (-1)^{(3n+1)n/2} P_n[k_1]\cdots P_n[k_n]\,\frac{\overset{n-1}{\underset{\bar{1}}{\Delta}}\cdots\overset{n-1}{\underset{\bar{n}}{\Delta}}}{\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{n}}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -k_1 & \cdots & -k_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-k_1)^{n-1} & \cdots & (-k_n)^{n-1} \end{vmatrix} =
$$

$$
= P_n[k_1]\cdots P_n[k_n]\,\frac{\overset{n-1}{\underset{\bar{1}}{\Delta}}\cdots\overset{n-1}{\underset{\bar{n}}{\Delta}}}{\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{n-1}} = \frac{P_n[k_1]\cdots P_n[k_n]}{\overset{n}{\Delta}} = 0\,. \tag{9.8}
$$

Тут серед іншого враховано окреслені раніше (див. розділ 3) властивості визначника Ван-дер-Монда.

Нехай (див. (9.8))

$$
P_n[k_n]\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{-1} = 0\,.
$$

Тоді, на підставі рівнянь (9.7) дійдемо висновку, що повинні справджуватися й умови

$$
(-1)^{3n(n-1)/2} P_n[k_1]\cdots P_n[k_{n-1}]\,\frac{\overset{n-1}{\underset{\bar{1}}{\Delta}}\cdots\overset{n-1}{\underset{\overline{n-1}}{\Delta}}}{\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{n-1}}\,\overset{n-1}{\underset{j,n}{\Delta}} = (-1)^{3n(n-1)/2} P_n[k_1]\cdots P_n[k_{n-1}]\,\frac{\overset{n-1}{\underset{(j,n)}{\Delta}}}{\overset{n}{\Delta}\,\overset{n-1}{\underset{\bar{n}}{\Delta}}} = 0\,,
$$

де $\overset{n-1}{\underset{(j,n)}{\Delta}}$ — визначник, який випливає з визначника Ван-дер-Монда при усуванні з нього n-го стовпця та j-го рядка. При $j = n$, зокрема, матимемо:

$$
\frac{P_n[k_1]\cdots P_n[k_{n-1}]}{\overset{n}{\Delta}} = 0\,.
$$

Тому можна покласти, що

$$
P_n[k_{n-1}]\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{-1} = 0\,.
$$

Врешті-решт, доведеться визнати, що для всіх $i = \overline{1, n}$ справджуються такого самого змісту умови:

$$
P_n[k_i]\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{-1} = 0\,.
$$

А це означає, що всі k_i є коренями многочлена (3.1)

$$P_n[k] \equiv p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n$$

(незалежно від того, чи $\overset{n}{\Delta} \neq 0$, чи $\overset{n}{\Delta} = 0$).

Коли $y_i = e^{k_i x}$ ($i = \overline{1, n}$), вирази (8.3) (див. також (8.1) і (8.2)) збігаються зі складовими узагальненої елементарної функції (див. (1.20)—(1.22) з 1.5):

$$\frac{W_j(x,\gamma)}{W(\gamma)} \equiv \frac{\overset{n}{\Delta}_{ej}(x-\gamma)}{\overset{n}{\Delta}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

З викладеного раніше випливає, що кожна з цих складових, а разом з ними і узагальнена елементарна функція в цілому, є розв'язками однорідного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами за умови, звичайно, що всі k_i є коренями відповідного цьому рівнянню характеристичного многочлена.

9.3 Структура розв'язків

Функція $\Phi = \Phi(x, \gamma)$ (див. (9.6)) при $i + j = r + l$ задовольняє умову

$$(-1)^i \frac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial\gamma^i \, \partial x^j} = (-1)^r \frac{\partial^{r+l}\Phi}{\partial\gamma^r \, \partial x^l},$$

звідки, зокрема, випливає, що

$$(-1)^i \frac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial\gamma^i \, \partial x^j} = (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial\gamma^{i+j}} = \frac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial x^{i+j}}.$$

В такому разі визначник Вронського системи функцій (9.6)

$$W_\Phi = \begin{vmatrix} \Phi & \dot{\Phi} & \ddot{\Phi} & \cdots & \overset{(r)}{\Phi} & \cdots & \overset{(n-1)}{\Phi} \\ \Phi' & \dot{\Phi}' & \ddot{\Phi}' & \cdots & \overset{(r)}{\Phi}{}' & \cdots & \overset{(n-1)}{\Phi}{}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{(r)} & \dot{\Phi}^{(r)} & \ddot{\Phi}^{(r)} & \cdots & \overset{(r)}{\Phi}{}^{(r)} & \cdots & \overset{(n-1)}{\Phi}{}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{(n-1)} & \dot{\Phi}^{(n-1)} & \ddot{\Phi}^{(n-1)} & \cdots & \overset{(r)}{\Phi}{}^{(n-1)} & \cdots & \overset{(n-1)}{\Phi}{}^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{9.9}$$

є підстави подавати у вигляді

$$W_\Phi = (-1)^{(n-1)n/2} \begin{vmatrix} \Phi & \Phi' & \Phi'' & \cdots & \Phi^{(n-2)} & \Phi^{(n-1)} \\ \Phi' & \Phi'' & \Phi''' & \cdots & \Phi^{(n-1)} & \Phi^{(n)} \\ \Phi'' & \Phi''' & \Phi^{IV} & \cdots & \Phi^{(n)} & \Phi^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Phi^{(n-2)} & \Phi^{(n-1)} & \Phi^{(n)} & \cdots & \Phi^{(2n-4)} & \Phi^{(2n-3)} \\ \Phi^{(n-1)} & \Phi^{(n)} & \Phi^{(n+1)} & \cdots & \Phi^{(2n-3)} & \Phi^{(2n-2)} \end{vmatrix}. \tag{9.10}$$

Легко пересвідчитися, що

$$\left.\frac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial\gamma^i\,\partial x^j}\right|_{x=\gamma}=(-1)^i\left.\frac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial x^{i+j}}\right|_{x=\gamma}=\begin{cases}0,\ \text{коли}\ 0\le i+j\le n-2,\\(-1)^i,\ \text{коли}\ i+j=n-1.\end{cases}\tag{9.11}$$

Через це визначник Вронського (9.9) (чи (9.10)) при $x=\gamma$ стає трикутним

$$W_\Phi\big|_{x=\gamma}=\begin{vmatrix} & & & & (-1)^{n-1}\\ & 0 & & & \overset{(n-1)}{\Phi}{}'(\gamma,\gamma)\\ & & & \iddots & \vdots\\ & & (-1)^2 & \cdots & \overset{(n-1)}{\Phi}{}^{(n-3)}(\gamma,\gamma)\\ & (-1)^1 & \ddot{\Phi}^{(n-2)}(\gamma,\gamma) & \cdots & \overset{(n-1)}{\Phi}{}^{(n-2)}(\gamma,\gamma)\\ (-1)^0 & \dot{\Phi}^{(n-1)}(\gamma,\gamma) & \ddot{\Phi}^{(n-1)}(\gamma,\gamma) & \cdots & \overset{(n-1)}{\Phi}{}^{(n-1)}(\gamma,\gamma)\end{vmatrix}$$

і набуває конкретного числового значення $W_\Phi\big|_{x=\gamma}=1\ne 0$.

Таким чином, і $\Phi,\dot{\Phi},\ddot{\Phi},\ldots,\overset{(r-1)}{\Phi},\cdots,\overset{(n-1)}{\Phi}$, і $\Phi,\Phi',\Phi'',\ldots,\Phi^{(r-1)},\cdots,\Phi^{(n-1)}$ складають дві системи лінійно незалежних функцій, а тому загальний розв’язок диференціального рівняння (9.1) можна записати у вигляді

$$y=c_1\Phi+c_2\dot{\Phi}+c_3\ddot{\Phi}+\cdots+c_r\overset{(r-1)}{\Phi}+\cdots+c_n\overset{(n-1)}{\Phi}=\sum_{i=1}^{n}c_i\overset{(i-1)}{\Phi},$$

або ж у вигляді

$$y=C_1\Phi+C_2\Phi'+C_3\Phi''+\cdots+C_r\Phi^{(r-1)}+\cdots+C_n\Phi^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}C_i\Phi^{(i-1)}.\tag{9.12}$$

($c_1,c_2,c_3,\cdots,c_r,\cdots,c_n$ та $C_1,C_2,C_3,\cdots,C_r,\cdots,C_n$ — відповідні системи довільних сталих). Зрештою, загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння (9.1) можна подати і у вигляді

$$y=y(x,\gamma)=$$

$$=\left(\overset{n}{\Delta}\right)^{-1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \ldots & k_n^{n-2}\\ e^{k_1(x-\gamma)}\sum\limits_{i=1}^{n}C_ik_1^{i-1} & e^{k_2(x-\gamma)}\sum\limits_{i=1}^{n}C_ik_2^{i-1} & \ldots & e^{k_n(x-\gamma)}\sum\limits_{i=1}^{n}C_ik_n^{i-1}\end{vmatrix}.\tag{9.13}$$

В окремому випадку, коли $C_i = p_{n-i+1}$, то

$$y = y(x,\gamma) = -p_0 \left(\overset{n}{\Delta} \right)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \dots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-\gamma)}k_1^n & e^{k_2(x-\gamma)}k_2^n & \dots & e^{k_n(x-\gamma)}k_n^n \end{vmatrix}.$$

Поставимо вимогу, щоб отриманий розв'язок (9.13) задовольняв при $x = \gamma$ початкові умови

$$y\big|_{x=\gamma} = y'\big|_{x=\gamma} = \cdots y^{(n-2)}\Big|_{x=\gamma} = 0, \quad y^{(n-1)}\Big|_{x=\gamma} = 1. \tag{9.14}$$

Відповідно до (9.11)

$$\left.\frac{\partial^j \Phi}{\partial^j x}\right|_{x=\gamma} = \begin{cases} 0, \text{ коли } 0 \le j \le n-2, \\ 1, \text{ коли } j = n-1. \end{cases}$$

Тому, вдаючись до (9.12) і (9.14), знайдемо:

$$y\big|_{x=\gamma} = \sum_{i=1}^{n} C_i \Phi^{(i-1)}\Big|_{x=\gamma} = C_n = 0.$$

Далі, зважаючи на рівність $C_n = 0$, знову ж на підставі (9.12) і (9.14) обчислимо (вважаючи, що $\Phi^{(n)}\Big|_{x=\gamma} \ne \infty$):

$$y'\big|_{x=\gamma} = \sum_{i=1}^{n} C_i \Phi^{(i)}\Big|_{x=\gamma} = C_{n-1}\Phi^{(n-1)}\Big|_{x=\gamma} + C_n \Phi^{(n)}\Big|_{x=\gamma} = C_{n-1} = 0.$$

Аналогічно, можна з'ясувати, що $C_{n-2} = C_{n-3} = \dots = C_3 = C_2 = 0$, $C_1 = 1$.

Рівняння (9.1) при $x = \gamma$ набуває вигляду

$$p_0 y^{(n)}\Big|_{x=\gamma} + p_1 = 0. \tag{9.15}$$

На підставі ж (9.13) при $x = \gamma$, беручи до уваги рівності

$$C_n = C_{n-1} = \dots = C_3 = C_2 = 0, \; C_1 = 1,$$

матимемо:

$$y^{(n)}\Big|_{x=\gamma} = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \dots & k_n^{n-2} \\ k_1^n & k_2^n & \dots & k_n^n \end{vmatrix} = \frac{\overset{n}{\Delta}_n}{\overset{n}{\Delta}}. \tag{9.16}$$

Порівнюючи (9.16) з (9.15) і беручи до уваги відповідну з формул Вієта (3.8), знайдемо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \dots & k_n^{n-2} \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \dots & k_n^{n-2} \\ k_1^{n} & k_2^{n} & \dots & k_n^{n} \end{vmatrix} = -\frac{p_1}{p_0} = k_1 + k_2 + \dots + k_n .$$

Отже функція (9.13) за умов (9.14) набуває вигляду

$$y = K(x, \gamma) = y(x, \gamma)\Big|_{C_n = C_{n-1} = \dots = C_3 = C_2 = 0,\, C_1 = 1} = \Phi(x, \gamma) =$$

$$= \frac{1}{\overset{n}{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \dots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-\gamma)} & e^{k_2(x-\gamma)} & \dots & e^{k_n(x-\gamma)} \end{vmatrix} . \tag{9.17}$$

Можна наголосити на таких **властивостях** функції $K(x, \gamma)$ (яку за домовленістю називатимемо фундаментальною):

1° Фундаментальна функція $K(x, \gamma)$ $\forall x, \gamma \in I = [-\infty, \infty]$ неперервна за x і γ разом зі всіма своїми похідними.

2° Похідна від фундаментальної функції $K(x, \gamma)$ за незалежною змінною x довільного ν-го порядку в точці $x = \gamma \in I = [-\infty, \infty]$ визначувана через степеневі визначники ()

$$K^{(\nu)}(x, \gamma)\Big|_{x=\gamma} = \frac{\partial^\nu K(x, \gamma)}{\partial x^\nu}\bigg|_{x=\gamma} = \frac{\overset{n}{\Delta}_\nu}{\overset{n}{\Delta}} ; \tag{9.18}$$

аналогічно,

$$K^{(\nu)}(x, \gamma)\Big|_{\gamma=x} = \frac{\partial^\nu K(x, \gamma)}{\partial x^\nu}\bigg|_{\gamma=x} = \frac{\overset{n}{\Delta}_\nu}{\overset{n}{\Delta}} \tag{9.19}$$

(похідні (9.18), (9.19) дорівнюють, зокрема, нулю при $\nu = \overline{1, n-2}$, числу 1 при $\nu = n-1$, числу $-p_1 p_0^{-1}$ при $\nu = n$).

3° $K(x,\gamma)$ як функція від x всюди в $I=[-\infty,\infty]$ є розв'язком рівняння (9.1), тобто

$$L[K(x,\gamma)]=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \dots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-\gamma)}P_n[k_1] & e^{k_2(x-\gamma)}P_n[k_2] & \dots & e^{k_n(x-\gamma)}P_n[k_n] \end{vmatrix}=0\,. \qquad (9.20)$$

4° $K(x,\gamma)$ визначає загальний розв'язок однорідного рівняння у формі (9.12)

$$y=C_1K+C_2K'+C_3K''+\dots+C_rK^{(r-1)}+\dots+C_nK^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}C_iK^{(i-1)}\,. \qquad (9.21)$$

Звернемося тепер до неоднорідного диференціального рівняння

$$L[y]\equiv p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\dots+p_ny=q(x)\,,\quad a<x<b\,, \qquad (9.22)$$

в якому $q(x)$ є неперервною функцією $\forall x\in I=[a,b]$. Згорнемо $K(x,\gamma)$ і $q(x)$ ($x,\gamma\in I=[a,b]$) в одну функцію

$$y_*=y_*(x,\gamma)=\frac{1}{p_0}\int_{\gamma}^{x}K(x,s)q(s)\,ds\,. \qquad (9.23)$$

Легко бачити, що функція $y_*=y_*(x,\gamma)$ задовольняє умови

$$y_*(\gamma,\gamma)=y_*'(\gamma,\gamma)=\dots=y_*^{(n-1)}(\gamma,\gamma)=0\,.$$

Не звертаючись до загальної теорії (див. 8.3), безпосередньо переконаємося, що функція (9.23) задовольняє рівняння (9.22). Для цього, застосовуючи правило (1.11) диференціювання інтеграла за параметром, спочатку знайдемо:

$$p_0y_*^{(r)}=\int_{\gamma}^{x}\frac{\partial^rK(x,s)}{\partial x^r}q(s)\,ds+\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\Big(K(x,\gamma)\big|_{\gamma=x}q(x)\Big)+\frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}}\left(\frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial x}\bigg|_{\gamma=x}q(x)\right)+$$

$$+\dots+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{r-2}K(x,\gamma)}{\partial x^{r-2}}\bigg|_{\gamma=x}q(x)\right)+\frac{\partial^{r-1}K(x,\gamma)}{\partial x^{r-1}}\bigg|_{\gamma=x}q(x)\,,\qquad r=\overline{1,n}\,. \qquad (9.24)$$

Далі, зважаючи на рівності

$$\frac{\partial^{\nu}K(x,\gamma)}{\partial x^{\nu}}\bigg|_{\gamma=x}=0,\quad \nu=0,n-2\,;\qquad \frac{\partial^{n-1}K(x,\gamma)}{\partial x^{n-1}}\bigg|_{\gamma=x}=1\,,$$

що випливають з (9.19), вирази (9.24) зведемо до вигляду:

$$y_*^{(r)} = \frac{1}{p_0}\int_\gamma^x \frac{\partial^r K(x,s)}{\partial x^r} q(s)ds, \quad r = \overline{1, n-1},$$

$$y_*^{(n)} = \frac{1}{p_0}\int_\gamma^x \frac{\partial^n K(x,s)}{\partial x^n} q(s)ds + \frac{q(x)}{p_0}. \tag{9.25}$$

Нарешті, підставляючи (9.23) і (9.25) в (9.22) та вносячи коефіцієнти p_0, p_1, …, p_n під знак інтеграла, дійдемо рівності

$$\int_\gamma^x L_n[K(x,s)]\,\frac{q(s)}{p_0}\,ds + q(x) = q(x),$$

яка є тотожністю $q(x) \equiv q(x)$, оскільки $L_n[K(x,s)] \equiv 0$ (див. (9.20)).

Отже функція $y_* = y_*(x,\gamma)$, означувана формулою (9.23), справді є розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (9.22). Її можна записати також у вигляді

$$y_* = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\int_{x_0}^x \overset{n}{\Delta}_n (x-s) q(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ \int_{x_0}^x e^{k_1(x-s)}q(s)\,ds & \int_{x_0}^x e^{k_2(x-s)}q(s)\,ds & \cdots & \int_{x_0}^x e^{k_n(x-s)}q(s)\,ds \end{vmatrix}. \tag{9.26}$$

Таким чином $K(x,\gamma)$ є відповідною рівнянню (9.1) фундаментальною функцією, зміст якої в загальному випадку окреслено в розділі 8. За її допомогою загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами можна подати у вигляді (9.21). Не менш привабливою є й форма (9.13).

За досконалий запис загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами є підстави визнати також такий:

$$y = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\left(\sum_{i=1}^n y_0^{(i-1)}\,\overset{n}{\Delta}_{ei}(x-x_0) + \frac{1}{p_0}\int_{x_0}^x q(s)\,\overset{n}{\Delta}_{en}(x-s)\,ds\right), \tag{9.27}$$

де (див. 1.5)

$$\overset{n}{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1}\end{vmatrix},\quad \overset{n}{\Delta}_{e1}(x-x_0)=\begin{vmatrix}e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)}\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{ej}(x-x_0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{j-1} & k_2^{j-1} & \cdots & k_n^{j-1}\\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)}\\ k_1^{j+1} & k_2^{j+1} & \cdots & k_n^{j+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{en}(x-x_0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2}\\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)}\end{vmatrix},$$

$$y_0=y(x_0),\ y_0'=y'(x_0),\ y_0''=y''(x_0),\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}=y^{(n-1)}(x_0).$$

Цей запис випливає з того, що функції (8.3), які в даному випадку мають вигляд $\dfrac{W_j(x,\gamma)}{W(\gamma)}\equiv\dfrac{\overset{n}{\Delta}_{ej}(x-\gamma)}{\overset{n}{\Delta}}$, $j=\overline{1,n}$, складають нормальну систему розв'язків лінійного диференціального рівняння (див. 8.1).

Інколи окремий розв'язок неоднорідного рівняння (9.22) вдається знайти у формі $y_*=y_*(x)$, відмінній від (9.26). В такому разі замість (9.27) можна писати

$$y=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_0^{(i-1)}-y_{0*}^{(i-1)}\right)\overset{n}{\Delta}_{ei}(x-x_0)\right)+y_*(x), \tag{9.28}$$

де $y_{*0}^{(i-1)}=y_*^{(i-1)}(x_0)$ ($i=\overline{1,n}$) — початкові значення окремого розв'язку та похідних від нього.

Використовуючи формули (8.58), можна побудувати ще одну нормальну фундаментальну систему розв'язків лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$Y_i = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{p_{n-i-j}}{p_0} \frac{\partial^j K(x-x_0)}{\partial x^j}, \ i = \overline{1,n} \ \ (Y_n = K(x-x_0));$$

тут покладено $\gamma = x_0$. На підставі неї виникає можливість записати загальний розв'язок у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} Y_i + y_*(x, x_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} y_0^{(i-1)} \frac{p_{n-i-j}}{p_0} \frac{\partial^j K(x-x_0)}{\partial x^j} + y_*(x, x_0)$$

або

$$y = y_0 K^{(n-1)}(x-x_0) + \frac{1}{p_0}(p_1 y_0 + p_0 y_0')K^{(n-2)}(x-x_0) +$$

$$+ \frac{1}{p_0}(p_2 y_0 + p_1 y_0' + p_0 y_0'')K^{(n-3)}(x-x_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{p_0}\left(p_{n-1} y_0 + p_{n-2} y_0' + \ldots + p_0 y_0^{(n-1)}\right)K(x-x_0) +$$

$$+ \frac{1}{p_0} \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, q(s) ds.$$

Згадуючи викладене в 3.8, зауважуємо, що величини

$$\alpha_i = C_i \frac{\overset{n}{\Delta}_i (x-\gamma)}{\overset{n}{\Delta}} \quad (i = \overline{1,n}),$$

які разом складають розв'язок ($y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$) однорідного диференціального рівняння, є коефіцієнтами інтерполяційного многочлена

$$\Pi[k] = \frac{\alpha_n}{C_1} + \frac{\alpha_{n-1}}{C_2} k + \frac{\alpha_{n-2}}{C_3} k^2 + \ldots + \frac{\alpha_1}{C_n} k^{n-1},$$

який точно відтворює функцію від змінної k

$$f(k) = e^{k(x-\gamma)}$$

у вузлах інтерполювання $k = k_i$ ($i = \overline{1,n}$).

9.4 Лінійне однорідне рівняння Ойлера

Лінійними однорідними рівняннями Ойлера називають співвідношення вигляду

$$L_E[y]=x^n y^{(n)}+a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}+\ldots+a_i x^{n-i} y^{(n-i)}+\ldots+a_n y=0, \qquad (9.29)$$

де a_i, $i=\overline{1,n}$, — сталі. Найпростішим серед них є рівняння

$$y'-\frac{k}{x}y=0 \quad (p_0=1,\ p_1=-\frac{k}{x}). \qquad (9.30)$$

Йому відповідає фундаментальна функція

$$K=e^{-\int_\gamma^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}=e^{k\int_\gamma^x \frac{ds}{s}}=\left|\frac{x}{\gamma}\right|^k .$$

Отже за розв'язок цього рівняння повинна правити функція

$$y=cK=c\left|\frac{x}{\gamma}\right|^k, \quad c=\text{const}\in \mathrm{R} . \qquad (9.31)$$

Дійсно,

$$y'=cK'=c\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{x}{\gamma}\right|^k=c\frac{k}{\gamma}\left|\frac{x}{\gamma}\right|^{k-1}\operatorname{sgn}\left|\frac{x}{\gamma}\right|=c\frac{k}{x}\left|\frac{x}{\gamma}\right|^{k-1}\frac{x}{\gamma}\operatorname{sgn}\left|\frac{x}{\gamma}\right|=c\frac{k}{x}\left|\frac{x}{\gamma}\right|^k=\frac{k}{x}y ,$$

що відповідає (9.30).

Переконаємося, що формула (9.31) відбиває в собі всі розв'язки рівняння (9.30).

Нехай $y=\psi(x)$ — деякий розв'язок рівняння (9.30), а тому

$$\frac{d\,\psi(x)}{dx}-\frac{k}{x}\psi(x)=0 . \qquad (9.32)$$

Розглянемо функцію $f(x)=\psi(x)|\,x\,|^{-k}$. Похідна цієї функції дорівнює нулю в силу (9.32):

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{d\,\psi(x)}{dx}|\,x\,|^{-k}-k|\,x\,|^{-k-1}\operatorname{sgn}x\ \psi(x)=|\,x\,|^{-k}\left(\frac{d\,\psi(x)}{dx}-\frac{k}{x}\psi(x)\right)=0 .$$

Отже $f(x)=C=\text{const}$. Таким чином, $y=\psi(x)=f(x)/|\,x\,|^{-k}=C|\,x\,|^k$, що з точністю до сталих збігається з (9.31).

Цікавим є рівняння (Ойлера)

$$x^4 y^{(IV)}+8x^3 y'''+12x^2 y''+ay=0$$

Відомо, що його розв'язки можна записати у вигляді:

1) при $a<1$

$$y=x^{-\frac{1}{2}}(c_1 x^{m_1}+c_2 x^{m_2}+c_3 x^{m_3}+c_4 x^{m_4})$$

за позначень $m_i^2=\frac{5}{4}\pm\sqrt{1-a}$;

2) при $a = 1$

$$y = x^{-\frac{1}{2}+m_1}(c_1 + c_2 \ln x) + x^{-\frac{1}{2}+m_2}(c_3 + c_4 \ln x)$$

за позначень $m_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$;

3) при $a > 1$

$$y = x^{-\frac{1}{2}}\Big((c_1 x^{\alpha} + c_2 x^{-\alpha})\cos(\beta \ln x) + (c_3 x^{\alpha} + c_4 x^{-\alpha})\sin(\beta \ln x)\Big)$$

за позначень $\alpha = \sqrt{r}\cos\frac{\varepsilon}{2}$ $\beta = \sqrt{r}\sin\frac{\varepsilon}{2}$, де r і ε визначаються із співвідношень $r^2 = a + \frac{9}{16}$, $\sqrt{a-1} = r\sin\varepsilon$, $\frac{5}{4} = r\cos\varepsilon$.

Рівняння Ойлера, виявляється, безпосередньо пов'язане з лінійним однорідним рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Справді. Розглядаючи дійсну числову піввісь $\mathrm{R}^+ = (0, +\infty)$, покладемо $y = x^k$. Тут $k = \alpha + \beta i$ — комплексне число; в даному випадку можна писати

$$x^k = e^{k \ln x} = e^{\alpha \ln x} e^{i\beta \ln x} = x^{\alpha}\big(\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)\big),$$

де α, β — дійсні числа. Легко з'ясувати, що

$$L_E[x^k] = x^k\big(k(k-1)\ldots(k-n+1) + a_1 k(k-1)\ldots(k-n+2) + \ldots + a_n\big).$$

Отже, оператору $L_E[\cdot]$ цілком природно можна поставити у відповідність характеристичний поліном

$$P_E[k] = k(k-1)\ldots(k-n+1) + a_1 k(k-1)\ldots(k-n+2) + \ldots + a_n.$$

Таким чином, функція x^k стосовно оператора $L_E[\cdot]$ веде себе подібно до того, як функція e^{kt} веде себе стосовно оператора

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_i y^{(n-i)} + \ldots + p_n y \tag{9.33}$$

зі сталими коефіцієнтами p_i, $i = \overline{1,n}$ (див. 3.1). Ця обставина разом з тим, що x^k перетворюється на e^{kt} після підстановки $x = e^t$, навіює здогадку, що рівняння Ойлера (9.29), коли у ньому зробити заміну незалежної змінної за формулою $x = e^t$ ($t = \ln x$), перетворюється у лінійне однорідне рівняння $L[y] = 0$ зі сталими коефіцієнтами.

Справді. Звернемо увагу на те, що рівняння (9.29) не змінюється, якщо x замінити на cx (c — стала). Отже, якщо замість x ввести нову незалежну змінну t таку, що $\{x = e^t,\ t = \ln x\}$, то відповідне нове рівняння не змінюватиметься при заміні t на $t + c$. А це означає, що це нове рівняння явно від t не залежить. До того ж, заміна змінної зберігає лінійність рівняння. Тож залишається визнати, що нове рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Таким чином здогадка має поступитися місцем переконанню.

Підтвердити висловлене можна і безпосередньо. Зважаючи на структуру перших двох похідних

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

можна припустити, що ν-а похідна повинна мати вигляд

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu}=e^{-\nu t}\left(\frac{d^\nu y}{dt^\nu}+\alpha_1\frac{d^{\nu-1}y}{dt^{\nu-1}}+\alpha_2\frac{d^{\nu-2}y}{dt^{\nu-2}}\ldots+\alpha_{\nu-1}\frac{dy}{dt}\right),$$

де α_1, α_2, …, $\alpha_{\nu-1}$ — сталі. Тоді (ν +1)-а визначатиметься за формулою

$$\frac{d^{\nu+1}y}{dx^{\nu+1}}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right)=e^{-(\nu+1)t}\left(\frac{d^{\nu+1}y}{dt^{\nu+1}}+(\alpha_1-\nu)\frac{d^{\nu-1}y}{dt^{\nu-1}}+\ldots-\nu\alpha_{\nu-1}\frac{dy}{dt}\right),$$

яка підтверджує спостережену структуру. Тобто за довільного натурального ν похідна $d^\nu y/dx^\nu$ є добутком $e^{-\nu t}$ на лінійну зі сталими коефіцієнтами комбінацію з похідних $d^j y/dx^j$ від ν-го порядку ($j=\nu$) до першого ($j=1$). Підставляючи обчислені похідні в рівняння (9.29), доведеться при кожному ν множити $d^\nu y/dx^\nu$ на $a_\nu x^\nu=a_\nu e^{\nu t}$; при цьому показникові множники, що містять t, скоротяться, і рівняння перетвориться у лінійне зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння Ойлера не змінює свого вигляду при заміні x на $-x$. Отже, якщо $y(x)$ є розв'язком цього рівняння на півосі $\mathrm{R}^+=(0,+\infty)$, то $y(-x)$ є розв'язком на півосі $\mathrm{R}^-=(0,-\infty)$. Розв'язок $y(|x|)$, поєднує в собі обидва наведені випадки. Заміна незалежної змінної, що охоплює обидва ці випадки повинна мати вигляд $\{|x|=e^t, t=\ln|x|\}$.

Напрошується такий **алгоритм побудови розв'язку** рівняння Ойлера:

1) будуємо відповідний рівнянню Ойлера (зі змінними коефіцієнтами, в якому за незалежну змінну править величина x) характеристичний многочлен $P_E[k]$ і зводимо його до загальноприйнятого вигляду $P[k]=k^n+p_1k^{n-1}+\ldots+p_ik^{n-i}+\ldots+p_n$;

2) ставимо отриманому многочлену $P_E[k]$ у відповідність лінійне однорідне диференціальне рівняння (9.33) (зі сталими коефіцієнтами, в якому за незалежну змінну править величина t) і знаходимо відповідну йому фундаментальну функцію (чи фундаментальну систему розв'язків);

3) в побудованій фундаментальній функції (чи в фундаментальній системі розв'язків) робимо заміну змінної за формулою $t=\ln|x|$ і отримуємо фундаментальну функцію (чи фундаментальну систему розв'язків), відповідну власне рівнянню Ойлера.

Приклад 1 Диференціальному рівнянню (Ойлера) зі змінними коефіцієнтами

$$x^4y^{IV}(x)+10x^3y'''(x)+33x^2y''(x)+39xy'(x)+25y(x)=0 \tag{9.34}$$

відповідає характеристичний поліном

$$P_E[k]=k(k-1)(k-2)(k-3)+10k(k-1)(k-2)+33k(k-1)+39k+25,$$

який зводиться до вигляду $P[k]=k^4+4k^3+14k^2+20k+25=\left(k^2+2k+5\right)^2$. Таким чином, супутнім наведеному рівнянню зі змінними коефіцієнтами можна вважати рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{IV}(t)+4y'''(t)+14y''(t)+20y'(t)+25y(t)=0$$

(відповідно до структури характеристичного полінома $P[k]$). Характеристичний поліном $P[k]$ має два двократні корені — $k=k_1=k_3=-1-2i$ та $k=k_2=k_4=-1+2i$.

Позначимо

$$\overset{4}{\Delta}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\k_1&k_2&k_3&k_4\\k_1^2&k_2^2&k_3^2&k_4^2\\k_1^3&k_2^3&k_3^3&k_4^3\end{vmatrix},\quad \overset{4}{\Delta}_e(x-\gamma)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\k_1&k_2&k_3&k_4\\k_1^2&k_2^2&k_3^2&k_4^2\\e^{k_1(t-\tau)}&e^{k_2(t-\tau)}&e^{k_3(t-\tau)}&e^{k_4(t-\tau)}\end{vmatrix}$$

і запишемо фундаментальну функцію у вигляді

$$K(t-\tau)=\frac{\overset{4}{\Delta}_e(t-\tau)}{\overset{4}{\Delta}}.$$

Оскільки $\overset{4}{\Delta}=0$ і $\overset{4}{\Delta}_e(t-\tau)\equiv 0$ (через те, що $k_1=k_3$ і $k_2=k_4$), то, щоб позбутися невизначеності $\frac{0}{0}$, слід писати

$$K(t-\tau)=\left.\frac{\frac{\partial^2}{\partial k_3\partial k_4}\overset{4}{\Delta}_e(x-\gamma)}{\frac{\partial^2}{\partial k_3\partial k_4}\overset{4}{\Delta}}\right|_{k_3=k_1,\,k_4=k_2}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}k_2&1&1\\k_2^2&2k_1&2k_2\\e^{k_2(t-\tau)}&(t-\tau)e^{k_1(t-\tau)}&(t-\tau)e^{k_2(t-\tau)}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}k_1&1&1\\k_1^2&2k_1&2k_2\\e^{k_1(t-\tau)}&(t-\tau)e^{k_1(t-\tau)}&(t-\tau)e^{k_2(t-\tau)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}k_2&1&1\\k_2^2&2k_1&2k_2\\k_2^3&3k_1^2&3k_2^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}k_1&1&1\\k_1^2&2k_1&2k_2\\k_1^3&3k_1^2&3k_2^2\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{\left((t-\tau)(k_2-k_1)+2\right)e^{k_1(t-\tau)}+\left((t-\tau)(k_2-k_1)-2\right)e^{k_2(t-\tau)}}{(k_2-k_1)^3}.$$

Звідси

$$K(t-\tau)=\frac{e^{-(t-\tau)}}{16}\left(\sin\left(2(t-\tau)\right)-2(t-\tau)\cos\left(2(t-\tau)\right)\right).$$

Після заміни $t=\ln|x|$ ($\tau=\ln|\gamma|$), отримаємо функцію

$$K(x,\gamma)=\frac{1}{16}\frac{\gamma}{x}\left(\sin\left(2\ln\left|\frac{x}{\gamma}\right|\right)-2\ln\left|\frac{x}{\gamma}\right|\cos\left(2\ln\left|\frac{x}{\gamma}\right|\right)\right)$$

(тут знак функції $K(x,\gamma)$ на півосі $\mathrm{R}^-=(0,-\infty)$ до уваги не брався). Отже, власне $K(t,\tau)$ є фундаментальною функцією, відповідною диференціальному рівнянню Ойлера (9.34).

Наведений приклад 1 ілюструє, зокрема, особливу поведінку фундаментальної функції (а отже і розв'язку) рівняння Ойлера в околі точки $x=0$. Очевидно, що $\ln|x/\gamma| \to -\infty$ при $x \to 0$, а тому при $x \to 0$ функції $\sin\left(2\ln\left|\dfrac{x}{\gamma}\right|\right)$ і $\cos\left(2\ln\left|\dfrac{x}{\gamma}\right|\right)$ починають інтенсивно коливатись (див. 2.1), що, зрозуміло, відповідним чином позначається на розв'язках рівняння.

Рівняння (9.29) заміною $x^n y = z$ завжди можна звести до рівняння з коефіцієнтом 1 при старшій похідній, але яке знову належатиме до класу рівнянь Ойлера. Зокрема, заміна $x^4 y = z$ у рівнянні (9.34) з прикладу 1 зводить це рівняння до вигляду

$$z^{IV}(x) - 15\frac{z'''(x)}{x} + 109\frac{z''(x)}{x^2} - 427\frac{z'(x)}{x^3} + 727\frac{z(x)}{x^4} = 0 .$$

Виявляється, що будь-якому рівнянню Ойлера можна поставити у відповідність цілу низку такого самого типу рівнянь. Звернемося до прикладу.

Приклад 2 Диференціальне рівняння (Ойлера)

$$x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0 \tag{9.35}$$

заміною $x = e^t$ перетворюється на рівняння (лінійне зі сталими коефіцієнтами)

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0 , \tag{9.36}$$

якому відповідає характеристичний многочлен $P[k] = P_E[k] = k^2 + 2k + 1$ ($k_1 = k_2 = -1$).

Тут

$$\overset{2}{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = 0 , \quad \overset{2}{\Delta}_e = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_1(t-\tau)} & e^{k_2(t-\tau)} \end{vmatrix} \equiv 0 ,$$

$$K(t-\tau) = \left.\frac{\dfrac{\partial}{\partial k_2}\overset{2}{\Delta}_e}{\dfrac{\partial}{\partial k_2}\overset{2}{\Delta}}\right|_{k_2=k_2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^{k_1(t-\tau)} & (x-\gamma)e^{k_1(t-\tau)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{vmatrix}} = (t-\tau)e^{k_1(t-\tau)} = (t-\tau)e^{-(t-\tau)} .$$

Виконаємо в $K(t-\tau)$ операцію оберненого перетворення незалежної змінної за формулою $t = \ln|x|$ ($\tau = \ln|\gamma|$):

$$K(x,\gamma) = \frac{\gamma}{x}\ln\left|\frac{x}{\gamma}\right| .$$

Вважаючи $K(x,\gamma)$ фундаментальною функцією, відтворимо (керуючись викладеним у 8.5) відповідне їй при $x/\gamma > 0$ диференціальне рівняння:

$$\begin{vmatrix} K & \dot{K} & y \\ K' & \dot{K}' & y' \\ K'' & \dot{K}'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\gamma}{x}\ln\dfrac{x}{\gamma} & \dfrac{1}{x}\left(\ln\dfrac{x}{\gamma}-1\right) & y \\ -\dfrac{\gamma}{x^2}\left(\ln\dfrac{x}{\gamma}-1\right) & -\dfrac{1}{x^2}\left(\ln\dfrac{x}{\gamma}-2\right) & y' \\ \dfrac{\gamma}{x^3}\left(2\ln\dfrac{x}{\gamma}-3\right) & \dfrac{1}{x^3}\left(2\ln\dfrac{x}{\gamma}-5\right) & y'' \end{vmatrix} = \frac{\gamma}{x^5}\left(x^2y'' + 3xy' + y\right) = 0 .$$

Отриманий результат відповідає рівнянню (9.35). Заміною

$$x^2 y = z_1$$

(9.35) зводиться до рівняння (Ойлера)

$$z_1''(x) - \frac{z_1'(x)}{x} + \frac{z_1(x)}{x^2} = 0\,; \tag{9.37}$$

заміна

$$x^2 z_1 = z_2$$

зводить останнє рівняння до нового рівняння (Ойлера)

$$x^2 z_2''(x) - 5x z_2'(x) + z_2(x) = 0 \tag{9.38}$$

і так далі. Рівняння (9.35)—(9.38) (і так далі) випадає тлумачити як належні в певному сенсі до одного і того самого класу.

Подібним до рівняння Ойлера (9.29) є більш загальне рівняння

$$L[y] = (ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_i(ax+b)^{n-i} y^{(n-i)} + \ldots + a_n y = 0\,.$$

Воно, як виявляється, заміною $ax+b=e^t$ також зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Подібно як для рівнянь зі сталими коефіцієнтами за допомогою раціональних операцій можна знайти розв'язок у випадку правої частини вигляду $\sum e^{\alpha x} P[x]$, так для окресленого тут типу рівнянь такий підхід пошуку розв'язку можливий у випадку правої частини типу $\sum x^{\alpha} P[\ln x]$ ($P[\cdot]$ — многочлен).

Наголосимо ще на такому. Нехай коефіцієнт $p_1(x)$ однорідного лінійного диференціального рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x) y = 0$$

є цілою функцією. Щоб і загальний розв'язок цього рівняння був цілою функцією необхідно і достатньо, щоб цілими функціями були всі решта коефіцієнти $p_2(x)$, $p_3(x)$, …, $p_n(x)$.

Достатність висловленої умови випливає з загальної теореми про існування розв'язків лінійних диференціальних рівнянь. Тепер — про необхідність. Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ є лінійно незалежними цілими функціями, що задовольняють вказане диференціальне рівняння. Тоді коефіцієнти $p_i(x)$ визначатимуться з системи рівнянь

$$p_1(x) y_i^{(n-1)} + p_2(x) y_i^{(n-2)} + \ldots + p_n(x) y_i = -y_i^{(n)}\,,\; i = \overline{1,n}\,,$$

як дроби, в чисельниках яких стоять цілі функції; всі ці дроби мають спільний знаменник — вронскіян функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, тобто величину $e^{-\int p_1(x)\,dx}$, що є цілою функцією, яка не має нулів.

9.5 Клас рівнянь зі степенево-показниковою правою частиною

Праву частину диференціального рівняння, яка є добутком многочлена і показникової функції, називатимемо степенево-показниковою. Елементарним прикладом рівняння зі степенево-показниковою правою частиною є рівняння першого порядку

$$y' - y = -e^{-x^2}.$$

Його розв'язки можна подати, зокрема, у вигляді

$$y = \frac{1}{\overset{1}{\Delta}}\left(y_0 \overset{1}{\Delta}_1 (x - x_0) + \frac{1}{p_0}\int_{x_0}^{x} \overset{1}{\Delta}_1 (x - s)\, q(s)\, ds \right) = y_0 e^{(x-x_0)} - \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)} e^{-s^2} ds =$$

$$= y_0 e^{(x-x_0)} - e^x \int_{x_0}^{x} e^{-(s+s^2)} ds = e^x\left(\frac{y_0}{e^{x_0}} - \int_{x_0}^{x} e^{-(s+s^2)} ds \right).$$

Покладемо $\frac{y_0}{e^{x_0}} = \int_{x_0}^{\infty} e^{-(s+s^2)} ds$ і тим самим виділимо розв'язок $y = e^x \int_{x}^{\infty} e^{-(s+s^2)} ds$. Оскільки при $x > 0$ справджується співвідношення

$$y(x) = e^x \int_{x}^{\infty} e^{-(s+s^2)} ds \le e^x e^{-x^2} \int_{x}^{\infty} e^{-s} ds = e^{-x^2},$$

то $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$. Із збіжності інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+s^2)} ds$ випливає прямування $y(x)$ до нуля також і при $x \to -\infty$. Отже існує (і до того ж єдиний) розв'язок

$$y(x) = e^x \int_{x}^{\infty} e^{-(s+s^2)} ds$$

такий, для якого $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Рівняння зі степенево-показниковою правою частиною

$$L[y] \equiv y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} = P_m[x] e^{\alpha x} \tag{9.39}$$

($P_m[x]$ — многочлен від x степеня m) є в певному сенсі особливими. Якщо права частина $q(x)$ рівняння (9.39) зі сталими коефіцієнтами є добутком

$$q(x) = P_m[x] e^{\alpha x}$$

многочлена $P_m[x]$ степеня m і показникової функції $e^{\alpha x}$, то **окремий розв'язок** цього рівняння можна шукати у вигляді

$$y_*(x) = Q_m[x]e^{\alpha x},$$

коли α не є коренем характеристичного многочлена

$$L[k] \equiv k^n + \sum_{i=1}^{n} a_i k^{n-i} \; . \tag{9.40}$$

диференціального рівняння (9.39), де $Q_m[x]$ — многочлен знову ж таки степеня m з невідомими коефіцієнтами. Щоб знайти ці коефіцієнти треба функцію $y_*(x) = Q_m[x]e^{\alpha x}$, яка має набути ознак окремого розв'язку, і похідні від неї $y_*^{(i)}(x) = \left(Q_m[x]e^{\alpha x}\right)^{(i)}$ ($i = \overline{0, n}$) підставити у диференціальне рівняння (9.39), а далі прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x; отримана лінійна система алгебричних рівнянь дасть, власне, можливість визначити коефіцієнти многочлена $Q_m[x]$. Коли ж α — корінь кратності r характеристичного многочлена, то окремий розв'язок диференціального рівняння шукають так само, як у попередньому випадку, але у вигляді

$$y_*(x) = x^r Q_m[x]e^{\alpha x} \; .$$

Права частина диференціального рівняння може мати також вигляд

$$q(x) = \left(P_m[x]\cos\beta x + \Pi_\mu[x]\sin\beta x\right) e^{\alpha x},$$

де $P_m[x]$ і $\Pi_\mu[x]$ — многочлени від x степеня відповідно m і μ. В такому разі, якщо α і β такі, що числа $\alpha \pm i\beta$ є коренями кратності r (r може набувати і нульового значення) характеристичного рівняння, то окремий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна шукати у вигляді

$$y_*(x) = x^r \left(Q_\nu[x]\cos\beta x + \Theta_\nu[x]\sin\beta x\right) e^{\alpha x},$$

де $Q_\nu[x]$, $\Theta_\nu[x]$ — многочлени від x степеня $\nu = \max\{m, \mu\}$.

Нехай задано неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L[y] \equiv y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} = b_j x^j e^{\alpha x}, \tag{9.41}$$

в якому $b_j \in \mathrm{R}$, $j \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $\alpha = \mathrm{const}$. Йому відповідає характеристичний многочлен (9.40).

Число α, що фігурує в диференціальному рівнянні (9.41), вважатимемо коренем нульової кратності многочлена (9.40), якщо $L[\alpha] \neq 0$, та коренем кратності $\nu \le n$ ($\nu \in \mathrm{N}$), якщо

$$L[\alpha] = L'[\alpha] = L''[\alpha] = \ldots = L^{(\nu-1)}[\alpha] = 0,$$

але $L^{(\nu)}[\alpha] \neq 0$ (див. 3.1).

Виявляється [34], що окремі розв'язки рівняння (9.41) у випадку, коли α — корінь кратності $\nu \le n$, а $j = 0;1;2$, можна записати у вигляді:

$$y_* = b_0 \frac{x^\nu}{L^{(\nu)}[\alpha]} e^{\alpha x}, \quad j = 0; \tag{9.42}$$

$$y_* = b_1 \frac{x^{\nu+1} L^{(\nu)}[\alpha] - x^\nu L^{(\nu+1)}(\alpha)}{(\nu+1)\left(L^{(\nu)}[\alpha]\right)^2} e^{\alpha x}, \quad j = 1; \tag{9.43}$$

$$y_* = b_2 \left[\frac{(\nu+1)\, x^{\nu+2} \left(L^{(\nu)}[\alpha]\right)^2 - (\nu+2)\, x^{\nu+1} L^{(\nu)}[\alpha] L^{(\nu+1)}[\alpha]}{\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)}{2}\left(L^{(\nu)}[\alpha]\right)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\nu+2)\, x^\nu \left(L^{(\nu+1)}[\alpha]\right)^2 - (\nu+1)\, x^\nu L^{(\nu)}[\alpha]\, L^{(\nu+2)}[\alpha]}{\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)}{2}\left(L^{(\nu)}[\alpha]\right)^3} \right] e^{\alpha x}, \quad j = 2. \tag{9.44}$$

Наприклад, диференціальному рівнянню $L_2[y] = y'' - 4y' + 3y = \sin x$ другого порядку відповідає характеристичний тричлен $L_2[k] = k^2 - 4k + 3$. Оскільки

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \ i = \sqrt{-1},$$

то покладаючись на "принцип суперпозиції", розглядатимемо праву частину диференціального рівняння як таку, що складається з двох доданків — $e^{ix}/2i$ та $-e^{-ix}/2i$, для яких відповідно $j_1 = 0$, $b_{01} = 1/2i$, $\alpha_1 = i$, $L_2[\alpha_1] = L_2[i] = 2 - 4i \ne 0$, $\nu_1 = 0$ та $j_2 = 0$, $b_{02} = -1/2i$, $\alpha_2 = -i$, $L_2[\alpha_2] = L_2[-i] = 2 + 4i \ne 0$, $\nu_2 = 0$. Тож, вдаючись до формули (9.42), знайдемо окремий розв'язок рівняння (9.41) у вигляді

$$y_* = b_{01} \frac{x^{\nu_1}}{L_2^{(\nu_1)}[\alpha_1]} e^{\alpha_1 x} + b_{02} \frac{x^{\nu_2}}{L_2^{(\nu_2)}[\alpha_2]} e^{\alpha_2 x} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}}{2-4i} - \frac{e^{-ix}}{2+4i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{(2+4i)e^{ix}}{20} - \frac{(2-4i)e^{-ix}}{20}\right) = \frac{\sin x}{10} + \frac{\cos x}{5}.$$

Розглядаючи подібно рівняння $L_2[y] = y'' + y = x \sin x$, знайдемо такі його визначальні характеристики: $L_2[k] = k^2 + 1$; $j_1 = 1$, $b_{11} = 1/2i$, $\alpha_1 = i$, $L_2[\alpha_1] = L_2[i] = 0$, $L_2'[\alpha_1] = L_2'[i] = 2i \ne 0$, $\nu_1 = 1$, $L_2''[\alpha_1] = L_2[i] = 2$; $j_2 = 1$, $b_{12} = -1/2i$, $\alpha_2 = -i$,

$L_2[\alpha_2]=L_2[-i]=0$, $L_2'[\alpha_2]=L_2'[i]=-2i\neq 0$, $\nu_2=1$, $L_2''[\alpha_2]=L_2[-i]=2$. Тому, відповідно до (9.43)

$$y_*=b_{11}\frac{x^{\nu_1+1}L_2^{(\nu_1)}[\alpha_1]-x^{\nu_1}L_2^{(\nu_1+1)}[\alpha_1]}{(\nu_1+1)\left(L_2^{(\nu_1)}[\alpha_1]\right)^2}e^{\alpha_1 x}+$$

$$+b_{12}\frac{x^{\nu_2+1}L_2^{(\nu_2)}[\alpha_2]-x^{\nu_2}L_2^{(\nu_2+1)}[\alpha_2]}{(\nu_2+1)\left(L_2^{(\nu_2)}[\alpha_2]\right)^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{ix^2-x}{-4}e^{ix}-\frac{-ix^2-x}{-4}e^{-ix}\right)=$$

$$=\frac{x}{8i}\Big(-(ix-1)\,e^{ix}+(ix+1)\,e^{-ix}\Big)=\frac{x}{4}(x\cos x+\sin x)\,.$$

Рівнянню третього порядку $L_3[y]\equiv y'''-3y''+3y'+y=2x^2e^{-x}$ відповідають характеристики: $L_3[k]\equiv k^3-3k^2+3k+k=(k+1)^3$, $j=2$, $b_2=2$, $\alpha=-1$, $L_3[\alpha]=L_3[-1]=0$, $L_3''[\alpha]=L_3''[-1]=0$, $L_3'''[\alpha]=6\neq 0$, $L_3^{IV}[\alpha]=0$, $\nu=3$. Тому, відповідно до (9.44)

$$y_*=2\frac{4x^5\cdot 6^2-5x^4\cdot 6\cdot 0+5x^3\cdot 0^2-4x^3\cdot 6\cdot 0}{\frac{4^2\cdot 5}{2}6^3}e^{-x}=\frac{x^5}{30}e^{-x}\,.$$

Згадаємо, що розв'язок неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною $q(x)$ можна записати у вигляді

$$y=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_0^{(i-1)}\overset{n}{\Delta}_{ei}(x-x_0)\right)+y_*(x,x_0)\,, \tag{9.45}$$

де

$$\overset{n}{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1}\end{vmatrix},\quad \overset{n}{\Delta}_{e1}(x-x_0)=\begin{vmatrix}e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)}\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{ej}(x-x_0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{j-1} & k_2^{j-1} & \cdots & k_n^{j-1}\\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)}\\ k_1^{j+1} & k_2^{j+1} & \cdots & k_n^{j+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{en}(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)} \end{vmatrix};$$

$$y_0=y(x_0),\ y_0'=y'(x_0),\ y_0''=y''(x_0),\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}=y^{(n-1)}(x_0);$$

величина

$$y_*(x,x_0)=\frac{1}{p_0\overset{n}{\Delta}}\int_{x_0}^{x}q(s)\overset{n}{\Delta}_{en}(x-s)\,ds \tag{9.46}$$

є окремим розв'язком диференціального рівняння.

Відповідно до (3.37)

$$\underset{\bar{j}}{\overset{n-1}{\Delta}}=(-1)^{n+j}\,\frac{p_0}{L'[k_j]}\overset{n}{\Delta}\quad (j=\overline{1,n}),$$

а тому фундаментальну функцію і розв'язок диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (беручи до уваги (9.12)) можна записати у вигляді рівностей, відповідно,

$$K(x,\gamma)=\Phi(x,\gamma)=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \ldots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-\gamma)} & e^{k_2(x-\gamma)} & \ldots & e^{k_n(x-\gamma)} \end{vmatrix}=K(x-\gamma)=$$

$$=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}e^{k_j(x-\gamma)}\underset{\bar{j}}{\overset{n-1}{\Delta}}=p_0\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{k_j(x-\gamma)}}{L'[k_j]},$$

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_iK^{(i-1)}(x-\gamma)+\frac{1}{p_0}\int_{\gamma}^{x}q(s)K(x-s)\,ds=$$

$$=p_0\sum_{i=1}^{n}C_i\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j^{i-1}}{L'(k_j)}e^{k_j(x-\gamma)}+\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma}^{x}q(s)\frac{e^{k_j(x-s)}}{L'[k_j]}\,ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_0e^{k_i(x-\gamma)}\sum_{j=1}^{n}C_jk_i^{j-1}+\int_{\gamma}^{x}q(s)\,e^{k_i(x-s)}ds}{L'(k_i)}. \tag{9.47}$$

Окремий розв’язок тут має вигляд

$$y_* = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma}^{x} q(s) \frac{e^{k_j(x-s)}}{L'[k_j]}\, ds\,. \tag{9.48}$$

Зокрема, при $q = b_j x^j e^{\alpha x}$ (9.48) перетворюється у вираз

$$y_* = b_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\int_{\gamma}^{x} s^j e^{\alpha s} e^{k_i(x-s)}\, ds}{L'[k_i]}\,. \tag{9.49}$$

Окремий розв’язок рівняння (9.41) у формі (9.46), натомість, має вигляд

$$y_* = \frac{b_j}{\overset{n}{\Delta}} \int_{x_0}^{x} s^j e^{\alpha s} \overset{n}{\Delta}_n (x-s)\, ds =$$

$$= \frac{b_j}{\overset{n}{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1 x} \int_{x_0}^{x} s^j e^{(\alpha-k_1)s}\, ds & e^{k_2 x} \int_{x_0}^{x} s^j e^{(\alpha-k_2)s}\, ds & \cdots & e^{k_n x} \int_{x_0}^{x} s^j e^{(\alpha-k_n)s}\, ds \end{vmatrix}. \tag{9.50}$$

У виразі (9.50), зрештою, можна виконати операції інтегрування:

$$\int_{x_0}^{x} s^j e^{(\alpha-k_\nu)s}\, ds = \phi(x, j, \alpha - k_\nu) - \phi(x_0, j, \alpha - k_\nu) \;\; (k_\nu = \overline{1,n}\,),$$

де

$$\phi(s,m,a) = \int s^m e^{as} ds = \frac{s^m e^{as}}{a} - \frac{m}{a} \int s^{m-1} e^{as} ds =$$

$$= e^{as}\left(\frac{s^m}{a} - \frac{m s^{m-1}}{a^2} + \frac{m(m-1)s^{m-2}}{a^3} - + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{m!s}{a^m} + (-1)^m \frac{m!}{a^{m+1}} \right) =$$

$$= (-1)^m \frac{m!}{a^{m+1}} e^{as}\left(1 - \frac{as}{1!} + \frac{(-as)^2}{2!} + \frac{(-as)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-as)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{(-as)^m}{m!} \right) \;\; (m \in \mathrm{N} \cup \{0\}).$$

Таким чином, особливість рівняння зі степенево-показниковою правою частиною полягає у можливості побудови окремого розв’язку без знаходження коренів характеристичного многочлена. Форми ж (9.46), (9.48) запису окремого розв’язку обов'язково потребують обчислення цих коренів (див. (9.49), (9.50)). Проте, клопоту, пов'язаного зі знаходженням розв'язків характеристичного рівняння, не вдасться уникнути, коли йдеться про загальний розв'язок диференціального рівняння (див. (9.45) (9.47)).

Як зазначалося в 9.3, коли окремий розв'язок неоднорідного рівняння вдається знайти у формі $y_* = y_*(x)$, відмінній від $y_*(x, x_0)$, то загальний розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді (9.28).

9.6 Приклади рівнянь з негладкими правими частинами

В 2.2 стверджувалося, що функція $y = y(x)$ у проміжку $[-\pi, \pi]$ може бути зображена рядом (2.8) (Фур'є):

$$\frac{y(x-0)+y(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r \cos rx + b_r \sin rx),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(x)\,dx\,;\ a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(x)\cos rx\,dx\,,\quad b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(x)\sin rx\,dx \quad (r = 1;\ 2;\ \ldots).$$

Зобразимо таким рядом функцію (рис. 65)

$$q(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ q(x+2\pi) = q(x). \end{cases} \tag{9.51}$$

В даному випадку

$$a_r = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (\pi + x)\cos rx\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos rx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\cos rx\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi r}\left(-\int_{-r\pi}^{-r\frac{\pi}{2}} (\pi + \frac{s}{r})\cos s\,ds + \frac{1}{r}\int_{-r\frac{\pi}{2}}^{r\frac{\pi}{2}} s\cos s\,ds + \int_{r\frac{\pi}{2}}^{r\pi} (\pi - \frac{s}{r})\cos s\,ds \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi r}\left(-\pi \int\limits_{-r\pi}^{-r\frac{\pi}{2}} \cos s\,ds - \frac{1}{r}\int\limits_{-r\pi}^{r\pi} s\cos s\,ds + \frac{2}{r}\int\limits_{-r\frac{\pi}{2}}^{r\frac{\pi}{2}} s\cos s\,ds + \pi\int\limits_{\frac{r\pi}{2}}^{r\pi}\cos s\,ds \right) = 0\,, \quad r = 0; 1; 2; \ldots;$$

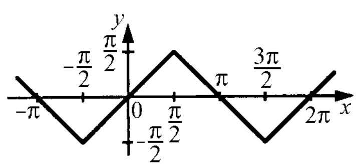
$$b_r = \frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (\pi + x)\sin rx\,dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin rx\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin rx\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi r}\left(-\int\limits_{-r\pi}^{-r\frac{\pi}{2}} (\pi + \frac{s}{r})\sin s\,ds + \frac{1}{r}\int\limits_{-r\frac{\pi}{2}}^{r\frac{\pi}{2}} s\sin s\,ds + \int\limits_{r\frac{\pi}{2}}^{r\pi} (\pi - \frac{s}{r})\sin s\,ds \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi r}\left(-\pi\int\limits_{-r\pi}^{-r\frac{\pi}{2}} \sin s\,ds - \frac{1}{r}\int\limits_{-r\pi}^{r\pi} s\sin s\,ds + \frac{2}{r}\int\limits_{-r\frac{\pi}{2}}^{r\frac{\pi}{2}} s\sin s\,ds + \pi\int\limits_{\frac{r\pi}{2}}^{r\pi} \sin s\,ds \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi r}\left(\pi\left(\cos\frac{r\pi}{2} - \cos r\pi \right) - \frac{1}{r}(\sin s - s\cos s)\Big|_{-r\pi}^{r\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r}(\sin s - s\cos s)\Big|_{-\frac{r\pi}{2}}^{\frac{r\pi}{2}} - \pi\left(\cos r\pi - \cos\frac{r\pi}{2} \right) \right) = \frac{4}{\pi r^2}\sin\frac{r\pi}{2}\,, \quad r = 1;\ 2;\ \ldots$$



65 **Графік функції** $y = \arcsin(\sin x)$ **.**

Зважаючи на те, що $b_{2\nu} = 0$, $b_{2\nu+1} = \dfrac{4(-1)^{\nu}}{\pi(2\nu+1)^2}$ ($\nu = 0; 1; \ldots$), матимемо:

$$q(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\sin(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^2}\,. \qquad (9.52)$$

Як відомо [39], достатньою умовою для того, щоб ряд Фур'є збігався до відповідної функції $q(x)$, є її періодичність, кускова монотонність (властивість кусками або не зростати, або не спадати) і обмеженість в $[-\pi,\pi]$. В даному випадку ця умова справджується. До того ж, на кінцях відрізків монотонності значення функції збігаються. Отже ряд Фур'є (9.52) збігається до функції (9.51) рівномірно на всій числовій восі.

Побудуємо окремий розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - \omega^2 y = q(x),$$

в якому $\omega = \text{const}$, а $q(x)$ задається рівнянням (9.51). Покладаючись на принцип суперпозиції (див. 4.9), розв'яжемо попередньо низку однотипних рівнянь

$$y'' - \omega^2 y = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}\sin(2\nu+1)x \quad (\nu = 0; 1; 2; \ldots). \tag{9.53}$$

Окремий розв'язок кожного з рівнянь (9.53) можна знайти безпосередньо у вигляді

$$y_{*\nu} = c_\nu \sin(2\nu+1)x. \tag{9.54}$$

Підставляючи (9.54) в (9.53), з'ясуємо, що

$$c_\nu = \frac{4(-1)^{\nu+1}}{\pi(2\nu+1)^2(\omega^2+(2\nu+1)^2)} \quad (\nu = 0; 1; 2; \ldots),$$

а отже

$$y_{*\nu} = \frac{4(-1)^{\nu+1}\sin(2\nu+1)x}{\pi(2\nu+1)^2(\omega^2+(2\nu+1)^2)} \quad (\nu = 0; 1; 2; \ldots).$$

Відповідно до принципу суперпозиції окремим розв'язком рівняння

$$y'' - \omega^2 y = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{\sin(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^2} \tag{9.55}$$

є ряд

$$y_* = \sum_{\nu=0}^{\infty} y_{*\nu} = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}\sin(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^2(\omega^2+(2\nu+1)^2)}, \tag{9.56}$$

якщо він збігається і підлягає двічі почленному диференціюванню.

Для того, щоб пересвідчитися в належній диференційовності ряду (9.56), звернемося водночас і до рядів

$$\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)(\omega^2+(2\nu+1)^2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} y'_{*\nu}, \tag{9.57}$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\sin(2\nu+1)x}{(\omega^2+(2\nu+1)^2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} y''_{*\nu}. \tag{9.58}$$

Вірним є таке важливе твердження: якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то його n-й член прямує до нуля при необмеженому зростанні n (тобто $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$). Рівність $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ як ознака збіжності є лише необхідною, але не достатньою, тобто з того, що $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ще не випливає, що ряд збігається, — ряд може і розбігатися. Натомість, якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то залишається стверджувати тільки одне — ряд розбігається (співвідношення $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ є достатньою ознакою розбіжності ряду).

Якщо існує натуральне число N таке, що для послідовності чисел $q_n = a_{n+1}/a_n$, побудованої з членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, для всіх $n \geq N$ справджується нерівність $a_{n+1}/a_n \leq q < 1$ (q — незалежне від n фіксоване число), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ збігається; якщо для всіх $n \geq N$ справджується нерівність $a_{n+1}/a_n \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ розбігається (ознака Даламбера збіжності-розбіжності числового ряду). Досить конструктивною є така ознака Даламбера: якщо в ряді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = l < \infty$, то 1) ряд збігається, коли $l < 1$, 2) ряд розбігається, якщо $l > 1$ (при $l = 1$ конкретного висновку щодо збіжності-розбіжності ряду немає). Часто корисною виявляється ознака Коші: якщо в ряді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < \infty,$$

то 1) ряд збігається, коли $l < 1$, 2) ряд розбігається, коли $l > 1$ (при $l = 1$ для з'ясування збіжності-розбіжності ряду потрібен додатковий аналіз, як і в попередньому випадку).

В подальшому знадобиться інтегральна ознака збіжності. Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є додатними і не зростають, тобто

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots > 0,$$

і нехай $f(x)$ — така неперервна незростаюча функція, що

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ldots,\ f(n) = a_n,\ \ldots$$

Тоді правдивими є твердження: 1) якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ збігається, то збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; 2) якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то розбігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сума $\sum\limits_{\nu=0}^{n} u_\nu(x)$ скінченної кількості неперервних в деякому проміжку функцій $u_\nu(x)$ ($\nu=\overline{0,n}$) завжди є неперервною функцією в цьому проміжку. Натомість, для функціонального ряду $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)$ (що складається з нескінченної кількості членів-доданків) ця властивість в загальному випадку не зберігається. Тільки рядам з певними ознаками властива неперервність. Однією з таких ознак є мажорованість.

Функціональний ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)$ називається мажорованим, якщо для нього можна вказати збіжний числовий ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, $a_\nu \ge 0$, $\nu = 0; 1; 2; \ldots$ такий, що $|u_\nu| \le a_\nu$ $\forall x \in X$ і $\forall \nu$. За Вейєрштрассом мажорований функціональний ряд збігається на множині X [39]. Власне мажорований ряд має такі важливі для аналізу властивості.

1° Сума $s(x)$ ряду $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)$ неперервних функцій, мажорованого в деякому проміжку $[a,b]$, є функцією, неперервною в цьому проміжку.

2° Інтеграл, який береться в проміжку $[\alpha, x] \in [a,b]$ від суми $s(x)$ мажорованого в $[a,b]$ ряду $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)$ неперервних функцій, дорівнює сумі таких самих інтегралів від членів цього ряду

$$\int\limits_{\alpha}^{x} s(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{x} u_\nu(x)\,dx .$$

3° Якщо ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)$, складений з функцій, що мають неперервні в $[a,b]$ похідні, збігається в $[a,b]$ до суми $s(x)$ і ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u'_\nu(x)$, складений з похідних від функцій першого ряду, є мажорованим в $[a,b]$, то сума ряду похідних дорівнює похідній від суми $s(x)$ первісного ряду:

$$s'(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u'_{\nu}(x)\ .$$

В даному випадку

$$|\,y_*\,|\le\frac{4}{\pi(2\nu+1)^2(\omega^2+(2\nu+1)^2)}\le\frac{4}{\pi(2\nu+1)^4}\quad\forall x\in\mathrm{R}\ ,$$

$$|\,y'_{*\nu}\,|\le\frac{4}{\pi(2\nu+1)(\omega^2+(2\nu+1)^2)}\le\frac{4}{\pi(2\nu+1)^3}\quad\forall x\in\mathrm{R}\ ,$$

$$|\,y''_{*\nu}\,|\le\frac{4}{\pi(\omega^2+(2\nu+1)^2)}\le\frac{4}{\pi(2\nu+1)^2}\quad\forall x\in\mathrm{R}\ .$$

Переконаємося, що збігаються числові ряди ($i=0;1;2$)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2\nu+1)^{2-i}(\omega^2+(2\nu+1)^2)}$$

і

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2\nu+1)^{4-i}}=\frac{4}{\pi}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2\nu+1)^{4-i}}\quad .$$

Для цього обчислимо інтеграл

$$\int_1^N\frac{4}{\pi(2x+1)^{4-i}}dx=\frac{2}{\pi(3-i)}\left(\frac{1}{3^{3-i}}-\frac{1}{(2N+1)^{3-i}}\right).$$

Він збігається при $N\to\infty$, а отже рядам (9.56)—(9.58) властива ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності на всій числовій осі. Таким чином, ряд (9.56) двічі почленно диференційовний, і отже, є окремим розв'язком рівняння (9.55), а разом з тим і рівняння $y''-\omega^2y=q(x)$ з правою частиною (9.51).

Вдамося до заміни змінних

$$x=\pi\left(2^{n+1}t-\frac{1}{2}\right),\quad q=\pi\left(2^{n+1}f_n-\frac{1}{2}\right),$$

і функцію (9.51) перетворимо на функцію $f_n(t)=\dfrac{1}{2^{n+1}\pi}q\left(2^{n+1}\pi t-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{2^{n+2}}$:

$$f_n(x)=\begin{cases} -t, & -\dfrac{1}{2^{n+2}}\le t\le 0,\\ t, & 0\le t\le \dfrac{1}{2^{n+1}},\\ \dfrac{1}{2^n}-t, & \dfrac{1}{2^{n+1}}\le t\le\dfrac{3}{2^{n+2}};\\ f_n\left(t+\dfrac{1}{2^n}\right), & \end{cases}\qquad (n=0;1;2;\ldots). \tag{9.59}$$

Структура $f_n(x)$ збігається зі структурою функцій, за допомогою яких будувалась в 2.5 неперервна недиференційовна функція Ван-дер-Вардена (див. рис. 58, 59).

Аналогічне перетворення ряду (9.52) дає новий ряд

$$f_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}\pi^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\sin\left((2\nu+1)\left(2^{n+1}t-1/2\right)\pi\right)}{(2\nu+1)^2}+\frac{1}{2^{n+2}}=$$

$$=-\frac{1}{2^{n-1}\pi^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\,\pi t\right)}{(2\nu+1)^2}+\frac{1}{2^{n+2}}, \tag{9.60}$$

який, зрозуміло, є Фур’є-зображенням функції (9.59). Відповідно Фур’є-зображенням функції Ван-дер-Вардена можна вважати ряд

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\,\pi t\right)}{(2\nu+1)^2}+\frac{1}{2}.$$

Тут враховано, що

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}=\frac{1}{2}.$$

Можна пересвідчитися, що окремий розв’язок рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\omega^2y\equiv y''-\omega^2y=\frac{1}{2^{n+2}}$$

має вигляд

$$y_{*\circ n}=-\frac{1}{2^{n+2}\omega^2}.$$

Окремим розв’язком рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\omega^2y\equiv y''-\omega^2y=-\frac{1}{2^{n-1}\pi^2}\frac{\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\,\pi t\right)}{(2\nu+1)^2}$$

є функція

$$y_{*\nu n}=\frac{1}{2^{n-1}\pi^2}\frac{\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\,\pi t\right)}{(2\nu+1)^2\left(\omega^2+2^{2(n+1)}\pi^2(2\nu+1)^2\right)}.$$

Отже, спираючись на принцип суперпозиції, можна стверджувати, що розв'язком рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\omega^2 y \equiv y''-\omega^2 y = f_n(t) \equiv -\frac{1}{2^{n-1}\pi^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\pi t\right)}{(2\nu+1)^2}+\frac{1}{2^{n+2}}$$

(з правою частиною (9.60)) є ряд

$$y_{*n}=\sum_{\nu=0}^{\infty}y_{*\nu n}+y_{*\circ n}=\frac{1}{2^{n-1}\pi^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\pi t\right)}{(2\nu+1)^2\left(\omega^2+2^{2(n+1)}\pi^2(2\nu+1)^2\right)}-\frac{1}{2^{n+2}\omega^2}.$$

Тоді розв'язком рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\omega^2 y = F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\equiv -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\pi t\right)}{(2\nu+1)^2}+\frac{1}{2} \tag{9.61}$$

повинна бути функція-ряд

$$y_*=\sum_{n=0}^{\infty}y_{*n}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\pi t\right)}{2^{n-1}(2\nu+1)^2\left(\omega^2+2^{2(n+1)}\pi^2(2\nu+1)^2\right)}-\frac{1}{2\omega^2}, \tag{9.62}$$

якій відповідають ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty}y'_{*n}=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left(2^{n+1}(2\nu+1)\pi t\right)}{(2\nu+1)\left(\omega^2+2^{2(n+1)}\pi^2(2\nu+1)^2\right)}, \tag{9.63}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}y''_{*n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{n+3}\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\pi t\right)}{\omega^2+2^{2(n+1)}\pi^2(2\nu+1)^2}. \tag{9.64}$$

Звернемося до поняття збіжності повторних та подвійних рядів. Такі ряди цікаві, зокрема, тим, що дозволяють формалізувати задачу про розв'язки системи нескінченної кількості лінійних алгебричних рівнянь з нескінченною кількістю невідомих (див., наприклад, [33]).

Нехай задано нескінченну множину чисел $a_i^{(r)}$ $(i=1,2,3,\dots;r=1,2,3,\dots)$, залежних від двох натуральних позначок i та r. Порозкладаємо їх у нескінченну прямокутну матрицю з двома входами

$$\begin{array}{|llllll}
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \dots & a_i^{(1)} & \dots \\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \dots & a_i^{(2)} & \dots \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \dots & a_i^{(3)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_1^{(r)} & a_2^{(r)} & a_3^{(r)} & \dots & a_i^{(r)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array} \tag{9.65}$$

В цій матриці можна пододавати елементи кожного рядка, отримавши нескінченну послідовність рядів $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(r)}$. Нескінченна сума рядів $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(r)}$ дає ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(r)} . \tag{9.66}$$

Можна спочатку пододавати елементи кожного стовпця матриці, а потім пододавати елементи послідовності рядів $\sum_{r=1}^{\infty} a_i^{(r)}$, отримавши ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} a_i^{(r)} . \tag{9.67}$$

А можна виконати операцію наскрізного додавання

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & a_1^{(1)} & + & a_2^{(1)} & + & a_3^{(1)} & + \ldots & a_i^{(1)} & + \ldots + & \\
+ & a_1^{(2)} & + & a_2^{(2)} & + & a_3^{(2)} & + \ldots & a_i^{(2)} & + \ldots + & \\
+ & a_1^{(3)} & + & a_2^{(3)} & + & a_3^{(3)} & + \ldots & a_i^{(3)} & + \ldots + & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \\
+ & a_1^{(r)} & + & a_2^{(r)} & + & a_3^{(r)} & + \ldots & a_i^{(r)} & + \ldots + & \\
+ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \equiv & \sum_{i,r=1}^{\infty} a_i^{(r)} .
\end{array} \tag{9.68}$$

Нарешті, елементи матриці (9.65) можна порозкладати багатьма способами у послідовність

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_r,\ \ldots \tag{9.69}$$

і за нею скласти ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r . \tag{9.70}$$

Ряди (9.66) і (9.67) називаються повторними, ряд (9.68) — подвійним, а ряд (9.70) — простим. Щодо цих рядів вірними є такі твердження.

1° Якщо 1) збігається подвійний ряд (9.68) і 2) збігаються ряди з елементів рядків матриці (9.65), то збігається повторний ряд (9.66), маючи ту саму суму A, що й подвійний ряд:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(r)} = A = \sum_{i,r=1}^{\infty} a_i^{(r)} .$$

Подібне можна стверджувати і щодо повторного ряду (9.67).

2° Нехай матриця (9.65) і послідовність (9.69) складаються з одних і тих самих членів. Тоді подвійний ряд (9.68), повторні ряди (9.66) і (9.67), простий ряд (9.70) — якщо хоча б один з них виявиться збіжним при заміні його членів їх абсолютними величинами — всі збігаються і мають одну і ту саму суму.

Спираючись на ці твердження, можна кількома способами пересвідчитися у збіжності повторних рядів, що фігурують в (9.62)—(9.64).

Позначимо

$$\frac{\cos\left(2^{n+1}(2\nu+1)\pi t\right)}{2^{n-1}\pi^2(2\nu+1)^2\left(\omega^2+2^{2(n+1)}\pi^2(2\nu+1)^2\right)}=g_{n,\nu} \tag{9.71}$$

і зазначені ряди запишемо у вигляді

$$s_i=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}g^{(i)}_{\nu,n},\ i=0,1,2. \tag{9.72}$$

Записані у формі (9.72) (за позначень (9.71)) повторні ряди “розсиплемо” у подвійні ряди

$$\tilde{s}_i=\sum_{\nu,n=0}^{\infty}g^{(i)}_{\nu,n},\ i=0,1,2. \tag{9.73}$$

Далі, з елементів подвійних рядів (9.73) укладемо ряди

$$\hat{s}_i=g^{(i)}_{0,0}+g^{(i)}_{1,0}+g^{(i)}_{0,1}+g^{(i)}_{1,1}+g^{(i)}_{2,1}+g^{(i)}_{1,2}+g^{(i)}_{2,2}+\ldots+$$

$$+g^{(i)}_{\nu,n}+g^{(i)}_{\nu+1,n}+g^{(i)}_{\nu,n+1}+g^{(i)}_{\nu+1,n+1}+\ldots,\ i=0,1,2, \tag{9.74}$$

які є, по суті, простими рядами типу (9.70).

Очевидно, що

$$|g^{(i)}_{\nu,n}|\le\frac{1}{2^{n-1-(n+1)i}\pi^{2-i}(2\nu+1)^{2-i}\left(\omega^2+2^{2(n+1)}\pi^2(2\nu+1)^2\right)}\le$$

$$\le\frac{1}{2^{3n+1-(n+1)i}\pi^{4-i}(2\nu+1)^{4-i}}.$$

За Вейєрштрассом ряди (9.74) можна було б визнати збіжними, якщо збіжними виявилися б ряди

$$r_i=a^{(i)}_{0,0}+a^{(i)}_{1,0}+a^{(i)}_{0,1}+a^{(i)}_{1,1}+a^{(i)}_{2,1}+a^{(i)}_{1,2}+a^{(i)}_{2,2}+\ldots+$$

$$+a^{(i)}_{n,n}+a^{(i)}_{n+1,n}+a^{(i)}_{n,n+1}+a^{(i)}_{n+1,n+1}+\ldots,\ i=0,1,2, \tag{9.75}$$

де

$$a^{(i)}_{\nu,n}=\frac{1}{2^{3n+1-(n+1)i}\pi^{4-i}(2\nu+1)^{4-i}}\quad(i=0,1,2).$$

Послідовно знайдемо

$$\frac{a_{\nu+1,n}^{(i)}}{a_{\nu,n}^{(i)}}=\left(\frac{2\nu+1}{2\nu+2}\right)^{4-i}<1 \quad \forall\nu,n\in\mathrm{N}<\infty,$$

$$\frac{a_{\nu,n+1}^{(i)}}{a_{\nu+1,n}^{(i)}}=\left(\frac{2\nu+2}{2\nu+1}\right)^{4-i}\frac{1}{2^{3-i}}<1 \quad \forall\nu\geq 1,\, n\in\mathrm{N},$$

$$\frac{a_{\nu+1,n+1}^{(i)}}{a_{\nu,n+1}^{(i)}}=\frac{a_{\nu+1,n}^{(i)}}{a_{\nu,n}^{(i)}}=\left(\frac{2\nu+1}{2\nu+2}\right)^{4-i}<1 \quad \forall\nu,n\in\mathrm{N}<\infty \quad (\forall i=0,1,2).$$

Таким чином, починаючи вже з п'ятих за ліком членів $a_{2,1}^{(i)}$, ознака Даламбера збіжності рядів (9.75) справджується, але "нерівномірно" вздовж ряду.

Укладемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n,n}^{(i)}+a_{n+1,n}^{(i)}+a_{n,n+1}^{(i)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{3-i}\pi^{4-i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+1-(n+1)i}}\frac{2^{3-i}(2n+3)^{4-i}+2^{3-i}(2n+1)^{4-i}+(2n+3)^{4-i}}{((2n+1)(2n+3))^{4-i}}.$$

В даному разі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2^{3-i}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{4-i}\left(2^{3-i}+2^{3-i}\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{4-i}+1\right)}{2^{3-i}\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{4-i}+2^{3-i}\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{4-i}+\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{4-i}}=\frac{1}{2^{3-i}}<1$$

і отже справджується (тепер "рівномірно") ознака Даламбера збіжності рядів (9.75). Звідси випливає, що збіжними є також і ряди (9.74) та (9.72).

Отже, ряд (9.62) — двічі почленно диференційовний окремий розв'язок рівняння (9.61).

Розв'язок рівняння $y''-\omega^2 y=q(x)$, коли функція $q(x)$ має вигляд (9.51) чи рівняння $y''-\omega^2 y=q(t)$, коли $q(t)$ має вигляд (9.59), можна отримати різними способами та ще й записати в різних формах.

Однотипним рівнянням (9.53), зокрема, відповідає одна і та сама фундаментальна функція (відповідно до (9.17))

$$K(x,\gamma)=\frac{\overset{2}{\Delta}_2(x-\gamma)}{\overset{2}{\Delta}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{k_1(x-\gamma)} & e^{k_2(x-\gamma)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ k_1 & k_2\end{vmatrix}}=\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-\gamma).$$

А отже їх розв'язки можна подати у вигляді (див. 8.3)

$$y_\nu = c_1 K(x,\gamma) + c_2 \dot{K}(x,\gamma) + \int_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}ds =$$

$$= c_1 \frac{\mathrm{sh}\omega(x-\gamma)}{\omega} - c_2\,\mathrm{ch}\omega(x-\gamma) + \frac{4}{\pi\omega}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}\int_\gamma^x \mathrm{sh}\omega(x-s)\sin(2\nu+1)s\,ds =$$

$$= c_1 \frac{\mathrm{sh}\omega(x-\gamma)}{\omega} - c_2\,\mathrm{ch}\omega(x-\gamma) +$$

$$+4(-1)^\nu \frac{\omega\sin(2\nu+1)\gamma\,\mathrm{ch}\omega(x-\gamma) + (2\nu+1)\cos(2\nu+1)\gamma\,\mathrm{sh}\omega(x-\gamma) - \omega\sin(2\nu+1)x}{\pi\omega(2\nu+1)^2(\omega^2+(2\nu+1)^2)},$$

де

$$y_{\circ\nu} = c_1 K(x,\gamma) + c_2\dot{K}(x,\gamma) \;\text{ і }\; y_{*\nu} = \int_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}ds$$

є розв'язками відповідно загальним однорідного рівняння $y'' - \omega^2 y = 0$ і окремим неоднорідного рівняння (9.53). Цей результат нічим по суті не відрізняється від отриманого раніше.

Натомість, розв'язком рівняння (9.55) є функція

$$y_\nu = c_1 K(x,\gamma) + c_2 \dot{K}(x,\gamma) + \int_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}ds =$$

$$= c_1 \frac{\mathrm{sh}\omega(x-\gamma)}{\omega} - c_2\,\mathrm{ch}\omega(x-\gamma) + \frac{4}{\pi\omega}\int_\gamma^x \mathrm{sh}\omega(x-s)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}\sin(2\nu+1)s\,ds =$$

$$= c_1 \frac{\mathrm{sh}\omega(x-\gamma)}{\omega} - c_2\,\mathrm{ch}\omega(x-\gamma) + \frac{4}{\pi\omega}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}\int_\gamma^x \mathrm{sh}\omega(x-s)\sin(2\nu+1)s\,ds \qquad (9.76)$$

(відповідно до викладеного раніше щодо інтегрування рядів внесення операції інтегрування під знак суми тут є допустимим).

Запишемо розв'язок рівняння $y'' - \omega^2 y = q(x)$ з правою частиною (9.51) у формі (9.27)

$$y = \frac{1}{\overset{2}{\Delta}}\left(y_0 \overset{2}{\Delta}_1(x-x_0) + y_0' \overset{2}{\Delta}_2(x-x_0) + \frac{1}{p_0}\int_{x_0}^x q(s)\overset{2}{\Delta}_2(x-s)\,ds \right),$$

$$y_0 = y(x_0),\; y_0' = y'(x_0).$$

Беручи до уваги вирази

$$\overset{2}{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ k_1 & k_2\end{vmatrix}=k_2-k_1=2\omega\,,$$

$$\overset{2}{\Delta}_1(x-x_0)=\begin{vmatrix}e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)}\\ k_1 & k_2\end{vmatrix}=k_2e^{k_1(x-x_0)}-k_1e^{k_2(x-x_0)}=2\omega\operatorname{ch}\omega(x-x_0)\,,$$

$$\overset{2}{\Delta}_2(x-x_0)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)}\end{vmatrix}=e^{k_2(x-x_0)}-e^{k_1(x-x_0)}=2\operatorname{sh}\omega(x-x_0)\,,$$

матимемо:

$$y=y_0\operatorname{ch}\omega(x-x_0)+\frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-x_0)+\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}q(s)\operatorname{sh}\omega(x-s)\,ds\,. \qquad (9.77)$$

Тут під q розуміємо функцію (9.51), див. рис. 65.

