

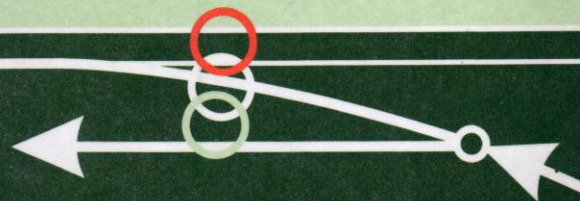
П. Гашук, Л. Зорій

Лінійні моделі

П. Гашук, Л. Зорій

# ЛІНІЙНІ МОДЕЛІ

дискретно-  
неперервних  
механічних систем



Петро ГАЩУК, Лонгін-Микола ЗОРІЙ

**ЛІНІЙНІ МОДЕЛІ  
*ДИСКРЕТНО-*  
*НЕПЕРЕРВНИХ*  
**МЕХАНІЧНИХ  
СИСТЕМ****

Львів 1999

ББК 22.16  
Г 24  
УДК 519.852

Друкується за ухвалою Вченої Ради  
Державного університету “Львівська політехніка”

**Рецензенти:**

**Я. Й. Бурак**, доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент  
Національної академії наук України (Інститут прикладних проблем  
механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України);  
**О. Ф. Дашенко**, доктор технічних наук Заслужений діяч науки  
і техніки України (Одеський державний політехнічний університет)

**Наукове видання**

Г а щ у к Петро Миколайович, З о р і й Лонгін-Микола Михайлович  
**ЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ  
МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

**Монографія**

Редактор Д. В. Митякинська

Технічний редактор С. Нікіпчук Коректор Д. Дончак

Підписано до друку 20.08.98. Формат 60×90/16.

Папір офсетний. Гарнітура Times. Друк офсетний.

Умовн. друк. арк. 23,25. Умовн. фарбовідб. 23,63. Облік.-видавн. арк. 18,14

Наклад 1050 прим. Зам. 261

Верстання, макетування та друкування здійснено НВФ “Українські технології”  
290058, 700-річчя Львова, 67. Тел./факс: (0322) 52-20-49, 72-15-52

**Гащук П., Зорій Л.-М.**

Г 24 Лнійні моделі дискретно-неперервних механічних систем.– Львів:  
Українські технології, 1999.– 372 с.– 78 іл., 21 табл.– Бібліогр.: 124 назви.  
ISBN 966-7292-39-8

Розглядається методологія застосування фундаментальних розв’язків (функцій впливу) до побудови загальних інтегралів звичайних диференціальних рівнянь, серед яких – рівняння з особливостями в коефіцієнтах типу імпульсних функцій. Розв’язуються багатопараметричні задачі з початковими й крайовими умовами, узагальнюються матричний метод початкових параметрів на випадок змінних коефіцієнтів, будуються характеристичні визначники універсального вигляду. На засадах цієї методології для дослідження статичної й динаміки дискретно-неперервних моделей механічних систем з довільними допустимими законами розподілу параметрів розвиваються раціональні методи часткової дискретизації, характеристичних рядів, динамічних податностей (жорсткостей) та інші, причому істотно розширюються межі застосовності цих методів. Розглядаються різноманітні приклади.

Монографія розрахована на математиків, інженерів, студентів, аспірантів.

Г  $\frac{1602070100}{053(02)-99}$  14-99

ББК 22.16  
УДК 519.852

ISBN 966-7292-39-8

© Гащук П. М., Зорій Л.-М. М., 1999

---

---

## ПЕРЕДМОВА

---

---

Суто детерміністичний світогляд пересічно веде до визнання того, що чим складніша модель — тим вона точніша (з огляду на якість формалізованого відтворення реальної системи чи якість ідентифікації бажаних властивостей при формальному синтезі системи). В такому разі, завжди виникають “підстави” адекватності моделей (реаліям чи потребам) пов’язувати раче з нелінійністю, ніж з лінійністю. Проте досвід за-свідчує об’єктивність існування самоорганізованості, синергетичності як процесів утворення механічних систем, так і процесів взаємодії цих систем з довкіллям. Дотримання ж принципу синергетичності веде до визнання того, що завжди існує певна модель оптимальної складності — і тоді, коли йдеться про синтез нової системи, і тоді, коли провадиться аналіз властивостей реальної системи. Серед цих оптимально відповідних реаліям і запитам техніки моделей особливе місце посідають власне лінійні.