В (9.76) фігурує ряд (нескінченна сума), що визначає окремий розв'язок рівняння

$$y''-\omega^2y=q(x)\,.$$

Йому, однак, можна поставити у відповідність скінченну суму. Для цього, покладаючи

$$(2r-1)\pi\le x_0\le(2r+1)\pi\,,\ (2R-1)\pi\le x\le(2R+1)\pi\,,$$

де $r,R=\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$ ($R\ge r$), необхідно виконати в (9.77) операцію інтегрування:

$(2r-1)\pi\le x_0\le(2r-1)\pi+\frac{\pi}{2}$, $(2R-1)\pi\le x\le(2R-1)\pi+\frac{\pi}{2}$	$\omega y_*=\big((2r-1)\pi-x_0\big)\operatorname{ch}(x-x_0)-\operatorname{sh}(x-x_0)+4\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}(x-2r\pi)+\operatorname{sh}\big(x-(2r+1)\pi\big)+2\left(2\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sh}\pi\right)\sum_{k=r+1}^{R-1}\operatorname{ch}(x-2k\pi)-\operatorname{sh}\big(x-(2R-1)\pi\big)+x-(2R-1)\pi$
$(2r-1)\pi\le x_0\le(2r-1)\pi+\frac{\pi}{2}$, $(2R-1)\pi+\frac{\pi}{2}\le x\le 2R\pi+\frac{\pi}{2}$	$\omega y_*=\big((2r-1)\pi-x_0\big)\operatorname{ch}(x-x_0)-\operatorname{sh}(x-x_0)+4\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}(x-2r\pi)+\operatorname{sh}\big(x-(2r+1)\pi\big)+2\left(2\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sh}\pi\right)\sum_{k=r+1}^{R-1}\operatorname{ch}(x-2k\pi)-\operatorname{sh}\big(x-(2R-1)\pi\big)+2\operatorname{sh}\left(x-(2R-1)\pi-\frac{\pi}{2}\right)-x+2R\pi$

$(2r-1)\pi \le x_0 \le (2r-1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $2R\pi + \frac{\pi}{2} \le x \le (2R+1)\pi$	$\omega y_* = ((2r-1)\pi - x_0)\mathrm{ch}(x-x_0) - \mathrm{sh}(x-x_0) + 4\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\mathrm{ch}(x-2r\pi) + \mathrm{sh}(x-(2r+1)\pi) + 2\left(2\mathrm{sh}\frac{\pi}{2} - \mathrm{sh}\pi\right)\sum_{k=r+1}^{R-1}\mathrm{ch}(x-2k\pi) - \mathrm{sh}(x-(2R-1)\pi) + 4\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\mathrm{ch}(x-2R\pi) + x-(2R+1)\pi$
$(2r-1)\pi + \frac{\pi}{2} \le x_0 \le 2r\pi + \frac{\pi}{2}$, $(2R-1)\pi \le x \le (2R-1)\pi + \frac{\pi}{2}$	$\omega y_* = (x_0 - 2r\pi)\mathrm{ch}(x-x_0) + \mathrm{sh}(x-x_0) - 2\mathrm{sh}(x-2r\pi-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{sh}(x-(2r+1)\pi) + 2\left(2\mathrm{sh}\frac{\pi}{2} - \mathrm{sh}\pi\right)\sum_{k=r+1}^{R-1}\mathrm{ch}(x-2k\pi) - \mathrm{sh}(x-(2R-1)\pi) + x-(2R-1)\pi$
$(2r-1)\pi + \frac{\pi}{2} \le x_0 \le 2r\pi + \frac{\pi}{2}$, $(2R-1)\pi + \frac{\pi}{2} \le x \le 2R\pi + \frac{\pi}{2}$	$\omega y_* = (x_0 - 2r\pi)\mathrm{ch}(x-x_0) + \mathrm{sh}(x-x_0) - 2\mathrm{sh}(x-2r\pi-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{sh}(x-(2r+1)\pi) + 2\left(2\mathrm{sh}\frac{\pi}{2} - \mathrm{sh}\pi\right)\sum_{k=r+1}^{R-1}\mathrm{ch}(x-2k\pi) - \mathrm{sh}(x-(2R-1)\pi) + 2\mathrm{sh}\left(x-(2R-1)\pi-\frac{\pi}{2}\right) - x + 2R\pi$
$(2r-1)\pi + \frac{\pi}{2} \le x_0 \le 2r\pi + \frac{\pi}{2}$, $2R\pi + \frac{\pi}{2} \le x \le (2R+1)\pi$	$\omega y_* = (x_0 - 2r\pi)\mathrm{ch}(x-x_0) + \mathrm{sh}(x-x_0) - 2\mathrm{sh}(x-2r\pi-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{sh}(x-(2r+1)\pi) + 2\left(2\mathrm{sh}\frac{\pi}{2} - \mathrm{sh}\pi\right)\sum_{k=r+1}^{R-1}\mathrm{ch}(x-2k\pi) - \mathrm{sh}(x-(2R-1)\pi) + 4\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\mathrm{ch}(x-2R\pi) + x-(2R+1)\pi$
$2r\pi + \frac{\pi}{2} \le x_0 \le (2r+1)\pi$, $(2R-1)\pi \le x \le (2R-1)\pi + \frac{\pi}{2}$	$\omega y_* = ((2r+1)\pi - x_0)\mathrm{ch}(x-x_0) - \mathrm{sh}(x-x_0) + \mathrm{sh}(x-(2r+1)\pi) + 2\left(2\mathrm{sh}\frac{\pi}{2} - \mathrm{sh}\pi\right)\sum_{k=r+1}^{R-1}\mathrm{ch}(x-2k\pi) - \mathrm{sh}(x-(2R-1)\pi) + x-(2R-1)\pi$
$2r\pi + \frac{\pi}{2} \le x_0 \le (2r+1)\pi$, $(2R-1)\pi + \frac{\pi}{2} \le x \le 2R\pi + \frac{\pi}{2}$	$\omega y_* = ((2r+1)\pi - x_0)\mathrm{ch}(x-x_0) - \mathrm{sh}(x-x_0) + \mathrm{sh}(x-(2r+1)\pi) + 2\left(2\mathrm{sh}\frac{\pi}{2} - \mathrm{sh}\pi\right)\sum_{k=r+1}^{R-1}\mathrm{ch}(x-2k\pi) - \mathrm{sh}(x-(2R-1)\pi) + 2\mathrm{sh}\left(x-(2R-1)\pi-\frac{\pi}{2}\right) - x + 2R\pi$

$2r\pi+\frac{\pi}{2}\le x_0\le(2r+1)\pi$, $2R\pi+\frac{\pi}{2}\le x\le(2R+1)\pi$	$\omega y_*=\left((2r+1)\pi-x_0\right)\mathrm{ch}(x-x_0)-\mathrm{sh}(x-x_0)+$ $+\mathrm{sh}\left(x-(2r+1)\pi\right)+2\left(2\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}-\mathrm{sh}\pi\right)\sum_{k=r+1}^{R-1}\mathrm{ch}(x-2k\pi)-$ $-\mathrm{sh}\left(x-(2R-1)\pi\right)+4\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\mathrm{ch}(x-2R\pi)+x-(2R+1)\pi$

Функцію (9.51) можна записати і у вигляді $q=\arcsin(\sin x)$. В такому разі вірним є такий запис розв'язку рівняння $y''-\omega^2y=q(x)$:

$$y=y_0\mathrm{ch}\omega(x-x_0)+\frac{y_0'}{\omega}\mathrm{sh}\omega(x-x_0)+\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\arcsin(\sin s)\mathrm{sh}\omega(x-s)\,ds\ .$$

Аналогічно, кожну з функцій (9.59), що складають функцію Ван-дер-Вардена, можна записати у вигляді

$$f_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\arccos(\cos\ 2^{n+1}\pi x)\quad(n=0,1,2,\dots).$$

Тоді розв'язок рівняння (9.61) набуває вигляду

$$y=y_0\mathrm{ch}\omega(x-x_0)+\frac{y_0'}{\omega}\mathrm{sh}\omega(x-x_0)+\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\int_{x_0}^{x}\arccos(\cos\ 2^{n+1}\pi s)\mathrm{sh}\omega(x-s)\,ds\ .$$

З розв'язку рівняння (9.61) випливає, серед іншого, і те, що додаванням двох функцій, одна з яких ніде не диференційовна, можна побудувати всюди двічі диференційовну функцію.

За допомогою функції (2.39) (див. рис. 41) можна побудувати подібну ж функцію — "число 1 в точці $x=\alpha$"

$$y_{(1)}(x-\alpha)=2y_{(1/2)}(x-\alpha)=2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{x-\alpha}+t^{-(x-\alpha)}}=$$

$$=\lim_{\tau\to\infty}\frac{2}{e^{\tau(x-\alpha)}+e^{-\tau(x-\alpha)}}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}\tau(x-\alpha)}=\begin{cases}0 & \text{при } x\ne\alpha,\\ 1 & \text{при } x=\alpha\end{cases}$$

($\tau=\ln t$), яка набуває єдиного відмінного від нуля значення 1 при $x=\alpha$.

Окремим розв'язком рівняння $y''-\omega^2y=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\tau x}$ є функція

$$y_*=\int_{x_0}^{x}\frac{K(x,s)}{\mathrm{ch}\tau s}ds=\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{sh}\omega(x-s)}{\mathrm{ch}\tau s}ds=\frac{1}{\omega^2}\left(\mathrm{sh}\omega x\int_{\omega x_0}^{\omega x}\frac{\mathrm{ch}s}{\mathrm{ch}\frac{\tau}{\omega}s}ds-\mathrm{ch}\omega x\int_{\omega x_0}^{\omega x}\frac{\mathrm{sh}s}{\mathrm{ch}\frac{\tau}{\omega}s}ds\right).$$

В околі $\left(\frac{\tau}{\omega}s\right)^2 < \frac{\pi^2}{4}$ функцію $\omega^2 y_*$ можна, зокрема, розгорнути у суму

$$\omega^2 y_* = \operatorname{sh}\omega x \int_{\omega x_0}^{\omega x} \frac{\operatorname{ch}s}{\operatorname{ch}\frac{\tau}{\omega}s}ds - \operatorname{ch}\omega x \int_{\omega x_0}^{\omega x} \frac{\operatorname{sh}s}{\operatorname{ch}\frac{\tau}{\omega}s}ds =$$

$$= \operatorname{sh}\omega x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{E_n}{(2n)!}\left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{2n}\int_{\omega x_0}^{\omega x} s^{2n}\operatorname{ch}s\,ds - \operatorname{ch}\omega x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{E_n}{(2n)!}\left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{2n}\int_{\omega x_0}^{\omega x} s^{2n}\operatorname{sh}s\,ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_n\left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{2n}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(\omega x)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} - \operatorname{sh}\omega(x-x_0)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\omega x_0)^{2\nu}}{(2\nu)!} - \operatorname{ch}\omega(x-x_0)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(\omega x_0)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\right),$$

покладаючись на формули

$$\frac{1}{\operatorname{ch}z} = \operatorname{sech}z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 - \frac{61}{6!}z^6 + - \ldots + (-1)^n \frac{E_n}{(2n)!}z^{2n} - + \ldots \ (\ z^2 < \frac{\pi^2}{4}\ ),$$

$$\int s^{2n}\begin{Bmatrix}\operatorname{sh}s\\ \operatorname{ch}s\end{Bmatrix}ds = (2n)!\left(\sum_{\nu=0}^{n}\frac{s^{2\nu}}{(2\nu)!}\begin{Bmatrix}\operatorname{ch}s\\ \operatorname{sh}s\end{Bmatrix} - \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{s^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\begin{Bmatrix}\operatorname{sh}s\\ \operatorname{ch}s\end{Bmatrix}\right),$$

де

$$E_n = \frac{(2n)!}{(2n-2)!2!}E_{n-1} - \frac{(2n)!}{(2n-4)!4!}E_{n-2} + - \ldots + (-1)^{n-1}$$

(вважається, що $0! = 1$, $E_0 = 1$) або

$$E_n = \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left(1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + - \ldots\right)$$

є так званими числами Ойлера.

Отже диференційовна функція $q = 1/\operatorname{ch}(\tau x)$ при $0 \le \tau < \infty$ обов'язково певним чином позначається на розв'язках рівняння $y'' - \omega^2 y = 1/\operatorname{ch}(\tau x)$. Натомість, можна пересвідчитися, що збуренню $q = \lim_{\tau\to\infty} 1/\operatorname{ch}(\tau x)$, що є недиференційовною функцією, такий ефект цілком не властивий:

$$y_* = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\,y_{(1)}(s)\,ds = \frac{1}{\omega}\lim_{\tau\to\infty}\int_{x_0}^{x}\frac{\operatorname{sh}\omega(x-s)}{\operatorname{ch}\tau s}ds = 0\,.$$

Це в однаковій мірі стосується всіх тих збурень-функцій, що набувають обмежених відмінних від нуля значень в точках з множини виміру "нуль" (див., наприклад, функції (2.41), (2.42)).

Ситуація змінюється, коли збурення-функції в точках з множини виміру “нуль” набувають необмежених значень. Наприклад, при $q = \delta(x-\gamma)$ розв’язок неоднорідного рівняння $y'' - \omega^2 y = q(x)$

$$y = y_0 \operatorname{ch}\omega(x-x_0) + \frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-x_0) + \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\operatorname{sh}\omega(x-s)\,\delta(s-\gamma)\,ds =$$

$$= y_0 \operatorname{ch}\omega(x-x_0) + \frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-x_0) + \frac{\operatorname{sh}\omega(x-\gamma)}{\omega}\big(\theta(x-\gamma) - \theta(x_0-\gamma)\big), \qquad (9.78)$$

відрізняється від розв’язку

$$y = y_0 \operatorname{ch}\omega(x-x_0) + \frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-x_0)$$

однорідного рівняння $y'' - \omega^2 y = 0$ (тут враховано (2.19)). Зважаючи на (2.13), вираз (9.78) можна подати також у вигляді

$$= y_0 \operatorname{ch}\omega(x-x_0) + \frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-x_0) + \frac{\operatorname{sh}\omega(x-\gamma)}{\omega}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-n(x-\gamma)}} - \frac{1}{1+e^{-n(x_0-\gamma)}}\right).$$

10 РІЗНОВИДИ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ 10

10.1 Звичайне лінійне диференціальне рівняння і інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

Існують задачі, в рамках яких за математичну модель досліджуваного фізичного чи іншого явища природніше брати не диференціальне, а інтегральне рівняння, зокрема, — **лінійне інтегральне рівняння**

$$g(x)y(x)-\lambda\int_{\Omega} J(x,s)y(s)\,ds=q(x)\,,\ \ x\in\mathrm{Q}\,, \tag{10.1}$$

де $J(x,s)$ — **ядро інтегрального рівняння**; $q(x)$ — права частина з областю означення Q; $g(x)$ — функція-коефіцієнт; λ — параметр; $y(\cdot)$ — шукана функція з областю означення Ω (якщо Ω змінна, то йдеться про **вольтеррове** рівняння, при сталій Ω — про **фредгольмове**). Функції $J(x,s)$, $q(x)$, $g(x)$, параметр λ та області Q, Ω вважаються відомими; при цьому λ пересічно прирівнюють до 1 чи –1, $J(x,s)$, $q(x)$, $g(x)$, $y(\cdot)$ можуть бути як дійсними, так і комплексними, а змінні x і s — тільки дійсними.

У випадку, коли $g(x)\equiv 0$, рівняння (10.1) зводиться до так званого **лінійного інтегрального рівняння 1-го роду**

$$\int_{\Omega} J(x,s)y(s)\,ds=q(x)\,,\ \ x\in\mathrm{Q}\,; \tag{10.2}$$

Коли ж $g(x)\neq 0$, рівняння (10.1) можна поділити на $g(x)$ і, по суті, звести його до рівняння

$$y(x)-\lambda\int_{\Omega} J(x,s)y(s)\,ds=q(x)\,,\ \ x\in\mathrm{Q}\,, \tag{10.3}$$

яке називають **лінійним інтегральним рівнянням 2-го роду.** Розрізняють також і **лінійне інтегральне рівняння 3-го роду**, коли $g(x)\neq 0$ для деяких, але не всіх $x\in\mathrm{Q}$.

Рівняння (10.1) є **неоднорідним**, тоді як рівняння

$$y(x)-\lambda\int_{\Omega} J(x,s)y(s)\,ds=0\,,\ \ x\in\mathrm{Q} \tag{10.4}$$

($g(x)\equiv 1$, $q(x)\equiv 0$) — **однорідним**.

Кожне з рівнянь (10.1)—(10.4) можна записати в **операторній формі**:

$$gy - \lambda Ay = q\,,\ \ y \in Y\,,\ \ g \in G\,,\ \ q \in Q\,;$$

$$Ay = q\,,\ \ y \in Y\,,\ \ q \in Q\,;$$

$$y - \lambda Ay = q\,,\ \ y \in Y\,,\ \ q \in Q\,;$$

$$y - \lambda Ay = 0\,,\ \ y \in Y\,,$$

де

$$Ay = \int\limits_{\Omega} J(x,s)y(s)\,ds$$

Y, G, Q — деякі функційні простори, яким належать y, g, q відповідно, A — **оператор інтегрального перетворення**.

До переваг інтегральних рівнянь Вольтерри перш за все слід віднести зручність і компактність описання динамічних систем. Залежність між вихідними величинами і вхідними чинниками відображається інтегральними операторами, ядра яких вичерпно визначають внутрішні властивості моделей динамічних систем, а також мають зміст реакцій систем на типові збурення. Інтегральні рівняння Вольтерри постають, зокрема, при розв'язуванні задач фізики, в яких чітко простежуються переважні напрямки зміни незалежної змінної (наприклад, часу, енергії тощо). Числове втілення співвідношень типу інтегральних рівнянь виявляє високий рівень стійкості.

Виявляється, що розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)\,,\ \ x \ge 0\,, \qquad (10.5)$$

з початковими умовами

$$y(0) = y_0\,,\ \ y'(0) = y_0'\,,\ \ldots,\ \ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \qquad (10.6)$$

(тут коефіцієнти $p_1(x)$, …, $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ та вільний член $q(x)$ вважаються заданими неперервними при $x = 0$ функціями від змінної x; y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ — задані числа) збігається з розв'язком деякого еквівалентного **інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду**

$$y(x) - \int\limits_a^x J(x,s)y(s)\,ds = q(x)\,,\ \ x \in [a,b)\,. \qquad (10.7)$$

Щоб віднайти це **еквівалентне інтегральне рівняння**, покладемо

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x)\,,$$

звідки

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(s)\,ds + c_1\,,\ \ \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x\int_0^x u(s)\,ds ds + c_1 x + c_2\,,\ \ldots,$$

$$y = \int_0^x \overset{n}{\ldots} \int_0^x u(s)\,ds \overset{n}{\ldots} ds + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_n\,,$$

де c_i, $i = \overline{1,n}$, — довільні сталі. Отже, диференціальне рівняння (10.5) можна подати у вигляді інтегрального рівняння

$$u(x) + p_1(x)\int_0^x u(s)\,ds + p_2(x)\int_0^x\int_0^x u(s)\,ds ds + \ldots +$$

$$+ p_n(x)\int_0^x \overset{n}{\ldots} \int_0^x u(s)\,ds \overset{n}{\ldots} ds = q(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x)\,,$$

де

$$\alpha_i(x) = p_i(x) + \frac{x}{1!} p_{i+1}(x) + \ldots + \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} p_n(x)\,;$$

сталі c_i, $i = \overline{1,n}$, можна знайти за початковими умовами (10.6).

На підставі формули (1.25) отримане інтегральне рівняння зводиться до класичного вигляду (10.7):

$$u(x) - \int_0^x J(x,s)u(s)\,ds = f(x)\,,\ \ x \ge 0\,, \tag{10.8}$$

де

$$J(x,s) = -\left(p_1(x) + p_2(x)\frac{x-s}{1!} + \ldots + p_n(x)\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \right),$$

$$f(x) = q(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x)\,. \tag{10.9}$$

З першої формули (10.9) випливає, зокрема, що якщо коефіцієнти p_i, $i = \overline{1,n}$, диференціального рівняння (10.5) є сталими, то ядро $J(x,s)$ інтегрального рівняння (10.8) буде **різницевим**:

$$J(x,s) = J(x-s)\,.$$

Приклад 1 Нехай йдеться про задачу Коші

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = q(x)\,,\ \ y(0) = c_0\,,\ \frac{dy(0)}{dx} = c_1\,. \tag{10.10}$$

Покладемо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)\,. \tag{10.11}$$

В такому разі

$$\frac{dy}{dx}=\int\limits_0^x u(s)\,ds+c_1\,,\ \ y=\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^s u(t)\,dt+c_1\right)ds=\int\limits_0^x (x-s)\,u(s)\,ds+c_1x+c_0 \qquad (10.12)$$

Беручи до уваги (10.11) і (10.12), диференціальне рівняння (10.10) запишемо так:

$$u(x)+\int\limits_0^x p_1(x)u(s)\,ds+c_1p_1(x)+\int\limits_0^x p_2(x)(x-s)u(s)\,ds+c_1xp_2(x)+c_0p_2(x)=q(x)\,. \qquad (10.13)$$

Позначимо

$$J(x,s)=-p_1(x)-p_2(x)(x-s)\,,\ \ f(x)=q(x)-c_1p_1(x)-c_1xp_2(x)-c_0p_2(x)\,.$$

Рівність (10.13) набуде вигляду інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду

$$u(x)=\int\limits_0^x J(x,s)u(s)\,ds+f(x)\,.$$

Загальною аналітичною формою запису розв'язку інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду

$$y(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^x J(x,s)\,y(s)\,ds \qquad (10.14)$$

є вираз

$$y(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^x R(x,s)\,f(s)\,ds\,; \qquad (10.15)$$

ядро $J(x,s)$ тут задано в трикутнику $a<s\le x\le b$. Функція $R(x,s)$ називається **резольвентою** (або ж **резольвентним** чи **розв'язувальним ядром)** інтегрального рівняння.

Підставляючи послідовно $n+1$ разів у рівняння (10.14) замість $y(s)$ вираз, що стоїть у правій частині цього самого рівняння, матимемо

$$y(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^x J(x,s)\,f(s)\,ds+\lambda^2\int\limits_a^x J(x,s)\int\limits_a^s J(s,s_1)\,f(s_1)\,ds_1ds+$$

$$+\lambda^3\int\limits_a^x J(x,s)\int\limits_a^s J(s,s_1)\int\limits_a^{s_1} J(s_1,s_2)\,f(s_2)\,ds_2ds_1ds+\ldots+$$

$$+\lambda^n\int\limits_a^x J(x,s)\int\limits_a^s J(s,s_1)\ldots\int\limits_a^{s_{n-2}} J(s_{n-2},s_{n-1})\,f(s_{n-1})\,ds_{n-1}\ldots ds_1ds+\ldots+R_{n+1}(x)\,, \qquad (10.16)$$

де

$$R_{n+1}(x)=\lambda^{n+1}\int\limits_a^x J(x,s)\int\limits_a^s J(s,s_1)\ldots\int\limits_a^{s_{n-1}} J(s_{n-1},s_n)y(s_n)\,ds_n\ldots ds_1ds \qquad (10.17)$$

Таким чином, **розв'язок** рівняння (10.14) можна записати **у вигляді ряду** (10.16) з залишковим членом (10.17). Цей ряд є збіжним рівномірно для всіх x і s, належних окресленій трикутній області.

Справді, загальний член ряду має вигляд

$$y_n = \lambda^n \int_a^x J(x,s) \int_a^s J(s,s_1) \ldots \int_a^{s_{n-2}} J(s_{n-2}, s_{n-1}) f(s_{n-1})\, ds_{n-1} \ldots ds_1 ds\ ;$$

беручи до уваги те, що $a \le x \le b$, і покладаючи

$$|\, J(x,s) \,| \le M\ ,\ |\, f(s) \,| \le N\ ,\ |\, y(s) \,| < Y$$

(M, N, Y — сталі) матимемо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\, y_{n+1} \,|}{|\, y_n \,|} \le \lim_{n\to\infty} \left\{ \lambda \frac{M(b-a)}{n} \right\} = 0 \tag{10.18}$$

Залишковий член (10.17) при $n \to \infty$ необмежено зменшується:

$$\lim_{n\to\infty} |\, R_{n+1}(x) \,| \le \lim_{n\to\infty} \left\{ Y \frac{(\lambda M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \right\} = 0\,. \tag{10.19}$$

Співвідношення (10.18), (10.19) якраз і засвідчують, що шуканий розв'язок інтегрального рівняння (10.14) можна подати у вигляді збіжного (за будь-якого значення λ) ряду (10.16)

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_a^x J_i(x,s) f(s)\, ds\,.$$

Часто доводиться оперувати інтегральними рівняннями з ядрами, які в окремих точках області їх існування мають так звану **слабку особливість** — множник вигляду $(x-s)^{-\nu}$, $0 < \nu < 1$. Такі рівняння мають вигляд

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x J(x,s)\, y(s)\, ds = f(x) + \lambda \int_a^x \frac{H(x,s)}{(x-s)^{\nu}}\, y(s)\, ds\ ,$$

де $H(x,s)$ є обмеженою в трикутнику $a < s \le x \le b$ функцією:

$$|\, H(x,s) \,| < M\ ,\ M = \mathrm{const}\,.$$

Виявляється, що розв'язки і цих рівнянь, укладені у формі послідовних наближень, також збігаються за будь-якого λ, але дещо повільніше.

Порівнюючи (10.15) і (10.16), резольвенту запишемо у вигляді

$$R(x,s,\lambda) = J(x,s) + \lambda \int_a^s J(x,s)\, J(s,s_1)\, ds_1 + \lambda^2 \int_a^s \int_a^{s_1} J(x,s)\, J(s,s_1)\, J(s_1,s_2)\, ds_2 ds_1 + \ldots +$$

$$+ \lambda^n \int_a^s \int_a^{s_1} \ldots \int_a^{s_{n-1}} J(x,s)\, J(s,s_1) \ldots J(s_{n-2},s_{n-1})\, J(s_{n-1},s_n)\, ds_n \ldots ds_2 ds_1\,. \tag{10.20}$$

Якщо вдатися до **формули Діріхле**

$$\int_a^x \left(\int_a^s F(x,s,t)\,dt \right) ds = \int_a^x \left(\int_t^x F(x,s,t)\,ds \right) dt$$

і ввести **ітеровані ядра**

$$J_1(x,s) = J(x,s)\,,$$

$$J_2(x,s) = \int_s^x J_1(x,t)\,J(t,s)\,dt\,,$$

$$J_3(x,s) = \int_s^x J_2(x,t)\,J(t,s)\,dt\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_n(x,s) = \int_s^x J_{n-1}(x,t)\,J(t,s)\,dt\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{10.21}$$

то резольвенті можна надати простий вигляд

$$R(x,s,\lambda) = J_1(x,s) + \lambda J_2(x,s) + \ldots + \lambda^{n-1} J_n(x,s) + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i J_{i+1}(x,s)\,. \tag{10.22}$$

Ітеровані (повторні) ядра і резольвента не залежать від нижньої границі a в інтегральному ряді.

Між ядром і резольвентою, виявляється, існує зв'язок

$$R(x,s,\lambda) = J(x,s) + \lambda \int_s^x J(x,t)\,R(t,s,\lambda)\,dt$$

або

$$R(x,s,\lambda) = J(x,s) + \lambda \int_s^x R(x,t,\lambda)\,J(t,s)\,dt\,.$$

Друге співвідношення можна тлумачити як інтегральне рівняння для резольвенти $R(x,s,\lambda)$: резольвента $R(x,s,\lambda)$ в даному випадку править за невідому функцію, а ядро $J(x,s)$ — за задану функцію $f(x)$.

Окремі приклади ядер інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду, які мають елементарну структуру, і відповідних їм резольвент наведено в табл. 3. Алгоритм знаходження резольвенти, зокрема, для прикладу 14 можна легко простежити на такому менш загальному прикладі.

3 Приклади ядер і відповідних їм резольвент

N	$J(x,s)$	$R(x,s,\lambda)$
1	$a_0=\text{const}$	$a_0 e^{\lambda a_0(x-s)}$
2	$x-s$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\text{sh}\sqrt{\lambda}(x-s)$, $\lambda>0$
3	$2-(x-s)$	$e^{x-s}(x-s+2)$
4	$2x$	$2xe^{x^2-s^2}$
5	e^{x-s}	$e^{(\lambda+1)(x-s)}$
6	$e^{-(x-s)}$	$(x-s)e^{-(x-s)}$
7	$e^{x^2-s^2}$	$e^{\lambda(x-s)}e^{x^2-s^2}$
8	a^{x-s}, $a>0$	$a^{x-s}e^{\lambda(x-s)}$
9	$\sin(x-s)$	$x-s$
10	$2\cos(x-s)$	$2e^{x-s}(1+x-s)$
11	$\frac{2+\cos x}{2+\cos s}$	$\frac{2+\cos x}{2+\cos s}e^{\lambda(x-s)}$
12	$\frac{\text{ch}x}{\text{ch}s}$	$\frac{\text{ch}x}{\text{ch}s}e^{\lambda(x-s)}$
13	$\frac{1+x^2}{1+s^2}$	$\frac{1+x^2}{1+s^2}e^{\lambda(x-s)}$
14	$\sum_{r=0}^{n-1}a_r(x)\frac{(x-s)^r}{r!}$ ($a_r(x)$, $r=\overline{0,n-1}$, є неперервними в $[a,b)$)	$\frac{1}{\lambda}\frac{d^n\varphi(x,s;\lambda)}{dx^n}$, $\frac{d^n\varphi}{dx^n}-\lambda\left(a_0(x)\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}+a_1(x)\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}(x)\varphi\right)=0$, $\varphi\big\|_{x=s}=\frac{d\varphi}{dx}\Big\|_{x=s}=\ldots=\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}}\Big\|_{x=s}=0$, $\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\Big\|_{x=s}=1$
15	$\sum_{r=0}^{n-1}b_r(s)\frac{(s-x)^r}{r!}$ ($a_r(s)$ $r=\overline{0,n-1}$, є неперервними в $[a,b)$)	$-\frac{1}{\lambda}\frac{d^n\varphi(s,x;\lambda)}{ds^n}$, $\frac{d^n\varphi}{ds^n}+\lambda\left(b_0(s)\frac{d^{n-1}\varphi}{ds^{n-1}}+b_1(s)\frac{d^{n-2}\varphi}{ds^{n-2}}+\ldots+b_{n-1}(s)\varphi\right)=0$, $\varphi\big\|_{x=s}=\frac{d\varphi}{dx}\Big\|_{s=x}=\ldots=\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}}\Big\|_{s=x}=0$, $\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\Big\|_{s=x}=1$

Приклад 2 Нехай йдеться про резольвенту відповідну ядру $J(x,s)=x-s$. Запишемо допоміжне диференціальне рівняння ($\lambda=1$)

$$\frac{d^2\varphi(x,s)}{dx^2}-\varphi(x,s)=0\,,$$

звідки

$$\varphi(x,s)=c_1(s)e^x+c_2(s)e^{-x}\,.$$

Початкові умови набирають вигляду системи рівностей

$$\varphi(s,s)=c_1(s)e^s+c_2(s)e^{-s}=0\,,\ \frac{d\varphi(s,s)}{dx}=c_1(s)e^s-c_2(s)e^{-s}=1\,,$$

а тому

$$c_1(s)=\frac{1}{2}e^{-s}=0\,,\ c_2(s)=-\frac{1}{2}e^s\,,$$

$$\varphi(x,s)=\frac{1}{2}\left(e^{x-s}-e^{-(x-s)}\right)=\mathrm{sh}(x-s)\,.$$

Отже, остаточно маємо:

$$R(x,s,\lambda)=\frac{d^2\varphi(x,s;\lambda)}{dx^2}=\frac{d^2\mathrm{sh}(x-s)}{dx^2}=\mathrm{sh}(x-s)\,.$$

Зазначимо, що **однозначність розв'язності** інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду (10.14) обов'язково має місце за неперервних функції $f(x)$ і ядра $J(x,s)$. Вона зберігається також і за вимог до $f(x)$ і $J(x,s)$, значно слабкіших, ніж їх неперервність.

Нехай функції $f(x)$ і $F(x,s)$ означені відповідно в інтервалі $I=(a,b)$ і квадраті $\Omega\{a\le x,s\le b\}$. Кажуть, що $f(x)$ і $F(x,s)$ суть **функції з інтегровним квадратом** відповідно в $I=(a,b)$ і $\Omega\{a\le x,s\le b\}$ (належать просторам відповідно $\mathrm{L}_2(I)$ і $\mathrm{L}_2(\Omega)$), якщо інтеграли

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \ \text{ і } \int_a^b F^2(x,s)\,dsdx$$

існують, є скінченними:

$$\int_a^b f^2(x)\,dx<\infty \ \text{ і } \int_a^b F^2(x,s)\,dsdx<\infty\,.$$

Вірним є таке твердження: інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду (10.14), в якому функція $f(x)$ і ядро $J(x,s)$ належать відповідно просторам $\mathrm{L}_2(I)$ і $\mathrm{L}_2(\Omega)$), має один і тільки один розв'язок з простору $\mathrm{L}_2(I)$.

Інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду (10.14) зводиться до (лінійного) **інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду**

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} H(x,s)\, y(s)\, ds \,,$$

в якому $\Omega \equiv (0,\infty)$, якщо під ядром $H(x,s)$ розуміти функцію

$$H(x,s) = \begin{Bmatrix} J(x,s) & \text{при } s < x, \\ 0 & \text{при } s \ge x. \end{Bmatrix}$$

Інтегральне рівняння Вольтерри 1-го роду

$$\tilde{f}(x) - \int_0^x \tilde{J}(x,s)\, y(s)\, ds = 0 \,,$$

зводиться до інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду (10.14) диференціюванням, в якому

$$J(x,s) \equiv \frac{\dfrac{\partial \tilde{J}(x,s)}{\partial x}}{\tilde{J}(x,x)} \,, \quad f(x) \equiv \frac{\dfrac{d\tilde{f}(x)}{dx}}{\tilde{J}(x,x)} \,.$$

Піддамо інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду (10.7) інтегруванню за x, змінюючи одночасно послідовність інтегрування:

$$\int_a^x y(s)\, ds = \int_a^x q(s)\, ds + \int_a^x \int_a^s J(s,t) y(t)\, dt ds = \int_a^x q(s)\, ds + \int_a^x y(t) \int_t^s J(s,t) ds dt =$$

$$= \int_a^x q(s)\, ds + \int_a^x y(s) \int_s^s J(t,s)\, dt\, ds \,.$$

В результаті дійдемо до інтегрального рівняння Вольтерри 1-го роду

$$\int_0^x \tilde{J}(x,s)\, y(s)\, ds = \tilde{f}(x) \,, \ \ x \in [a,b)$$

з ядром

$$\tilde{J}(x,s) = 1 - \int_s^x J(t,s)\, dt = 0$$

і правою частиною

$$\tilde{f}(x) = \int_a^x f(s)\, ds = 0 \,.$$

Як форма аналітичного опису задачі Коші інтегральні рівняння Вольтерри 2-го роду є більш універсальними, ніж диференціальні рівняння. Тому не дивно, що перехід від диференціальних рівнянь до інтегральних, як засвідчено раніше, можливий за відносно слабких обмежень; натомість перейти від інтегральних рівнянь до диференціальних вдається тільки в особливих випадках. До таких особливих належить випадок **виродженого (розділеного) ядра**

$$J(x,s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta(x)\,,$$

якому відповідає лінійне інтегральне рівняння **з виродженим ядром**

$$y(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\int_a^x\beta_i(s)y(s)\,ds=q(x)\,,\ \ x\in[a,b)\,. \qquad (10.23)$$

Позначимо

$$v_i(x)=\int_a^x\beta_i(s)y(s)\,ds\,,\ \ i=\overline{1,n}\,, \qquad (10.24)$$

і запишемо (10.23) у вигляді виразу

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)v_i(x)+q(x)\,. \qquad (10.25)$$

Диференціюючи (10.25), з урахуванням (10.24) отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$v_i'(x)=\beta_i(x)\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_i(x)v_i(x)+q(x)\right),\ \ i=\overline{1,n}\,,$$

яка за початкових умов

$$v_i(a)=0\,,\ \ i=\overline{1,n}\,,$$

еквівалентна первісному рівнянню (10.23). Шуканий розв'язок можна визначити або за (10.25), або за еквівалентною формулою

$$y(x)=\frac{v_i'(x)}{\beta_i(x)}\,,\ \ i=\overline{1,n}\,,$$

отримуваною при диференціюванні (10.24).

Диференціюючи послідовно *n* разів за x вираз (10.23), можна отримати *n* диференціальних рівнянь порядків від першого до *n*-го. Разом з (10.23) вони складатимуть систему *n*+1 рівнянь, що має *n* членів $\dfrac{d^j\alpha_i(x)}{dx^j}\int_a^x\beta_i(s)y(s)\,ds\,,\ \ j=\overline{1,n}\,.$

Елімінуючи їх, можна безпосередньо дійти до диференціального рівняння *n*-го порядку зі змінними коефіцієнтами. Початкові умови при цьому знаходяться з первісного рівняння (10.23) і *n*–1 рівнянь, знайдених послідовним диференціюванням первісного рівняння при $x=a$.

Диференціальне рівняння n-го порядку

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} p_i y^{(n-i)}(x) = q(x), \ \ y^{(j)}(x_0) = y_{j0}, \ \ j = \overline{0, n-1}, \tag{10.26}$$

де p_i ($i = \overline{1, n}$) — сталі, y_{j0} — початкові параметри, можна записати у вигляді

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{m} p_i y^{(n-i)}(x) = q(x) - \sum_{i=m+1}^{n} p_i y^{(n-i)}(x).$$

Заміною змінних

$$u(x) = y^{(n-m)}(x), \ u'(x) = y^{(n-m+1)}(x), \ \ldots, \ u^{(m)}(x) = y^{(n)}(x)$$

останній вираз можна записати як рівняння m-го порядку

$$u^{(m)}(x) + \sum_{i=1}^{m} p_i \, u^{(i-1)}(x) = \psi(x) \tag{10.27}$$

де

$$\psi(x) = q(x) - \sum_{i=m+1}^{n} p_i y^{(n-i)}(x).$$

В свою чергу, системою підстановок (див. 7.6)

$$u = u_1, \ \frac{du}{dx} = u_2, \ \ldots, \ \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} = u_m \tag{10.28}$$

неоднорідне рівняння (10.27) зводиться до еквівалентної нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{du_1}{dx} = u_2, \ \frac{du_2}{dx} = u_3, \ \ldots, \ \frac{du_{m-1}}{dx} = u_m,$$

$$\frac{du_m}{dx} = -p_m u_1 - p_{m-1} u_2 - \ldots - p_1 u_m + \psi(x). \tag{10.29}$$

Матричний запис системи (10.29) має вигляд

$$\frac{d}{dx} U = PU + \Psi(x), \tag{10.30}$$

де

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_m & -p_{m-1} & -p_{m-2} & \ldots & -p_2 & -p_1 \end{bmatrix}, \ \Psi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi(x) \end{bmatrix}_m. \tag{10.31}$$

Взаємозв'язок між рівнянням і системою є вельми прозорим і тому дуже часто рівняння і систему вигідно розглядати як одне і те саме, оперуючи ними при розв'язуванні тієї чи іншої динамічної задачі одночасно (незалежно від конкретного змісту задачі).

Приклад 3 Систему

$$\frac{dy_1}{dx}=y_1+y_2+y_3\,,\ \frac{dy_2}{dx}=y_2-2y_3\,,\ \frac{dy_3}{dx}=y_1+y_3\,,$$

можна звести до диференціального рівняння третього порядку за допомогою операцій диференціювання.

Справді. Покладемо $y_1=y(x)$. Диференціюючи перше рівняння системи і беручи до уваги два інших, матимемо

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dy_2}{dx}+\frac{dy_3}{dx}=\frac{dy}{dx}+y+y_2-y_3\,.$$

Наступне диференціювання дає

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{dy_2}{dx}-\frac{dy_3}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-y+y_2-3y_3\,. \tag{10.32}$$

З нової системи двох рівнянь знайдемо:

$$y_2=\frac{y''}{2}-y\,,\ y_3=-\frac{y''}{2}+y'\,. \tag{10.33}$$

Підставляючи отриманий результат в (10.32) матимемо шукане рівняння:

$$y'''-3y''+2y'+2y=0\,.$$

Від розв'язку $y(x)$ цього рівняння до розв'язку $\{\,y_1(x)\,,\ y_2(x)\,,\ y_3(x)\,\}$ первісної системи можна повернутися, вдаючись до рівностей $y_1=y(x)$ і (10.33).

Розв'язок системи (10.29) (чи (10.30)) запишемо у вигляді (див. 7.8)

$$U(x)=e^{P(x-x_0)}U_0+\int_{x_0}^{x}e^{P(x-s)}\Psi(s)\,ds\,, \tag{10.34}$$

де (див. (10.28), (10.31))

$$U(x)=[u'(x), u''(x), \ldots, u^{(m-1)}(x), u^{(m)}(x)]^{\mathsf{T}}\,,$$

і

$$U_0=U(x_0)=[u'(x_0), u''(x_0), \ldots, u^{(m-1)}(x_0), u^{(m)}(x_0)]^{\mathsf{T}}\,,$$

$$\Psi(s)=[0,0,\ldots,0,\psi(x)]_m^{\mathsf{T}}\,.$$

Покладаючи (як і в 7.8) $e^{Px}=[\,g_{ij}(x)]$, розв'язок (10.34) системи (10.30) можна записати у вигляді

$$u_i=\sum_{j=1}^{m}g_{ij}(x-x_0)\,u_{j0}+\int_{x_0}^{x}\sum_{j=1}^{m}g_{ij}(x-s)\,\psi_j(s)\,ds\,,\ i=\overline{1,m}\,,$$

або розгорнуто

$$u_1 = g_{11}(x-x_0)u_{10} + \ldots + g_{1m}(x-x_0)u_{m0} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} [g_{11}(x-s)\psi_1(s) + \ldots + g_{1m}(x-s)\psi_m(s)]\, ds ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_m = g_{m1}(x-x_0)u_{10} + \ldots + g_{mm}(x-x_0)u_{m0} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} [g_{m1}(x-s)\psi_1(s) + \ldots + g_{mm}(x-s)\psi_m(s)]\, ds .$$

Оскільки

$$\psi_1(s) = \ldots = \psi_{m-1}(s) = 0 , \ \psi_m(s) = \psi(s) ,$$

то

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x-x_0)u_{j0} + \int_{x_0}^{x} g_{im}(x-s)\psi(s)\, ds , \ i = \overline{1,m} ;$$

звідси

$$u = \sum_{j=1}^{m} g_{1j}(x-x_0)u_{j0} + \int_{x_0}^{x} g_{1m}(x-s)\psi(s)\, ds .$$

З іншого боку, можна покласти (див. додаток С)

$$e^{xA} = E + \frac{x}{1!}A + \frac{x^2}{2!}A^2 + \frac{x^3}{3!}A^3 + \ldots + \frac{x^r}{r!}A^r + \ldots$$

і записати розв’язок (10.34) у вигляді ряду.

Розв’язки рівнянь (10.26) і (10.32) пов’язані рівністю

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \overset{n-m}{\ldots} \int_{x_0}^{x} u(s)\, ds \overset{n-m}{\ldots} ds = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} u(s)\, ds .$$

Змінюючи значення $m \in \overline{1,n}$, можна отримати різні варіанти перетворень рівнянь. При $m = n$ матимемо звичайне перетворення рівняння (10.26) у систему (10.29), у якій $u(x) = y(x)$, $\psi(x) = q(x)$. При $m = 0$ перетворення зводиться до знаходження з (10.26) старшої похідної $y^{(n)}$ і подальшого її n-кратного інтегрування.

Результатом такого перетворення є інтегральне рівняння

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} J(x-s)y(s)\,ds+F(x),$$

в якому

$$J(x-s)=\sum_{i=1}^{n} p_i\,\frac{(x-s)^{i-1}}{(i-1)!},$$

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}q(s)\,ds+y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+y_0^{(n-2)}\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+y_0'(x-x_0)^{n-1}+y_0 .$$

Торкнемося ще раз питання про зміну типу інтегрального рівняння. Нехай задано **інтегральне рівняння Вольтерри 1-го роду**

$$\int_{0}^{x} J(x,s)\,y(s)\,ds=q(x),\ q(0)=0, \tag{10.35}$$

де $y(x)$ — шукана функція. Причому, $J(x,s)$, $\dfrac{\partial J(x,s)}{\partial x}$, $q(x)$, $q'(x)$ — неперервні при $0\le t\le x\le a$. Диференціюючи обидві частини інтегрального рівняння (10.35) за x, матимемо:

$$J(x,x)\,y(x)+\int_{0}^{x}\frac{\partial J(x,s)}{\partial x}y(s)\,ds=q'(x). \tag{10.36}$$

Очевидно, що кожний неперервний при $0\le x\le a$ розв'язок $y(x)$ рівняння (10.35) задовольняє і рівняння (10.36); обернено, кожний неперервний при $0\le x\le a$ розв'язок $y(x)$ рівняння (10.36) задовольняє також і рівняння (10.35).

Якщо $J(x,x)$ не обертається на нуль в жодній точці з інтервалу $[0,a]$, то рівняння (10.36) можна подати у вигляді

$$y(x)=\frac{q'(x)}{J(x,x)}-\int_{0}^{x}\frac{\dfrac{\partial J(x,s)}{\partial x}}{J(x,x)}y(s)\,ds=$$

$$=f(x)+\int_{0}^{x}G(x,s)\,y(s)\,ds . \tag{10.37}$$

Таким чином, інтегральне рівняння Вольтерри 1-го роду (10.35) зводиться до інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду (10.37).

Якщо $J(x,x)\equiv 0$, інколи корисним стає диференціювати (10.36) за x, а потім, можливо, диференціювати ще й отриманий результат і так далі, поки все-таки не виникне рівняння Вольтерри 2-го роду.

Якщо $J(x,x)$ обертається на нуль в деякій окремій точці з інтервалу $[0,a]$, наприклад, в точці $x=0$, то рівняння (10.37) набуває особливих властивостей, цілком не подібних до властивостей інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду (через це Пікар рівняння з такими особливостями назвав **інтегральними рівняннями Вольтерри 3-го роду**). Кожне інтегральне рівняння Вольтерри 3-го роду привабливе в такій самій мірі, як і диференціальне рівняння з коефіцієнтом при старшій похідній, який набуває нульових значень в окремих точках.

Інтегральне рівняння 1-го роду

$$\int_0^x J(x-s)\,y(s)\,ds = q(x) \tag{10.38}$$

(в якому ядро залежить тільки від різниці $x-s$) називають **інтегральним рівнянням 1-го роду типу згортки**. Якщо

$$J(x,x)=J(0)\neq 0,$$

то рівняння (10.38) беззастережно має розв'язок.

Необхідною умовою існування неперервного розв'язку інтегрального рівняння

$$\int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,y(s)\,ds = q(x) \tag{10.39}$$

є існування неперервних до n-го порядку включно похідних від функції $q(x)$ і набування нульового значення всіма $n-1$ першими цими похідними в точці $x=0$. Рівняння (10.39) засвідчує необхідність погодження порядків обертання на нуль ядра $J(x-s)$ при $s=x$ та правої частини $q(x)$ при $x=0$ (можна казати, що порядок нуля правої частини повинен бути більшим принаймні на одиницю).

У рівнянні, наприклад,

$$\int_0^x (x-s)\,y(s)\,ds = x \tag{10.40}$$

$n=2$ і права частина

$$q(x)=x$$

має похідні всіх порядків, але похідна першого порядку $q'(x)=1$ не дорівнює нулю, а отже окреслена необхідна умова існування неперервного розв'язку не дотримується. Виявляється, що рівняння (10.40) задовольняє узагальнена функція

$$y=\delta(x),$$

в чому можна переконатися безпосередньо.

Можна вважати, що інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

$$y(x)+\int_0^x J(x,s)\,y(s)\,ds=q(x),$$

в якому J і q — неперервні функції своїх аргументів, породжене системою n лінійних рівнянь з n невідомими

$$y_i+\sum_{j=1}^{i-1} J_{ij}y_j=q_i,\ i=\overline{1,n},$$

коли кількість цих рівнянь зростає до нескінченності ($n\to\infty$), а отже, виникає необхідність дискретний індекс i замінити на неперервний x, а дискретний індекс j — на неперервний s. Ця лінійна система особлива тим, що її визначник дорівнює одиниці:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ J_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ J_{31} & J_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n1} & J_{n2} & J_{n3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1;$$

а тому, застосовуючи правило Крамера та беручи до уваги те, що $\Delta_{ij}=0$ при $i>j$ і $\Delta_{jj}=1$, матимемо розв'язок

$$y_j=q_j+\sum_{i=1}^{j-1}\Delta_{ij}q_i=q_j+\sum_{i=1}^{j-1}R_{ji}q_i\ \ (\Delta_{ij}=R_{ji}).$$

Застосовуючи такого типу правило до інтегрального рівняння, дійдемо висновку, що його розв'язок $y(x)$ можна записати у вигляді

$$y(x)=q(x)+\int_0^x R(x,s)\,q(s)\,ds,$$

де $R(x,s)$ — деяка функція, яку і називають розв'язувальним (взаємним, резольвентним) ядром.

На підставі аналогії з системою лінійних алгебричних рівнянь не складає труднощів побудувати систему ітерованих ядер $J_\nu(x,s)$ і через них знайти вже відому формулу

$$R(x,s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(x,s),$$

а також переконатися у збіжності останнього ряду і в тому, що $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_\nu(x,s)=0$.

10.2 Взаємозв'язок між окремими диференціальними задачами

Спробуємо віднайти розв'язок **диференціальної задачі**

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1} y'(x) + p_n y(x) = q(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{10.41}$$

(в якій p_0, p_1, …, p_{n-1}, p_n — задані дійсні числа, а $q(x)$ — відома неперервна функція), звертаючись до функції

$$z(x) = F_n(x) + R_n(x),$$

де $F_n(x)$ — означена раніше (див. 1.4) **узагальнена елементарна функція**. Сподіваючись, що функція $F_n(x)$ може виявитись **наближеним розв'язком** диференціальної задачі (10.41), $R_n(x)$ тлумачитимемо як **функцію невідповідності** $F_n(x)$ точному розв'язкові цієї задачі.

Накладемо на функцію $z(x)$ умови

$$z(x_0) = y(x_0) = y_0, \ z'(x_0) = y'(x_0) = y'_0, \ \ldots, \ z^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

завдяки чому основна складова $F_n(x)$ цієї функції набуде вигляду

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{rei}(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}_r},$$

де

$$\overset{n}{\Delta}_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad \overset{n}{\Delta}_{re1}(x - x_0) = \begin{vmatrix} e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{rej}(x - x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{j-1} & r_2^{j-1} & \cdots & r_n^{j-1} \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \\ r_1^{j+1} & r_2^{j+1} & \cdots & r_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2} \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \end{vmatrix};$$

r_1, r_1, …, r_n — довільні комплексні числа, які, зокрема, можуть бути коренями деякого алгебричного рівняння

$$P[r]=P[r,b]\equiv r^n+b_1r^{n-1}+\cdots+b_{n-1}r+b_n=0\,, \tag{10.42}$$

(b_1, b_2, …, b_n — дійсні числа).

Алгоритм побудови функції невідповідності $R_n(x)$ спирається на застосування функції

$$\xi(s)=z^{(n)}(s)+b_1z^{(n-1)}(s)+\ldots+b_{n-1}z'(s)+b_nz(s)\,,$$

де b_1, b_2, …, b_n — коефіцієнти алгебричного рівняння (10.42). Бажаючи, щоб функція $z(x)$ була розв'язком $y(x)$ лінійної диференціальної задачі (10.41), покладемо

$$\xi(s)=y^{(n)}(s)+b_1y^{(n-1)}(s)+\ldots+b_{n-1}y'(s)+b_ny(s)\,. \tag{10.43}$$

Знаходячи з диференціального рівняння задачі (10.41) величину $y^{(n)}$ і підставляючи її в (10.43), знайдемо:

$$\xi(s)=\frac{q(s)}{p_0}+\left(b_1-\frac{p_1}{p_0}\right)y^{(n-1)}(s)+\ldots+\left(b_{n-1}-\frac{p_{n-1}}{p_0}\right)y'(s)+\left(b_n-\frac{p_n}{p_0}\right)y(s)\,.$$

Останній вираз можна подати у вигляді

$$\xi(s)=\zeta(s)+\mu(s)\,,$$

вирізняючи задану складову

$$\zeta(s)=\frac{q(s)}{p_0}\,,$$

та складову

$$\mu(s)=\left(b_1-\frac{p_1}{p_0}\right)y^{(n-1)}(s)+\ldots+\left(b_{n-1}-\frac{p_{n-1}}{p_0}\right)y'(s)+\left(b_n-\frac{p_n}{p_0}\right)y(s)\,,$$

яка не окреслена.

Легко побачити можливість усунути невідому функцію $\mu(s)$ і побудувати **точний розв’язок** диференціальної задачі: необхідно лише вимагати, щоб r_1, r_2, $\ldots$, r_n були коренями алгебричного рівняння (10.42), а водночас покласти

$$b_1 = \frac{p_1}{p_0}\,,\ \ldots,\ b_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{p_0}\,,\ b_n = \frac{p_n}{p_0}\,.$$

В такому разі r_1, r_2, $\ldots$, r_n набувають деяких значень k_1, k_2, $\ldots$, k_n, функція невідповідності — вигляду

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p_0} \frac{\overset{n}{\Delta}_{ken}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_k}\, ds\,,$$

а алгебричне рівняння (10.42) стає **характеристичним рівнянням**

$$p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0\,.$$

Виникає можливість записати:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{kei}(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k} + R_n(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{kei}(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k} + \int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p_0} \frac{\overset{n}{\Delta}_{ken}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_k}\, ds\,.$$

Це і є запис точного розв’язку диференціальної задачі (10.41).

Розглянемо тепер диференціальну задачу

$$p_0(x) y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}(x) y'(x) + p_n(x) y(x) = q(x)\,,$$

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_0'\,,\ \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{10.44}$$

зі змінними дійсними коефіцієнтами $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$. Знову звернемося до функцій

$$z(x) = F_n(x) + R_n(x)\,,\ F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} z^{(i-1)}(x_0) \frac{\overset{n}{\Delta}_{kei}(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k}\,,$$

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \xi(s) \frac{\overset{n}{\Delta}_{ken}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_k}\, ds\,,\ \xi(s) = z^{(n)}(s) + b_1 z^{(n-1)}(s) + \ldots + b_{n-1} z'(s) + b_n z(s)\,,$$

де b_1, b_2, …, b_n — дійсні числа, які є коефіцієнтами алгебричного рівняння

$$k^n + b_1 k^{n-1} + \ldots + b_{n-1}k + b_n = 0,$$

на коренях якого побудовано вирази $\overset{n}{\Delta}_k$, $\overset{n}{\Delta}_{kei}(x - x_0)$.

Нехай $y(x)$ — розв'язок задачі (10.44). Покладемо $z(x) \equiv y(x)$. Діючи так само, як і у випадку задачі (10.41) зі сталими коефіцієнтами, подамо $\xi(s)$ у вигляді

$$\xi(s) = \frac{q(s)}{p_0(s)} + \left(b_1 - \frac{p_1(s)}{p_0(s)}\right) y^{(n-1)}(s) + \ldots + \left(b_{n-1} - \frac{p_{n-1}(s)}{p_0(s)}\right) y'(s) + \left(b_n - \frac{p_n(s)}{p_0(s)}\right) y(s).$$

В такому разі стає можливим подати розв'язок задачі (10.44) у вигляді

$$y(x) = Y(x) + \rho(x),$$

де

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{kei}(x - x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k} + \int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p_0(s)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{ken}(x - s)}{\overset{n}{\Delta}_k} ds, \quad \rho(x) = \int_{x_0}^{x} \mu(s) \frac{\overset{n}{\Delta}_{ken}(x - s)}{\overset{n}{\Delta}_k} ds,$$

$$\mu(s) = \left(b_1 - \frac{p_1(s)}{p_0(s)}\right) y^{(n-1)}(s) + \ldots + \left(b_{n-1} - \frac{p_{n-1}(s)}{p_0(s)}\right) y'(s) + \left(b_n - \frac{p_n(s)}{p_0(s)}\right) y(s).$$

Необхідно, однак, доозначити розв'язок задачі, оскільки функція $\mu(s)$ залишається невідомою, а тому неможливо визначити відповідну їй функцію $\rho(x)$ чи оцінити точність відображення $y(x) \approx Y(x)$. Доозначення можна здійснити, зокрема, мінімізуючи функцію невідповідності $\rho(x)$ за рахунок раціонального добору параметрів b_1, b_2, …, b_n.

Визначимо параметри b_1, b_2, …, b_n, мінімізуючи в деякому інтервалі $[x_0, x_1]$ інтеграли

$$J_i = \int_{x_0}^{x_1} \left(b_i - p_i(s)\right)^2 ds, \quad i = \overline{1, n}.$$

З умов $\partial J_1/\partial b_i = \partial J_2/\partial b_2 = \ldots \partial J_n/\partial b_n = 0$ випливають рівності

$$b_i = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} p_i(s)\, ds. \qquad (10.45)$$

Отже, якщо дотримуються умови (10.45), то виникають певні підстави вважати, що $y(x) \approx Y(x) \forall x \in [x_0, x_1]$.

Викладений метод з відповідними застереженнями можна застосувати до розв'язування навіть **нелінійних диференціальних рівнянь**. Звернемося до задачі

$$y^{(n)}(x)+V\Big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\Big)=q(x);$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Розв'язок цієї задачі можна записати у вигляді

$$y(x)=Y(x)+\rho(x).$$

Тут

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \frac{\overset{n}{\Delta}_{kei}(x-x_0)}{\overset{n}{\Delta}_k}+\int_{x_0}^{x} q(s) \frac{\overset{n}{\Delta}_{ken}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_k}\, ds,$$

$$\rho(x)=\int_{x_0}^{x} \mu(s) \frac{\overset{n}{\Delta}_{ken}(x-s)}{\overset{n}{\Delta}_k}\, ds,$$

$$\mu(s)=b_n y(s)+b_{n-1} y'(s)+\ldots+b_1 y^{(n-1)}(s)-V\Big(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s)\Big),$$

де параметри b_1, b_2, …, b_n є коефіцієнтами визначального алгебричного рівняння

$$k^n+b_1 k^{n-1}+\ldots+b_{n-1} k+b_n=0.$$

Певні підстави вважати функцію $y(x)$ близькою до функції $Y(x)$ хоча б в околі точки $x=x_0$ виникають тоді, зокрема, коли параметри b_1, b_2, …, b_n є такими, що

$$\mu(x_0)=\mu'(x_0)=\ldots=\mu^{(n-1)}(x_0)=0.$$

На деякі задачі є сенс подивитися під дещо іншим кутом зору.

Нехай задано неоднорідне диференціальне рівняння

$$L[y, a] \equiv a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_n y=q(x), \quad a_0 \neq 0, \quad a<x<b. \tag{10.46}$$

Йому відповідають **характеристичне рівняння**

$$P_r[r]=P[r, a] \equiv a_0 r^n+a_1 r^{n-1}+\cdots+a_{n-1} r+a_n=0, \tag{10.47}$$

і розв'язок

$$y_r=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r}\left(\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \overset{n}{\Delta}_{rei}(x-x_0)+\frac{1}{p_0}\int_{x_0}^{x} q(s) \overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)\, ds\right), \tag{10.48}$$

який задовольняє початкові умови

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{10.49}$$

Тут $q(x)$ — неперервна функція $\forall x\in I=(a,b)$,

$$\overset{n}{\Delta}_r=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{re1}(x-x_0)=\begin{vmatrix} e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)}\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{rej}(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{j-1} & r_2^{j-1} & \cdots & r_n^{j-1}\\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)}\\ r_1^{j+1} & r_2^{j+1} & \cdots & r_n^{j+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2}\\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)}\end{vmatrix}, \tag{10.50}$$

Паралельно розглядатимемо рівняння

$$L[y,p]\equiv p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_ny=q(x),\quad p_0\neq 0,\quad a<x<b, \tag{10.51}$$

якому відповідають **характеристичне рівняння**

$$P_k[k]=P[k,p]\equiv p_0k^n+p_1k^{n-1}+\cdots+p_{n-1}k+p_n=0 \tag{10.52}$$

і розв’язок

$$y_k = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}_k}\left(\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \overset{n}{\Delta}_{kei}(x-x_0) + \frac{1}{p_0}\int_{x_0}^{x} p(s)\overset{n}{\Delta}_{ken}(x-s)\,ds\right). \qquad (10.53)$$

Цей розв’язок також повинен задовольняти окреслені раніше початкові умови (10.49). Тут подібно до (10.50)

$$\overset{n}{\Delta}_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{ke1}(x-x_0) = \begin{vmatrix} e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{kej}(x-x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{j-1} & k_2^{j-1} & \cdots & k_n^{j-1} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)} \\ k_1^{j+1} & k_2^{j+1} & \cdots & k_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{ken}(x-x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \cdots & k_n^{n-2} \\ e^{k_1(x-x_0)} & e^{k_2(x-x_0)} & \cdots & e^{k_n(x-x_0)} \end{vmatrix}. \qquad (10.54)$$

Виявляється, що розв’язок рівняння (10.51) можна записати через розв’язок (10.48) рівняння (10.46) у такому вигляді:

$$y_k(x) = y_r(x) + \zeta_r(x), \qquad (10.55)$$

де

$$\zeta_r(x) = \frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r} \int_{x_0}^{x} \mu(s) \overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)\, ds \, . \tag{10.56}$$

Тут функція $\mu(x)$ є **розв'язком** інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду

$$\mu(x) = \mu_0(x) - \frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r} \int_{x_0}^{x} \Phi(x-s)\mu(s)\, ds \, , \tag{10.57}$$

в якому

$$\mu_0(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{a_{n-i}}{a_0} - \frac{p_{n-i}}{p_0} \right) y_r^{(i)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{n-i+1}}{a_0} - \frac{p_{n-i+1}}{p_0} \right) y_r^{(i-1)}(x) =$$

$$= \left(\frac{a_n}{a_0} - \frac{p_n}{p_0} \right) y_r(x) + \left(\frac{a_{n-1}}{a_0} - \frac{p_{n-1}}{p_0} \right) y_r'(x) + \ldots + \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{p_1}{p_0} \right) y_r^{(n-1)}(x) \, , \tag{10.58}$$

$$\Phi(x-s) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2} \\ \phi_1 e^{r_1(x-s)} & \phi_2 e^{r_2(x-s)} & \cdots & \phi_n e^{r_n(x-s)} \end{vmatrix} , \tag{10.59}$$

$$\phi_\nu = \frac{P_k(r_\nu)}{p_0} = r_\nu^n + \frac{p_1}{p_0} r_\nu^{n-1} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{p_0} r_\nu + \frac{p_n}{p_0} \, , \ \nu = \overline{1, n} \tag{10.60}$$

Співвідношення (10.55)—(10.60) ідентифікують взаємозв'язок між розв'язками рівнянь (10.46) і (10.51). Зважаючи на структуру виразу (10.56), можна говорити, що за умов (10.57)—(10.60) рівняння (10.51) в певному сенсі еквівалентне рівнянню

$$L[y, a, \mu] \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = q(x) + a_0 \mu(x) \, , \ a_0 \neq 0 \, , \ a < x < b \, .$$

З іншого боку, характеристичне рівняння (10.47), якщо воно укладене так, щоб його точні корені були наперед відомими, можна тлумачити як наближене прочитування характеристичного рівняння (10.52), корені якого, а отже і значення величин (10.54), важко або неможливо точно зідентифікувати. В такому разі функцію (10.48) є сенс вважати наближеним відображенням точного розв'язку (10.53) диференціального рівняння (10.51). Беручи різні системи чисел r_1, r_2, …, r_n, можна побудувати найрізноманітніші характеристичні рівняння (10.47) і перші наближення розв'язку (10.53). Очевидно, що при $r_i = k_i$, $i = \overline{1, n}$, функція $\mu(x)$ перетвориться на тотожний нуль, а отже наближений розв'язок (10.47) трансформується у точний (10.53).

За будь-якого (з наперед заданими коренями) рівняння (10.47) відомими стають всі елементи інтегрального рівняння Вольтерри (10.57). Тому розв'язуючи це інтегральне рівняння методом послідовних наближень, завжди можна з бажаною точністю віднайти функцію $\mu(x)$, а разом з нею і розв'язок диференціального рівняння (10.51). Це означає, що існує можливість побудови наближеного розв'язку диференціального рівняння без розв'язування відповідного йому характеристичного рівняння.

Наголосимо на тому, що функції $\mu_0(x)$ і $\Phi(x-s)$ — неперервні, а це забезпечує існування і єдиність розв'язку інтегрального рівняння (10.57), а також збіжність процесу послідовних наближень.

Стосовно задачі (10.44) зі змінними дійсними коефіцієнтами вірними є такі твердження [21].

1° Якщо $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_n(x)$, $q(x)$ є неперервними функціями в деякому інтервалі $[a,b]$ з точкою x_0 і в жодній точці з $[a,b]$ функція $p_0(x)$ не обертається на нуль, то шуканий розв'язок задачі (10.44) можна записати у вигляді

$$y(x)=y_r(x)+\zeta_r(x), \tag{10.61}$$

де

$$y_r=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r}\left(\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)}\overset{n}{\Delta}_{rei}(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{q(s)}{p_0(s)}\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)\,ds\right), \tag{10.61.1}$$

$$\zeta_r(x)=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r}\int_{x_0}^{x}\mu(s)\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)\,ds; \tag{10.61.2}$$

$$\overset{n}{\Delta}_r=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1}\end{vmatrix},\quad \overset{n}{\Delta}_{re1}(x-x_0)=\begin{vmatrix}e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)}\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{rej}(x-x_0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{j-1} & r_2^{j-1} & \cdots & r_n^{j-1}\\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)}\\ r_1^{j+1} & r_2^{j+1} & \cdots & r_n^{j+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2} \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \end{vmatrix}; \qquad (10.61.3)$$

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \ \ (r = r_1, r_1, \ldots, r_n); \qquad (10.61.4)$$

$$\mu(s)=\left(\frac{a_n}{a_0}-\frac{p_n(s)}{p_0(s)}\right)y(s)+\left(\frac{a_{n-1}}{a_0}-\frac{p_{n-1}(s)}{p_0(s)}\right)y'(s)+\ldots+\left(\frac{a_1}{a_0}-\frac{p_1(s)}{p_0(s)}\right)y^{(n-1)}(s); \qquad (10.61.5)$$

при цьому

$$\mu(x)=\mu_r(x)+\int_{x_0}^{x}\Phi(x,s)\mu(s)ds, \qquad (10.61.6)$$

$$\mu_r(x)=\left(\frac{a_n}{a_0}-\frac{p_n(x)}{p_0(x)}\right)y_r(x)+\left(\frac{a_{n-1}}{a_0}-\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}\right)y_r'(x)+\ldots+\left(\frac{a_1}{a_0}-\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right)y_r^{(n-1)}(x), \qquad (10.61.7)$$

$$\Phi(x,s)=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r}\left(\left(\frac{a_n}{a_0}-\frac{p_n(x)}{p_0(x)}\right)\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)+\left(\frac{a_{n-1}}{a_0}-\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}\right)\frac{\partial \overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\left(\frac{a_1}{a_0}-\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right)\frac{\partial^{n-1}\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)}{\partial x^{n-1}}\right). \qquad (10.61.8)$$

2° Якщо $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$, $q(x)$ є диференційовними (хоча б один раз) функціями в деякому інтервалі $[a,b]$, що містить точку x_0, і в жодній точці з $[a,b]$ функції $p_0(x)$, $p_n(x)$ не обертаються на нуль, то шуканий розв’язок задачі (10.44) можна записати у вигляді

$$y(x)=Y_r(x)+\varphi_r(x), \qquad (10.62)$$

де

$$Y_r = \frac{q(x)}{p_n(x)} - \frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r}\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i)}\left(\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}\overset{n}{\Delta}_{rei}(x-x_0) + \frac{p_{n-2}(x)}{p_n(x)}\frac{\partial \overset{n}{\Delta}_{rei}(x-x_0)}{\partial x} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{p_0(x)}{p_n(x)}\frac{\partial^{n-1}\overset{n}{\Delta}_{rei}(x-x_0)}{\partial x^{n-1}}\right) -$$

$$-\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r}\int_{x_0}^{x}\lambda(s)\left(\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s) + \frac{p_{n-2}(x)}{p_n(x)}\frac{\partial \overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)}{\partial x} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{p_0(x)}{p_n(x)}\frac{\partial^{n-1}\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)}{\partial x^{n-1}}\right) ds\,, \tag{10.62.1}$$

$$\varphi_r(x) = -\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r}\int_{x_0}^{x}\mu(s)\left(\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s) + \frac{p_{n-2}(x)}{p_n(x)}\frac{\partial \overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)}{\partial x} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{p_0(x)}{p_n(x)}\frac{\partial^{n-1}\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)}{\partial x^{n-1}}\right) ds\,, \tag{10.62.2}$$

$$\overset{n}{\Delta}_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{re1}(x-x_0) = \begin{vmatrix} e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{rej}(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{j-1} & r_2^{j-1} & \cdots & r_n^{j-1} \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \\ r_1^{j+1} & r_2^{j+1} & \cdots & r_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2} \\ e^{r_1(x-x_0)} & e^{r_2(x-x_0)} & \cdots & e^{r_n(x-x_0)} \end{vmatrix}; \qquad (10.62.3)$$

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \;\; (r = r_1, r_1, \ldots, r_n); \qquad (10.62.4)$$

$$\mu(s) = \lambda_1(s)\, y'(s) + \lambda_2(s)\, y''(s) + \ldots + \lambda_n(s)\, y^{(n)}(s)\,, \qquad (10.62.5)$$

$$\lambda_j(s) = \frac{a_{n-j+1}}{a_0} - F_j(s) \;\; (j = \overline{1,n}), \qquad (10.62.6)$$

$$F_j(s) = \left(\frac{p_{n-j}(s)}{p_0(s)}\right)' + \frac{p_{n-j+1}(s)}{p_0(s)} - \left(\frac{p_n(s)}{p_0(s)}\right)' \frac{p_{n-j}(s)}{p_n(s)} \;\; (j = \overline{1,n}); \qquad (10.62.7)$$

$$\lambda(s) = \left(\frac{q(s)}{p_0(s)}\right)' - \frac{q(s)}{p_n(s)}\left(\frac{p_n(s)}{p_0(s)}\right)'; \qquad (10.62.8)$$

одночасно $\mu(s)$ є **розв'язком** інтегрального рівняння

$$\mu(x) = \mu_r(x) + \int_{x_0}^{x} \Phi(x,s)\mu(s)\,ds\,, \qquad (10.62.9)$$

в якому

$$\mu_r(x) = \lambda_1(x)\phi_r'(x) + \lambda_2(x)\phi_r''(x) + \ldots + \lambda_n(x)\phi_r^{(n)}(x)\,, \qquad (10.62.10)$$

$$\phi_r^{(\nu)}(x)=\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r}\left(\sum_{i=1}^{n}y^{(i)}(x_0)\frac{\partial^{\nu-1}\overset{n}{\Delta}_{rei}(x-x_0)}{\partial x^{\nu-1}}+\int_{x_0}^{x}\lambda(s)\frac{\partial^{\nu-1}\overset{n}{\Delta}_{ren}(x-s)}{\partial x^{\nu-1}}ds\right), \quad (10.62.11)$$

$$\Phi(x,s)=-\frac{1}{\overset{n}{\Delta}_r}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2}\\ Q_1(x)e^{r_1(x-s)} & Q_2(x)e^{r_2(x-s)} & \cdots & Q_n(x)e^{r_n(x-s)}\end{vmatrix}, \quad (10.62.12)$$

$$Q_\nu(x)=r_\nu^n+F_n(x)r_\nu^{n-1}+\ldots+F_2(x)r_\nu+F_1(x)\ \ (\nu=\overline{1,n}). \quad (10.62.13)$$

3° (Наслідок твердження 2°) Якщо коефіцієнти диференціального рівняння задачі (10.44) такі, що

$$F_j(x)=\left(\frac{p_{n-j}(x)}{p_0(x)}\right)'+\frac{p_{n-j+1}(x)}{p_0(x)}-\left(\frac{p_n(x)}{p_0(x)}\right)'\frac{p_{n-j}(x)}{p_n(x)}=b_{n-j+1}=\text{const}\ ,\ \ j=\overline{1,n}, \quad (10.63)$$

то лінійна диференціальна задача (10.44), коли коефіцієнти алгебричного рівняння

$$P_r[r]=P[r,a]\equiv a_0r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$$

задовольняють умови $\dfrac{a_j}{a_0}=b_j$, $j=\overline{1,n}$, має **точний розв'язок** (див. (10.62.1))

$$y(x)\equiv Y_r(x)\,.$$

4° (Наслідок твердження 2°) Якщо коефіцієнти диференціального рівняння задачі (10.44) такі, що величини

$$F_j(x)=\left(\frac{p_{n-j}(x)}{p_0(x)}\right)'+\frac{p_{n-j+1}(x)}{p_0(x)}-\left(\frac{p_n(x)}{p_0(x)}\right)'\frac{p_{n-j}(x)}{p_n(x)},\ \ j=\overline{1,n},$$

є змінними, але справджуються умови

$$F_j(x)+F'_{j+1}(x)-\frac{F_1'(x)}{F_1(x)}F_{j+1}(x)\equiv b_{n-j+1}=\text{const}\ \ (\ j=\overline{1,n},\ \ F_{n+1}(x)\equiv 1\,), \quad (10.64)$$

то лінійна диференціальна задача (10.44), коли коефіцієнти алгебричного рівняння

$$P_r[r]=P[r,a]\equiv a_0r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$$

задовольняють умови

$$\frac{a_j}{a_0} = b_j, \ \ j = \overline{1, n},$$

має **розв'язок у квадратурах**. Квадратурність розв'язку зумовлена тим, що $\mu'(s) \equiv 0$ ($\mu \equiv C = \text{const}$).

Розглянемо приклади. Нехай йдеться про рівняння типу

$$y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}(x) y'(x) + \frac{c_n}{x^\nu} y(x) = q(x);$$

тут $p_0(x) \equiv 1$, $p_n(x) = \dfrac{c_n}{x^\nu}$ ($c_n \equiv \text{const}$, $\nu \le n$ — ціле додатне число). Умови (10.63) в даному випадку мають вигляд

$$F_j(x) = p'_{n-j}(x) + p_{n-j+1}(x) + \frac{\nu}{x} p_{n-j}(x) = b_{n-j+1} = \text{const}, \ \ j = \overline{1, n}. \qquad (10.65)$$

Усуваючи з (10.65) послідовно функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_{n-1}(x)$, можна отримати рівність, що пов'язує параметри ν, c_n, b_1, b_2, …, b_n. Власне вона дозволяє при заданому $\nu \le n$ знайти значення параметрів b_1, b_2, …, b_n, а потім за допомогою (10.65) відтворити диференціальне рівняння, що розв'язується в квадратурах.

При $n = 2$ (мова йде про рівняння другого порядку) на підставі (10.65) матимемо:

$$p'_1(x) + p_2(x) + \frac{\nu}{x} p_1(x) = p'_1(x) + \frac{c_2}{x^\nu} + \frac{\nu}{x} p_1(x) \equiv b_2,$$

$$p'_0(x) + p_1(x) + \frac{\nu}{x} p_0(x) = p_1(x) + \frac{\nu}{x} \equiv b_1, \ \ \nu = 1, 2.$$

Усуваючи з останніх двох рівнянь (тотожностей) функцію $p_1(x)$, дійдемо рівності

$$\frac{c_2}{x^\nu} - \frac{\nu(\nu-1)}{x^2} + \frac{\nu}{x} b_1 - b_2 = 0,$$

яка повинна справджуватися тотожно (за будь-якого x). Отож, $\dfrac{c_2}{x} + \dfrac{1}{x} b_1 - b_2 \equiv 0$ при $\nu = 1$, звідки $b_1 = -c_2$ і $b_2 = 0$, $p_1 = -\left(c_2 + \dfrac{1}{x}\right)$, $p_2 = \dfrac{c_2}{x}$ і отже шукане диференціальне рівняння має вигляд

$$y'' - \left(c_2 + \frac{1}{x}\right) y' + \frac{c_2}{x} y = q(x).$$

Відповідним йому є алгебричне рівняння $r^2 - c_2 r = 0$ ($r_1 = 0$, $r_2 = c_2$). Це рівняння в певному сенсі можна назвати характеристичним (хоча йдеться про рівняння зі змінними коефіцієнтами).

При $\nu = 2$ матимемо:

$$\frac{c_2 - 2}{x^2} + \frac{2}{x} b_1 - b_2 = 0 \,,\ b_1 = b_2 = 0 \,,\ c_2 = 2 \,,\ p_1 = -\frac{2}{x} \,,\ p_2 = \frac{2}{x^2} \,.$$

Звідси

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = q(x) \,,\ r^2 = 0 \ \ (r_1 = r_2 = 0\,).$$

У випадку рівняння третього порядку ($n = 2$) умови (10.65) мають вигляд

$$p_2'(x) + p_3(x) + \frac{\nu}{x} p_2(x) = p_2'(x) + \frac{c_3}{x^\nu} + \frac{\nu}{x} p_2(x) \equiv b_3 \,,$$

$$p_1'(x) + p_2(x) + \frac{\nu}{x} p_1(x) \equiv b_2 \,,\ p_0'(x) + p_1(x) + \frac{\nu}{x} p_0(x) = p_1(x) + \frac{\nu}{x} \equiv b_1 \,,\ \nu = 1, 2 \,.$$

Усуваючи з цих умов функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, дійдемо рівності

$$\frac{c_3}{x^\nu} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{x^3} - \frac{\nu(\nu-1)}{x^2} b_1 + \frac{\nu}{x} b_2 - b_3 = 0 \,.$$

Звідси, при $\nu = 1$

$$\frac{c_3 + b_2}{x} - b_3 = 0 \,,$$

$$b_1 = -\alpha \,,\ b_2 = -c_3 = \beta \ \text{ і } \ b_3 = 0 \ \ (\alpha \text{ і } \beta \text{ — довільні числа}),$$

$$p_1 = -\left(\alpha + \frac{1}{x}\right),\ p_2 = \beta + \frac{\alpha}{x} \ \text{ і } \ p_3 = -\frac{\beta}{x} \,,\ y''' - \left(\alpha + \frac{1}{x}\right) y'' + \left(\beta + \frac{\alpha}{x}\right) y' - \frac{\beta}{x} y = q(x) \,,$$

$$r^3 - \alpha r^2 + \beta r = 0 \ \ (\,r_1 = 0 \,, r^2 - \alpha r + \beta = 0\,);$$

при $\nu = 2$

$$\frac{c_3 - 2b_1}{x^2} + \frac{2}{x} b_2 - b_3 = 0 \,,$$

$$b_1 = \frac{c_3}{2} = \frac{\alpha}{2} \,,\ b_2 = b_3 = 0 \ \ (\alpha \text{ — довільне число}),$$

$$p_1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{x} \,,\ p_2 = \frac{2}{x^2} - \frac{\alpha}{x} \ \text{ і } \ p_3 = \frac{\alpha}{x^2} \,,\ y''' + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{x}\right) y'' + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{\alpha}{x}\right) y' + \frac{\alpha}{x^2} y = q(x) \,,$$

$$r^3 + \frac{\alpha}{2} r^2 = 0 \ \ (\,r_1 = r_2 = 0 \,, r_3 = -\frac{\alpha}{2}\,);$$

при $\nu = 3$

$$\frac{c_3+6}{x^3} - \frac{6}{x^2} b_1 + \frac{3}{x} b_2 - b_3 = 0 ,$$

$$c_3 = -6 ,\ b_1 = b_2 = b_3 = 0 ,$$

$$p_1 = -\frac{3}{x} ,\ p_2 = \frac{6}{x^2} \text{ і } p_3 = -\frac{6}{x^3} ,\ y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = q(x) ,$$

$$r^3 = 0 \ (r_1 = r_2 = r_3 = 0).$$

Розглянемо рівняння

$$(x^2+2)y''' - 2xy'' + (x^2+2)y' - 2xy = 0 .$$

Для нього

$$F_1(x) = \left(\frac{p_2(x)}{p_0(x)} \right)' + \frac{p_3(x)}{p_0(x)} - \left(\frac{p_3(x)}{p_0(x)} \right)' \frac{p_2(x)}{p_3(x)} = -\frac{1}{x} ,$$

$$F_2(x) = \left(\frac{p_1(x)}{p_0(x)} \right)' + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} - \left(\frac{p_3(x)}{p_0(x)} \right)' \frac{p_1(x)}{p_3(x)} = 1 ,$$

$$F_3(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} - \left(\frac{p_3(x)}{p_0(x)} \right)' \frac{p_0(x)}{p_3(x)} = -\frac{1}{x} .$$

Отже умови (10.63) не справджуються. Натомість, дотримуються умови (10.64):

$$F_1(x) + F_2'(x) - \frac{F_1'(x)}{F_1(x)} F_2(x) = b_3 = 0 ,$$

$$F_2(x) + F_3'(x) - \frac{F_1'(x)}{F_1(x)} F_3(x) = b_2 = 1 ,$$

$$F_3(x) + F_4'(x) - \frac{F_1'(x)}{F_1(x)} F_4(x) = F_3(x) - \frac{F_1'(x)}{F_1(x)} = b_1 = 0 .$$

Отже, покладаючи

$$a_1 = b_1 = 0 ,\ a_2 = b_2 = 1 ,\ a_3 = b_3 = 0 ,$$

матимемо алгебричне рівняння

$$r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 \equiv r^3 + r = 0$$

з коренями $r_1 = 0$, $r_2 = -i$, $r_3 = i$.

Диференціальне рівняння має точний розв’язок. Щоб знайти його, обчислимо (див. (10.62.3), (10.62.1), (10.62.2)):

$$\overset{3}{\Delta}_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 0 & (-i)^2 & i^2 \end{vmatrix} = 2i, \quad \frac{\overset{3}{\Delta}_{re1}(x-x_0)}{\overset{3}{\Delta}_r} = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} 1 & e^{-i(x-x_0)} & e^{i(x-x_0)} \\ 0 & -i & i \\ 0 & (-i)^2 & i^2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\frac{\overset{3}{\Delta}_{re2}(x-x_0)}{\overset{3}{\Delta}_r} = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i(x-x_0)} & e^{i(x-x_0)} \\ 0 & (-i)^2 & i^2 \end{vmatrix} = \frac{e^{i(x-x_0)} - e^{-i(x-x_0)}}{2i} = \sin(x-x_0),$$

$$\frac{\overset{3}{\Delta}_{re2}(x-x_0)}{\overset{3}{\Delta}_r} = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & e^{-i(x-x_0)} & e^{i(x-x_0)} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - \frac{e^{i(x-x_0)} + e^{-i(x-x_0)}}{2} = 1 - \cos(x-x_0),$$

$$f_1 = \frac{p_2(x)}{p_3(x)} \frac{\overset{3}{\Delta}_{re1}(x-s)}{\overset{3}{\Delta}_r} + \frac{p_1(x)}{p_3(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\overset{3}{\Delta}_{re1}(x-s)}{\overset{3}{\Delta}_r} + \frac{p_0(x)}{p_3(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\overset{3}{\Delta}_{re1}(x-s)}{\overset{3}{\Delta}_r} =$$

$$= \frac{p_2(x)}{p_3(x)} = -\frac{x^2+2}{2x},$$

$$f_2 = \frac{p_2(x)}{p_3(x)} \frac{\overset{3}{\Delta}_{re2}(x-s)}{\overset{3}{\Delta}_r} + \frac{p_1(x)}{p_3(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\overset{3}{\Delta}_{re2}(x-s)}{\overset{3}{\Delta}_r} + \frac{p_0(x)}{p_3(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\overset{3}{\Delta}_{re2}(x-s)}{\overset{3}{\Delta}_r} =$$

$$= -\frac{x^2+2}{2x}\sin(x-x_0) + \cos(x-x_0) + \frac{x^2+2}{2x}\sin(x-x_0) = \cos(x-x_0),$$

$$f_3 = \frac{p_2(x)}{p_3(x)} \frac{\overset{3}{\Delta}_{re3}(x-s)}{\overset{3}{\Delta}_r} + \frac{p_1(x)}{p_3(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\overset{3}{\Delta}_{re3}(x-s)}{\overset{3}{\Delta}_r} + \frac{p_0(x)}{p_3(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\overset{3}{\Delta}_{re3}(x-s)}{\overset{3}{\Delta}_r} =$$

$$= \frac{x^2+2}{2x}\big(\cos(x-x_0) - 1\big) + \sin(x-x_0) - \frac{x^2+2}{2x}\cos(x-x_0) =$$

$$= -\frac{x^2+2}{2x} + \sin(x-x_0),$$

$$Y_r = \frac{q(x)}{p_3(x)} - (y_0' f_1(x,x_0) + y_0'' f_2(x,x_0) + y_0''' f_3(x,x_0)) - \int_{x_0}^{x} \lambda(s) f_3(x,s)\,ds =$$

$$= -y_0' f_1(x,x_0) - y_0'' f_2(x,x_0) - y_0''' f_3(x,x_0) =$$

$$= y_0' \frac{x^2+2}{2x} - y_0'' \cos(x-x_0) + y_0''' \left(\frac{x^2+2}{2x} - \sin(x-x_0) \right),$$

$$\varphi_r(x) = -\int_{x_0}^{x} \mu(s) f_3(x,s)\,ds = -C\int_{x_0}^{x} f_3(x,s)\,ds = C\int_{x_0}^{x} \left(\frac{x^2+2}{2x} - \sin(x-s) \right) ds =$$

$$= C\left(\frac{x^2+2}{2x}(x-x_0) - 1 + \cos(x-x_0) \right)$$

(тут $q(s) = \lambda(s) \equiv 0$, $\mu(s) = C \equiv \text{const}$). То ж відповідно до (10.62)

$$y(x) = Y_r(x) + \varphi_r(x) = y_0' \frac{x^2+2}{2x} - y_0'' \cos(x-x_0) + y_0''' \left(\frac{x^2+2}{2x} - \sin(x-x_0) \right) +$$

$$+ C\left(\frac{x^2+2}{2x}(x-x_0) - 1 + \cos(x-x_0) \right).$$

Беручи до уваги умову $y'(x_0) = y_0'$, знайдемо

$$C = \frac{y_0' + y_0'''}{x_0}.$$

Таким чином,

$$y(x) = (y_0' + y_0''') \frac{x^2}{2x_0} - y_0'' \sin(x-x_0) + \left(\frac{y_0' + y_0'''}{x_0} - y_0'' \right) \cos(x-x_0).$$

Проведений тут аналіз засвідчив, що лінійні зі змінними коефіцієнтами і навіть нелінійні диференціальні задачі можна розглядати у певному взаємозв'язку з лінійними задачами зі сталими коефіцієнтами. При цьому виникають підстави лінійні задачі зі сталими коефіцієнтами тлумачити як наближене відображення диференціальних задач іншого типу. Виявилося, що розв'язки двох лінійних динамічних диференціальних задач зі сталими коефіцієнтами взаємозв'язані через розв'язок інтегрального рівняння Вольтерри другого роду (див. (10.57)). Через розв'язок інтегрального рівняння і розв'язок лінійної диференціальної задачі зі сталими коефіцієнтами визначаються також і розв'язки лінійних диференціальних задач зі змінними коефіцієнтами (див. (10.61), (10.61.1)—(10.61.8) чи (10.62), (10.62.1)—(10.62.13)).