Склалось так, що основний принцип вияву лінійності динамічних систем — суперпозиція розв’язків рівнянь, що в математичній формі відтворюють ці системи, — був відкритий зусиллями Л. Ойлера (Ейлера\*) і Ж. Лагранжа близько 1750 року. Власне, від того часу дослідження лінійних систем набули ознак концепційної окресленості, систематичності, методологічної спрямованості.

Разом з тим лінійне моделювання має об’єктивно окреслені межі застосовності. Найкращі приклади того, що в одних випадках необхідність дослідження відповідних нелінійних задач є вимушеною і не має “лінійної альтернативи”, а в інших така альтернатива допустима і природна, можна знайти в рамках теорії біфуркаційних ефектів і явищ Ж. Пуанкаре та теорії стійкості за першим наближенням О. М. Ляпунова. Слід зазначити також, що послідовності лінійних рівнянь є ефективним засобом вивчення й нелінійних рівнянь (методами малого параметра, послідовних наближень тощо).

Дана монографія присвячена методології дослідження лінійних систем, яка розвивалася протягом останніх десятиліть, але ще не набула належно широкого застосування, незважаючи на свою раціональність і помітні переваги. Монографію можна умовно поділити на п’ять частин.

Першу з них складають розділи 1—4, в яких на підставі того, що функція впливу (яка є добутком так званої функції Коші та одичної функції Гевісайда) та її послідовні частинні похідні за початковим параметром в сукупності завжди є фундаментальною системою розв’язків

---

\*В роботі внесено й інші, загалом несуттєві, зміни у звичайне слововживання: перед диференція(я)льний, позовжній, достатній, зовнішній, осьовий (в називному відмінку) та осі (в родовому чи давальному відмінках) перевагу надано еквівалентам диференційний, позовжний, достатний, зовнішній, вісний та вісі.



відповідного лінійного диференційного рівняння, розроблено нові способи побудови загальних інтегралів рівнянь зі змінними коефіцієнтами, і зокрема такими, що мають особливості типу дельта-функції та її похідних. Побудова загальних інтегралів не пов'язана з умовами спряження; одержувані загальні розв'язки визначаються безпосередньо через коефіцієнти рівнянь і характеристики особливостей. Функції впливу визначено як ряди Тейлора, ряди за частотним параметром, а для рівнянь зі сталими коефіцієнтами та звідних до них, а також для систем таких рівнянь — і в замкненій формі. Це дозволило узагальнити метод початкових параметрів, розробити способи визначення неперервних розв'язків задач спряження для рівнянь зі змінними коефіцієнтами та розв'язків, які мають (як і їх похідні) розриви неперервності скінченної величини. При цьому побудовано для рівнянь довільного порядку нормальні фундаментальні та перехідні матриці й встановлено для них тотожності загального вигляду, що застосовуються в конкретних задачах. Переваги методу функцій впливу ілюструються прикладами дослідження статичної та динамічної поведінки пружних стержнів при позовжних і крутних деформаціях.

В розділах 5—7 розглядаються найпростіші неперервно-дискретні моделі систем з довільними допустимими законами розподілів мас і жорсткостей. Побудовано універсальні частотні рівняння та запропоновано способи якісного аналізу впливу параметрів на власні частоти й форми. Розроблено метод часткової дискретизації. Фундаментальні розв'язки застосовано до побудови матриць впливу податностей і жорсткостей. Елементи цих матриць є функціоналами від функцій розподілу характеристик моделей (поздовжної, крутної, згинальної чи циліндричної жорсткостей, параметрів Ляме тощо).

Розділи 8—10 присвячені елементам теорії стійкості механічних систем зі скінченною кількістю ступенів вільності та елементам теорії деформацій пологих арок. Описано основні види втрати стійкості й визначено відповідні критичні навантаження — дивергентне, флатерне (автоколивне) та граничне; проведено порівняльний аналіз статичного, енергетичного й динамічного методів; розглянуто питання про межі їх застосовності.

У розділах 11—16 розглядається метод характеристичних рядів. Основою методу є побудова (з використанням фундаментальних розв'язків) характеристичних визначників крайових задач як рядів за частотним параметром і подальше застосування до них узагальнених критеріїв стійкості — Рауса—Гурвіца, Ерміта—Білера, аперіодичної стійкості. Істотно розширено межі застосовності відомих оцінок Бернштейна для нижчих частот і дивергентних значень параметра навантаження, побудовано двобічні оцінки для критичних навантажень при флатері. Запропоновано способи одержання якісних висновків щодо властивостей систем на підставі аналізу властивостей відповідних їм характеристичних визначників та спосіб побудови сукупності характеристичних рядів для задач про коливання й стійкість пластинок довільної форми в плані. Досліджено стабілізувальні властивості приєднаних мас і осциляторів у задачах про панельний флатер прямокутних пластин. Розглянуто задачі про радіальні коливання однорідних і неоднорідних куль та довгих циліндрів і отримано окремі висновки про вплив на власні частоти модулів об'ємного стискування, коефіцієнта Пуассона тощо.