Серед лінійних диференціальних задач зі змінними коефіцієнтами існують такі, які розв'язуються в квадратурах. Клас таких задач аналітично вирізняють умови (10.63). Умови (10.63) задовольняє, зокрема, кожне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

10.3 Фундаментальна функція і окремі типи рівнянь

Суперпозиційне диференціальне рівняння

$$L_n\big[\ldots\big[L_i\big[\ldots\big[L_2\big[L_1[y]\big]\big]\big]\big]\big]=0 \tag{10.66}$$

є різновидом лінійних диференціальних рівнянь порядку $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$, де $L_i[\cdot]$ — лінійний диференціальний оператор порядку m_i. Зокрема, рівняння

$$L_2\big[L_1[y]\big]=0\,,$$

в якому

$$L_1=a(x)\frac{d}{dx}(\cdot)+b(x)(\cdot)\,,\quad L_2=\alpha(x)\frac{d}{dx}(\cdot)+\beta(x)(\cdot)\,,$$

належить до рівнянь другого порядку:

$$L_2\big[L_1[y]\big]\equiv \alpha a y''+\big(\alpha(a'+b)+\beta a\big)y'+(\alpha b'+\beta b)y\equiv p_0y''+p_1y'+p_2y=0\,, \tag{10.67}$$

де

$$p_0=p_0(x)=\alpha(x)\,a(x)\,,\quad p_1=p_1(x)=\alpha(x)\,(a'(x)+b(x))+\beta(x)\,a(x)\,,$$

$$p_2=p_2(x)=\alpha(x)\,b'(x)+\beta(x)\,b(x)\,. \tag{10.68}$$

Нехай диференціальне рівняння

$$L_n\big[\ldots\big[L_i\big[\ldots\big[L_2\big[L_1[y]\big]\big]\big]\big]\big]=q(x) \tag{10.69}$$

укладене за допомогою n **лінійних операторів першого порядку**

$$L_i[y_i]\equiv y_i'+\beta_i(x)\,y_i\quad (i=\overline{1,n})\,.$$

Очевидно, що розв'язком рівняння $L_n[y_n]\equiv y_n'+\beta_n(x)\,y_n=q_n(x)=q(x)$ є функція

$$y_n=c_nK_n(x,\gamma_n)+\int_{\gamma_n}^{x}K_n(x,t_n)\,q(t_n)\,dt_n=q_{n-1}(x,\gamma_n)\,,$$

де

$$K_n(x,\gamma_n)=\exp-\int_{\gamma_n}^{x}\beta_n(s)\,ds$$

— відповідна фундаментальна функція, править за вільний член q_{n-1} рівняння

$$L_{n-1}[y_{n-1}]\equiv y_{n-1}'+\beta_{n-1}(x)\,y_{n-1}=q_{n-1}(x,\gamma_n)\,.$$

Тому можна писати:

$$y_{n-1} = c_{n-1}K_{n-1}(x,\gamma_{n-1}) +$$

$$+\int\limits_{\gamma_{n-1}}^{x} K_{n-1}(x,t_{n-1})\left(c_n K_n(t_{n-1},\gamma_n) + \int\limits_{\gamma_n}^{t_{n-1}} K_n(t_{n-1},t_n)\,q(t_n)\,dt_n \right) dt_{n-1} =$$

$$= q_{n-2}(x,\gamma_n,\gamma_{n-1})\,.$$

В свою чергу $y_{n-1} = q_{n-2}(x,\gamma_n,\gamma_{n-1})$ править за вільний член рівняння

$$L_{n-2}[y_{n-2}] \equiv y'_{n-2} + \beta_{n-2}(x)\,y_{n-2} = q_{n-2}(x,\gamma_n,\gamma_{n-1})\,.$$

Ці міркування можна продовжувати доти, доки не випливе функція

$$y_1 = y = c_1K_1(x,\gamma_1) + c_2\int\limits_{\gamma_1}^{x} K_1(x,t_1)K_2(t_1,\gamma_2)\,dt_1 +$$

$$+c_3\int\limits_{\gamma_1}^{x}\int\limits_{\gamma_2}^{t_1} K_1(x,t_1)\,K_2(t_1,t_2)\,K_3(t_2,\gamma_3)\,dt_2\,dt_1 + \ldots +$$

$$+c_n\int\limits_{\gamma_1}^{x}\int\limits_{\gamma_2}^{t_1}\ldots\int\limits_{\gamma_{n-1}}^{t_{n-2}} K_1(x,t_1)\,K_2(t_1,t_2)\,K_3(t_2,t_3)\ldots K_n(t_{n-1},\gamma_n)\,dt_{n-1}\cdots dt_2\,dt_1 +$$

$$+\int\limits_{\gamma_1}^{x}\int\limits_{\gamma_2}^{t_1}\ldots\int\limits_{\gamma_{n-1}}^{t_{n-2}}\int\limits_{\gamma_n}^{t_{n-1}} K_1(x,t_1)\,K_2(t_1,t_2)\,K_3(t_2,t_3)\ldots K_n(t_{n-1},t_n)\,q(t_n)\,dt_n\,dt_{n-1}\ldots dt_2\,dt_1\,,$$

що і є шуканим розв'язком рівняння (10.69).

За таким самим алгоритмом можна побудувати розв'язки рівнянь (10.66) і (10.69) для довільного випадку, оперуючи лише фундаментальними функціями, відповідними операторам, що складають ці рівняння.

Повернемося до рівняння (10.67).

За розв'язок однорідного рівняння першого порядку

$$L_2[z] \equiv \alpha(x)\frac{dz}{dx} + \beta(x)\,z = 0$$

править функція

$$z = c_1K(x,\gamma;\alpha,\beta) = c_1 e^{-\int\limits_{\gamma_1}^{x}\frac{\beta(s)}{\alpha(s)}ds}\,.$$

Очевидно, що розв'язок однорідного рівняння другого порядку (10.67) збігатиметься з розв'язком неоднорідного рівняння першого порядку

$$L_1[y] \equiv a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)\,y = z = c_1 e^{-\int\limits_{\gamma_1}^{x} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}ds},$$

а власне, цим розв'язком буде функція

$$y = c_2 e^{-\int\limits_{\gamma_2}^{x} \frac{b(s)}{a(s)}ds} + c_1 \int\limits_{\gamma_2}^{x} \frac{e^{-\int\limits_{t}^{x} \frac{b(s)}{a(s)}ds - \int\limits_{\gamma_1}^{t} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}ds}}{a(t)}\,dt\,.$$

За розв'язок неоднорідного рівняння

$$L_2\big[L_1[y]\big] = q(x),$$

очевидно, править функція

$$y = c_2 e^{-\int\limits_{\gamma_2}^{x} \frac{b(s)}{a(s)}ds} + c_1 \int\limits_{\gamma_2}^{x} \frac{e^{-\int\limits_{t}^{x} \frac{b(s)}{a(s)}ds - \int\limits_{\gamma_1}^{t} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}ds}}{a(t)}\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_2}^{x} \frac{e^{-\int\limits_{t}^{x} \frac{b(s)}{a(s)}ds}}{a(t)} \int\limits_{\gamma_1}^{t} e^{-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}ds} \frac{q(\tau)}{\alpha(\tau)}\,d\tau\,dt\,. \tag{10.70}$$

Функцію (10.70) можна було б вважати розв'язком у квадратурах рівняння другого порядку $L[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$, якщо б тільки існував алгоритм (квадратурний) знаходження коефіцієнтів $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $a(x)$, $b(x)$ через коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$. Але в загальному випадку такого алгоритму не існує, оскільки система рівностей (10.68) в квадратурах напевне не розв'язується. Справді, усуваючи з (10.68), наприклад, $\beta(x)$, прийдемо до **рівняння Ріккаті** (відносно змінної b)

$$p_0(x)b' + (p_1(x) - \alpha(x)\,a'(x))\,b - \alpha(x)\,b^2 = p_2(x)\,a(x),$$

яке в загальному випадку в квадратурах не розв'язується.

Поряд з **рівнянням Ріккаті**

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = q(x) \tag{10.71}$$

є сенс згадати й **рівняння Бернуллі**

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = b(x)\,y^n \quad (n \neq 0, 1)\,. \tag{10.72}$$

Справа в тому, що якщо відомий який-небудь окремий розв'язок $y = y_1(x)$ рівняння Ріккаті (10.71), то заміною $y = y_1 + z$ це рівняння можна звести до рівняння Бернуллі (10.72). Натомість, заміною $z = y^{1-n}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного.

Прикладом **нелінійного диференціального рівняння, в якому простежуються ознаки лінійності** є таке:

$$\prod_{i=1}^{n}(L_i[y]-q_i(x))=0\,. \tag{10.73}$$

Очевидно, що його розв'язок можна подати у вигляді

$$\prod_{i=1}^{n}\left(y-\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}\overset{(j-1)}{K_i}(x,\gamma_i)-\int_{\gamma_i}^{x}K_i(x,t)\frac{q_i(t)}{p_{0i}(t)}dt\right)=0\,. \tag{10.74}$$

Рівність (10.74) можна тлумачити як розклад на множники деякого алгебричного (характеристичного) рівняння

$$y^n+f_1(x,\gamma_1,\ldots,\gamma_n)y^{n-1}+\ldots+f_{n-1}(x,\gamma_1,\ldots,\gamma_n)y+f_n(x,\gamma_1,\ldots,\gamma_n)=0\,.$$

Теорію рівнянь типу (10.66), (10.69) інколи вигідно застосовувати для апроксимації деяких моделей лінійних динамічних систем. Рівняння (10.73), натомість, можуть слугувати апроксимаційними відображеннями моделей як лінійних, так і нелінійних динамічних систем.

10.4 Системи з імпульсною зміною стану

Розглянемо коротко і в загальних рисах вельми цікавий клас **динамічних систем з імпульсною зміною станів** [28]. В залежності від особливостей імпульсного впливу розрізняють три типи систем: 1) системи, що зазнають імпульсного впливу у фіксовані миттєвості; 2) системи, що зазнають імпульсного впливу тоді, коли поточний стан системи досягне певної наперед окресленої множини станів; 3) розривні динамічні системи.

Звернемося до систем, що зазнають імпульсного впливу тоді, коли поточний стан системи досягне певної наперед окресленої множини станів. Динамічній системі поставимо у відповідність систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\,, \tag{10.75}$$

деяку множину $\mathcal{X}_t$ (що окреслює стани системи і миттєвості, коли система підпадає під вплив імпульсних збурень), **оператор збурень** $\mathcal{A}_t$ (який множині $\mathcal{X}_t$ станів системи ставить у відповідність множину станів $\mathcal{X}_t'$ ($\mathcal{X}_t'=\mathcal{A}_t\mathcal{X}_t$) і тим самим описує реакцію динамічної системи на збурення).

Зміну станів системи тлумачитимемо як рух точки $(t,x(t))$. Точка $(t,x(t))$, що в деяку мить часу t_0 збігається з точкою (t_0,x_0), рухається траєкторією $\{t,x(t)\}$, визначуваною розв'язком $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ системи рівнянь (10.75).

В деяку мить $t = t_1 > t_0$ точка потрапляє у множину $\mathcal{X}_t$, наражається на збурення і тому миттєво перескакує у множину $\mathcal{X}'_t$. Іншими словами, під впливом оператора $\mathcal{A}_t$ стан $P_{t_1} = (t_1, x(t_1)) \in \mathcal{X}_{t_1}$ динамічної системи змінюється миттєво на стан $P^+_{t_1} = \mathcal{A}_{t_1} P_{t_1} = (t_1, x^+(t_1)) \in \mathcal{X}'_{t_1}$. Далі динамічна система рухається відповідно до точкової траєкторії $\{t, x(t)\}$, визначуваної розв'язком $x(t) = x(t, t_1, x^+(t_1))$ системи диференціальних рівнянь (10.75), аж поки точка $(t, x(t))$ в деяку мить $t = t_2 > t_1$ знову не наразиться на множину $\mathcal{X}_t$. Система стан $P_{t_2} = (t_2, x(t_2)) \in \mathcal{X}_{t_2}$ миттєво змінить на стан $P^+_{t_2} = \mathcal{A}_{t_2} P_{t_2} = (t_2, x^+(t_2)) \in \mathcal{X}'_{t_2}$, щоб далі деякий час знову рухатися відповідно до траєкторії $\{t, x(t)\}$, визначуваної розв'язком $x(t) = x(t, t_2, x^+(t_2))$ системи диференціальних рівнянь (10.75). Зустріч точки $(t, x(t))$ з множиною $\mathcal{X}_t$ і описана реакція системи можуть виникати знову і знову.

Систему з окресленими збуреннями можна аналітично описати більш стисло:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \ (t, x) \notin \mathcal{X}_t,$$

$$\Delta x = \mathcal{A}_t x - x, \ (t, x) \in \mathcal{X}_t. \tag{10.76}$$

Розв'язок $x = \chi(t)$ системи (10.76) — це функція, що задовольняє рівняння (10.75) поза множиною $\mathcal{X}_t$, а в точках, належних $\mathcal{X}_t$, має розриви першого роду зі стрибками

$$\Delta x = \chi(t+0) - \chi(t-0) = \mathcal{A}_t \chi(t-0) - \chi(t-0). \tag{10.77}$$

В загальному випадку оператор $\mathcal{A}_t$ в деяких ("мертвих") точках з $\mathcal{X}_t$ може і не виявляти активних впливів; в таких точках (див. (10.77))

$$\Delta x = \mathcal{A}_t \chi(t-0) - \chi(t-0) = 0.$$

Серед розв'язків системи рівнянь (10.76) можуть існувати розв'язки, які

1) не зазнають стрибкоподібних змін — відповідна системі рівнянь (10.75) інтегральна крива не перетинає множини $\mathcal{X}_t$, або ж перетинає її лише в "мертвих" точках,

2) зазнають стрибкоподібних змін скінченну кількість разів — відповідна системі рівнянь (10.75) інтегральна крива перетинає множину $\mathcal{X}_t$ скінченну кількість разів в скінченній кількості точок, що не належать до "мертвих",

3) зазнають стрибкоподібних змін зліченну кількість разів — відповідна системі рівнянь (10.75) інтегральна крива перетинає множину $\mathcal{X}_t$ зліченну кількість разів, в точка, що не належать до "мертвих".

Серед розв'язків, відображуваних інтегральними кривими, що мають з множиною $\mathcal{X}_t$ зліченну кількість спільних точок, в загальному випадку можна вирізнити такі, які поглинаються множиною $\mathcal{X}_t$ (інтегральні криві залишаються в $\mathcal{X}_t$ починаючи з деякої миті $t_1 > t_0$) або мають точку згущення. Рух зникаючою в $\mathcal{X}_t$ траєкторією починаючи з миті $t_1 > t_0$ являє собою низку миттєвих перестрибувань точки P_t з місця $(t_1, x(t_1) = x_1) \in \mathcal{X}_{t_1}$ в місце $(t_1, \mathcal{A}_{t_1} x_1)$, з $(t_1, \mathcal{A}_{t_1} x_1)$ в $(t_1, \mathcal{A}_{t_1}^2 x_1)$, з $(t_1, \mathcal{A}_{t_1}^2 x_1)$ в $(t_1, \mathcal{A}_{t_1}^3 x_1)$ і т. д. Рух траєкторією, що має в $\mathcal{X}_t$ точку згущення, — це рух, який з наближенням миті $t_1 > t_0$ зліченну кількість разів зустрічає і полишає множину $\mathcal{X}_t$, а отже його неможливо продовжити в часі до миті $t = t_1$. Такі рухи в околі миті $t = t_1$ засвідчують народження якісно нового процесу, або ж визначають фізичну невідповідність моделі реальному процесові.

Щодо динамічних систем з імпульсною зміною станів виникають такого самого змісту задачі, як і щодо звичайних диференціальних систем. Разом з тим, виникають і досить специфічні задачі, пов'язані в першу чергу з властивостями оператора $\mathcal{A}_t$. Зокрема, якщо $\mathcal{A}_t$ є неоднозначним, то при зустрічі з множиною $\mathcal{X}_t$ точки можуть множитися (розщеплюватися). Якщо $\mathcal{A}_t$ не є взаємно однозначним, то окремі точки, що рухаються незалежно, можуть при зустрічі з $\mathcal{X}_t$ миттєво зливатися в одну. Якщо множина $\mathcal{A}_t \mathscr{x}_t$, відповідна множині $\mathscr{x}_t \subset \mathcal{X}_t$ є порожньою, то можна говорити про смерть системи (у множині $\mathscr{x}_t$), а потім про середній час життя рухомої точки, ймовірність її смерті за деякий заданий час $t_0 \le t \le T$ тощо.

Звернемося до простого але наочного прикладу [28], коли система рівнянь (10.75) зводиться до одного рівняння $\dfrac{dx}{dt} = 0$.

Нехай множину $\mathcal{X}_t$ відображає вираз (див. рис. 34)

$$\mathcal{X}_t = \{(t, x) \in \mathrm{R}^2 \mid x = \arctan(\tan t)\},$$

а оператор впливу — вираз $\mathcal{A}_t(t, x) = (t, x^2 \operatorname{sgn} x)$.

Отже, йдеться про систему з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = 0, \ (t, x) \notin \mathcal{X}_t = \{(t, x) \in \mathrm{R}^2 \mid x = \arctan(\tan t)\},$$

$$\Delta x = \mathcal{A}_t(t, x)\, x - x = x^2 \operatorname{sgn} x - x,$$

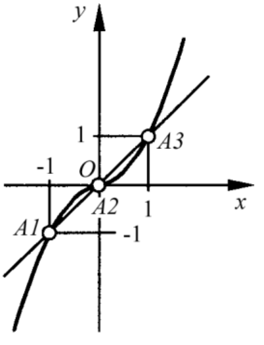
$$(t, x) \in \mathcal{X}_t = \{(t, x) \in \mathrm{R}^2 \mid x = \arctan(\tan t)\}. \tag{10.78}$$

Швидкість $\dfrac{dx}{dt}$ зміни станів цієї системи набуває лише трьох значень — 0, $-\infty$, $+\infty$.

Можна вирізнити такі рухи системи (10.78).

Рух, який починається в мить $t=0$ з точки x_0, що належить множині $|x_0| \geq \frac{\pi}{2}$, відтворює стан спокою динамічної системи $x(t) \equiv x_0 = \mathrm{const}\,\forall t \geq 0$, бо відповідна рівностям (10.78) інтегральна лінія $x(t) = x_0$ ніколи не зустрічає множини $\mathcal{X}_t$ чинності оператора $\mathcal{A}_t$. Траєкторією такого руху є точка x_0.

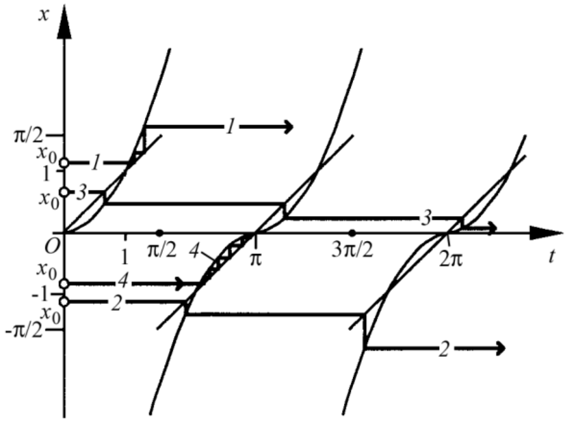
Інтегральні лінії, що проходять через точки $x^* = 0$ і $x^* = \pm 1$, хоча й перетинають зліченну кількість разів множину $\mathcal{X}_t$, проте динамічна система не зазнає жодного імпульсного впливу (стан системи — спокій). Пояснюється це тим, що точки $x=0$ і $x=\pm 1$ є “мертвими” (нерухомими) точками оператора $\mathcal{A}_t$, рис. 66. “Мертві” (нерухомі) точки в даному випадку визначаються як розв’язки рівняння $f(x) - x = 0$, де $f(x) = \mathcal{A}_t x$.



66 **Характеристика оператора впливу.**

Рух, який починається в мить $t=0$ з деякої точки x_0, належної множині $1 < |x_0| < \frac{\pi}{2}$, скінченну кількість разів підпадає під імпульсний вплив, бо відповідна інтегральна лінія скінченну кількість разів наражається на множину $\mathcal{X}_t$ чинності оператора $\mathcal{A}_t$ (рис. 67, лінії *1—1* і *2—2*). Для кожного з таких рухів існує мить $t_1 = t_1(x_0)$, $0 < t_1 < \frac{\pi}{2}$, після якої інтегральна лінія належатиме виключно множині $|x_0| \geq \frac{\pi}{2}$, а отже при $t > t_1(x_0)$ імпульсні впливи на динамічну систему зникають.

Стани динамічної системи відображає скінченна кількість точок. Наприклад: при $x_0 = x(0) = \sqrt{2}$ можливі стани динамічної системи відображають тільки дві точки — $x = \sqrt{2}$ і $x = 2$; при $x_0 = x(0) = \sqrt[8]{2}$ множину станів системи складають чотири точки — $\{\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2\}$.



67 **Інтегральні лінії динамічної системи з імпульсною зміною стану.**

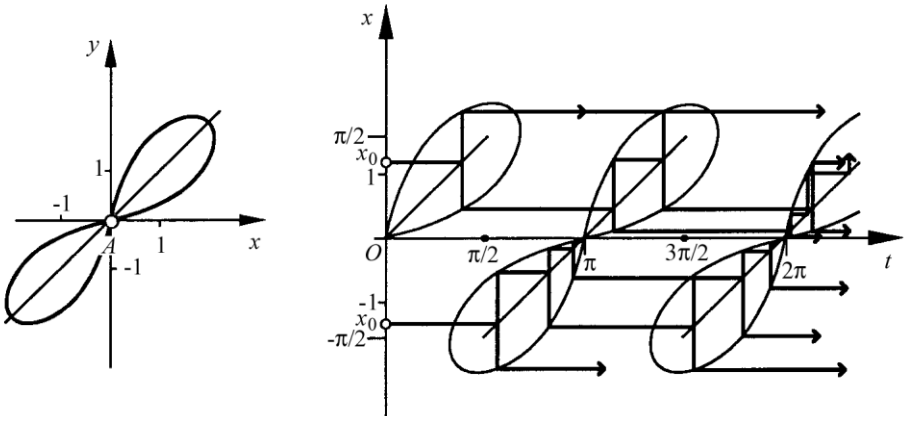
Рух, який починається в мить $t=0$ з точки $x_0 \in \left]0, 1\right[$, зліченну кількість разів наражається на множину $\mathcal{X}_t$, а отже зліченну кількість разів зазнає імпульсного впливу. При цьому $x(t, x_0) \to 0$ при $t \to \infty$ (рис. 67, лінія *3*—*3*). Множину станів динамічної системи складає зліченна кількість точок з проміжку $\left]0, 1\right[$. Наприклад, множину станів системи, рух якої починається в мить $t=0$ з точки $x_0 = \dfrac{1}{2}$, складають точки

$$x = \frac{1}{2^n},\ n = 1, 2, \ldots$$

Рух, який починається в мить $t=0$ з точки $x_0 \in \left]-1, 0\right[$, також зліченну (проте нескінченну) кількість разів наражається на множину $\mathcal{X}_t$, а отже зліченну кількість разів зазнає імпульсного впливу. При цьому також

$$x(t, x_0) \to 0,$$

але за скінченний проміжок часу (рис. 67, лінія *4*—*4*). Тут послідовність реакцій динамічної системи на імпульсні впливи в часовому проміжку $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ має граничну точку $(t, x) = (\pi, 0)$, що в певному сенсі можна тлумачити як неможливість продовжити інтегральну лінію на відрізок $t \ge \pi$ (траєкторія зникає, “вмирає”). Щоб заперечити зникання траєкторії, потрібно, принаймні, модель динамічної системи якось коректно доозначити, а не керуватись здогадками подібно до того, як всі інтегральні лінії на рис. 67 спрямовувались у бік зростання t (на підставі того, що t — фізичний час, про що, однак, аналітична модель мовчить).



68 **Випадок “розмножування” траєкторій.**

Неважко навести приклад, коли траєкторії динамічної системи з імпульсною зміною стану можуть роздвоюватися чи зливатися. Один з можливих прикладів “розмножування” траєкторій ілюструє рис. 68.

10.5 Задачі, пов’язані з рівнянням першого порядку

Розглянемо однорідні рівняння першого, другого, третього та четвертого порядків

$$L_1[y] \equiv p_0 y' + p_1(x)y = 0\,, \quad L_2[y] \equiv p_0 y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,,$$

$$L_3[y] \equiv p_0 y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0\,,$$

$$L_4[y] \equiv p_0(x)y'''' + p_1(x)y''' + p_2(x)y'' + p_3(x)y' + p_4(x)y = 0\,. \tag{10.79}$$

Легко пересвідчитися, що рівняння (10.79) однозначно випливають відповідно з рівнянь

$$\begin{vmatrix} p_0 & y \\ -p_1 & y' \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} p_0 & 0 & y \\ -p_1 & 1 & y' \\ \dfrac{p_1^2}{p_0} - p_2 & -\dfrac{1}{p_0}p_1 & y'' \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} p_0 & 0 & 0 & y \\ -p_1 & 1 & 0 & y' \\ \dfrac{p_1^2}{p_0} - p_2 & -\dfrac{1}{p_0}p_1 & 1 & y'' \\ \left(\dfrac{p_1^3}{p_0^2} - p_3\right) - 2\dfrac{p_1}{p_0}\left(\dfrac{p_1^2}{p_0} - p_2\right) & \dfrac{1}{p_0}\left(\dfrac{p_1^2}{p_0} - p_2\right) & -\dfrac{1}{p_0}p_1 & y''' \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\frac{1}{p_0^3}\begin{vmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 & y \\ -p_1 & p_0 & 0 & 0 & y' \\ \dfrac{p_1^2}{p_0}-p_2 & -p_1 & p_0 & 0 & y'' \\ d_1 & \dfrac{p_1^2}{p_0}-p_2 & -p_1 & p_0 & y''' \\ d_0 & d_1 & \dfrac{p_1^2}{p_0}-p_2 & -p_1 & y'''' \end{vmatrix}=0,$$

$$d_1=\left(\frac{p_1^3}{p_0^2}-p_3\right)-2\frac{p_1}{p_0}\left(\frac{p_1^2}{p_0}-p_2\right),$$

$$d_0=\left(\frac{p_1^4}{p_0^3}-p_4\right)-2\frac{p_1}{p_0}\left(\frac{p_1^3}{p_0^2}-p_3\right)+\frac{p_2}{p_0}\left(\frac{p_1^2}{p_0}-p_2\right). \qquad (10.80)$$

Ці ж рівняння можна подати і у вигляді

$$\begin{vmatrix} y(x) & y \\ y'(x) & y' \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y' \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y'' \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y' \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y'' \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y''' \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y_4'(x) & y' \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y_4''(x) & y'' \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y_4'''(x) & y''' \\ y_1''''(x) & y_2''''(x) & y_3''''(x) & y_4''''(x) & y'''' \end{vmatrix}=0, \qquad (10.81)$$

розуміючи під $y_i(x)$ функції, що складають відповідні фундаментальні системи розв'язків.

Рівняння (10.79)—(10.81) заслуговують на окрему увагу через те, що для кожного з них відповідна (конструктивно означена) фундаментальна функція $K(x,\gamma)$ разом з належною кількістю її похідних за параметром γ складають фундаментальну систему розв'язків без жодних додаткових застережень щодо гладкості коефіцієнтів цих рівнянь (коефіцієнти повинні бути лише неперервними функціями x). А тому (відтворюючи, по суті, (10.81)) рівняння (10.79) є всі підстави подати відповідно у вигляді (див. (8.24)):

$$\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & y \\ K'(x,\gamma) & y' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) & y \\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma) & y' \\ K''(x,\gamma) & \dot K''(x,\gamma) & y'' \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) & \ddot K(x,\gamma) & y \\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma) & \ddot K'(x,\gamma) & y' \\ K''(x,\gamma) & \dot K''(x,\gamma) & \ddot K''(x,\gamma) & y'' \\ K'''(x,\gamma) & \dot K'''(x,\gamma) & \ddot K'''(x,\gamma) & y''' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) & \ddot K(x,\gamma) & \dddot K(x,\gamma) & y \\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma) & \ddot K'(x,\gamma) & \dddot K'(x,\gamma) & y' \\ K''(x,\gamma) & \dot K''(x,\gamma) & \ddot K''(x,\gamma) & \dddot K''(x,\gamma) & y'' \\ K'''(x,\gamma) & \dot K'''(x,\gamma) & \ddot K'''(x,\gamma) & \dddot K'''(x,\gamma) & y''' \\ K''''(x,\gamma) & \dot K''''(x,\gamma) & \ddot K''''(x,\gamma) & \dddot K''''(x,\gamma) & y'''' \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (10.82)$$

Крім того, для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами необхідно визначити корені відповідних характеристичних рівнянь. А точні вирази для знаходження цих коренів у загальному випадку існують тільки для характеристичних рівнянь до четвертого порядку включно.

На підставі (10.82) і (10.79) матимемо:

у випадку рівняння першого порядку

$$p_1 K(x,\gamma) = -p_0 \frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial x}\,;$$

у випадку рівняння другого порядку

$$p_1(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma) \end{vmatrix} = -p_0(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot K''(x,\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= -p_0(x)\frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma) \end{vmatrix},$$

$$p_2(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma) \end{vmatrix} = p_0(x)\begin{vmatrix} K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot K''(x,\gamma) \end{vmatrix};$$

у випадку рівняння третього порядку

$$p_1(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) & \ddot K(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma) & \ddot K'(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot K''(x,\gamma) & \ddot K''(x,\gamma) \end{vmatrix} = -p_0(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma) & \ddot K(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma) & \ddot K'(x,\gamma) \\ K'''(x,\gamma) & \dot K'''(x,\gamma) & \ddot K'''(x,\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= -p_0(x)\frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ddot{K}(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ddot{K}'(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot{K}''(x,\gamma) & \ddot{K}''(x,\gamma) \end{vmatrix},$$

$$p_2(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ddot{K}(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ddot{K}'(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot{K}''(x,\gamma) & \ddot{K}''(x,\gamma) \end{vmatrix} = p_0(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ddot{K}(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot{K}''(x,\gamma) & \ddot{K}''(x,\gamma) \\ K'''(x,\gamma) & \dot{K}'''(x,\gamma) & \ddot{K}'''(x,\gamma) \end{vmatrix},$$

$$p_3(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ddot{K}(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ddot{K}'(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot{K}''(x,\gamma) & \ddot{K}''(x,\gamma) \end{vmatrix} = -p_0(x)\begin{vmatrix} K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ddot{K}'(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot{K}''(x,\gamma) & \ddot{K}''(x,\gamma) \\ K'''(x,\gamma) & \dot{K}'''(x,\gamma) & \ddot{K}'''(x,\gamma) \end{vmatrix};$$

у випадку рівняння четвертого порядку

$$p_1(x)W[K] = -p_0(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ddot{K}(x,\gamma) & \dddot{K}(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ddot{K}'(x,\gamma) & \dddot{K}'(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot{K}''(x,\gamma) & \ddot{K}''(x,\gamma) & \dddot{K}''(x,\gamma) \\ K''''(x,\gamma) & \dot{K}''''(x,\gamma) & \ddot{K}''''(x,\gamma) & \dddot{K}''''(x,\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= -p_0(x)\frac{\partial}{\partial x}W[K],$$

$$p_2(x)W[K] = p_0(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ddot{K}(x,\gamma) & \dddot{K}(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ddot{K}'(x,\gamma) & \dddot{K}'(x,\gamma) \\ K'''(x,\gamma) & \dot{K}'''(x,\gamma) & \ddot{K}'''(x,\gamma) & \dddot{K}'''(x,\gamma) \\ K''''(x,\gamma) & \dot{K}''''(x,\gamma) & \ddot{K}''''(x,\gamma) & \dddot{K}''''(x,\gamma) \end{vmatrix},$$

$$p_3(x)W[K] = -p_0(x)\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ddot{K}(x,\gamma) & \dddot{K}(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot{K}''(x,\gamma) & \ddot{K}''(x,\gamma) & \dddot{K}''(x,\gamma) \\ K'''(x,\gamma) & \dot{K}'''(x,\gamma) & \ddot{K}'''(x,\gamma) & \dddot{K}'''(x,\gamma) \\ K''''(x,\gamma) & \dot{K}''''(x,\gamma) & \ddot{K}''''(x,\gamma) & \dddot{K}''''(x,\gamma) \end{vmatrix},$$

$$p_4(x)W[K] = -p_0(x)\begin{vmatrix} K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ddot{K}'(x,\gamma) & \dddot{K}'(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot{K}''(x,\gamma) & \ddot{K}''(x,\gamma) & \dddot{K}''(x,\gamma) \\ K'''(x,\gamma) & \dot{K}'''(x,\gamma) & \ddot{K}'''(x,\gamma) & \dddot{K}'''(x,\gamma) \\ K''''(x,\gamma) & \dot{K}''''(x,\gamma) & \ddot{K}''''(x,\gamma) & \dddot{K}''''(x,\gamma) \end{vmatrix} = 0,$$

де

$$W[K] \equiv \begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot{K}(x,\gamma) & \ddot{K}(x,\gamma) & \dddot{K}(x,\gamma) \\ K'(x,\gamma) & \dot{K}'(x,\gamma) & \ddot{K}'(x,\gamma) & \dddot{K}'(x,\gamma) \\ K''(x,\gamma) & \dot{K}''(x,\gamma) & \ddot{K}''(x,\gamma) & \dddot{K}''(x,\gamma) \\ K'''(x,\gamma) & \dot{K}'''(x,\gamma) & \ddot{K}'''(x,\gamma) & \dddot{K}'''(x,\gamma) \end{vmatrix}.$$

Особливе місце посідає, звичайно, лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок завжди можна подати в квадратурах [9, 12, 19, 30, …].

Нехай задано **лінійне першого порядку рівняння зі звичайними похідними**

$$L_1[y] \equiv p_0(x)\,y' + p_1(x)\,y = q(x)\,, \tag{10.83}$$

в якому коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$ та вільний член $q(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому інтервалі $I = (a, b)$, і до того ж $p_0(x) \neq 0$ в $I = (a, b)$. Воно має єдиний визначуваний в тому самому $I = (a, b)$ розв'язок $y = y(x)$, який при деякому конкретному $x = x_0 \in (a, b)$ задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0\,. \tag{10.84}$$

За умови $q(x) \equiv 0$ неоднорідне рівняння (10.83) зводиться до відповідного йому (супровідного) однорідного рівняння (див. (10.79))

$$L[y] \equiv p_0(x)y' + p_1(x)y = 0\,. \tag{10.85}$$

Відповідна рівнянню (10.83) фундаментальна функція $K(x,\gamma)$ є фундаментальним розв'язком супровідного рівняння (10.85) без жодних додаткових застережень щодо гладкості коефіцієнтів цього рівняння (коефіцієнти повинні бути лише неперервними функціями x). Завдяки цьому єдиний **розв'язок** рівняння (10.83) беззастережно (без додаткових умов стосовно властивостей коефіцієнтів $p_0(x)$, $p_1(x)$) можна подати у вигляді (8.22):

$$y = y_*(x,\gamma) + y_\circ(x,\gamma) = \int_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds + cK(x,\gamma)\,, \tag{10.86}$$

де

$$y_*(x,\gamma) = \int_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\,ds$$

— окремий розв'язок рівняння (10.83) (який задовольняє нульові початкові умови $y_*(\gamma,\gamma) = 0$);

$$y_\circ(x,\gamma) = cK(x,\gamma)$$

— загальний розв'язок супровідного однорідного рівняння (10.85); $K(x,\gamma)$ — відповідна диференціальному операторові першого порядку фундаментальна функція, що за означенням є розв'язком однорідного рівняння (10.85) за початкових умов

$$K(x,\gamma)\big|_{x=\gamma} = K(\gamma,\gamma) = 1\,. \tag{10.87}$$

Рівняння (10.85) можна подати у формі (10.82):

$$\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & y \\ K'(x,\gamma) & y' \end{vmatrix} = 0, \tag{10.88}$$

На підставі (10.88) і (10.79) в даному випадку матимемо:

$$p_1 K(x,\gamma) = -p_0 \frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial x}; \tag{10.89}$$

то ж, беручи до уваги (10.89) і (10.87) знайдемо:

$$K(x,\gamma) = e^{-\int\limits_{\gamma}^{x} \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds}. \tag{10.90}$$

Окремі приклади лінійних операторів першого порядку та відповідні їм фундаментальні функції наведено в табл. 4.

4 Лінійні оператори першого порядку та відповідні їм фундаментальні функції

№	$L[y]$	$K(x,\gamma)$
1	$a\,y',\ \ a = \text{const}$	1
2	$y' + ay,\ \ a = \text{const}$	$e^{-a(x-\gamma)}$
3	$x\,y' + y$	$\dfrac{\gamma}{x}$
4	$y' + axy,\ \ a = \text{const}$	$e^{-\frac{a}{2}\left(x^2-\gamma^2\right)}$
5	$y' + \sin 2x \cdot y$	$e^{\frac{1}{2}(\cos x - \cos\gamma)}$
6	$y' + a\cos x \cdot y,\ \ a = \text{const}$	$e^{-a(\sin x - \sin\gamma)}$
7	$x\left(x^2+1\right)y' - \left(x^2-1\right)y$	$\dfrac{\gamma}{x}\dfrac{x^2+1}{\gamma^2+1}$
8	$y' - 4\dfrac{x}{x^2+1}y$	$\left(\dfrac{x^2+1}{\gamma^2+1}\right)^2$

Таким чином, загальний розв'язок (10.86) лінійного рівняння (10.83) першого порядку можна подати у вигляді

$$y=\int_{\gamma}^{x}K(x,t)\frac{q(t)}{p_0(t)}dt+cK(x,\gamma)=\int_{\gamma}^{x}e^{-\int_t^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}\frac{q(t)}{p_0(t)}dt+c\,e^{-\int_\gamma^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}=$$

$$=\int_{\gamma}^{x}e^{-\int_t^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}\frac{q(t)}{p_0(t)}dt+y(\gamma)e^{-\int_\gamma^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}, \qquad (10.91)$$

де c — довільна стала (тут враховано, що при $x=\gamma$ $c=y(\gamma)$). Щоб підпорядкувати цей розв'язок умові (10.84), необхідно покласти $\gamma=x_0$, $y(\gamma)=y_0$.

Дотична до інтегральної кривої рівняння (10.83) в точці (x_0,y_0) описується рівністю

$$Y-y_0=y_0'(X-x_0)=\left(\frac{q(x_0)}{p_0(x_0)}-\frac{p_1(x_0)}{p_0(x_0)}y_0\right)(X-x_0),$$

або

$$[p_0(x_0)Y-q(x_0)(X-x_0)]-[p_0(x_0)-p_1(x_0)(X-x_0)]y_0=0\,.$$

Останню рівність за будь-якого y_0 задовольняє розв'язок $(X,\,Y)$ системи

$$p_0(x_0)Y-q(x_0)(X-x_0)=0,\;\; p_0(x_0)-p_1(x_0)(X-x_0)=0,$$

звідки

$$X=x_0+\frac{p_0(x_0)}{p_1(x_0)},\;\; Y=\frac{q(x_0)}{p_1(x_0)}\,. \qquad (10.92)$$

Звернемося до рівняння

$$x\left(x^2+1\right)y'-\left(x^2-1\right)y+2x=0\,. \qquad (10.93)$$

Йому відповідає фундаментальна функція (табл. 4)

$$K=\frac{\gamma}{x}\frac{x^2+1}{\gamma^2+1},$$

за допомогою якої можна побудувати розв'язок (10.91):

$$y=\frac{1}{x}\left[(c\gamma-1)\frac{x^2+1}{\gamma^2+1}+1\right].$$

Якщо $x \to 0$ при $\gamma(c+\gamma) \neq 0$, то $y \to \pm\infty$ (в цьому випадку розв'язок є перервним, а тому не задовольняє вимоги "теореми про існування і єдиність" щодо гладкості розв'язків). Легко зауважити, що при $x \to 0$ рівняння (10.93) задовольняє будь-яка функція $y = y(x)$ така, що $y(0) = 0$ і $-\infty < y'(0) < \infty$, або, наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x}$ (порушено вимогу існування єдиного розв'язку). Якщо ж $x \to 0$, коли $\gamma(c+\gamma) = 0$, то $y = -x$ (тільки в цьому випадку вимоги "теореми про існування і єдиність" задоволені).

Відповідно до (10.92) дотичну до інтегральної кривої рівняння (10.93) характеризуватимуть рівності

$$X = -2\frac{x_0}{x_0^2 - 1}, \quad Y = -X = 2\frac{x_0}{x_0^2 - 1}.$$

Формально, якщо $x_0 \to 0$, то $X, Y \to 0$; якщо ж $x_0 \to \pm 1$, то $X \to \mp\infty$, $Y \to \pm\infty$.

Подамо тепер рівняння (10.93) у такій формі:

$$\left[x\left(x^2+1\right)y\right]' - 4x^2 y + 2x = 0.$$

За позначення

$$z = x\left(x^2+1\right)y$$

воно матиме вигляд

$$z' - 4\frac{x}{x^2+1}z + 2x = 0. \tag{10.94}$$

Фундаментальною в даному випадку є функція

$$K_z = \left(\frac{x^2+1}{\gamma^2+1}\right)^2,$$

а розв'язком рівняння — функція

$$z = \left(x^2+1\right)^2\left[\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{\gamma^2+1}\left(\frac{c}{\gamma^2+1} - 1\right)\right],$$

звідки

$$y_z = \frac{1}{x}\left[\frac{x^2+1}{\gamma^2+1}\left(\frac{c}{\gamma^2+1} - 1\right) + 1\right].$$

Рівняння (10.94) і його розв'язок $z(x,\gamma)$ підпадають під застереження "теореми про існування і єдиність". Це може слугувати підставою для того, щоб визнати функцію $y_z(x,\gamma)$ єдиним розв'язком рівняння (10.93).

Хай в $\widetilde{I}=[a,b]$ ($a\le x\le b$) коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$ та вільний член $q(x)$ рівняння

$$p_0(x)\frac{dy}{dx}+p_1(x)y=q(x),$$

є неперервними функціями незалежної змінної x і такими, що

$$p_0(a)=p_0(b)=0,\quad p_0(x)>0\,(a<x<b),\quad q(x)>0\,(a\le x\le b);$$

$$\int_a^{a+\varepsilon}\frac{dx}{p_0(x)}=\int_{b-\varepsilon}^{b}\frac{dx}{p_0(x)}=+\infty\ (0<\varepsilon<b-a).$$

Можна довести, що всі розв'язки наведеного тут лінійного неоднорідного рівняння першого порядку, що існують в $I=(a,b)$, прямують до $\dfrac{q(b)}{p_1(b)}$ при $x\to b$. Серед цих розв'язків один при $x\to a$ прямує до $\dfrac{q(a)}{p_1(a)}$; інші ж при $x\to a$ прямують до $+\infty$ або $-\infty$.

Нехай у рівнянні

$$p_0(x)\frac{dy}{dx}+p_1(x)y=q(x)$$

функції $p_1(x)/p_0(x)$, $q(x)/p_0(x)$ ($p_0(x)\ne 0$) наділені такими властивостями: $p_1(x)/p_0(x)\ge c>0$, $q(x)/p_0(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Тоді можна стверджувати, що кожен розв'язок цього рівняння прямує до нуля при $x\to+\infty$. Доведення цього факту є досить простим.

Відповідно до (10.91)

$$y(x)=y(\gamma)e^{-\int_\gamma^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}+\int_\gamma^x e^{-\int_t^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}\frac{q(t)}{p_0(t)}dt\,. \tag{10.95}$$

Оскільки $p_1(x)/p_0(x)\ge c>0$, то

$$K(x,\gamma)=e^{-\int_\gamma^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}\le e^{-c(x-\gamma)}\ \forall x\ge\gamma\,.$$

Звідси очевидно, що перший доданок у виразі (10.95) при $x\to+\infty$ прямує до нуля. Виявляється, що ця особливість властива й другому доданку: при $x\to+\infty$

$$\left|\int_\gamma^x K(x,t)\frac{q(t)}{p_0(t)}dt\right|=\left|\int_\gamma^x e^{-\int_t^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}\frac{q(t)}{p_0(t)}dt\right|\le\int_\gamma^x e^{-c(x-t)}\left|\frac{q(t)}{p_0(t)}\right|dt\ =$$

$$= \int_{\gamma}^{x/2} e^{-c(x-t)} \left| \frac{q(t)}{p_0(t)} \right| dt + \int_{x/2}^{x} e^{-c(x-t)} \left| \frac{q(t)}{p_0(t)} \right| dt \le$$

$$\le e^{-\frac{c}{2}x} \sup_{\gamma \le t \le x/2} \left| \frac{q(t)}{p_0(t)} \right| + \frac{1}{c} e^{-c(x-t)} \Big|_{t=x/2}^{x} \sup_{x/2 \le t \le x} \left| \frac{q(t)}{p_0(t)} \right| \le$$

$$\le e^{-\frac{c}{2}x} \sup_{\gamma \le t \le x/2} \left| \frac{q(t)}{p_0(t)} \right| + \frac{1}{c} \sup_{x/2 \le t \le x} \left| \frac{q(t)}{p_0(t)} \right| \to 0,$$

оскільки $\sup\limits_{\gamma \le t \le x/2} \left| \frac{q(t)}{p_0(t)} \right| \le C < +\infty$, а $\sup\limits_{x/2 \le t \le x} \left| \frac{q(t)}{p_0(t)} \right| \to 0$ при $x \to +\infty$.

Таким чином, за будь-якого $y(\gamma)$ обидва доданки у виразі (10.95) при $x \to +\infty$ прямують до нуля, а отже кожен розв'язок зазначеного рівняння має властивість прямувати до нуля, коли $x \to +\infty$.

Якщо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{du}{dx} = p(x)u, \ u(0) = c,$$

і лінійна диференціальна нерівність

$$\frac{dv}{dx} \ge p(x)v, \ v(0) = c,$$

справджуються в деякому проміжку $I = [0, X]$, то

$$v(x) \ge u(x) \forall x \in I.$$

Справді, оскільки розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$\frac{dv}{dx} = p(x)v + q(x), \ q(x) \ge 0, \ v(0) = c,$$

має вигляд

$$v(x) = c\, e^{-\int_0^x p(s)ds} + \int_0^x e^{-\int_t^x p(s)ds} q(t)dt,$$

то висловлене твердження випливає з того, що ядро $e^{-\int_t^x p(s)ds}$ завжди є додатним.

Взагалі, коли необхідно розв'язати лінійну диференціальну нерівність $L[v] \ge 0$ довільного порядку, доречно розглянути відповідне лінійне неоднорідне рівняння $L[v] = q(x)$ з невід'ємною правою частиною ($q(x) \ge 0$). Тоді задача зведеться до з'ясовування умов додатної визначеності фундаментальної функції, відповідної однорідному рівнянню $L[v] = 0$.

Вважатимемо, що у рівнянні

$$\frac{dy}{dx} = by \tag{10.96}$$

величина b править за параметр, який у певному сенсі визначає будову динамічної системи (в даному разі — найпростішої). Цій системі поставимо у відповідність еквівалентну систему іншої будови, змінюючи при цьому, зрозуміло, її взаємодію з оточенням. Нехай нова система описується рівнянням

$$\frac{dy}{dx} = ay + F(x), \tag{10.97}$$

де $a \neq b$ — параметр нової системи, $F(x)$ — силовий чинник, який виникає при взаємодії системи з довкіллям.

Системи (10.96) і (10.97) еквівалентні, якщо розв’язки відповідних диференціальних рівнянь однакові. А це означає, що

$$(b-a)y = F(x). \tag{10.98}$$

Покладемо, що $F(x)$ можна розгорнути в ряд Маклорена:

$$F(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{10.99}$$

Послідовно диференціюючи (10.96), знайдемо

$$y'' = by',\ y''' = by'',\ \ldots,\ y^{(n)} = by^{(n-1)},\ \ldots$$

Звідси, при $x = 0$ і $y(0) = 1$, наприклад, матимемо:

$$y'(0) = b,\ y''(0) = b^2,\ y'''(0) = b^3,\ \ldots,\ y^{(n)}(0) = b^n,\ \ldots \tag{10.100}$$

Далі, послідовно диференціюючи (10.98) і враховуючи (10.100), знайдемо

$$F(0) = 1(b-a),\ F'(0) = b(b-a),\ F''(0) = b^2(b-a),\ \ldots,\ F^{(n)}(0) = b^n(b-a)\ \ldots$$

Отже (10.99) можна записати у вигляді

$$F(x) = (b-a)\left(1 + \frac{b}{1!}x + \frac{b^2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{b^n}{n!}x^n + \ldots\right) = (b-a)e^{bx}.$$

Формулу (10.98) можна “розкрити”, зрозуміло, і з використанням поняття фундаментальної функції. Очевидно, що

$$y = \int_{\gamma}^{x} K(x,t;a)F(t)\,dt + cK(x,\gamma;a) = cK(x,\gamma;b), \tag{10.101}$$

де $K(x,\gamma;a) = e^{a(x-\gamma)}$, $K(x,\gamma;b) = e^{b(x-\gamma)}$, див. табл. 4, приклад 2. Звідси

$$F(x) = (b-a)y = c(b-a)K(x,\gamma;b) = c(b-a)e^{b(x-\gamma)}.$$

Згадаємо викладене в 10.1 щодо інтегрального рівняння Вольтерри 1-го роду

$$Ay \equiv \int_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x), \;\; x \in [a,b]. \tag{10.102}$$

Якщо ядро $J(x,s) = K(x,s)$ і права частина $f(x)$ цього рівняння мають похідні $K'(x,s) = \dfrac{\partial K(x,s)}{\partial x}$ і $f'(x)$, то після його диференціювання, отримаємо вираз

$$K(x,x)\,y(x) + \int_a^x K'(x,s)\,y(s)\,ds = f'(x), \tag{10.103}$$

який при $K(x,x) \neq 0$ зводиться до інтегрального рівняння 2-го роду

$$y(x) + \int_a^x \frac{K'(x,s)}{K(x,x)}\,y(s)\,ds = \frac{f'(x)}{K(x,x)}. \tag{10.104}$$

Якщо ж $K(x,x) = 0$, то вираз (10.103) знову є інтегральним рівнянням Вольтерри 1-го роду. З ним також можна виконати описану операцію, якщо існують неперервні похідні $K''(x,s) = \dfrac{\partial^2 K(x,s)}{\partial^2 x}$ і $f''(x)$. В загальному випадку, якщо

$$K(x,x) = \frac{\partial K(x,s=x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 K(x,s=x)}{\partial^2 x} = \ldots = \frac{\partial^{n-2} K(x,s=x)}{\partial^{n-2} x} = 0,$$

то інтегральне рівняння Вольтерри 1-го роду (10.102) зводиться до інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду

$$y(x) + \int_a^x \frac{K^{(n)}(x,s)}{K^{(n-1)}(x,x)}\,y(s)\,ds = \frac{f^{(n)}(x)}{K^{(n-1)}(x,x)}, \tag{10.105}$$

якщо, зрозуміло,

$$K^{(n-1)}(x,x) \equiv \frac{\partial^{n-1} K(x,s=x)}{\partial^{n-1} x} \neq 0.$$

Вираз (10.101) можна тлумачити як інтегральне рівняння Вольтерри 1-го роду з невідомим $F(x)$, яке править за ознаку еквівалентності рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = b(x)y, \;\; \frac{dy}{dx} = a(x)y + F(x). \tag{10.106}$$

Диференціюванням його можна звести до рівняння типу (10.104). То ж, пам'ятаючи, що $K(x,x;a) = 1$, матимемо інтегральне рівняння 2-го роду

$$F(x) + \int_\gamma^x K'(x,t;a)F(t)\,dt = c\,(K'(x,\gamma;b) - K'(x,\gamma;a)),$$

де

$$K(x,\gamma;a)=e^{\int_\gamma^x a(s)ds},\ K(x,\gamma;b)=e^{\int_\gamma^x b(s)ds}$$

(див. (10.90)), або

$$F(x)+a(x)\int_\gamma^x e^{\int_t^x a(s)\,ds}F(t)\,dt=c\left(b(x)e^{\int_\gamma^x b(s)\,ds}-a(x)e^{\int_\gamma^x a(s)\,ds}\right). \qquad (10.107)$$

Вдаючись до формул (10.21), побудуємо відповідні рівнянню (10.107) ітеровані ядра

$$J(x,s)=a(x)e^{\int_s^x a(\tau)\,d\tau},\ J_1(x,s)=J(x,s)=a(x)e^{\int_s^x a(\tau)\,d\tau},$$

$$J_2(x,s)=a(x)\int_s^x e^{\int_t^x a(\tau)\,d\tau}a(t)e^{\int_s^t a(\tau)\,d\tau}dt=a(x)e^{\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\int_s^x a(t)\,dt=$$

$$=-a(x)e^{\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\int_x^s a(t)\,dt,\ J_3(x,s)=\int_s^x\left(a(x)e^{\int_{x_1}^x a(\tau)\,d\tau}\int_{x_1}^x a(t)\,dt\right)a(x_1)e^{\int_s^{x_1} a(\tau)\,d\tau}dx_1=$$

$$=a(x)e^{\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\int_s^x a(x_1)\int_{x_1}^x a(t)\,dt\,dx_1=(-1)^2a(x)e^{\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\int_x^s a(t)\int_t^s a(\tau)\,d\tau\,dt,\ \ldots,$$

$$J_{n+1}(x,s)=a(x)e^{\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\int_s^x a(x_1)\int_{x_1}^x a(x_2)\ldots\int_{x_{n-1}}^x a(x_n)\int_{x_n}^x a(t)\,dt\,dx_n\ldots dx_2dx_1=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}a(x)e^{\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\int_x^s a(t)\left(\int_t^s a(\tau)\,d\tau\right)^n dt,\ \ldots$$

Тут використано формулу Діріхле (див. 10.1) і формулу

$$\int_a^x \varphi(x_1)\,dx_1\int_a^{x_1}\varphi(x_2)\,dx_2\ldots\int_a^{x_{n-1}}\varphi(x_n)\,dx_n\int_a^{x_n}f(t)\,dt=\frac{1}{n!}\int_a^x f(t)\left(\int_t^x\varphi(s)\,ds\right)^n dt. \qquad (10.108)$$

Далі, на підставі (10.22) знайдемо резольвенту (тут $\lambda=-1$)

$$R(x,s)=J_1(x,s)-J_2(x,s)+\ldots+(-1)^nJ_{n+1}(x,s)+\ldots=$$

$$= a(x) e^{\int_s^x a(\tau) d\tau} \left(1 + \int_x^s a(t)\, dt + \int_x^s a(t) \int_t^s a(\tau)\, d\tau\, dt + \ldots + \frac{1}{n!} \int_x^s a(t) \left(\int_t^s a(\tau)\, d\tau \right)^n dt + \ldots \right) =$$

$$= a(x) e^{\int_s^x a(\tau) d\tau} \left[1 + \int_x^s a(t) \left(1 + \frac{1}{1!} \int_t^s a(\tau)\, d\tau + \ldots + \frac{1}{n!} \left(\int_t^s a(\tau)\, d\tau \right)^n + \ldots \right) dt \right] =$$

$$= a(x) e^{\int_s^x a(\tau) d\tau} \left(1 + \int_x^s a(t) e^{\int_t^s a(\tau) d\tau} dt \right).$$

Нарешті, звертаючись до формули (10.15), яка відтворює розв'язок рівняння (10.14), знайдемо розв'язок рівняння (10.107):

$$\frac{F(x)}{c} = \left(b(x) e^{\int_\gamma^x b(s) ds} - a(x) e^{\int_\gamma^x a(s) ds} \right) -$$

$$- a(x) \int_\gamma^x e^{\int_s^x a(\tau) d\tau} \left(1 + \int_x^s a(t) e^{\int_t^s a(\tau) d\tau} dt \right) \left(b(s) e^{\int_\gamma^s b(\tau) d\tau} - a(s) e^{\int_\gamma^s a(\tau) d\tau} \right) ds ,$$

або

$$\frac{F}{c} = (b(x) - a(x)) e^{\int_\gamma^x b(s) ds} . \tag{10.109}$$

Таким чином, рівняння (10.106) є динамічно еквівалентними, якщо справджується умова (10.109). Зокрема, якщо $b = \text{const}$, то умова (10.109) набирає вигляду

$$\frac{F}{c} = (b - a(x)) e^{b(x-\gamma)} . \tag{10.110}$$

Вираз (10.110) відбиває в собі умову зведення рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами до аналогічного рівняння зі сталими коефіцієнтами, і навпаки.

Подібно, формула (10.105) (сумісно з (10.108)) стає в нагоді для з'ясовування еквівалентності лінійних рівнянь n-го порядку, якщо під $K(x,s)$ розуміти відповідну фундаментальну функцію; вона, як було з'ясовано раніше (див. розділ 8), задовольняє потрібні умови:

$$K(x,x) = \frac{\partial K(x, s=x)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial^{n-2} K(x, s=x)}{\partial^{n-2} x} = 0 , \quad \frac{\partial^{n-1} K(x, s=x)}{\partial^{n-1} x} = 1 .$$

Незважаючи на свою елементарність, рівняння першого порядку дуже часто стають в нагоді при тлумаченні багатьох нетривіальних явищ. Розглянемо спочатку простий приклад економічного змісту.

Пересічно розрізняють два види затрат: початкові капітальні і поточні експлуатаційні. Якщо початкові капітальні затрати надто малі, то це спричинить надто великі поточні експлуатаційні витрати. Вкладаючи занадто малі кошти і зусилля, наприклад, у проектування і виготовлення “народного” автомобіля, обов'язково доведеться переконатись у його “антинародності”, зіткнувшись з надмірними (несумірними з початковими) витратами при користуванні ним, його обслуговуванні, ремонті, утилізації. Навпаки, якщо домагатись, щоби поточних витрат не було взагалі, то автомобіль стане надзвичайно, недосяжно дорогим. Таким чином, між початковими капітальними вкладеннями і поточними експлуатаційними видатками існує певна раціональна відповідність.

Капітальні вкладення можна віднести до разової акції; натомість, експлуатаційні видатки — розосереджений в часі процес. Тому співвіднести капітальні вкладення і експлуатаційні видатки безпосередньо важко. “Розосередити”, принаймні формально, капітальні вкладення можна так.

Припустимо, що для здійснення капітальних вкладень береться позика C, яку доведеться повертати внесками, пропорційними несплаченому боргу $b(t)$, t — час. А оскільки кошти вилучено з якоїсь іншої сфери господарської діяльності, де вони могли б також приносити певну користь, то доведеться додатково сплачувати деяку компенсаційну плату, величина якої також пропорційна несплаченому боргу. Припустимо, що сплата боргу здійснюється неперервно, і нехай величина компенсаційного питомого внеску становить $p=\mathrm{const}$. Тоді поточний загальний внесок складатиме

$$v = pb(t) - \frac{db(t)}{dt}; \tag{10.111}$$

перша складова величини v відображає плату за надання капіталу у користування, а друга — плату з метою скорочення несплаченої частини $b(t)$ позиченого капіталу C.

В початковий момент часу $t=0$ невиплачена частина позиченого капіталу, зрозуміло, збігається з величиною самого капіталу: $b(0)=C$. В кінці якогось контрольного моменту $t=T$ вона повинна стати рівною нулю: $b(T)=0$. Таким чином, розв'язок диференціального рівняння (10.111) повинен задовольняти граничні умови

$$b(0)=C, \qquad b(T)=0. \tag{10.112}$$

Відповідну рівнянню (10.111) функцію впливу можна записати у вигляді (див. (10.90)):

$$K(t,T) = e^{-\int\limits_T^t \frac{p}{-1} ds} = e^{p(t-T)}.$$

В загальному випадку, коли $\nu=\nu(t)=\mathrm{var}$, загальним розв'язком рівняння (10.111) є функція (див. (10.91))

$$b=\int_T^t K(t,s)\frac{\nu(s)}{-1}ds+cK(t,T)=ce^{p(t-T)}-\int_T^t e^{p(t-s)}\nu(s)\,ds$$

Умова $b(T)=0$ (див. (10.112)) задовольняється в тому разі, якщо $c=0$.

Таким чином розв'язком рівняння (10.111), який задовольняє другу з умов (10.112), є функція

$$b(t)=e^{pt}\int_t^T e^{-ps}\nu(s)\,ds\,.$$

Покладаючи $t=0$ і $\nu=\mathrm{const}$, на підставі першої з умов (10.112) знайдемо:

$$C=\frac{\nu\left(1-e^{-pT}\right)}{p}$$

(підкреслимо, що $C=\nu T$ при $p\to 0$).

Величину $E=\nu/C$ називають коефіцієнтом ефективності капітальних вкладень. В нашому випадку

$$E=\frac{p}{1-e^{-pT}}\,.$$

Зокрема, якщо $p=5\ \%/\text{рік}$ і $T=20\ \text{років}$, то виявиться, що

$$E\approx 0{,}08/\text{рік}\,.$$

Гідростатичний тиск на глибині h від поверхні рідини визначається, як відомо, за формулою Паскаля

$$p=\rho g h\,,$$

де ρ — густина рідини; g — прискорення вільного падіння у полі земного тяжіння. Густину ρ через малу стисливість рідини можна вважати сталою. Натомість, гази легко стискаються, а отже густина кожного газу залежить від тиску, якого він зазнає. Знайдемо закон зміни тиску p повітря залежно від висоти h над поверхнею Землі, коли тиск на самій поверхні Землі становить p_0.

Виділимо в повітряному середовищі вертикальний циліндр висотою dh, що має в основі круг площею A. На нижню грань цього паралелепіпеда, розташовану на висоті h від земної поверхні (відлік ведеться пересічно від рівня моря), діє спрямована вгору сила $p(h)A$. На розташовану на висоті $h+dh$ верхню грань діє спрямована вниз сила $(p(h)+dp)A$. Ці сили врівноважуються силою ваги $\rho g A dh$ повітря, що міститься у виділеному циліндричному просторі (ρ — густина повітря, g — прискорення вільного падіння у полі земного тяжіння, або так звана гравітаційна стала): $p(h)A-(p(h)+dp)A-\rho gA\,dh=0$. Звідси

$$-dp=\rho g\,dh. \tag{10.113}$$

Вважатимемо повітря ідеальним газом. Рівняння термодинамічного стану ідеального газового середовища (рівняння Клапейрона)

$$pv=\frac{M}{\mu}RT$$

засвідчує, що добуток тиску p на об'єм v газу визначається загальною M і молекулярною μ масами газу та абсолютною його температурою T (R — універсальна газова стала, $R=8{,}314$ Дж/(моль $\cdot$ К)). Звідси

$$\rho=\frac{M}{v}=\frac{\mu p}{RT}.$$

Таким чином, рівняння (10.113) можна подати у вигляді

$$\frac{dp}{dh}+\frac{\mu g}{RT}p=0. \tag{10.114}$$

Розв'язок рівняння (10.114) за умови $p(0)=p_0$ визначається за формулою

$$p=p_0e^{-\frac{\mu g}{RT}h}, \tag{10.115}$$

яка носить ім'я барометричної формули. Вона засвідчує, що на висоті $h=\dfrac{RT}{\mu g}=h^*$ тиск повітря в $e\approx 2{,}71828\approx 3$ разів менший за тиск повітря на рівні моря; на висоті $2h^*$, $3h^*$, … тиск менший відповідно у $e^2\approx 7{,}39\approx 7$, $e^3\approx 20$, … разів.

Водночас тиск залежить від значення величини μ. А повітря, як відомо, — це суміш кисню, азоту, вуглекислого газу (двооксиду вуглецю), водяної пари, інертних газів, молекулярні маси яких, зрозуміло, є різними (зокрема, у кисню $\mu=\mu_{O_2}=32$, в азоту $\mu=\mu_{N_2}=28$, у двооксиду вуглецю $\mu=\mu_{CO_2}=46$, у водяної пари $\mu=\mu_{H_2O}=18$). Отже кожному з перелічених складових повітря відповідатиме своє значення величини h^*. На висоті кількох кілометрів над поверхнею Землі панує температура $T=250$ K (що відповідає –23 $^\circ$C). Для цієї температури величина h^* набуває значень:

Газ (вміст в атмосфері за об'ємом, %)	Азот N_2 (78, 61)	Кисень O_2 (20,95)	Двооксид вуглецю CO_2 (0,03)	Водяна пара H_2O (до 4)
Значення величини h^*, км	7,4	6,8	4,5	11,5

Керуючись наведеними в таблиці даними, слід було б визнати, що з висотою склад повітря суттєво змінюється: спочатку з нього мала б майже повністю зникнути вуглекислота, далі кисень; на висоті 20...30 км можна було б знайти лише водяну пару і трохи азоту. Насправді повітряні течії, фазові перетворення водяної пари, супроводжувані опадами, й інші чинники помітно коректують висотну зміну складу повітря. На процесі формування складу повітря істотно позначається температура: до межі атмосфери, тобто до висоти 10...15 км температура з кожним кілометром знижується на 6,5 $^\circ\mathrm{C}$; в наступному шарі — стратосфері, що простягається до висоти 55 км, температура майже стала і становить $-50\ ^\circ\mathrm{C}$; на висоті 90...100 км температура підвищується до кількох сот градусів вище нуля за Цельсієм.

Проте в межах кількох кілометрів над рівнем моря барометрична формула (10.115) є задовільно точною. За нею на вершині Ельбрусу ($h = 5630$ м), наприклад, тиск повітря (для якого в середньому $\mu \approx 29$) становить частку $\eta = 0{,}45$ від тиску на рівні моря, що є вірогідним.

Отже, зміну тиску газу з висотою відбиває барометрична формула (10.115), яку можна записати у вигляді

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT}(h-h_0)}. \tag{10.116}$$

Тиск газу пов'язаний з концентрацією його молекул формулою $p = nkT$, де n — концентрація молекул, кількість молекул газу в одиниці його об'єму; k — стала Больцмана ($k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К; до речі, $R = N_A k$, $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$ — стала Авогадро); T — абсолютна температура.

Порівнюючи параметри газу на висотах h і h_0, при $T = \mathrm{const}$ матимемо:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{n}{n_0}.$$

Тому рівняння (10.116) можна записати у формі

$$\frac{n}{n_0} = \frac{e^{-\frac{\mu g}{RT}h}}{e^{-\frac{\mu g}{RT}h_0}} = e^{-\frac{\mu g}{RT}(h-h_0)}, \tag{10.117}$$

або, після заміни $\dfrac{R}{\mu} = \dfrac{k}{m}$ (m — маса молекули газу),

$$n = n_0 e^{-\frac{mg}{kT}(h-h_0)}. \tag{10.118}$$

Величина $mg(h-h_0) = \Delta E_\pi = E_\pi - E_{\pi 0}$ має зміст приросту потенціальної енергії частинки газу при переході її з рівня h_0 на рівень h. Тому (10.118) можна записати у вигляді

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta E_\pi}{kT}},$$

або

$$\bar{n} = \frac{n}{n_0} = \frac{e^{-\frac{E_\pi}{kT}}}{e^{-\frac{E_{\pi 0}}{kT}}} = e^{-\frac{E_\pi - E_{\pi 0}}{kT}} = e^{-\frac{\Delta E_\pi}{kT}}, \qquad (10.119)$$

де $\bar{n}$ — відносна концентрація молекул.

На відміну від (10.117) або (10.118) формула (10.119) є значно універсальнішою (з неї слід висновувати барометричну формулу, а не навпаки). Вираз (10.119) відображає закон розподілу (Л. Больцмана) часток, що перебувають у довільному потенціальному полі зовнішніх сил (а не тільки в гравітаційному). З нього випливає, що $n \to n_0$ при $T \to \infty$, тобто підвищення температури сприяє вирівнюванню концентрації газу у всьому наданому йому об’ємі. При $T \to 0$, натомість, $n \to 0$, тобто газ зосереджується на дні посудини, де $n_0 \neq 0$ (земна атмосфера існує лише завдяки тепловому рухові часток повітря).

Розглянемо термомеханічну систему, що складається з циліндра C і вільного поршня P, рис. 69. Циліндр з поршнем пласкопаралельно обертаються навколо нерухомої восі (радіус обертання циліндра сталий, а поршня r — змінний). Поршень вздовж напрямної циліндра пересувається без тертя. Разом циліндр і поршень утворюють периферійний (протилежний до осі обертання) змінний замкнений простір, який заповнено ідеальним газом.

Нехай обертання циліндра і пересування поршня, рис. 69, спричиняють такі процеси, які разом складають замкнений термодинамічний цикл (так званий цикл Аміна):

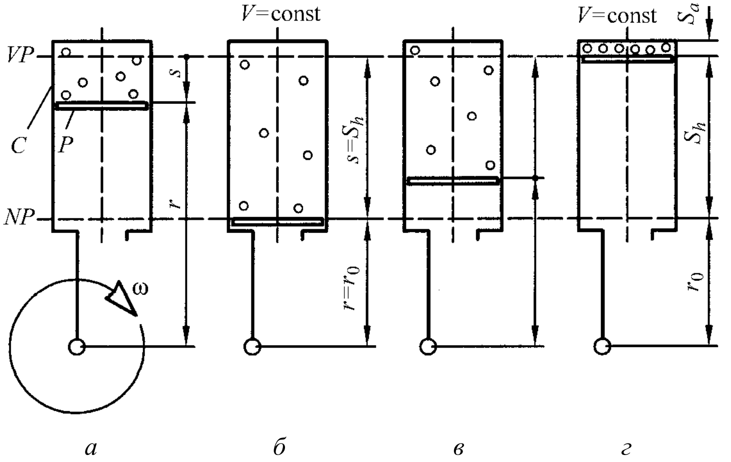
1—2. Газ розширяється в циліндрі ізотермічно при температурі T_H, коли циліндр обертається зі сталою малою швидкістю ω_1;

2—3. Швидкість обертання циліндра зростає від значення ω_1 до значення ω_2 при сталому об’ємі газу;

3—4. Газ стискається в циліндрі ізотермічно при температурі T_C, коли циліндр обертається зі сталою великою швидкістю ω_2;

4—1. Швидкість обертання циліндра спадає від значення ω_2 до значення ω_1 при сталому об’ємі газу.

Обертання циліндра породжує відцентрові прискорення $a = v^2/r = \omega^2 r$, де v — лінійна швидкість тієї точки термомеханічної системи, яка знаходиться на віддалі r від восі обертання. Отже, частки газу знаходяться під впливом центрального поля відцентрових сил, а тому для газу справедливим має бути (за певних засте- режень щодо змінності силового поля в часі) закон розподілу Больцмана. Гравітаційному силовому чиннику mg і енергії mgh в даному разі відповідають інерційний силовий чинник $m\omega^2 r$ і енергія $\frac{m\omega^2 r^2}{2}$. Отже, чисто формально



69 **Стани теплового двигуна Аміна.**

$$\frac{p}{p_0}=e^{-\frac{m(\omega^2 r^2-\omega_0^2 r_0^2)}{2kT}}=e^{-\frac{\mu(\omega^2 r^2-\omega_0^2 r_0^2)}{2RT}},$$

тут враховано співвідношення $\dfrac{p}{p_0}=\dfrac{n}{n_0}$ і $\dfrac{R}{\mu}=\dfrac{k}{m}$. Тут чинності набуває диференціальне рівняння $-dp=\dfrac{mp}{kT}\omega^2 r\,dr$.

За першим законом термодинаміки

$$dQ=dU+dW+dE_\pi,$$

де dQ — теплота, що пересилається в циліндр; $dU=nC_V dT$ — зміна внутрішньої енергії газу в циліндрі (n — кількість молекул газу, C_V — теплоємність газу при сталому об'ємі; в ізотермічному процесі $dT=0$, а тому і $dU=0$); $dW=pdV$ — робота розширення газу (dV — зміна об'єму газу в циліндрі); $dE_\pi=\dfrac{m\omega^2(r_0+S_a)}{2}-\dfrac{m\omega^2(r_0+S_a-s)}{2}$ — зміна енергії частинки газу в зовнішньому силовому полі. Величина $\dfrac{m\omega^2(r_0+S_a)}{2}$ є сталою і нею оперувати кожного разу немає сенсу.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) термодинамічного циклу Аміна визначається за формулою

$$\eta_A=1-\frac{T_C}{T_H}e^{-\frac{mgS_h}{k(T_C-T_H)}},$$

де T_C — температура газу на початку ходу стискування; T_H — найвища температура в термодинамічному циклі; m — маса газу; S_h — робочий хід поршня; g — гравітаційна стала; k — стала Больцмана. При $g \to 0$ (гравітаційний ефект зникає) значення ККД термодинамічного циклу Аміна прямує до значення ККД термодинамічного циклу Карно:

$$\eta_A \to 1 - \frac{T_C}{T_H} = \eta_C .$$

Цикл Аміна складають ізотермічні та ізохорні процеси, тоді як цикл Карно — ізотермічні та адіабатні процеси (наголосимо, що адіабатні процеси в циклі Аміна відсутні). Цикл Карно вважається (вже 150 років) еталоном за рівнем ефективності. Проте, в технічному відношенні за ідеал він правити не може. Оскільки адіабати і ізотерми лягають вельми близько одна від одної, то цикл є надто “худеньким”, і отже, щоб отримати від двигуна задану потужність за заданих температур T_C і T_H, необхідно в кожну мить часу паралельно відтворювати надмірно багато циклів (те, що цикл Карно теоретично здійсненний лише за нескінченно довгий проміжок часу, тут до уваги не беремо). Перепоною на шляху його відтворення в реальних двигунах стає і така обставина: щоб досягнути рівня ефективності, скажімо, $\eta_C = 0{,}5$ за початкової температури, наприклад, $T_C = 300\text{ K}$ (а ця температура визначається станом довкілля), вища температура в циклі повинна сягати значення $T_H = 600\text{ K}$ (див. останню формулу); але забезпечити задовільну термотривкість матеріалів, з яких є сенс виготовляти основні деталі двигуна, за температури $T_H = 600\text{ K}$ — надто складна задача як в технічному, так і в комерційному відношеннях.

Теоретичні засади циклу Аміна, винайденого в 1987 році і опублікованого в 1994, — суперечливі. Деякі вчені взагалі вважають його таким, що перечить другому закону термодинаміки. Проте, незаперечним є те, що полеміка навколо нього розбудила технічну думку, яка спала сотню років.

Розглянемо тепер формальні приклади.

Рівнянню

$$y' - \frac{k}{x} y = 0 \quad \left(p_0 = 1,\ p_1 = -\frac{k}{x} \right) \tag{10.120}$$

відповідає фундаментальна функція

$$K = e^{-\int_\gamma^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds} = e^{k\int_\gamma^x \frac{ds}{s}} = \left| \frac{x}{\gamma} \right|^k .$$

Отже за розв’язок рівняння повинна правити функція

$$y = cK = c\left| \frac{x}{\gamma} \right|^k , \quad c = \text{const} \in \mathrm{R} . \tag{10.121}$$

Дійсно,

$$y' = cK' = c\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{x}{\gamma}\right|^k = c\frac{k}{\gamma}\left|\frac{x}{\gamma}\right|^{k-1}\operatorname{sgn}\left|\frac{x}{\gamma}\right| = c\frac{k}{x}\left|\frac{x}{\gamma}\right|^{k-1}\frac{x}{\gamma}\operatorname{sgn}\left|\frac{x}{\gamma}\right| = c\frac{k}{x}\left|\frac{x}{\gamma}\right|^k = \frac{k}{x}y\,.$$

Переконаймося, що (10.121) відбиває в собі всі розв'язки рівняння (10.120).

Нехай $y = \psi(x)$ — деякий розв'язок рівняння (10.120), а тому

$$\frac{d\,\psi(x)}{dx} - \frac{k}{x}\psi(x) = 0\,. \tag{10.122}$$

Розглянемо функцію $f(x) = \psi(x)|\,x\,|^{-k}$. Похідна цієї функції дорівнює нулю в силу (10.122):

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d\,\psi(x)}{dx}|\,x\,|^{-k} - k|\,x\,|^{-k-1}\operatorname{sgn} x\;\psi(x) = |\,x\,|^{-k}\left(\frac{d\,\psi(x)}{dx} - \frac{k}{x}\psi(x)\right) = 0\,.$$

Отже $f(x) = C = \text{const}$. Таким чином,

$$y = \psi(x) = f(x)\big/|\,x\,|^{-k} = C|\,x\,|^k\,,$$

що з точністю до сталих збігається з (10.121).

Наведені викладки слід тлумачити як доведення власне того, що формула (10.121) відображає всі розв'язки рівняння (10.120). Але водночас, легко зауважити, що це рівняння локально в точці $x = 0$ задовольняють безліч інших функцій. Отже, про повну вичерпність формули (10.121) в цьому сенсі йтися не може.

Рівняння

$$\frac{dr}{d\alpha} = r - 1\,,$$

де (r, α) — полярні координати на площині, інтегрується безпосередньо:

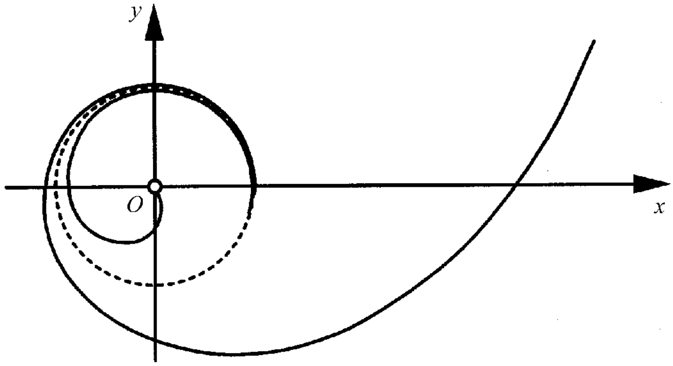
$$\frac{dr}{r-1} = \frac{d(r-1)}{r-1} = d\alpha\,,$$

$$\ln|\,r-1\,| = \alpha + \ln c\,,\; |\,r-1\,| = ce^{\alpha}$$

(c — довільна невід'ємна стала). Якщо $c = 0$, то інтегральна крива є колом $r = 1$, рис. 70. Якщо з самого початку $r > 1$, то інтегральна крива відображається рівнянням $r = 1 + ce^{\alpha}$; ця крива — спіраль, яка при $\alpha \to -\infty$ навивається на коло $r = 1$, а при $\alpha \to +\infty$ розкручується у нескінченність. Якщо з самого початку $r < 1$, то інтегральна крива відображається рівнянням $r = 1 - ce^{\alpha}$; ця крива також є спіраллю; вона при $\alpha \to -\infty$ збігається до кола $r = 1$, і при

$$\alpha = -\ln c$$

прямує у початок O системи координат.



70 **Спіральні розв'язки рівняння першого порядку.**

Цей приклад засвідчує, наскільки суттєво може впливати на сприйняття розв'язку рівняння первісна система координат: структура рівняння нічим особливим не вирізняється, проте видима поведінка розв'язку, без сумніву, є незвичайною і непростою.

10.6 Лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Класичні задачі

Нехай задано **лінійне другого порядку рівняння зі звичайними похідними**

$$L[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)\,, \qquad (10.123)$$

в якому коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ та вільний член $q(x)$ є неперервними функціями в наперед окресленому інтервалі $I=(a,b)$, і до того ж $p_0(x)\neq 0$ в $I=(a,b)$ (додаткові вимоги щодо гладкості функцій $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ та $q(x)$ тут знову не висуваються). Воно має єдиний визначуваний в тому самому $I=(a,b)$ розв'язок $y=y(x)$, який при деякому конкретному $x=x_0\in(a,b)$ задовольняє початкові умови

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0\,. \qquad (10.124)$$

Цей єдиний **розв'язок** рівняння (10.123) можна подати у вигляді:

$$y = y_*(x,\gamma) + y_\circ(x,\gamma) =$$

$$= \int_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}ds + c_1K(x,\gamma) + c_2\frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial\gamma}\,,$$

де

$$y_*(x,\gamma)=\int\limits_\gamma^x K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}ds$$

— окремий розв'язок рівняння (10.123) (який задовольняє нульові початкові умови $y_*(\gamma,\gamma)=y_*'(\gamma,\gamma)=0$);

$$y_\circ(x,\gamma)=c_1K(x,\gamma)+c_2\frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial\gamma}$$

— загальний розв'язок супровідного однорідного рівняння; $K(x,\gamma)$ — відповідна диференціальному операторові другого порядку фундаментальна функція, що за означенням є розв'язком супровідного однорідного рівняння

$$L[y]\equiv p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \qquad (10.125)$$

і задовольняє умови

$$K(x,\gamma)\big|_{x=\gamma}=0,\ K'(x,\gamma)\big|_{x=\gamma}=\left.\frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=\gamma}=1,$$

$$\dot K(x,\gamma)\big|_{x=\gamma}=\left.\frac{\partial K(x,\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{x=\gamma}=-1. \qquad (10.126)$$

На підставі викладеного в 10.5 і рівностей (10.126) знайдемо:

$$\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma)\\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} K(x,\gamma) & \dot K(x,\gamma)\\ K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma)\end{vmatrix}_{x=\gamma} e^{-\int\limits_\gamma^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}=e^{-\int\limits_\gamma^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds},$$

$$\begin{vmatrix} K'(x,\gamma) & \dot K'(x,\gamma)\\ K''(x,\gamma) & \dot K''(x,\gamma)\end{vmatrix}=\frac{p_2(x)}{p_0(x)}e^{-\int\limits_\gamma^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}. \qquad (10.127)$$

Рівності (10.127) можна подати також у вигляді:

$$(K(x,\gamma))^2\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\ln K(x,\gamma)=e^{-\int\limits_\gamma^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds},$$

$$(K'(x,\gamma))^2\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\ln K'(x,\gamma)=\frac{p_2(x)}{p_0(x)}e^{-\int\limits_\gamma^x\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}.$$

Приклади диференціальних виразів другого порядку та відповідних їм фундаментальних функцій наведено в табл. 5.

5 **Лінійні оператори другого порядку та відповідні їм фундаментальні функції**

№	$L[y]$	$K(x,\alpha)$
1	$(f(x)y')'$	$\int_{\alpha}^{x}\frac{ds}{f(s)}$
2	$y''+\frac{1}{x}y'$	$\alpha\ln\frac{x}{\alpha}$
3	$y''+\frac{2}{x}y'+k^2y,\quad k=\mathrm{const}$	$\frac{\alpha}{kx}\sin k(x-\alpha)$
4	$y''+\frac{p^2}{(1+kx)^4}y,\quad p,k=\mathrm{const}$	$\frac{1}{\psi(x,\alpha)}\sin\psi(x,\alpha)(x-\alpha)$, $\psi(x,\alpha)\equiv\frac{p}{(1+k\alpha)(1+kx)}$
5	$y''+\frac{p}{f(x)}y\quad p=\mathrm{const}$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-p)^k u_k(x,\alpha)\equiv U(x,\alpha)$, $u_0(x,\alpha)=x-\alpha$, $u_k(x,\alpha)=\int_{\alpha}^{x}\frac{x-s}{f(s)}u_{k-1}(s,\alpha)\,ds$, $k=1,2,\ldots$
6	$y''-4y'+5y$	$e^{2(x-\alpha)}\sin(x-\alpha)$
7	y''	$x-\alpha$
8	$y''+\omega^2y,\ \omega=\mathrm{const}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega(x-\alpha)$
9	$y''-\omega^2y,\ \omega=\mathrm{const}$	$\frac{1}{\omega}\mathrm{sh}\,\omega(x-\alpha)$
10	$y''+2\omega^2y'+\omega^4y$	$(x-\alpha)e^{-\omega^2(x-\alpha)}$
11	$y''+2\varepsilon y'+\omega^2y$, $\varepsilon,\omega=\mathrm{const},\quad 0\le\varepsilon\le\omega^2$	$\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}e^{-\varepsilon(x-\alpha)}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\varepsilon}(x-\alpha)\right)$
12	$y''+ay'+by$	$\frac{e^{s_1(x-\alpha)}-e^{s_2(x-\alpha)}}{s_1-s_2}$, s_1, s_2 — довільні (комплексні) числа, $s_1+s_2=a,\quad s_1s_2=b$

Однорідне лінійне рівняння другого порядку (10.125) за допомогою заміни

$$y = \varphi(x) z \tag{10.128}$$

(z — нова шукана функція) завжди можна звести до вигляду

$$z'' + I(x) z = 0\,, \tag{10.129}$$

де

$$I(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right)^2 + \frac{p_2(x)}{p_0(x)}. \tag{10.130}$$

Функцію $I = I(x)$ називають інваріантом рівняння (10.125).

Щоб переконатися у справедливості цього твердження, вдамося до низки перетворень. Перш за все, підставимо (10.128) в (10.125) і отримаємо:

$$p_0(x)(\varphi''(x)z + 2\varphi'(x)z' + \varphi(x)z'') + p_1(x)(\varphi'(x)z + \varphi(x)z') + p_2(x)\varphi(x)z = 0$$

або

$$z'' + \left(2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right)z' + \left(\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{p_2(x)}{p_0(x)}\right)z = 0\,. \tag{10.131}$$

Якщо за $\varphi(x)$ взяти функцію

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}\,,$$

то коефіцієнт при z' у рівнянні (10.131) обертається на нуль:

$$2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = 0\,.$$

При цьому

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2}\frac{p_1(x)}{p_0(x)}e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}\,,$$

$$\varphi''(x) = \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right)' + \frac{1}{4}\left(\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right)^2\right)e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{x}\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds}$$

і рівності (10.129), (10.130) стають очевидними.

Зрозуміло, що якщо рівняння (10.129) інтегрується в квадратурах, то й рівняння (10.125) також інтегрується в квадратурах. Такими є, наприклад, випадки, коли $I(x)=C$ (рівняння зі сталими коефіцієнтами) або $I(x)=\dfrac{C}{(ax+b)^2}$ (**рівняння Лагранжа**), $C,a,b=\text{const}$; рівняння Лагранжа будь-якого порядку n

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0$$

($a,b,a_i=\text{const},\quad i=\overline{1,n}$) заміною $ax+b=e^t$ зводиться до лінійного зі сталими коефіцієнтами.

Диференціальні рівняння можна використовувати і як засіб означення функцій. Розглянемо приклад означення тригонометричних функції $\sin x$, $\cos x$ [Ф. Трикомі]. Функції $\sin x$, $\cos x$, як легко пересвідчитися, спираючись безпосередньо, на їх властивості, є розв'язками рівняння

$$y''(x)+y'(x)=0. \tag{10.132}$$

Навпаки, позначаючи через $s(x)$, $c(x)$ розв'язки рівняння (10.132), що задовольняють умови

$$c(0)=1,\ c'(0)=0,\ s(0)=0,\ s'(0)=1, \tag{10.133}$$

можна, не вдаючись безпосередньо до властивостей тригонометричних функцій, з'ясувати, зокрема, що

$$s(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\quad c(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots,$$

$$s^2(x)+c^2(x)=1,\quad s'(x)=c(x),\quad c'(x)=-s(x)$$

тощо. Отже розв'язки $s(x)$, $c(x)$ рівняння (10.132), які задовольняють початкові умови (10.133), виявляють властивості тригонометричних функцій.

Підкреслимо, що функції $\sin x$, $\cos x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (10.132). До того ж, і функція $\sin(x+\alpha)$ за довільного $\alpha\in\mathrm{R}$ також є розв'язком цього рівняння, а тому

$$\sin(x+\alpha)=c_1\sin x+c_2\cos x, \tag{10.134}$$

де c_1, c_2 — деякі залежні від α сталі. Підставляючи в (10.134) значення $x=0$, знайдемо $c_2=\sin\alpha$. Далі, диференціюючи тотожність (10.134) за x і підставляючи в отриманий результат знову $x=0$, отримаємо $c_1=\cos\alpha$. Звідси випливає:

$$\sin(x+\alpha)=\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x. \tag{10.135}$$

Аналогічно можна з'ясувати, що

$$\cos(x+\alpha)=\cos\alpha\cos x-\sin\alpha\sin x. \qquad (10.136)$$

Вирази (10.135), (10.136) називають **формулами додавання**.

Розв'язки лінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами не завжди виражаються елементарними функціями, а інтегрування такого рівняння рідко зводиться до квадратур. Найбільш поширеним методом інтегрування таких рівнянь є зображення шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду. Розглянемо визначальні положення методології степеневих рядів за [29].

Функцію $f(t)$, означену в проміжку (a,b), називають **аналітичною в точці** $t_0\in(a,b)$, якщо її можна розвинути в степеневий ряд, збіжний в деякому околі точки t_0. Кажуть, що **функція** $f(t)$ **аналітична в проміжку** (a,b), якщо вона в кожній точці t_0 цього проміжку може бути розвинена в степеневий ряд, що збігається в деякому околі точки t_0. Зокрема, якщо ряд

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} f_k(t-t_0)^k = f(t)$$

має радіус збіжності $r>0$, то функція $f(t)$ аналітична в проміжку (t_0-r,t_0+r).

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0, \qquad (10.137)$$

в якому коефіцієнти $p(t)$ і $q(t)$ є аналітичними функціями в проміжку $|\,t-t_0\,|<a$, тобто можуть бути розвиненими в степеневі ряди

$$p(t)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t-t_0)^k,\ q(t)=\sum_{k=0}^{\infty} q_k(t-t_0)^k, \qquad (10.138)$$

що збігаються при $|t-t_0|<a$.

Вірним є таке твердження. Якщо в рівнянні (10.137) функції $p(t)$ і $q(t)$ аналітичні при $|\,t-t_0\,|<a$, то будь-який розв'язок цього рівняння є аналітичною функцією при $|\,t-t_0\,|<a$, тобто може бути розвинений у степеневий ряд

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k, \qquad (10.139)$$

що збігається при $|\,t-t_0\,|<a$.

При доведенні твердження розв'язок рівняння (10.137) шукатимемо у вигляді (10.139), вважаючи c_k, $k=0,1,\ldots$, коефіцієнтами, що підлягають визначенню. Диференціюємо двічі ряд (10.139):

$$x'(t)=\sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k\,(t-t_0)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(t-t_0)^k,$$

$$x''(t)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k(t-t_0)^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}(t-t_0)^k .$$

Підставляючи отриманий результат разом з виразами (10.138) і (10.139) в (10.137), матимемо:

$$x''+p(t)x'+q(t)x=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}(t-t_0)^k+\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t-t_0)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(t-t_0)^k\right)+$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{\infty}q_k(t-t_0)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t-t_0)^k\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{j=0}^{k}p_j(k-j+1)c_{k-j+1}+\sum_{j=0}^{k}q_j c_{k-j}\right)(t-t_0)^k=0 .$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при $(t-t_0)^k$, укладемо систему алгебричних рівнянь

$$2\cdot1\cdot c_2+p_0c_1+q_0c_0=0,$$

$$3\cdot2\cdot c_3+2p_0c_2+(p_1+q_0)c_1+q_1c_0=0,$$

……………………………………………………

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{j=0}^{k}\left(p_j(k-j+1)c_{k-j+1}+q_jc_{k-j}\right)=0, \tag{10.140}$$

яка дає змогу визначити коефіцієнти c_k, $k=0,1,\dots$ При цьому коефіцієнти c_0 і c_1 можна взяти довільними; тоді, з першого рівняння системи (10.140) легко знайти c_2 (однозначно через c_0 і c_1), з другого — c_3 (однозначно через c_0, c_1 і c_2) і т.д. Покладемо, що шуканий розв'язок рівняння (10.137) повинен задовольняти початкові умови $x(t_0)=c_0$, $x'(t_0)=c_1$.

Доведемо збіжність одержаного ряду (10.139) при $|t-t_0|<a$.

Хай r — довільне додатне число, $r<a$. Із збіжності рядів (10.138) випливає, що знайдеться додатне число M таке, що

$$|p_k|<\frac{M}{r^k},\ |q_k|<\frac{M}{r^{k+1}} .$$

Покладемо $|c_0|=A_0$, $|c_1|=A_1$ і задамо рекурентну послідовність додатних чисел A_k:

$$(k+2)(k+1)A_{k+2} = \frac{M}{r^{k+1}}A_0 + 2\frac{M}{r^k}A_1 + 3\frac{M}{r^{k-1}}A_2 + \ldots + (k+1)\frac{M}{r}A_k + (k+2)MA_{k+1},$$
$$k = 0,1,2,\ldots$$

Порівнюючи ці числа з $|c_k|$, можна пересвідчитися, що $|c_k| \le A_k$ для будь-якого $k = 0,1,2,\ldots$ З іншого боку, беручи до уваги співвідношення

$$r(k+2)(k+1)A_{k+2} - (k+1)k\,A_{k+1} = r(k+2)MA_{k+1}$$

переконуємося, що $\frac{A_{k+1}}{A_{k+2}} \to r$, коли $k \to \infty$. А це означає, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (t-t_0)^k$ збігається при $|t-t_0| < r$. Отже, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_0)^k$, тим більш, збігається при $|t-t_0| < r$. Оскільки r можна взяти як завгодно близьким до a, то можна бути переконаним, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_0)^k$ збігається при $|t-t_0| < a$.

Висловлене твердження доведено.

Приклад 4 Хай в рівнянні

$$x'' - 2tx' + 2mx = 0$$

m — ціле невід'ємне число.

Оскільки коефіцієнти $2t$, $2m$ аналітичні для всіх $t \in \mathrm{R}$, то всі розв'язки цього рівняння також аналітичні при всіх $t \in \mathrm{R}$ і кожен з цих розв'язків можна шукати у вигляді степеневого ряду $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t_k$. Двічі по черзі диференціюючи останній вираз і підставляючи результати диференціювання у первісне рівняння, отримаємо рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}t^k - 2t\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}t^k + 2m\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k = 0 .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, отримаємо рекурентну систему рівнянь для визначення c_k:

$$c_{k+2} = \frac{2(k-m)}{(k+1)(k+2)}c_k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Покладемо спочатку $c_1 = 0$, тоді всі коефіцієнти c_k з непарними номерами стануть нулями ($c_{2k+1} = 0$), а коефіцієнти з парними номерами визначатимуться за формулами

$$c_2 = \frac{2m}{1\cdot 2}c_0,\ c_4 = \frac{2(2-m)}{3\cdot 4}c_2,\ \ldots,\ c_{2n} = \frac{2(2n-2-m)}{(2n-1)\,2n}c_{2n-2},$$

або

$$c_{2n} = -\frac{2^n m(2-m)\ldots(2n-2-m)}{(2n)!}c_0 = (-1)^n\frac{2^n m(m-2)\ldots(m-2(n-1))}{(2n)!}c_0 .$$

Таким чином, один розв'язок диференціального рівняння можна подати у вигляді

$$x_1(t)=c_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{2^k\,m(m-2)\dots(m-2(n-1))}{(2k)!}\,t^{2k}\,.$$

Зауважимо, що коли m — парне число, $m=2p$, то всі коефіцієнти виписаного ряду з номерами $k>p$ перетворюються на нуль, і розв'язок $x_1(t)$ в такому разі є многочленом:

$$x_1(t)=c_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{2^k\,p(p-1)\dots(p-(k-1))}{(2k)!}\,t^{2k}\,.$$

Він лише сталим множником відрізняється від **многочлена Ерміта**

$$H_m(t)=(-1)^m e^{t^2}\,\frac{d^m}{dt^m}\left(e^{-t^2}\right)=$$

$$=(2t)^m-\frac{m(m-1)}{1!}(2t)^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2t)^{m-4}+\dots$$

Останній член у цьому співвідношенні при $m=2p$ дорівнює $(-1)^p\,\dfrac{(2p)!}{p!}$, а тому якщо у виразі для $x_1(t)$ покласти $c_0=(-1)\dfrac{(2p)!}{p!}$, то матимемо $x_1(t)=H_{2p}(t)$.

Щоб відшукати другий розв'язок первісного рівняння — лінійно незалежний з $x_1(t)$, у рекурентній системі рівнянь для визначення c_k покладемо $c_0=0$. Тоді всі коефіцієнти з парними номерами дорівнюватимуть нулю ($c_{2n}=0$), а коефіцієнти з непарними номерами визначатимуться з рекурентної системи рівнянь

$$c_{2n+1}=\frac{2(2n-1-m)}{2n(2n+1)}c_{2n-1},\quad n=1,2,\dots$$

Звідси

$$c_3=\frac{2(1-m)}{2\cdot 3}c_1,\quad c_5=\frac{2^2(1-m)(3-m)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}c_1,\ \dots,$$

$$c_{2n+1}=\frac{2^n(1-m)(3-m)\dots(2n-1-m)}{(2n+1)!}c_1=\frac{(-1)^n 2^n(m-1)(m-3)\dots(m-(2n-1))}{(2n+1)!}c_1\,.$$

Отже,

$$x_2(t)=c_1\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{2^k(m-1)(m-3)\dots(m-(2k-3))}{(2k-1)!}\,t^{2k-1}\,.$$

Коли m — непарне число, $m=2p+1$, то $x_2(t)$ — многочлен

$$x_2(t)=c_1\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\,\frac{2^k\,p(p-1)(p-2)\dots(p-k+2)}{(2k-1)!}\,t^{2k-1}\,.$$

Якщо покласти в останньому виразі $c_1=(-1)^p\,\dfrac{2(2p+1)!}{p!}$, то одержимо многочлен Ерміта $H_{2p-1}(t)$.

Таким чином, шуканий загальний розв'язок диференціального рівняння матиме вигляд

$$x = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k m(m-2)\ldots(m-2(n-1))}{(2k)!} t^{2k} +$$

$$+ C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^k (m-1)(m-3)\ldots(m-(2k-3))}{(2k-1)!} t^{2k-1}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі, які, зрештою, можна підібрати так, щоб задовольнялись умови типу (10.124) ($x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0$).

Якщо в рівнянні (10.137) функції $p(t)$ і $q(t)$ раціональні, тобто

$$p(t) = \frac{p_1(t)}{p_0(t)}, \; q(t) = \frac{q_1(t)}{q_0(t)},$$

де $p_0(t)$, $p_1(t)$, $q_0(t)$, $q_1(t)$ — многочлени, то точки, в яких $p_0(t) = 0$ або $q_0(t) = 0$, є особливими точками рівняння (10.137).

Для рівняння , наприклад,

$$t^2 x'' + tp(t)x' + q(t)x = 0, \tag{10.141}$$

в якому $p(t)$ і $q(t)$ — аналітичні функції у проміжку $|\,t\,| < a$, точка $t = 0$ є особливою, якщо тільки один із коефіцієнтів p_0 чи q_0 розкладу функцій $p(t)$ і $q(t)$ у степеневий ряд, відмінний від нуля. Це приклад простої особливої точки — так званої регулярної особливої точки (особливої точки першого роду).

В околі особливої точки $t = t_0$ розв'язок рівняння (10.137) у вигляді степеневого ряду може не існувати. В такому разі його треба шукати у вигляді так званого **узагальненого степеневого ряду**

$$x(t) = (t - t_0)^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k,$$

де λ, c_0 $(c_0 \neq 0)$, c_1, c_2, … — числа, які підлягають визначенню.

Можна довести таке твердження.

Нехай у рівнянні (10.141) функції $p(t)$ і $q(t)$ аналітичні в проміжку $|\,t\,| < a$, і отже, можуть бути розвинені в збіжні в цьому проміжку степеневі ряди

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \; q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k. \tag{10.142}$$

Тоді рівняння (10.141) має розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\lambda}, \; c_0 \neq 0, \tag{10.143}$$

де λ — один з коренів так званого визначального рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0 \lambda + q_0 = 0, \tag{10.144}$$

причому степеневий ряд (10.143) збігається в проміжку $|\,t\,| < a$.

Не беручись за доведення твердження, зосередимо увагу на знаходженні сталої λ і коефіцієнтів $c_0, c_1, c_2, \ldots$

На підставі ряду (10.143) знайдемо ряди

$$x'(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k\,t^{k+\lambda-1},\quad x''(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k\ {}^{k+\lambda-2}$$

і підставимо їх разом з (10.143) і (10.142) в рівняння (10.141):

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k\,t^{k+\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}p_kt^k\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_kt^{k+\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}q_kt^k\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+\lambda}=0\,.$$

Скорочуючи останню рівність на t^{λ} і прирівнюючи до нуля коефіцієнти біля t^k, одержимо рекурентну систему рівнянь

$$[\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0]c_0=0\,,$$

$$[(\lambda+1)\lambda+p_0(\lambda+1)+q_0]c_1+(p_1\lambda+q_1)c_0=0\,,$$

$$[(\lambda+2)(\lambda+1)+p_0(\lambda+2)+q_0]c_2+[p_1(\lambda+1)+q_1]c_1+(p_2\lambda+q_2)c_0=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[(\lambda+k)(\lambda+k-1)+p_0(\lambda+k)+q_0]c_k+[p_1(\lambda+k)+q_1]c_{k-1}+(p_k\lambda+q_k)c_0=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

з якої можна визначити коефіцієнти c_k, $k=0,1,2,\ldots$

Запроваджуючи позначення

$$f_0(\lambda)=\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0\,,\quad f_k(\lambda)=p_k\lambda+q_k\,,\ k\geq 1\,,$$

отриману систему алгебричних рівнянь можна записати у вигляді

$$f_0(\lambda)c_0=0\,,$$

$$f_0(\lambda+1)c_1+f_1(\lambda)c_0=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_0(\lambda+k)c_k+f_1(\lambda+k-1)c_{k-1}+f_2(\lambda+k-2)c_{k-2}+\ldots+f_{k-1}(\lambda+1)c_1+f_k(\lambda)c_0=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{10.145}$$

Щоб отримати ненульовий розв’язок первісного рівняння, слід покласти $c_0\neq 0$. Тоді, щоб справджувалося перше з рівнянь (10.145), число λ повинно бути коренем рівняння $f_0(\lambda)=0$, тобто λ повинно задовольняти визначальне рівняння (10.144).

Хай λ_1, λ_2 — дійсні корені цього рівняння. Якщо різниця $\lambda_1 - \lambda_2$ не дорівнює цілому числу, то $f_0(\lambda_1 + k) \neq 0$, $f_0(\lambda_2 + k) \neq 0$ ні при якому натуральному k. Отже, викладеним тут методом можна побудувати два лінійно-незалежних розв'язків рівняння (10.141):

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} t^{k+\lambda_1} \text{ і } x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} t^{k+\lambda_2} .$$

Якщо ж різниця $\lambda_1 - \lambda_2$ — ціле число, то методом невизначених коефіцієнтів не завжди можна побудувати два лінійно незалежні розв'язки у вигляді узагальнених степеневих рядів. Але знайшовши один з них, наприклад $x_1(t)$, другий розв'язок $x_2(t)$, лінійно незалежний з $x_1(t)$ можна віднайти, скориставшись формулою Ліувіля—Остроградського

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x'(t) \end{vmatrix} = e^{-\int \frac{p(t)}{t} dt} .$$

Отже,

$$\frac{x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)}{x_1^2(t)} = \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int \frac{p(t)}{t} dt} ;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int \frac{p(t)}{t} dt} ; \; x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int \frac{p(t)}{t} dt}}{x_1^2(t)} dt .$$

З цієї ж формули можна зробити висновок, що розв'язок $x_2(t)$ можна шукати у вигляді

$$x_2(t) = A x_1(t) \ln t + t^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

(може статися так, що число A дорівнює нулю).

Приклад 5 Рівняння

$$2t^2 x'' + \left(3t - 2t^2\right) x' - (t+1) x = 0$$

має особливу точку $t = 0$. Коренями визначального рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) + \frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

є числа $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -1$. Розв'язок рівняння, що відповідає першому кореню, шукаймо у вигляді

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\frac{1}{2}} , \; c_0 \neq 0 , \; t > 0 .$$

Підставимо цей ряд у диференціальне рівняння:

$$2t^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(k^2-\frac{1}{4}\right)c_k t^{k-\frac{2}{3}}+\left(3t-2t^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)c_k t^{k-\frac{1}{2}}-(t+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+\frac{1}{2}}=0\,.$$

Звідси, скорочуючи на $t^{\frac{1}{2}}$, дістанемо рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(2k+3)c_k t^k-\sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)c_k t^{k+1}=0\,.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів t, отримаємо систему алгебричних рівнянь

$$k(2k+3)c_k=2k\,c_{k-1}\,,\quad k=1,2,\ldots$$

Покладаючи $c_0=1$, знаходимо:

$$c_k=\frac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2k+3)}\,,\ k=1,2,\ldots$$

Отже,

$$x_1(t)=\sqrt{t}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2t)^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2k+3)}\right).$$

Розв’язок диференціального рівняння, який відповідає кореню $\lambda=\lambda_2$ визначального рівняння шукаймо у вигляді

$$x_2(t)=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,x^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,x^{k-1}\,.$$

Підставляючи у диференціальне рівняння вирази $x_2(t)$, $x_2'(t)$, $x_2''(t)$ і порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, укладемо систему рівнянь

$$k(2k-3)c_k=(2k-3)c_{k-1}\,,\ k=1,2,\ldots$$

Беручи $c_0=1$, одержимо:

$$c_1=1\,,\ c_2=\frac{1}{1\cdot 2}\,,\ c_3=\frac{1}{3!}\,,\ \ldots,\ c_k=\frac{1}{k!}\,;$$

$$x_2(t)=\frac{1}{t}\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^k}{k!}+\ldots\right)=\frac{e^t}{t}\,.$$

Загальний розв’язок диференціального рівняння, отже, має вигляд

$$x=C_1\sqrt{t}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2t)^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2k+3)}\right)+C_2\,\frac{e^t}{t}\,,$$

де C_1 і C_2 — довільні числа.

Розглянемо два рівняння з особливими точками і побудуємо розв'язання їх в околі особливих точок.

Приклад 6 Гіпергеометричне рівняння або рівняння **Гауса**

$$t(t-1)x''+[-\gamma+(\alpha+\beta+1)t]x'+\alpha\beta x=0. \tag{10.146}$$

містить три параметри α, β і γ; точки $t=0$ і $t=1$ є особливими точками. В околі точки $t=0$ рівняння можна подати у вигляді

$$x''+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)t]\sum_{k=0}^{\infty}t^k}{t}x'-\frac{\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}t^{k+1}}{t^2}x=0.$$

Визначальне рівняння, що відповідає точці $t=0$, має вигляд

$$\lambda(\lambda-1)+\gamma\lambda=0.$$

Його коренями є числа $\lambda=0$ і $\lambda=1-\gamma$. Якщо γ не є цілим недодатним числом, можна відшукати два лінійно незалежні розв'язки гіпергеометричного рівняння у вигляді узагальнених степеневих рядів , що збігаються при $|t|<1$. Кореню $\lambda=0$ відповідає розв'язок у вигляді степеневого ряду

$$x_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k .$$

Підставляючи цей вираз в (10.146), знайдемо співвідношення

$$t(t-1)\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}t^k+[-\gamma+(\alpha+\beta+1)t]\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}t^k+\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k=0,$$

з якого випливає рекурентна система рівнянь

$$k(k-1)c_k-(k+1)kc_{k+1}-\gamma(k+1)c_{k+1}+(\alpha+\beta+1)kc_k+\alpha\beta c_k=0,$$

$$c_{k+1}=\frac{k(k+1)+k(\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(k+1)(k+\gamma)}c_k=\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}c_k .$$

Покладемо $c_0=1$ і послідовно знайдемо:

$$c_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma},\ c_2=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)},\ c_3=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)},\ \dots,$$

$$c_k=\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)},\ \dots$$

Отже, розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$x_1(t)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}t+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}t^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}t^3+\dots$$

Останній вираз називають **гіпергеометричним рядом**. Він збігається для $|x|<1$, у чому легко переконатися, вдаючись до ознаки Даламбера збіжності рядів. Суму цього ряду називають **гіпергеометричною функцією** і позначають через $F(\alpha,\beta,\gamma,t)$:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\lambda+1)\ldots(\gamma+k-1)}t^k .$$

Гіпергеометрична функція залежить від трьох параметрів α,β,γ. Надаючи цим параметрам відповідні значення, гіпергеометричну функцію можна зводити до різних спеціальних функцій, а також і до елементарних. Наприклад,

$$F(1,\beta,\beta,t)=\frac{1}{1-t},\ F(1,1,2,t)=-\frac{\ln(1-t)}{t},\ F(\alpha,\beta,\alpha,t)=(1-t)^{-\beta},\ F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},t^2\right)=\frac{\arcsin t}{t}.$$

Інший розв’язок диференціального рівняння, лінійно незалежний від $x_1(t)$ можна віднайти у вигляді

$$x_2(t)=t^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k$$

(за умови, що γ не є цілим недодатним числом). Результату можна досягнути і швидше, якщо в диференціальному рівнянні здійснити заміну $x=t^{1-\gamma}u$ залежної змінної. То ж,

$$x'=t^{1-\gamma}u'+(1-\gamma)t^{-\gamma}u,\ x''=t^{1-\gamma}u''+2(1-\gamma)t^{-\gamma}u'-\gamma(1-\gamma)t^{-\gamma-1}u,$$

і після підставляння виразів x,x',x'' у диференціальне рівняння та скорочування на $t^{1-\gamma}$ одержимо співвідношення

$$t(t-1)u''+\{-(2-\gamma)+[1+(\alpha+1-\gamma)+(\beta+1-\gamma)]t\}u'+(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)u=0,$$

що знову ж є гіпергеометричним рівнянням, в якому замість параметрів α,β,γ фігурують параметри відповідно $\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma$. Розв’язком останнього рівняння у вигляді степеневого ряду є функція

$$u(t)=F(\alpha+1-\gamma,\beta,+1-\gamma,2-\gamma,t).$$

Отже, розв’язок $x_2(t)$ первісного рівняння виражається через гіпергеометричну функцію

$$x_2(t)=t^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2+\gamma,t).$$

Таким чином, якщо γ відмінне від нуля і від цілого від’ємного числа, то загальний розв’язок гіпергеометричного рівняння має вигляд

$$x=C_1F(\alpha,\beta,\gamma,t)+C_2t^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,t),$$

де C_1, C_2 — довільні числа, $|t|<1$. Зазначимо, що коли вираз $t^{1-\nu}$ не означуваний при $t<0$, то останнє твердження вірне лише для $0<t<1$.

Приклад 7 Розглянемо так зване диференціальне рівняння **Лежандра**

$$(1-t^2)x''-2tx'+n(n+1)x=0$$

де n — натуральне число. Воно зводиться до гіпергеометричного рівняння. Само по собі воно цікаве тим, що серед його розв'язків є многочлени, які називають **поліномами Лежандра**:

$$p_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^2-1\right)^n .$$

Можна переконатися, що поліноми Лежандра випливають з гіпергеометричної функції за відповідних значень її параметрів.

Запровадимо в рівнянні Лежандра заміну змінної $t = 1-2\tau$. В такому разі

$$\tau = \frac{1-t}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2x}{d\tau^2} .$$

Підставимо ці вирази у рівняння Лежандра і одержимо гіпергеометричне рівняння з параметрами $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$:

$$\tau(\tau-1)\frac{d^2x}{d\tau^2} + (-1+2\tau)\frac{dx}{d\tau} - n(n+1)x = 0 ,$$

Одним з розв'язків цього похідного рівняння є гіпергеометрична функція $F(n+1, -n, 1, \tau)$; а тому одним із розв'язків первісного рівняння Лежандра є функція

$$x_1(t) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-t}{2}\right).$$

Можна пересвідчитися в тому, що

$$F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-t}{2}\right) = p_n(t),$$

а це означає, що поліноми Лежандра $p_n(t)$ — це окремий випадок гіпергеометричної функції при значеннях її параметрів $\alpha = n+1, \beta = -n, \gamma = 1$, якщо в цій функції замінити t на $\frac{1-t}{2}$. Зокрема, для $n = 1, 2, 3, 4$ безпосередньо переконуємося, що

$$p_1(t) = F\left(2, -1, 1, \frac{1-t}{2}\right) = t ,$$

$$p_2(t) = F\left(3, -2, 1, \frac{1-t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(3t^2-1\right),$$

$$p_3(t) = F\left(4, -3, 1, \frac{1-t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right),$$

$$p_4(t) = F\left(5, -4, 1, \frac{1-t}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(35t^4-30t^2+3\right).$$

Поліноми Лежандра знаходять широке застосування при розв'язуванні багатьох задач математичної фізики і мають ряд цікавих властивостей, зокрема, вони ортогональні у проміжку $(-1, 1)$, тобто

$$\int_{-1}^{1} p_m(t)\, p_n(t)\, dt = 0 \text{, якщо } m \neq n .$$

Приклад 8 Звернемося до рівняння **Беселя**

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - \nu^2)\, x = 0\,.$$

Оскільки рівняння не зміниться при заміні в ньому t на $-t$, то достатньо аналізувати його тільки для $t > 0$. Точка $t = 0$ — особлива точка цього рівняння. Визначальне рівняння, що відповідає цій точці має вигляд

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \nu^2 = 0\,,\ \lambda^2 - \nu^2 = 0\,.$$

Якщо $\nu \neq 0$, то воно має два корені: $\lambda_1 = \nu, \lambda_2 = -\nu$.

Шукаємо розв'язок рівняння Бесселя у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\lambda}\,,\ c_0 \neq 0\,.$$

Підставляючи цей ряд в рівняння Бесселя і виконуючи операцію скорочення на t^λ, матимемо:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\lambda + k)^2 - \nu^2\right] c_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+2} = 0\,.$$

Щоб ця рівність тотожно виконувалась, коефіцієнти c_k повинні задовольняти систему рівнянь:

$$\left(\lambda^2 - \nu^2\right) c_0 = 0\,,\ \left[(\lambda + 1)^2 - \nu^2\right] c_1 = 0\,;\ \left[(\lambda + k)^2 - \nu^2\right] c_k + c_{k-2} = 0\,,\ k = 2, 3, \ldots$$

Знайдемо розв'язок, що відповідає кореню визначального рівняння $\lambda = \nu$. При $\lambda = \nu$ за c_0 можна брати будь-яке відмінне від нуля число; далі, $c_1 = 0$ і

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2\nu + k)} \ \text{при}\ k = 2, 3, \ldots$$

Звідси, $c_{2m+1} = 0$ для всіх $m = 0, 1, 2, \ldots$ і

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (\nu + 1)}\,,\ c_4 = -\frac{c_0}{2^4 \cdot 2!(\nu + 1)(\nu + 2)}\,,\ \ldots,$$

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{2^{2k} k!(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + k)}\,,\ \ldots$$

Таким чином,

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_0}{2^{2k} k!(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + k)} t^{2k+\nu}\,.$$

Можна переконатися (керуючись, наприклад, ознакою Даламбера), що цей ряд рівномірно збігається у будь-якому скінченному проміжку $[0, a]$, а отже, $x_1(t)$ є розв'язком рівняння Беселя за будь-якого c_0. За c_0 зручно взяти число

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}\,,$$

де

$$\Gamma(\nu)=\int\limits_0^\infty t^{\nu-1}e^{-t}dt\,,\ \ \nu>0$$

— відома **гамма-функція** (див. 2.6). Пам'ятаючи, що $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$, запишемо $x_1(t)$ у вигляді

$$x_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{c_0\cdot 2^{\nu}}{k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Функцію

$$J_\nu(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$$

називають **функцією Беселя першого роду з індексом ν**.

Різниця коренів визначального рівняння для рівняння Беселя дорівнює 2ν, а тому, якщо $2\nu\neq 0,1,2,\ldots$, другий розв'язок рівняння Беселя можна шукати у вигляді ряду

$$x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k-\nu}\,.$$

Для знаходження коефіцієнтів c_k отримуємо систему рівнянь

$$\left(\nu^2-\nu^2\right)c_0=0\,,\left[(-\nu+1)^2-\nu^2\right]c_1=0\,,\ \ldots;\ \left[(-\nu+k)^2-\nu^2\right]c_k+c_{k-2}=0\,.$$

Покладаючи $c_0\neq 0$, $c_0=0$, матимемо:

$$c_{2k+1}=0\,,\ c_{2k}=-\frac{c_{2k-2}}{2^2k(-\nu+k)}\,.$$

Звідси

$$c_k=(-1)^k\frac{c_0}{2^{2k}k!(-\nu+1)(-\nu+2)\ldots(-\nu+k)}\,.$$

Приймаючи $c_0=\dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$, отримаємо другий розв'язок рівняння Беселя у вигляді

$$x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

Функцію

$$J_{-\nu}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu},\ \ \nu>0\,,\ 2\nu\neq 1,2,\ldots$$

називають **функцією Беселя першого роду з від'ємним індексом**. Виявляється, що ряд в означенні функції $J_{-\nu}(t)$ не втрачає сенсу також і тоді, коли ν — півціле число, тобто

$\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ Більш того, одержані для таких значень ν функції $J_{-\frac{2j-1}{2}}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, є розв'язками рівняння Беселя (в якому $\nu = \frac{2j-1}{2}$). У цьому можна безпосередньо переконатися, підставляючи відповідний ряд у рівняння.

Лінійна незалежність функцій $J_\nu(t)$ і $J_{-\nu}(t)$ (остання з яких означена поки лише для $\nu > 0$, $\nu \neq 1, 2, \ldots$) очевидна: одна з них перетворюється на нуль при $t = 0$, а інша прямує до безмежності, коли $t \to 0$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння Беселя має вигляд

$$x(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t),$$

де c_1 і c_2 — довільні сталі.

Зазначимо, що функції Беселя півцілого індексу $J_{\pm\frac{1}{2}}(t)$, $J_{\pm\frac{3}{2}}(t)$, $\ldots$ виражаються через елементарні функції. Наприклад,

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+k\right)\cdot 2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2t}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t .$$

Аналогічно, $J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t$.

Найпоширенішою задачею в теорії диференціальних рівнянь є задача Коші, в якій фігурує додаткова умова — початкова, що задає значення невідомої функції і її похідних при деякому фіксованому значенні незалежної змінної. Зрозуміло, це не єдиний спосіб вирізнити з множини всіх розв'язків диференціального рівняння той чи інший окремий розв'язок. Часто за додаткові умови правлять так звані **граничні (крайові) умови**, що окреслюють значення шуканої функції і її похідних (або деяких виразів від них) для кількох фіксованих значень незалежної змінної. Задачу пошуку окремого розв'язку диференціального рівняння такого, що задовольняє конкретні граничні умови, називають **крайовою задачею**.

Досліджуватимемо крайову задачу [29]: відшукати у проміжку $[0, \tau]$ розв'язок рівняння

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = f_1(t), \tag{10.147}$$

який задовольняв би на кінцях проміжку умови

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 x'(0) = u_0, \ \alpha_2 x(\tau) + \beta_2 x'(\tau) = u_1, \tag{10.148}$$

де α_1, α_2, β_1, β_2, u_0, u_1 — задані числа. Якщо в умовах (10.148) $\beta_1 = \beta_2 = 0$ (значення похідних від функції-розв'язку не зумовлені), то граничні умови називають умовами першого роду; якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (значення самої функції-розв'язку не зумовлені) — умовами другого роду; якщо α_i і β_i одночасно при $i = 1$ чи/та $i = 2$ відрізняються від нуля — умовами третього роду.

Крайові задачі (10.147)—(10.148), в яких $f_1(t) \neq 0$, називають **неоднорідними крайовими задачами**, а крайові задачі, в яких $f_1(t) = 0$ та $u_0 = u_1 = 0$, — **однорідними крайовими задачами**. Зрозуміло, що кожна однорідна крайова задача має так званий тривіальний розв'язок $x(t) = 0$.

Однорідна крайова задача може і не мати інших розв'язків. Прикладом такої є задача

$$x'' - x = 0,$$

$$0 < t < 1, \; x(0) = x(1) = 0.$$

Справді, рівняння $x'' - x = 0$ задовольняють двопараметричні функції

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Але задані крайові умови задовольняє тільки одна з них — тотожний нуль ($x(t) \equiv 0$), для якої водночас $c_1 + c_2 = 0$ і $c_1 e + \frac{c_2}{e} = 0$.

За досить загальних умов однорідна крайова задача може мати й безліч розв'язків. Такою є, наприклад, задача

$$x'' + x = 0,$$

$$0 < t < \pi, \; x(0) = x(\pi) = 0.$$

Легко переконатися, що вона має однопараметричну сім'ю розв'язків $x = c\sin t$, c — довільне дійсне число.

Неоднорідну крайову задачу без втрати загальності можна вивчати за однорідних крайових умов. Справді (див. також додаток В), у випадку неоднорідних крайових умов розв'язок задачі можна шукати у вигляді

$$x(t) = \varphi(t) + y(t),$$

де тільки функція $\varphi(t)$ задовольняє заданим крайовим умовам. Зрозуміло, що таку функцію завжди можна побудувати. Наприклад, у випадку крайових умов першого роду $x(0) = u_0$, $x(\tau) = u_1$ за $\varphi(t)$ можна взяти лінійну функцію

$$\varphi(t) = \frac{u_0}{\tau}(\tau - t) + \frac{u_1}{\tau} t.$$

Тоді для функції $y(t)$ матимемо неоднорідну крайову задачу з дещо зміненою правою частиною, але вже з однорідними крайовими умовами.

Рівняння

$$L(x) \equiv a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = g(t) \tag{10.149}$$

можна подати у самоспряженому вигляді

$$L(x) \equiv (p(t)x')' - q(t)x = f(t). \tag{10.150}$$

Справді. Введемо допоміжну функцію $\mu(t)$ таку, що задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)\,a(t)) = \mu(t)\,b(t)\,,$$

а отже має вигляд

$$\mu(t) = \frac{1}{a(t)}e^{\int\frac{b(t)}{a(t)}dt}\,,$$

і помножимо на неї праву і ліву частини рівняння (10.149):

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int\frac{b(t)}{a(t)}dt}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{c(t)}{a(t)}e^{\int\frac{b(t)}{a(t)}dt} = \frac{g(t)}{a(t)}e^{\int\frac{b(t)}{a(t)}dt}\,.$$

За позначень

$$p(t) = e^{\int\frac{b(t)}{a(t)}dt}\,,\ q(t) = -\frac{c(t)}{a(t)}e^{\int\frac{b(t)}{a(t)}dt}\,,\ f(t) = \frac{g(t)}{a(t)}e^{\int\frac{b(t)}{a(t)}dt}$$

отриманий щойно результат збігається з (10.150).

Оскільки рівняння (10.147) завжди можна подати в самоспряженому вигляді, а задачу з неоднорідними крайовими умовами завжди можна звести до задачі з однорідними крайовими умовами, то в загальному випадку неоднорідну крайову задачу можна записувати так:

$$L(x) \equiv (p(t)x')' - q(t)x = f(t)$$

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 x'(0) = 0\,,\ \alpha_2 x(\tau) + \beta_2 x'(\tau) = 0\,, \tag{10.151}$$

при цьому $p(t) > 0$ — неперервна диференційована функція; функції $q(t)$ і $f(t)$ вважатимемо неперервними у проміжку $[0,\tau]$.

Розв'язком крайової задачі (10.151) називатимемо двічі неперервно диференційовну в $(0,\tau)$ функцію, яка задовольняє в $(0,\tau)$ диференціальне рівняння і граничні умови на кінцях проміжку $[0,\tau]$.

Розглянемо випадок, коли відповідна однорідна крайова задача

$$L(x) \equiv (p(t)x')' - q(t)x = 0$$

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 x'(0) = 0\,,\ \alpha_2 x(\tau) + \beta_2 x'(\tau) = 0\,, \tag{10.152}$$

не має відмінних від тривіального розв'язків. З цього припущення випливає, що коли розв'язок задачі (10.151) існує, то він єдиний. Справді, якщо припустити, що існує два різні розв'язки крайової здачі (10.151) $x_1(t)$ і $x_2(t)$, то різниця цих розв'язків $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ є розв'язком відповідної однорідної задачі (10.152). Але за припущенням однорідна задача має лише тривіальний розв'язок $x(t) = 0$, отже, $x_1(t) \equiv x_2(t)$.

Доведемо існування розв’язку задачі (10.151). Вдамося до методу доведення, який є сенс називати конструктивним, оскільки в його рамках випливає одночасно алгоритм побудови самого розв’язку.

Згадаємо поняття функції Ґріна. **Функцією Ґріна** крайової задачі (10.151) називають функцію $G(t,s)$, що означена для $t\in[0,\tau]$, $s\in(0,\tau)$ і при кожному фіксованому $s\in(0,\tau)$ має такі властивості:

1° $G(t,s)$ при $t\neq s$ задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}(p(t)x')-q(t)x=0;$$

2° $G(t,s)$ при $t=0$ і $t=\tau$ задовольняє крайові умови з (10.151);

3° $G(t,s)$ при $t\neq s$ є неперервною за t, а її похідна за t має в точці $t=s$ розрив першого роду зі стрибком $\dfrac{1}{p(s)}$, тобто

$$G(s+0,s)=G(s-0,s),\ G_t'(s+0,s)-G_t'(s-0,s)=\frac{1}{p(s)}.$$

Через функцію Ґріна можна виразити розв’язок крайової здачі (10.151) для будь-якої правої частини $f(t)$.

Справді, нехай існує розв’язок крайової задачі (10.151) $x=\varphi(t)$ і функція Ґріна $G(t,s)$. Оскільки $\varphi(t)$ і $G(t,s)$ задовольняють відповідно рівності

$$\frac{d}{dt}(p(t)\varphi'(t))-q(t)\varphi(t)=f(t),\ \frac{d}{dt}(p(t)G_t'(t,s))-q(t)G(t,s)=0,$$

то, помножаючи першу з них на $G(t,s)$, а другу на $\varphi(t)$ і результати почленно віднімаючи, матимемо рівність

$$G(t,s)\frac{d}{dt}(p(t)\varphi'(t))-\varphi(t)\frac{d}{dt}(p(t)G_t'(t,s))=f(t)G(t,s).$$

Але

$$\frac{d}{dt}[p(t)(G(t,s)\varphi'(t)-\varphi(t)G_t'(t,s))]=G(t,s)\frac{d}{dt}(p(t)\varphi'(t))-$$

$$-\varphi(t)\frac{d}{dt}(p(t)G_t'(t,s))+p(t)[G_t'(t,s)\varphi'(t)-\varphi'(t)G'(t,s)],$$

а тому

$$\frac{d}{dt}(p(t)(G(t,s)\varphi'(t)-\varphi(t)G_t'(t,s)))=G(t,s)f(t).$$

Інтегруючи цю рівність у проміжках $[0, s-\varepsilon]$ і $[s+\varepsilon, \tau]$, де функції $\varphi(t)$ і $G(t,s)$ двічі неперервно диференційовні, маємо:

$$\{p(t)[G(t,s)\varphi'(t)-\varphi(t)G_t'(t,s)]\}\Big|_0^{s-\varepsilon}{}_0+\{p(t)[G(t,s)\varphi'(t)-\varphi(t)G'(t,s)]\}\Big|_{s+\varepsilon}^{\tau}=$$

$$=\int_0^{s-\varepsilon} G(t,s)f(s)ds+\int_{s+\varepsilon}^{\tau} G(t,s)f(t)dt\,.$$

Оскільки

$$G(0,s)\varphi'(0)-\varphi(0)G_t'(0,s)=G(\tau,s)\varphi'(\tau)-\varphi(\tau)G_t'(\tau,s)=0\,,$$

бо $G(t,s)$ і $\varphi(t)$ задовольняють крайові умови з (10.151), то перейшовши до границі, коли $\varepsilon\to 0$, у передостанній рівності, матимемо:

$$-p(s)\varphi(s)G_t'(s-0,s)+p(s)\varphi(s)G_t'(s+0,s)=\int_0^{\tau}G(t,s)f(t)dt\,.$$

Звідси, з урахуванням стрибка похідної від функції $G(t,s)$ у точці $t=s$,

$$\varphi(s)=\int_0^{\tau}G(t,s)f(t)dt\,.$$

Остання формула одержана за умови, що функція Ґріна існує.

Нехай $x_1(t)$ — розв'язок рівняння

$$\frac{d}{dt}(p(t)x')-q(t)x=0\,, \tag{10.153}$$

що задовольняє умову

$$\alpha_1 x(0)+\beta_1 x'(0)=0\,.$$

Зрозуміло, що завдяки неперервній диференційовності функції $p(t)$ і неперервності функції $q(t)$ за функцію $x_1(t)$ завжди можна взяти розв'язок рівняння (10.153) з початковими умовами

$$x_1(0)=-c\beta_1\,,\ x_1'(0)=c\alpha_1\,,$$

де c — довільна стала. За умови існування лише тривіального розв'язку відповідної однорідної крайової задачі побудована таким чином функція $x_1(t)$ не задовольнить іншу крайову умову. Подібно будуємо функцію $x_2(t)$, яка є розв'язком рівняння (10.153) і задовольняє умову

$$\alpha_2 x_2(\tau)+\beta_2 x_2'(\tau)=0\,.$$

Легко пересвідчитися, що розв'язки $x_1(t)$ і $x_2(t)$ лінійно незалежні і кожен з них задовольняє лише одну із двох крайових умов з (10.151).

Функцію Ґріна $G(t,s)$ шукатимемо у вигляді

$$G(t,s)=\begin{cases} c_1x_1(t), & 0\le t\le s,\\ c_2x_2(t), & s<t\le\tau. \end{cases} \tag{10.154}$$

Зрозуміло, що функція (10.154) задовольняє при $t\ne s$ однорідне рівняння (10.153) і однорідні крайові умови. Щоб дотриматися умов неперервності функції $G(t,s)$ і стрибка її похідної, залишається підібрати сталі $c_1=c_1(s)$ і $c_2=c_2(s)$ так, щоб задовольнялись рівності

$$c_2\,x_2(s)=c_1\,x_1(s),\ c_2\,x_2'(s)-c_1\,x_1'(s)=\frac{1}{p(s)}. \tag{10.155}$$

Ці рівності складають систему алгебричних рівнянь, що має єдиний розв’язок, бо її визначник — це визначник Вронського, складений для двох лінійно незалежних розв’язків рівняння (10.153):

$$W(s)=W(x_1(s),x_2(s))=\begin{vmatrix} x_1(s) & x_2(s)\\ x_1'(s) & x_2'(s)\end{vmatrix}=x_1(s)x_2'(s)-x_2(s)x_1'(s).$$

За формулою Ліувіля—Остроградського $W(s)=\dfrac{c}{p(s)}$, де стала c визначається з умови нормування розв’язків $x_1(t)$ і $x_2(t)$.

Розв’язуючи систему (10.155) і підставляючи одержані значення $c_1(s)$ і $c_2(s)$ в (10.154), матимемо функцію Ґріна крайової задачі (10.151) у вигляді

$$G(t,s)=\frac{1}{p(s)W(s)}\begin{cases} x_2(s)x_1(t), & 0\le t\le s,\\ x_1(s)x_2(t), & s\le t\le\tau. \end{cases} \tag{10.156}$$

Тим самим доведено існування і єдиність функції Ґріна крайової задачі (10.151) у випадку, коли відповідна однорідна крайова задача має лише тривіальний розв’язок.

Зауважимо, що з (10.156) випливає симетричність функції Ґріна відносно її аргументів: $G(t,s)=G(s,t)$.

Згадаємо твердження: якщо однорідна крайова задача (10.152) має лише тривіальний розв’язок, то для будь-якої неперервної у проміжку $[0,\tau]$ функції $f(t)$ розв’язок неоднорідної крайової задачі (10.151) існує і його можна записати у вигляді

$$x(t)=\int_0^t G(t,s)\,f(s)ds\,. \tag{10.157}$$

Щоб переконатися у вірності твердження, достатньо засвідчити, що функція (10.157) є розв’язком крайової задачі (10.151).

Подамо (10.157) у вигляді

$$x(t)=\int_0^t G_1(t,s)f(s)ds+\int_t^l G_2(t,s)f(s)ds\,,$$

де

$$G_1(t,s)=\frac{x_2(s)x_1(t)}{p(s)W(s)}\,,\ G_2(t,s)=\frac{x_1(s)x_2(t)}{p(s)W(s)}\,.$$

Функції $G_1(t,s)$ і $G_2(t,s)$ двічі неперервно диференційовні за t і s, причому умову неперервності $G(t,s)$ у точці $t=s$ можна записати у вигляді $G_1(s,s)=G_2(s,s)$ або $G_1(t,t)=G_2(t,t)$, а умову стрибка похідної $G_t'(t,s)$ у вигляді $G_{1t}'(t,t)-G_{2t}'(t,t)=\dfrac{1}{p(t)}$. На підставі цих співвідношень

$$x'(t)=G_1(t,t)f(t)+\int_0^t G_{1t}'(t,s)f(s)ds-G_2(t,t)f(t)+\int_t^\tau G_{2t}'(t,s)f(s)ds=$$

$$=\int_0^t G_{1t}'(t,s)f(s)ds+\int_t^\tau G_{2t}'(t,s)f(s)ds\,;$$

$$x''(t)=G_{1t}'(t,t)f(t)+\int_0^t G_{1tt}''(t,s)f(s)ds-G_{2t}'(t,t)f(t)+\int_t^l G_{2tt}''(t,s)f(s)ds=$$

$$=\frac{f(t)}{p(t)}+\int_0^t G_{1tt}''(t,s)f(s)ds+\int_t^\tau G_{2tt}''(t,s)f(s)ds\,,$$

$$L(x(t))\equiv\frac{d}{dt}(p(t)x'(t))-q(t)x(t)=p(t)x''(t)+p'(t)x'(t)-q(t)x(t)=$$

$$=\int_0^t L(G_1(t,s))f(s)ds+\int_t^\tau L(G_2(t,s))f(s)ds+f(t)=f(t)\,;$$

тут враховано, що $L(G_1(t,s))=0$ і $L(G_2(t,s))=0$.

Отже, $L(x(t))=f(t)$, тобто функція $x(t)$ задовольняє диференціальне рівняння з (10.151). Переконуємося, що функція (10.157) задовольняє і крайові умови з задачі (10.151), бо ці умови задовольняє функція $G(t,s)$.

Таким чином, твердження дійсно є вірним.

Розглянемо випадок, коли однорідна крайова задача (10.151) має нетривіальний розв'язок. Для спрощення подальших міркувань розглянемо крайову задачу з крайовими умовами першого роду [29]

$$L(x)=f(t),\ x(0)=0\,,\ x(\tau)=0\,. \qquad (10.158)$$

Якщо вона має нетривіальний розв'язок $x=\varphi_0(t)$, то

$$L(\varphi_0(t))=0\,,\ \ \varphi_0(0)=\varphi_0(\tau)=0 \tag{10.159}$$

Вважатимемо також, що однорідна задача (10.159) не має розв'язків, лінійно незалежних з $\varphi_0(t)$.

Зауважимо, що коли однорідна задача (10.159) має нетривіальний розв'язок, то добуток цього розв'язку на будь-яку сталу також є розв'язком однорідної задачі. Тому без обмеження загальності вважатимемо, що $\varphi_0(t)$ — такий з цих розв'язків, що

$$\int_0^l \varphi_0^2(t)dt=1\,.$$

Доведемо допоміжне твердження [29]: якщо неоднорідна крайова задача (10.158) має розв'язок $x(t)$, то функція $f(t)$ обов'язково ортогональна на проміжку $[0,\tau]$ до нетривіального розв'язку $\varphi_0(t)$ відповідної однорідної крайової задачі, тобто $\int_0^\tau \varphi_0(t)f(t)dt=0\,.$

Справді, застосуємо формулу Ґріна до функцій $x(t)$ і $\varphi_0(t)$:

$$\int_0^\tau \varphi_0(t)\,f(t)dt=\int_0^\tau[\varphi_0(t)L(x(t))-x(t)L(\varphi_0(t))]dt=$$

$$=\left[p(t)(\varphi_0(t)x'(t)-x(t)\varphi_0'(t))\right]\Big|_{t=0}^{t=\tau}=0\,.$$

У подальшому вважатимемо, що необхідна умова існування розв'язку крайової задачі (10.158) дотримана. Переконаємося, що в даному разі розв'язок цієї задачі існує і може бути побудованим певним чином за означеною функцією Ґріна.

Зауважимо, що коли функція $x(t)$ є розв'язком крайової задачі (10.158), то будь-яка функція

$$\tilde{x}(t)=x(t)+c\varphi_0(t)\,,$$

де c — довільна стала, є розв'язком тієї ж задачі, бо $\varphi_0(t)$ — розв'язок відповідної однорідної крайової задачі. А тому для визначення єдиного розв'язку крайової задачі на нього треба накласти ще додаткову умову: наприклад, можна вимагати, щоб розв'язок $x(t)$ був ортогональним до функції $\varphi_0(t)$:

$$\int_0^\tau x(t)\varphi_0(t)dt=0 \tag{10.160}$$

Покажемо, що задача {(10.158), (10.160)} може мати лише один розв'язок. Зрозуміло, що в силу лінійності задачі достатньо переконатися, що відповідна однорідна задача має лише тривіальний розв'язок.

Як зазначалося, всі розв'язки однорідної крайової задачі (10.158) можна подати у вигляді $x_0(t)=c\varphi_0(t)$. З умови (10.160) випливає, що

$$\int_0^\tau x_0(t)\varphi_0(t)dt = c\int_0^\tau \varphi_0^2(t)dt = 0 .$$

Звідси, $c = 0$.

Функцію $G(t,s)$ називають **узагальненою функцією Ґріна**, якщо вона задовольняє умови:

1° $G(t,s)$ задовольняє неоднорідне рівняння $L(G(t,s)) = -\varphi_0(s)\varphi_0(t)$ при $0<t<s$ і $s<t<\tau$;

2° $G(t,s)$ неперервна в $[0,l]$ і задовольняє ті самі крайові умови $G(0,s)=G(\tau,s)=0$, що і шуканий розв'язок;

3° Похідна від $G(t,s)$ має при $t=s$ розрив першого роду зі стрибком

$$G_t'(s+0,s)-G_t'(s-0,s)=\frac{1}{p(s)};$$

4° $G(t,s)$ ортогональна в $[0,\tau]$ до функції $\varphi_0(t)$, тобто $\int_0^\tau G(t,s)\varphi_0(t)dt=0$.

Запропонуємо алгоритм побудови узагальненої функції Ґріна і доведемо її існування [29].

Зафіксуємо який-небудь розв'язок $\psi(t)$ рівняння $L(x(t)) = -\varphi_0(s)\varphi_0(t)$ (неоднорідного), і нехай $\varphi_1(t)$ — лінійно незалежний від $\varphi_0(t)$ розв'язок рівняння $L(x(t))=0$ (однорідного), причому такий, що

$$W(t)=W(\varphi_1(t),\varphi_0(t))=\frac{1}{p(t)}. \tag{10.161}$$

Зауважимо, що функція $\varphi_1(t)$ не може задовольняти ті самі однорідні крайові умови, що і $\varphi_0(t)$, бо $\varphi_1(t)$ і $\varphi_0(t)$ лінійно незалежні.

Узагальнену функцію Ґріна будуємо у вигляді

$$G(t,s)=\psi(t)+\begin{cases} c_1\varphi_1(t)+c_3\varphi_0(t), & 0\le t\le s,\\ c_2\varphi_1(t)+c_4\varphi_0(t), & s\le t\le \tau, \end{cases} \tag{10.162}$$

добираючи сталі c_1,c_2,c_3,c_4 так, щоб задовольняти всі умови 1° — 4°. За умовою 2°

$$\psi(0)+c_1\varphi_1(0)=0,\ \psi(\tau)+c_2\varphi_1(\tau)=0 .$$

Звідси однозначно визначаємо c_1 і c_2. З умови неперервності функції $G(t,s)$ і стрибка похідної від неї при $t=s$ отримуємо рівності

$$(c_2-c_1)\varphi_1(s)+(c_4-c_3)\varphi_0(s)=0,\ (c_2-c_1)\varphi_1'(s)+(c_4-c_3)\varphi_0'(s)=\frac{1}{p(s)}.$$

Умова (10.161) гарантує єдиність розв’язку

$$c_2 - c_1 = -\varphi_0(s),\ c_4 - c_3 = \varphi_1(s).$$

цієї системи. Враховуючи ці рівності, (10.162) запишемо у вигляді

$$G(t,s) = \psi(t) + c_3\varphi_0(t) + \begin{cases} c_1\varphi_1(t) & 0 \le t \le s, \\ c_2\varphi_1(t) + \varphi_1(s)\varphi_0(t), & s \le t \le \tau. \end{cases}$$

Коефіцієнт c_3 визначається з умови 4°:

$$c_3 \int_0^\tau \varphi_0^2(t)dt = c_3 =$$

$$= -\left\{ \int_0^\tau \psi(t)\varphi_0(t)dt + c_1 \int_0^s \varphi_1(t)\varphi_0(t)dt + c_2 \int_s^\tau \varphi_1(t)\varphi_0(t)dt + \varphi_1(s)\int_s^\tau \varphi_0^2(t)dt \right\}.$$

Отже, всі сталі c_1, c_2, c_3, c_4 в (10.162) однозначно визначені, і узагальнена функція Ґріна $G(t,s)$ побудована.

Викладене дозволяє сформулювати твердження: якщо однорідна крайова задача (10.159), має нетривіальний розв’язок $x = \varphi_0(t)$, то відповідна неоднорідна крайова задача {(10.158), (10.160)} має єдиний розв’язок тоді й тільки тоді, коли функція $f(t)$ ортогональна на проміжку $[0,\tau]$ до $\varphi_0(t)$

$$\int_0^\tau f(t,s)\varphi_0(t)dt = 0. \qquad (10.163)$$

Цей розв’язок визначається за формулою

$$x(t) = \int_0^\tau G(t,s)\, f(s)ds, \qquad (10.164)$$

в якій $G(t,s)$ — узагальнена функція Ґріна.

Необхідність умови ортогональності (10.163) і єдиність розв’язку крайової задачі доведені раніше; те, що функція $x(t)$, визначувана за формулою (10.164), є розв’язком первісної крайової задачі {(10.158), (10.160)}, встановлюється безпосередньою перевіркою.

Зауважимо, що заради спрощення викладу розглядалась крайова задача з крайовими умовами першого роду. Подібно можна розглядати й побудувати узагальнену функцію Ґріна у випадку загальних крайових умов.

Приклад 9 Як вже зазначалося відповідна неоднорідній крайовій задачі

$$x'' + x = f(t),\ 0 < t < \pi,\ x(0) = x(\pi) = 0.$$

однорідна крайова задача

$$x'' + x = 0,\ 0 < t < \pi,\ x(0) = x(\pi) = 0.$$

має безліч розв'язків $x = c\sin t$, де c — довільна стала. За функцію $\varphi_0(t)$ тут можна взяти

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t\,,$$

добираючи коефіцієнт $c = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ з умови нормування $\int\limits_0^\pi \varphi_0^2(t)dt = 1$.

Розв'язок основної задачі існує лише для таких функцій $f(t)$, які ортогональні до функції $\varphi_0(t)$: $\int\limits_0^\pi f(t)\sin t\,dt = 0$. Щоб його подати у вигляді (10.164), побудуємо узагальнену функцію Ґріна.

Візьмемо за $\psi(t)$ окремий розв'язок рівняння

$$x'' + x' = -\frac{2}{\pi}\sin s \sin t\,,$$

тобто функцію

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi}(\sin s)\,t\cos t\,,$$

а за окремий розв'язок однорідного рівняння

$$x'' + x = 0\,,$$

який не задовольняє крайові умови, — функцію $\varphi_1(t) = \cos t$.

Відповідно до (10.162) узагальнену функцію Ґріна шукатимемо у вигляді

$$G(t,s) = \frac{1}{\pi}(\sin s)\,t\cos t + \begin{cases} c_1\cos t + c_3\sin t, & 0 \le t \le s, \\ c_2\cos t + c_4\sin t, & s \le t \le \pi. \end{cases}$$

З крайових умов $G(0,s) = G(\pi,s) = 0$ випливають рівності $c_1 = 0$, $c_2 = -\sin s$. Умова неперервності функції $G(t,s)$ в точці $x = s$ і умова стрибка похідної від неї у цій точці дають можливість співвіднести c_3, c_4:

$$c_3\sin s + \sin s\cos s - c_4\sin s = 0\,,\ \sin^2 s + c_4\cos s - c_3\cos s = 1\,.$$

Звідси $c_4 = c_3 + \cos s$, а тому

$$G(t,s) = \frac{1}{\pi}(\sin s)\,t\cos t + c_3\sin t + \begin{cases} 0, & 0 \le t \le s, \\ -\sin s\cos t + \cos s\sin t, & s \le t \le \pi. \end{cases}$$

Сталу c_3 визначимо з умови $\int\limits_0^\pi G(t,s)\sin t\,dt = 0$ ортогональності функцій $G(t,s)$ і $\varphi_0(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}\sin t}$: $c_3 = \dfrac{s-\pi}{\pi}\cos s - \dfrac{1}{2\pi}\sin s$. Це дає можливість записати вираз для узагальненої функції Ґріна у вигляді

$$G(t,s) = \frac{1}{\pi}\left(t\sin s\cos t + s\cos s\sin t\right) - \frac{1}{2\pi}\sin s\sin t - \begin{cases} \cos s\sin t, & 0 \le t \ge s, \\ \sin s\cos t, & s \le t \le \pi. \end{cases}$$

Залучаючи функцію $G(t,s)$, розв'язок крайової задачі можна подати у вигляді (10.164) для будь-якої функції $f(t)$, що ортогональна у проміжку $[0,\pi]$ до функції $\sin t$. Якщо покласти, наприклад, $f(t)=\cos t$ і шукати розв'язок $x(t)$ крайової задачі $x''+x=\cos t$, $0<t<\pi$, $x(0)=x(\pi)=0$, який ортогональний до функції $\sin t$, то скориставшись виразом для узагальненої функції Ґріна, знайдемо

$$x(t)=\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin t .$$

Як зазначалося раніше, однорідна крайова задача завжди має нульовий розв'язок $x(t)\equiv 0$. Ненульові ж розв'язки існують далеко не завжди. Важливим класом крайових задач є так звані **задачі на власні значення** (їх часто ще називають задачами Штурма-Ліувіля). В диференціальному виразі такої задачі обов'язково фігурує хоча б один параметр λ, який, зрозуміло, впливає на її розв'язки. Ті значення λ_i параметра λ, для яких існує нетривіальний розв'язок однорідної крайової задачі називаються **власними значеннями** або **характеристичними числами** задачі, а відповідні їм ненульові розв'язки $x_i(t)$ — **власними (характеристичними) функціями** задачі.

Наприклад, загальний розв'язок крайової задачі

$$y''(x)+\lambda^2 y(x)=0 ,$$

$$y(0)=y(1)=0$$

можна подати як систему рівностей

$$y=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x ,$$

$$0=c_1\cos 0+c_2\sin 0,\ 0=c_1\cos\lambda+c_2\sin\lambda .$$

Отже, зважаючи на те, що $c_1=0$ і $c_2\sin\lambda=0$, доходимо висновку: крайова задача має ненульові розв'язки тільки тоді, коли $\sin\lambda=0$. Отже, числа $\lambda=\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\ldots$ і є власними значеннями даної крайової задачі.

Типовою задачею на власні значення з лінійним диференціальним виразом другого порядку є задача з параметром λ

$$L(x)\equiv (p(t)x')'-q(t)x+\lambda\rho(t)x=0 ,$$

$$\alpha_1 x(0)+\beta_1 x'(0)=0,\ \alpha_2 x(\tau)+\beta_2 x'(\tau)=0 , \qquad (10.165)$$

де $x\in[0,\tau]$; $p(t)$ — додатна неперервно диференційовна в $[0,\tau]$ функція; $q(t)$ і $\rho(t)$ — неперервні в $[0,\tau]$ функції; $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ — сталі числа. То ж, ті значення параметра λ, для яких крайова задача (10.165) має нетривіальний розв'язок, є власними (характеристичними) значеннями, а відповідні їм ненульові розв'язки — власними (характеристичними) функціями крайової задачі на власні значення.

Вкажемо деякі властивості значень і власних функцій крайової задачі (10.165) [29].

1° Існує нескінченна послідовність $\{\lambda_k\}$ власних значень і відповідна їм нескінченна послідовність власних функцій $\{\varphi_k(t)\}$.

2° Власні значення крайової задачі (10.165) прості в тому сенсі, що кожному власному значенню відповідає з точністю до сталого множника тільки одна власна функція. Водночас зауважимо, що для крайових умов, відмінних від однорідних, власні значення все-таки можуть бути непростими. Унаочненням цього є періодична крайова задача $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = x(2\pi)$, $x'(0) = x'(2\pi)$; власні значення $\lambda_k = k^2$ цієї задачі непрості, бо кожному з них відповідають дві лінійно незалежні власні функції — $\sin kt$ і $\cos kt$.

3° 3. Якщо в задачі (10.165) $q(t) \geq 0$, а крайові умови мають вигляд $x(0) = x(\tau)(0) = 0$, то всі власні значення такої крайової задачі додатні. У цьому легко переконатися, якщо укладену для власної функції $\varphi_k(t)$ рівність

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\varphi_k'(t)\right) - q(t)\varphi_k(t) + \lambda_k \rho(t)\varphi_k(t) = 0$$

помножити на $\varphi_k(t)$, здійснити операцію інтегрування

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(p(t),\, \varphi_k'(t)\right)\varphi_k(t)\,dt - \int_0^\tau q(t)\varphi_k^2(t)\,dt + \lambda_k \int_0^\tau \rho(t)\varphi_k^2(t)\,dt = 0$$

і, нарешті, перетворюючи перший інтеграл, скористатися крайовими умовами:

$$\lambda_k \int_0^\tau \rho(t)\varphi_k^2(t)\,dt = \int_0^\tau p(t)\,(\varphi_k'(t))^2\,dt + \int_0^\tau q(t)\varphi_k^2(t)\,dt\,.$$

Остання рівність і доводить твердження.

4° Власні функції $\varphi_k(t)$ у проміжку $[0, \tau]$ утворюють ортогональну з вагою $\rho(t)$ систему функцій $\{\varphi_k(t)\}$:

$$\int_0^\tau \varphi_n(t)\varphi_m(t)\rho(t)\,dt = 0\,,\ n \neq m\,.$$

Дійсно. Оскільки кожному власному числу відповідає лише одна власна функція, то залишається розглянути випадок, коли власні функції $\varphi_n(t)$ і $\varphi_m(t)$ відповідають різним власним числам λ_n і λ_m. Множачи тотожності

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\varphi_n'(t)\right) - q(t)\varphi_n(t) + \lambda_n \rho(t)\varphi_n(t) = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\varphi_m'(t)\right) - q(t)\varphi_m(t) + \lambda_m \rho(t)\varphi_m(t) = 0$$

відповідно на $\varphi_m(t)$, $\varphi_n(t)$ і почленно віднімаючи отримані результати, матимемо:

$$\varphi_m(t)\left(p(t)\varphi_n'(t)\right)' - \varphi_n(t)\left(p(t)\varphi_m'(t)\right)' + (\lambda_n - \lambda_m)\rho(t)\varphi_n(t)\varphi_m(t) = 0 .$$

Застосовуючи формулу Гріна до останньої рівності, отримаємо:

$$\left[p(t)\left(\varphi_m(t)\varphi_n'(t) - \varphi_n(t)\varphi_m'(t)\right)\right]\Big|_{t=0}^{t=\tau} + (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^\tau \rho(t)\varphi_n(t)\varphi_m(t) = 0 .$$

Оскільки обидві власні функції $\varphi_m(t)$, $\varphi_n(t)$ задовольняють однорідні крайові умови, то ліва частина останньої рівності дорівнює нулю, а тому (оскільки $\lambda_n - \lambda_m \neq 0$)

$$\int_0^\tau \rho(t)\varphi_n(t)\varphi_m(t) = 0 .$$

Оскільки система власних функцій $\{\varphi_k(t)\}$ задач Штурма-Ліувіля ортогональна, то природно виникає питання: які умови повинна задовольняти визначена в проміжку $[0,\tau]$ функція $f(t)$, щоб її можна було розвинути в ряд Фур'є за функціями $\varphi_k(t)$. Відповідь на це питання дає **теорема Стеклова**: якщо функція $f(t)$ двічі неперервно диференційовна в $[0,\tau]$ і задовольняє однорідні граничні умови з (10.165), то її можна розвинути в абсолютно і рівномірно збіжний в $[0,\tau]$ ряд за власними функціями крайової задачі (10.165)

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(t) . \tag{10.166}$$

Зауважимо, що властивість ортогональності власних функцій дає можливість легко визначити коефіцієнти f_k розкладу (10.166). Справді, домножаючи обидві частини рівності (10.166) на $\varphi_m(t)\rho(t)$ і інтегруючи результат у проміжку $[0,\tau]$, матимемо:

$$f_k = \frac{\int_0^\tau f(t)\varphi_k(t)\rho(t)\,dt}{\int_0^\tau \varphi_k^2(t)\rho(t)\,dt} .$$

Знаменник цього виразу називають квадратом норми власної функції. Оскільки власні функції визначаються з точністю до сталого множника, їх часто нормують так, щоб справджувалась рівність

$$\int_0^\tau \varphi_k^2(t)\rho(t)\,dt = 1 ,$$

і тоді система $\{\varphi_k(t)\}$ є ортогональною.

Звернемося ще до поняття **квазілініаризації** [3].

Нехай $f(u)$ — строго опукла функція, тобто функція якій для кожного u властива нерівність $f''(u) > 0$. Тоді її можна подати у квазілінійному вигляді

$$f(u) = \max_v \bigl(f(v) + (u-v) f'(v) \bigr),$$

де єдиний максимум досягається при $v = u$. Подібно, у випадку строго увігнутої ($f''(u) < 0$) функції

$$f(u) = \min_v \bigl(f(v) + (u-v) f'(v) \bigr).$$

Загальним є результат [3]: якщо $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — строго опукла функція для всіх x, то

$$f(x) = \max_y \bigl(f(y) + (x-y)\varphi(y) \bigr),$$

де $\varphi(y) = \left(\dfrac{\partial f(y)}{\partial y_1}, \dfrac{\partial f(y)}{\partial y_2}, \ldots \dfrac{\partial f(y)}{\partial y_n} \right)$ — градієнт $f(y)$; єдиний максимум набувається при $y = x$.

Розглянемо диференціальне рівняння **Ріккаті** (до якого зводиться рівняння другого порядку)

$$\frac{du}{dt} = u^2 + q(t), \; u(0) = c.$$

Оскільки $u^2 = \max\limits_v (2uv - v^2)$, то диференціальне рівняння можна переписати у вигляді [3]

$$\frac{du}{dt} = \max_v (2uv - v^2 + q(t)), \; u(0) = c.$$

Таким чином, для будь-якої функції $v(t)$ вірною є диференціальна нерівність

$$\frac{du}{dt} \geq 2uv - v^2 + q(t), \; u(0) = c.$$

На підставі викладеного в 10.5 можна стверджувати, що $u \geq U$, де U є розв’язком диференціального рівняння

$$\frac{dU}{dt} = 2Uv - v^2 + q(t), \; U(0) = c.$$

А оскільки

$$U = ce^{2\int_0^t v ds} + \int_0^t (q(\tau) - v^2) e^{2\int_\tau^t v ds} d\tau,$$

то розв’язок рівняння Ріккаті можна записати у вигляді

$$u = \max_v \left(ce^{2\int_0^t v ds} + \int_0^t (q(\tau) - v^2) e^{2\int_\tau^t v ds} d\tau \right),$$

де максимум досягається на функціях $v = u$.

Часто звичайні диференціальні рівняння можуть правити за моделі “динаміки середніх”. Поняття “детермінованого середнього” виникає тоді, коли в стохастичному за первісними ознаками процесі бере участь велика кількість однорідних одиниць. Тоді математичні сподівання контрольованих величин набувають властивостей детермінованих змінних. Моделі такого типу були застосовані, наприклад, Ф. Ланчестером для аналізу бойових дій, в яких з кожного боку протистоять значні кількості сукупно однорідних бойових одиниць. Рівняння своїх втрат у випадку ідеального керування (коли вогонь ведеться тільки по неуражених одиницях супротивника) мають вигляд:

$$\frac{dn_+}{dt} = -n_- p_- \lambda_- ,$$

$$\frac{dn_-}{dt} = -n_+ p_+ \lambda_+ ,$$

де n — кількість задіяних бойових одиниць; p — імовірність ураження бойової одиниці супротивником; λ — швидкострільність бойових одиниць; t — час; індекси “+” і “–” позначають відповідно своїх і чужих.

Навіть така проста модель веде до цікавих висновків. Зокрема, умовою ураження всіх одиниць угрупування супротивника є нерівність

$$n_{0+}^2 p_+ \lambda_+ > n_{0-}^2 p_- \lambda_- ,$$

де n_{0+} і n_{0-} — початкові склади угрупувань своїх і чужих. Отже для перемоги численність угрупування відіграє більшу роль, ніж технічні можливості бойових одиниць.

За відсутності керування (коли вогонь ведеться і по неуражених, і по уражених одиницях супротивника) рівняння втрат набувають вигляду:

$$\frac{dn_+}{dt} = -n_- p_- \lambda_- \frac{n_+}{n_{0+}} ,$$

$$\frac{dn_-}{dt} = -n_+ p_+ \lambda_+ \frac{n_-}{n_{0-}} .$$

Виявляється, що умова ураження всіх одиниць угрупування супротивника (умова перемоги своїх) і в цьому випадку залишається без змін. Проте, якщо в першому випадку кількість збережених на мить перемоги своїх бойових одиниць становить

$$n_* = n_0 \sqrt{1 - \frac{p_- \lambda_- n_{0-}^2}{p_+ \lambda_+ n_{0+}^2}} ,$$

то в другому випадку вона є, зрозуміло, меншою:

$$n_* = n_0 \left(1 - \frac{p_- \lambda_- n_{0-}^2}{p_+ \lambda_+ n_{0+}^2} \right).$$

Більш детальною є модель, відображувана системою рівнянь

$$\frac{dn_{i+}}{dt} = -\sum_{i_-=1}^{I_-} n_{i-}\lambda_{i-} p_{i-}\eta_{i-,i+}\varphi_{i-,i+} - n_{i+}k_{i+} + \eta_{i+} + b_{i+}, \quad i_+ = \overline{1, I_+},$$

$$\frac{dn_{i-}}{dt} = -\sum_{i_-=1}^{I_-} n_{i+}\lambda_{i+} p_{i+}\eta_{i+,i-}\varphi_{i+,i-} - n_{i-}k_{i-} + \eta_{i-} + b_{i-}, \quad i_- = \overline{1, I_-},$$

де i_+ і i_- — поточні номери різновидів бойових одиниць свого і чужого угрупувань; I_+ і I_- — загальні кількості різновидів бойових одиниць в своєму і чужому угрупуваннях; k_{i+} і k_{i-} — коефіцієнт, що враховує вимушене вилучення бойових засобів з активних дій (через необхідність проведення планового технічного обслуговування чи через критичне зношування і поломки, наприклад), η_{i+}, η_{i-} — функції (в загальному випадку залежні від часу), які враховують надходження резервів; b_{i+}, b_{i-} — функції (в загальному випадку залежні від часу), які враховують темп відновлення кондицій засобів (технічним обслуговуванням і ремонтом, наприклад); $\eta_{i-,i+}$ (і $\eta_{i+,i-}$) — керування, які визначають відносну частку засобів i_--го різновиду, активність яких спрямована проти засобів i_+-го різновиду (і навпаки); $\varphi_{i-,i+}$, (і $\varphi_{i+,i-}$) — логічні функції, які повинні враховувати принципову можливість безпосередньої активності засобів i_--го різновиду супроти засобів i_+-го різновиду (і навпаки), обмеженість боєзапасів різного типу, рівень поінформованості (осмислено вражати можна ті засоби, які ідентифіковано розвідкою і інформація про які пройшла обробку в службі керування бойовими діями).

Аналіз такої системи рівнянь дає змогу за різних обмежень (що, окреслюють, наприклад, наявні людські, матеріальні, фінансові ресурси) вибрати найдоцільнішу початкову потугу бойового угрупування (окреслити склад угрупування за кількістю бойових одиниць різного призначення), призначити оптимальний розподіл активності різновидів своїх бойових засобів супроти різних за технічними можливостями засобів ворога, знайти найдоцільніші значення характеристик p_{i+}, λ_{i+} свого озброєння, зважаючи на їх вартість та на відповідні характеристики p_{i-}, λ_{i-} озброєння супротивника. Зрозуміло, що й супротивник напружуватиме свій інтелект, спираючись на ті самі чи принципово інші модельні уявлення про ситуацію. В такому разі диференціальна задача може набути ознак невизначеної, і її доведеться розв'язувати на засадах теорії диференціальних ігор, наприклад. Вона стане ще складнішою, коли йтиметься про протистояння своїх і чужих концепцій та моделей, які принципово відрізняються одна від одної, і які, до того ж, для протилежних сторін в ту чи іншу мить часу можуть бути відомими лише з певним ступенем вичерпності.

Задачу Ланчестера формулюють ще й таким чином. Нехай битва між двома однорідними силами X і Y описується детерміновано рівняннями

$$\frac{dx}{dt} = -F(t, x, y), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\frac{dy}{dt} = -G(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

де $x(t)$, $y(t)$ — рівні сил X і Y в мить t; x_0, y_0 — початкові рівні; F, G — швидкості спадання військової потуги. Передбачається, що функції $F(t, x, y)$, $G(t, x, y)$ є двічі неперервно диференційовними за кожним з аргументів. Нехай у грі перемагають сили X, поведінка переможця X цілком відома силам Y, які мають можливість обирати найкращий в певному сенсі (відповідно до обраного критерія) відгук на дії X. Тоді оптимізація бою перетворюється на задачу визначення найдоцільнішого значення x_0 рівня сил, що вводяться у битву в початкову мить часу t_0.

При розв'язуванні задачі повинні братись до уваги чотири чинники: вид критерія оптимальності; динаміка перебігу битви; ознаки завершення битви; інформаційну структуру сторін, що беруть участь у битві. Тут припускається, що учасники мають повну інформацію про перебіг битви, оскільки відомі диференціальні рівняння, що описують динаміку процесу військового протистояння. Пересічно оперують трьома термінальними функціоналами:

— власними втратами $L_x = x_0 - z_f$;

— відношенням втрат сторін $R_c = \dfrac{x_0 - z_f}{y_0 - y_f}$;

— різницею втрат $D_c = \left(x_0 - z_f\right) - \left(y_0 - y_f\right)$,

де x_f, y_f — залишкові рівні сил в деяку мить t_f завершення битви. Термінальні умови, що окреслюють кінець завершення гри, задаються однією з умов: ($T1$) — гра припиняється, коли рівень $y(t)$ сил Y досяг деякого граничного значення $y_X^f \geq 0$ тоді, як рівень $x(t)$ сил X деякого значення $x_Y^f \geq 0$, яке можна вважати граничним, ще не встиг досягнути; ($T2$) — гра припиняється, коли відношення $u(t) = \dfrac{x(t)}{y(t)}$ досягає певного значення $u_X^f > u_0 = \dfrac{x_0}{y_0}$.

Сили X, природно, є обмеженими:

$$x_0^{\min} \leq x_0 \leq x_0^{\max},$$

де $x_0^{\min} = x_0^{\mathrm{draw}} + \varepsilon \leq x_0^{\max}$; $\varepsilon > 0$; x_0^{draw} — деякий мінімальний рівень сил X, що гарантує перемогу; $x_0^{\max}$ — рівень сил X, перевищення якого потребує такої мобілізації ресурсів, яку ніяк не вдасться компенсувати перемогою у битві з Y (битва стає абсурдною, а перемога Пірровою).

Описані моделі засвідчують досить широкі можливості адекватного відображення абстрагованої реальності в термінах систем (чи рівнянь) другого порядку. Але найприроднішим є застосування систем (чи рівнянь) другого порядку для моделювання механічних явищ [5—7].

10.7 Найпростіші механічні системи

Всі закони фізики є лише моделями чинного порядку у всесвіті. Їх ніяк не можна тлумачити як непорушні істини. Проте ці моделі настільки бездоганно узгоджуються з досвідом та підтверджуються спеціальними експериментами у досяжних системах відліку, що при розв'язуванні пересічних, практичних задач ніколи не виникає підстав сумніватись у їх справедливості. Найбільш фундаментальними серед таких законів (чи моделей) у механіці є **закони** (чи моделі) **збереження** — **збереження імпульсу**, **момента імпульсу**, **енергії**.

Системи відліку (сукупності тіл відліку), у яких справджуються закони класичної механіки називають **інерціальними**. Віднайшовши яку-небудь одну ("фундаментальну") інерціальну систему відліку, відразу можна вказати нескінченну множину інших інерціальних систем відліку. Кожна з цих нових рухається зі сталою швидкістю відносно віднайденої першої. Існування "фундаментальної" інерціальної системи відліку доводиться постулювати.

Первісним є сенс вважати **закон** (принцип) **збереження імпульсу**: повний імпульс ізольованої системи часток (дещиць) залишається сталим за будь-якого механічного руху цієї системи.

Імпульсом матеріальної частки маси m, що рухається зі швидкістю $\boldsymbol{v}$, називають величину $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$. Величини $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}$ є векторами. Їх в ортогональній системі координат $Oxyz$ можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}v_x+\boldsymbol{j}v_y+\boldsymbol{k}v_z\,,\ \boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}\,mv_x+\boldsymbol{j}\,mv_y+\boldsymbol{k}\,mv_z=\boldsymbol{i}\,p_x+\boldsymbol{j}\,p_y+\boldsymbol{k}\,p_z\,,$$

де $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — одиничні вектори, спрямовані вздовж координатних восей x,y,z; v_x, v_y, v_z — відповідні проекції вектора $\boldsymbol{v}$ на координатні восі; $p_x=mv_x$, $p_y=mv_y$, $p_z=mv_z$ — аналогічні проекції вектора $\boldsymbol{p}$.

Під **ізольованою** розуміють таку **систему часток**, яка позбавлена можливості взаємодіяти з довкіллям. Для зображеної на рис. 71 ізольованої системи двох часток 1 і 2 ($\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ — радіус-вектори, що визначають розташування часток 1, 2 відносно системи координат $Oxyz$) справджується відповідно до закону збереження імпульсу рівність

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2=\text{const}\,. \tag{10.167}$$

$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i=\text{const}\,.$$

Диференціюючи (10.167) за часом, матимемо

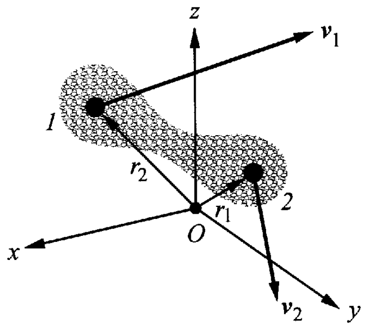
$$m_1\boldsymbol{a}_1=-m_2\boldsymbol{a}_2\,,$$

де $\boldsymbol{a}_1=d\boldsymbol{v}_1/dt$, $\boldsymbol{a}_2=d\boldsymbol{v}_2/dt$ — прискорення часток 1, 2. Таким чином, прискорення часток обернено пропорційні їх інерційним масам m: $a=F/m$, де F —

коефіцієнт пропорційності. Векторну величину $\boldsymbol{F}$ можна тлумачити як чинник взаємовпливу, взаємодії часток, тобто як силу. То ж **формальним означенням сили** є рівність

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a},$$

(що відображає **другий закон динаміки**).



71 **Ізольована система двох часток.**

Нехай $\boldsymbol{F}_1$ — сила, з якою частка *2* діє на частку *1*, а $\boldsymbol{F}_2$ — сила, з якою частка *1* діє на частку *2*. Тоді, відповідно до (10.167), справджується рівність

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2,$$

засвідчуючи, що “дія дорівнює протидії” (**третій закон динаміки**).

Для однієї ізольованої частки $\boldsymbol{F} = 0$, а отже і $\boldsymbol{a} = 0$. А оскільки $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$, то $\boldsymbol{v} = \text{const}$. Отже, за відсутності взаємодії з оточенням частка рухається зі сталою швидкістю (**перший закон динаміки**, закон інерції).

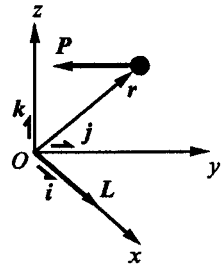
Записуючи другий закон динаміки у вигляді

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt},$$

матимемо:

$$\boldsymbol{F}\,dt = d(m\boldsymbol{v}), \quad \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\,d\tau = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0,$$

де t_0, t — задані моменти часу, а $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_0$ — відповідні їм швидкості руху частки. Записаний тут інтеграл $\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\,d\tau$ називають **імпульсом сили** $\boldsymbol{F}$. Таким чином, імпульс сили $\boldsymbol{F}$ за проміжок часу від миті t_0 до миті t дорівнює зміні $m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0$ імпульсу частки.



72 **Момент імпульсу як вектор.**

Величину

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} \qquad (10.168)$$

називають **моментом імпульсу частки** масою m, такої що за перебування у точці з радіус-вектором $\boldsymbol{r}$ відносно деякого початку відліку O наділена імпульсом $\boldsymbol{p}$ (рис. 72). Зазначимо, що модуль L момента імпульсу $\boldsymbol{L}$ є залежним від вибору початку відліку O. До того ж, якщо у заданій системі відліку $\boldsymbol{L} \neq 0$, то це зовсім не означає, що частка обов'язково здійснює обертовий рух.

Через одиничні координатні вектори (орти $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) вектор момента імпульсу записується так:

$$\boldsymbol{L} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(yp_z - zp_y\right) + \boldsymbol{j}\left(zp_x - xp_z\right) + \boldsymbol{k}\left(xp_y - yp_x\right).$$

Сила $\boldsymbol{F}$, що прикладена до частки, розташування якої визначає радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ (рис. 73), породжує **момент**

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} .$$

Диференціюючи (10.168) за часом, отримаємо вираз

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} .$$

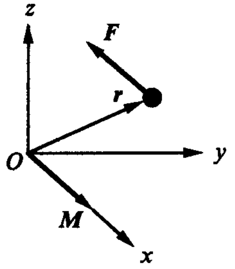
Оскільки $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$, то $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} = 0$. То ж, беручи до уваги рівність $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$, матимемо

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} .$$

Ця ж формула визначає взаємозв'язок між загальним моментом імпульсу $\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i$ та загальним моментом сили $\boldsymbol{M} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{M}_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j$ для системи n

часток, на які діють N сил:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{L}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{M}\,.$$



73 **Момент сили як вектор.**

Серед сил, що діють в системі, можна вирізнити внутрішні (зумовлені взаємодією між собою часток, належних тільки системі) та зовнішні (зумовлені взаємодією часток системи з частками із довкілля). Відповідно до третього закону динаміки внутрішні сили компенсують одна одну і тому не створюють моментів сили. Отже під $\boldsymbol{M}_j$ в останньому виразі випадає розуміти моменти власне зовнішніх сил, що характеризують "стосунки" системи з довкіллям. Натомість величину $\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{L}_i$ можна тлумачити як характеристику конфігурації системи (внутрішню характеристику).

Якщо система механічно з довкіллям не взаємодіє, то всі моменти зовнішніх сил дорівнюють нулю: $\boldsymbol{M}_j = 0$ ($j = \overline{1,N}$). Система може взаємодіяти з оточенням і так, що моменти сил впродовж певного періоду часу врівноважуватимуться:

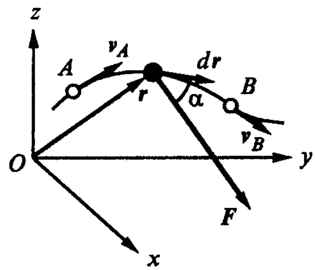
$$\boldsymbol{M} = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{M}_j = 0\,.$$

В обидвох цих випадках

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{L}_i}{dt} = 0\,,$$

а отже справджується **закон збереження момента імпульсу**:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{L}_i = \mathrm{const}\,.$$



74 **Рух матеріальної частки за дії сили.**

Нехай матеріальна частка рухається вздовж деякої траєкторії T під впливом системи сил, рівнодійною яких є сила $\boldsymbol{F}$, рис. 74 ($d\boldsymbol{r}$ — елементарне переміщення частки). **Елементарною роботою сили** $\boldsymbol{F}$ називають величину

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} .$$

Вздовж криволінійного шляху AB сила $\boldsymbol{F}$ виконує роботу

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B F \cos\alpha \, dr ,$$

де F, r — модулі векторів $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{r}$; α — кут між векторами $\boldsymbol{F}$ і $d\boldsymbol{r}$.

Беручи до уваги другий закон динаміки, знайдемо:

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{v_A}^{v_B} m\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = T_B - T_A . \qquad (10.169)$$

Величину $T = mv^2/2$ називають кінетичною енергією частки.

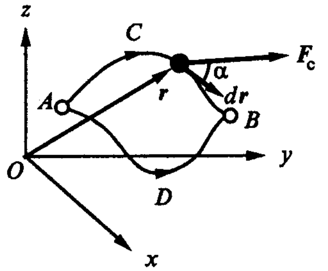
Формула (10.169) відбиває в собі таке: повна робота, виконувана всіма силами, що діють на частку, дорівнює відповідній зміні кінетичної енергії частки.

Якщо робота деяких сил $\boldsymbol{F}_\text{c}$ при переміщенні частки з заданої точки A в задану точку B не залежить від самої траєкторії руху частки, то ці **сили** називаються **консервативними**. Наприклад, у випадку, зображеному на рис. 75, консервативна сила $\boldsymbol{F}_\text{c}$ виконує одну і ту саму роботу при русі частки як вздовж траєкторії ACB, так і вздовж траєкторії ADB. Те саме можна спостерігати і на інших траєкторіях, що починаються в A і закінчуються в B:

$$W_{ACB} = \int_{ACB} \boldsymbol{F}_\text{c} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{ADB} \boldsymbol{F}_\text{c} \cdot d\boldsymbol{r} = W_{ADB} = W_{AB} = \text{const} .$$

Ту частину енергії, зміна якої зумовлена виконанням роботи консервативними силами, називають **потенціальною енергією**. Отже, позначаючи потенціальну енергію через U, маємо підстави писати:

$$W_{AB} = \int_{AB} \boldsymbol{F}_\text{c} \cdot d\boldsymbol{r} = U_A - U_B = U_{AB} . \qquad (10.170)$$



75 **Рух матеріальної частки за дії консервативної сили.**

Зміна потенціальної енергії матеріальної частки не залежить від траєкторії руху цієї частки, а визначається початковим і кінцевим її розташуваннями. Величини U_A, U_B є відповідними точкам A, B значеннями деякої скалярної функції $U = U(x, y, z)$, яку можна назвати **функцією-потенціалом**.

Пересунемо точку B у нескінченність, покладаючи водночас $U_B = U_{+\infty} = 0$. Відповідно до (10.170)

$$U_A = U_{A\infty} = \int_A^{\infty} \boldsymbol{F}_c \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\infty}^{A} \boldsymbol{F}_c \cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

Отже потенціальною енергією матеріальної частки, відповідною деякій точці A простору, можна називати ту частину енергії, на яку зміниться загальна енергія частки при пересуванні її за допомогою консервативних сил з нескінченності у задану точку A; значення цієї енергії збігається з роботою консервативних сил, взятою з протилежним знаком.

Повертаючись до (10.169), вирізнимо консервативні $\boldsymbol{F}_\text{c}$ і **неконсервативні** $\boldsymbol{F}_\text{nc}$ **сили**:

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{F}_\text{c} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_A^B \boldsymbol{F}_\text{nc} \cdot d\boldsymbol{r} = W_{AB\text{c}} + W_{AB\text{nc}} = T_B - T_A\,.$$

Оскільки $W_{AB\text{c}} = U_A - U_B$, то

$$W_{AB\text{nc}} = (T_B - T_A) - (U_A - U_B) = (T_B + U_B) - (T_A + U_A) = E_B - E_A\,,$$

де $E = T + U$ — **повна механічна енергія** частки. Якщо всі сили є консервативними ($W_{AB\text{nc}} = 0$), то

$$E = T + U = \text{const}\,.$$

Остання рівність відбиває в собі **закон збереження енергії** (механічної!), який можна сформулювати так: за дії лише консервативних сил повна механічна енергія матеріальної частки не змінюється.

Закон збереження поширюється на енергію взагалі: енергія в ізольованій системі може існувати у різних формах водночас; форми існування енергії можуть частково або повністю змінювати одна одну, але повна енергія у всіх формах існування разом не може змінюватись, а отже не може виникати і зникати.

Робота неконсервативних внутрішніх сил у замкненій системі породжує зміну кількості енергії, що існує у якійсь формі, відмінній від механічної. Зокрема такі неконсервативні сили, як тертя, породжують при виконанні механічної роботи продукування теплоти. Зазначимо, що роботу над системою можна виконати тільки зовнішніми силами, тобто порушуючи її ізольованість.

Нехай рухома частка в мить t має масу $m(t)$ і абсолютну швидкість $\boldsymbol{v}$. Імпульс частки в цю мить дорівнює

$$\boldsymbol{p} = m(t)\boldsymbol{v} .$$

За час dt до цієї частки приєдналась інша частка масою $dm(t)$, яка в мить приєднання рухалася з абсолютною швидкістю $\boldsymbol{u}$. Таким чином, з миті $t+dt$ існуватиме одна частка масою $m(t)+dm(t)$, яка матиме швидкість $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$ і імпульс

$$\boldsymbol{p}_1 = \big(m(t)+dm(t)\big)(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}) .$$

Оскільки в мить t загальний імпульс двох часток, що рухалися нарізно, становив $m(t)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}dm(t)$, то можна стверджувати, що в результаті їх об’єднання імпульс зріс на величину

$$d\boldsymbol{p} = \big(m(t)+dm(t)\big)(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}) - \big(m(t)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\,dm(t)\big) = \boldsymbol{F}dt = d\boldsymbol{S} ,$$

де $\boldsymbol{F}$ — рівнодійна прикладених сил, $d\boldsymbol{S}$ — елементарний імпульс рівнодійної сили.

Звідси

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \frac{dm}{dt}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi}$$

Величина

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{dm}{dt}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$$

називається реактивною силою.

Закон руху точки змінної маси можна сформулювати так: у будь-яку мить часу добуток маси точки на її прискорення дорівнює геометричній сумі діючих на точку сил $\boldsymbol{F}$ і реактивної сили $\boldsymbol{\Phi}$. Якщо відносна швидкість $\boldsymbol{v_r} = \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ мас, що від’єднуються (приєднуються) дорівнює нулю, то рух точки зі змінною масою описується рівнянням $m(t)\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$, яке за структурою збігається з рівнянням, що описує рух точки зі сталою масою, але в якому m залежить від t; при $\boldsymbol{v_r} = 0$ точка розпадається (злипається з іншими матеріальними точками).

Наведені аналітичні співвідношення є засадничими для побудови моделей всіх механічних систем. Однак, динамічні системи, з якими доводиться зустрічатися навіть дуже часто, поєднують в собі окрім чисто механічних носіїв енергії — матеріальних точок, твердих чи пружних тіл, ще й електричні, теплові, суцільні плинні, пневматичні тощо. Але і таким системам в багатьох випадках є сенс ставити у відповідність диференціальні рівняння другого порядку.

Система диференціальних рівнянь другого порядку може правити за модель деякої системи взаємопов'язаних маятників. Це дає певні підстави говорити про "маятникове середовище", в рамках якого кожен модельований об'єкт тлумачиться, власне, як система взаємопов'язаних маятників. Структуру системи маятників можна як завгодно ускладнювати, долучаючи все нові і нові маятники та все вишуканіше накладаючи в'язі. Проте, зрозуміло, нового рівня якості модельного відображення властивостей реального об'єкта досягнути не вдасться (принаймні доти, доки кількість маятників сприйматиметься скінченною).

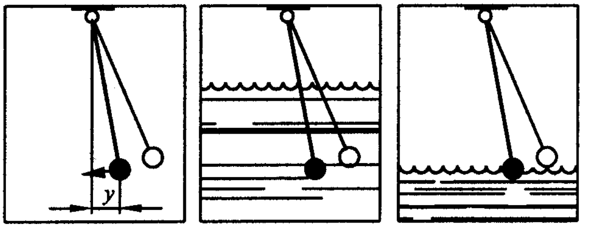
На процес коливання маятника помітно впливає довкілля (рис. 76; затемнена точка позначає власне зосереджену масу, а незатемнена — крайнє мертве положення цієї маси). Зокрема, якщо б розмістити підвісний (математичний) маятник на Місяці (рис. 76, *а*) чи занурити у нев'язку рідину (рис. 76, *б*), то його період вільних коливань, визначуваний за формулою

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$$

(l — довжина нитки підвісу) в першому випадку збільшився б у $\sqrt{6}$ разів (через те, що прискорення вільного падіння у полі тяжіння Місяця складає одну шосту частину від прискорення вільного падіння у полі тяжіння Землі), а у другому випадку — зменшився б у $\sqrt{1-\dfrac{\rho}{\rho_m}}$ разів (через дію архімедової виштовхувальної сили; ρ — густина рідини, ρ_m — густина матеріалу важки).

Припустимо, що бажаним є стан статичної рівноваги маятника, а його коливання — це збурений рух, який треба усунути. Якщо коливання маятника є гармонічними (на масу не діють ніякі сили, окрім сили ваги), то в стані рівноваги він перебуватиме відносно малу частку часу. Цей стан речей у певній мірі унаочнює рис. 14, де під y слід розуміти лінійне відхилення зосередженої маси (важки) від вертикалі, а під $P(y)$ — густину розподілу часу перебування маси в околі простору з координатою y; якраз в точці $y = 0$, яка відповідає стану рівноваги, величина $P(y)$ є найменшою. Якщо ж підвісний маятник (рис. 76, *а*) повністю занурити у в'язку рідину (рис. 76, *б*), то на важку постійно діятиме додаткова сила опору, пропорційна швидкості руху важки (а найбільшою швидкість є в околі стану рівноваги). В такому разі відхиленню важки від стану рівноваги протидіятиме тим більша сила, чим в'язкішим є штучно створене довкілля. Проте, з іншого боку, чим більша в'язкість довкілля, тим повільнішим буде рух маятника до стану рівноваги. Напрошується висновок: щоб маятник не надто довго коливався в процесі прямування до стану рівноваги, його доцільно занурити у в'язку рідину частково

— так, щоб важка потрапляла у в'язку рідину тільки тоді, коли вона перебуває в деякому околі стану рівноваги маятника (рис. 76, *в*). Наведені приклади засвідчують можливість параметрично впливати на коливні процеси.



а *б* *в*

76 **Схеми маятників, що перебувають у різних середовищах.**

Зауважимо, що при відхиленні маятника від статичного стану рівноваги виникають силові чинники, які спрямовані на протидію відхиленню та усування цього відхилення. Причому, один з чинників — рівнодійна сили натягу нитки підвісу і сили ваги важки — пропорційний відхиленню маятника від вертикалі, а другий — сила опору довкілля руховi маятника — пропорційна швидкості пересування важки відносно довкілля. Більший прояв першого чинника посилює небажану коливніть, а надмірність другого уповільнює процес прямування до рівноваги. Подібний стан речей можна вистежити в більшості динамічних систем найрізноманітнішої природи: завжди можна вирізнити бажаний і реальний рухи, відхилення реального від бажаного (розузгодження) та пропорційні розузгодженню і швидкості його зміни чинники, які спрямовані на усування розузгодження. Оскільки в коливних процесах гармонічного типу більшим значенням розузгодження відповідають менші значення швидкості його зміни, і навпаки, то можна вважати, що найпомітніші впливи названих чинників є рознесеними в часі.

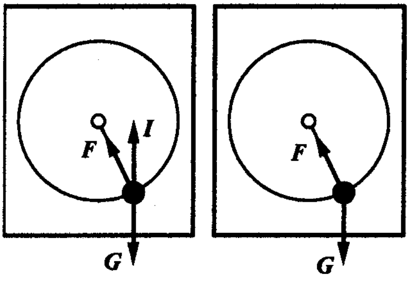
Звернемо увагу на запис рівняння руху механічної системи в інерціальній та неінерціальній системах відліку.

Нехай маятник підвішено у масивній рамці, що може вільно падати вздовж вертикальних напрямних, які не чинять опору ковзання, рис. 77. Коли рамка нерухома, то маятник здійснює звичайні вільні коливання.

В неінерціальній системі відліку, зв'язаній з рамкою, рівняння руху важки маятника має вигляд (рис. 77, *а*)

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F} \qquad (10.171)$$

($\boldsymbol{a}'$ — прискорення важки, $\boldsymbol{I}$ — інерційна сила, зумовлена прискореним рухом системи відліку, $\boldsymbol{g}$ — вектор прискорення вільного падіння). Очевидно, що отримане рівняння описує рух матеріальної точки, на яку діє тільки сила натягу нитки підвісу; рух здійснюється по колу з центром в точці підвісу (радіус кола дорівнює довжині l нитки). Сила натягу нитки підвісу є тією доцентровою силою, що забезпечує рівномірний рух важки маятника по колу; її величина дорівнює mv'^2/l (v' — швидкість руху важки відносно рамки).



а *б*

77 **Маятник у рамці.**

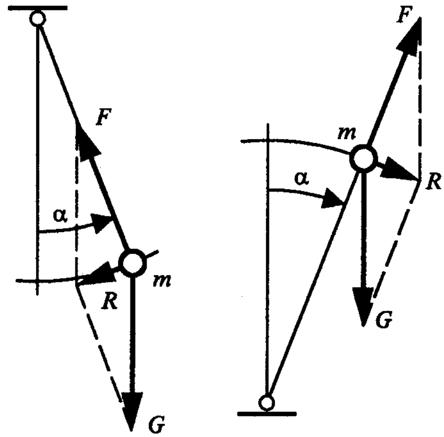
В інерціальній системі відліку рівняння руху має вигляд (рис. 77, *б*)

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g}.$$

Повне прискорення можна записати як суму $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, а рівняння руху як систему двох рівнянь $m\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}$ і $m\boldsymbol{a}_2 = m\boldsymbol{g}$. Друге рівняння стверджує, що $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{g}$, а перше — те саме, що й рівняння (10.171). Тож рух важки здійснюється по колу з центром в точці підвісу маятника.

Рамка може бути переведена у стан вільного падіння за будь-якого динамічного стану маятника. Якщо маятник у мить початку вільного падіння рамки знаходиться у стані максимального відхилення від стану статичної рівноваги, то важка, яка в зазначену мить має нульову швидкість, залишатиметься в одному і тому самому положенні відносно рамки доти, доки вільно падатиме рамка. Якщо ж маятник у мить початку вільного падіння рамки знаходиться у стані, що не збігається зі станом максимального відхилення, то важка матиме відносно рамки в цю мить деяку швидкість. Модуль цієї швидкості не змінюватиметься, зате змінюватиметься її напрям відносно рамки і тому маятник обертатиметься рівномірно відносно точки підвішування. Можна говорити, що миттєве переведення рамки у стан вільного падіння змінило структуру системи.

Звернімося до маятників — підвішеного (рис. 78, *а*) і опертого (рис. 78, *б*). Стани рівноваги обидвох маятників відповідають їх вертикальним положенням. Переміщення q (реальне чи узагальнене) і відповідна швидкість переміщення $\dot{q}$ зосередженої в точці маси m маятника можна взяти за прямокутні координати, в яких кожному стану маятника на площині $(q, \dot{q})$ відповідатиме одна (і тільки одна) точка. Цю **точку** називають **зображувальною**. Натомість, **координати** q і $\dot{q}$, площину $(q, \dot{q})$ і траєкторію $\{q(t), \dot{q}(t)\}$ зображувальної точки пересічно називають **фазовими** (t — часовий параметр). Зокрема, у випадку малих вільних коливань підвішеного маятника, що є механічною системою з одним ступенем вільності, $q = A\sin(kt + \alpha)$, $\dot{q} = Ak\cos(kt + \alpha)$ (k, α — сталі). Усуваючи час t, матимемо: $\dfrac{q^2}{A^2} + \dfrac{\dot{q}^2}{A^2k^2} = 1$. Отже тут **фазові траєкторії** утворюють сім’ю еліпсів, відношення довжин півосей яких дорівнює круговій частоті вільних коливань маятника.



а *б*

78 **Схеми математичних маятників.**

На відхилену від вертикалі важку маятника діють сила ваги

$$G = mg$$

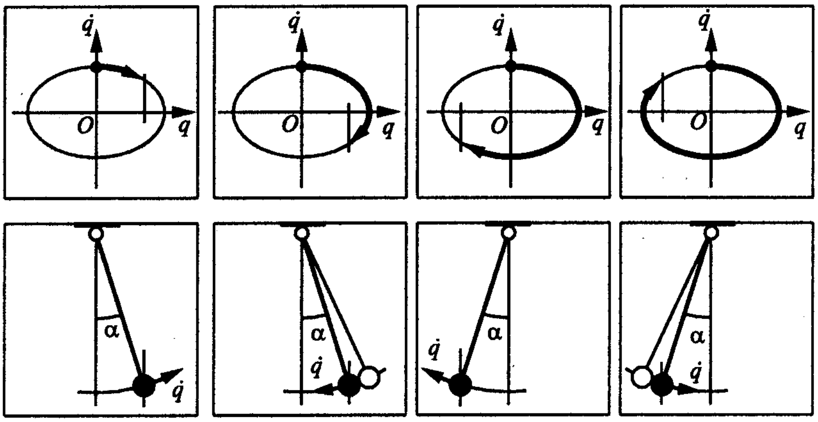
(m — маса важки; g — прискорення вільного падіння, гравітаційна стла) та сила F реакції підвісу чи опертя. Рівнодійна R цих сил спрямована на усунення відхилення α важки підвішеного маятника (R тим більша, чим більшим є α). Але, якщо на маятник не діють жодні інші сили, то сумісна дія лише силового R і інерційного чинників спричиняють як завгодно тривале періодичне коливання маятника відносно стану рівноваги (стійкого стану статичної рівноваги). Будь-яке ж відхилення від вертикалі важки опертого маятника тільки збільшує це відхилення; не існує жодних силових чинників, які б разом спрямовували важку до стану (нестійкої) рівноваги.

Поточний стан маятника визначатимемо відхиленням q (чи кутом α відхилення) від стану рівноваги і швидкістю

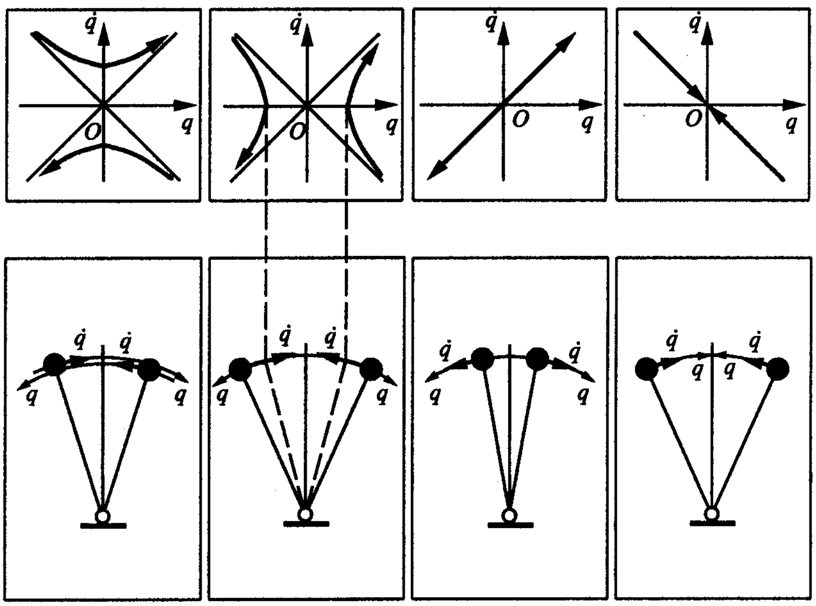
$$\dot{q} = v$$

руху зосередженої маси m. В такому разі стає можливим відображати рух маятника траєкторією руху точки на площині в системі координат $Oq\dot{q}$ (чи $O\alpha v$).

Фазовою траєкторією, що відображає рух підвішеного маятника, є еліпс (різновид замкнених кривих), рис. 79. Натомість, фазова траєкторія, що відображає рух опертого маятника, — вітка гіперболи чи асимптотична пряма (різновиди незамкнених ліній), рис. 80. В загальному випадку фазових траєкторій існує безліч, рис. 81 (прямі, що на рис. 80 і 81, *б* спрямовані у початок системи фазових координат відображають **вироджений режим** (**руху**) — режим повернення опертого маятника у стан нестійкої рівноваги в результаті надання важці рівно стільки енергії, скільки необхідно, щоб вона потрапила у найвищу точку траєкторії свого руху, але не достатньо, щоб проминути цю точку).



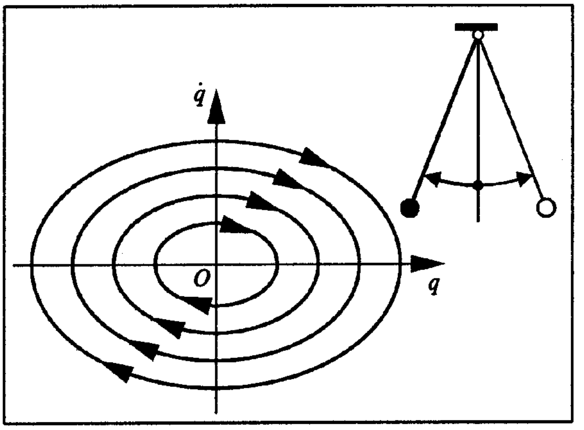
79 **Фазова траєкторія руху підвішеного маятника.**



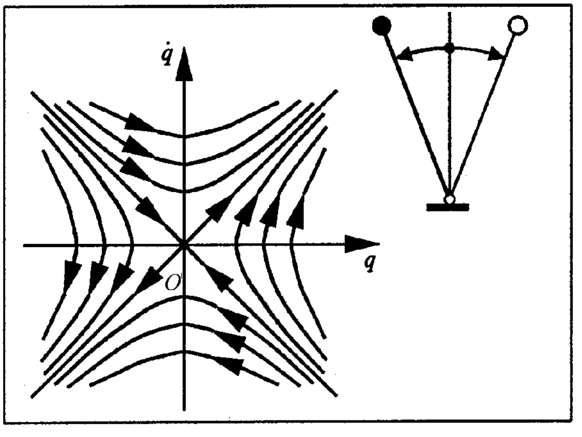
80 **Різновиди окремих фазових траєкторій руху опертого маятника.**

Система “маса—підвіс (опертя)” може правити за модель пристрою для вимірювання пришвидшення, швидкості (частоти) обертання тощо. На масу m пристрою, схема якого зображена на рис. 82, в системі відліку, пов’язаній з обертовим валом, діє відцентрова сила

$$F = \frac{G}{g}\omega^2(e + l\sin\varphi),$$



а



б

81 **Системи фазових траєкторій руху підвішеного (*а*) і опертого (*б*) маятників.**

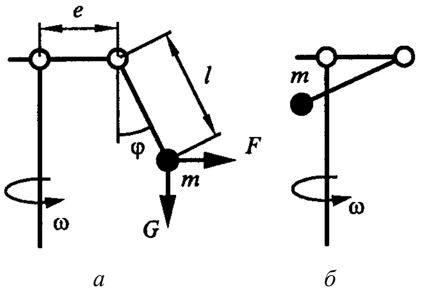
де $G = mg$ — сила ваги, g — гравітаційна стала, ω — швидкість обертання, φ — кут відхилення важки, l — довжина стрижня підвісу, e — зміщення точки підвісу від осі обертового вала.

Маса перебуватиме у стані статичної рівноваги в тому разі, коли рівнодійна сил F і G буде скерована вздовж стрижня, тобто тоді, коли

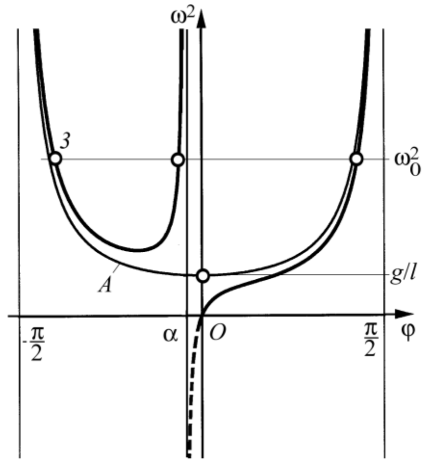
$$G\sin\varphi = F\cos\varphi,$$

або

$$G\sin\varphi = \frac{G}{g}\omega^2(e + l\sin\varphi)\cos\varphi.$$



82 **Схема відцентрового вимірювача-регулятора швидкості обертання.**



83 **Характеристика відцентрового вимірювача-регулятора швидкості обертання.**

З отриманої рівності випливає, що в стані статичної рівноваги пристрій фіксує швидкість обертання, значення якої відповідає рівнянню

$$\omega^2 = \frac{g\sin\varphi}{(e + l\sin\varphi)\cos\varphi}.$$

Залежність ω^2 від φ ілюструє рис. 83. Лінія $\omega^2 = \omega^2(\varphi) \geq 0$ має вертикальні асимптоти $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \alpha = -\arcsin\frac{e}{l}$. При $e = 0$ вона трансформується в пряму $\varphi = 0$ і криву $\omega^2 = \frac{g}{l\cos\varphi}$ (лінія *A*), що перетинаються в точці $(\varphi, \omega^2) = (0, \frac{g}{l})$. За достатньо великих значень $|\varphi|$ і ω^2 (наприклад, при $\omega^2 = \omega_0^2$) можливі три стани відносної (стійкої чи нестійкої) рівноваги відцентрового пристрою: стан *1*, що відповідає рис. 82, *а*; стани *2* і *3*, що відповідають рис. 82, *б*. Зокрема при

$$e = \frac{l}{2} \text{ і } \omega = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

малі коливання важки в околі стану рівноваги $\varphi = \frac{\pi}{6}$ описуються рівнянням

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + A\sin\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{5g}{l}}t + \varphi_0\right).$$

Важливим модельним елементом механіки є пружний стрижень (балка).

Довший час у креслярів за лекала правили довгі тонкі рейки з дерева чи іншого пружного матеріалу, які уможливлювали проведення довгих плавних ліній через задані точки. Ці рейки або **сплайни** певним чином кріпилися і в деяких точках до них підвішувалися цинові (свинцеві) важки. Таку рейку (сплайн кресляра) можна ототожнити з тонкою балкою, деформації якої підлягають закону Бернуллі-Ойлера

$$M(x) = \frac{EI}{r(x)},$$

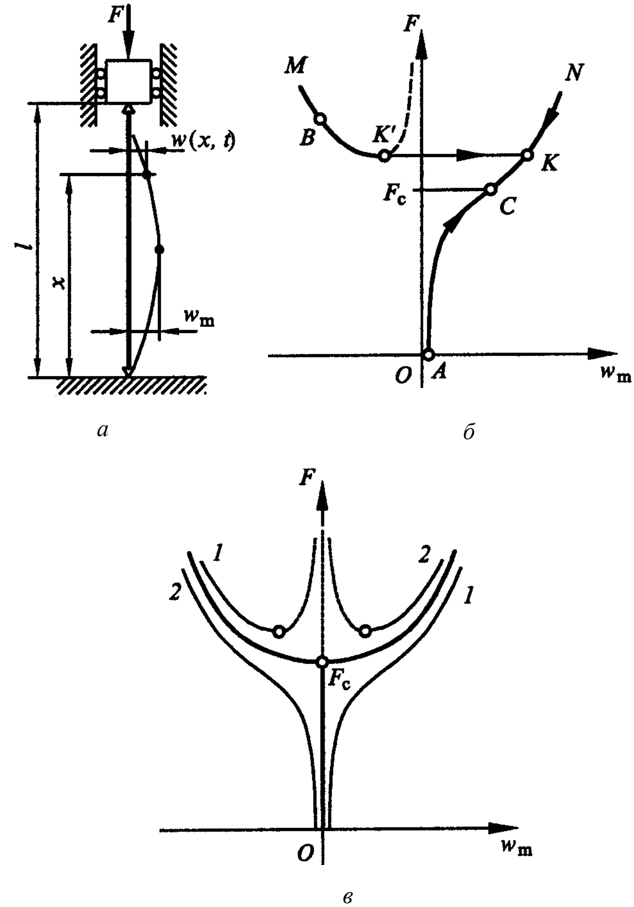
де x — незалежна координата, за допомогою якої деформовану вісь балки можна описати у вигляді аналітичного рівняння $y = y(x)$; M — згинальний момент; r — радіус кривини деформованої восі балки; EI — згинальна жорсткість — добуток модуля Юнга пружності матеріалу E на момент інерції поперечного перерізу I. При незначних вигинах величину $r(x)$ майже збігається з $\frac{1}{y''(x)}$. В такому разі виникають підстави писати

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI}.$$

Важки діють як опори рейки, а тому функція $M(x)$ між точками кріплення важок змінюється лінійно.

Математичний сплайн в найпростішому випадку — це відображення кривої кусками кубічної параболи. Він неперервний і має неперервні першу та другу похідні, а третя похідна може мати розриви першого роду (скінченні стрибки) у місцях стикування кусків параболи. Найпростіший математичний сплайн є аналогією деформованої восі рейки з неперервною кривиною; швидкість зміни кривини вимушено змінюється стрибкоподібно у точках кріплення важок.

Нехай йдеться про поздовжнє навантаження стрижня, рис. 84, який є абсолютно пружним (не схильним до залишкових деформацій чи руйнування, здатним повністю відновлювати свою форму при знятті навантаження). Вважається, що сила F, рис. 84, *а*, змінюється настільки повільно, що жодні динамічні ефекти в процесі пружного деформування стрижня проявитися не можуть.



84 **Поздовжнє навантаження стрижня.**

Повільне зростання F породжує спочатку малі поперечні вигини w_m стрижня, рис. 84, *б* (крива $ACKN$). Коли ж F досягне значень з околу так званого критичного навантаження F_c, то вигини стрижня у відповідь на ті самі зміни сили F, що й в першому випадку, стануть значно помітнішими; стрижень втрачає поздовжню жорсткість. В подальшому деформівна реакція стрижня на навантаження знову уповільниться; жорсткість стрижня в закритичному стані зростає.

Точка A на рис. 84, *б* не збігається з початком системи координат, засвідчуючи тим самим, що повинен існувати чинник, який усунув би несиметричність напруженого стану прямого стрижня при малих навантаженнях, а отже спровокував би його вигин в якийсь конкретний бік, в даному разі — праворуч. Зігнутий у певний бік стрижень за достатньо великого поздовжнього навантаження можна (наприклад, миттєвим прикладанням поперечного зусилля) перевести в інший стійкий стан з вигином у протилежний бік. Цей стан відображатиме на рис. 84, *б* одна з точок кривої MK', наприклад, точка B (штрихова частина кривої MK' відповідає нестійким станам стрижня). Якщо тепер поволі розвантажувати стрижень, то точка B наближатиметься до точки K' мінімуму на кривій MK', а досягнувши її, раптово перестрибне у точку K кривої $ACKN$ без жодної зміни сили F. Подальше розвантаження-навантаження відбуватиметься тільки вздовж лінії $ACKN$. Стрибок $K'K$ в рамках теорії катастроф підпадає під ознаки катастрофи типу складки.

Відомо, що так само як натягування струни призводить до зростання частоти її власних коливань, так і стискування прямого пружного стрижня веде до зниження його власної частоти, доки при деякому критичному значенні F_{c} стискувальної сили вона не набуде нульового значення. Цю обставину підтверджує аналіз лінійних коливань стрижня, в рамках якого зберігаються тільки квадратичні члени енергії: корінь з основної власної частоти для першої гармоніки

$$w = w_{\text{m}} \sin \frac{\pi x}{l}$$

зменшується до нуля за лінійним законом при зростанні сили F до рівня ойлерового критичного навантаження втрати стійкості

$$F_{\text{c}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}\,.$$

Тут позначено: w — переміщення поперечного перерізу стрижня, розташованого на віддалі x від нижньої опори, рис. 84, *а*; l — довжина восі ненавантаженого стрижня. Ойлереве критичне навантаження втрати стійкості відоме зі статики прямих стрижнів, де кривину вісної лінії стрижня апроксимують величиною $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, а згинальний момент визначають як добуток Fw. За ідеалізовану може правити характеристика навантаження-розвантаження стрижня, зображена на рис. 84, *в* потовщеними лініями. Вона розташована між лініями *1-1* і *2-2*, покликаними відобразити реальні характеристики вигинання стрижня відповідно вправоруч і вліворуч.

Наведений приклад дозволяє стверджувати: щоб якісно і змістовно розв’язати деякі механічні задачі, доводиться вийти за їх рамки, інколи досить далеко (зокрема, статичну стійкість доводиться аналізувати, оперуючи поняттями з динаміки). Явище стрибка при зміні станів статично навантажуваної механічної системи, попереджає про необхідність розрізняти повільні і швидкі рухи в одному і тому самому явищі (статичні і динамічні ефекти виявляються взаємопов’язаними). Важко обійти увагою і те, що чисто механічним явищам, навіть найпростішим, інколи властива необоротність (необоротними процесами виявилися навантаження і розвантаження стрижня).

Рух механічної системи однозначно визначається її початковим станом, тобто її розміщенням і швидкостями точок системи в деяку мить часу t_0. Так, рух точки однозначно описується системою рівностей

$$x = f(t, x_0, \dot{x}_0), \; x_0 = x(t_0), \; \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0), \tag{10.172}$$

де $\dot{x} = dx/dt$.

Диференціюючи за часом, знайдемо

$$\dot{x} = \dot{f}(t, x_0, \dot{x}_0) = \frac{\partial f(t, x_0, \dot{x}_0)}{\partial t}, \tag{10.173}$$

$$\ddot{x} = \ddot{f}(t, x_0, \dot{x}_0) = \frac{\partial^2 f(t, x_0, \dot{x}_0)}{\partial t^2}. \tag{10.174}$$

Далі, розв'яжемо (10.172) і (10.173) відносно x_0, $\dot{x}_0$:

$$x_0 = \varphi(t, x, \dot{x}), \; \dot{x}_0 = \psi(t, x, \dot{x}).$$

Отриманий результат підставимо в (10.174) і знайдемо, що

$$\ddot{x}(t) = \Phi(t, x(t), \dot{x}(t)). \tag{10.175}$$

Прискорення в процесі руху точки повинно бути однозначною функцією її розміщення, швидкості і часу.

Під математичним кутом зору заміна співвідношення (10.172) співвідношенням (10.175) у зміст задачі нічого нового не вносить: рівність (10.175) є диференціальним рівнянням, а рівність (10.172) — його розв'язком. Проте, рівняння (10.175), на відміну від (10.172), містить характеристику руху, відповідну одній і тій самій миті часу. Цю характеристику можна за скінченний проміжок часу зідентифікувати і погодити з другим законом динаміки

$$m\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)), \tag{10.176}$$

оперуючи поняттями маси m сили F, перше з яких — характеристика об'єкта, а друге — характеристика взаємодії з довкіллям.

Припустимо, що F є аналітичною функцією, яка від t не залежить. Тоді її можна розкласти у ряд в околі деякої точки $(x, \dot{x}) = (x_0, 0)$:

$$F(x, \dot{x}) = F(x_0, 0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, 0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x, 0)\,\dot{x} + \ldots$$

а далі вирізнити елементарні сили

$$F = F(x_0, 0) = F_0,$$

$$F = ax \; (x_0 = 0)$$

$$F = ax + b\dot{x} \; (x_0 = 0).$$

Відповідні цим силам рівняння (10.176) та розв’язки (10.172) цих рівнянь мають вигляд

<table>
<tr><td>1</td><td>$m\ddot{x}=F_0,\ x_0=0$</td><td>$x=\dfrac{F_0}{2m}t^2+\dot{x}(0)t+x(0)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">$m\ddot{x}-ax=0$,
$x_0=0$</td><td>1. $x=x(0)\cos\omega t+\dfrac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t\quad\left(\omega=\sqrt{-\dfrac{a}{m}},\ a<0\right)$</td></tr>
<tr><td>2. $x=x(0)\mathrm{ch}\omega t+\dfrac{\dot{x}(0)}{\omega}\mathrm{sh}\omega t\quad\left(\omega=\sqrt{\dfrac{a}{m}},\ a>0\right)$</td></tr>
<tr><td>3. $x(t)\equiv 0$, $\dot{x}(t)\equiv 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">$m\ddot{x}-b\dot{x}-ax=0$,
$x_0=0$</td><td>1. $x=e^{\lambda t}\left(x(0)\cos\omega t+\dfrac{\dot{x}(0)-\lambda x(0)}{\omega}\sin\omega t\right)$
$\left(\lambda=\dfrac{b}{2m},\ \omega=\dfrac{1}{2m}\sqrt{-b^2-4am},\ b^2+4am<0\right)$</td></tr>
<tr><td>2. $x=e^{\lambda t}\left(x(0)\mathrm{ch}\omega t+\dfrac{\dot{x}(0)-\lambda x(0)}{\omega}\mathrm{sh}\omega t\right)$
$\left(\lambda=\dfrac{b}{2m},\ \omega=\dfrac{1}{2m}\sqrt{b^2+4am},\ b^2+4am>0\right)$</td></tr>
<tr><td>3. $x(t)\equiv 0$, $\dot{x}(t)\equiv 0$</td></tr>
</table>

Тут

$$\mathrm{sh}\omega t=\frac{1}{2}(e^{\omega t}-e^{-\omega t}),\ \mathrm{ch}\omega t=\frac{1}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t}).$$

Розв’язок 1 відображає стало пришвидшений рух. Цьому руху властиво те, що величини $|x|$ і $|\dot{x}|$ необмежено зростають при $t\to\infty$, хоча на початковій стадії руху можливе й зменшення $|x|$.

Найістотнішою відмінністю між програмами руху 2.1 і 2.2 є те, що першій властива зміна x в обмеженій області, тим вужчій, чим меншою є величина

$$x^2(0)+\frac{\dot{x}^2(0)}{\omega^2},$$

визначувана початковими умовами руху, а друга спричиняє необмежене зростання

$|x|$ за будь-яких початкових умов. Крім цього, рух 2.1 є періодичним; як x, так і $\dot{x}$ повторюють свої значення через проміжок часу $T = \frac{2\pi}{\omega}$; процес руху — коливання точки в околі стану рівноваги $x = 0$ з періодом T, який від амплітуди не залежить.

Відрізняються випадки 2.1 і 2.2 знаком величини a: в першому з них йдеться про притягувальну до стану $x = 0$ силу, а в другому — про відштовхувальну. Те, що у випадку 2.2 відштовхувальна спричиняє необмежене зростання x з плином часу, є цілком природним. А те, що притягувальна сила зумовлює лише незгасні коливання в околі центра притягання, є сенс тлумачити як особливість механічного руху. При цьому тривіальний розв'язок 2.3 займає окреме місце.

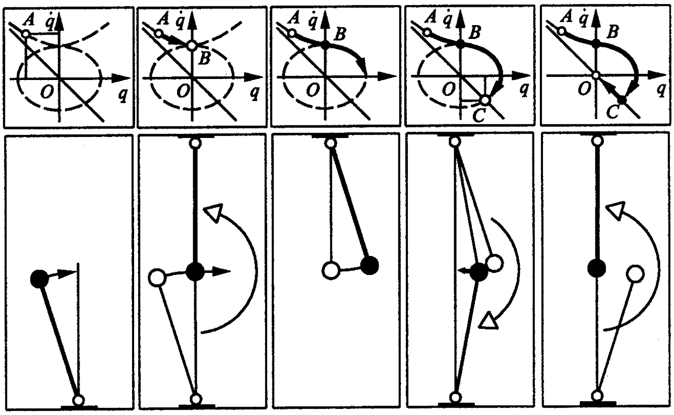
У випадках 3.1 і 3.2 функція $x(t)$ є обмеженою лише за умов $a \le 0$ і $b \le 0$. Причому, при $a < 0$ і $b < 0$ функція $x(t)$ не тільки обмежена, а ще й спадає за абсолютною величиною:

$$|x(t)| \to 0 \text{ при } t \to \infty .$$

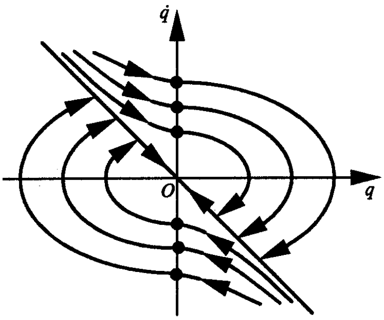
Програма $x(t)$ руху точки наближається до програми-стану спокою $x(t) \equiv 0$, див. 3.3. Отже, через достатньо тривалий проміжок часу за результатами спостереження над програмою руху не вдасться з'ясувати початковий стан механічної системи. Отже, різниця між програмами руху з плином часу стирається, а це означає, що відомий принцип детермінованості губить сенс.

Повернімося знову до підвішеного і опертого маятників (див. рис. 78). Вважатимемо їх втіленням двох різних структур однієї і тієї самої системи. Формально це означає, що динамічна система здатна послідовно за певними законами чергування реалізовувати два типи фазових траєкторій (див. рис. 81). Мета руху системи — досягнути нульової точки O фазової площини, яка відповідає стану рівноваги цієї системи. Перемикаючи систему з однієї структури на іншу, можна суттєво вплинути на динамічність та стійкість її руху.

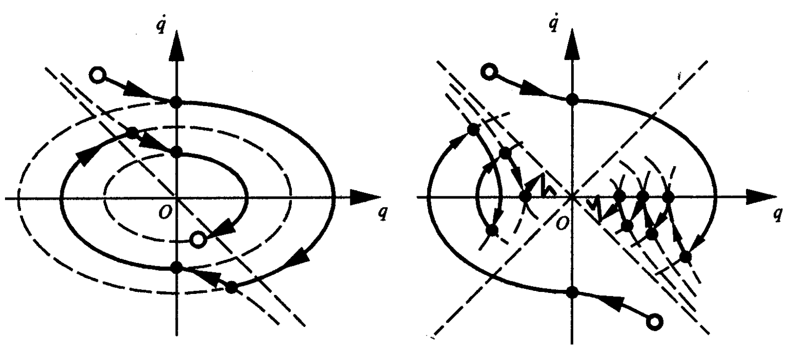
Припустимо, що в початкову мить часу система знаходиться в стані, що відповідає точці A фазової площини між прямою виродженого режиму руху опертого маятника та координатною віссю $O\dot{q}$, рис. 85. Точка A може належати як еліпсу, так і гіперболі. Якщо вона належить гіперболі, то чинна структура опертого маятника і обидві фазові координати (q та $\dot{q}$) з плином часу зменшуються. Після досягнення точки B, подальше перебування зображувальної точки на гіперболі супроводжуватиметься зростанням і q, і $\dot{q}$. Тому є сенс надати перевагу структурі підвісного маятника; при русі зображувальної точки вздовж еліпса, принаймні, спочатку зменшуватиметься $\dot{q}$. Сенс перемкнутися на структуру опертого маятника виникне тоді, коли $\dot{q}$ досягне нульового значення. Але сподіваючись досягнути виродженого режиму, доречно продовжити чинність структури підвісного маятника, аж поки зображувальна точка не суміститься з точкою C. Далі, чинності повинна набути структура опертого маятника, що рухається у виродженому режимі аж до остаточної мети; в бажаному стані система повинна набути структури підвісного маятника.



85 **Почерговий рух зображувальної точки вздовж фазових траєкторій двох типів.**



86 **Фазовий портрет системи зі змінною структурою.**



87 **Фазові траєкторії системи без виродженого режиму.**

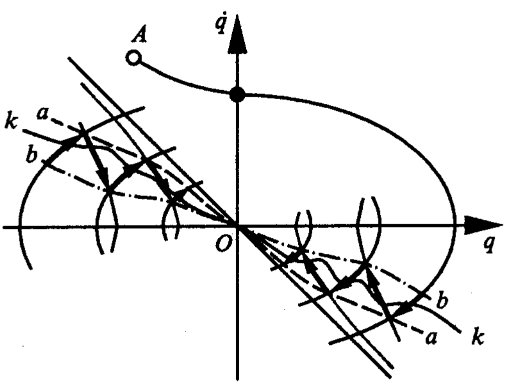
Зміна структури системи здійснюється на координатній восі $\dot{q}$ і на прямій вироджених режимів. Фазовий портрет системи зі змінною структурою зображено на рис. 86.

Підкреслимо, що вироджений режим опертого (нестійкого) маятника є надзвичайно важливим елементом стійкого (!) руху системи. Якщо б вироджених режимів не було, то процес руху зображувальної точки був би вимушений почергово перемикатися на еліпси і гіперболи нескінченну кількість разів, рис. 87.

Вільне падіння рамки з маятником (див. рис. 74), яке можна розглядати як процес зміни структури маятникової системи, безумовно, потребує певного часу. Це стосується, звичайно, і перемикань в системі зі змінною структурою. Отже, те, що до уваги не беруться ні спосіб перемикання структур, ні потрібні для цього енергетичні ресурси, є в значній мірі ідеалізацією. Проте, припущення про миттєвість перемикань дає змогу суттєво спростити виклад принципу формування змінюваних структур [31].

10.8 Поняття ковзного режиму руху динамічної системи

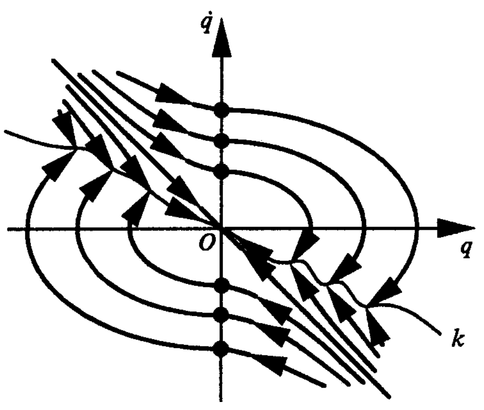
Вироджені режими, виявляється, можна створювати штучно [31]. А це означає, що до структур, які необхідно поєднати в одну систему, нема потреби залучати структуру з виродженим режимом руху до стану спокою, рівноваги.



88 **Фазові траєкторії системи з великою частотою зміни структури.**

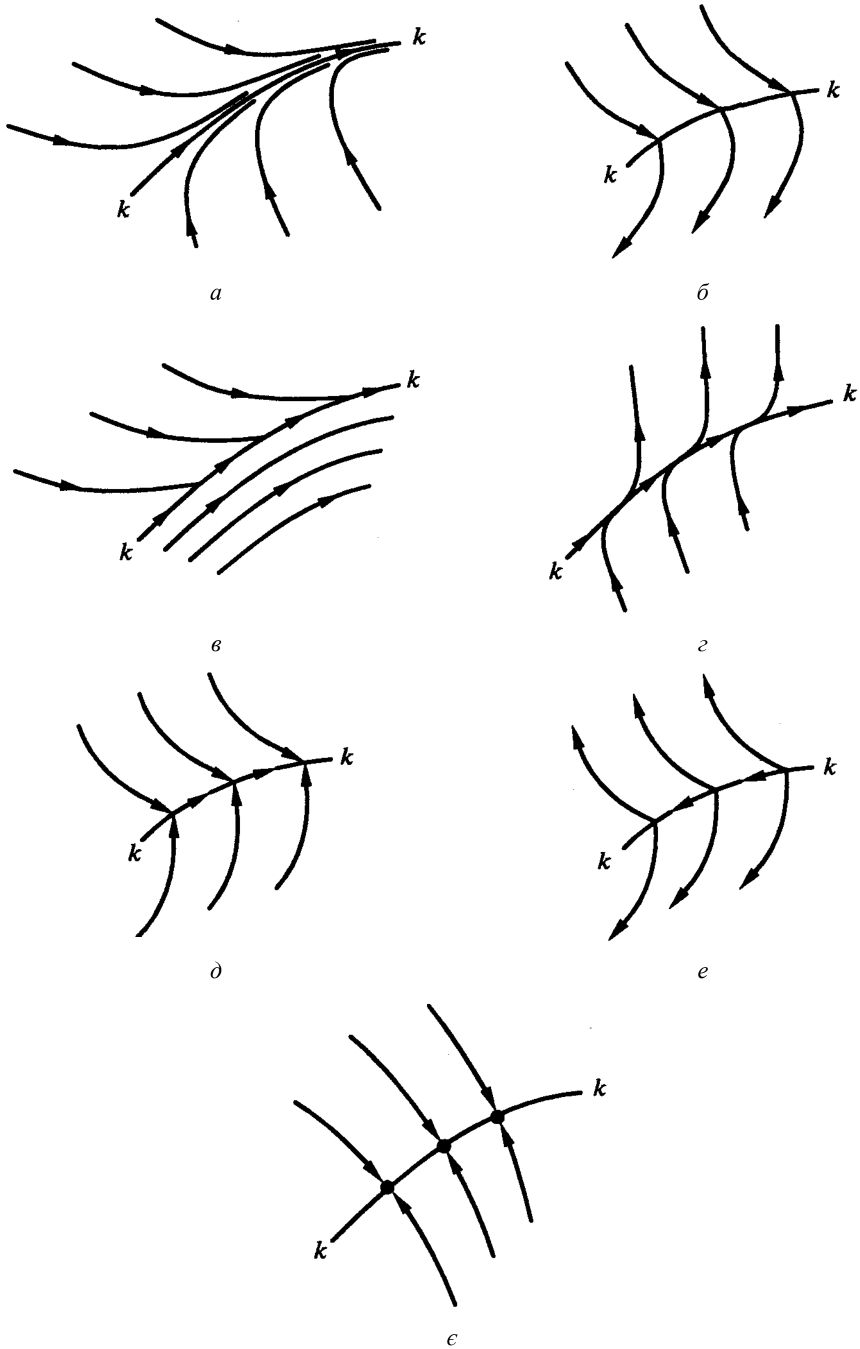
Звернемося знову до системи, що поєднує в собі структуру підвісного і структуру опертого маятників. На фазовій площині $qO\dot{q}$ задамо лінії $a-a$ і $b-b$, розташовуючи їх між прямою вироджених режимів і віссю абсцис, причому лінія $a-a$ хай лягає ближче до прямої вироджених режимів, рис. 88 (обидві ці лінії, зрозуміло, проходять через початок O системи фазових координат). Деяка зображувальна точка A раніше чи пізніше досягне лінії $a-a$. В цю мить система втілюватиме структуру підвісного маятника. З цієї миті зобов'яжемо систему втілювати структуру опертого маятника, аж доти, поки зображувальна точка не потрапить на лінію $b-b$. Тоді, знову надамо чинності структурі підвісного маятника... Здійснюючи нескінченну кількість перемикань структур на лініях $a-a$ і $b-b$, можна заставити систему прямувати до стану рівноваги, якому відповідає точка O. Частота перемикань зростатиме з наближенням зображувальної точки до початку системи координат.

Потрапивши один раз на лінію $a-a$, зображувальна точка не полишатиме області Π, обмежуваної лініями $a-a$ і $b-b$. Проведемо між $a-a$ і $b-b$ ще одну лінію — $k-k$, див. рис. 88. При наближенні $a-a$ і $b-b$ до $k-k$ частота перемикань зростатиме всюди в Π. Можна припустити, що у випадку, коли $a-a$, $b-b$ і $k-k$ збігаються, частота перемикань є нескінченно великою. Зображувальна точка, потрапивши на лінію $k-k$, вимушена рухатись вздовж неї аж до точки O, рис. 89. Цим $k-k$ подібна до прямої вироджених режимів. Лінія $k-k$ відображає **режим ковзного руху** і разом з віссю ординат ділить фазову площину на чотири частини, кожній з яких відповідає одна з двох зазначених раніше структур системи. Проте, $k-k$ є особливою межею поділу: на ній фазові траєкторії різних структур зустрічаються, а не продовжують одна одну; вона є "непроникною" в тому сенсі, що потрапивши на $k-k$ з будь-якого боку, зображувальна точка не може її перетнути, а вимушена "ковзати" на границі двох структур, не відповідаючи, по суті, жодній з них.



89 **Фазовий портрет системи з ковзним режимом руху.**

Будь-яку лінію на фазовій площині (гіперплощину у фазовому гіперпросторі) можна розглядати як особливу характеристику динамічної системи, якщо в її околі певного типу фазові траєкторії змінюються на фазові траєкторії, принципово інші за тією, чи іншою ознакою. Загальне уявлення про деякі типи особливих характеристик $k-k$ дають приклади, наведені на рис. 90. Характеристика $k-k$ може правити за асимптотичну лінію, рис. 90, *а*. Фазові траєкторії можуть просто проникати через характеристику $k-k$, не продовжуючи самих себе, а перетворюючись на деякі інші траєкторії (рис. 90, *б*), що асоціюється зі звичайними розривами (першого роду) неперервності динамічної системи. З одного боку фазові траєкторії можуть "вливатися" в лінію $k-k$, але з другого прямувати поз неї, рис. 90, *в*. Траєкторії можуть гладко проникати через характеристику $k-k$ і водночас вливатися в неї, 90, *г* (лінія $k-k$ і траєкторії по обидва боки від неї у спільних точках мають спільні дотичні). Вздовж $k-k$ може виникнути стійке ковзання (рис. 90, *д*), або ж $k-k$ може виявитися лінією нестійкого ковзання, рис. 90, *е*



90 **Приклади особливих характеристик системи.**

(в останньому випадку зображувальна точка не потрапить на $k-k$, якщо вона там не знаходилась; якщо ж ця точка перебувала на $k-k$, то в подальшому вона тривалий час може рухатись вздовж $k-k$, або легко зійти з $k-k$ у будь-який бік). Фазові траєкторії можуть виявитися зустрічними і ортогональними до $k-k$, рис. 90, *є*, що створює ефект "стояння" в точці на $k-k$.

Розглянемо систему з сухим тертям, рис. 91, яка описується рівнянням

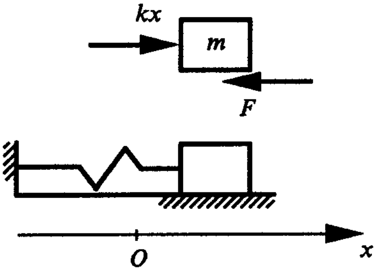
$$m\ddot{x}+F(\dot{x})+kx=0, \tag{10.177}$$

де m — маса важки; x — її переміщення; k — жорсткість пружини; $F(\dot{x})$ — сила сухого тертя,

$$F(\dot{x})=\begin{cases}-F_0 \text{ при } \dot{x}<0,\\ \ \ F_0 \text{ при } \dot{x}>0,\end{cases} \tag{10.178}$$

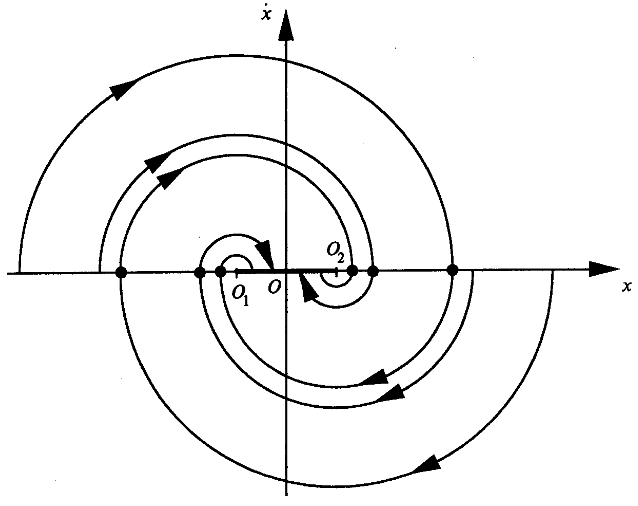
F_0 — додатне число ($F(\dot{x})$ не означене при $\dot{x}=0$). Поверхнею розриву в даному разі є пряма

$$s=\dot{x}=0.$$



91 **Схема механічної системи з тертям.**

Поведінку механічної системи (10.177) доречно простежити на площині $xO\dot{x}$, рис. 92. На осі абсцис можна виділити відрізок O_1O_2 ($|x|\le\frac{F_0}{k}$). Поза цим відрізком точки розриву є ізольованими, і тому клопотів з побудовою траєкторій руху системи не виникає: траєкторії можна припасовувати, зшивати звичайним чином. Коли ж траєкторія потрапить на відрізок $|x|\le\frac{F_0}{k}$ (а це обов'язково станеться, якими не були б початкові умови), то залишити його вона вже не зможе. На цьому відрізку, як і на всій осі x, сила $F(\dot{x})$ не означена. Конкретно доозначити її також не можливо, оскільки множина поєднує в собі точки рівноваги, для яких властива рівність $F(\dot{x})+kx=0$. Очевидно одне: функція $F(\dot{x})$ повинна бути неоднозначною і залежати від стану механічної системи.



92 **Фазовий портрет механічної системи з тертям.**

Систему (10.177) можна вважати ідеалізацією системи з в’язким тертям, рух якої при $|x| > \dfrac{F_0}{k}$ описується рівнянням (10.177), при $|x| \le \dfrac{F_0}{k}$ і $|\dot{x}| < \varepsilon$ — рівнянням

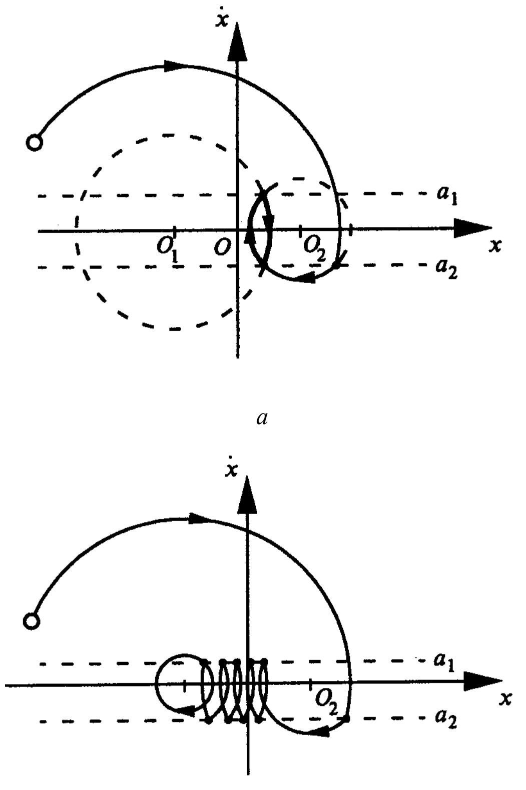
$$m\ddot{x} + \frac{F_0}{\varepsilon}\dot{x} + kx = 0\,, \tag{10.179}$$

Сила тертя в даному разі змінюється за законом

$$F(\dot{x}) = \begin{cases} -F_0 \text{ при } \dot{x} < -\varepsilon, \\ \dfrac{F_0}{\varepsilon} \text{ при } -\varepsilon \le \dot{x} \le \varepsilon, \\ F_0 \text{ при } \dot{x} > \varepsilon. \end{cases} \tag{10.180}$$

Ковзний режим руху системи за дії сили тертя (10.178) можна тлумачити як режим руху системи в околі $\left\{|x| \le \dfrac{F_0}{k}, |\dot{x}| < \varepsilon\right\}$ за дії сили (10.180), коли $\varepsilon \to 0$. Розв’язок рівняння (10.179) прямує до нуля тим повільніше, чим вужчою є зона $|\dot{x}| < \varepsilon$.

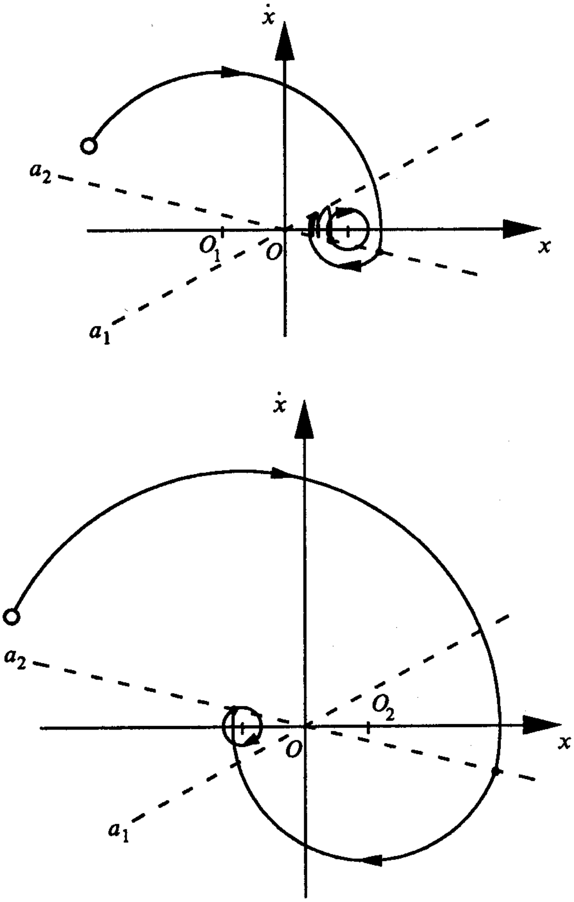
Внесемо тепер в систему гістерезисну неідеальність: вважатимемо, що $F(\dot{x})$ стрибкоподібно змінює своє значення кожен раз із запізненням — на деяких прямих a_1 і a_2, паралельних до восі x, що є лінією розриву, і розташованих по різні боки від неї, рис. 93. Де дасть змогу звичайним чином припасовувати фазові траєкторії на всій фазовій площині. Якщо прямі a_1 і a_2 розташовані на однаковій віддалі від восі x, рис. 93, *а*, то на фазовій площині в гістерезисній зоні виникне рух у формі застійної петлі; ця петля охоплює одну і ту саму множину точок на восі x. Якщо ж прямі a_1 і a_2 розташовані на різних віддалях від восі x, рис. 93, *б*, то рух зображувальної точки спочатку здійснюватиметься вздовж ніби рухомої петлі, але завершиться він застійною круговою петлею з центром в точці O_1 (або в точці O_2 за інших початкових умов). Подібні ситуації виникають і в тому випадку, коли прямі a_1 і a_2 проходять через початок O системи координат так, як це зображено на рис. 94 (випадок змінного гістерезису). Усуваючи тепер гістерезисність, тобто наближаючи прямі a_1 і a_2 до восі x, можна знову повернутися до первісної системи. При цьому доведеться визнати, що в зоні ковзання (відрізок O_1O_2 восі x) зображувальна точка стає точкою застою; є сенс вважати, що найбільш притягальними є точки застою O_1 і O_2 (проміжна точка відрізка O_1O_2 стає застійною в окремому випадку, коли прямі a_1 і a_2, прямуючи до восі x, постійно залишаються паралельними до неї і розташованими на однаковій віддалі, див. рис. 93, *а*).



а

б

93 **Фазовий портрет системи з тертям при наявності незмінного гістерезису.**



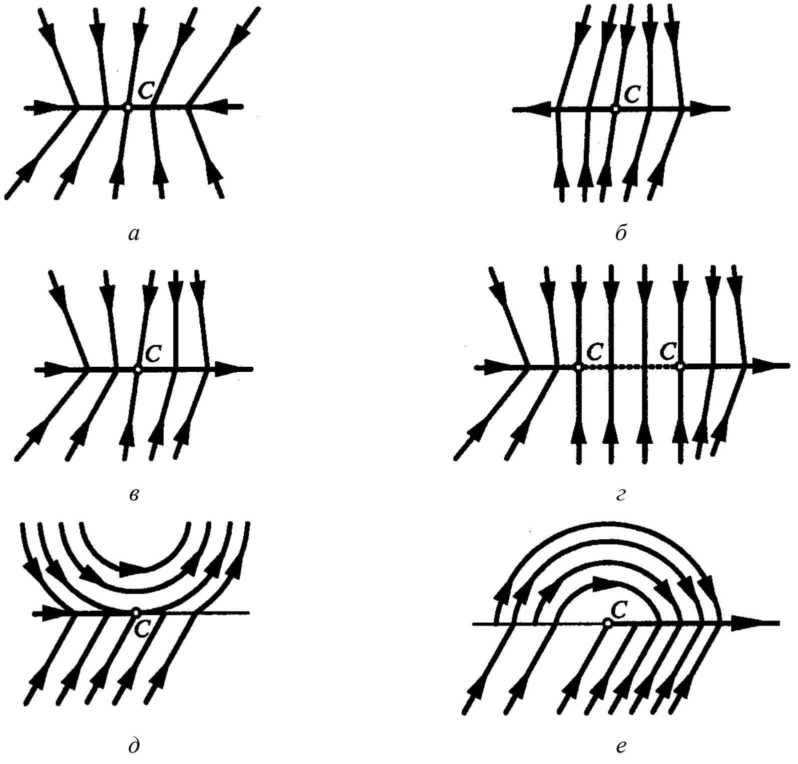
94 **Фазовий портрет системи з тертям при наявності змінного гістерезису.**

Про окремі можливі рухи системи в околі точки C, належної зоні ковзного режиму, дають уявлення діаграми, наведені на рис. 95: точка C може виявитися притягальною (рис. 95, *а*), двобічно (рис. 95, *б*) і однобічно (рис. 95, *в*) відштовхувальною; ціла низка точок, що заповнюють відрізок $C-C$ (рис. 95, *г*), можуть виявитися застійними поруч притягальною лівою точкою C та однобічно відштовхувальною правою точкою C; точка C може правити також за притягальну (рис. 95, *д*) чи відштовхувальну (рис. 95, *е*) границю зони ковзання тощо.

Динамічній системі другого порядку

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = -k_2 \operatorname{sgn} x_1 \tag{10.181}$$

(k_2 — додатна стала) не властиві ковзні режими руху, про що свідчить наведений на рис. 96 фазовий портрет. Інша такого самого типу система



95 **Приклади особливої поведінки траєкторій в околі окремої точки зони ковзання.**

$$\dot{x}_1 = x_2 - k_1 \operatorname{sgn} x_1 ,\ \dot{x}_2 = -k_2 \operatorname{sgn} x_1 \qquad (10.182)$$

(k_1, k_2 — додатні числа) має фазовий портрет, рис. 97, який можна отримати зсуваючи фазовий портрет попередньої (10.181) системи у правій півплощині догори на величину k_1, а в лівій півплощині униз на величину $-k_1$. При цьому з'явиться ковзний режим в зоні

$$\{ x_1 = 0, \quad | x_2 | \le k_1 \} . \qquad (10.183)$$

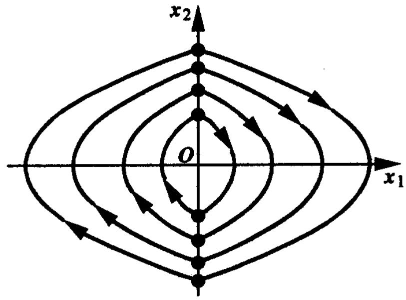
Формально систему (10.182) можна звести до одного рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + 2k_1 \delta(x)\, \dot{x} = -k_2 \operatorname{sgn} x$$

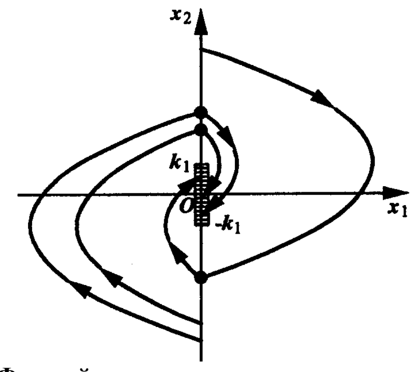
з особливостями в коефіцієнті і вільному члені.

Динамічна поведінка системи в зоні ковзання (за О. Філіпповим) може бути тільки опуклою комбінацією (зваженим середнім) з рухів ліворуч і праворуч від лінії ковзання $s = x_1 = 0$:

$$\dot{x}_1 = \gamma(x_2 + k_1) + (1-\gamma)(x_2 - k_1) ,\ \dot{x}_2 = \gamma k_2 + (1-\gamma)(-k_1) \ \ (0 \le \gamma \le 1).$$



96 **Фазовий портрет системи другого порядку, якій не властиві ковзні режими руху.**



97 **Фазовий портрет системи другого порядку з ковзним режимом руху.**

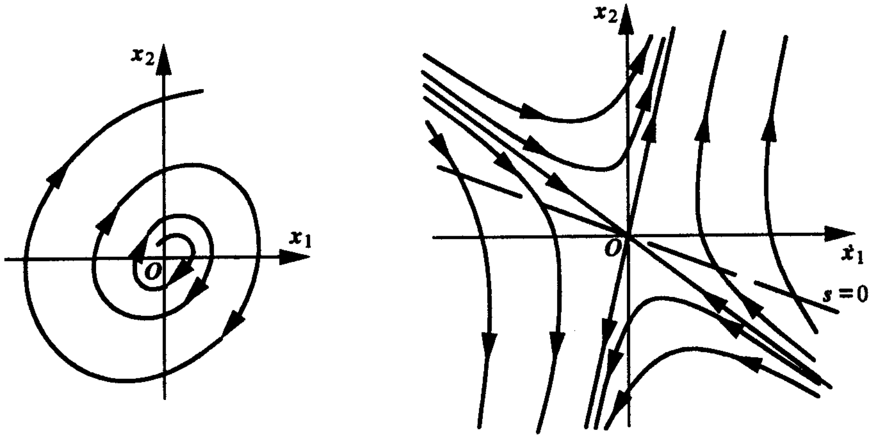
Значення γ, а отже динамічна поведінка системи визначається інваріантністю зони ковзання; з того, що $\dot{x}_1 = 0$, випливає рівність

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_2}{k_1} x_2 .$$

Отже після досягнення зони ковзання x_2 експоненційно прямує до нуля зі сталою часу $\dfrac{k_1}{k_2}$. Всі траєкторії, що починаються на координатній восі x_2, досягають зони ковзання за час, менший за $x_2^2(0)\dfrac{k_1}{k_2}$. Ковзання починатиметься з миті $t = 0$, якщо k_1 і k_2 зробити залежними від часу так, щоб дотримувалися умови

$$\frac{k_2}{k_1} \geq a(t), \; k_1 > | x_2(0) | e^{-a(t)t} ,$$

де $a(t)$ — деяка додатна функція часу.



а *б*

98 **Фазові портрети систем другого порядку з нестійкими структурами**

Хай тепер йдеться про систему

$$\dot{x}_1 = x_2 ,\ \dot{x}_2 = -a_2 x_2 - a_1 x_1 + u , \tag{10.184}$$

де x_1, x_2 — координати, a_1, a_2 — сталі параметри, $u = u(t)$ — керування, яке формується як вплив за координатою x_1:

$$u = \psi x_1$$

(ψ — коефіцієнт впливу). Якщо покласти, що ψ набуває двох сталих значень α або $-\alpha$, то система поєднуватиме в собі дві лінійні структури.

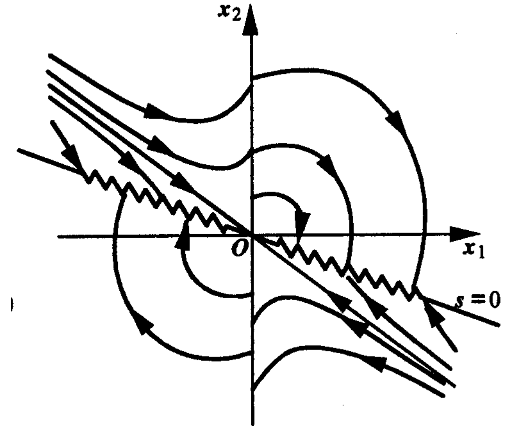
Візьмемо за a_2 від'ємне число, а α підберемо так, щоб відповідне системі (10.184) характеристичне рівняння мало дійсні корені, коли $\psi = -\alpha$, і комплексні корені, коли $\psi = \alpha$. Фазові портрети цих двох структур (рис. 98, *а* і *б*) засвідчують, що обидві вони належать до нестійких, якщо станом статичної рівноваги вважати початок координат (точка O).

Заставимо систему змінювати свою структуру на прямих

$$x_1 = 0 ,\ s = cx_1 + x_2 = 0 ,\ c = \text{const} > 0 ,$$

де коефіцієнт c підібрано так, щоб пряма $s = 0$ знаходилась між координатною віссю x_1 та асимптотою гіперболічних фазових траєкторій, відповідних структурі $\psi = -\alpha$, рис. 98, *б*. Якщо покласти

$$\psi = \begin{cases} -\alpha \text{ при } x_1 s < 0, \\ \ \ \alpha \text{ при } x_1 s > 0, \end{cases}$$



99 **Фазовий портрет системи другого порядку з поєднаними нестійкими структурами.**

то система матиме фазовий портрет, зображений на рис. 99. Фазова (зображувальна) точка завжди потраплятиме на пряму $s=0$ (фазові траєкторії двох різних структур скеровані до цієї прямої в довільному її околі). Подальший її рух здійснюватиметься тільки вздовж прямої $s=0$. Це означає, що справджується рівність

$$cx_1 + x_2 \equiv cx_1 + \dot{x}_1 = 0\,. \tag{10.185}$$

Диференціальне рівняння (10.185) можна вважати рівнянням ковзного режиму руху системи. Воно при $c>0$ завжди має стійкий розв'язок. Таким чином, поєднання нестійких структур виявилось стійким за будь-яких початкових умов.

Нехай йдеться про динамічну систему, описувану рівняннями

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,u)\,,$$

де x і f — n-вимірні вектори-стовці, u — скалярна функція, яка має розриви на поверхні $s(x)=0$ і визначається за формулою

$$u = \begin{cases} u^+(x,t) \text{ при } s(x) > 0, \\ u^-(x,t) \text{ при } s(x) < 0, \end{cases}$$

$u^+(x,t)$, $u^-(x,t)$ — деякі неперервні функції, $u^+ \neq u^-$. Ковзний режим руху динамічної системи виникає тоді, коли на поверхні $s(x)=0$ існують області ненульового виміру, де проекції векторів $f^+ = f(x,t,u^+)$ і $f^- = f(x,t,u^-)$ на нормаль до $s(x)=0$ скеровані назустріч одна одній. Аналітично умови виникнення ковзного режиму можна записати у вигляді нерівностей

$$\lim_{s\to+0} \frac{ds}{dt} < 0\,,\ \lim_{s\to-0} \frac{ds}{dt} > 0\,.$$

Розглянемо динамічну систему

$$x^{(n)}(t) = F(\boldsymbol{x};t) + b(\boldsymbol{x};t)u(t) + q(t), \qquad (10.186)$$

де $x(t)$ — скалярний досліджуваний процес, $\boldsymbol{x} = [x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}]^{\mathsf{T}}$ — вектор, що відображає стан системи, $F(\boldsymbol{x};t)$, $b(\boldsymbol{x};t)$ — в загальному випадку нелінійні неперервні за $\boldsymbol{x}$ функції, $u(t)$ — скалярне керування, $q(t)$ — збурення, яке пересічно є невідомим, але обмеженим за абсолютною величиною відомою неперервною функцією часу t. Функцію $F(\boldsymbol{x};t)$ можна вважати відомою неточно, але рівень цієї неточності $|\Delta F(\boldsymbol{x};t)|$ обмежений зверху деякою відомою неперервною за $\boldsymbol{x}$ і t функцією. Подібно, і коефіцієнт $b(\boldsymbol{x};t)$ підсилення керування вважається відомим невичерпно, частково; відомими точно є лише його знак та неперервна за $\boldsymbol{x}$ і t функція, що обмежує його зверху. Мета керування полягає в тому, щоби реальний стан $\boldsymbol{x} = [x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}]^{\mathsf{T}}$ динамічної системи відстежував деякий еталонний стан $\boldsymbol{x_e} = [x_e, \dot{x}_e, \ldots, x_e^{(n-1)}]^{\mathsf{T}}$ за наявності неточної моделі (10.186) (при невичерпно заданих функціях $F(\boldsymbol{x};t)$, $b(\boldsymbol{x};t)$) та існування невідомого збурення $q(t)$. Точність стеження за станом визначається вектором похибки

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_e} = [\, x - x_e, \dot{x} - \dot{x}_e, \ldots, \overset{(n-1)}{x} - \overset{(n-1)}{x_e} \,]^{\mathsf{T}} = [\, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ldots, \overset{(n-1)}{\tilde{x}} \,]^{\mathsf{T}}.$$

Щоб гарантувати досяжність мети за обмеженого керування $u(t)$ доречно покласти, що в початкову мить

$$\tilde{\boldsymbol{x}}\big|_{t=0} = 0. \qquad (10.187)$$

Означимо в просторі R^n станів динамічної системи рухому поверхню ковзання $s = s(t)$ як рівність

$$s(\boldsymbol{x};t) = 0,$$

що окреслюється за допомогою диференціального оператора

$$s(\boldsymbol{x};t) \equiv \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}, \qquad (10.188)$$

де λ — додатне число. Задача стеження

$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x_e}$$

при заданій початковій умові (10.187) еквівалентна задачі утримування системи на поверхні $s = s(t)$ для всіх $t > 0$. Дійсно вираз (10.188) є диференціальним оператором, якому відповідає єдиний розв'язок $\tilde{x} \equiv 0$ (розв'язок рівняння $s(t) = 0$) при заданих початкових умовах (10.187).

Достатньою умовою для того, щоб всі траєкторії динамічної системи стягувалися на поверхню ковзання (див. рис. 90, *д*), є нерівність

$$\frac{d}{dt} s^2(\boldsymbol{x};t) \le -\varepsilon\, |\, s\, |, \tag{10.189}$$

де ε — додатне число. Зокрема, для системи (10.182) за умови (10.183) нерівність (10.189) зводиться до нерівності

$$\frac{d}{dt} x_1^2 < 0\,.$$

Таким чином, синтез закону керування полягає у виборі функції похибки відстежування s відповідно до (10.188) з подальшим формуванням керування u зі зворотним зв'язком в системі (10.186) такого, щоб s^2 задовольняло (10.189) навіть при за неточної моделі і відсутності інформації про збурення. Дотримання умови (10.188) навіть за неточного дотримання початкових умов (10.187) (коли реальний стан $\boldsymbol{x}(0)$ системи в мить $t = 0$ не збігається з еталонним $\boldsymbol{x_e}(0)$) гарантує те, що поверхня $s = s(t)$ буде досягнута за скінченний час, значення якого не перевищуватиме величини $\dfrac{|\, s(\boldsymbol{x}(0);\, 0)\, |}{\varepsilon}$; до того ж, означення (10.188) забезпечує асимптотичність $\tilde{\boldsymbol{x}} \to 0$ при $t \to \infty$.

Керування з реалізацією ковзного режиму теоретично вирізняється високою структурною стійкістю до параметричної і функційної невизначеності. Проте воно має і суттєві недоліки. В першу чергу реалізація ковзного режиму потребує потужних силових чинників і супроводжується помітними вібраційними ефектами. Вібрації можуть провокувати такі високочастотні процеси, як резонанси власних форм коливань конструкції, не завбачені часові запізнення у виконавчих приводах чи не завбачені імпульсні ефекти.

11 УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ 11

11.1 Приклади узагальнених розв'язків рівнянь

Наведемо такі відомі приклади рівнянь і узагальнених функцій, що задовольняють ці рівняння:

$$x^n u = 0\,,\ n \ge 1, \qquad u = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(x)\,; \tag{11.1}$$

$$x^n u^{(m)} = 0\,,\ n > m\,, \qquad u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \theta(x)\, x^{m-1-k} + \sum_{k=m}^{n-1} c_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} d_k x^k\,; \tag{11.2}$$

$$(\sin x)\, u = 0\,, \qquad u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(x - k\pi)\,; \tag{11.3}$$

$$xu = \sin x\,, \qquad u = \mathcal{P}\frac{1}{|x|} + c\delta(x)\,; \tag{11.4}$$

$$xu' = 1, \qquad u = \ln|x| + c_0 + c_1\theta(x)\,; \tag{11.5}$$

$$xu' = \mathcal{P}\frac{1}{x}\,, \qquad u = -\mathcal{P}\frac{1}{x} + c_0 + c_1\theta(x)\,; \tag{11.6}$$

$$x^2 u' = 1, \qquad u = -\mathcal{P}\frac{1}{x} + c_0 + c_1\theta(x) + c_2\delta(x)\,, \tag{11.7}$$

тут m, n — натуральні числа, c, c_k, d_k — довільні сталі.

Підкреслимо, що система узагальнених функцій $\delta^{(\alpha)}(x)$, $|\alpha| = m$, $m = 0,1,\ldots$, лінійно незалежна в будь-якому інтервалі, що містить точку $x = 0$.

Якщо в рівнянні (11.1) $u = v^{(m)}$, то

$$v = \int\int\overset{m}{\ldots}\int \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(x)\, dx dx \overset{m}{\ldots} dx + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{m-2} + \ldots + c_1 x + c_0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\int\overset{m}{\ldots}\int \delta^{(k)}(x)\, dx dx \overset{m}{\ldots} dx + P_{m-1}[x],$$

де $P_{m-1}[x]$ — поліном степеня $m-1$. При $n > m$ останній вираз є рівноцінним за суттю виразові (11.2). При $n \le m$

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\int \overset{m-k}{\ldots} \int \delta(x)\, dx dx \overset{m-k}{\ldots}\, dx + P_{m-1}[x] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \, \frac{x^{m-k-1}}{(m-k-1)!} \theta(x) + P_{m-1}[x] .$$

Приклад (11.4) особливо яскраво засвідчує принципову відмінність між тим, як перетворюються (розв'язуються) рівняння у класі узагальнених функцій, і тим, як здійснюються еквівалентні перетворення у класі класичних функцій.

Рівняння (11.4) разом з (11.1)—(11.3) складають групу недиференціальних рівнянь (хоча, їх умовно можна зачислити і до диференціальних рівнянь нульового порядку). Натомість, рівняння (11.5)—(11.7) належать до лінійних диференціальних (першого порядку).

Кажуть, що **узагальнена функція** $f(x)$ є **первісною** m **-го порядку узагальненої функції** $\phi(x)$, якщо

$$f^{(m)}(x) = \phi(x) .$$

Зокрема, якщо $m = 1$, то $f(x)$ — первісна першого порядку або просто **первісна узагальненої функції** $\phi(x)$.

Вірним є твердження: кожна узагальнена функція $\phi(x)$ має первісну $f(x)$ довільного порядку m; дві первісні $f_1(x)$, $f_2(x)$ однакового порядку m відрізняються одна від одної на поліном степеня $m-1$ (зокрема, кожна узагальнена функція $\phi(x)$ має первісну $f(x)$ (першого порядку); дві первісні $f_1(x)$, $f_2(x)$ відрізняються одна від одної на сталу).

Наприклад, первісною функції $\phi(x) = \theta(x)$ є функція $f(x) = x\theta(x)$, а в загальному випадку — функція $f(x) = x\theta(x) + c$. Розв'язування рівняння

$$y''(x) = \delta(x)$$

також зводиться до пошуку первісної:

$$y(x) = x\,\theta(x) + c_0 + c_1 x ,$$

c_0, c_1 — сталі.

Наведемо ще кілька прикладів, що відповідають задекларованій тут темі.

Використовуючи наведені в 2.3 формули інтегрування недиференційовних в класичному розумінні одиничної функції (Гевісайда) і δ -функції (Дірака)

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(s)\theta(s-x)\, ds = \theta(\alpha - x)\int_{\alpha}^{x} p(s)\, ds + \theta(\beta - x)\int_{x}^{\beta} p(s)\, ds ,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(s)\delta(s-x)ds = p(x)(\theta(x-\alpha)-\theta(x-\beta)),$$

($p(x)$ є неперервною), розв'яжемо диференціальні рівняння першого порядку

$$y'+y=\theta(x) \text{ та } y'+y=\delta(x)$$

(які, до речі, еквівалентні рівнянням $z'=\theta(x)e^{x}$ та $z'=\delta(x)\,e^{x}$, оскільки зводяться до них заміною $y=z\,e^{-x}$).

Відповідно до (9.27) за розв'язок рівняння $y'+y=\theta(x)$ править функція

$$y=\frac{1}{\overset{1}{\Delta}}\left(y_0\overset{1}{\Delta}_1(x-x_0)+\frac{1}{p_0}\int_{x_0}^{x}\overset{1}{\Delta}_1(x-s)\theta(s)ds\right)=$$

$$=y_0e^{-(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{-(x-s)}\theta(s)ds=y_0e^{-(x-x_0)}+\theta(x_0)\int_{x_0}^{0}e^{-(x-s)}ds+\theta(x)\int_{0}^{x}e^{-(x-s)}ds=$$

$$=y_0e^{-(x-x_0)}+e^{-x}\Big(\theta(x_0)\big(1-e^{x_0}\big)+\theta(x)\big(e^{x}-1\big)\Big),\quad y_0=y(x_0).$$

Зауважимо, що при $x=0$ вона має злам і тому є недиференційовною в класичному розумінні.

Розв'язком рівняння $y'+y=\delta(x)$ є функція

$$y=\frac{1}{\overset{1}{\Delta}}\left(y_0\overset{1}{\Delta}_1(x-x_0)+\frac{1}{p_0}\int_{x_0}^{x}\overset{1}{\Delta}_1(x-s)\delta(s)ds\right)=$$

$$=y_0e^{-(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{-(x-s)}\delta(s)ds=y_0e^{-(x-x_0)}+e^{-x}(\theta(-x_0)-\theta(-x))=$$

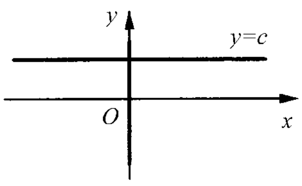
$$=y_0e^{-(x-x_0)}+e^{-x}(\theta(x)-\theta(x_0)),\quad y_0=y(x_0).$$

Зауважимо, що при $x=0$ вона змінюється стрибком, а отже не належить до диференційовних в класичному розумінні.

Підкреслимо, що далеко не завжди рівнянням можна надавати якихось однозначних тлумачень без певних змістовних застережень. Звернемось до наочного прикладу.

Рівнянню $y'=0$ відповідає фундаментальна функція $K(x,\gamma)=1$, а тому його розв'язком є функція $y=c$ (c — довільна стала). Рівняння ж $xy'=0$, якому також відповідає фундаментальна функція $K(x,\gamma)=1$, натомість, задовольняють дві функції — $y_1=1$ і $y_2=\theta(x)$, лінійно незалежні у будь-якому проміжку

($a < x < b$, $a < 0$, $b > 0$), що містить в собі точку $x = 0$ ($\theta(\cdot)$ — одинична функція Гевісайда). А отже за загальний розв'язок цього рівняння можна визнати функцію $y = c_1 + c_2\,\theta(x)$, де c_1, c_2 — довільні сталі. Але рівність $xy' = 0$ можна було б прочитати і цілком по-іншому, а власне, — як рівняння $x(y - c) = 0$, що вирізняє точки, належні двом ортогональним прямим — $x = 0$ та $y = c$ (рис. 100). Подібне читання напрошується і для лівого рівняння (11.3). Правда, в такому разі зневажується статус незалежності змінної x, яка повинна перебігати свої значення рівномірно, не надаючи жодному з них якоїсь переваги (подібно до фізичного часу в класичному тлумаченні).



100 **Приклад накладання розв'язків.**

Класична точкова лінійна задача Коші першого порядку формулюється таким чином: знайти функцію $y(x)$, яка б задовольняла рівняння

$$y' + p(x)y = q(x)\,,\ x \ge 0 \tag{11.8}$$

і умови

$$y = 0 \forall x \le 0\,,\ y(+0) = y_0\,, \tag{11.9}$$

де $q(x)$ — задана локально інтегровна функція. Цю задачу можна сформулювати глобально таким чином. Нехай $\tilde{q}(x)$, $\tilde{y}(x)$ — продовжені нулем на всю вісь R^1 функції $q(x)$, $y(x)$. Тоді розв'язати задачу Коші (11.8), (11.9) — це те саме, що знайти неперервну всюди на R^1 і майже всюди там диференційовну функцію $\tilde{y}(x)$, яка б майже всюди на R^1 задовольняла рівняння

$$\tilde{y}' + p(x)\tilde{y} = \tilde{q}(x)\,,\ x \in \mathrm{R}^1\,.$$

Зі згаданою класичною задачею Коші можна зіставити задачу: за заданими узагальненою функцією $q(x)$ і числом y_0 знайти узагальнену функцію, яка б задовольняла рівняння

$$y' + p(x)y = q(x) + y_0\delta(x)\,. \tag{11.10}$$

Якщо $q(x)$ — звичайна функція, то розв'язок (в сенсі узагальнених функцій) задачі (11.10) дає розв'язок класичної задачі (11.8) за початкової умови $y(+0) = y_0$.

Візьмемося, наприклад, за задачу

$$y' + y = \theta(x-1),\ y(x) = 0 \forall x \le 0,\ y(+0) = 2.$$

Продовжимо $y(x)$ нулем в область $x \le 0$ і укладемо рівняння (в даному випадку $\tilde{q} = q = \theta(x-1)$)

$$\tilde{y}' + \tilde{y} = \theta(x-1) + 2\delta(x).$$

Розв'язок останнього рівняння

$$\tilde{y} = \theta(x-1)\left(1 - e^{1-x}\right) + \theta(x)e^{-x},$$

задовольняє і первісну задачу.

Розглянемо ще рівняння (другого порядку)

$$xy'' - y' = x^2, \tag{11.11.1}$$

$$xy'' - y' = 1, \tag{11.11.2}$$

$$xy'' - y' = \delta(x), \tag{11.11.3}$$

які відрізняються одне від одного правими частинами $q(x) = x^2, 1, \delta(x)$. Фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння $xy'' - y' = 0$ складають функції $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$; $W[y_1, y_2] = 2x \ne 0$ при $x \ne 0$; можна переконатися, що і функція $y_3 = x^2\theta(x)$ задовольняє це рівняння.

Побудуємо розв'язок неоднорідного рівняння $xy'' - y' = q(x)$, вдаючись до методу варіації довільних сталих (методу Лагранжа, див. 4.6). Отже, нехай

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Далі, покладаючи

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \tag{11.12}$$

знайдемо

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + 0,$$

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'.$$

Два останні вирази підставимо в рівняння $xy'' - y' = q(x)$ і отримаємо рівність

$$2x^2C_2'(x) = q(x),$$

Ця рівність разом з (11.12) складає систему

$$C_1'(x) + x^2C_2'(x) = 0,$$

$$2x^2C_2'(x) = q(x),$$

з якої можна віднайти функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$. Зокрема, $C_1'(x) = -\dfrac{q(x)}{2}$ і

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int q(x)\,dx + c_0 \ \ (c_0 = \text{const}). \qquad (11.13)$$

Розв'язки рівняння (11.13) при $q = x^2$, $q = 1$ та $q = \delta(x)$ мають вигляд відповідно

$$C_1 = -\frac{1}{6}x^3 + c_0\,,\ C_1 = -\frac{1}{2}x + c_0 \ \text{ та } \ C_1 = -\frac{1}{2}\theta(x) + c_0\,.$$

Функція $C_2(x)$ для рівнянь (11.11.1), (11.11.2), (11.11.3) визначається як узагальнена функція, що задовольняє рівняння відповідно

$$2x^2C_2'(x) = x^2\,, \qquad (11.14.1)$$

$$2x^2C_2'(x) = 1\,, \qquad (11.14.2)$$

$$2x^2C_2'(x) = \delta(x)\,. \qquad (11.14.3)$$

Відомо, що узагальнена функція $f(x)$ (однієї змінної з компактним носієм) задовольняє рівняння

$$P[x]f(x) = 0\,,$$

в якому $P[x]$ — многочлен, тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i\delta(x - x_i) + \sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_r} c_{rj}\delta^{(j-1)}(x - x_r^*)\,,$$

де x_i, $i = \overline{1,m}$ — прості корені многочлена $P[x]$; x_r^*, $r = \overline{1,k}$ — корені кратності m_r; c_i, c_{rj} — сталі; $\delta(\cdot)$ — узагальнена функція Дірака. Отже рівність (див. (11.14.1))

$$x^2\left(2C_2'(x) - 1\right) = 0$$

($P[x] = x^2$ є многочленом, що має двократний корінь $x^* = 0$; $f(x) = 2C_2'(x) - 1$) справджується тоді, коли

$$C_2'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + c_1\delta(x) + c_4\delta'(x)\right),$$

звідки

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\left(x + c_1\theta(x) + c_4\delta(x)\right) + c_2\,,$$

де $\theta(x)$ — функція Гевісайда; c_1, c_2, c_3 — сталі. Отже узагальнений розв'язок рівняння (11.11.1) має вигляд

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x) + x^2C_2(x) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + c_0 + x^2\left(\frac{1}{2}c_1\theta(x) + c_2\right). \qquad (11.15.1)$$

Він означений всюди в $(-\infty,\infty)$. Натомість, класичний розв'язок означений в окремих інтервалах $(-\infty,0)$ та $(0,\infty)$, де він збігається з узагальненим.

Запишемо рівняння (11.14.2) у вигляді

$$x^2\left(2C_2'(x) - \frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

звідки знайдемо

$$C_2 = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}c_1\theta(x) + c_2 + \frac{1}{2}c_3\delta(x),$$

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x) + x^2C_2(x) =$$

$$= -x + c_0 + x^2\left(\frac{1}{2}c_1\theta(x) + c_2\right). \qquad (11.15.2)$$

На підставі формул

$$\left(x\delta(x)\right)' = \delta(x) + x\delta'(x) = 0, \ \left(x\delta(x)\right)'' = 2\delta'(x) + x\delta''(x) = 0$$

можна з'ясувати, що

$$\delta(x) = -x\delta'(x) = \frac{1}{2}x^2\delta''(x).$$

Отже є можливість записати рівність (11.14.3) у вигляді

$$x^2\left(2C_2'(x) - \delta''(x)\right) = 0.$$

Звідси

$$C_2 = \frac{1}{4}\delta'(x) + \frac{1}{2}c_1\theta(x) + c_2 + \frac{1}{2}c_3\delta(x),$$

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x) + x^2C_2(x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\theta(x) + c_0 + x^2\left(\frac{1}{2}c_1\theta(x) + c_2\right). \qquad (11.15.3)$$

Розв'яжемо тепер рівняння

$$xy'' + 2y' = \delta(x). \qquad (11.16)$$

Фундаментальну систему розв'язків відповідного йому однорідного рівняння

$xy'' + 2y' = 0$ складають функції

$$y_1 = 1 \text{ і } y_2 = -\frac{1}{x}\,;\ W[y_1, y_2] = \frac{1}{x^2} \neq 0\,.$$

Легко перевірити, що і функція $\delta(x)$ задовольняє рівняння $xy'' + 2y' = 0$.

Вираз (11.12) в даному разі має вигляд

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = C_1' - \frac{1}{x} C_2' = 0\,. \qquad (11.17)$$

Укладаючи вирази

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 - \frac{1}{x} C_2\,,\ \ y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + 0 = \frac{1}{x^2} C_2\,,$$

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' = -2\frac{1}{x^3} C_2 + \frac{1}{x^2} C_2'\,,$$

на підставі первісного диференціального рівняння отримаємо співвідношення

$$\frac{1}{x} C_2' = \delta(x)\,. \qquad (11.18)$$

Поєднуючи (11.17) і (11.18), знайдемо $C_1 = \theta(x) + c_0$.

Дозволимо собі вважати, що $\dfrac{0}{x} = c\delta(x)$ (“дивуючись”, можливо, тим, що

$$\frac{C}{x} = \frac{0}{x} + \frac{c}{x} = c\delta(x) + \frac{C}{x}\,,\ \ C, c = \text{const}\ ).$$

В такому разі рівність (11.18) можна прочитати як рівноцінну виразу $C_2 = -c_2 = \text{const}$.

Отже розв’язок рівняння (11.16) є підстави записати у вигляді

$$y = \theta(x) + c_0 + c_1\delta(x) + c_2\frac{1}{x}\,. \qquad (11.19)$$

Якщо (11.16) читати як рівняння

$$(xy)'' = \delta(x)\,,$$

то доведеться визнати, що

$$xy = x\theta(x) + c_0 x + c_2\,.$$

Отриманий щойно результат можна підтвердити, ділячи праву і ліву частину останньої рівності на x таким чином:

$$y = \theta(x) + c_0 + c_1\frac{0}{x} + c_2\frac{1}{x} = \theta(x) + c_0 + c_1\delta(x) + c_2\frac{1}{x}$$

(нуль з лівої частини перенесено у праву частину).

Вважатимемо вірним (в сенсі узагальнених функцій) перетворення

$$xy'' - y' = x^2\left(\frac{y'}{x}\right)'.$$

В такому разі рівнянню (11.11.1) можна поставити у відповідність функцію-розв'язок

$$\frac{y'}{x} = x + c_0 + c_1\theta(x) + c_2'\delta(x).$$

З (11.15.1) випливає та сама функція-розв'язок —

$$\frac{y'}{x} = x + c_1\theta(x) + 2c_2 + \frac{0}{x} \quad \left(\frac{0}{x} = c_2'\delta(x)\right).$$

Отже, зазначене перетворення лівої частини диференціального рівняння можна вважати умовно еквівалентним.

11.2 Одинична та імпульсні функції у правій частині рівняння. Зміст нетривіального розв'язку однорідного рівняння

Нехай $y = Y(x)$ є розв'язком однорідного рівняння

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

і при цьому задовольняє умови

$$Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n-2)}(0) = 0,\ Y^{(n-1)}(0) = 1.$$

В такому разі функція $y = \tilde{Y}(x) = \theta(x)Y(x)$ задовольняє неоднорідне рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = \delta(x) = x\delta'(x) = \ldots = x^m\delta^{(m)}(x) = \ldots$$

Цей висновок випливає з того, що

$$\tilde{Y}'(x) = \theta(x)Y'(x),\ \ldots,\ \tilde{Y}^{(n-1)}(x) = \theta(x)Y^{(n-1)}(x),\ \tilde{Y}^{(n)}(x) = \delta(x) + \theta(x)Y^{(n)}(x),$$

і через це

$$L\left[\tilde{Y}\right] \equiv \theta(x)L\left[Y\right] + \delta(x) = \delta(x).$$

У випадку диференціального оператора $L[\cdot]$ зі сталими коефіцієнтами $p_0 = 1$, $p_i = \text{const}$ ($i = \overline{1,n}$) функцію $y = \tilde{Y}(x) = \theta(x)Y(x)$ інколи називають його елементарним (в сенсі, зрозуміло, узагальнених функцій) розв'язком. Зокрема, елементарним розв'язком оператора $L = \dfrac{d}{dx} - \mu$ (μ — довільне комплексне число) слід вважати функцію $\theta(x)e^{\mu x}$, оператора $L = \dfrac{d^2}{dx^2} + \omega^2$ (ω — дійсне число) — функцію $\theta(x)\dfrac{\sin\omega x}{\omega}$, оператора $L = \left(\dfrac{d}{dx} - \mu\right)^m$ — функцію $\theta(x)e^{\mu x}\dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}$.

Нехай тепер

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = \delta(x-\alpha) \qquad (11.20)$$

— лінійне рівняння, в якому $p_0(x),\ \ p_1(x),\ \ \ldots, p_n(x)$, $p(x) \in \mathrm{C}^1$ в наперед окресленому інтервалі $I = (a, b)$ ($a < x < b$), і до того ж $p_0(x) \neq 0$ в $I = (a, b)$.

Звернемось до функції $\Phi(x,\alpha) = \dfrac{K(x,\alpha)\theta(x-\alpha)}{p_0(\alpha)}$ (див. (8.56)). Враховуючи, що

$$\theta'(z) = \delta(z); \quad a(x)\delta(x-\alpha) = a(\alpha)\delta(x-\alpha),\ a(x) \in \mathrm{C}^0,$$

$$a(x)\,\delta(x-\alpha) \equiv 0, \text{ якщо } a(\alpha) = 0;$$

$$K'(x,\alpha)\big|_{x=\alpha} = K''(x,\alpha)\big|_{x=\alpha} = \ldots = K^{(n-1)}(x,\alpha)\Big|_{x=\alpha} = 0, \quad K^{(n)}(x,\alpha)\Big|_{x=\alpha} = 1,$$

знайдемо похідні від функції $\Phi(x,\alpha) = \dfrac{K(x,\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(x-\alpha)$:

$$\Phi'(x,\alpha) = \frac{1}{p_0(\alpha)}\frac{\partial K(x,\alpha)}{\partial x}\theta(x-\alpha), \quad \Phi''(x,\alpha) = \frac{1}{p_0(\alpha)}\frac{\partial^2 K(x,\alpha)}{\partial x^2}\theta(x-\alpha), \ldots,$$

$$\Phi^{(n-1)}(x,\alpha) = \frac{1}{p_0(\alpha)}\frac{\partial^{n-1} K(x,\alpha)}{\partial x^{n-1}}\theta(x-\alpha),$$

$$\Phi^{(n)}(x,\alpha) = \frac{1}{p_0(\alpha)}\left(\frac{\partial^n K(x,\alpha)}{\partial x^n}\theta(x-\alpha) + \delta(x-\alpha)\right).$$

Звідси

$$L[\Phi(x,\alpha)] = L\left[\frac{K(x,\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(x-\alpha)\right] =$$

$$= \frac{\theta(x-\alpha)}{p_0(\alpha)} L[K(x,\alpha)] + \delta(x-\alpha) = \delta(x-\alpha).$$

Таким чином, функція $\Phi(x,\alpha) = \dfrac{K(x,\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(x-\alpha)$ задовольняє рівняння (11.20). Її називають **функцією впливу** чи фундаментальним розв’язком рівняння (11.20).

Розглянемо тепер низку рівнянь

$$L[y] = \delta^{(j)}(x-\alpha) \quad (j = 1, 2, \ldots), \qquad (11.21)$$

які відрізняються від (11.20) тим, що в їх правих частинах замість дельта-функції фігурують послідовні похідні від неї за аргументом *x*. Розв’язками цих рівнянь є частинні за параметром α похідні від функції впливу

$$\Phi(x,\alpha)=\frac{K(x,\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(x-\alpha),$$

тобто

$$\tilde{y}_j=(-1)^j\frac{\partial^j\Phi}{\partial\alpha^j}=(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\alpha^j}\left(\frac{K(x,\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(x-\alpha)\right)\quad(j=1,\ 2,\ \ldots).\qquad(11.22)$$

Справедливість останнього твердження випливає з ланцюжка перетворень

$$L\left[\tilde{y}_j\right]=(-1)^j L\left[\frac{\partial^j\Phi(x,\alpha)}{\partial\alpha^j}\right]=(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\alpha^j}L[\Phi(x,\alpha)]=(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\alpha^j}\delta(x-\alpha)=\delta^{(j)}(x-\alpha).$$

Отже часткові (окремі) розв'язки рівнянь (11.20) та (11.21), праві частини яких — дельта-функція та її похідні, визначаються за формулою

$$\tilde{y}=\Phi(x,\alpha)=\frac{K(x,\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(x-\alpha)\qquad(11.23)$$

та (11.22). Іншими словами, рівняння (11.20) та (11.21), правими частинами яких є дельта-функція та похідні від неї за аргументом задовольняють відповідно функція впливу (11.23) та похідні від неї за параметром.

Розглянемо далі функцію

$$y=c_1K(x,\gamma)+c_2\dot{K}(x,\gamma)+\ldots+c_n\overset{(n-1)}{K}(x,\gamma)+K(x,\alpha)\frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}\int_\gamma^x\delta(s-\alpha)\,ds,\qquad(11.24)$$

яку можна подати також у вигляді

$$y=\sum_{i=1}^n c_i\overset{(i-1)}{K}(x,\gamma)+K(x,\alpha)\frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}(\theta(x-\alpha)-\theta(\gamma-\alpha)).\qquad(11.25)$$

Тут враховано, що

$$\int_\gamma^x\delta(s-\alpha)\,ds=\int_{-\infty}^x\delta(s-\alpha)\,ds-\int_{-\infty}^\gamma\delta(s-\alpha)\,ds=\theta(x-\alpha)-\theta(\gamma-\alpha),$$

де

$$\theta(x+\infty)=\theta(x-\alpha)\big|_{\alpha=-\infty}=\frac{1}{2},\quad \theta(\gamma-\alpha)=\left\{\begin{array}{ll}0, & \alpha>\gamma,\\ \frac{1}{2}, & \alpha=\gamma,\\ 1, & \alpha<\gamma\end{array}\right\}=\text{const}.$$

Легко з’ясувати, що

$$L[y]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} c_i\, L\left[\overset{(i-1)}{K}(x,\gamma)\right]+\frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}L\left[K(x,\alpha)\theta(x-\alpha)\right]+\frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(\gamma-\alpha)L\left[K(x,\alpha)\right]=$$

$$=p(\alpha)\delta(x-\alpha)\ (c_i=\mathrm{const},\ i=\overline{1,n}),\tag{11.26}$$

оскільки

$$L[K(x,\alpha)\theta(x-\alpha)]=p(\alpha)\delta(x-\alpha),\ L\left[\overset{(i-1)}{K}(x,\gamma)\right]=L\left[K(x,\alpha)\right]=0\ \ (i=\overline{2,n}).$$

Отже, з (11.26) випливає, що $L[y]=p(x)\delta(x-\alpha)$, а це означає, що функція (11.24) (чи (11.25)) є розв’язком рівняння

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=p(x)\delta(x-\alpha).\tag{11.27}$$

Зауважимо таке. Природним розв’язком однорідного рівняння $L[y]=0$ є тривіальний $y(x)\equiv 0$. Будь-який нетривіальний розв’язок, натомість, повинен бути зумовлений яким-небудь збуренням, яке у рівнянні $L[y]=0$, проте, ніде не простежується. Але легко збагнути, що нетривіальний розв’язок

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i \overset{(i-1)}{K}(x,\gamma)$$

однорідного рівняння $L[y]=0$ є окремим випадком розв’язку (11.25) рівняння (11.27) за умови $\alpha=-\infty$. Таким чином, **нетривіальний розв’язок однорідного рівняння** можна вважати **реакцією лінійного динамічного об’єкта на імпульсне збурення $p(x)\delta(x+\infty)$, зосереджене в точці $x=-\infty$.**

Розглянемо тепер функцію

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i\frac{\partial^{i-1}}{\partial\gamma^{i-1}}K(x,\gamma)+(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}\left[K(x,\alpha)\frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}\left(\theta(x-\alpha)-\varpi\right)\right],$$

$$\varpi=\begin{cases}0, & \text{якщо } \alpha>\gamma,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{якщо } \alpha=\gamma \text{ або } \alpha\to-\infty,\\ 1, & \text{якщо } -\infty<\alpha<\gamma.\end{cases}\tag{11.28}$$

Вона є розв’язком рівняння

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=p(x)\delta^{(m)}(x-\alpha).\tag{11.29}$$

Справді, для функції (11.28)

$$L[y]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\partial^{i-1}}{\partial\gamma^{i-1}}L[K(x,\gamma)]+(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}\{p(\alpha)L[\Phi(x,\alpha)]\}-$$

$$-(-1)^m\varpi\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}\left\{\frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}L[K(x,\alpha)]\right\}=$$

$$=(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}\left\{\frac{p(\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(x-\alpha)L[K(x,\alpha)]+p(\alpha)\delta(x-\alpha)\right\}=$$

$$=(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}\big(p(\alpha)\,\delta(x-\alpha)\big)=p(x)\,\delta^{(m)}(x-\alpha).$$

Окремий розв'язок (11.24) (чи (11.25)) рівняння (11.27) та окремий розв'язок (11.28) рівняння (11.29) будувались, по суті, за формулою Коші

$$y=\int_{\gamma}^{x}\frac{K(x,s)}{p_0(s)}q(s)\,ds\,,$$

в якій покладено відповідно до (11.27) $q(s)=p(s)\delta(s-\alpha)$, а відповідно до (11.29) — $q(s)=p(s)\delta^{(m)}(s-\alpha)$.

Неважко переконатися, що функція

$$y=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\overset{(i)}{K}(x,\gamma)+\theta(x-\alpha)\int_{\gamma}^{x}K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}ds$$

задовольняє рівняння

$$L[y]=q(x)\theta(x-\alpha)+\sum_{i=0}^{n-1}p_i(x)\int_{\gamma}^{\alpha}K^{(n-i-1)}(\alpha,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}ds\,. \tag{11.30}$$

Натомість, розв'язком рівняння

$$L[y]=q(x)\theta(x-\alpha) \tag{11.31}$$

є функція

$$y=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\overset{(i)}{K}(x,\gamma)+\int_{\gamma}^{x}K(x,s)\frac{q(s)}{p_0(s)}\theta(s-\alpha)ds\,.$$

Рівняння (11.30), (11.31) збігаються при $\alpha=\gamma$.

11.3 Функція впливу і нормальна система розв'язків

Нехай функція $y = y(x)$ є загальним розв'язком рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = q(x)\,, \tag{11.32}$$

($\{ p_0(x) \neq 0, p_1(x), \ldots, p_n(x) \} \in \mathrm{C}^{n-1};\ q(x) \in \mathrm{C}^0$) таким, що

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = y_{n-1}\,. \tag{11.33}$$

Протиставимо їй функцію $\tilde{y} = y(x)\theta(x - x_0)$.

Легко з'ясувати, що

$$\tilde{y}^{(r)} = y^{(r)}(x)\,\theta(x - x_0) + \sum_{i=0}^{r-1} y_i\, \delta^{(r-i-1)}(x - x_0) \qquad (r = \overline{1,\ n})\,, \tag{11.34}$$

$$L[\tilde{y}] = L[y(x)]\theta(x - x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, \delta^{(i)}(x - x_0) =$$

$$= \tilde{q}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, \delta^{(i)}(x - x_0)\,, \tag{11.35}$$

де

$$\tilde{q}(x) = L[y(x)]\theta(x - x_0) = q(x)\theta(x - x_0)\,;$$

$$a_r(x) = \sum_{i=0}^{n-r-1} y_i\, p_{n-r-i-1}(x) \ \ (r = \overline{0, n-1}),$$

або в розгорнутому вигляді

$$a_0(x) = y_0 p_{n-1}(x) + y_1 p_{n-2}(x) + \ldots + y_{n-1} p_0(x),$$

$$a_1(x) = y_0 p_{n-2}(x) + y_1 p_{n-3}(x) + \ldots + y_{n-2} p_0(x),\ \ldots,$$

$$a_{n-2}(x) = y_0 p_1(x) + y_1 p_0(x), \ \ a_{n-1}(x) = y_0 p_0(x). \tag{11.36}$$

На підставі (2.31) матимемо:

$$a_r(x)\delta^{(r)}(x - x_0) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i\, C_r^i\, a_r^{(i)}(x_0)\, \delta^{(r-i)}(x - x_0)$$

(C_r^i — біномні коефіцієнти). А тому рівняння (11.35) можна записати у вигляді

$$L[\tilde{y}] = \tilde{q}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j \delta^{(j)}(x - x_0)\,. \tag{11.37}$$

Тут (див. також (11.36))

$$A_r = \sum_{i=r}^{n-1} (-1)^{i-r} C_i^r a_i^{(i-r)}(x_0) = \sum_{i=0}^{n-r-1} (-1)^i C_{i+r}^i\, a_{i+r}^{(i)}(x_0)\,,\ r = \overline{0, n-1}\,. \tag{11.38}$$

Отже, можна стверджувати таке: якщо функція $y = y(x)$ — розв'язок рівняння $L[y] = q(x)$, то функція $\tilde{y} = y(x)\theta(x - x_0)$ — розв'язок рівняння (11.37), в якому $\tilde{q}(x) = q(x)\theta(x - x_0)$, а коефіцієнти A_r визначаються за формулами (11.38).

Отримані результати можна безпосередньо застосувати до задачі розв'язування рівняння (11.32), $\left\{p_0(x) \neq 0,\ p_i(x), i = \overline{1,n}\right\} \in \mathrm{C}^{n-1}$, $q(x) \in \mathrm{C}^0$, за умов:

$$\text{якщо } x < 0 \text{, то } y(x) = q(x) \equiv 0;$$

$$\text{якщо } x \geq x_0 \text{, то } y^{(j)}(x_0) = y_j \ \ (j \leq \overline{0, n-1}),. \tag{11.39}$$

Якщо цю задачу тлумачити як динамічну, то можна казати, що система наділена властивістю "оживати" лише, починаючи з миті x_0, і набувати в цю мить відразу ненульових початкових умов. Причому при $x > x_0$ вона повинна себе вести відповідно до рівняння (11.32).

Нехай $y(x)$ — розв'язок задачі {(11.32), (11.33)} (розв'язок рівняння (11.32) за умов $y^{(j)}(x_0) = y_j$ ($j \leq \overline{0, n-1}$). Його можна записати у вигляді

$$y = y_\circ(x, x_0) + y_*(x, x_0),$$

де $y = y_\circ(x, x_0)$ — окремий розв'язок відповідного однорідного рівняння $L[y] = 0$, який задовольняє умови $y^{(j)}(x_0) = y_j$ ($j \leq \overline{0, n-1}$;

$$y_*(x,\ x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{K(x,\ s)}{p_0(s)}\, q(s)\, ds \tag{11.40}$$

— окремий розв'язок неоднорідного рівняння $L[y] = q(x)$. Продовжмо функції $y(x)$ і $q(x)$ нулем в інтервал $x < x_0$ та позначмо ці продовження через $\tilde{y}$ і $\tilde{q}$.

Оскільки справджуються співвідношення (11.34) і (11.37), мусимо визнати, що як функція

$$\tilde{y} = \left(y_\circ(x, x_0) + y_*(x, x_0)\right)\theta(x - x_0),$$

так і функція

$$\tilde{y}_\circ = y_\circ(x, x_0)\theta(x - x_0)$$

— розв'язки рівняння (11.37). Права частина

$$q_* = \tilde{q}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j \delta^{(j)}(x - x_0)$$

цього рівняння має дві складові: $\tilde{q}(x) = q(x)\,\theta(x - x_0)$ — звичайне вмикання динамічної системи, яка знаходиться у стані спокою $y(x) \equiv 0$; $\sum\limits_{j=0}^{n-1} A_j \delta^{(j)}(x - x_0)$ — додаткове імпульсне збурення в мить $x = x_0$.

Знаємо, що інтеграл (11.40) є окремим розв'язком неоднорідного рівняння $L[y]=q(x)$ таким, що задовольняє нульові початкові умови

$$y_*(x_0,\,x_0)=y_*'(x_0,\,x_0)=\ldots=y_*^{(n-1)}(x_0,\,x_0)=0\,.$$

Через це рівняння (11.37), якому повинна задовольняти функція

$$\tilde{y}_*(x,\,x_0)=\theta(x-x_0)\,y_*(x,\,x_0)=\theta(x-x_0)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{K(x,\,s)}{p_0(s)}\,q(s)ds\,,$$

набирає вигляду

$$L[\tilde{y}]=\tilde{q}(x)\,. \tag{11.41}$$

Згадуючи (див. 11.2), що окремі розв'язки рівнянь

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=\delta^{(j)}(x-\gamma)\,,\;\; j=0,2,\ldots$$

відображає формула

$$y_{*j}=(-1)^j\overset{(j)}{\Phi}(x,\gamma)=(-1)^j\,\frac{\partial^j\Phi(x,\gamma)}{\partial^j\gamma}=(-1)^j\,\frac{\partial^j}{\partial^j\gamma}\frac{K(x,\gamma)\,\theta(x-\gamma)}{p_0(\gamma)}\,,\;\; j=0,2,\ldots,$$

доходимо висновку, що окремим розв'язком рівняння

$$L[y]=\sum_{j=0}^{n-1}A_j\delta^{(j)}(x-x_0) \tag{11.42}$$

є функція

$$\hat{y}_*=\sum_{j=0}^{n-1}A_jy_{*j}=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j A_j\frac{\partial^j\Phi(x,\gamma)}{\partial^j\gamma}\bigg|_{\gamma=x_0}=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j A_j\frac{\partial^j}{\partial^j\gamma}\frac{K(x,\gamma)\,\theta(x-\gamma)}{p_0(\gamma)}\bigg|_{\gamma=x_0}\,.$$

Спираючись на принцип суперпозиції, окремий розв'язок рівняння (11.37) можна подати як суму окремих розв'язків рівнянь (11.41) і (11.42):

$$\tilde{y}=\hat{y}_*+\tilde{y}_*=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j A_j\frac{\partial^j}{\partial^j\gamma}\frac{K(x,\gamma)\,\theta(x-\gamma)}{p_0(\gamma)}\bigg|_{\gamma=x_0}+y_*(x,x_0)\,\theta(x-x_0)=$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j A_j\frac{\partial^j}{\partial^j\gamma}\frac{K(x,\gamma)}{p_0(\gamma)}\bigg|_{\gamma=x_0}+y_*(x,x_0)\right)\theta(x-x_0)\,. \tag{11.43}$$

Отже при $x>x_0$

$$y=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j A_j\frac{\partial^j}{\partial^j\gamma}\frac{K(x,\gamma)}{p_0(\gamma)}\bigg|_{\gamma=x_0}+y_*(x,x_0)\,. \tag{11.44}$$

Нехай $\{Y_j(x,\ x_0)\}$ ($j=\overline{0,\ n-1}$) — нормальна фундаментальна система розв’язків рівняння $L[y]=0$, тобто (нагадаємо, див. (4.59, (4.60))) фундаментальна система розв’язків, яка задовольняє умови

$$Y_1(x_0)=1,\ Y_1'(x_0)=0,\ Y_1'(x_0)=0,\ldots,\ Y_1^{(n-2)}(x_0)=0,\ Y_1^{(n-1)}(x_0)=0\ ;$$

$$Y_2(x_0)=0, Y_2'(x_0)=1,\ Y_2'(x_0)=0,\ldots,\ Y_2^{(n-2)}(x_0)=0,\ Y_2^{(n-1)}(x_0)=0\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_n(x_0)=0,\ Y_n'(x_0)=0,\ Y_n''(x_0)=0,\ldots,\ Y_n^{(n-2)}(x_0)=0,\ Y_n^{(n-1)}(x_0)=1\,.$$

Формулу (11.43) можна, маючи на увазі (11.40), записати власне через нормальну фундаментальну систему розв’язків (подібно до (4.60)):

$$\tilde{y}=\left(\sum_{j=0}^{n-1}Y_{j+1}(x,x_0)y_j+y_*(x,x_0)\right)\theta(x-x_0)\ ; \tag{11.45}$$

при цьому для $x>x_0$

$$y=\sum_{j=0}^{n-1}Y_{j+1}(x,\ x_0)\ y_j+y_*(x,\ x_0)\,. \tag{11.46}$$

Оскільки (11.43) і (11.45) повинні збігатись, то порівнюючи (11.44) і (11.46), можна, серед іншого, віднайти взаємозв’язок між фундаментальною функцією і нормальною системою розв’язків. Нагадаємо, такий взаємозв’язок відображає формула (8.58)

$$Y_i=\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\,\frac{\partial^{\,j}}{\partial x_0{}^j}\left(\frac{p_{n-i-j}(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)\right),\ i=\overline{1,n}\,,$$

знайдена раніше іншим методом. Зокрема, для рівнянь порядків $n=1,2,3,4$ матимемо:

$$n=1\ —\ Y_1=\dot{K}(x,\ x_0)=K\ ; \tag{11.47}$$

$$n=2\ —\ Y_1=\frac{p_{10}(x_0)}{p_{00}(x_0)}K(x,\ x_0)-\dot{K}(x,\ x_0)=\frac{p_{10}}{p_{00}}K-\dot{K}\,,$$

$$Y_2=K(x,\ x_0)=K\ ; \tag{11.48}$$

$$n=3\ —\ Y_1=\frac{p_2(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)-\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{p_1(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)\right)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}K(x,x_0)=\left(-\left(\frac{p_{10}}{p_{00}}\right)'+\frac{p_{20}}{p_{00}}\right)K-\frac{p_{10}}{p_{00}}\dot{K}+\ddot{K},$$

$$Y_2=\frac{p_1(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)-\frac{\partial}{\partial x_0}K(x,x_0)=\frac{p_{10}}{p_{00}}K-\dot{K}\ \text{ (див. 8.8),}$$

$$Y_3=K(x,\,x_0)=K; \tag{11.49}$$

$$n=4\ \text{—}\ Y_1=\frac{p_3(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)-\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{p_2(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)\right)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\left(\frac{p_1(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)\right)-\frac{\partial^3}{\partial x_0^3}K(x,x_0)=$$

$$=\left(\left(\frac{p_{10}}{p_{00}}\right)''-\left(\frac{p_{20}}{p_{00}}\right)'+\frac{p_{30}}{p_{00}}\right)K-$$

$$-\left(2\frac{p_{10}'}{p_{00}}-\frac{p_{20}}{p_{00}}\right)\dot{K}+\frac{p_{10}}{p_{00}}\ddot{K}-\dddot{K},$$

$$Y_2=\frac{p_2(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)-\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{p_1(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)\right)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}K(x,x_0)=\left(-\left(\frac{p_{10}}{p_{10}}\right)'+\frac{p_{20}}{p_{00}}\right)K-\frac{p_{10}}{p_{00}}\dot{K}+\ddot{K},$$

$$Y_3=\frac{p_1(x_0)}{p_0(x_0)}K(x,x_0)-\frac{\partial}{\partial x_0}K(x,x_0)=\frac{p_{10}}{p_{00}}K-\dot{K},$$

$$Y_4=K(x,x_0)=K. \tag{11.50}$$

Тут $p_{r0}=p_r(x_0)$.

Формули (11.47) — (11.50), що відображають нормальні фундаментальні системи розв’язків рівнянь відповідно першого, другого, третього та четвертого порядків, побудовані з залученням функції $K(x,x_0)$. При побудові нормальної фундаментальної системи розв’язків рівняння порядку n виникає необхідність диференціювати $n-1$ раз фундаментальну функцію $K(x,x_0)$, $n-2$ разів коефіцієнти $p_0(x)$ і $p_1(x)$, …, $n-r-1$ разів коефіцієнт $p_r(x)$, …, один раз коефіцієнт $p_{n-2}(x)$.

11.4 Узагальнені розв'язки однорідного рівняння

В загальному випадку, якщо носій деякої узагальненої функції $g(x)$, утворений низкою точок x_i, $i=\overline{1,m}$, то ця функція має вигляд

$$g(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}a_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i)\,,$$

де a_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$) — сталі. На підставі (2.31)

$$p(x)\,g^{(r)}(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}a_{ij}\,p(x)\delta^{(j+r)}(x-x_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}a_{ij}\sum_{\nu=0}^{j+r}(-1)^{j+r+\nu}C_{j+r}^{\nu}\,p^{(j+r-\nu)}(x_i)\,\delta^{(\nu)}(x-x_i)\,,\ \nu\in\mathrm{N}\,.$$

Якщо взяти до уваги ще й рівність

$$\delta^{(\nu)}(x)=(-1)^{N-\nu}\frac{\nu!}{N!}x^{N-\nu}\delta^{(N)}(x)\ \ (\nu,N\in\mathrm{N}\,,\ N>\nu\,),\tag{11.51}$$

то матимемо:

$$p(x)\,g^{(r)}(x)=\delta^{(N)}(x)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}a_{ij}\sum_{\nu=0}^{j+r}(-1)^{j+r+N}\frac{\nu!}{N!}C_{j+r}^{\nu}\,p^{(j+r-\nu)}(x_i)\,x^{N-\nu}\,.$$

Тут вважається, що $N=n+\mu$, $\mu=\max\{m_i\}_{i=\overline{1,m}}$. Ці формули можуть слугувати для якнайзагальнішого зображення узагальнених функцій з точковими носіями при дослідженні цих функцій на можливість задовольняти лінійні диференціальні рівняння довільного n-го порядку.

З другого боку, суму узагальнених функцій з точковими носіями завжди можна згорнути в одну такого самого типу узагальнену функцію, вдаючись до формули (11.51). Для цього треба потурбуватися, щоб деяка довільну кількість разів диференційовна функція $\lambda(x)$ при заданому i задовольняла умови

$$\lambda^{(m_i-j)}(x_i)=\frac{a_{ij}}{C_{m_i}^{m_i-j}}\,,\ \ j=\overline{0,m_i}\,,$$

і записати $g_i(x)=\sum_{j=0}^{m_i}a_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i)$ у вигляді

$$g_i(x)=\lambda(x)\delta^{(m_i)}(x-x_i)\,.$$

Якщо домогтися, щоб функція $\lambda(x)$ задовольняла зазначені умови при кожному $i=\overline{1,m}$, то вірним буде запис $g(x)=\lambda(x)\sum_{i=1}^{m}\delta^{(m_i)}(x-x_i)$. Побудувати таку функцію $\lambda(x)$ можна безліч способами; в нагоді міг би стати, наприклад, інтерполяційний поліном Ерміта (див. 3.8). Зрештою, не за рахунок загальності можна записати

$$g(x)=\lambda(x)\sum_{i=1}^{M}\delta^{(\mu)}(x-x_i),\ M=m\mu,$$

якщо покласти $a_{ij}=0$ при $j=\overline{m_i,\mu}$.

Розглянемо задачу: необхідно з’ясувати, чи може узагальнена функція

$$y=a_0\delta(x)+a_1\delta'(x)+a_2\delta''(x)+a_3\delta'''(x), \tag{11.52}$$

a_i — сталі, задовольняти однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$L_2[y]\equiv p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0, \tag{11.53}$$

а якщо може, то за яких умов?

Підставляючи (11.52) в (11.53) і враховуючи (2.31), матимемо:

$$\pi_0\,\delta^{V}(x)+\pi_1\,\delta^{IV}(x)+\pi_2\delta'''(x)+\pi_3\delta''(x)+\pi_4\delta'(x)+\pi_5\delta(x)=0,$$

де

$$\pi_0=p_{00}a_3C_5^5,\ \pi_1=(p_{00}a_2+p_{10}a_3)C_4^4-p'_{00}a_3C_5^4,$$

$$\pi_2=(p_{00}a_1+p_{10}a_2+p_{20}a_3)C_3^3-(p'_{00}a_2+p'_{10}a_3)C_4^3+p''_{00}a_3C_5^3,$$

$$\pi_3=(p_{00}a_0+p_{10}a_1+p_{20}a_2)C_2^2-(p'_{00}a_1+p'_{10}a_2+p'_{20}a_3)C_3^2+$$

$$+(p''_{00}a_2+p''_{10}a_3)C_4^2-p'''_{00}a_3C_5^2,$$

$$\pi_4=(p_{10}a_0+p_{20}a_1)C_1^1-(p'_{00}a_0+p'_{10}a_1+p'_{20}a_2)C_2^1+(p''_{00}a_1+p''_{10}a_2+p''_{20}a_3)C_3^1-$$

$$-(p'''_{00}a_2+p'''_{10}a_3)C_4^1+p_{00}^{IV}a_3C_5^1,$$

$$\pi_5=p_{20}a_0C_0^0-(p'_{10}a_0+p'_{20}a_1)C_1^0+(p''_{00}a_0+p''_{10}a_1+p''_{20}a_2)C_2^0-$$

$$-(p'''_{00}a_1+p'''_{10}a_2+p'''_{20}a_3)C_3^0+(p_{00}^{IV}a_2+p_{10}^{IV}a_3)C_4^0-p_{00}^{V}a_3C_5^0,$$

$$p_{i0}=p_i(0)\ \ (i=0,1,2). \tag{11.54}$$

Очевидно: для того, щоб функція (11.52) задовольняла рівняння (11.53), достатньо справджуваності співвідношень $\pi_0 = \pi_1 = \ldots = \pi_5 = 0$, звідки, зокрема, випливає, що завжди $p_{00} = 0$. При цьому величини (11.54) обертаються тотожно на нуль за будь-яких значень параметрів a_0, a_1, a_2, a_3 тоді, коли

$$p_{00} = p'_{00} = p''_{00} = p'''_{00} = p_{10} = p'_{10} = p''_{10} = p_{20} = p'_{20} = 0\,,\ 3p''_{20} - 4p'''_{10} + 5p^{IV}_{00} = 0\,,$$

$$p''_{20} - p'''_{10} + p^{IV}_{00} = 0\,,\ -p'''_{20} + p^{IV}_{10} - p^{V}_{00} = 0\,. \tag{11.55}$$

Покладемо, наприклад, $p_0 = x^4$. В такому разі $p^{IV}_{00} = p''_{20} = 4!$, $p^{V}_{00} = 0$, $p'''_{10} = 2\cdot 4!$, $-p'''_{20} + p^{IV}_{10} = 0$. Далі, можна взяти $p_1 = 8(x+1)\sin^3 x$ ($p^{IV}_{10} = 192$). Тоді $p_2(x)$ доведеться підібрати так, щоб дотримувалися рівності $p_{20} = p'_{20} = 0$, $p''_{20} = 4!$, $p'''_{20} = 192$. Приймаючи $p_2 = 4x^2(8x+3)$, матимемо один з прикладів

$$x^4 y'' + 8(x+1)\sin^3 x\, y' + 4x^2(8x+3)y = 0\,, \tag{11.56}$$

диференціального рівняння (11.53), розв'язком якого є узагальнена функція (11.52).

Спробуємо розв'язати поставлену задачу дещо інакше.

На підставі співвідношення

$$x^{\nu}\delta^{(\nu+k)}(x) = (-1)^n \frac{(\nu+k)!}{k!}\delta^{(k)}(x)\,,$$

покладаючи $\nu + k = N \geq n + m$ (n — порядок диференціального рівняння, m — порядок найвищої похідної від дельта-функції у виразі (11.52)), матимемо

$$(-1)^{N-k}\frac{k!}{N!}x^{N-k}\delta^{(N)}(x) = \delta^{(k)}(x)\,.$$

Якщо, наприклад, $N = 5$, то результатові підстановки (11.52) в (11.53) можна надати вигляду

$$\Big[p_0(x)\left(-2!\cdot a_0x^3 + 3!\cdot a_1x^2 - 4!\cdot a_2x + 5!\cdot a_3\right) +$$
$$+ p_1(x)\,x\left(1!\cdot a_0x^3 - 2!\cdot a_1x^2 + 3!\cdot a_2x - 4!\cdot a_3\right) +$$
$$+ p_2(x)\,x^2\left(-0!\cdot a_0x^3 + 1!\cdot a_1x^2 - 2!\cdot a_2x + 3!\cdot a_3\right)\Big]\frac{\delta^{V}(x)}{5!} = p(x)\frac{\delta^{V}(x)}{5!} = 0\,. \tag{11.57}$$

Очевидно, що (див. 2.3)

$$p(x)\delta^{(m)}(x) = \frac{p(x)}{x^m}\left(x^m\,\delta^{(m)}(x)\right) = (-1)^m m!\frac{p(x)}{x^m}\delta(x) = (-1)^m m!\left(\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{x^m}\right)\delta(x)\,.$$

Звідси (як і з (2.31)) випливає, що якщо

$$\lim_{x\to 0} p(x) = \lim_{x\to 0} p'(x) = \ldots = \lim_{x\to 0} p^{(m)}(x) = 0\,,$$

то $p(x)\delta^{(m)}(x)=0$. Отже в даному випадку

$$\tilde{\pi}_0 = 120a_3 p_{00} = 0\,,\ \tilde{\pi}_1 = 24(-a_2 p_{00} + 5a_3 p'_{00} - a_3 p_{10}) = 0\,,$$

$$\tilde{\pi}_2 = 12(a_1 p_{00} - 4a_2 p'_{00} + 10a_3 p''_{00} + a_2 p_{10} - 4a_3 p'_{10} + a_3 p_{20}) = 0\,,$$

$$\tilde{\pi}_3 = 12(-a_0 p_{00} + 3a_1 p'_{00} - 6a_2 p''_{00} + 10a_3 p'''_{00} -$$

$$-a_1 p_{10} + 3a_2 p'_{10} - 6a_3 p''_{10} - a_2 p_{20} + 3a_3 p'_{20}) = 0\,,$$

$$\tilde{\pi}_4 = 24(-2a_0 p'_{00} + 3a_1 p''_{00} - 4a_2 p'''_{00} + 5a_3 p^{IV}_{00} +$$

$$+a_0 p_{10} - 2a_1 p'_{10} + 3a_2 p''_{10} - 4a_3 p'''_{10} +$$

$$+a_1 p_{20} - 2a_2 p'_{20} + 3a_3 p''_{20}) = 0\,,$$

$$\tilde{\pi}_5 = 120(-a_0 p''_{00} + a_1 p'''_{00} - a_2 p^{IV}_{00} + a_3 p^{V}_{00} +$$

$$+a_0 p'_{10} - a_1 p''_{10} + a_2 p'''_{10} - a_3 p^{IV}_{10} -$$

$$-a_0 p_{20} + a_1 p'_{20} - a_2 p''_{20} + a_3 p'''_{20} = 0\,. \tag{11.58}$$

Коефіцієнти рівняння (11.56), зрозуміло, задовольняють останні співвідношення.

Для дотримання умови (11.57) достатньо задовольнити умову

$$p \equiv p_0(x)(-2a_0x^3 + 6a_1x^2 - 24a_2x + 120a_3) + p_1(x)\,x\,(a_0x^3 - 2a_1x^2 + 6a_2x - 24a_3) +$$

$$+ p_2(x)\,x^2(-a_0x^3 + a_1x^2 - 2a_2x + 6a_3) = x^{\sigma}\phi(x)\,,\ \sigma \ge 6 \in \mathrm{N}_0\,,$$

(оскільки завжди $x^{N+\kappa}\delta^{(N)}(x)=0$, $\kappa = 1, 2, \ldots$) де $\phi(x)$ — така (за багатьма ознаками довільна) звичайна функція, що $|\phi(x)| < \infty$; зрештою, можна покласти $\sigma > 5$, розуміючи під σ дійсне число. Очевидно, що цей результат є окремим випадком попередніх.

Таким чином, на поставлені в задачі запитання можна дати ствердну відповідь: узагальнена функція (11.52) може бути розв'язком рівняння (11.53) за умови рівності нулю величин (11.54) (чи (11.58)). При цьому, якщо (11.52) задовольняє (11.53) за будь-яких a_0, a_1, a_2, a_3, то можна говорити, що за умов (11.55) функції $\delta(x)$, $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, $\delta'''(x)$ складають систему лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння другого порядку. Далі, якщо $p_{00} = p_0(0) \ne 0$, то $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, тобто при $p_0(0) \ne 0$ рівняння (11.53) губить можливість містити серед своїх розв'язків δ-функцію та її похідні.

Наведений приклад засвідчує, що узагальнені розв’язки однорідного рівняння зумовлені нулями коефіцієнта $p_0(x)$ при найвищій похідній. Проте, наявність нулів коефіцієнта $p_0(x)$ є лише **необхідною**, але не достатньою **умовою існування узагальнених розв’язків** (відмінних від звичайних), бо й інші коефіцієнти диференціального рівняння повинні також задовольняти певні умови. Наприклад (див. 11.1), рівняння

$$x^\nu y^{(n)} = 0$$

має таку систему $n+\nu$ лінійно незалежних розв’язків:

$$\text{при } n \ge \nu \text{ — } y_1 = x^{n-1},\ y_1 = x^{n-2},\ \ldots,\ y_{n-1} = x,\ y_n = 1,$$

$$y_{n+1} = x^{n-1}\theta(x),\ y_{n+1} = x^{n-2}\theta(x),\ \ldots,\ y_{n+\nu} = x^{n-\nu}\theta(x);$$

$$\text{при } n \le \nu \text{ — } y_1 = x^{n-1},\ y_1 = x^{n-2},\ \ldots,\ y_{n-1} = x,\ y_n = 1,$$

$$y_{n+1} = (n-1)!\delta^{(-n)}(x) = x^{n-1}\theta(x),\ y_{n+1} = (n-2)!\delta^{(-n+1)} = x^{n-2}\theta(x),\ \ldots,\ y_{2n} = \theta(x),$$

$$y_{2n+1} = \delta(x),\ y_{2n+1} = \delta'(x),\ \ldots,\ y_{n+\nu} = \delta^{(\nu-n-1)}(x).$$

Натомість, рівняння

$$2x^3 y' + y = 0,$$

класичним розв’язком якого функція $y = ce^{1/x^2}$, не має ненульового розв’язку у вигляді суто узагальненої функції, тобто функції, що не збігається зі звичайною (на відміну, наприклад, від рівняння $xy'' + 2y' = 0$, яке задовольняє функція $\delta(x)$). Зокрема, покладемо

$$y = \lambda(x)\delta^{(m)}(x)$$

і складемо рівність

$$2x^3 y' + y = 2x^3\Big(\lambda(x)\delta^{(m)}(x)\Big)' + \lambda(x)\delta^{(m)}(x) =$$

$$= \Big(2x^3\lambda'(x) + \lambda(x)\Big)\delta^{(m)} + 2x^3\lambda(x)\delta^{(m+1)}(x) =$$

$$= \Big(2x^3\lambda'(x) + \lambda(x)\Big)\delta^{(m)} - 2(m+1)x^2\lambda(x)\delta^{(m)}(x) =$$

$$= \Big(2x^3\lambda'(x) + \Big(1 - 2(m+1)x^2\Big)\lambda(x)\Big)\delta^{(m)}(x) = 0.$$

Ця рівність справджуватиметься, якщо

$$\lambda(0) = 0,\ \lambda'(0) = 0,\ \lambda''(0) = 0,\ \lambda^{(r)}(0) + 12C_r^3\left(1 - \frac{m+1}{r-2}\right)\lambda^{(r-2)}(0) = 0\ \ (r = \overline{3, m}),$$

тобто, якщо

$$\lambda(0)=\lambda'(0)=\lambda''(0)=\ldots=\lambda^{(m)}(0)=0\,.$$

А це означає, що функція $y=\lambda(x)\,\delta^{(m)}(x)$ тотожно збігається з нулем.

В загальному випадку, покладаючи

$$y=\lambda(x)\,\delta^{(m)}(x-\alpha)\,, \tag{11.59}$$

матимемо:

$$L[\lambda(x)\,\delta^{(m)}(x-\alpha)]\equiv$$

$$\equiv C_n^0 p_0(x)\lambda(x)\,\delta^{(m+n)}(x-\alpha)+(C_n^1 p_0(x)\lambda'(x)+C_{n-1}^0 p_1(x)\lambda(x))\,\delta^{(m+n-1)}(x-\alpha)+$$

$$+(C_n^2 p_0(x)\lambda''(x)+C_{n-1}^1 p_1(x)\lambda'(x)+C_{n-2}^0 p_2(x)\lambda(x))\,\delta^{(m+n-2)}(x-\alpha)+\ldots+$$

$$+(C_n^{n-2} p_0(x)\lambda^{(n-2)}(x)+C_{n-1}^{n-3} p_1(x)\lambda^{(n-3)}(x)+\ldots+C_2^0 p_{n-2}(x)\lambda(x))\,\delta^{(m+2)}(x-\alpha)+$$

$$+(C_n^{n-1} p_0(x)\lambda^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{n-2} p_1(x)\lambda^{(n-2)}(x)+\ldots+C_1^0 p_{n-1}(x)\lambda(x))\,\delta^{(m+1)}(x-\alpha)+$$

$$+L[\lambda(x)]\delta^{(m)}(x-\alpha)=\left(\sum_{i=0}^{n}\Lambda_i(x)(x-\alpha)^i\right)\delta^{(m+n)}(x-\alpha)\,,$$

де

$$\Lambda_0=C_n^0 p_0(x)\lambda(x)\,,$$

$$\Lambda_1=-\left(C_n^1 p_0(x)\lambda'(x)+C_{n-1}^0 p_1(x)\lambda(x)\right)\frac{(n+m-1)!}{(n+m)!}\,,$$

$$\Lambda_2=\left(C_n^2 p_0(x)\lambda''(x)+C_{n-1}^1 p_1(x)\lambda'(x)+C_{n-2}^0 p_2(x)\lambda(x)\right)\frac{(n+m-2)!}{(n+m)!}\,,\ \ldots,$$

$$\Lambda_{n-2}=(-1)^{n-2}\Big(C_n^{n-2} p_0(x)\lambda^{(n-2)}(x)+C_{n-1}^{n-3} p_1(x)\lambda^{(n-3)}(x)\Big)+\ldots+$$

$$+C_2^0 p_{n-2}(x)\lambda(x)\Big)\frac{(m+2)!}{(n+m)!}\,,$$

$$\Lambda_{n-1}=(-1)^{n-1}\Big(C_n^{n-1} p_0(x)\lambda^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{n-2} p_1(x)\lambda^{(n-2)}(x)+\ldots+$$

$$+C_1^0 p_{n-1}(x)\lambda(x)\Big)\frac{(m+1)!}{(n+m)!}\,,$$

$$\Lambda_n=(-1)^n L[\lambda(x)]\,\frac{m!}{(n+m)!}\,.$$

Рівність

$$L[\lambda(x)\delta^{(m)}(x-\alpha)]=0$$

справджується, коли

$$\frac{\partial^j}{\partial^j x}\sum_{i=0}^{n}\Lambda_i(x)(x-\alpha)^i\Big|_{x=\alpha}=0\,,\quad j=\overline{0,m+n}\,. \tag{11.60}$$

Оскільки

$$\frac{\partial^j}{\partial^j x}\Lambda_i(x)(x-\alpha)^i\Big|_{x=\alpha}=C_j^i i!\Lambda_i^{(j-i)}(\alpha)\ \text{при}\ i\le j\,,$$

$$\frac{\partial^j}{\partial^j x}\Lambda_i(x)(x-\alpha)^i\Big|_{x=\alpha}=0\ \text{при}\ i>j\,,$$

то співвідношення (11.60) можна записати у вигляді

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{j}C_j^i i!\frac{\partial^{j-i}\Lambda_i(\alpha)}{\partial^{j-i}\alpha}=\sum_{i=0}^{j}C_j^i i!\Lambda_i^{(j-i)}(\alpha)=0\,,\quad j=\overline{0,m+n}\,.$$

Поряд з (11.59) розглянемо функцію

$$y=f(x)\theta(x-\alpha)\,. \tag{11.61}$$

Для неї

$$L[f(x)\theta(x-\alpha)]\equiv$$

$$\equiv C_n^0 p_0(x)f(x)\delta^{(n-1)}(x-\alpha)+\left(C_n^1 p_0(x)f'(x)+C_{n-1}^0 p_1(x)f(x)\right)\delta^{(n-2)}(x-\alpha)+$$

$$+\left(C_n^2 p_0(x)f''(x)+C_{n-1}^1 p_1(x)f'(x)+C_{n-2}^0 p_2(x)f(x)\right)\delta^{(n-3)}(x-\alpha)+\ldots+$$

$$+\left(C_n^{n-1}p_0(x)f^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{n-2}p_1(x)f^{(n-2)}(x)+C_{n-2}^{n-3}p_2(x)f^{(n-3)}(x)+\ldots+\right.$$

$$\left.+C_2^1 p_{n-2}(x)f'(x)+C_1^0 p_{n-1}(x)f(x)\right)\delta(x-\alpha)+L[f(x)]\theta(x-\alpha)=$$

$$=\left(C_n^0 p_0(x)f(x)-\left(C_n^1 p_0(x)f'(x)+C_{n-1}^0 p_1(x)f(x)\right)\frac{(n-2)!}{(n-1)!}(x-\alpha)+\right.$$

$$+\left(C_n^2 p_0(x)f''(x)+C_{n-1}^1 p_1(x)f'(x)+C_{n-2}^0 p_2(x)f(x)\right)\frac{(n-3)!}{(n-1)!}(x-\alpha)^2+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\left(C_n^{n-1}p_0(x)f^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{n-2}p_1(x)f^{(n-2)}(x)+C_{n-2}^{n-3}p_2(x)f^{(n-3)}(x)+\ldots+\right.$$

$$\left.\left.+C_2^1 p_{n-2}(x)f'(x)+C_1^0 p_{n-1}(x)f(x)\right)\frac{0!}{(n-1)!}(x-\alpha)^{n-1}\right)\delta^{(n-1)}(x-\alpha)+$$

$$+L[f(x)]\theta(x-\alpha)\,.$$

Доречно наголосити на такому відомому твердженні. Нехай $g(x)$ — локально інтегровна функція, а α_{ij} $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m})$ — сталі. Тоді рівність

$$g(x)+\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i)=0$$

супроводжується співвідношеннями

$$g(x)=0,\ \alpha_{ij}=0\ (i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}).$$

При $x>\alpha$ рівність

$$L[f(x)\theta(x-\alpha)]=0$$

справджуватиметься, якщо $L[f(x)]=0$. У випадку $\theta(0)=\frac{1}{2}\neq 0$, для дотримання цієї ж рівності при $x=\alpha$ слід вимагати дотримання умов

$$\left.\frac{\partial^{\nu}F(x,\alpha)}{\partial x^{\nu}}\right|_{x=\alpha}=\left.F^{(\nu)}(x,\alpha)\right|_{x=\alpha}=0,\ \nu=\overline{0,n-1}, \tag{11.62}$$

де

$$F(x,\alpha)=$$

$$=(n-1)!C_n^0p_0(x)f(x)-(n-2)!(C_n^1p_0(x)f'(x)+C_{n-1}^0p_1(x)f(x))(x-\alpha)+$$

$$+(n-3)!(C_n^2p_0(x)f''(x)+C_{n-1}^1p_1(x)f'(x)+C_{n-2}^0p_2(x)f(x))(x-\alpha)^2+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}0!(C_n^{n-1}p_0(x)f^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{n-2}p_1(x)f^{(n-2)}(x)+C_{n-2}^{n-3}p_2(x)f^{(n-3)}(x)+\ldots+$$

$$+C_2^1p_{n-2}(x)f'(x)+C_1^0p_{n-1}(x)f(x))(x-\alpha)^{n-1}.$$

Таким чином, знову можна стверджувати, що для існування розв'язку (11.61) однорідного рівняння $L[y]=0$ необхідно, принаймні, щоб справджувалася умова $p_0(\alpha)=0$. Але і функція $f(x)$ повинна задовольняти те саме однорідне рівняння $L[y]=0$ при $x\geq\alpha$.

За функцію $f(x)$ може правити кожен з n лінійно незалежних розв'язків рівняння $L[y]=0$. Звернемося, наприклад, до розв'язків Y_1 і Y_n, що належать нормальній системі і, отже, задовольняють умови (4.58), див. 4.7,

$$Y_1(x_0)=1,\ Y_1'(x_0)=0,\ Y_1'(x_0)=0,\ldots,\ Y_1^{(n-2)}(x_0)=0,\ Y_1^{(n-1)}(x_0)=0;$$

$$Y_n(x_0)=0,\ Y_n'(x_0)=0,\ Y_n''(x_0)=0,\ldots,\ Y_n^{(n-2)}(x_0)=0,\ Y_n^{(n-1)}(x_0)=1.$$

Запишемо вирази (11.62) у вигляді

$$F^{(\nu)}(x,\alpha)\Big|_{x=\alpha} =$$

$$= 0!(n-1)!C_\nu^0 C_n^0 (p_0(\alpha)\, f(\alpha))^{(\nu)} -$$

$$-1!(n-2)!C_\nu^1 (C_n^1 p_0(\alpha)\, f'(\alpha) + C_{n-1}^0 p_1(\alpha)\, f(\alpha))^{(\nu-1)} +$$

$$+2!(n-3)!C_\nu^2 (C_n^2 p_0(\alpha)\, f''(\alpha) + C_{n-1}^1 p_1(\alpha)\, f'(\alpha) + C_{n-2}^0 p_2(\alpha)\, f(\alpha))^{(\nu-2)} + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\nu!(n-\nu-1)!C_\nu^\nu (C_n^\nu p_0(\alpha)\, f^{(\nu)}(\alpha) + C_{n-1}^{\nu-1} p_1(\alpha)\, f^{(\nu-1)}(\alpha) +$$

$$+C_{n-2}^{\nu-2} p_2(\alpha)\, f^{(\nu-2)}(\alpha) + \ldots + C_{n-\nu+1}^1 p_{\nu-1}(\alpha)\, f'(\alpha) + C_{n-\nu}^0 p_\nu(\alpha)\, f(\alpha)) = 0,$$

$$\nu = \overline{0, n-1}.$$

Далі, покладемо $x_0 = \alpha$, $f = Y_1$ і на підставі останніх рівностей отримаємо:

$$p_0(\alpha) = 0,\ (n-1)p_0'(\alpha) - p_1(\alpha) = 0,$$

$$(n-1)(n-2)p_0''(\alpha) - 2(n-2)p_1'(\alpha) + 2p_2(\alpha) = 0,\ \ldots,$$

$$0!(n-1)!C_{n-1}^0 p_0^{(n-1)}(\alpha) - 1!(n-2)!C_{n-1}^1 p_1^{(n-2)}(\alpha) + 2!(n-3)!C_{n-1}^2 p_2^{(n-3)}(\alpha) +$$

$$+ \ldots + (-1)^\nu (n-1)!0!C_{n-1}^{n-1} p_n(\alpha) = 0.$$

Значно цікавішим є випадок $x_0 = \alpha$, $f = Y_n$, якому відповідає лише одна умова

$$(0!(n-1)!C_{n-1}^0 C_n^0 - 1!(n-2)!C_{n-1}^1 C_n^1 + 2!(n-3)!C_{n-1}^2 C_n^2 +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!0!C_{n-1}^{n-1} C_n^{n-1})\, p_0(\alpha) = 0$$

або

$$(C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1})\, p_0(\alpha) = (-1)^{n-1} p_0(\alpha) = 0,$$

яка зводиться до рівності

$$p_0(x)\Big|_{x=\alpha} = p_0(\alpha) = 0.$$

Оскільки Y_n збігається з фундаментальною функцією $K(x,\alpha)$ (див. 8.8), то можна стверджувати, що коли коефіцієнт $p_0(x)$ набуває в деякій точці $x = \alpha$ нульового значення, то однорідне рівняння $L[y] = 0$ набуває некласичного окремого розв'язку

$$y = K(x,\alpha)\theta(x-\alpha).$$

Вірним є твердження: довільна нормальна однорідна система рівнянь

$$\frac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \cdots + p_{1n}(x)y_n\,,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{2n}(x)y_n\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n\,, \tag{11.63}$$

в якій $p_{ij}(x)$, $i, j = \overline{1,n}$ — належно диференційовні функції (коли йдеться про узагальнені розв’язки, пересічно вимагають, щоб $p_{ij}(x)$ були нескінченно диференційовними), має тільки класичні розв’язки (ніякі інші функції, крім звичайних, не можуть задовольняти цю систему). Переконаємося в цьому.

Запишемо систему (11.63) у матричній формі:

$$Y' = PY\,, \tag{11.64}$$

де $P[p_{ij}]$ — матриця коефіцієнтів, а складові лінійно незалежних класичних розв’язків укладемо стовпцями, будуючи тим самим так звану фундаментальну матрицю (див. 7)

$$V(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{bmatrix}, \tag{11.65}$$

визначник якої (вронскіян) відмінний від нуля. Кожен стовпець матриці є (векторним) розв’язком (векторного, матричного) рівняння (11.64), що можна відобразити матричним рівнянням

$$V' = P(x)V\,. \tag{11.66}$$

Вважатимемо тепер, що n-вимірний невідомий вектор Y формується у просторі K' узагальнених функцій і покладемо $Y = VZ$, де Z — новий невідомий вектор з простору K'. Підставимо $Y = VZ$ в (11.64), беручи до уваги (11.66):

$$V'Z + VZ' = PVZ = V'Z\,,$$

звідки

$$VZ' = 0\,.$$

Нарешті, перемножуючи останню рівність на V^{-1} (нагадаємо, що матриця V є невиродженою), отримаємо матричне рівняння $Z' = 0$, що розпадається на систему усоблених рівнянь.

В теорії узагальнених функцій доведено, що рівняння $z' = 0$ має один-єдиний загальний розв'язок $z = c = \text{const}$. Дійти такого висновку можна такими міркуваннями.

Рівняння

$$y' = 0$$

у просторі $\mathcal{D}'$ узагальнених функцій еквівалентне рівнянню

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0 \tag{11.67}$$

для будь-якої так званої основної функції φ (нагадаємо, звичайну **функцію** прийнято називати **основною**, якщо вона має похідні будь-якого порядку і є **фінітною**, тобто обертається на нуль поза скінченним проміжком). Отже, в даному випадку йдеться про функціонал y, заданий на множині $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ таких основних функцій $\phi(x)$, які можна подати як похідні від інших основних функцій:

$$\phi(x) = \varphi'(x) \in \mathcal{D}_0, \ \varphi(x) \in \mathcal{D}.$$

Але, щоб можна було робити якісь корисні висновки щодо розв'язків рівняння (11.67), треба якось поширити функціонал y з відносно вузького підпростору $\mathcal{D}_0$ на весь основний простір $\mathcal{D}$.

Виявляється, що основна функція $\varphi_0(x)$ може бути подана як похідна від деякої основної функції $\varphi_1(x)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = 0. \tag{11.68}$$

Справді [35] (див. також 1.7), якщо

$$\varphi_0(x) = \varphi_1'(x),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = \varphi_1(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0;$$

з іншого боку, за умови (11.68) можна покласти

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(s)\, ds;$$

при цьому $\varphi_1(x)$ — основна функція, оскільки разом з $\varphi_0(x)$ вона є нескінченну кількість разів диференційовна і, завдяки (11.68), фінітною).

Нехай тепер $\varphi_1(x)$ — задана основна функція така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\, dx = 1.$$

Для будь-якої основної функції $\varphi(x)$ можна написати рівність

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \varphi_0(x) ,$$

в якій $\varphi_0(x)$ задовольняє умову (11.68). Звідси випливає, що якщо задати значення шуканого функціонала y на основній функції $\varphi_1(x)$, то значення його на будь-якій функції $\varphi(x)$ визначатиметься однозначно за формулою

$$(y,\varphi) = (y,\varphi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx . \tag{11.69}$$

Нехай, наприклад,

$$(y,\varphi_1) = c_1 ,$$

c_1 — фіксоване число. В такому разі, з рівності (11.69) матимемо:

$$(y,\varphi) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} c_1\, \varphi(x)\, dx = (c_1,\varphi) .$$

А це означає, власне, те, що

$$y = c_1 = \mathrm{const} .$$

Звідси, зокрема, випливає висновок (про який вже йшлося): якщо для двох узагальнених функцій f і g справджується рівність $f' = g'$, то f і g відрізняються на сталу (іншими словами, дві різні первісні відрізняються на сталу).

Отже $Y = VZ$ — вектор, що є лінійною комбінацією векторів фундаментальної системи. Іншими словами, $Y = VZ$ — класичний розв'язок матричного рівняння (11.64).

Нагадаємо, що однорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі змінними коефіцієнтами $p_i(x) \in \mathrm{C}^{\infty}$, $i = \overline{1,n}$ ($p_0(x) \equiv 1$),

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \tag{11.70}$$

еквівалентне системі однорідних рівнянь першого порядку (11.63); рівняння (11.70) зводиться до системи (11.63) простою заміною

$$y_i(x) = y^{(n-i)}(x) ,\ i = \overline{1,n} .$$

Тому можна бути переконаним у вірності твердження: єдиним розв'язком однорідного диференціального рівняння (11.70) n-го порядку зі змінними коефіцієнтами $p_i(x) \in \mathrm{C}^{\infty}$, $i = \overline{1,n}$, і сталим коефіцієнтом $p_0(x) \equiv 1$ є класичний розв'язок.

11.5 Неоднорідні рівняння в узагальнених функціях

Зосередимо тепер увагу на найпростішому неоднорідному рівнянні

$$y' = q(x), \tag{11.71}$$

в якому q — задана узагальнена функція. Розв'язок цього рівняння, як зазначалося є первісною від функції $q(x)$; його ж можна називати інтегралом (невизначеним) від узагальненої функції.

Рівняння (11.71) еквівалентне рівнянню

$$\big((y,-\varphi') = (y',\varphi)\big) = (q,\varphi) = \left(q,\ \int_{-\infty}^{x} \varphi'(s)\,ds \right),$$

у якому φ — довільна основна функція. Як і в 11.4, йдеться про функціонал y, заданий на множині $\mathcal{D}_0 \in \mathcal{D}$ таких основних функцій, які можна подати як похідні від інших основних функцій; знову виникає питання про продовження функціонала на весь простір $\mathcal{D}$. Вводячи основну функцію φ_1 таку, що $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\,dx = 1$, довільну основну функцію φ запишемо у вигляді [35]

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx + \varphi_0(x),$$

де $\varphi_0 \in \mathcal{D}_0$. Отже кожній основній функції φ поставлено у відповідність “проекцію” φ_0 в підпросторі $\mathcal{D}_0$. При цьому, якщо послідовність функцій φ_1, φ_2, … прямує до нуля в $\mathcal{D}$, то відповідна послідовність їх проекцій φ_{10}, φ_{20}, … прямує до нуля в $\mathcal{D}$, оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\nu(x)\,dx = (1,\varphi_\nu) \to 0\,.$$

Далі, покладемо для основної функції $\varphi(x)$

$$(y_*,\varphi) = (y,\varphi_0) = \left(q, -\int_{-\infty}^{x} \varphi_0(s)\,ds \right). \tag{11.72}$$

Побудований функціонал y_* є лінійним, неперервним і вирізняє шуканий окремий узагальнений розв'язок. Загальний розв'язок рівняння (11.71) можна отримати, додаючи до окремого його розв'язку y_* (такого, що відповідає формулі (11.72)), загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $y_\circ$, яким є стала (див. 11.4):

$$y = y_* + y_\circ = y_* + c\,.$$

Отже за будь-якої правої частини $q(x)$ рівняння (11.71) має розв'язок в класі узагальнених функцій. При цьому, якщо $q(x)$ — звичайна функція, то всі розв'язки рівняння (11.71) в $\mathcal{D}'$ — класичні розв'язки.

На висловлене твердження можна безпосередньо покластися при розв'язуванні неоднорідної системи

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + Q \tag{11.73}$$

чи

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \cdots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x)\,,\\
\frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{2n}(x)y_n + q_2(x)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x)\,,
\end{aligned}$$

в якій $q_1(x)$, $q_n(x)$, …, $q_n(x)$ — узагальнені функції, а $p_{ij}(x)$ — звичайні функції, наділені всіма необхідними властивостями. Справді, вдаючись до підстановки $Y = VZ$ (див. 11.4), в якій V фундаментальна матриця розв'язків відповідної однорідної системи $\dfrac{dY}{dx} = P(x)Y$ ($q_i(x) = 0$), матимемо систему $VZ' = Q$, звідки $Z' = V^{-1}Q$. В новій системі $Z' = V^{-1}Q$ невідомі змінні уособлені, тобто цю систему складають виключно рівняння типу (11.71).

Оскільки неоднорідне рівняння

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)\,,$$

($q(x)$ — узагальнена функція, $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, — звичайні функції, наділені всіма необхідними властивостями) заміною $y_i(x) = y^{(n-i)}(x)$, $i = \overline{1,n}$, перетворюється у систему (11.73), то його розв'язування зводиться до пошуку розв'язків, знову ж таки, рівняння (11.71) і тому щодо нього справедливими є твердження: якщо $q(x)$ — узагальнена функція, то розв'язки також є узагальненими функціями; якщо ж $q(x)$ — звичайна функція, то й всі розв'язки є звичайними функціями — класичними розв'язками (наголосимо, що тут $p_0(x) \equiv 1$).

Кажуть, що узагальнена функція f дорівнює нулю при $x < 0$, якщо для будь-якої основної функції φ, що дорівнює нулю при $x \ge 0$, справджується рівність $(f, \varphi) = 0$. Таку властивість має кожна звичайна функція, яка дорівнює нулю при $x < 0$, а також δ-функція та похідні від неї. Можна стверджувати таке: якщо $f \in \mathcal{D}'$ дорівнює нулю при $x < 0$, то існує, і до того ж єдина, первісна від неї $g \in \mathcal{D}'$, що також дорівнює нулю при $x < 0$.

Єдиність первісної, що дорівнює нулю при $x<0$, випливає з того, що дві первісні відрізняються на сталу; якщо стала дорівнює нулю при $x<0$, то вона дорівнює нулю тотожно. За шукану первісну g_0 можна взяти ту, що визначається за подібною до (11.72) формулою

$$(g_0,\varphi)=(g,\varphi_0)\,,$$

у якій

$$\varphi_0(x)=\varphi(x)-\varphi_1(x)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)\,dx=1$$

і $\varphi_1(x)$ дорівнює нулю при $x>0$. Якщо при цьому $\varphi(x)=0$ при $x>0$, то й $\varphi_0(x)=0$ при $x>0$, а також первісна від $\varphi_0(x)$ дорівнює нулю при $x>0$; тому

$$(g_0,\varphi)=(g,\varphi_0)=\left(f,-\int_{-\infty}^{x}\varphi_0(s)\,ds\right)=0\,,$$

чого і чекали.

Нехай в системі першого порядку (11.73)

$$\frac{dY}{dx}=P(x)Y+Q$$

узагальнена вектор-функція Q дорівнює нулю при $x<0$. Як і раніше, заміною $Y=VZ$ (матриця V має вигляд (11.65)) систему зведемо до вигляду

$$Z'=V^{-1}Q\,,$$

де, зрозуміло, величина $V^{-1}Q$ також дорівнює нулю при $x<0$. На підставі попереднього твердження можна знайти розв'язок Z, всі координати якого дорівнюють нулю при $x<0$. А це означає, що неоднорідна система (11.73) має, і до того ж єдиний, розв'язок $Y=VZ$, який дорівнює нулю при $x<0$.

Та сама система першого порядку

$$\frac{dy_1}{dx}=p_{11}(x)y_1+p_{12}(x)y_2+\cdots+p_{1n}(x)y_n+q_1(x)\,,$$

$$\frac{dy_2}{dx}=p_{21}(x)y_1+p_{22}(x)y_2+\cdots+p_{2n}(x)y_n+q_2(x)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dx}=p_{n1}(x)y_1+p_{n2}(x)y_2+\cdots+p_{nn}(x)y_n+q_n(x)\,,$$

в якій $q_1(x)$, $q_n(x)$, …, $q_n(x)$ — звичайні функції, має розв'язок-вектор

$$Y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)\},$$

однозначно визначуваний своїм початком

$$Y(0) = \{y_1(0), y_2(0), \dots y_n(0)\}.$$

Через

$$\tilde{Y}(x) = \{\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x), \dots \tilde{y}_n(x)\}$$

позначимо узагальнену вектор-функцію, яка дорівнює нулю при $x < 0$ і звичайному розв'язкові $Y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)\}$ при $x > 0$, а через

$$\tilde{Y}^{(1)}(x) = \{\tilde{y}_1^{(1)}(x), \tilde{y}_2^{(1)}(x), \dots \tilde{y}_n^{(1)}(x)\}$$

— узагальнену функцію, яка дорівнює нулю при $x < 0$ і величині

$$Y'(x) = \{y_1'(x), y_2'(x), \dots y_n'(x)\}$$

при $x > 0$:

$$\tilde{Y} = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ Y \text{ при } x > 0, \end{cases} \qquad \tilde{Y}^{(1)} = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ Y' \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Системі (11.73) поставимо у відповідність нову систему

$$\tilde{Y}^{(1)} = P(x)Y + \tilde{Q},$$

де

$$\tilde{Q} = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ Q \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Узагальнена вектор-функція $\tilde{Y}^{(1)}$ не є, взагалі кажучи, похідною від $\tilde{Y}$; вірною є рівність

$$\tilde{Y}' = \tilde{Y}^{(1)} + Y(0)\,\delta(x).$$

Звідси для вектор-функції $\tilde{Y}$ в просторі $\mathscr{D}'$ отримаємо систему

$$\tilde{Y}' = P(x)\tilde{Y} + \tilde{Q}(x) + Y(0)\,\delta(x).$$

Її загальний розв'язок можна отримати, додаючи до наявного окремого розв'язку $\tilde{Y}$ загальний розв'язок однорідної системи

$$Z' = PZ,$$

який згідно з доведеним раніше є класичним. Розв'язок $\tilde{Y}$ вирізняється із загального за допомогою додаткової умови

$$\tilde{Y} = 0 \text{ при } x < 0.$$

Ця умова для узагальненої функції означає, що для довільної основної функції $\varphi(x)$, яка дорівнює нулю при $x \geq 0$, справджується рівність $(\tilde{Y}, \varphi) = 0$.

Отже викладене можна підсумувати так. Нехай задана система першого порядку

$$\widetilde{Y}' = P(x)\widetilde{Y} + \widetilde{Q}(x) + Y(0)\,\delta(x)\,. \tag{11.74}$$

в якій $\widetilde{Q}(x)$ — узагальнена вектор-функція така, що

$$\widetilde{Q} = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ Q \text{ при } x > 0, \end{cases}$$

$Y(0)$ — заданий вектор. Система (11.74) має узагальнений розв'язок $\widetilde{Y} \in K'$, до того ж єдиний, який обертається на нуль при $x < 0$. Якщо $\widetilde{Q}(x) = Q(x)$ — звичайна функція, то цей розв'язок $\widetilde{Y}(x)$ збігається із звичайним розв'язком $Y(x)$ системи

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + Q\,,\ x \ge 0\,,$$

таким, що обертається на $Y(0)$ при $x = 0$. Таким чином, можна писати

$$\widetilde{Y}(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0, \\ Y(x) \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Застосуємо тепер отриманий результат до диференціального рівняння n-го порядку

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)\,, \tag{11.75}$$

де $p_0(x) \ne 0$ в кожній точці числової осі (для визначеності можна покласти, наприклад, $p_0(x) > 0$). Здійснюючи заміну

$$y_i(x) = y^{(n-i)}(x)\,,\ i = \overline{1,n}\,,$$

це рівняння можна звести до системи рівнянь

$$y_1' = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}y_1 - \frac{p_2(x)}{p_0(x)}y_2 - \ldots - \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y_n + \frac{q(x)}{p_0(x)}\,,$$

$$y_2' = y_1\,,$$

$$y_3' = y_2\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n' = y_{n-1}\,,$$

якій відповідають матриці

$$P(x)=\begin{bmatrix} -\dfrac{p_1(x)}{p_0(x)} & -\dfrac{p_2(x)}{p_0(x)} & \dots & -\dfrac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)} & -\dfrac{p_n(x)}{p_0(x)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},\ Q(x)=\begin{bmatrix} \dfrac{q(x)}{p_0(x)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В узагальнених функціях ця система матиме вигляд

$$\tilde{y}_1'=-\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\tilde{y}_1-\frac{p_2(x)}{p_0(x)}\tilde{y}_2-\ldots-\frac{p_n(x)}{p_0(x)}\tilde{y}_n+\frac{\tilde{q}(x)}{p_0(x)}+y_1(0)\delta(x),$$

$$\tilde{y}_2'=\tilde{y}_1+y_2(0)\delta(x),$$

$$\tilde{y}_3'=\tilde{y}_2+y_3(0)\delta(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tilde{y}_n'=\tilde{y}_{n-1}+y_n(0)\delta(x).$$

Зрозуміло, що отримана система, в свою чергу, еквівалентна рівнянню n-го порядку. Згорнемо систему в одне рівняння: знайдемо

$$\tilde{y}_{n-1}=\tilde{y}_n'-y_n(0)\delta(x),$$

$$\tilde{y}_{n-2}=\tilde{y}_{n-1}'-y_{n-1}(0)\delta(x)=\tilde{y}_n''-y_n(0)\delta'(x)-y_{n-1}(0)\delta(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tilde{y}_1=\tilde{y}_n^{(n-1)}-y_n(0)\delta^{(n-2)}(x)-y_{n-1}(0)\delta^{(n-3)}(x)-\ldots-y_2(0)\delta(x);$$

отже

$$\tilde{y}_1'=\tilde{y}_n^{(n)}-y_n(0)\delta^{(n-1)}(x)-y_{n-1}(0)\delta^{(n-2)}(x)-\ldots-y_2(0)\delta'(x)=$$

$$=-\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\left(\tilde{y}_n^{(n-1)}-y_n(0)\delta^{(n-2)}(x)-y_{n-1}(0)\delta^{(n-3)}(x)-\ldots-y_2(0)\delta(x)\right)-$$

$$-\ldots-\frac{p_{n-2}(x)}{p_0(x)}\left(\tilde{y}_n''-y_n(0)\delta'(x)-y_{n-1}(0)\delta(x)\right)-$$

$$-\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}\left(\tilde{y}_n'-y_n(0)\delta(x)\right)-\frac{p_n(x)}{p_0(x)}\tilde{y}_n+\frac{\tilde{q}(x)}{p_0(x)}+y_1(0)\delta(x),$$

тобто

$$\sum_{i=0}^{n}p_{n-i}(x)\left(\tilde{y}^{(i)}-\sum_{j=n-i+1}^{n}y_j(0)\delta^{(j-1)}(x)\right)=\tilde{q}(x). \tag{11.76}$$

На підставі викладеного можна висловити твердження: рівняння (11.76) має розв'язок $\tilde{y} \in \mathscr{D}'$, і до того ж єдиний, який обертається на нуль при $x < 0$. Якщо $q(x)$ — звичайна функція, то цей розв'язок є звичайним розв'язком рівняння (11.75), означеним при $x \ge 0$, і таким, що при $x = 0$ задовольняє умови $y^{(n-i)}(0) = y_i(0)$, $i = \overline{1,n}$.

Розглянута в 11.1 точкова лінійна задача Коші першого порядку є окремим прикладом щойно окресленої задачі. Цією задачею можна охопити також і певні неодноточкові задачі. Наприклад, аналогом класичної граничної задачі

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x),\ y(a) = y_a,\ y(b) = y_b$$

є задача в узагальнених функціях

$$\tilde{y}'' + y_a\delta'(x-a) - y_b\delta'(x-b) + y'_a\delta(x-a) - y'_b\delta(x-b) +$$
$$+ p_1(x)((x)\tilde{y}' + y_a\delta(x-a) - y_b\delta(x-b)) + p_2(x)\tilde{y} = \tilde{q}(x),$$

в якій $\tilde{q}(x) = 0 \forall x \notin [a,b]$ і $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(x) \forall x \in [a,b]$, а сталі y'_a і y'_b визначувані з умови $\tilde{y} = 0 \forall x \notin [a,b]$.

Функцію впливу $\Phi(x)$ часто означують формально як розв'язок рівняння

$$L_n[\Phi] \equiv \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\Phi^{(n-i)} = \delta(x).$$

Зрозуміло, що $\Phi(x)$ визначається неоднозначно — з точністю до доданка, що є розв'язком відповідного однорідного рівняння $L_n[\Phi] \equiv \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\Phi^{(n-i)} = 0$. Але якщо висунути вимогу, щоб $\Phi(x)$ оберталась на нуль при $x < 0$, то її визначення стане однозначним. В цьому випадку, як випливає з (11.76), функція впливу $\Phi(x)$ відповідає звичайній функції, яка дорівнює нулю при $x < 0$ і збігається з розв'язком рівняння $L_n[\Phi] = 0$ таким, що задовольняє початкові умови

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0,\ y^{(n-1)}(0) = \frac{1}{p_0(0)}.$$

Таким чином, кожна функція впливу $\Phi(x)$, відповідна операторові

$$L_n[\Phi] \equiv \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\Phi^{(n-i)},$$

є звичайним розв'язком рівняння $L_n[\Phi] = 0$ при $x < 0$, і звичайним ж розв'язком рівняння $L_n[\Phi] = 0$ при $x > 0$, при цьому

$$y(-0) = y(+0),\ y'(-0) = y'(+0),\ \ldots,\ y^{(n-2)}(-0) = y^{(n-2)}(+0),$$
$$y^{(n-1)}(-0) = y^{(n-1)}(+0) - \frac{1}{p_0(0)}.$$

11.6 Методи Лагранжа і Ойлера

Спробуємо застосувати метод (Лагранжа) варіювання довільних сталих (див. 4.6) до розв’язування диференціального рівняння $L[y]=q(x)$, яке розглядається у просторі узагальнених функцій. Ото ж, загальний розв’язок неоднорідного рівняння $L[y]=q(x)$ шукатимемо у вигляді функції

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i \ ,$$

де $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальна система розв’язків відповідного однорідного рівняння $L[y]=0$, яка тут вважається відомою; $c_1(x),\ c_2(x), \ldots, c_n(x)$ — функції, які задовольняють рівняння

$$c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 + \ldots + c_n'(x) y_n = 0,$$

$$c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' + \ldots + c_n'(x) y_n' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1'(x) y_1^{(n-2)} + c_2'(x) y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0,$$

$$p_0(x)\left(c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}\right) = q(x) \qquad (11.77)$$

і вважаються в даному випадку належними множині узагальнених; при цьому припускається, що $p_0(x)\neq 0 \forall x\in I=[a,b]$.

Відносно функцій c_i' ($i=\overline{1,n}$) система (11.77) — алгебрична лінійна неоднорідна з головним визначником

$$D(x)=p_0(x)W(x)\equiv p_0(x)W[y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n]\neq 0\ \forall x\in I=[a,b].$$

Тому існує єдиний розв’язок

$$c_i' = \frac{A_i(x)}{D(x)} q(x) = \frac{A_i(x)}{W(x)} \frac{q(x)}{p_0(x)} \qquad (i=\overline{1,n}),$$

де $A_i(x)$ — алгебричне доповнення елемента, належного i-му стовпцю і останньому рядку вронскіяна.

Зокрема, якщо $q(x)=\delta(x)$, то

$$c_i = \frac{A_i(0)}{W(0)} \frac{\theta(x)}{p_0(0)} \qquad (i=\overline{1,n}).$$

В такому разі, окремий фундаментальний розв’язок матиме вигляд

$$y_* = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i(0)}{W(0)} \frac{\theta(x)}{p_0(0)} y_i(x) = \frac{1}{p_0(0)} \frac{\theta(x)}{W(0)} \sum_{i=1}^{n} A_i(0) y_i(x).$$

У випадку, коли коефіцієнт $p_0(x)$ може набирати нульового значення, задача побудови окремого розв'язку неоднорідного рівняння в просторі узагальнених функцій набирає ознак особливої. Із застосуванням методу (Лагранжа) варіювання сталих були розв'язані рівняння (11.11.1) — (11.11.3), (11.16), див. 11.1, яким властиво, власне, те, що $p_0(x)$ може набувати нульового значення.

Звернемося тепер до поняття фундаментальної функції. За відповідну рівнянням (11.11.1)—(11.11.3) фундаментальну править функція

$$K(x,\gamma)=\frac{\begin{vmatrix}1 & \gamma^2\\ 1 & x^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \gamma^2\\ 0 & 2\gamma\end{vmatrix}}=\frac{x^2-\gamma^2}{2\gamma},$$

а рівнянню (11.16) відповідає фундаментальна функція

$$K(x,\gamma)=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1/\gamma\\ 1 & -1/x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1/\gamma\\ 0 & 1/\gamma^2\end{vmatrix}}=\frac{-\frac{1}{x}+\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma^2}}=\gamma\left(1-\frac{\gamma}{x}\right).$$

визначені на підставі фундаментальних систем розв'язків.

Рівняння (11.11.1)—(11.11.3), (11.16) можна записати більш загально у вигляді

$$xy''+\lambda y'=q(x)\,,\ \lambda=\mathrm{const}\,, \tag{11.78}$$

а відповідну фундаментальну функцію побудувати у формі ряду (не вдаючись до фундаментальних систем розв'язків)

$$K(x,\gamma)=(x-\gamma)+\left(-\frac{\lambda}{2!\gamma}(x-\gamma)^2+\frac{\lambda(\lambda+1)}{3!\gamma^2}(x-\gamma)^3-+\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-2)}{k!\gamma^{k-1}}(x-\gamma)^k+\ldots\right)$$

При $\lambda=-1$ (див. (11.11.1)—(11.11.3))

$$K(x,\gamma)=\frac{x^2-\gamma^2}{2\gamma},\ x,\gamma\neq 0\,;$$

при $\lambda=2$ (див. (11.16))

$$K(x,\gamma)=$$

$$=(x-\gamma)-\frac{1}{\gamma}(x-\gamma)^2+\frac{1}{\gamma^2}(x-\gamma)^3-+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1}{\gamma^{k-1}}(x-\gamma)^k+\ldots\equiv\gamma\left(1-\frac{\gamma}{x}\right).$$

Окремий розв’язок рівняння (11.78) можна записати у вигляді

$$y_*(x,\gamma)=\int_\gamma^x \frac{K(x,s)}{s}q(s)\,ds\,.$$

Знайдемо окремі розв’язки $y_*(x,\gamma)$ рівнянь (11.11.1)—(11.11.3), (11.16) за щойно наведеною формулою і порівняємо їх з окремими розв’язками $y_*(x)$, які можна вирізнити в загальних розв’язках (11.15.1)—(11.15.3), (11.19), знайдених методом варіювання довільних сталих при $\alpha=0$:

λ	$L[y]$	$q(x)$	$K(x,\gamma)$	$y_*(x,\gamma)$	$y_*(x)$
-1	$xy''-y'$	x^2	$\dfrac{x^2-\gamma^2}{2\gamma}$	$\frac{1}{2}x^2(x-\gamma)-\frac{1}{6}(x^3-\gamma^3)$	$\frac{1}{3}x^3$
		1		$\frac{1}{2}(x-\gamma)\left(\frac{x}{\gamma}-1\right)$	$-x$
		$\delta(x-\alpha)$		$\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha^2}(\theta(x-\alpha)-\theta(\gamma-\alpha))$	$-\frac{1}{2}\theta(x)$
2	$xy''+2y'$	$\delta(x-\alpha)$	$\gamma\left(1-\frac{\gamma}{x}\right)$	$\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)(\theta(x-\alpha)-\theta(\gamma-\alpha))$	$\theta(x)$

Очевидно, що оскільки в розв’язках $y_*(x,\gamma)$ параметр γ може набувати довільних значень, то ці розв’язки є більш загальними (менш конкретними) за розв’язки $y_*(x)$. Легко бачити, що у випадку $\{\lambda=-1, q=x^2\}$ при $\gamma=0$, у випадку $\{\lambda=-1, q=\delta(x-\alpha)\}$ при $\alpha\to 0$, $\gamma\to\infty$ та випадку $\{\lambda=2, q=\delta(x-\alpha)\}$ при $\alpha\to 0$, $\gamma\to\infty$ розв’язки $y_*(x,\gamma)$ зводяться до розв’язків $y_*(x)$: $y_*(x,0)=y_*(x)$. Натомість, у випадку $q(x)\equiv-\lambda=-1$, в якому

$$y_*(x,\gamma)=\int_\gamma^x \frac{K(x,s)}{s}q(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_\gamma^x \frac{x^2-s^2}{s^2}\,ds=\frac{1}{2}\left(x^2\int_\gamma^x\frac{ds}{s^2}-(x-\gamma)\right)=$$

$$=\frac{(x-\gamma)^2}{2\gamma}=-x+\frac{x^2+\gamma^2}{2\gamma}\,,$$

звести $y_*(x,\gamma)$ до $y_*(x)$ у звичайному сенсі не можливо (тут Vp-інтеграли не вводяться).

Можна порівняти і загальні розв’язки, отримувані за формулою

$$y(x,\gamma)=d_0K(x,\gamma)+d_1\dot{K}(x,\gamma)+d_2\tilde{y}+y_*(x,\gamma)$$

(тут $\tilde{y}$ — узагальнений окремий розв’язок відповідного однорідного рівняння, якщо такий за даних обставин існує) з загальними ж розв’язками $y(x)$, відображеними виразами (11.15.1)—(11.15.3), (11.19), і переконатися, що загалом вони попарно збігаються:

$L[y]=q(x)$	$y(x,\gamma)$	$y(x)$, $\alpha=0$
$xy''-y'=x^2$	$d_0\dfrac{x^2-\gamma^2}{2\gamma}-d_1\dfrac{x^2+\gamma^2}{2\gamma^2}+d_2x^2\theta(x)+$ $+\dfrac{1}{2}x^2(x-\gamma)-\dfrac{1}{6}(x^3-\gamma^3)$	$\dfrac{1}{3}x^3+c_0+$ $+x^2\left(\dfrac{1}{2}c_1\theta(x)+c_2\right)$
$xy''-y'=1$	$d_0\dfrac{x^2-\gamma^2}{2\gamma}-d_1\dfrac{x^2+\gamma^2}{2\gamma^2}+d_2x^2\theta(x)+$ $+\dfrac{1}{2}(x-\gamma)\left(\dfrac{x}{\gamma}-1\right)$	$-x+c_0+$ $+x^2\left(\dfrac{1}{2}c_1\theta(x)+c_2\right)$
$xy''-y'=\delta(x-\alpha)$	$d_0\dfrac{x^2-\gamma^2}{2\gamma}-d_1\dfrac{x^2+\gamma^2}{2\gamma^2}+d_2x^2\theta(x)+$ $+\dfrac{x^2-\gamma^2}{2\gamma^2}(\theta(x-\alpha)-\theta(\gamma-\alpha))$	$-\dfrac{1}{2}\theta(x)+c_0+$ $+x^2\left(\dfrac{1}{2}c_1\theta(x)+c_2\right)$
$xy''+2y'=\delta(x-\alpha)$	$d_0\gamma\left(1-\dfrac{\gamma}{x}\right)+d_1\left(1-2\dfrac{\gamma}{x}\right)+d_2\delta(x)$ $+\left(1-\dfrac{\alpha}{x}\right)(\theta(x-\alpha)-\theta(\gamma-\alpha))$	$\theta(x)+c_0+c_1\delta(x)+c_2\dfrac{1}{x}$

Зокрема, у випадку

$$q(x)\equiv-\lambda=-1$$

$y(x,\gamma)$ збігається з $y(x)$ за цілком звичних умов

$$c_0=\frac{\gamma(1-d_0)}{2}-\frac{d_1}{2},\ c_1=2d_2,\ c_2=\frac{1}{2\gamma}\left(d_0-\frac{d_1}{\gamma}+1\right).$$

11.7 Фундаментальна функція і загальні розв’язки рівнянь з особливостями типу дельта-функції та її похідних в коефіцієнтах

Досить часто бувають випадки, коли праві частини диференціальних рівнянь зумовлені значеннями самих розв’язків цих рівнянь або похідних від них — локально чи інтегрально. Локальну зумовленість правої частини ілюструє такий приклад.

Нехай у рівнянні

$$y'(x) - y(x) = y^{(r)}(0)$$

r — невід’ємне (ціле) число. Диференціюванням дійдемо рівності

$$y''(x) - y'(x) = 0,$$

звідки

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x.$$

Отже, при $r = 0$

$$\left(y'(x) - y(x) = c_2 e^x - c_1 - c_2 e^x\right) = \left(c_1 + c_2 = y(0)\right) \text{ і } 2c_1 + c_2 = 0,$$

а при $r \geq 1$

$$\left(y'(x) - y(x) = c_2 e^x - c_1 - c_2 e^x\right) = \left(c_2 = y^{(r)}(0)\right) \text{ і } c_1 + c_2 = 0.$$

Все це означає, що загальний розв’язок рівняння ідентифікується формулою

$$y(x) = c\left(1 - 2e^x\right) = -y(0)\left(1 - 2e^x\right)$$

при $r = 0$ і формулою

$$y(x) = c\left(1 - e^x\right) = -y^{(r)}(0)\left(1 - e^x\right)$$

при $r \geq 1$ ($c = \text{const}$).

Інтегральна зумовленість правих частин простежується в диференціальних рівняннях, які доречно називати **рівняннями з особливостями в коефіцієнтах**. Ці особливості формально відображаються в термінах узагальнених функцій.

Розглянемо рівняння [7]

$$L_n[y] - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{ij} \left(y^{(j-1)} \delta(x - x_i)\right)^{(j-1)} = 0. \qquad (11.79)$$

Тут $L_n[y]$ збігається з лівою частиною рівняння (11.32), α_{ij} — деякі параметри, x_i — задані точки, причому $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu < b$, $r_n = \mathrm{E}[n/2]$ — ціла частина числа $n/2$. Рівняння

$$L[y] - \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i y(x_i)\, \delta(x - x_i) = 0,$$

наприклад, є окремим випадком (11.79), коли $r_n = 1$ ($n = 2$ чи 3).

Загальний розв'язок цього рівняння можна будувати за допомогою формул

$$y(x,\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\,\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}\big(Q_\nu(x,\,x_\nu,\,x_{\nu-1},\,\dots,\,x_1,\,\alpha)\big), \tag{11.80}$$

$$Q_q(x,\,x_q,\,x_{q-1},\,\dots,\,x_1,\,\alpha)=Q_{q-1}(x,\,x_{q-1},\,\dots,\,x_1,\,\alpha)+$$

$$+\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_{qj}\,Q_{q-1}^{(j-1)}(x,x_q,x_{q-1},\dots,x_1,\alpha)\,\frac{\partial^{j-1}\Phi(x,\alpha)}{\partial\alpha^{j-1}}\bigg|_{\alpha=x_q}\quad(q=\overline{1,\nu}), \tag{11.81}$$

$$Q_0(x,\alpha)\equiv\frac{K(x,\alpha)}{p_0(\alpha)}=\mathscr{K}(x,\alpha), \tag{11.82}$$

де $K(x,\alpha)$ — фундаментальна функція,

$$\Phi(x,\alpha)=\frac{K(x,\alpha)}{p_0(\alpha)}\theta(x-\alpha)=\mathscr{K}(x,\alpha)\theta(x-\alpha)$$

— функція впливу. Доведемо це [7].

Нехай $\nu=1$. Для цього випадку загальний розв'язок

$$y(x,\,\alpha)=Q_1(x,\,x_1,\,\alpha)$$

рівняння (11.79) можна записати у формі

$$Q_1(x,\,x_1,\,\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\,\frac{\partial^k\mathscr{K}}{\partial\alpha^k}+\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_{1j}\;y^{(j-1)}(x_1)\frac{\partial^{j-1}\Phi}{\partial\alpha^{j-1}}\,. \tag{11.83}$$

Покладаючи тут $x=x_1$, знаходимо:

$$y(x_1)=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\,\frac{\partial^k\mathscr{K}}{\partial\alpha^k}\bigg|_{x=x_1}. \tag{11.84}$$

Диференціюючи (11.83) за змінною x і кладучи після цього $x=x_1$, отримуємо:

$$y'(x_1)=Q_1'(x_1,\,x_1,\,\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^k\mathscr{K}}{\partial\alpha^k}\right)\right)\bigg|_{x=x_1}. \tag{11.85}$$

Подібно знаходимо значення при $x=x_1$ похідних вищих порядків:

$$y^{(j-1)}(x_1)=Q_1^{(j-1)}(x_1,\,x_1,\,\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\left(\frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}}\left(\frac{\partial^k\mathscr{K}}{\partial\alpha^k}\right)\right)\bigg|_{x=x_1}. \tag{11.86}$$

Співвідношення (11.84)—(11.86) дозволяють елімінувати з (11.83) всі величини $y^{(j-1)}(x_1)$ $\left(j=\overline{1, r_n}\right)$ і записати загальний розв'язок (при $\nu=1$) у такій формі:

$$y=\sum_{k=0}^{n-1} A_k \frac{\partial^k Q_1}{\partial \alpha^k}, \tag{11.87}$$

де

$$Q_1(x, x_1, \alpha)=\mathcal{K}(x, \alpha)+\sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{1j}\, \mathcal{K}^{(j-1)}(x_1, \alpha) \left.\frac{\partial^{j-1} \Phi}{\partial \alpha^{j-1}}\right|_{\alpha=x_1}. \tag{11.88}$$

Використовуючи формулу (11.87), цілком так само, як і у випадку $\nu=1$, будуємо загальний розв'язок вигляду (11.87)—(11.88) для $\nu=2$, $\nu=3, \ldots$ В загальному підсумку, власне, і приходимо до (11.80)—(11.82).

Таким чином, будувати загальні розв'язки (11.80)—(11.82) рівнянь вигляду (11.79) (таких, що містять в своїх коефіцієнтах особливості типу дельта-функції та її похідних) дає можливість функція впливу $\Phi(x, \alpha)$, що відповідає рівнянню $L[y]=0$.

Щоб унаочнити особливості описаного підходу до побудови розв'язків рівнянь з особливостями (такого підходу, що спирається на загальні формули (11.80)—(11.82)), розглянемо далі ґрунтовніше випадок $r_n=1$ ($n=2$) [7].

Однією з основних в прикладній теорії коливань є задача знаходження розв'язку рівняння

$$L[y] \equiv (f(x) y')' + \omega^2 g(x) y=0, \quad a \leq x \leq b \tag{11.89}$$

за умов

$$\left.(f(x) y'-e_1 y)\right|_{x=a}=0, \quad \left.(f(x) y'+e_1 y)\right|_{x=b}=0 \qquad (e_1=\text{const}). \tag{11.90}$$

Покладемо

$$g(x)=m(x)+\sum_{i=1}^{k} M_i\, \delta(x-x_i), \quad a<x_1<x_2<\ldots<x_k<b, \tag{11.91}$$

та вважатимемо функції $f(x)$, $m(x)$ інтегровними і такими, що

$$f(x)>0, \quad m(x)>0 \quad \forall x \in [a, b]. \tag{11.92}$$

Рівняння (11.89) після підстановки в нього виразу (11.91) набуває вигляду

$$L[y] \equiv (f(x) y')' + \omega^2 m(x) y=\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y(x_i)\, \delta(x-x_i), \tag{11.93}$$

де

$$\alpha_i=M_i \lambda^2, \quad \lambda=\sqrt{-1}\, \omega. \tag{11.94}$$

Будемо будувати загальний розв'язок задачі (11.89)—(11.92), у якій рівняння (11.89) за позначень (11.94) зведено до рівняння (11.93), застосовуючи функцію впливу $\Phi(x,\alpha)$.

З викладеного раніше випливає: якщо $K = K(x,\alpha)$ — фундаментальна функція рівняння

$$L[y] \equiv (f(x)\,y')' + \omega^2 m(x)\,y = 0 \tag{11.95}$$

(в даному разі $\mathcal{K}(x,\alpha) = 0, \quad \mathcal{K}'(x,\alpha) = \dfrac{1}{f(\alpha)}$), то функція (впливу)

$$\Phi(x,\alpha) \equiv \mathcal{K}(x,\alpha)\,\theta(x-\alpha)$$

є фундаментальним розв’язком рівняння

$$L[y] \equiv (f(x)\,y')' + \omega^2 m(x)\,y = \delta(x-\alpha).$$

Загальний розв’язок рівняння (11.93) неважко записати у “змішаній” формі:

$$y = \overline{y}(x) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y(x_i)\Phi_{xi}\,, \tag{11.96}$$

де $\overline{y}(x) = D_1\psi_1(x) + D_2\psi_2(x)$ — загальний розв’язок однорідного рівняння (11.95); $\Phi_{xi} = \Phi(x, x_i)$; D_1, D_2 — довільні сталі.

Маючи на увазі неперервну залежність розв’язку (11.96) від параметрів, будемо послідовно вилучати величини $y(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. З (11.96) видно, що $y(x_1) = \overline{y}(x_1)$, а тому

$$y = \overline{y}(x_1) + \alpha_1 \overline{y}(x_1)\Phi_{x1} + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i y(x_i)\Phi_{xi}\,.$$

Далі отримуємо: $y(x_2) = \overline{y}(x_2) + \alpha_1 \overline{y}(x_1)\Phi_{21}$, $\Phi_{21} = \Phi(x_2, x_1)$. Отже

$$y = \overline{y}(x) + \alpha_1 \overline{y}(x_1)\Phi_{x1} + \alpha_2\left(\overline{y}(x_2) + \alpha_1 \overline{y}(x_1)\Phi_{21}\right) + \sum_{i=3}^{k} \alpha_i\, y(x_i)\Phi_{xi}\,.$$

Застосувавши метод індукції, вилучимо всі величини $y(x_i)$ і знайдемо:

$$\overline{y}(x) = D_1 Q_1(x) + D_2 Q_2(x), \quad Q_l(x) = Q(\psi_l(x)), \; l = 1, \; 2; \tag{11.97}$$

$$Q_{vs}(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^{v} \alpha_i \psi_i \Phi_{xi} + \sum_{i=1}^{v-1}\sum_{j>i}^{v} \alpha_i \alpha_j \psi_i \mathcal{K}_{ji} \Phi_{xj} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{v-2}\sum_{j>i}^{v-1}\sum_{k>j}^{v} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \psi_i \mathcal{K}_{ji} \mathcal{K}_{kj} \Phi_{xk} + \ldots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_v \psi_1 \mathcal{K}_{21}\mathcal{K}_{32}\ldots\mathcal{K}_{v,v-1}\Phi_{xv}. \tag{11.98}$$

Тут позначено: $\psi_i = \psi(x_i)$, $\mathcal{K}_{ji} = \mathcal{K}(x_j, x_i)$, $\Phi_{xi} = \Phi(x, x_i)$.

Підкреслимо, що так само, як загальний розв’язок (11.97), (11.98) рівняння другого порядку (11.93), будуються загальні розв'язки рівнянь такого ж типу, в яких $L[y]$ — диференціальний вираз деякого вищого порядку. При цьому формула (11.98) зберігає свій вигляд.

Щоб проілюструвати особливості структури функцій $Q(x)$, запишемо їх для трьох значень k:

$$k=1, \quad Q=\psi+\alpha_1\,\psi_1\,\Phi_{x1} \qquad (\psi=\psi(x)) \;,$$

$$k=2, \quad Q=\psi+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\,\psi_i\,\Phi_{xi}+\alpha_1\,\alpha_2\,\psi_1\,\mathcal{K}_{21}\,\Phi_{x2}\,,$$

$$k=3, \quad Q=\psi+\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\,\psi_i\,\Phi_{xi}+\left(\alpha_1\,\alpha_2\,\psi_1\,\mathcal{K}_{21}\,\Phi_{x2}+\alpha_1\,\alpha_3\,\psi_1\,\mathcal{K}_{31}\,\Phi_{x3}+\right.$$

$$\left.+\alpha_2\,\alpha_3\,\psi_2\,\mathcal{K}_{32}\,\Phi_{x3}\right)+\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\psi_1\,\mathcal{K}_{21}\,\mathcal{K}_{32}\,\Phi_{x3}\,.$$

Легко зауважити відповідність між кількостями членів у виразах для функцій $Q(x)$ і елементами арифметичного трикутника:

$$\begin{array}{ccc}
(k=0) & — & 1 \\
k=1 & — & 1 \quad 1 \\
2 & — & 1 \quad 2 \quad 1 \\
3 & — & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
4 & — & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
\dots & — & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

(одиниця у вершині “трикутника” відповідає значенню k=0, тобто системі без зосереджених чинників, коли $g(x)=m(x)$, див. (11.91)).

Важливим є також такий висновок. Якщо відома фундаментальна функція $K(x,\alpha)$ рівняння $L[y]$=0, то функцію $Q(x,\alpha)$, що є розв'язком рівняння (11.93), можна побудувати за формулою (11.98) при $\psi(x)\equiv\mathcal{K}(x,\alpha)$ (такі самі висновки випливають і для похідних функції $\mathcal{K}(x,\alpha)$ за параметром α). Тому загальному розв’язкові рівняння $L[y]=0$, в якому $\psi_1(x)\equiv\mathcal{K}(x,\alpha)$, $\psi_2(x)\equiv\dot{\mathcal{K}}(x,\alpha)$ відповідає такий загальний розв’язок рівняння (11.93)

$$y=C_0\,Q(x,\alpha)+C_1\dot{Q}(x,\alpha) \qquad (11.99)$$

(що узгоджується з загальною формулою (11.80)).

Розв'язок (11.99), як і функція $Q(x, \alpha)$, неперервно залежить від параметрів α_i та x_i $(i = \overline{1, k})$. З формули (11.98), а також з наведених вище формул для функцій $Q(x)$ видно, зокрема, що за умови

$$x_s \to x_{s-1} \ (s = k,\ s = k-1,\ \dots,\ s = 2)$$

відповідні розв'язки стають тотожними; причому останній доданок у виразах для Q зникає, а до α_{s-1} додається α_s (якщо ж $\alpha \le x \le x_1$, то $Q \equiv \mathcal{K}(x, \alpha)$). Аналогічні властивості посідають загальні розв'язки (11.80).

Щодо отриманих загальних розв'язків зробимо такі зауваження:

1. За умов (11.88), коли $f(x)$ та $m(x)$ — довільні інтегровні функції (розподілу жорсткості та маси), відповідну фундаментальну функцію $K(x, \alpha)$ є сенс будувати як степеневий ряд за параметром; за таких обставин застосування отриманих тут загальних розв'язків стає вельми ефективним.

2. Залежність загальних розв'язків від параметра α (а не тільки від змінної x) дає можливість вибирати його значення так, щоб найраціональніше пристосуватись до вигляду граничних умов (11.90) та властивостей (симетрія, періодичність тощо) коефіцієнтів рівняння (11.89).

Проілюструємо зміст останнього зауваження на прикладі крайової задачі другого порядку

$$L[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$$

$$(a \le x \le b),\ y(a) = y(b) = 0. \tag{11.100}$$

Нехай $K(x, \alpha)$ — відповідна цій задачі фундаментальна функція. Беручи по черзі $\alpha = a$ та $\alpha = b$, матимемо два розв'язки однорідного рівняння $L[y] = 0$: $y_1 = \mathcal{K}(x, a)$, $y_2 = \mathcal{K}(x, b)$. Беручи до уваги визначник

$$W[y_1, y_2]_{x=b} = \left| \begin{matrix} \mathcal{K}(x, a) & \mathcal{K}(x, b) \\ \mathcal{K}'(x, a) & \mathcal{K}'(x, b) \end{matrix} \right|_{x=b} = \frac{\mathcal{K}(b, a)}{p_0(b)},$$

дійдемо висновку, що за виконання умови $K(b, a) \ne 0$ наведені розв'язки є лінійно-незалежними. Тому загальний розв'язок диференційного рівняння задачі (11.100) можна подати у вигляді:

$$y = C_1\mathcal{K}(x, a) + C_2\mathcal{K}(x, b) + \int_a^x \mathcal{K}(x, s)q(s)ds. \tag{11.101}$$

Підставляючи його у крайові умови (див. (11.100)) і визначаючи сталі C_1, C_2, одержимо розв'язок власне задачі (11.100):

$$y = -\frac{\mathcal{K}(x, a)}{\mathcal{K}(b, a)}\int_a^b \mathcal{K}(b, s)q(s)ds + \int_a^x \mathcal{K}(x, s)q(s)ds. \tag{11.102}$$

Той самий розв'язок (11.102) та умову $\mathcal{K}(b, a) \neq 0$ можна отримати, якщо за загальний розв'язок замість (11.101) взяти функцію

$$y = C_0 \mathcal{K}(x, a) + C_1 \dot{\mathcal{K}}(x, a) + \int_a^x \mathcal{K}(x, s) q(s) ds .$$

З (11.102) випливає, зокрема, що відповідна однорідна крайова задача ($q(x) \equiv 0$) має тільки тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0$. Ця обставина є визначальною для існування єдиної функції Ґріна (див. 4.8). Якщо ж $K(b, a) = 0$, то з умови $y(a) = 0$ випливає, що $C_1 = 0$. Натомість, з умови

$$y(b) = C_0 \cdot 0 + \int_a^b \mathcal{K}(b, s) q(s) ds = 0$$

випливає, що: *а*) коли

$$y_{*ab} = \int_a^b \mathcal{K}(b, s) q(s) ds = 0 ,$$

то крайова задача має безліч розв'язків (C_0 — довільне); *б*) коли $y_{*ab} \neq 0$, то вона розв'язків не має.

12 ОСНОВНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ 12

12.1 Побудова фундаментальної функції у вигляді степеневого ряду

Вважатимемо, що **коефіцієнти** рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x) \tag{12.1}$$

в заданому замкненому проміжку $I = [a, b]$ ($a \le x \le b$) є **абсолютно гладкими** (неперервно диференційовними нескінченну кількість разів) функціями. Поряд з рівнянням (12.1) розглянемо спряжене з ним рівняння [7]

$$L^*[z(\alpha)] \equiv \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \, (p_{n-\nu}(\alpha)\, z)^{(\nu)} + p_n(\alpha)\, z = \tilde{q}(\alpha) \tag{12.2}$$

з аргументом α ($a \le \alpha \le b$) та правою частиною $\tilde{q}(\alpha)$.

Відповідні **однорідні диференціальні рівняння** $L[y(x)] = 0$ та $L^*[z(\alpha)] = 0$ називаються **взаємно спряженими**, як і самі вирази з похідними L та L^*, що формують ліві частини цих рівнянь. Інтегрування взаємно спряжених однорідних рівнянь $L[y(x)] = 0$ та $L^*[z(\alpha)] = 0$ є еквівалентними задачами (див. 6).

Коефіцієнти рівняння (12.2), поданого у формі (12.1), надалі позначатимемо через $q_\nu(\alpha)$ ($\nu = \overline{1, n}$). Вони визначаються однозначно через $\{p_j\}_{j=1}^{n}$.

Фундаментальну функцію, що відповідає рівнянню $L^*[z(\alpha)] = 0$, спряженому з рівнянням $L[y(x)] = 0$, позначатимемо як $K^*(\alpha, x)$ (α — аргумент, x — параметр); початкові умови для її визначення мають вигляд

$$K^*(\alpha, \alpha) = K^{*\,\prime}(\alpha, \alpha) = \ldots = K^{*(n-2)}(\alpha, \alpha) = 0\,,\; K^{*(n-1)}(\alpha, \alpha) = 1\,.$$

Фундаментальні функції, відповідні вказаним **взаємно спряженим однорідним рівнянням**, пов'язані між собою співвідношенням

$$K^*(\alpha, x) = (-1)^{n-1} K(x, \alpha)\,. \tag{12.3}$$

Звідси та з наведеного вище висновуємо [7], що загальний розв'язок рівняння (12.2) можна подати як рівність

$$z = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \frac{\partial^k K}{\partial x^k} + z_*(\alpha, x), \tag{12.4}$$

де

$$z_*(\alpha, x) = (-1)^{n-1} \int_x^\alpha K(x, s) \frac{\tilde{q}(s)}{p_0(s)} ds \tag{12.5}$$

— окремий розв'язок, який при $\alpha = x$ задовольняє нульові початкові умови; B_k — довільні сталі. Таким чином, щоб побудувати загальні розв'язки рівнянь (12.1) і (12.2), достатньо мати лише одну функцію — функцію $K(x,\alpha)$, яка через це набирає ваги фундаментальної.

У випадку самоспряжених рівнянь ($L^* \equiv L$, число n — парне; див. (12.3))

$$K^*(\alpha, x) = -K(x, \alpha), \tag{12.6}$$

а розв'язки (8.22) і (12.4)—(12.5) збігаються (тут $\gamma = \alpha$).

Якщо коефіцієнти рівняння (12.1) є сталими, то з (8.22) випливає формула

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\partial^k K}{\partial x^k} + y_*(x, \alpha),$$

зумовлена тим, що для рівнянь зі сталими коефіцієнтами $K(x,\alpha) \equiv K(x-\alpha)$, а тому частинні похідні від фундаментальної функції за аргументом x та за параметром α пов'язані між собою співвідношенням

$$\frac{\partial^s K}{\partial x^s} = (-1)^s \frac{\partial^s K}{\partial \alpha^s} \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Вдамося до **побудови фундаментальної функції та її похідних у вигляді рядів Тейлора** [7]. Візьмемо до уваги те, що будь-яку функцію $\tilde{K} = \tilde{K}(x,\alpha)$, наділену властивістю абсолютної гладкості за кожною з двох незалежних змінних x і α, можна розкласти в ряд

$$\tilde{K}(x,\alpha) = \sum_{r=n-1}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{r} C_r^j\, b_{r-j,j}(\zeta)\,(x-\zeta)^{r-j}(\alpha-\zeta)^j, \tag{12.7}$$

де

$$b_{r-j,j}(\zeta) = \left.\frac{\partial^r \tilde{K}(x,\alpha)}{\partial x^{r-j}\partial \alpha^j}\right|_{x=\alpha=\zeta} \qquad (a \le \zeta \le b). \tag{12.8}$$

Нехай в рівнянні (12.1) $p_0(x) \equiv 1$. В такому разі можна записати:

$$K^{(n)} + p_1(x)K^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)K' + p_n(x)K \equiv 0,$$

$$\overset{(n)}{K} + q_1(\alpha)\overset{(n-1)}{K} + \ldots + q_{n-1}(\alpha)\dot{K} + q_n(\alpha)K \equiv 0, \tag{12.9}$$

де

$$K^{(j)}(x,\alpha) = \frac{\partial^j K(x,\alpha)}{\partial x^j}, \quad \overset{(j)}{K}(x,\alpha) = \frac{\partial^j K(x,\alpha)}{\partial \alpha^j}.$$

Розглядаючи послідовно рівняння першого, другого, третього та вищих порядків і використовуючи тотожності (12.9) та співвідношення (8.10), (8.22), (12.2)—(12.6) $\gamma = \alpha$, встановлюємо такі правила визначення величин (12.8), відповідних фундаментальній функції [7]:

$$b_{l,k}(q_1, q_1', \ldots) \sim (-1)^{n-1} b_{k,l}(p_1, p_1', \ldots) \tag{12.10}$$

(щоб визначити елемент $b_{l,k}$, потрібно елемент $b_{k,l}$ домножити на $(-1)^{n-1}$, заміняючи одночасно в ньому p_1, p_1', … відповідно на q_1, q_1', … (при визначенні $b_{k,l}$ обернені операції необхідно виконати над $b_{l,k}$; у випадку самоспряжених рівнянь $b_{l,k} \equiv -b_{k,l}$);

$$b_{n-1,n-1}\big|_{n=N} = b_{n-1,n}\big|_{n=N-1} \quad (N = 2;\, 3;\, \ldots); \tag{12.11}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{n+s,m} &= -\sum_{k=0}^{s} C_s^k \sum_{i=1}^{n} p_i^{(s-k)}(\zeta)\, b_{n-i+k,m}, \\ b_{m,n+s} &= -\sum_{k=0}^{s} C_s^k \sum_{i=1}^{n} q_i^{(s-k)}(\zeta)\, b_{m,n-i+k}. \end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

Наведені співвідношення застосовні до рівнянь (12.1) і (12.2) деякого порядку $n = N$ за таким алгоритмом. Вважаючи відомим для $n = N-1$ визначник Вронського $W(K)$ системи функцій $K, K'_\alpha, \ldots, K^{(n-1)}_{\alpha^{n-1}}$ при $x = \alpha = \zeta$ (можна виходити також і з транспонованого визначника системи функцій $K, K'_x, \ldots, K^{(n-1)}_{x^{n-1}}$), записуємо аналогічний визначник для $n = N$. Формально його можна отримати облямовуванням визначника для $n = N-1$ рядком зверху (зважаючи на (8.20)) і стовпчиком праворуч (з використанням властивості (12.10)), додаючи далі діагональний елемент $b_{N-1,\,N-1}$, який визначається співвідношеннями (12.11), (12.12). Побудова визначника для $n = N-1$, якщо він заздалегідь не відомий, здійснюється аналогічно на підставі визначника для $n = N-2$ тощо.

Так, наприклад, при $p_1(x) \equiv 0$ для рівняння шостого порядку, вдаючись до позначень

$$b_{5,4} = p_2^2 - p_4 + p_3' - p_2''; \; b_{4,5} = -q_2^2 + q_4 - q_3' + q_2'',$$

$$b_{5,5} = p_5 - 2p_2 p_3 + 4p_2 p_2' - p_2''' + p_3'' - p_4',$$

матимемо:

$$W(K)\big|_{x=\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -p_2 & p_3 - p_2' \\ 0 & -1 & 0 & p_2 & -p_3 + 2p_2' & b_{4,5} \\ 1 & 0 & -p_2 & p_3 - p_2' & b_{5,4} & b_{5,5} \end{vmatrix}. \quad (12.13)$$

Виділені в (12.13) діагональні мінори, починаючи від одиниці внизу ліворуч, є визначниками $W(K)$, що відповідають рівнянням (12.1) і (1.68) при $n = 1; 2; 3; 4; 5$ (тут всюди вважаємо, що $p_1(x) \equiv 0$). При формуванні визначника (12.13) елементи нових його рядків та стовпців визначаються з використанням низки відповідних формул (12.12).

Якщо $p_1(x) \not\equiv 0$, то послідовне застосування наведених тут правил для рівнянь до четвертого, наприклад, порядку включно дозволяє з'ясувати, що

$$W(K)\big|_{x=\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & p_1 \\ 0 & -1 & -p_1 & b_{2,3} \\ 1 & p_1 & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix}, \quad (12.14)$$

де

$$b_{2,3} = -p_1^2 + p_2 - 2p_1'; \quad b_{3,2} = p_1^2 - p_2 + p_1';$$

$$b_{3,3} = p_1^3 - 2p_1 p_2 + p_3 + 3p_1 p_1' - p_2' + p_1''.$$

Таким самим чином можна будувати визначники типу (12.13) і (12.14) для рівнянь вищих порядків. Очевидно, що елементи визначників нижчого порядку правлять за первинну інформацію в рекурентних співвідношеннях (12.12), що дає можливість послідовно знаходити величини (12.8).

До речі, принагідно можна підтвердити вірність формули Остроградського-Ліувіля нетрадиційним способом [7]. З тотожності (8.13) випливає, що

$$K^{(n)}\Big|_{x=\alpha} = W'\,W^{-1}; \tag{12.15}$$

натомість, тотожність

$$K^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}K^{(n-1)} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{p_0(x)}(x)K' + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}K \equiv 0$$

доводить, що

$$K^{(n)}\Big|_{x=\alpha} = -p_1 p_0^{-1}. \tag{12.16}$$

То ж порівнюючи (12.15) та (12.16), знайдемо сподіване: $W'\,W^{-1} = -p_1\ p_0^{-1}$.

Наведений тут спосіб побудови фундаментальної функції передбачає послідовне визначення величин (12.8) для рівнянь довільно високих порядків, починаючи з випадку $N = 2$. Зауважимо, що всі ці величини (за винятком первинних елементів, що є числами 0, або –1, або 1) виражаються через коефіцієнти $p_\nu(\zeta)$, $q_\nu(\zeta)$ та їх похідні за алгоритмом такої структури:

$$b_{r-j,j}(\zeta) = (-1)^j J_{r+j-n+1}(\zeta) + \mu_{r-j,j}(\zeta), \tag{12.17}$$

де

$$J_k = -\sum_{i=1}^{n} p_i(\zeta) J_{k-i}\ ;\ J_0 = 1,\ J_s(\zeta) \equiv 0 \text{ для } s < 0 \tag{12.18}$$

(при цьому ті з величин $\mu^{(r)}_{r-j,\ j}(\zeta)$, які не дорівнюють нулеві тотожно, анулюються при $p'_\nu(\zeta) = q'_\nu(\zeta) = \ldots = 0$).

Таким чином, можна стверджувати, що задача побудови відображення типу (12.7), загалом розв’язана. Як фундаментальна функція, так і її похідні для рівнянь (12.1) і (12.2) з абсолютно гладкими коефіцієнтами є відображуваними у вигляді степеневих рядів Тейлора (формули (12.8) — (12.12)).

Дійсно, покладаючи $\zeta = \alpha$, з (12.7), для рівняння $L[y] = 0$ одержуємо формулу

$$K^{(k)}_{\alpha^k}(x,\alpha) = \sum_{r=n-1}^{\infty} \frac{1}{(r-k)!}\, b_{r-k,k}(\alpha)\,(x-\alpha)^{r-k} \quad (k = \overline{0,\ n-1}). \tag{12.19}$$

Аналогічно, для рівняння $L^*[z] = 0$:

$$K^{(k)}_{x^k}(x,\alpha) = \sum_{r=n-1}^{\infty} \frac{1}{(r-k)!}\, b^{(r)}_{k,r-k}(x)\,(\alpha - x)^{r-k} \quad (k = \overline{0,\ n-1}) \tag{12.20}$$

Зауважимо, що в (12.19) і (12.20) ніщо не заважає покласти $k = n$; $k = n+1$; ..., і віднайти відповідні формули для похідних ще вищого порядку. Збіжність побудованих рядів у даному випадку, є апріорно очевидною.

Для побудови розв’язків неоднорідних рівнянь доцільно розгорнути $p(\alpha)$ і $q(x)$ (якщо вони є належно гладкими функціями) в ряди Тейлора за степенями $\alpha - x$ і $x - \alpha$ та застосувати формули (12.19) і (12.20) при k =0; в такому випадку інтегрування рівнянь не викликає особливих труднощів; відповідні частинні розв’язки вигляду (8.15) також будуть степеневими рядами.

З формул (12.17), (12.18) і (12.7) одержуємо таке зображення для функції $\tilde{K}(x, \alpha)$, беручи до уваги яке неважко отримати відповідні зображення (12.19), (12.20)):

$$\tilde{K}(x,\alpha) = \varphi(x-\alpha, \zeta) + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{r} C_r^j \, \mu_{r-j,j}(\zeta)\,(x-\zeta)^{r-j}\,(\alpha-\zeta)^j \,.$$

Тут

$$\varphi(x-\alpha, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1+k)!} J_k(\zeta)\,(x-\alpha)^{n-1+k} \,.$$

Сума цього ряду визначається формулами

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{s_\nu(\zeta)(x-\alpha)}}{p_n'[s_\nu(\zeta)]} = (-1)^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{-s_\nu(\zeta)(\alpha-x)}}{Q_n'[-s_\nu(\zeta)]} \,,$$

де $P_n(s)$ і $Q_n(s)$ — “характеристичні многочлени”, відповідні диференціальним рівнянням (12.1) і (12.2),

$$P_n(s) = s^n + \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu(\zeta) s^{n-\nu};\; Q_n(s) = s^n + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu P_\nu(\zeta) s^{n-\nu} \,,$$

$s_\nu(\zeta) - s_\nu(\zeta)$ — корені цих многочленів (вони вважаються простими, що, проте, не применшує загальності отриманих результатів). Зазначимо, що стосовно диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами ($p_\nu = \mathrm{const}$, $\nu = \overline{0,n}$) викладене тут містить в собі відомі результати як окремі випадки.

Підкреслимо ще таке.

Коефіцієнти $p_\nu(x)$, $\nu = \overline{0,n}$, диференціального рівняння, а отже і відповідна фундаментальна функція, можуть залежати від деяких параметрів так, що набування цими параметрами певних значень зумовлює якісну (структурну) зміну рівняння. В таких випадках функція $K(x, \alpha)$, виявляється, завжди переходить у фундаментальну функцію одержуваних при цьому рівнянь — рівнянь з новою якістю (структурою). Іншими словами, за будь-якої зміни визначальних параметрів завжди зберігається взаємна відповідність між рівнянням та його фундаментальною функцією.

12.2 Фундаментальна функція як ряд за параметром

У багатьох випадках фундаментальну функцію $K(x,\alpha)$ є сенс будувати **у вигляді ряду** за деяким **параметром** [7]. Таку побудову можна здійснювати по-різному: виходячи з формули (12.19) шляхом відповідного перегруповування її доданків або розгортання її в ряд Маклорена; за допомогою формули (8.13), в якій система функцій $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^n$ відображена у вигляді рядів за параметром тощо. Один з вельми загальних підходів випливає з розгляду відповідних інтегро-диференціальних рівнянь.

Розглянемо рівняння [7]

$$L[y] = p\,M[y]\,, \tag{12.21}$$

де p — деякий параметр (дійсний або комплексний),

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(x)\, y^{(n-\nu)}(x)\,,$$

$$M[y] \equiv \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu(x)\, y^{(m-\mu)}(x)\,, \quad n > m\,. \tag{12.22}$$

Коефіцієнти виразів з похідними (12.21), (12.22) від p не залежать і є інтегровними функціями змінної x $(a \le x \le b)$ та цілими аналітичними функціями деяких параметрів $b_1, b_2, ..., b_l$.

Розв'язок задачі Коші, який визначає фундаментальну функцію рівняння (12.21), як відомо, збігається з розв'язком інтегро-диференціального рівняння другого роду

$$Q(x,\,\alpha) = K(x,\,\alpha) + p\int_{\alpha}^{x} K(x,\,t)\, M(Q(t,\alpha))\,dt\,, \tag{12.23}$$

де

$$K(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1+k)!}\, b_{n-1+k,0}(\alpha)\,(x-\alpha)^{n-1+k} \tag{12.24}$$

— фундаментальна функція, відповідна рівнянню $L[y]=0$ (її можна визначити, зокрема, за допомогою формул (12.12)). Підставляючи в (12.23) ряд

$$Q(x,\,\alpha) = Q_0(x,\,\alpha) + p\,Q_1(x,\,\alpha) + p^2\, Q_2(x,\,\alpha) + \ldots\,, \tag{12.25}$$

одержуємо для його коефіцієнтів такі співвідношення:

$$Q_r(x,\,\alpha) = \int_{\alpha}^{x} K(x,t)\, U_{r-1}(t,\alpha)\,dt,\;\; r = 1,\,2,\,\ldots\,,$$

$$Q_0(x,\,\alpha) = K(x,\,\alpha), \quad U_{r-1}(x,\,\alpha) = M[Q_{r-1}(x,\,\alpha)]. \tag{12.26}$$

Звідси послідовно знаходимо:

$$Q_1(x,\alpha)=\int_\alpha^x K(x,t)\,M[K(t,\alpha)]\,dt,$$

$$Q_2(x,\alpha)=\int_\alpha^x\int_\alpha^z K(x,z)\,M[K(z,t)]\,M[K(t,\alpha)]\,dzdt,$$

$$Q_3(x,\alpha)=\int_\alpha^x\int_\alpha^z\int_\alpha^u K(x,u)\,M[K(u,z)]\,M[K(z,t)]\,M[K(t,\alpha)]\;dudzdt\,,\;\ldots \qquad (12.27)$$

(у випадку $M[y]=v(x)y$ з (12.26), (12.27) випливають добре відомі формули для визначення ітерованих ядер відповідного інтегрального рівняння Вольтерри).

Диференціюючи інтеграл (12.26) з урахуванням формул (12.23), (12.24), маємо:

$$\left.\frac{\partial Q^{(n+s)}}{\partial x^{n+s}}\right|_{x=\alpha}=\alpha_{s,r}(\alpha,\alpha)\quad (r=1,2,\ldots)\,, \qquad (12.28)$$

причому

$$\alpha_{s,r}(x,\alpha)=\alpha_{0,r}(x,\alpha)\,b_{n+s-1,0}(x)+\alpha'_{s-1,r}(x,\alpha)\,,$$

$$\alpha_{0,r}(x,\alpha)=U_{r-1}(x,\alpha)\,,\;\; s=1,\,2,\,\ldots \qquad (12.29)$$

Формулу (12.29) неважко звести до такого (зручного для обчислень) вигляду

$$\alpha_{s+1,r}(x,\alpha)=\alpha_{0,r}^{(s+1)}(x,\alpha)+\sum_{j=0}^{s}\alpha_{0,r}^{(j)}(x,\alpha)\left[\sum_{i=0}^{s-j}C_{i+j}^{j}b_{n+s-j-i,0}^{(i)}(x)\right],$$

$$s=0,\,1,\,2,\,\ldots \qquad (12.30)$$

З співвідношень (12.26) — (12.29), (12.30) випливає, що

$$Q_r(x,\alpha)=\sum_{l=l_r}^{\infty}\frac{1}{l!}\,a_{l,r}(\alpha,\alpha)\,(x-\alpha)^l\,, \qquad (12.31)$$

де

$$a_{l,r}(\alpha,\alpha)=\alpha_{l-n,r}(\alpha,\alpha)\,,\;\; l_{r=(r+1)n-1-rm}\,. \qquad (12.32)$$

Отже, задача побудови фундаментальної функції $Q(x,\,\alpha)$ рівняння (12.21) у вигляді ряду за параметром p в загальному — розв'язана. Коефіцієнти $Q_r(x,\,\alpha)$ ряду (12.25) визначаються за квадратурними формулами (12.26), (12.27) або відповідними степеневими рядами (12.31), (12.32). Можна показати, що функція $Q(x,\,\alpha)$ є цілою аналітичною функцією параметрів $b_1,\,b_2,\,...,\,b_l$ та має неперервні похідні за аргументом x до ($n-1$)-ої включно.

12.3 Зображення розв’язків рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння зі сталими коефіцієнтами (дійсними або комплексними)

$$y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1} y' - a_n y = 0 . \tag{12.33}$$

Фундаментальна функція цього рівняння залежить, як відомо, від різниці $x - \alpha$:

$$K(x, \alpha) = \varphi(x - \alpha) , \tag{12.34}$$

причому $\varphi(x)$ — всюди збіжний степеневий ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1+k)!} J_k \, x^{n-1+k} , \tag{12.35}$$

де

$$J_k = a_1 J_{k-1} + \ldots + a_n J_{k-n} , \; J_0 = 1 , \; J_j = 0 \text{ для } j < 0 . \tag{12.36}$$

Звідси, застосувавши метод індукції, неважко одержати формулу [7]

$$\varphi^{(n-1)}(x) = \frac{1}{0!} + \left(\frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n x^n}{n!} \right) +$$

$$+ \left(\frac{a_1^2 x^2}{2!} + \frac{a_2^2 x^4}{4!} + \ldots + \frac{a_n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{2 a_1 a_2 x^3}{3!} + \ldots + \frac{2 a_{n-1} a_n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) + \ldots ,$$

а, отже, виразити функцію (12.35) безпосередньо через коефіцієнти рівняння (12.33):

$$\varphi(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\frac{a_1 x^n}{n!} + \ldots + \frac{a_n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) + \ldots \tag{12.37}$$

Розв’язок (12.35), (12.36) або (12.37) визначається без знаходження коренів відповідного характеристичного многочлена, а при прямуванні коефіцієнтів рівняння (12.33) до деяких значень переходить у розв’язок граничного рівняння. Нехай характеристичний многочлен

$$p_n(s) = s^n - a_1 s^{n-1} - \ldots - a_{n-1} s - a_n$$

має *m* різних коренів s_q (q = 1, 2, ..., m), кратність кожного з яких позначена через ν_q . Тоді функцію (12.37) можна, як відомо, записати так [7]:

$$\varphi(x) = \sum_{q=1}^{m} \frac{1}{(\nu_q - 1)!} \frac{\partial^{\nu_q - 1}}{\partial s^{\nu_q - 1}} \left\{ \frac{e^{s_q x}}{(s - s_q)^{-\nu_q} \prod_i (s - s_i)^{\nu_i}} \right\} , \tag{12.38}$$

причому диференціювання виконується за змінною s і в остаточний результат вноситься $s = s_q$.

У випадку, коли всі корені характеристичного многочлена є простими (тобто всі $\nu_q = 1$ і $m = n$),

$$\varphi(x) = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{p_n'(s_q)} e^{s_q x} \ . \tag{12.39}$$

Враховуючи єдиність розв'язку відповідної задачі Коші та порівнюючи (12.35) і (12.39), одержуємо формулу

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1+k)!} J_k x^{n-1+k} = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{p_n'(s_q)} e^{s_q x} \tag{12.40}$$

(якщо серед коренів є кратні, то потрібно використати співвідношення (12.38)).

Зауважимо, що формулу (12.40) можна застосовувати для визначення сум відповідних рядів. Як приклад розглянемо випадок, коли $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = 0$, $a_n = a$.

Кладучи в (12.40)

$$I_k = I_{rn} = a^r \qquad (r = 0, 1, 2, ...) ; \qquad P_n'(s_q) = n s_q^{n-1} ,$$

маємо:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r x^{rn+m-1}}{(rn+n-1)!} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{s_q^{n-1}} e^{s_q x} \ .$$

Звідси одержуємо більш компактну формулу

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r x^{rn}}{(rn)!} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} e^{s_q x} \tag{12.41}$$

Зазначимо, що відомий спосіб Г. К. Еванса знаходження сум рядів (12.41) пов'язаний з обчисленнями, обсяг яких істотно зростає із збільшенням числа n.

Через функцію (12.34), загальний розв'язок рівняння (12.33) можна подати у традиційному вигляді

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \varphi^{(i)}(x) \tag{12.42}$$

(C_i — довільні сталі).

Фундаментальна функція $\varphi(x)$ має важливу властивість: якщо коефіцієнти рівняння (12.33) прямують до деяких особливих значень (зокрема, до нуля або до таких значень, при яких дискримінант характеристичного многочлена дорівнює нулеві), то вона переходить у фундаментальну функцію граничного рівняння. Аналогічні властивості мають похідні від φ будь-якого порядку, а також відповідний частинний розв'язок. Очевидно, для рівняння (12.33) не існує іншої, відмінної від φ, функції, яка має вказану властивість і утворює разом із своїми похідними до n–1-го порядку включно фундаментальну систему його розв'язків (у цьому сенсі функція φ також єдина).

12.4 Матрична фундаментальна функція і загальний розв’язок системи рівнянь другого порядку

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь, записану в матричному вигляді [7]

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f\ , \tag{12.43}$$

де *A, B, C* — квадратні матриці, елементи яких позначені відповідно як a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} $(i,\ j = \overline{1,\ n})$; $q = (q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n)^{\mathsf{T}}$, $f = (f_1,\ f_2,\ ...,\ f_n)^{\mathsf{T}}$ — матриці-стовпці.

Щоб визначити однозначно вектор-функцію $q(t)$, потрібно задати для деякого моменту часу $t = \tau$ початкові умови:

$$q(\tau) = q_0\ ,\ \dot{q}(\tau) = \dot{q}_0\ . \tag{12.44}$$

Надалі вважатимемо, що матриці *A, B* і *C* та права частина *f* є неперервними функціями аргумента *t* і, крім цього, $\det A(t) > 0$.

Розглянемо спочатку відповідне до (12.43) однорідне рівняння

$$A\ddot{Y} + B\dot{Y} + CY = 0 \tag{12.45}$$

для матриці-функції $Y(t)$. Оскільки $\det A(t) > 0$, то існує матриця A^{-1}, обернена до A. Тому це рівняння можна перетворити до такого:

$$\ddot{Y} + \widetilde{B}\dot{Y} + \widetilde{C}Y = 0\ , \tag{12.46}$$

де

$$\widetilde{B} = A^{-1}B;\ \ \widetilde{C} = A^{-1}C\ . \tag{12.47}$$

Розв’язки Y_1, Y_2 рівняння (12.46) (що є наслідком співвідношень (12.45), (12.47)) називаються лінійно незалежними, якщо тотожність $Y_1C_1 + Y_2C_2 \equiv 0$ зі сталими матрицями C_1, C_2 можлива тільки за умови $C_1 = C_2 = 0$, і залежними — в протилежному випадку. Розв’язки Y_1, Y_2 будуть лінійно незалежними тоді й тільки тоді, коли відмінний від нуля визначник блочної матриці

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ \dot{Y}_1 & \dot{Y}_2 \end{bmatrix}.$$

Якщо розв’язки Y_1, Y_2 — лінійно незалежні, то будь-який розв’язок рівняння (12.46) визначається за формулою

$$Y = Y_1C_1 + Y_2C_2\ . \tag{12.48}$$

Якщо Y — розв’язок рівняння (12.46), а c — сталий вектор, то $q(t) = Y(t)\,c$ — загальний розв’язок рівняння

$$\ddot{q} + \widetilde{B}\dot{q} + \widetilde{C}q = 0 . \tag{12.49}$$

Звідси та з формули (12.48) випливає, що загальний розв’язок рівняння (12.49) має вигляд

$$q(t) = Y_1(t)\,c_1 + Y_2(t)\,c_2 . \tag{12.50}$$

Так само, як для одного лінійного рівняння, вводимо **матричну фундаментальну функцію** $K(t,\ \tau)$. Ця функція від аргумента t і параметра τ є розв’язком матричного рівняння (12.46) та задовольняє такі початкові умови:

$$K(\tau,\ \tau) = 0,\ \ \frac{\partial K}{\partial \tau}(\tau,\ \tau) = E , \tag{12.51}$$

де E — одинична матриця. З теорії диференційних рівнянь випливає, що така функція існує і є єдиною. Неважко перевірити, що фундаментальна функція та її частинна похідна за параметром τ є лінійно незалежними розв’язками рівняння (12.46). Отже, беручи до уваги (12.50), загальний розв’язок рівняння (12.49) записуємо в такому вигляді:

$$q(t) = K(t,\ \tau)\,c_1 + \frac{\partial K(t,\ \tau)}{\partial \tau}c_2 . \tag{12.52}$$

Тепер розглянемо відповідне неоднорідне рівняння (12.43). Після множення обох його частин на матрицю A^{-1} зліва та врахування позначень (12.47), одержимо:

$$\ddot{q} + \widetilde{B}\dot{q} + \widetilde{C}q = A^{-1} f . \tag{12.53}$$

Розв’язок цього рівняння, як і в одновимірному випадку, є сумою загального розв’язку (12.52) однорідного рівняння та деякого окремого розв’язку неоднорідного рівняння, тобто

$$q(t) = Kc_1 + \frac{\partial K}{\partial \tau}c_2 + q^*(t) . \tag{12.54}$$

Довільні сталі вектори c_1 і c_2 можна визначати з умови задоволення відповідних початкових умов (12.44).

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що розв'язок неоднорідного рівняння (12.53), подібно до окремого розв’язку (8.15) для одновимірного рівняння, визначається за формулою:

$$q^*(t) = \int_{\tau}^{t} K(t,\ s)\,A^{-1}(s)\ f(s)\,ds . \tag{12.55}$$

Цей розв’язок для $t = \tau$ задовольняє нульові умови:

$$q^*(\tau) = 0\ ,\ \ \dot{q}^*(\tau) = 0 \tag{12.56}$$

(щоб переконатися в цьому, досить використати при диференціюванні інтеграла (12.54) співвідношення (12.51)).

Для того, щоб розв’язати задачу (12.53), (12.44), подаючи розв’язок у вигляді (12.54), необхідно знайти матриці

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} \text{ і } \frac{\partial^2 K}{\partial t\,\partial \tau}.$$

Хай матриця $K(t,\tau)$ має вигляд

$$K(t,\tau) = \begin{bmatrix} K_{11}(t,\tau) & K_{12}(t,\tau) \\ K_{21}(t,\tau) & K_{22}(t,\tau) \end{bmatrix}.$$

Розгортаючи кожен її елемент $K_{ij}(t,\tau)$ $(i,j=1,2)$ в ряд Тейлора в околі точки $t=\tau$, переконуємось у справедливості такого матричного співвідношення:

$$K(t,\tau) = K(\tau,\tau) + \frac{t-\tau}{1!}\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=\tau} + \frac{(t-\tau)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right|_{t=\tau} + \ldots$$

Оскільки $K(\tau,\tau)=0$ і $\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=\tau} = E$, то

$$K(t,\tau) = \frac{t-\tau}{1!}E + \frac{(t-\tau)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right|_{t=\tau} + \ldots$$

З рівняння (12.46) при $t=\tau$ знаходимо:

$$\left.\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right|_{t=\tau} = -\widetilde{B}(\tau).$$

Отже,

$$K(t,\tau) = \frac{t-\tau}{1!}E + \frac{(t-\tau)^2}{2!}\widetilde{B}(\tau) + \ldots$$

Звідси

$$\left.\frac{\partial K}{\partial \tau}\right|_{t=\tau} = -E, \quad \left.\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial \tau}\right|_{t=\tau} = \widetilde{B}(\tau). \tag{12.57}$$

Застосовуючи розв’язок $q(t)$ у формі (12.54), а також враховуючи умови (12.44), (12.56), (12.51) та знайдені матриці (12.57), приходимо до зображення розв’язку задачі (12.53), (12.44) в такому вигляді:

$$q(t) = K(t,\tau)[\dot{q}_0 + \widetilde{B}(\tau)q_0] - \frac{\partial K(t,\tau)}{\partial \tau}q_0 + \int_\tau^t K(t,s)A^{-1}(s)f(s)\,ds. \tag{11.58}$$

Порівняємо розв’язки системи рівнянь (12.53) з розв’язком одного рівняння

$$L[q] = \ddot{q} + b(t)\dot{q} + c(t)q = f(t). \tag{11.59}$$

Розв'язком задачі Коші для рівняння (12.59) є функція

$$q(t) = (\dot{q}_0 + b(\tau)\, q_0)\, K(t, \tau) - \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial \tau} q_0 + \int_{\tau}^{t} K(t, s)\, f(s)\, ds\,. \qquad (11.60)$$

Порівнюючи (12.58) і (12.60), доходимо висновку, що рух лінійної системи з k ступенями вільності визначається формулою, яка повністю аналогічна відповідній формулі для системи з одним ступенем вільності. Зрештою, (12.60) можна вважати окремим (частковим) випадком (12.58).

Зауважимо, що аналогічні результати справедливі для лінійних систем довільного порядку з довільною кількістю ступенів вільності.

Розглянемо такий приклад. Нехай $\tilde{B}$ і $\tilde{C}$ в однорідному рівнянні, що відповідає рівнянню (12.53), є сталими матрицями. Тоді відповідну матричну функцію Коші $K(t, \tau) \equiv \tilde{\varphi}(t - \tau)$ можна будувати за формулами вигляду (12.34)—(12.36), заміняючи там сталі a_1 та a_2 матрицями $\tilde{B}$ та $\tilde{C}$. Отже,

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} J_k \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\,, \qquad (11.61)$$

де $J_k = \tilde{B} J_{k-1} + \tilde{C} J_{k-2}, \quad J_0 = E, \quad J_j = \theta \quad (j < 0)$; E та θ — одинична та нульова матриці. Неважко угледіти, що матричний ряд (12.61) можна записати і так:

$$\tilde{\varphi}(t) = \exp \tilde{B} t \cdot \frac{\sin \tilde{C} t}{\tilde{C}}\,.$$

12.5 Звідні рівняння та звідні системи рівнянь

Розглянемо систему диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами такого вигляду [7]

$$\begin{aligned}
y_1' &= \left(a_{11} g' - \frac{u_1'}{u_1} \right) y_1 + a_{12} g' \frac{u_2}{u_1} y_2 + \ldots + a_{1n} g' \frac{u_n}{u_1} y_n\,, \\
y_2' &= a_{21} g' \frac{u_1}{u_2} y_1 + \left(a_{22} g' - \frac{u_2'}{u_2} \right) y_2 + \ldots + a_{2n} g' \frac{u_n}{u_2} y_n\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n' &= a_{n1} g' \frac{u_1}{u_n} y_1 + a_{n2} g' \frac{u_2}{u_n} y_2 + \ldots + \left(a_{nn} g' - \frac{u_n'}{u_n} \right) y_n\,.
\end{aligned} \qquad (12.62)$$

Тут $g = g(x)$ і $u_k = u_k(x)$ $(k = \overline{1, n})$ — задані функції, що мають неперервні перші похідні, причому $u_k = u_k(x)$ не набувають нульових значень в окресленому проміжку $x_1 < x < x_2$; a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ — сталі (дійсні або комплексні) коефіцієнти.

Систему рівнянь (12.62) називатимемо **звідною**, наголошуючи на тому, що заміною змінних

$$y_k = \frac{z_k}{u_k}, \quad t = g(x) \tag{12.63}$$

її можна звести до системи рівнянь

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \ , \ i = \overline{1, n} \, , \tag{12.64}$$

зі сталими коефіцієнтами; і навпаки, при заміні (12.63) система (12.64) переходить у систему (12.62).

Загальний розв'язок системи (12.64) має вигляд

$$z = c \, e^{At} \, , \tag{12.65}$$

де $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}^{\mathrm{т}}$ — матриця-стовпець системи розв'язків; $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}^{\mathrm{т}}$ — довільна стала матриця-стовпець; $A = [a_{ij}]_{i,\, j=1}^{n}$ — матриця коефіцієнтів.

Кладучи

$$e^{At} = [q_{ij}(t)]_{i,\, j=1}^{n} \, ,$$

розв'язок системи (12.65) запишемо в розгорнутій формі:

$$z_1(t) = c_1\, q_{11}(t) + c_2\, q_{12}(t) + \ldots + c_n\, q_{1n}(t) \, ,$$

$$z_2(t) = c_1\, q_{21}(t) + c_2\, q_{22}(t) + \ldots + c_n\, q_{2n}(t) \, ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_n(t) = c_1\, q_{n1}(t) + c_2\, q_{n2}(t) + \ldots + c_n\, q_{nn}(t) \, .$$

Звідси, враховуючи (12.63), одержуємо **загальний розв'язок** системи (12.62):

$$y_k(x) = z_k[g(x)]\, u_k^{-1}(x) \, .$$

Очевидно, що подібно можна будувати загальний розв'язок системи неоднорідних рівнянь.

Розглянемо деякі часткові випадки.

Нехай $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$, $a_{12} = a_{23} = \ldots = a_{n-1,n} = 1$, $a_{nk} = \alpha_{n-k+1}$, а інші коефіцієнти — нулі. В цьому випадку система (12.62) зводиться до системи

$$z_1' = z_2, \, z_2' = z_3, \ldots, \, z_1' = \alpha_n z_1 + \alpha_{n-1} z_2 + \ldots + \alpha_1 z_n \, ,$$

яка рівносильна одному рівнянню

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^{(n-i)}(t) \, . \tag{12.66}$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$z(t) = c_0\varphi(t) + c_1\varphi'(t) + \ldots + c_{n-1}\varphi^{(n-1)}(t)\,,$$

визначувана через фундаментальну функцію $\varphi(t)$, яка, в свою чергу, визначається за формулами (12.35) — (12.36) або (12.38) — (12.39).

Отже загальний розв'язок системи (12.62) рівнянь зі змінними коефіцієнтами, відповідної одному рівнянню (12.66) зі сталими коефіцієнтами, має вигляд:

$$y(x) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + \ldots + c_{n-1}\psi_{n-1}(x)\,,$$

де

$$\psi_0 = \frac{1}{u(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_k[g(x)]^{\,n+k-1}}{(n+k-1)!} = \sum_{q=1}^{n}\frac{e^{s_q[g(x)]}}{p_n'(s_q)}\,, \tag{12.67}$$

а фундаментальні функції $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ визначаються за формулами, одержаними відповідним чином з формул для визначення функцій $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}(t)$ (у випадку кратних коренів для знаходження суми ряду (12.67) можна вдатись до формули (12.38)).

Надамо отриманому результату іншої форми, дуже часто зручної для конкретних застосувань. Заради спрощення записів обмежимося розглядом рівняння другого порядку.

Рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{12.68}$$

Заміною

$$y(x) = \frac{z(x)}{u(x)}, \quad t = g(x) \tag{12.69}$$

зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти $p(x), q(x)$ мають таку структуру:

$$p(x) = 2u'u^{-1} - (\alpha_1 g' + g''(g')^{-1})\,, \tag{12.70}$$

$$q(x) = u''u^{-1} - u'u^{-1}(\alpha_1 g' + g''(g')^{-1}) - \alpha_2 g'^2\,, \tag{12.71}$$

де α_1, α_2 — довільні параметри; $u(x)$, $g(x)$ — двічі неперервно диференційовні функції, причому $u(x)$ і $g'(x)$ не набувають нульових значень в наперед окресленому проміжку $x_1 < x < x_2$. При цьому **фундаментальна система розв'язків** рівняння (12.68) визначається за формулами

$$\psi_0(x) = \frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_k g^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{u}\sum_{l=1}^{2}\frac{e^{s_l g}}{p_2'(s_l)}\,,$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_k g^k}{k!} = \frac{1}{u}\sum_{l=1}^{2}\frac{s_l\, e^{s_l g}}{p_2'(s_l)},$$

де s_1, s_2 — корені рівняння $p_2(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_2 = 0$;

$$J_k = \alpha_1 J_{k-1} + \alpha_2 J_{k-2}; \quad J_0 = 1; \quad J_k = 0 \quad (k < 0).$$

Отриманий результат легко перенести на відповідні звідні системи. Покажемо це на найпростішому прикладі.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y = 0, \tag{12.72}$$

де $Y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}^{\mathrm{T}}$ — матриця-стовпець; P, Q — квадратні матриці порядку n, визначувані за формулами

$$P(x) = -A_1 g'(x) + E\left(\frac{2u'(x)}{u(x)} - \frac{g''(x)}{g'(x)}\right),$$

$$Pv = -A_1 g'(x)\frac{u'(x)}{u(x)} - A_2[g'(x)]^2 + E\left(\frac{u''(x)}{u(x)} - \frac{u'(x)}{u(x)}\frac{g''(x)}{g'(x)}\right).$$

Тут E — одинична, а $A_j = [a_{kl}]_{k,l=1}^{n}$ — сталі матриці; до функцій $u(x)$ і $g(x)$ висуваються такі самі вимоги, як і у випадку рівняння (12.68).

Неважко переконатись, що система рівнянь (12.72) є звідною у зазначеному вище розумінні, причому відповідна заміна змінних має вигляд (12.69). Загальний розв'язок системи (12.72) можна записати так:

$$Y(x) = \psi_0(x)\, c_0 + \psi_1(x)\, c_1.$$

Тут c_0, c_1 — довільні сталі матриці-стовпці; $\psi_0(x), \psi_1(x)$ — матриці, що мають вигляд

$$\psi_0 = \frac{1}{u(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_k[g(x)]^{k+1}}{(k+1)!},$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{u(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_k[g(x)]^{k}}{k!},$$

де

$$J_k = A_1 J_{k-1} + A_2 J_{k-2}; \quad J_0 = E; \quad J_j = \theta \quad (j < 0).$$

Очевидно, що система (12.72) є узагальненням багатьох відомих звідних рівнянь другого порядку. Наприклад, для $n = 1$, $u(x) \equiv 1$, $g(x) = \ln x$ або $g(x) = \arccos x$ матимемо векторні аналоги рівнянь відповідно Ойлера та Чебишова.

Повернемось до рівняння (12.68) (за позначень (12.70), (12.71)), подаючи його в такому вигляді:

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0\,, \qquad (12.73$$

$$p_0(x) = \frac{u(x)}{g'^2(x)} \neq 0\,, \qquad p_1(x) = 2\frac{u'(x)}{g'^2(x)} - \frac{u(x)}{g'(x)}\left(\alpha_1 + \frac{g''(x)}{g'^2(x)}\right),$$

$$p_2(x) = \frac{u''(x)}{g'^2(x)} - \frac{u'(x)}{g'(x)}\left(\alpha_1 + \frac{g''(x)}{g'^2(x)}\right) - \alpha_2\,u(x)\,. \qquad (12.74)$$

Підставимо в нього перший вираз (12.69) і, враховуючи (12.74), дійдемо до рівності

$$\frac{1}{g'^2(x)}z'' - \frac{1}{g'(x)}\left(\alpha_1 + \frac{g''(x)}{g'^2(x)}\right)z' - \alpha_2\,z = 0\,,\ \ z = z(x)\,. \qquad (12.75)$$

Беручи ж до уваги співвідношення $t - g(x) = 0$ (див. (12.69)), матимемо:

$$z'' - \alpha_1 z' - \alpha_2 z = 0\,, \qquad z = z(t)\,. \qquad (12.76)$$

Таким чином, рівняння (12.68) (за позначень (12.70), (12.71)), (12.73) (за позначень (12.74)) та (12.75) зі змінними коефіцієнтами є рівноцінними рівнянню (12.76) зі сталими коефіцієнтами.

Нехай функції $z_1 = z_1(t)$, $z_2 = z_2(t)$ складають фундаментальну систему розв'язків рівняння (12.76). Тоді відповідно до означення (8.13) цьому рівнянню можна поставити у відповідність фундаментальну функцію

$$\widetilde{K}(t,\widetilde{\alpha}) = \frac{\begin{vmatrix} z_1(\widetilde{\alpha}) & z_2(\widetilde{\alpha}) \\ z_1(t) & z_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ \dfrac{dz_1(t)}{dt} & \dfrac{dz_2(t)}{dt} \end{vmatrix}_{t=\widetilde{\alpha}}}\,, \qquad (12.77)$$

де $\widetilde{\alpha}$ — відповідний змінній t параметр.

Зважаючи на (12.69), вдамося до низки таких перетворень виразу (12.77):

$$\widetilde{K}(t,\widetilde{\alpha}) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(\alpha)u(\alpha) & y_2(\alpha)u(\alpha) \\ y_1(x)u(x) & y_2(x)u(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x)\,u(x) & y_2(x)u(x) \\ \dfrac{d(y_1(x)u(x))}{dx}\dfrac{dx(t)}{dt} & \dfrac{d(y_2(x)u(x))}{dx}\dfrac{dx(t)}{dt} \end{vmatrix}_{t=\widetilde{\alpha}}} =$$

$$= \frac{g'(\alpha)\,u(x)\begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx}u(x) + y_1(x)\dfrac{du(x)}{dx} & \dfrac{dy_2(x)}{dx}u(x) + y_2(x)\dfrac{du(x)}{dx} \end{vmatrix}_{x=\alpha}} =$$

$$= \frac{g'(\alpha)\, u(x) \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{u(\alpha) \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1'(\alpha) & y_2'(\alpha) \end{vmatrix}}$$

(тут позначено $x(t)\big|_{t=\tilde{\alpha}} = \alpha$). Таким чином, справджується співвідношення

$$\tilde{K}(t, \tilde{\alpha}) \equiv \tilde{K}(g(x), g(\alpha)) = \frac{g'(\alpha) u(x)}{u(\alpha)} K(x,\alpha) = \frac{u(x)}{g'(\alpha)} K_{p0}(x,\alpha), \qquad (12.78)$$

де $K(x,\alpha)$ — фундаментальна функція, відповідна рівнянню (12.68), а $K_{p0}(x,\alpha)$ — фундаментальна функція, відповідна рівнянню (12.73).

Рівнянню (12.76) відповідає фундаментальна функція

$$\tilde{K}(t, \tilde{\alpha}) = \frac{e^{s_1(t-\tilde{\alpha})} - e^{s_2(t-\tilde{\alpha})}}{s_1 - s_2},$$

де s_1, s_2 — довільні (комплексні) числа, що є коренями квадратного рівняння

$$s^2 - \alpha_1 s - \alpha_2 = 0 .$$

Отже, вдаючись до (12.78), відповідну рівнянню (12.68) фундаментальну функцію можна подати у вигляді

$$K(x,\alpha) = \frac{u(\alpha)}{(s_2 - s_1) u(x)\; g'(\alpha)} (e^{s_2(g(x)-g(\alpha))} - e^{s_1(g(x)-g(\alpha))}), \qquad (12.79)$$

або за позначень $E_1 = e^{s_1 g(x)}$, $E_2 = e^{s_2 g(x)}$ — у вигляді

$$K(x,\alpha) = \frac{u(\alpha)}{(s_2 - s_1)\, u(x)\, g'(\alpha)} \left[\frac{E_2(x)}{E_2(\alpha)} - \frac{E_1(x)}{E_1(\alpha)} \right]. \qquad (12.80)$$

Легко також з'ясувати (за допомогою чи (12.79), чи (12.80)), що

$$W(x) = -\frac{g'}{u^2} e^{(s_1+s_2)g(x)} = -\frac{g'}{u^2} E_1 \cdot E_2 ,$$

$$\psi_0 = \frac{E_1 - E_2}{(s_1 - s_2)u}, \;\; \psi_1 = \frac{s_1 E_1 - s_2 E_2}{(s_1 - s_2)u} .$$

Якщо $s_1 = a + \omega i, s_2 = a - \omega i \;\; (i = \sqrt{-1})$, то $s_2 - s_1 = -2\omega i$ і $e^{s_2 A} - e^{s_1 A} =$ $= e^{aA}(e^{i\omega A} - e^{-i\omega A}) = e^{aA} \cdot 2i \sin \omega A \;\; (A = g(x) - g(\alpha))$. Таким чином, у випадку комплексно спряжених s_1, s_2

$$K(x,\alpha) = -\frac{u(\alpha)}{u(x)\, g'(\alpha)} e^{a(g(x)-g(\alpha))} \frac{\sin \omega (g(x) - g(\alpha))}{\omega} .$$

У випадку $g(x) = \ln x$ ($g' = 1/x$) маємо:

$$e^{s_i(g(x)-g(\alpha))} = e^{s_i \ln\frac{x}{\alpha}} = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{s_i} \qquad (i = 1, 2),$$

$$K(x,\alpha) = -\frac{\alpha\, u(\alpha)}{(s_2 - s_1)u(x)}\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{s_2} - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{s_1}\right].$$

Можливість досліджувати звідні рівняння (зі змінними коефіцієнтами) в рамках теорії рівнянь зі сталими коефіцієнтами пересічно дає певні методологічні переваги. Значної користі є підстави сподіватись і від дослідження взаємозумовленості фундаментальних функцій, що відповідають звідним рівнянням, та фундаментальних функцій, відповідних рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

12.6 Фундаментальна функція і ядро еквівалентного інтегрального рівняння

Йдеться про **еквівалентні однорідне диференціальне рівняння**

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0\,, \tag{12.81}$$

якому відповідає фундаментальна функція $K(x,s)$, **та інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду**

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^x J(x,s)\, y(s)\, ds\,.$$

Звернемося до прикладу 14 з табл. 3. Надамо величинам, що фігурують у визначальних для резольвенти виразах

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n} - \lambda\left(a_0(x)\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\varphi\right) = 0\,,$$

$$\varphi\big|_{x=s} = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=s} = \ldots = \left.\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}}\right|_{x=s} = 0\,,\ \left.\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\right|_{x=s} = 1\,, \tag{12.82}$$

такий зміст:

$$\varphi = K(x,s)\,,\ -\lambda a_{i-1}(x) = p_i(x)\ \ (i = \overline{1,n}\,).$$

Очевидно, що умови (12.82) справджуватимуться в цьому конкретному випадку завдяки властивостям фундаментальної функції $K(x,s)$.

Запишемо формально вирази (див. табл. 3, приклад 14)

$$R(x,s;\lambda)=\frac{1}{\lambda}\frac{d^n\varphi(x,s;\lambda)}{dx^n}=\frac{1}{\lambda}\frac{d^nK(x,s)}{dx^n}\,, \tag{12.83}$$

$$J(x,s)=\sum_{r=0}^{n-1}a_r(x)\frac{(x-s)^r}{r!}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{n}p_r(x)\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,, \tag{12.84}$$

які правлять за резольвенту і ядро деякого інтегрального рівняння (порівняймо з (10.9))

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x J(x,s)\,y(s)\,ds=\psi(x)-\int_a^x\sum_{r=1}^{n}p_r(x)\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}y(s)\,ds\,.$$

З одного боку, резольвенту $R(x,s;\lambda)$ можна визначити за формулою (12.83), а з іншого, — на підставі (12.84) або за формулою (10.20), або за системою формул (10.21)—(10.22). Зокрема, беручи до уваги (12.83), (10.21)—(10.22), матимемо:

$$\frac{d^nK(x,s)}{dx^n}=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i J_i(x,s)\,, \tag{12.85}$$

де

$$J(x,s)=-\frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{n}p_r(x)\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,,$$

$$J_1(x,s)=J(x,s)\,,\;\; J_2(x,s)=\int_s^x J(x,t)\,J_1(t,s)\,dt\,,$$

$$J_3(x,s)=\int_s^x J(x,t)\,J_2(t,s)\,dt\,,\;\ldots,\; J_n(x,s)=\int_s^x J(x,t)\,J_{n-1}(t,s)\,dt\,,\;\ldots \tag{12.86}$$

Звідси

$$K(x,s)=\int_s^x\overset{n}{\ldots}\int_s^x\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i J_i(x,s)\,dx\overset{n}{\ldots}dx+\frac{K^{(n-1)}(s,s)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1}+$$

$$+\frac{K^{(n-2)}(s,s)}{(n-2)!}(x-s)^{n-2}+\ldots+\frac{K'(s,s)}{1!}(s-a)+K(s,s)\,.$$

Таким чином,

$$K(x,s)=\int_s^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i J_i(t,s)\,dt+\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,. \tag{12.87}$$

Приклад 1 Диференціальному рівнянню

$$y'' + xy' - y = 0 \tag{12.88}$$

відповідає ядро

$$J(x,s) = -\frac{1}{\lambda}(p_1(x) + p_2(x)(x-s)) = -\frac{1}{\lambda}(x-(x-s)) = -\frac{s}{\lambda}.$$

певного еквівалентного інтегрального рівняння. На підставі (12.86)

$$J_1(x,s) = J(x,s) = -\frac{s}{\lambda}, \;\; J_\nu(x,s) = \frac{(-1)^\nu}{\lambda^\nu} s \int_s^x x_1 \int_s^{x_1} x_2 \ldots \int_s^{x_{\nu-3}} x_{\nu-2} \int_s^{x_{\nu-2}} t\,dt\,dx_{\nu-2} \ldots dx_2 dx_1 =$$

$$= \frac{(-1)^\nu}{(\nu-2)!} \frac{s}{\lambda^\nu} \int_s^x t \left(\int_t^x \tau\,d\tau \right)^{\nu-2} dt = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \frac{s}{\lambda^\nu} \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right)^{\nu-1}.$$

Тут використано формулу

$$\int_a^x \varphi(x_1)\,dx_1 \int_a^{x_1} \varphi(x_2)\,dx_2 \ldots \int_a^{x_{n-1}} \varphi(x_n)\,dx_n \int_a^x f(t)\,dt = \frac{1}{n!} \int_a^x f(t) \left(\int_t^x \varphi(s)\,ds \right)^n dt, \tag{12.89}$$

(Формула (12.89) узагальнює формулу (1.25).) Отже,

$$R(x,s;\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i J_{i+1}(x,s) = -\frac{s}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right)^i = -\frac{s}{\lambda} e^{-\frac{x^2-s^2}{2}}$$

і відповідно до (12.85), (12.87)

$$\frac{d^n K(x,s)}{dx^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i J_i(x,s) = \lambda R(x,s;\lambda) = -se^{-\frac{x^2-s^2}{2}},$$

$$K(x,s) = -se^{\frac{s^2}{2}} \int_s^x (x-t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt + (x-s) =$$

$$= x - s \left(x \int_s^x e^{-\frac{t^2-s^2}{2}} dt + e^{-\frac{x^2-s^2}{2}} \right).$$

Знайдемо фундаментальну функцію ще іншим способом.

Можна переконатися, що лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння (12.88) є елементарні функції

$$y_1 = x\,, \;\; y_2 = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \int_\alpha^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(α — довільний параметр). Отже, відповідно до конструктивного (8.13) означення фундаментальною є функція

$$K(x,s) \equiv \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} s & e^{-\frac{s^2}{2}} + s\int\limits_\alpha^s e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ x & e^{-\frac{x^2}{2}} + x\int\limits_\alpha^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & e^{-\frac{s^2}{2}} + s\int\limits_\alpha^s e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ 1 & \int\limits_\alpha^s e^{-\frac{t^2}{2}}dt \end{vmatrix}} =$$

$$= e^{\frac{s^2}{2}}\left(xe^{-\frac{s^2}{2}} - se^{-\frac{x^2}{2}} + xs\int\limits_x^s e^{-\frac{t^2}{2}}dt \right).$$

Отриманий результат, як і слід було сподіватися, збігається з попереднім.

Можна вважати, що вираз (12.85) відображає розклад функції $\dfrac{d^nK(x,s)}{dx^n}$ за коефіцієнтами $p_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, диференціального рівняння (12.81):

$$\frac{d^nK(x,s)}{dx^n} = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\kappa_i(x,s)\,; \tag{12.90}$$

при цьому за функції $\kappa_i(x,s)$, $i=\overline{1,n}$, правлять функційні ряди (які, зрештою, в окремих випадках можуть збігатися до елементарних функцій; в цих випадках диференціальне рівняння розв'язується в квадратурах у звичайному розумінні). Справді, відповідно до (12.86)

$$J_1(x,s) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{n}\frac{p_r(x)}{(r-1)!}(x-s)^{r-1},$$

$$J_\nu(x,s) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{n}\frac{p_r(x)}{(r-1)!}\int\limits_s^x (x-t)^{r-1}J_{\nu-1}(t,s)\,dt\,,\ \nu = 2;3;\ldots,$$

а отже диференціальний вираз (12.85) зводиться до диференціального виразу, що має, власне, вигляд (12.90).

В такому разі є підстави писати

$$K(x,s) = \int\limits_s^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\kappa_i(t,s)\,dt + \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Підкреслимо, що побудова співвідношень (12.86)—(12.87) потребує операцій інтегрування. А це означає, що до коефіцієнтів первісного диференціального рівняння необхідно висувати певні вимоги щодо їх інтегровності, які часто є більш прийнятними за вимоги щодо диференційовності. Співвідношення (12.85) засвідчує, що фундаментальна функція $K(x,s)$ завжди суттєво гладкіша за коефіцієнти диференціального рівняння.

Приклад 2 Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' + p(x)y = 0 .$$

В даному випадку

$$J(x,s) = -\frac{1}{\lambda} p(x)(x-s) ,$$

$$J_1(x,s) = -\frac{1}{\lambda} p(x)(x-s) ,$$

$$J_\nu(x,s) = p(x)\frac{(-1)^\nu}{\lambda^\nu}\int_s^x (x-x_1)p(x_1)\int_s^{x_1}(x_1-x_2)p(x_2)\ldots$$

$$\ldots\int_s^{x_{\nu-3}}(x_{\nu-3}-x_{\nu-2})p(x_{\nu-2})\int_s^{x_{\nu-2}}(x_{\nu-2}-t)(t-s)p(t)\,dt\,dx_{\nu-2}\ldots dx_2dx_1 ,$$

або

$$J_\nu(x,s) = p(x)\frac{(-1)^\nu}{\lambda^\nu}\int_s^x\int_s^{x_1}\ldots\int_s^{x_{\nu-3}}\int_s^{x_{\nu-2}} F(x,x_1,x_2\ldots,x_{\nu-3},x_{\nu-2},t)\times$$

$$\times(t-s)p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_{\nu-2})p(t)\,dtdx_{\nu-2}\ldots dx_2dx_1$$

де

$$F(x,x_1,x_2\ldots,x_{\nu-3},x_{\nu-2},t) = (x-x_1)(x_1-x_2)\ldots(x_{\nu-3}-x_{\nu-2})(x_{\nu-2}-t) =$$

$$= (x-x_1)((x-x_2)-(x-x_1))\ldots((x-x_{\nu-2})-(x-x_{\nu-3}))((x-t)-(x-x_{\nu-2})) .$$

Отже, функція $\dfrac{d^nK(x,s)}{dx^n}$ має множник $p(x)$:

$$\frac{d^nK(x,s)}{dx^n} = p(x)\kappa(x,s) .$$

Зауважимо, що в цьому прикладі (у разі особливої необхідності) можна вирізнити також і окремі адитивні складові.

12.7 Рівняння і система, фундаментальна функція і матрицянт

Як вже зазначалося (див. 7.6), скалярному однорідному рівнянню n -го порядку

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = 0 \tag{12.91}$$

можна поставити у відповідність еквівалентну нормальну систему. За умови

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{12.92}$$

еквівалентна рівнянню (12.91) система набуває вигляду (у формі рівності матриць-стовпців)

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ -p_n(x)\,y_1 - p_{n-1}(x)\,y_2 - \ldots - p_1(x)\,y_n \end{bmatrix} \tag{12.93}$$

або (у векторній формі)

$$Y' = P(x)Y\,, \tag{12.94}$$

де

$$P(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & -p_{n-2}(x) & \ldots & -p_1(x) \end{bmatrix}. \tag{12.95}$$

Подібно, неоднорідне рівняння

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = q(x) \tag{12.96}$$

системою підстановок

$$y = y_1,\ \frac{dy}{dx} = y_2, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_n \tag{12.97}$$

зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2\,,\ \frac{dy_2}{dx} = y_3\,,\ \ldots,\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n\,,$$

$$\frac{dy_n}{dx} = -p_n(x)y_1 - p_{n-1}(x)y_2 - \ldots - p_1(x)y_n + q(x) \tag{12.98}$$

Матричний запис цієї системи має вигляд

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & -p_{n-2}(x) & \ldots & -p_2(x) & -p_1(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix}. \tag{12.99}$$

Згадаємо викладене в 7.4. Розв’язок $Y(x)$ однорідного рівняння (12.93) (чи (12.94)) з неперервними в деякому проміжку I коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$, який би задовольняв умову $Y(x_0) = Y_0$, можна записати у вигляді

$$Y(x) = V(x)V^{-1}(x_0)Y_0 = \mathcal{K}(x, x_0)Y_0\,, \tag{12.100}$$

де $V(x)$ — фундаментальна матриця; $\mathcal{K}(x, x_0) = V(x)V^{-1}(x_0)$ — імпульсна матриця, матрицянт. За тієї ж умови розв’язком неоднорідного рівняння

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + Q(x)\,, \tag{12.101}$$

є матриця

$$Y(x) = \mathcal{K}(x, x_0)Y_0 + \int_{x_0}^{x}\mathcal{K}(x, s)\,Q(s)\,dx\,. \tag{12.102}$$

Нехай $K(x, x_0)$ — відповідна рівнянню (12.91) фундаментальна функція. Вона визначає фундаментальну систему (8.19) розв’язків рівняння (12.91) (в даному разі $\gamma = x_0$). Це за позначень (12.92) означає, що відповідну рівнянню (12.94) фундаментальну матрицю можна подати у вигляді

$$V = V(x, x_0) = \begin{bmatrix} K(x, x_0) & \dot{K}(x, x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K}(x, x_0) \\ K'(x, x_0) & \dot{K}'(x, x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K'}(x, x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(n-1)}(x, x_0) & \dot{K}^{(n-1)}(x, x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K^{(n-1)}}(x, x_0) \end{bmatrix}. \tag{12.103}$$

Нехай задано деяку матрицю

$$[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (12.104)$$

визначник якої не дорівнює нулю:

$$\det[a_{ij}]\neq 0 \ \ (i,\, j=\overline{1,n}).$$

З алгебричних доповнень A_{ij} всіх елементів a_{ij} визначника $\det[a_{ij}]$ побудуємо нову **матрицю**

$$[A_{ji}]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (12.105)$$

яка зветься **приєднаною (союзною)** до матриці $[a_{ij}]$. Підкреслимо, що в *j*-му рядку приєднаної матриці $[A_{ji}]$ розташовано алгебричні доповнення елементів *j*-го стовпця матриці $[a_{ij}]$.

Відомо, що у випадку, коли $\det[a_{ij}]\neq 0$, існує єдина **матриця** $[a_{ij}]^{-1}$, **обернена** до матриці $[a_{ij}]$ (див. 7.2), і вона визначається через приєднану матрицю $[A_{ji}]$ та визначник матриці $[a_{ij}]$ за формулою

$$[a_{ij}]^{-1}=\frac{[A_{ji}]}{\det[a_{ij}]}. \qquad (12.106)$$

Виділимо у деякому визначнику

$$\Delta=\det[\alpha_{ij}]=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nr} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

довільний ряд, наприклад *r*-й стовпець, і для всіх його елементів α_{ir} $(i=\overline{1,n})$ визначимо їх алгебричні доповнення A_{ir} $(i=\overline{1,n})$. Виявляється, що в рівності

$$\lambda_1\mathrm{A}_{1r}+\lambda_2\mathrm{A}_{2r}+\ldots+\lambda_n\mathrm{A}_{nr}=D,$$

де λ_1, λ_2, …, λ_n — довільні числа, права частина є визначником

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \lambda_1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \lambda_2 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \lambda_n & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Інакше кажучи, сума парних добутків алгебричних доповнень елементів якого-небудь обраного ряду визначника Δ на довільні числа λ_i ($i = \overline{1,n}$) дорівнює визначнику D, який випливає з визначника Δ при заміні в ньому елементів згаданого ряду відповідно попарно на числа λ_i ($i = \overline{1,n}$) (**теорема про заміщення**). Легко можна з’ясувати, що якщо за числа λ_i ($i = \overline{1,n}$) правлять елементи якого-небудь паралельного ряду визначника Δ, то обов’язково $D = 0$ (**теорема анулювання**), а якщо елементи самого ж обраного ряду, то $D = \Delta$.

Розумітимемо тепер під (12.104) матрицю з елементами $a_{ij} = \overset{(j-1)}{K^{(i-1)}}(x_0, x_0)$. Її визначник

$$\det V(x_0,x_0) = \begin{vmatrix} & & & & (-1)^{\,n-1} \\ & \mathbf{0} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \overset{(n-1)}{K'}(x_0,x_0) \\ & & & & \vdots \\ & & (-1)^2 & \cdots & \overset{(n-1)}{K^{(n-3)}}(x_0,x_0) \\ & (-1)^1 & \ddot{K}^{(n-2)}(x_0,x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K^{(n-2)}}(x_0,x_0) \\ (-1)^0 & \dot{K}^{(n-1)}(x_0,x_0) & \ddot{K}^{(n-1)}(x_0,x_0) & \cdots & \overset{(n-1)}{K^{(n-1)}}(x_0,x_0) \end{vmatrix} \tag{12.107}$$

дорівнює одиниці (як визначник Вронського фундаментальної системи розв’язків диференціального рівняння (12.91), обчислений при $x = \gamma = x_0$; див. 8.4). Тому обернена до (12.104) матриця (12.106) збігається з відповідною приєднаною до (12.104) матрицею (12.105).

Укладемо добуток фундаментальної матриці (12.103) на матрицю (12.105), приєднану до матриці (12.104) з елементами $a_{ij} = \overset{(j-1)}{K^{(i-1)}}(x_0, x_0)$. Елемент, що повинен стояти в i-му рядку і j-му стовпці матриці-добутку, дорівнює

$$D_{ij} = K^{(i-1)}(x,x_0)A_{j1}(x_0,x_0) + \dot{K}^{(i-1)}(x,x_0)A_{j2}(x_0,x_0) + \ldots + \overset{(n-1)}{K^{(i-1)}}(x,x_0)A_{jn}(x_0,x_0).$$

Відповідно до теореми “про заміщення” останній вираз можна записати у вигляді

$$D_{ij}=\left|\begin{matrix} K(x_0,x_0) & \dot K(x_0,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K}(x_0,x_0) \\ K'(x_0,x_0) & \dot K'(x_0,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K'}(x_0,x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(i-1)}(x,x_0) & \dot K^{(i-1)}(x,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(i-1)}(x,x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(n-1)}(x_0,x_0) & \dot K^{(n-1)}(x_0,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0,x_0) \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \end{matrix}. \qquad (12.108)$$

Тобто, щоби визначити елемент D_{ij} матрицянта, треба у визначнику (12.107) j-ий рядок замінити на i-ий рядок $\left\{K^{(i-1)}(x,x_0),\ \dot K^{(i-1)}(x,x_0),\ \dots,\ \overset{(n-1)}{K}{}^{(i-1)}(x,x_0)\right\}$ матриці $V(x,x_0)$ (див. (12.103)).

Таким чином, матрицянтом, відповідним диференціальному рівнянню (12.91), є матриця $\mathcal{K}(x,x_0)=[D_{ij}]$ з елементами (12.108). Очевидно, що $D_{ij}(x_0,x_0)=\delta_{ij}$, а тому $\mathcal{K}(x_0,x_0)=E$; величина

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ при } i=j, \\ 0 \text{ при } i\neq j \end{cases}$$

зветься **символом Кронекера**; очевидно, що $E=[\delta_{ij}]$.

Зауважимо також, що $D_{ij}=D_{1j}^{(i-1)}=D_j^{(i-1)}$, де

$$D_j=\left|\begin{matrix} K(x_0,x_0) & \dot K(x_0,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K}(x_0,x_0) \\ K'(x_0,x_0) & \dot K'(x_0,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K'}(x_0,x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x,x_0) & \dot K(x,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K}(x,x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{(n-1)}(x_0,x_0) & \dot K^{(n-1)}(x_0,x_0) & \dots & \overset{(n-1)}{K}{}^{(n-1)}(x_0,x_0) \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \end{matrix} \quad (j=\overline{1,n}). \qquad (12.109)$$

Отож,

$$\mathcal{K}(x,x_0)=\begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_n \\ D_1' & D_2' & \dots & D_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1^{(n-1)} & D_2^{(n-1)} & \dots & D_n^{(n-1)} \end{bmatrix}. \qquad (12.110)$$

Вирази (12.110) і (12.109) розкривають **зв'язок між фундаментальною функцією і матрицянтом**.

У випадку неперервної матриці $P(x)$ розв'язок рівняння (12.94) можна відобразити абсолютно і рівномірно збіжним у будь-якій замкнутій частині заданого проміжку I рядом

$$\mathcal{K}(x,x_0)=E+\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds+$$

$$+\int_{x_0}^{x}P(s)\left(\int_{x_0}^{s}P(s_1)\,ds_1\right)ds+\int_{x_0}^{x}P(s)\left(\int_{x_0}^{s}P(s_1)\left(\int_{x_0}^{s_1}P(s_2)\,ds_2\right)ds_1\right)ds+\ldots \qquad (12.111)$$

(див. 7.9); цей ряд також звуть матрицянтом. Нехай матриця

$$P(x)=[\,p_{ij}(x)]_{n\times n}$$

має вигляд (12.95). Добуток останнього рядка цієї матриці на останній стовпець матриці $\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds$ дорівнює

$$\varepsilon(x,x_0)=-p_n(x)\cdot 0-p_{n-1}(x)\cdot 0-\ldots-p_3(x)\cdot 0-p_2(x)\int_{x_0}^{x}ds-p_1(x)\int_{x_0}^{x}(-p_1(s))\,ds=$$

$$=-p_2(x)(x-x_0)+p_1(x)\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\,.$$

Легко бачити (див. (12.110)), що

$$D_n=K(x,x_0)\,.$$

Отже, знайти фундаментальну функцію $K(x,x_0)$ означає побудувати елемент a_{1n} матриці (12.111), який розташований в першому рядку і n-му стовпці. Звернімося до прикладу.

Приклад 3 Нехай матриця $P(x)$ є 4×4-матрицею

$$P(x)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-p_4(x)&-p_3(x)&-p_2(x)&-p_1(x)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-p_4(x)&-p_3(x)&-p_2(x)&-p_1(x)\end{bmatrix}=H+S\ ,$$

і відповідна їй матриця $\int\limits_{x_0}^{x} P(s)\,ds$ має вигляд

$$
\pi_1 = \int\limits_{x_0}^{x} P(x_1)\,dx_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \\ -\int\limits_{x_0}^{x} p_4(x_1)\,dx_1 & -\int\limits_{x_0}^{x} p_3(x_1)\,dx_1 & -\int\limits_{x_0}^{x} p_2(x_1)\,dx_1 & -\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x_1)\,dx_1 \end{bmatrix},
$$

де $\sigma = x - x_0$. Обчислимо матрицю $\pi_2 = \int\limits_{x_0}^{x} P(s) \int\limits_{x_0}^{s} P(x_1)\,dx_1\,ds = \int\limits_{x_0}^{x} P(s)\,\pi_1(s,x_0)\,ds$ (наприклад, за схемою $\pi_2 = \int\limits_{x_0}^{x} (H\pi_1 + S\pi_1)\,ds$, див. додаток Г):

$$
\pi_2 = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & \int\limits_{x_0}^{x} \sigma\,dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int\limits_{x_0}^{x} \sigma\,dx \\ -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_4\,dxdx & -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_3\,dxdx & -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_2\,dxdx & -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdx \\ \int\limits_{x_0}^{x} p_1 \int\limits_{x_0}^{x} p_4\,dxdx & -\int\limits_{x_0}^{x} p_4\sigma\,dx + \int\limits_{x_0}^{x} p_1 \int\limits_{x_0}^{x} p_3\,dxdx & -\int\limits_{x_0}^{x} p_3\sigma\,dx + \int\limits_{x_0}^{x} p_2(x_1)\,dx_1 & -\int\limits_{x_0}^{x} p_4\sigma\,dx + \int\limits_{x_0}^{x} p_1(x_1)\,dx_1 \end{array}\right].
$$

Подібно можна обчислити інтеграл

$$
\pi_3 = \int\limits_{x_0}^{x} P(s) \int\limits_{x_0}^{s} P(x_2) \int\limits_{x_0}^{x_2} P(x_1)\,dx_1 dx_2\,ds = \int\limits_{x_0}^{x} P(s)\,\pi_2(s,x_0)\,ds\,,
$$

а також і всі наступні інтеграли, що входять в (12.111). Укладемо таблицю з останніх стовпців матриці E і матриць π_1, π_2, π_3, $\ldots$:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & 0 & 0 & \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} \sigma\,dxdx & \ldots \\
\hdashline
0 & 0 & \int\limits_{x_0}^{x} \sigma\,dx & -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dx\,dxdx & \ldots \\
\hdashline
0 & \sigma & -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdx & \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon\,dxdx & \ldots \\
\hdashline
1 & -\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dx & \int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon\,dx & \int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3 \int\limits_{x_0}^{x} \sigma\,dx + p_2 \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdx - p_1 \int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon\,dx \right) dx & \ldots \\
E & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c}
\dots & -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dx\,dx\,dx\,dx & \dots \\
\hline
\dots & \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon\,dx\,dx\,dx & \dots \\
\hline
\dots & \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dx + p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdx - p_1\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dxdx & \dots \\
\hline
\dots & \begin{array}{l} \int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_4\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dxdx + p_3\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdxdx - p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dxdx - \right. \\ \qquad \left. - p_1\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dx + p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdx - p_1\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dx\right)dx \end{array} & \dots \\
\pi_3 & \pi_4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c}
\dots & \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon\,dx\,dx\,dx\,dx & \dots \\
\hline
\dots & \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dx + p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdx - p_1\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dxdxdx & \dots \\
\hline
\dots & \begin{array}{l} \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_4\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dxdx + p_3\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdxdx - p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dxdx - \right. \\ \qquad \left. - p_1\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dx + p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdx - p_1\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dx\right)dxdx \end{array} & \dots \\
\hline
\dots & \dots & \dots \\
\pi_4 & \pi_5 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c}
\dots & \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dx + p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdx - p_1\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dxdxdxdx & \dots \\
\hline
\dots & \begin{array}{l} \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_4\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dxdx + p_3\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdxdx - p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dxdx - \right. \\ \qquad \left. - p_1\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dx + p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dxdx - p_1\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dx\right)dxdxdx \end{array} & \dots \\
\hline
\dots & \dots & \dots \\
\hline
\dots & \dots & \dots \\
\pi_5 & \pi_6 &
\end{array}
$$

…	$\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_4\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dxdx+p_3\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}p_1\,dxdxdx-p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dxdx-{}\right.$ $\left.-p_1\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dx+p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}p_1\,dxdx-p_1\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dx\right)dxdxdxdx$	…
…	…	…
…	…	…
…	…	…
π_6	π_7	

Легко зауважити, що кожний стовпець таблиці, починаючи з другого, певним чином зумовлений попереднім: якщо який-небудь стовпець має вигляд $[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4]^{\mathsf{T}}$, то наступний стовпець обов'язково матиме вигляд

$$[\int\limits_{x_0}^{x}\alpha_2 dx,\quad \int\limits_{x_0}^{x}\alpha_3 dx,\quad \int\limits_{x_0}^{x}\alpha_4 dx,\quad \int\limits_{x_0}^{x}(p_4\alpha_1+p_3\alpha_2+p_2\alpha_3+p_1\alpha_4)dx]^{\mathsf{T}}\,.$$

Відповідно до (12.111) і (12.110) сума перших елементів стовпців укладеної таблиці є частиною ряду, який відображає величину $D_n = K(x,x_0)$. Тобто

$$K(x,x_0)=0+0+0+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dxdx-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}p_1\,dxdxdxdx+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dxdxdxdx+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dx+p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}p_1\,dxdx-p_1\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dxdxdxdx+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_4\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dxdx+p_3\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}p_1\,dxdxdx-p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dxdx-\right.$$
$$\left.-p_1\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_3\int\limits_{x_0}^{x}\sigma\,dx+p_2\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}p_1\,dxdx-p_1\int\limits_{x_0}^{x}\varepsilon\,dx\right)dx\right)dxdxdxdx+\ldots$$

або

$$K(x,x_0)=\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left[-p_1(x)-p_2(x)\frac{(x-x_0)}{1!}-p_3(x)\frac{(x-x_0)^2}{2!}-p_4(x)\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\right.$$
$$+p_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds+p_2(x)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}p_1(x)\,dxdx+p_3(x)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}p_1(x)\,dxdxdx-$$
$$-p_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_2(x)(x-x_0)+p_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right)dx-$$
$$-p_2(x)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\left(-p_2(x)(x-x_0)+p_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right)dxdx-$$

$$-p_1(x)\int_{x_0}^{x}\left(-p_3(x)\frac{(x-x_0)^2}{2}+p_2(x)\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p_1(x)\,dxdx-\right.$$

$$\left.\left.\left.-p_1(x)\int_{x_0}^{x}\left(-p_2(x)(x-x_0)+p_1(x)\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right)dx\right)dx\right]dx\,dx\,dx\,dx+\ldots$$

Зауважмо, коефіцієнти $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$ в останньому виразі "заховалися" за чотирикратний інтеграл. А це означає, що фундаментальна функція $K(x,x_0)$ значно гладкіша за ці коефіцієнти; можна умовно вважати, що ступінь гладкості фундаментальної функції відповідає числу 4, якщо за 1 брати ступінь гладкості коефіцієнтів.

Таким чином, еквівалентність задач (12.96), (12.98), (12.99) дозволяє шукати відповідну рівнянню (12.96) фундаментальну функцію $K(x,x_0)$ як структурний елемент матрицянта такого, що визначає розв'язки (12.100) і (12.102) систем (12.94) і (12.101). При цьому у формулі-ряді, за якою визначається фундаментальна функція, коефіцієнти диференціального рівняння *n*-го порядку обов'язково підпадають під *n*-кратне інтегрування.

Нехай ідеться про диференціальне рівняння другого порядку

$$y''-p(x)y=0\,.$$

Йому відповідає матриця

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{bmatrix}.$$

На підставі неї укладемо матриці

$$\int_{x_0}^{x}P\,dx=\begin{bmatrix}0 & \sigma\\ \int_{x_0}^{x}p\,dx & 0\end{bmatrix},\quad \int_{x_0}^{x}P\int_{x_0}^{x}P\,dx\,dx=\begin{bmatrix}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p\,dx\,dx & 0\\ 0 & \int_{x_0}^{x}p\sigma\,dx\end{bmatrix},$$

$$\int_{x_0}^{x}P\int_{x_0}^{x}P\int_{x_0}^{x}P\,dx\,dx\,dx=\begin{bmatrix}0 & \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p\sigma\,dx\,dx\\ \int_{x_0}^{x}p\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p\,dx\,dx\,dx & 0\end{bmatrix},$$

$$\int_{x_0}^{x}P\int_{x_0}^{x}P\int_{x_0}^{x}P\int_{x_0}^{x}P\,dx\,dx\,dx\,dx=\begin{bmatrix}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p\,dx\,dx\,dx\,dx & 0\\ 0 & \int_{x_0}^{x}p\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}p\sigma\,dx\,dx\,dx\end{bmatrix},$$

$$\int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P \int_{x_0}^{x} P\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\sigma\, dx\, dx\, dx\, dx \\ \int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx & 0 \end{bmatrix}, \ldots,$$

де

$$\sigma = \int_{x_0}^{x} dx = x - x_0 .$$

Беручи до уваги ті елементи побудованих матриць, що належать їх першим рядкам і другим стовпцям, знайдемо фундаментальну функцію (елементи-нулі не виписуємо):

$$K(x, x_0) = \sigma + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\sigma\, dx\, dx + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\sigma\, dx\, dx\, dx\, dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\sigma\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} p\sigma\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx + \ldots \qquad (12.112)$$

Нехай тепер $p = \text{const}$. Тоді вираз (12.112) набирає вигляду

$$K(x, x_0) =$$

$$= (x - x_0) + p \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx\, dx + p^2 \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx\, dx\, dx\, dx +$$

$$+ p^3 \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx +$$

$$+ p^4 \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx + \ldots =$$

$$= (x - x_0) + \frac{p(x - x_0)^3}{3!} + \frac{p^2 (x - x_0)^5}{5!} + \frac{p^3 (x - x_0)^7}{7!} + \frac{p^4 (x - x_0)^9}{9!} + \ldots$$

Вірними є формули

$$\mathrm{sh} s = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \frac{s^7}{7!} + \ldots \ (s^2 < \infty),$$

$$\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \frac{s^7}{7!} + - \ldots \ (s^2 < \infty).$$

Отже, якщо $p = -\omega^2$, то (див. табл. 5, приклад 8)

$$\boxed{K(x, x_0) = \frac{1}{\omega} \sin \omega (x - x_0)},$$

а якщо $p = \omega^2$, то (див. табл. 5, приклад 9)

$$\boxed{K(x, x_0) = \frac{1}{\omega} \mathrm{sh} \omega (x - x_0)}.$$

Як зазначалося в 5.2, заміною

$$y = \varphi(x) u,$$

де

$$\varphi = c e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)\,dx}, \ c = \mathrm{const} \neq 0,$$

кожне диференціальне рівняння

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$$

зводиться до диференціального рівняння

$$u'' - p(x) u = 0.$$

При цьому

$$p = -p_2(x) + \frac{1}{4} p_1^2(x) + \frac{1}{2} p_1'(x).$$

Отже, якщо побудувати фундаментальну функцію (12.112), відповідну похідному рівнянню $u'' - p(x)u = 0$, то стає можливим віднайти фундаментальну функцію, відповідну первісному рівнянню $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$.

ДОДАТКИ

А Вибрані питання теорії узагальнених функцій

Поняття узагальненої функції можна ввести, виявляється, багатьма способами. Метод функціоналів (про який йшлося в 1.7) запропонований С. Соболєвим і Л. Шварцем. Він належить до найперших з тих, що набули визнання. Пізніше з'явився так званий **секвенційний** (лат. sequentia — слідування, повторення) **підхід до означення узагальнених функцій** [1]. Йому властива змістовнісна прозорість, природність тлумачень. В рамках методу секвенцій узагальнена функція тлумачиться як границя послідовностей звичайних функцій. Наприклад, функції з класичного аналізу

$$\frac{\sin nx}{\pi x} \text{ (Діріхле)},$$

$$\frac{1}{2} n e^{-n|x|} \text{ (Пікар)},$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{n}{e^{nx} + e^{-nx}} \text{ (Стільтьєс)}$$

(та й інші, див. 2.3) збігаються до δ-функції (при $n \to \infty$). І цього факту достатньо, щоб оперувати δ-функцією як цілком звичайним математичним об'єктом.

Виявляється, що кожне твердження, доведене в рамках функціонального підходу, може бути доведене в рамках секвенційного підходу, і навпаки. Зокрема, методом секвенцій вельми легко доводяться такі важливі, але, взагалі кажучи, непрості за змістом, твердження:

1° Узагальнена функція $f(x)$, яка дорівнює нулю при $x \neq x_0$ ($f(x) = 0 \forall x \neq 0$), має вигляд

$$\alpha_0 \delta(x - x_0) + \alpha_1 \delta'(x - x_0) + \ldots + \alpha_r \delta^{(r)}(x - x_0) .$$

2° Якщо $g(x)$ деяка локально інтегровна функція і

$$g(x) + \alpha_0 \delta(x - x_0) + \alpha_1 \delta'(x - x_0) + \ldots + \alpha_r \delta^{(r)}(x - x_0) = 0$$

на всій числовій восі $-\infty < x < \infty$, то $g(x) = 0$ і $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$.

3° Узагальнена функція $f(x)$ набуває в точці $x = x_0$ значення c тоді і тільки тоді, коли існує ціле число r і неперервна функція $F(x)$ такі, що

$$F^{(r)}(x) = f(x) \text{ і } \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{(x-x_0)^r} = \frac{c}{r!}.$$

4° Якщо $(f, \varphi) = \varphi(0)$ для кожної $\varphi \in \mathcal{D}$, то $f = \delta(x)$.

Розглянемо знову функцію $\frac{1}{x}$ в термінах узагальненості.

Функція $\frac{1}{x}$ має ознаки узагальненості в інтервалах $-\infty < x < 0$ і $0 < x < \infty$, але вона не означує ніякої узагальненої функції в інтервалі $-\infty < x < \infty$, оскільки не інтегрується в жодному околі точки $x = 0$, яку називатимемо полюсною точкою чи просто полюсом. Натомість, існують в інтервалі $-\infty < x < \infty$ істинно узагальнені функції $f(x)$ і такі, що

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0. \tag{A.1}$$

Наприклад,

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0 \tag{A.2}$$

(похідна тлумачиться в узагальненому сенсі). Якщо до лівої частини рівності (A.2) додати лінійну комбінацію функції $\delta(x)$ і її похідних

$$\alpha_0\delta(x) + \alpha_1\delta'(x) + \ldots + \alpha_r\delta^{(r)}(x),$$

то рівність (A.2) все одно залишиться вірною.

Можна вважати, що рівність (A.2) означує узагальнену функцію $\frac{1}{x}$ як $(\ln|x|)'$. Таке розуміння узагальненості можна поширити на більш широкий клас функцій, що мають полюси в деяких точках і є локально інтегровними поза цими точками. А власне, розглядатимемо функції $f(x)$ в $I = (A, B)$, які в деякому околі довільної точки $x = x_0$ мають вигляд

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{(x-x_0)^\mu}, \tag{A.3}$$

де $f_0(x)$ — інтегровна функція, c_μ ($\mu = \overline{1, m}$) — сталі. Такий розклад узагальненої функції на **інтегровну складову** $f_0(x)$ і **сингулярну складову** $\sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{(x-x_0)^\mu}$ (яка, зрештою, може бути і відсутньою) є єдиним.

Точки $x = x_0$, для яких хоча б одна стала c_μ не дорівнює нулю, називаються **полюсами** функції $f(x)$. Будь-якому відрізку $\widetilde{I} = [a,b]$ може належати тільки скінченна кількість полюсів, а тому більш загально можна писати

$$f(x) = f_n(x) + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_{\nu\mu}}{(x - x_\nu)^\mu}, \tag{A.4}$$

де $f_n(x)$ — інтегровна функція; x_ν, $\nu = \overline{1,n}$, — полюси функції $f(x)$, належні $\widetilde{I} = [a,b]$; $c_{\nu\mu}$ ($\nu = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{1,m}$) — сталі; μ — порядок полюса.

Вважаючи, що a і b не належать до множини полюсних точок, можна ввести таку операцію формального інтегрування виразу (А.4):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx + \int_a^b \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_{\nu\mu}}{(x - x_\nu)^\mu}\,dx =$$

$$= \left(\int_a^b f_n(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu 1} \ln|\,x - x_\nu\,|\Big|_a^b \right) + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=2}^{m} \frac{-c_{\nu\mu}}{(\mu-1)(x - x_\nu)^{\mu-1}}\Bigg|_a^b .$$

Так само можна розуміти невизначений інтеграл

$$\int_a^x f(x)\,dx + c,$$

де a не є полюсом, c — довільна стала. Цей інтеграл з точністю до сталої є функцією з полюсами, порядки яких на одиницю менші за порядки тих самих полюсів функції $f(x)$.

Інтегруючи, зокрема, функцію (А.3) m разів, можна знайти локально інтегровну функцію $F(x)$, означену з точністю до многочлена степеня, меншого за m. Ототожнимо узагальнену похідну $F^{(m)}(x)$ з функцією $f(x)$. В такому разі стає можливим до узагальнених функцій віднести всі раціональні функції. Зокрема, узагальнена функція

$$\frac{1}{(x - x_0)^m}$$

ототожнюється з узагальненою похідною m-го порядку від функції

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \ln|\,x - x_0\,|.$$

В цьому випадку за означенням

$$\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)' = (-\ln|\,x\,|)''$$

(підкреслимо, що тут символ $\frac{1}{x^2}$ позначає узагальнену функцію, і його ніяк не можна ототожнювати з $\left(\frac{1}{x}\right)^2$). На подібних засадах в цю множину потрапляють всі раціональні функції від синуса і косинуса. Зокрема, вірними є формули

$$\mathrm{tg}x = (-\ln|\cos x|)', \ \mathrm{ctg}x = (-\ln|\sin x|)'.$$

Існують підстави до узагальнених віднести й еліптичні функції, гамма-функцію Ойлера тощо.

Спираючись на викладене в [1], далі зосередимо увагу на операціях множення деяких узагальнених функцій.

Під квадратом δ-функції δ^2 розуміють добуток $\delta \cdot \delta$. Вдаючись до поняття δ-послідовності δ_n, запишемо цей добуток у вигляді

$$\delta \cdot \delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n^2.$$

Існує така гладка функція φ з обмеженим носієм, що $\varphi(x) = 1$ при

$$x \in I = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \text{ і } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Послідовність

$$\delta_n(x) = n^q \varphi(n^q x)$$

є δ-послідовністю і при цьому

$$(\delta_n(x))^2 = n^{2q} \text{ при } -\frac{1}{4n} \le x \le \frac{1}{4n}.$$

Тому

$$(\delta_n^2, \varphi) \ge \int_{-\frac{1}{4n} \le x \le \frac{1}{4n}} n^{2q} dx = \left(\frac{n}{2}\right)^q \to \infty.$$

Це дає підстави твердити, що послідовність δ_n^2 не збігається, тобто квадрат δ-функції δ^2 не існує.

Виявляється, що і квадрат $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ узагальненої функції

$$\frac{1}{x} = (\ln|x|)'$$

також не існує.

Керуючись наведеним тут означенням узагальненої функції $\frac{1}{x}$, легко перевірити, що

$$x \cdot \frac{1}{x} = x(\ln|x|)' = 1.$$

Можна довести також, що

$$\frac{1}{x}\delta = -\frac{1}{2}\delta'.$$

Відомий приклад Л. Шварца

$$\left(\frac{1}{x}x\right)\delta \neq \frac{1}{x}(x\delta),$$

засвідчує **неасоціативність добутку** узагальнених функцій. Справді, з одного боку,

$$\left(\frac{1}{x}x\right)\delta = 1 \cdot \delta = \delta,$$

а з другого,

$$\frac{1}{x} \cdot (x\delta) = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0.$$

Асоціативність спостерігається тоді, коли принаймні два з множників є гладкими функціями.

Очевидно, що в рівнянні

$$xf = \delta(x) \tag{А.5}$$

при $x \neq 0$ справджується рівність $xf(x) = 0$; тому $f(x) = 0$ при $x \neq 0$. Отже, кожна узагальнена функція f, що задовольняє рівняння (А.5), повинна обертатись на нуль при $x \neq 0$. Відомо, що такими є функції вигляду

$$f = \alpha_0\delta + \alpha_1\delta' + \ldots + \alpha_n\delta^{(n)},$$

де α_0, α_1, …, α_n — числа. Підставляючи останній вираз в (А.5) і пам'ятаючи, що $x\delta = 0$, $x\delta^{(r)} = -r\delta^{(r-1)}$, знайдемо:

$$-\alpha_1\delta - \ldots - n\alpha_n\delta^{(n-1)} = \delta,$$

звідки $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Таким чином, кожний розв'язок рівняння (А.5) повинен мати вигляд

$$f = \alpha_0\delta - \delta'. \tag{А.6}$$

З іншого боку, кожна узагальнена функція (А.6) задовольняє (А.1). Таким чином, формула (А.2) визначає загальний розв'язок рівняння (А.5).

Проте, рівняння (А.5) не задовольняє (можливо, дещо несподівано) функція $\frac{1}{x}\delta$, ($\frac{1}{x}\delta = -\frac{1}{2}\delta'$ і тому $x\left(\frac{1}{x}\delta\right) \neq \delta$). Оскільки $\delta = \left(x\frac{1}{x}\right)\delta$, то

$$x\left(\frac{1}{x}\delta\right) \neq \left(x\frac{1}{x}\right)\delta,$$

що знову підтверджує неасоціативність множення узагальнених функцій (тут множники розташовані в іншій послідовності у порівнянні з наведеним раніше прикладом Л. Шварца).

Б Окремий випадок заміни змінних

Нехай задано систему

$$F_i\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}}; \ldots; y_n, \frac{dy_n}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right) = 0, \; i = \overline{1,n}. \qquad (Б.1)$$

В кожне рівняння цієї системи можуть входити незалежна змінна x, функції y_i ($i = \overline{1,n}$) від x, похідні від y_i за x до деякого порядку $m_i > 1$ ($i = \overline{1,n}$).

Покладемо

$$y_i = y_{i(0)}, \; i = \overline{1,n}; \qquad (Б.2')$$

$$\frac{dy_{i(r)}}{dx} = y_{i(r+1)}, \; r = \overline{0, m_i - 2}, \; i = \overline{1,n}; \qquad (Б.2)$$

Тоді система (Б.1) набуде вигляду

$$F_i\left(x, y_{1(0)}, y_{1(1)} \ldots, y_{1(m_1-1)}, \frac{dy_{1(m_1-1)}}{dx}; \ldots; y_{n(0)}, y_{n(1)} \ldots, y_{n(m_n-1)}, \frac{dy_{n(m_n-1)}}{dx}\right) = 0,$$
$$i = \overline{1,n}. \qquad (Б.3)$$

Таким чином, система (Б.1) n диференціальних рівнянь вищого за одиницю порядку еквівалентна системі $n + \sum_{i=1}^{n}(m_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} m_i$ диференціальних рівнянь (Б.2), (Б.3) першого порядку та системі n рівностей (Б.2′).

Приклад 1 Задано систему

$$F_1\left(x, y_1, y_2, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}\right) = 0,$$

$$F_2\left(x, y_1, y_2, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \frac{d^2y_2}{dx^2}\right) = 0.$$

За позначень

$$y_1 = z_1,\; y_2 = z_2,\; \frac{dz_1}{dx} = z_3,\; \frac{dz_2}{dx} = z_4$$

матимемо:

$$F_1\left(x, z_1, z_2, z_3, z_4, \frac{dz_3}{dx}\right) = 0,\; F_2\left(x, z_1, z_2, z_3, \frac{dz_3}{dx}, \frac{dz_4}{dx}\right) = 0,$$

$$F_3\left(z_3, \frac{dz_1}{dx}\right) = \frac{dz_1}{dx} - z_3 = 0,\; F_4\left(z_4, \frac{dz_2}{dx}\right) = \frac{dz_2}{dx} - z_4 = 0$$

$$(\, y_1 = z_1,\; y_2 = z_2\,).$$

В Стандартна форма крайової задачі

Нехай йдеться про **крайову задачу, яка поєднує в собі лінійне диференціальне рівняння n-го порядку**

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \tag{В.1}$$

та неоднорідні граничні умови

$$\Gamma_i[y, x_0] \equiv \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} y^{(r-1)}(x_0) = g_i,\; i = \overline{1,k},\; k < n, \tag{В.2}$$

$$\Gamma_i[y, x_1] \equiv \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} y^{(r-1)}(x_0) = g_i,\; i = \overline{k+1,n}; \tag{В.3}$$

$p_r(x) \in \mathrm{C}^{n-r}[x_0, x_1]$ ($r = \overline{1,n}$), $p_0(x) \in \mathrm{C}^n[x_0, x_1]$, $p_0(x) \neq 0\, \forall x \in (x_0, x_1)$, $q(x) \in D'$ — відомі функції (D' — простір узагальнених функцій). Задачу (В.1)—(В.3) разом з А. Бутковським називатимемо задачею **в стандартній формі**, якщо всі числа g_i, $i = \overline{1,n}$, є нулями, і задачею **в нестандартній формі**, якщо хоча б одне з цих чисел не дорівнює нулю.

Розумним є вважати граничні форми $\Gamma_i[y, x_0] \equiv \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} y^{(r-1)}(x_0)$, $i = \overline{1,k}$, $k < n$, лінійно незалежними і припустити, що існує відмінний від нуля визначник

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{1i_1} & \alpha_{1i_2} & \cdots & \alpha_{1i_k} \\ \alpha_{2i_1} & \alpha_{2i_2} & \cdots & \alpha_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ki_1} & \alpha_{ki_2} & \cdots & \alpha_{ki_k} \end{vmatrix}.$$

Граничні форми $\Gamma_i[y,x_1]\equiv\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ir}y^{(r-1)}(x_1)$, $i=\overline{k+1,n}$ також доречно вважати лінійно незалежними, покладаючи, що існує відмінний від нуля визначник

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\alpha_{k+1,\,j_1} & \alpha_{k+1,\,j_2} & \cdots & \alpha_{k+1,\,j_{n-k}}\\ \alpha_{k+2,\,j_1} & \alpha_{k+2,\,j_2} & \cdots & \alpha_{k+2,\,j_{n-k}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n,\,j_1} & \alpha_{n,\,j_2} & \cdots & \alpha_{n,\,j_{n-k}}\end{vmatrix}.$$

Множину $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ позначимо через I, а множину $\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}$ — через J.

Вірним є таке твердження: існує принаймні одна функція $w(x)\in D'$ така, що крайова задача в стандартній формі, яка поєднує в собі лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=w(x), \qquad (B.4)$$

та однорідні граничні умови

$$\Gamma_i[y,x_0]\equiv\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ir}y^{(r-1)}(x_0)=0,\ i=\overline{1,k},\ k<n, \qquad (B.5)$$

$$\Gamma_i[y,x_1]\equiv\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ir}y^{(r-1)}(x_0)=0,\ i=\overline{k+1,n}, \qquad (B.6)$$

еквівалентна крайовій задачі (B.1)—(B.3) **в нестандартній формі**. **Функція** $w(x)\in D'$, яку доречно назвати **стандартизувальною**, має вигляд

$$w(x)=q(x)-\frac{1}{\Delta_1}\sum_{j_r\in J}\ \sum_{m+l=n-j_r}(-1)^m\Phi_{lm}(x_1)\Delta_{j_r}+\frac{1}{\Delta_0}\sum_{i_r\in I}\ \sum_{m+l=n-i_r}(-1)^m\Phi_{lm}(x_0)\Delta_{i_r},$$

де

$$\Phi_{lm}(s)=p_l(x)\delta^{(m)}(x-s)=C_m^0p_l^{(m)}(s)\delta(x-s)-C_m^1p_l^{(m-1)}(s)\delta'(x-s)+\ldots+$$

$$+(-1)^rC_m^rp_l^{(m-r)}(s)\delta^{(r)}(x-s)+\ldots+(-1)^mC_m^mp_l(s)\delta^{(m)}(x-s), \qquad (B.7)$$

Δ_{j_r}, Δ_{i_r} — визначники, які випливають з визначників Δ_1, Δ_0 при заміні в них стовпців j_r, i_r на стовпці $\{g_{k+1},g_{k+2},\ldots,g_n\}$, $\{g_1,g_2,\ldots,g_k\}$ відповідно.

Наведене твердження розкриває зміст так званої **операції стандартизування** — зведення задачі (B.1)—(B.3) з неоднорідними граничними умовами до задачі (B.4)—(B.6) з однорідними граничними умовами. Ця операція не належить, взагалі кажучи, до однозначних. Випливає висновок про неоднозначність з таких простих міркувань.

У матриці коефіцієнтів системи (В.2), яка має розмір $n\times k$ і ранг k, може існувати C_n^k квадратних підматриць з розміром $k\times k$ і відмінним від нуля визначником Δ_1 порядку k. Подібно, у матриці коефіцієнтів системи (В.3), яка має розмір $n\times(n-k)$ і ранг $n-k$, також може існувати C_n^k квадратних підматриць з відмінним від нуля визначником Δ_0 порядку $n-k$. Беручи різні пари визначників Δ_1 порядку k і Δ_0 порядку $n-k$, можна за формулою (В.7) побудувати не одну стандартизувальну функцію $w(x)\in D'$.

Звернемося до диференціальної задачі

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y-\lambda y=q(x),$$

$$\Gamma_i(x)\equiv\alpha_{i0}y(a)+\ldots+\alpha_{i,n-1}y^{(n-1)}(a)+\beta_{i0}y(b)+\ldots+\beta_{i,n-1}y^{(n-1)}(b)=g_i\,,$$

$$i=\overline{1,n}\,,\;x\in I=[a,b]$$

де $p_0(x),p_1(x),\cdots,p_{n-1}(x),p_n(x)$ та $q(x)$ — задані в $I=[a,b]$ неперервні функції. Відомо, що для неї стандартизувальну функцію і **функцію Ґріна** можна подати у вигляді

$$w(x)=q(x)+w(a,b,g,p(x),\zeta)\,,$$

$$g=(g_1,\ldots,g_n)\,,\;p(x)=(p_0(x),p_1(x),\ldots,p_1(x))\,,\;\zeta=(\alpha_{ij};\beta_{ij})\,,\;i=\overline{1,n}\,,\;j=\overline{0,n-1}\,,$$

$$G(x,\gamma,\lambda)=\frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)}H(x,\gamma,\lambda)\,,$$

де

$$\Delta(\lambda)=\det(\Gamma_i(y_j))\,,\;i,j=\overline{1,n}\,,$$

$$H(x,\gamma,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & Y\\ \Gamma_1(y_1) & \Gamma_1(y_2) & \cdots & \Gamma_1(y_n) & \Gamma_1(Y)\\ \Gamma_2(y_1) & \Gamma_2(y_2) & \cdots & \Gamma_2(y_n) & \Gamma_2(Y)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \Gamma_n(y_1) & \Gamma_n(y_2) & \cdots & \Gamma_n(y_n) & \Gamma_n(y_1)\end{vmatrix},$$

$$Y=Y(x,\gamma,\lambda)=\frac{\operatorname{sgn}(x-\gamma)}{2W(\gamma)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ y_1^{(n-2)}(\gamma) & y_2^{(n-2)}(\gamma) & \cdots & y_n^{(n-2)}(\gamma)\\ y_1^{(n-3)}(\gamma) & y_2^{(n-3)}(\gamma) & \cdots & y_n^{(n-3)}(\gamma)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1(\gamma) & y_2(\gamma) & \cdots & y_n(\gamma)\end{vmatrix}$$

— фундаментальний розв'язок,

$$W = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix},$$

$y_j = y_j(x, \lambda)$, $j = \overline{1, n}$ — система розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння така, що задовольняє початкові умови

$$y_j^{(\nu-1)}(a, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq \nu, \\ 1 & \text{при } j = \nu. \end{cases}$$

У випадку диференціальної задачі зі сталими коефіцієнтами

$$L[y] \equiv p_0\, y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = q(x),$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},\ t \geq 0,$$

стандартизувальна функція і функція Ґріна можуть бути записані у вигляді

$$w(x) = q(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} p_i y_{n-k-i-1} \right) \delta^{(k)}(x),$$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{W_k(y_1(0), y_2(0), \ldots, y_n(0))}{W(y_1(0), y_2(0), \ldots, y_n(0))} y_k(x),$$

де

$$W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_2'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

$W_k[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]$ — визначник, у який перетворюється визначник W при заміні в ньому k-го стовпця на стовпець $(0, 0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, — лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння.

Окремі відомі приклади диференціальних задач і відповідних їм стандартизувальних функцій та функцій Ґріна наведено в табл. 6 і 7 (за А. Бутковським).

Якщо диференціальна задача має фізичний зміст, то не позбавлений фізичного змісту і факт не існування функції Ґріна. Зокрема, розв'язок задачі 10 з табл. 7 для будь-якої функції $w(x)$ неможливо подати у вигляді

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \gamma)\, w(\gamma)\, d\gamma,\ 0 \leq x \leq 1.$$

6 Лінійні диференціальні задачі першого порядку

№	Диференціальна задача	Стандартизувальна функція	Функція Ґріна
1	$ay'+by=q(x)$, $x\ge 0$, $y(0)=y_0$, $a,b=\mathrm{const}$	$w(x)=q(x)+ay_0\delta(x)$	$G(x)=\dfrac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x}$
2	$y'+p(x)y=q(x)$, $x\ge x_0$, $y(x_0)=y_0$, $p(x)$ — неперервна функція	$w(x)=q(x)+y_0\delta(x-x_0)$	$G(x,\gamma)=\theta(x-\gamma)e^{-\int\limits_{\gamma}^{x}p(s)ds}$, $G(x,\gamma)=\theta(x-\gamma)e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p(s)ds}e^{-\int\limits_{x_0}^{\gamma}p(s)ds}$

7 Лінійні диференціальні задачі другого порядку

№	Диференціальна задача	Стандартизувальна функція	Функція Ґріна
1	$-\big((B(x)y')'+A(x)y\big)=$ $=q(x)$, $a\le x\le b$, $B(x)>0$, $\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=g_1$, $\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=g_2$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$, $\beta_1^2+\beta_2^2>0$	$w(x)=w_0(x)=$ $=q(x)+w_a(x)+w_b(x)$ $w_a(x)=\begin{cases}-\dfrac{B(a)}{\alpha_2}\delta(a-x)g_1, \\ \quad \text{коли}\ \alpha_2\ne 0, \\ -\dfrac{B(a)}{\alpha_1}\delta'(a-x)g_1, \\ \quad \text{коли}\ \alpha_1\ne 0,\end{cases}$ $w_b(x)=\begin{cases}-\dfrac{B(b)}{\beta_2}\delta(b-x)g_2, \\ \quad \text{коли}\ \beta_2\ne 0, \\ -\dfrac{B(b)}{\beta_1}\delta'(b-x)g_2, \\ \quad \text{коли}\ \beta_1\ne 0,\end{cases}$	$G(x,\gamma)=G_0(x,\gamma)$ $=\dfrac{1}{C}\begin{cases}y_1(x)y_2(\gamma), & \text{при}\ a\le x\le\gamma\le b, \\ y_1(\gamma)y_2(x), & \text{при}\ a\le\gamma\le x\le b,\end{cases}$ де $C=$ $=-B(x)\big(y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)\big)=$ $=\mathrm{const}$ (C не залежить від x), $y_1(a)=\alpha_2$, $y_1'(a)=-\alpha_1$, $y_2(a)=\beta_2$, $y_2'(a)=-\beta_1$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ — лінійно незалежні розв’язки відповідного однорідного диференціального рівняння; $G(x,\gamma)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_k(x)\varphi_k(\gamma)}{\lambda_k}$, де ряд збігається рівномірно при деякому групуванні членів, якщо, крім умов задачі, дотримується умова: $\lambda_k\ne 0$ — прості (некратні) власні числа

7 **Лінійні диференціальні задачі другого порядку (**продовження**)**

№	Диференціальна задача	Стандартизувальна функція	Функція Ґріна
2	$-p_0(x)y''+p_1(x)y'+$ $+p_2(x)y=q(x)$, $a\le x\le b$, $p_0(x)>0$, $\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=g_1$, $\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=g_2$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$, $\beta_1^2+\beta_2^2>0$	$w(x)=q(x)+\dfrac{w_0(x)}{\mu(x)}$, де $w_0(x)$ визначається так само, як у попередній задачі, покладаючи, однак, $B(x)=$ $=\mu(x)p_0(x)=e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$, $\mu(x)=\dfrac{1}{p_0(x)}e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$	$G(x,\gamma)=\dfrac{G_0(x,\gamma)}{\mu(x)}$, де $G_0(x,\gamma)$ визначається так само, як у попередній задачі, покладаючи $B(x)=e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$, $\mu(x)=\dfrac{1}{p_0(x)}e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$, $C(x)=\mu(x)p_2(x)$
3	$y''+ay'+by=q(x)$, $x\ge 0$, $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$, $a,b=\text{const}$, $4b>a^2$	$w(x)=q(x)+$ $+(y_1+ay_0)\delta(x)+y_0\delta'(x)$	$G(x)=\dfrac{1}{\omega}e^{\alpha x}\sin\omega x$, $\omega=\dfrac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$, $\alpha=-\dfrac{a}{2}$
4	$y''+ay'+by=q(x)$, $x\ge 0$, $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$, $a,b=\text{const}$, $4b=a^2$	$w(x)=q(x)+$ $+(y_1+ay_0)\delta(x)+y_0\delta'(x)$	$G(x)=xe^{-\frac{a}{2}x}=\theta(x)xe^{-\sqrt{b}\,x}$
5	$y''+ay'+by=q(x)$, $x\ge 0$, $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$, $a,b=\text{const}$, $4b>a^2$	$w(x)=q(x)+$ $+(y_1+ay_0)\delta(x)+y_0\delta'(x)$	$G(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-4b}}(e^{k_1x}-e^{k_2x})$, $k_1=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $k_2=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$
6	$-y''=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)=g_1$, $y(1)=g_2$	$w(x)=q(x)-$ $-g_1\delta'(x)-g_2\delta'(x-1)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}(1-\gamma)x, & x\le\gamma,\\(1-x)\gamma, & x\ge\gamma;\end{cases}$ $G(x,\gamma)=\dfrac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\pi x\cdot\sin n\pi\gamma}{n^2}$, $\lambda_k=k^2\pi^2$, $k=1,2,\ldots$, $\varphi_k(x)=\psi_k(x)=\sqrt{2}\sin k\pi x$, $k=1,2,\ldots$

7 **Лінійні диференціальні задачі другого порядку (**продовження**)**

№	Диференціальна задача	Стандартизувальна функція	Функція Ґріна
	$-y''=q(x)$, $-1\le x\le 1$, $y(-1)=g_1$, $y(1)=g_2$	$w(x)=q(x)-$ $-g_1\delta'(x+1)-g_2\delta'(x-1)$	$G(x,\gamma)=-\frac{1}{2}(\lvert x-\gamma\rvert+x\gamma-1)$
8	$-y''=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)=g_0$, $y'(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-g_1\delta(x-1)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}x, 0\le x\le\gamma,\\ \gamma, \gamma\le x\le 1;\end{cases}$ $G(x,\gamma)=$ $=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\gamma}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$
9	$y''=q(x)$, $-\infty<x<\infty$, $\lvert y(-\infty)\rvert<\infty$, $\lvert y(\infty)\rvert<\infty$	—	Не існує
10	$y''=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y'(0)=g_1$, $y'(1)=g_2$	$w(x)=q(x)+$ $+g_1\delta(x)-g_2\delta(1-x)$	Не існує
11	$-y''=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)-\alpha y'(0)=g_0$, $y(1)=g_1$, $\alpha\ne -1$, $\alpha\ne 0$	$w(x)=q(x)-$ $-\frac{g_0}{\alpha}\delta(x)-g_1\delta'(1-x)$	$G(x,\gamma)=$ $=-\frac{1}{\alpha+1}\begin{cases}(x+\alpha)(\gamma-1), 0\le x\le\gamma,\\ (\gamma+\alpha)(x-1), \gamma\le x\le 1\end{cases}$
12	$y''+y=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)-y(1)=g_0$, $y'(0)-y'(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-g_1\delta(x)$	$G(x,\gamma)=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}-\lvert x-\gamma\rvert\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$
13	$y''+y'=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)-y(1)=g_0$, $y'(0)-y'(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-g_1\delta(x)$	Не існує

7 **Лінійні диференціальні задачі другого порядку (**продовження**)**

№	Диференціальна задача	Стандартизувальна функція	Функція Ґріна
14	$y''-a^2y=q(x)$, $0\le x\le 1$, $a=\text{const}\ne 0$ $y(0)=g_0$, $y(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-g_1\delta'(1-x)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\text{sh}a(\gamma-1)\cdot\text{sh}ax}{a\,\text{sh}a}, 0\le x\le\gamma,\\ \dfrac{\text{sh}a\gamma\cdot\text{sh}a(x-1)}{a\,\text{sh}a}, \gamma\le x\le 1\end{cases}$
15	$-y''-y=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)=g_0$, $y(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-g_1\delta'(1-x)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\sin x\cdot\sin(1-\gamma)}{\sin 1}, 0\le x\le\gamma,\\ \dfrac{\sin\gamma\cdot\sin(1-x)}{\sin 1}, \gamma\le x\le 1\end{cases}$
16	$-y''+y=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)=g_0$, $y(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-g_1\delta'(1-x)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\text{sh}x\cdot\text{sh}(1-\gamma)}{\text{sh}1}, 0\le x\le\gamma,\\ \dfrac{\text{sh}\gamma\cdot\text{sh}(1-x)}{\text{sh}1}, \gamma\le x\le 1\end{cases}$
17	$y''-y=q(x)$, $0\le x\le\pi$, $y(0)=g_0$, $y(\pi)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-g_1\delta'(\pi-x)$	Не існує
18	$y''+y=q(x)$, $-\infty\le x\le\infty$, $\|y(-\infty)\|<\infty$, $\|y(\infty)\|<\infty$	$w(x)=q(x)$	$G(x,\gamma)=\dfrac{1}{2}e^{-\|x-\gamma\|}$
19	$y''+a^2y=q(x)$, $0\le x\le 1$, $a=\text{const}\ne 0$ $y(0)-y(1)=g_0$, $y'(0)-y'(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-g_1\delta(x)$	$G(x,\gamma)=\dfrac{1}{2a}\left(\text{ctg}\dfrac{1}{2a}\cos a(x-\gamma)+\right.$ $\left.+\sin a\|x-\gamma\|\right)$
20	$xy''+y'=q(x)$, $0\le x\le 1$, $\|y(0)\|<\infty$, $y(1)=g$	$w(x)=q(x)+g\delta'(1-x)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}-\log\gamma, 0\le x\le\gamma\le 1,\\ -\log x, 0\le\gamma\le x\le 1\end{cases}$
21	$-xy''-y'=q(x)$, $1\le x\le 2$, $y'(1)=g_0$, $y(2)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-\dfrac{1}{2}g_0\delta'(1-x)-2g_1\delta'(2-x)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}\ln\dfrac{2}{\gamma}, 1\le x\le\gamma,\\ \ln\dfrac{2}{x}, \gamma\le x\le 2\end{cases}$

7 **Лінійні диференціальні задачі другого порядку** (закінчення)

№	Диференціальна задача	Стандартизувальна функція	Функція Ґріна
22	$-y''+(1+x^2)y=q(x)$, $-\infty\le x\le\infty$, $y(-\infty)=0$, $y(\infty)=0$	$w(x)=q(x)$	$G(x,\gamma)=$ $=\dfrac{e^{\frac{1}{2}(x^2+\gamma^2)}}{\sqrt{\pi}}\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}e^{-s^2}ds\int_{\gamma}^{\infty}e^{-s^2}ds, & x\le\gamma,\\ \int_{-\infty}^{\gamma}e^{-s^2}ds\int_{x}^{\infty}e^{-s^2}ds, & \gamma\le x\end{cases}$
23	$-y''+(1+x^2)y=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)=g_0$, $y'(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-g_1\delta(1-x)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}ky_1(x)y_2(\gamma), & 0\le x\le\gamma,\\ ky_1(\gamma)y_2(x), & \gamma\le x\le 1,\end{cases}$ де $k=\left(e^{-1}+\int_0^1 e^{-s^2}ds\right)^{-1}$, $y_1(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-s^2}ds$, $y_2(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(e^{-1}+\int_x^1 e^{-s^2}ds\right)$
24	$-(xy')'+(1+x)y=$ $=q(x)$, $0\le x\le 1$, $\|y(0)\|<\infty$, $y(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-g_1\delta'(1-x)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}e^{x+\gamma}\int_{\gamma}^{1}\dfrac{e^{-2s}}{s}ds, & 0\le x\le\gamma,\\ e^{x+\gamma}\int_{x}^{1}\dfrac{e^{-2s}}{s}ds, & \gamma\le x\le 1\end{cases}$
25	$-((1-x^2)y')'-y=$ $=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)=g$, $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x^2)y'(x)=0$	$w(x)=q(x)-g\delta'(x)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & 0\le x\le\gamma\le 1,\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}, & 0\le\gamma\le x\le 1.\end{cases}$
26	$-(x^2+1)y''-2xy'+$ $+2y=q(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)=g_0$, $y(1)-y'(1)=g_1$	$w(x)=q(x)-$ $-g_0\delta'(x)-2g_1\delta(1-x)$	$G(x,\gamma)=\begin{cases}-\gamma(1+x\,\mathrm{arctg}\,x), & 0\le x\le\gamma,\\ -x(1+\gamma\,\mathrm{arctg}\,\gamma), & \gamma\le x\le 1\end{cases}$

Проте, існує узагальнена функція Ґріна

$$G_0(x,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}(1-\gamma^2)-\dfrac{1}{6},\ x\le\gamma,\\ \dfrac{1}{2}\gamma^2+\dfrac{1}{2}(1-x^2)-\dfrac{1}{6},\ x\ge\gamma\end{cases}$$

така, що дозволяє записати розв'язок у вигляді

$$y(x)=\int_0^1 G_0(x,\gamma)\,w(\gamma)\,d\gamma+C,$$

де C — довільна стала. Необхідною і достатньою умовою можливості подання розв'язку у такому вигляді є рівність

$$\int_0^1 w(\gamma)\,d\gamma=0.$$

Якщо під $y(x)$ розуміти, наприклад, зміщення незакріпленої струни, то очевидно, що зовнішні сили з густиною розподілу $w(x)$ повинні самоврівноважуватися, оскільки в даному разі не можуть виникати жодні врівноважувальні реакції. Власне, це і відбиває в собі остання рівність, У випадку самовріваженості стан (байдужої) рівноваги може зміщуватись на довільну відстань C, що не залежить від x.

Гранична задача з лінійним диференціальним рівнянням в загальному випадку може бути зведена до двох чи декількох задач з початковими умовами (задач Коші). Інакше кажучи, гранична задача є суперпозицією задач з початковими умовами.

Зведемо до задачі з початковими умовами, наприклад, граничну задачу другого порядку

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_2(x)y=q(x); \tag{B.8}$$

$$y(a)=y_a,\ y(b)=y_b. \tag{B.9}$$

Для цього покладемо

$$y(x)=y_1(x)+\mu y_2(x), \tag{B.10}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ — довільні поки що функції, μ — невідома стала.

Підставмо (B.10) в (B.8):

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy_1}{dx}+p_2(x)y_1-q(x)+\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy_2}{dx}+p_2(x)y_2\right)=0; \tag{B.11}$$

Вимагатимемо, щоб $y_1(x)$ задовольняла неоднорідне рівняння (B.8), а $y_2(x)$ — відповідне однорідне рівняння. Отже (B.11) справджуватиметься в силу того, що

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy_1}{dx}+p_2(x)y_1=q(x),\ \frac{d^2y_2}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy_2}{dx}+p_2(x)y_2=0.$$

До того ж, нехай задовольняються умови

$$y_1(a)=y_a,\ y_2(a)=0.$$

Диференціюванням (В. 10) знайдемо при $x = a$

$$\frac{dy(a)}{dx} = \frac{dy_1(a)}{dx} + \mu \frac{dy_2(a)}{dx} . \qquad (В.12)$$

Беручи

$$\frac{dy_1(a)}{dx} = 0 , \ \frac{dy_2(a)}{dx} = 1 ,$$

на підставі (В. 12) матимемо

$$\frac{dy(a)}{dx} = \mu$$

(стала збігається з додатковою початковою умовою, яка мала б фігурувати поряд з умовою $y(a) = y_a$ у відповідній задачі Коші). На підставі другого з граничних умов (В.9), знайдемо

$$y(b) = y_1(b) + \mu y_2(b) = y_b ,$$

звідки

$$\frac{dy(a)}{dx} = \mu = \frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} . \qquad (В.13)$$

Таким чином граничну задачу (В.8) — (В.9) до виконання низки кроків:

1) знаходження розв’язку неоднорідного рівняння

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy_1}{dx} + p_2(x) y_1 = q(x)$$

з початковими умовами

$$y_1(a) = y_a , \ \frac{dy_1(a)}{dx} = 0 ,$$

і визначення величини $y_1(b)$;

2) знаходження розв’язку однорідної задачі

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy_2}{dx} + p_2(x) y_2 = 0$$

з початковими умовами

$$y_2(a) = 0 , \ \frac{dy_2(a)}{dx} = 1$$

і визначення величини $y_2(b)$;

3) обчислення сталої μ за формулою (В. 13)

$$\mu = \frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} ;$$

4) знаходження розв’язку первісної граничної задачі за формулою (В. 10)

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x) = y_1(x) + \frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) .$$

Подібно, граничну задачу третього порядку

$$\frac{d^3y}{dx^3}+p_1(x)\frac{d^2y}{dx^2}+p_2(x)\frac{dy}{dx}+p_3(x)y=q(x)\,;$$

$$y(a)=y_a\,,\ \frac{dy(a)}{dx}=y'_a\,,\ y(b)=y_b\,,$$

покладаючи

$$y(x)=y_1(x)+\mu y_2(x)\,,$$

можна звести до двох задач з початковими умовами

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}+p_1(x)\frac{d^2y_1}{dx^2}+p_2(x)\frac{dy_1}{dx}+p_3(x)y_1=q(x)\,,$$

$$y_1(a)=y_{1a}\,,\ \frac{dy_1(a)}{dx}=y'_{1a}\,,\ \frac{d^2y_1(a)}{dx^2}=0$$

та

$$\frac{d^3y_2}{dx^3}+p_1(x)\frac{d^2y_2}{dx^2}+p_2(x)\frac{dy_2}{dx}+p_3(x)y_2=0\,,$$

$$y_2(a)=y_{2a}\,,\ \frac{dy_2(a)}{dx}=y'_{2a}\,,\ \frac{d^2y_2(a)}{dx^2}=1\,.$$

При цьому повинні дотримуватись умови

$$y_2(a)=y_{2a}\,,\ \frac{dy_2(a)}{dx}=y'_{2a}\,,\ \frac{d^2y_2(a)}{dx^2}=1\,.$$

При цьому повинні дотримуватися умови

$$y(a)=y_1(a)+\mu y_2(a)=y_{1a}+\mu y_{2a}=y_a\,,$$

$$y'(a)=y'_1(a)+\mu y'_2(a)=y'_{1a}+\mu y'_{2a}=y'_a\,,$$

$$y(b)=y_1(b)+\mu y_2(b)=y_b\,.$$

Не порушуючи їх, можна, приміром, покласти $y_{1a}=y_a$, $y_{2a}=0$, $y'_{1a}=y'_a$, $y'_{2a}=0$.

В триточковій задачі третього порядку

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}+p_1(x)\frac{d^2y_1}{dx^2}+p_2(x)\frac{dy_1}{dx}+p_3(x)y_1=q(x)\,,\ \frac{dy(a)}{dx}=y'_a\,,\ y(b)=y_b\,,\ \frac{dy(c)}{dx}=y'_c\,.$$

в кожній з точок $x=a$, $x=b$, $x=c$ задана тільки одна умова. Яку б з цих точок не взяти за початкову, для того, щоб сформулювати задачу з початковими умовами, доведеться додатково задати ще дві умови. Тому для зведення граничної задачі до суперпозиції задач з початковими умовами слід ввести власне два невідомих параметри μ і ν, покладаючи

$$y(x)=y_1(x)+\mu y_2(x)+\nu y_3(x)\,. \qquad \text{(В. 14)}$$

Отже цього разу граничній задачі відповідатиме система вже трьох задач з початковими умовами, оскільки в ((В. 14) фігурують три функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$).

Г Окремі питання матричного числення

Хай задано многочлен

$$P[x] = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m$$

(α_0, α_1, α_2, …, α_m — дійсні чи комплексні числа). Значенням цього многочлена при $x = A$, де A — квадратна матриця, зветься матриця

$$P[A] = \alpha_0 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_m A^m ,$$

яка також є квадратною того самого порядку, що й A. Якщо $P[A] = O$, то матриця A вважається коренем многочлена $P[x]$.

Всі дії, пов'язані з додаванням і множенням многочленів, беззастережно переносяться на їх матричні значення. Зокрема: якщо $R[x] = P[x] \pm Q[x]$ — сума (різниця) звичайних, скалярних многочленів, то $R[A] = P[A] \pm Q[A]$ — сума (різниця) матричних многочленів; якщо $R[x] = P[x]Q[x]$ — добуток звичайних многочленів, то $R[A] = P[A]Q[A]$ — добуток матричних многочленів. Кожні два многочлени від однієї і тієї ж матриці перестановні (комутують):

$$P[A]Q[A] = R[A] = Q[A]P[A] .$$

Множити матрицю A на себе можна тільки в тому разі, коли вона квадратна. Через це, коли мова заходить про степені і многочлени від матриць, то мають на увазі лише квадратні матриці певного порядку n.

За означенням *r*-им **степенем матриці** A є вираз

$$A^r = \overset{r}{AA\ldots A}, \; A^0 = E$$

(E — одинична матриця). При цьому справджуються рівності

$$A^p A^q = A^q A^p = A^{p+q} , \; (A^p)^q = A^{pq} ,$$

де p і q — додатні числа для довільної квадратної матриці і будь-які цілі числа (додатні, від'ємні чи нуль) для неособливої матриці. Якщо A — неособлива матриця, то

$$A^{-r} = (A^{-1})^r .$$

Ніякий степінь числа, відмінного від нуля, не може дорівнювати нулю. Натомість, степінь квадратної матриці A^r може дорівнювати нульовій матриці O, навіть якщо A — ненульова матриця. Матриця A називається **нільпотентною** з показником (нільпотентності) l, якщо $A^l = O$ (і отже $A^q = O$ при $q > l$) але $A^r \neq O$, коли $1 < r < l$. (Вирізняють також **інволютивну** матрицю, для якої $A^2 = E$, та **ідемпотентну**, для якої $A^2 = A$.)

Приклад 2 Знайдемо всі степені матриці

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Маємо:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ A^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ A^5=A^6=\ldots=O.$$

Таким чином, матриця A є нільпотентною з показником нільпотентності $l=5$. Подібно, $n\times n$ -матриця

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ldots&1\\0&0&0&\ldots&0\end{bmatrix}_{n\times n}$$

має показник нільпотентності $l=n$ (n-нільпотентна матриця).

Нехай A — квадратна матриця порядку n, а E — такого самого порядку одинична матриця. Відповідна їм матриця

$$\left[A-\lambda E\right]=\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda\end{bmatrix},$$

(чи матриця $\left[\lambda E-A\right]$) де λ — незалежна змінна, називається **характеристичною матрицею**. Визначник останньої матриці в розкритому вигляді

$$|A-\lambda E|=(-1)^n\lambda^n+\psi_1\lambda^{n-1}+\psi_2\lambda^{n-2}+\ldots+\psi_{n-1}\lambda+\psi_n$$

є многочленом від λ степеня n. Многочлен $|A-\lambda E|$ називають відповідно — **характеристичним многочленом матриці** A. Його коефіцієнти ψ_i певним чином визначаються через елементи матриці A; зокрема,

$$\psi_1=-\left(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}\right),\ \psi_n=(-1)^n\,|A|.$$

Корені характеристичного многочлена називають **власними значеннями (власними числами)** або просто **коренями матриці** A.

Зокрема, характеристична матриця, відповідна матриці (12.95)

$$P(x)=\begin{bmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ldots&1\\-p_n(x)&-p_{n-1}(x)&-p_{n-2}(x)&\ldots&-p_1(x)\end{bmatrix},$$

яку називають **нормальною**, має вигляд

$$F[\lambda]=\left[\lambda E-P(x)\right]=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ p_n(x) & p_{n-1}(x) & p_{n-2}(x) & \cdots & p_2(x) & \lambda+p_1(x) \end{bmatrix}.$$

Визначник останньої матриці розгорнемо (розкриємо) за елементами останнього рядка. Усуваючи з основного визначника останній рядок і j-ий стовпець, отримаємо визначник порядку $n-1$, у якого нижче головної діагоналі розташовані тільки нулі, а на самій головній діагоналі — $j-1$ елементів λ і $n-j$ елементів, що дорівнюють -1. Отже алгебричні доповнення елементів останнього рядка визначаються за формулою

$$A_{nj}=(-1)^{n+j}(-1)^{n-j}\lambda^{j-1}=\lambda^{j-1},\ \ j=\overline{1,n},$$

а тому **характеристичне рівняння** набуває вигляду

$$\det F[\lambda]=\lambda^n+p_1(x)\lambda^{n-1}+\ldots+p_{n-1}(x)\lambda+p_n(x)=0.$$

Легко бачити, що характеристична матриця $F[\lambda]=\left[\lambda E-P(x)\right]$ збігається з матрицею $F[0]=-\left[P(x)\right]$, а характеристичне рівняння $\det F[\lambda]=0$ випливає безпосередньо з диференціального рівняння (12.91), якщо замінити $\dfrac{d^i y}{dx^i}$ на λ^i ($i=\overline{1,n}$).

Беручи до уваги вирази $A_{nj}=\lambda^{j-1}$ і вважаючи власні числа λ_1, λ_2, …, λ_n різними, запишемо **перетворювальну (модальну) матрицю** у вигляді

$$T=\begin{bmatrix} A_{n1}(\lambda_1) & A_{n1}(\lambda_2) & \ldots & A_{n1}(\lambda_n) \\ A_{n2}(\lambda_1) & A_{n2}(\lambda_2) & \ldots & A_{n1}2(\lambda_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{nn}(\lambda_1) & A_{nn}(\lambda_2) & \ldots & A_{nn}(\lambda_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Визначник останньої матриці є визначником Ван-дер-Монда (див. розділ 3).

Дві квадратні **матриці** A і B однакового порядку n називаються **подібними**, якщо існує така не вироджена матриця T, що

$$B=T^{-1}AT \text{ або (що те саме) } TB=AT.$$

Матрицю T звуть **перетворювальною** (A в B) чи **модальною**. Подібність матриць наділена властивостями:

1) усяка матриця подібна до себе;

2) якщо A подібна до B, то і B подібна до A;

3) якщо A подібна до B, а B подібна до C, то A подібна до C.

Необхідною ознакою подібності є те, що у подібних матриць обов'язково всі коефіцієнти характеристичних многочленів є одними і тими самими. Це засвідчує, зокрема, що подібні матриці мають однакові характеристичні числа, однакові сліди і визначники. Недостатність ознаки означає, що існують і неподібні матриці з однаковими характеристичними многочленами.

Означення многочлена від матриці природним чином поширюється і на аналітичні функції $f(x)$, які відображувані сумою степеневого ряду в деякому проміжку $(-R, R)$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^r + \ldots,\ \alpha_r = \frac{f^{(r)}(0)}{r!}.$$

Принциповим є те, що значення $f(A)$ у вигляді матричного ряду

$$f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_r A^r + \ldots \qquad (\text{Г}.1)$$

збігається тоді і тільки тоді, коли всі характеристичні числа k_i матриці A лежать в колі збіжності ряду для $f(x)$: $|k_i| < R$ (це є одна з можливих ознак збіжності — достатня і необхідна). Якщо $f(x)$ розкладається з безконечним радіусом збіжності, то матричний ряд (Г.1) має сенс за будь-якої матриці A. Прикладами таких матричних рядів-функцій є

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - + \ldots + (-1)^r \frac{A^{2r-1}}{(2r-1)!} + \ldots,$$

$$\cos A = E - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - + \ldots + (-1)^r \frac{A^{2r}}{(2r)!} + \ldots,$$

$$\text{sh} A = A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \ldots + \frac{A^{2r-1}}{(2r-1)!} + \ldots,$$

$$\text{ch} A = E + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \ldots + \frac{A^{2r}}{(2r)!} + \ldots,$$

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^r}{r!} + \ldots$$

Чи не найважливішою є **матрична показникова функція** e^A. Вона багато в чому подібна на скалярну експоненту $e^{\lambda x}$. Коли α, β — дійсні числа, $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексне число, $i = \sqrt{-1}$, то

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x,\ e^{\lambda x} = e^{\alpha + i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right).$$

Найголовнішими властивостями скалярної експоненти є такі:

$$1^\circ\ \ e^{\alpha_1 x}e^{\alpha_2 x}=e^{(\alpha_1+\alpha_2)x},\ \ 2^\circ\ \ e^{\alpha x}e^{-\alpha x}=1,\ \ 3^\circ\ \ \frac{d}{dx}e^{\alpha x}=\alpha e^{\alpha x},$$

$$4^\circ\ \ \int\limits_{x_0}^{x}e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\Big|_{x_0}^{x},\ \ \alpha\neq 0,\ \ 5^\circ\ \ \left|e^{\lambda x}\right|=e^{\alpha x}.$$

Стосовно матричної показникової функції e^A можна пересвідчитися у вірності формул

$$e^{iA}=\cos A+i\sin A,\ e^{-iA}=\cos A-i\sin A\ \ (i=\sqrt{-1});$$

$$\sin A=\frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i},\ \cos A=\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2},$$

$$\sin^2 A+\cos^2 A=E,\ \cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A,\ \sin 2A=2\cos A\sin A;$$

$$\mathrm{sh}A=\frac{e^{A}-e^{-A}}{2},\ \mathrm{ch}A=\frac{e^{A}+e^{-A}}{2}.$$

Легко бачити, що

$$e^{xA}=E+\frac{x}{1!}A+\frac{x^2}{2!}A^2+\frac{x^3}{3!}A^3+\ldots+\frac{x^r}{r!}A^r+\ldots$$

Те, що останній ряд збігається за довільного x, випливає з оцінки

$$\left|\frac{x^r}{r!}A^r\right|\le\frac{|x|^r}{r!}|A|^r.$$

Очевидно, що $e^{xA}e^{yA}=e^{(x+y)A}$; в загальному $e^{A}e^{B}=e^{A+B}$ тоді, коли матриці A і B мають однаковий розмір і комутують (переставляються без наслідків). При цьому

$$\frac{d}{dx}e^{xA}=Ae^{xA}=e^{xA}A$$

(тут A від x не залежить).

Оперування e^{xA} виглядає вельми простим. Проте, при виконанні конкретних обчислень операції над e^{xA} є дуже незручними. Щоби використати табульовані функції, можна e^{xA} виразити через скалярні елементарні функції вигляду $x^r e^{\lambda x}$, а для цього треба матрицю A звести до канонічної Жорданової форми, а отже серед іншого здолати труднощі, що виникають при визначенні коренів характеристичного рівняння $|A-\lambda E|=0$.

Звісно, формулу (Г.1) є сенс використовувати тоді, коли йдеться про наближені обчислення, тобто коли є можливість обмежитися частковою сумою

$$f(A)=\alpha_0 E+\alpha_1 A+\ldots+\alpha_r A^r.$$

При точних обчисленнях пересічно керуються формулами:

1) Якщо A — нільпонентна матриця, а тому $A^l = O$, $A^{l+1} = O$, $A^{l+2} = O$, …, то ряд (Г.1) природно обривається многочленом $f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_{l-1} A^{l-1}$.

2) Матрицю, у якої всі місця поза головною її діагоналлю зайняті нулями, називають **діагональною**. Якщо D — діагональна матриця з елементами λ_1, λ_2, …, λ_n на головній діагоналі, то $f(D)$ також діагональна матриця з елементами $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, …, $f(\lambda_n)$ на головній діагоналі:

$$f(D) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & & \mathbf{0} \\ & f(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & f(\lambda_1) \end{bmatrix}.$$

3) Якщо відомим є значення $f(A)$, а $B = T^{-1}AT$ — подібна до A матриця, то

$$f(B) = T^{-1} f(A) T,$$

тобто матриця $f(B)$ подібна до $f(A)$ з тією ж перетворювальною матрицею T.

4) Якщо λ_i — характеристичні числа матриці A, то

$$f(A) = f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2 + \ldots + f(\lambda_n)G_n,$$

де матриці G_i не залежать від вигляду функції $f(\cdot)$ і визначаються за формулою

$$G_i = \frac{(A-\lambda_1 E)\ldots(A-\lambda_{i-1}E)(A-\lambda_{i+1}E)\ldots(A-\lambda_n E)}{(\lambda_i-\lambda_1)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}.$$

Матрицю (12.95), можна записати як суму

$$P(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & -p_{n-2}(x) & \ldots & -p_1(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & \ldots & -p_1(x) \end{bmatrix}. \qquad (\text{Г}.2)$$

Перший доданок

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

є наддіагональною n-нільподентною матрицею: $H^p = 0$, $p \geq n$ (про неї згадувалося в прикладі 2).

Матриці H можна поставити у відповідність подібну піддіагональну n-нільподентну матрицю

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриці H і F мають, зокрема, такі властивості:

1) Якщо

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

— многочлен відносно x, то

$$f(H) = \alpha_0 E + \alpha_1 H + \ldots + \alpha_{n-1} H^{n-1} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ & 0 & & \ddots & \alpha_1 \\ & & & & \alpha_0 \end{bmatrix},$$

$$f(F) = \alpha_0 E + \alpha_1 F + \ldots + \alpha_{n-1} F^{n-1} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_0 & & 0 & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix};$$

2) При множенні довільної $m \times n$-матриці A вліворуч на матрицю H (матрицю F) m-го порядку всі рядки матриці A піднімаються (опускаються) на одне місце вгору (униз) так, що перший (останній) рядок матриці A в добутку зникає, а останній (перший) заповнюється нулями; наприклад,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{bmatrix};$$

При множенні довільної $m \times n$-матриці A вправоруч на матрицю H (матрицю F) m-го порядку всі рядки матриці A пересуваються на одне місце праворуч (ліворуч) так, що останній (перший) стовпчик матриці A в добутку зникає, а перший (останній) заповнюється нулями; наприклад,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Другий доданок в (Г.2)

$$S(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & \dots & -p_1(x) \end{bmatrix}$$

має, зокрема, такі властивості:

$$S^r(x) = (-1)^{r-1} p_1^{r-1}(x) S(x) \ \ (r = 1, 2, \dots);$$

$$H^i S H^j = S_{ij} \ \ (0 \le i, j \le n-1),$$

$$S_{ij}(x) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:cccc} 0 & & & 0 & \\ \hdashline 0 & -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & \dots & -p_{j+1}(x) \\ \hdashline 0 & & & 0 & \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ n-i \\ \\ \end{array} \\ j+1 \end{array}, \ \ (S_{00}(x) = S(x));$$

$$H^i S^r H^j = (-1)^{r-1} p_1^{r-1} S_{ij} \ \ (0 \le i, j \le n-1; \ r = 1, 2, \dots);$$

$$H^p S^r = 0, \ S^r H^p = 0 \ \ (p \ge n);$$

$$SHS = p_2(x) S, \ SH^2 S = p_3(x) S, \ \dots, \ SH^r S = p_{r+1}(x) S \ \ (1 \le r \le n-1);$$

$$H^r S^2 = p_1(x) S \ \ (1 \le r \le n-1);$$

$$S^i H^r S^j = (-1)^{i+j-2} p_1^{i+j-2} SH^r S = (-1)^{i+j-2} p_1^{i+j-2} S_{0r} S = (-1)^{i+j-2} p_1^{i+j-2} SS_{r0} =$$

$$= (-1)^{i+j-1} p_1^{i+j-2} p_{r+1} S \ \ (0 \le r \le n-1; \ i, j = 1, 2, \dots);$$

$$HSH^r S = p_{r+1} HS \ \ (1 \le r \le n-1)$$

тощо.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.** Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.— М.: Мир, 1976.— 311 с.
2. **Банах С. С.** Курс функціонального аналізу. Лінійні операції.— Київ: Держ. учбово-педагогічне вид-во "Радянська школа", 1948.— 216 с.
3. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства.— М.: Мир, 1965.— 276.
4. **Бородін О. І., Потьомкін Л. В., Сліпенко А. К.** Основні поняття сучасної алгебри.— Київ: Радянська школа, 1983.— 112 с.
5. **Василенко Н. В.** Теория колебаний.— Киев: Вища школа, 1992.— 429 с.
6. **Вибрации** в технике: Справочник: В 6 т.— М.: Машиностроение, 1978—1981.— Т. 1: Колебания линейных систем.—1978.— 352 с.— Т. 2: Колебания нелинейных механических систем.—1979.— 351 с.— Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов.— 1980.— 544 с.— Т. 4: Вибрационные процессы и машины.— 1981.— 509 с.— Т. 5: Измерения и испытания.— 1981.— 496 с.— Т. 6: Защита от вибрации и ударов.— 1981.— 456 с.
7. **Гащук П., Зорій Л.-М.** Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем.— Львів: Українські технології, 1999.— 372 с.
8. **Давидов М. О.** Курс математичного аналізу. У 3 ч. Ч. 1.Функції однієї змінної.— Київ: Вища школа, 1990.— 383 с. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння.— Київ: Вища школа, 1991.— 366 с. Ч. 3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу.— Київ: Вища школа, 1992.— 359 с.
9. **Диференціальні** рівняння/ І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда— Київ: Вища школа, 1981.— 504 с.
10. **Дороговцев А. Я.** Математичний аналіз: У 2 ч.— К.: Либідь, 1994. Ч. 1.— 320 с.; 1994. Ч. 2.— 302 с.
11. **Завало С. Т.** Курс алгебри.— Київ: Вища школа, 1985.— 503 с.
12. **Замалетдінова Ф. І.** Методи розв'язування диференціальних рівнянь.— Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1961.— 200 с.
13. **Калужнін Л. А., Вишенський В. А., Шуб Ц. А.** Лінійні простори.— Київ: Вища школа, 1971.— 344 с.
14. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.— 576 с.
15. **Колмогоров А. М., Фомін С. В.** Елементи теорії функцій і функціонального аналізу.— Київ: Вища школа, 1974.— 456 с.
16. **Конфорович А. Г.** Нескінченність у математиці.— Київ: Радянська школа, 1978.— 93 с.

17. **Кособуцький П. С., Сегеда М. С.** Комплексні змінні в задачах фізики.— Вид-во Держ. ун-ту “Львівська політехніка”, 2000.— 194 с.

18. **Костарчук В. М., Хацет Б. І.** Курс вищої алгебри.— Київ: Вища школа, 1969.— 540 с.

19. **Креєр Л. І.** Збірник вправ з диференціальних рівнянь.— Київ: Радянська школа, 1940.— 168 с.

20. **Кужель А. В.** Математические импровизации.— Киев: Вища школа, 1983.— 96 с.

21. **Куликов Н. К.** Инженерный метод решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Высшая школа, 1964.

22. **Литвин О. М., Рвачов В. Л.** Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування.— Київ: Наукова думка, 1973.— 123 с.

23. **Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К.** Математичний аналіз: У двох частинах.— Київ: Вища школа, 1993.— Ч. 2.— 375 с.

24. **Математический** анализ: В 3-х ч./ И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда.— Киев: Вища школа, 1987.— Ч. 3: Интегрирование дифференциальных уравнений.— 344 с.

25. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1974.— 480 с.

26. **Рвачев В. Л.** Геометрические приложения алгебры логики.— Киев: Техніка, 1967.— 212 с.

27. **Рвачев В. Л.** Теория *R*-функций и некоторые ее приложения.— Киев: Наукова думка, 1982.— 552 с.

28. **Самойленко А. М., Перестюк М. А.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Вища школа, 1987.— 288 с.

29. **Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.** Диференціальні рівняння.— Київ: Либідь, 1994.— 360 с.

30. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений.— М.: ГИТТЛ, 1953.— 468 с.

31. **Теория** систем с переменной структурой/ С. В. Емельянов, В. И. Уткин, В. А. Таран, Н. Е. Костылева, А. М. Шубладзе, В. Б. Езеров, Е. Н. Дубровский; Под редакцией С. В. Емельянова.— М.: Наука, 1970.— 592 с.

32. **Фаддеев Д. К., Соминский И. С.** Алгебра.— М.: Наука, 1966.— 528 с.

33. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т.— М.: Наука, 1970. Т. 1.— 608 с., Т. 2.— 800 с. Т. 3.— 656 с.

34. **Функції** комплексної змінної. Перетворення Фур’є та Лапласа/ За загальною ред. П. І. Каленюка та Л. О. Новікова.— Львів: Вид-во Держ. ун-ту “Львівська політехніка”, 1999.— 270 с.

35. **Шилов Г. Е.** Математический анализ. Второй специальный курс.— М.: Изд-во МГУ, 1984.— 208 с.

36. **Шкіль М. І., Колесник Т. В.** Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди.— Київ: Вища школа, 1986.— 512 с.

37. **Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М.** Вища математика: Елементи аналітичної геометрії, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.— Київ: Вища школа, 1984.— 391 с.

38. **Шкіль М. І., Сотниченко М. А.** Звичайні диференціальні рівняння.— Київ: Вища школа, 1992.— 303 с.

39. **Шунда М. М., Томусяк А. А.** Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди.— Київ: Вища школа, 1995.— 541 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Науково-навчальне видання

ГАЩУК Петро Миколайович

**ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ
І ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

Монографія — навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
Лист № 14/18.2–400 від 02.04.2001

Редактор Б. Рішняк
Технічний редактор О. Шайнога Коректор Б. Рішняк

Підписано до друку 12.08.2001. Формат $70\times100/_{16}$.
Папір офсетний. Гарнітура Times. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 49,40. Умовн. фарбовідб. 50,05. Обл.-вид. арк. 34,97
Наклад 1020 прим. Зам. 72

Видано НВФ “Українські технології”
м. Львів, 79005, вул. І. Франка, 4.
Тел./факс: (+380 322) 72-15-52. E-mail: ukrtech@mail.lviv.ua

Гащук П. М.
Г 24 Лінійні динамічні системи і звичайні диференціальні рівняння.— Львів: Українські технології, 2002.— 608 с.— 100 іл., 7 табл.— Бібліогр.: 39 назв.
ISBN 966-666-024-5

Викладається теорія лінійних динамічних систем, зведена до побудови інтегралів звичайних лінійних диференційних рівнянь. Поряд з класичною методологією основне місце в теорії посідає так звана фундаментальна функція, однієї якої достатньо, щоб структурувати загальний розв’язок довільної звичайної диференціальної задачі. Розглядаються як класичні, так і узагальнені інтеграли звичайних диференційних рівнянь, серед яких — рівняння з особливостями в коефіцієнтах типу імпульсних функцій.

Призначено для інженерів та математиків, аспірантів та студентів.

$$\text{Г}\,\frac{1602070100\text{-}029}{2002}\ \text{Без оголош.}$$

ББК 22.161.6
УДК 517.2

ISBN 966-666-024-5

П. Гащук

ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ І ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

«Українські технології»