Останній розділ монографії присвячено обґрунтуванню динамічного методу дослідження континуальних пружних систем, на які діють консервативні і неконсервативні навантаження. Проаналізовано питання існування та єдиності розв'язків відповідних одно- та двовимірних нелінійних задач, а також питання поширення на вказані задачі теорем Ляпунова про стійкість і нестійкість за першим наближенням.

### 1.1 Функція Коші: означення

Нехай

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = q(x) \quad (1.1)$$

– лінійне рівняння зі звичайними похідними, в якому коефіцієнти  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ , ...,  $p_n(x)$  та вільний член  $q(x)$  є неперервними функціями в наперед окресленому замкненому інтервалі  $I = [a, b]$  ( $a \leq x \leq b$ ), і до того ж  $p_0(x) \neq 0$  в  $I = [a, b]$ .

В такому разі [1, 2] це рівняння має єдиний визначуваний в тому самому (!)  $I = [a, b]$  розв'язок  $y = y(x)$ , який при деякому конкретному  $x = x_0 \in [a, b]$  задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.2)$$

Якщо функції  $p_0(x) \neq 0$ ,  $p_1(x)$ , ...,  $p_n(x)$  мають в  $I = [a, b]$  неперервні похідні порядку  $r \geq 0$ , то розв'язок  $y = y(x)$  має в  $I = [a, b]$  неперервні похідні порядку  $n + r$  включно.

За умови  $q(x) \equiv 0$  неоднорідне рівняння (1.1) перетворюється у відповідне однорідне рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \quad (1.3)$$

Надаючи величині  $x_0$  різних значень  $\alpha \in [a, b]$ , серед умов (1.2) можна вирізнити такі, що

$$y(\alpha) = y'(\alpha) = \dots = y^{(n-2)}(\alpha) = 0, \quad y^{(n-1)}(\alpha) = \frac{1}{p_0(\alpha)}, \quad (1.4)$$

і підпорядкувати їм розв'язки рівняння (1.3).

Задача “віднайти розв'язок рівняння (1.3) за умов (1.4)” є похідною від основної задачі (задачі Коші) “віднайти розв'язок рівняння (1.1) за умов (1.2)”. Тому можна стверджувати, що існує напевне, і до того ж єдиний, належно гладкий розв'язок рівняння (1.3), який задовольняв би умови (1.4). Називають цей розв'язок функцією Коші і позначають його як  $K(x, \alpha)$ .

## 1.2 Головна властивість функції Коші

За допомогою відповідних функцій Коші, виявляється, можна записувати загальні розв'язки (загальні інтеграли) лінійних рівнянь у вигляді [3]

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{\partial^i K}{\partial \alpha^i} + y_*(x, \alpha). \quad (1.5)$$

Тут  $A_i$  – довільні сталі, а  $y_*(x, \alpha)$  – окремий, відповідний нульовим умовам

$$y_*(\alpha, \alpha) = y'_*(\alpha, \alpha) = \dots = y_*^{(n-1)}(\alpha, \alpha) = 0,$$

розв'язок рівняння (1.1), який визначається за відомою формулою

$$y_*(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x K(x, s) q(s) ds. \quad (1.6)$$

Іншими словами, загальний розв'язок рівняння вигляду (1.1) можна будувати за структурно простою формулою (1.5), якщо відома відповідна йому належно гладка за параметром  $\alpha$  функція Коші  $K(x, \alpha)$ . Ця функція, в свою чергу, є розв'язком відповідного рівняння вигляду (1.3) за умов (1.4).

Зрозуміло, що запис загального розв'язку лінійного рівняння у вигляді співвідношення (1.5), буде справедливим тоді, коли функція  $K(x, \alpha)$  та її послідовні до  $(n-1)$ -ї включно частинні похідні за параметром  $\alpha$  складатимуть фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння  $L[y]=0$ . Доведемо, що функція Коші такою властивістю власне і наділена.

Нехай функції

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$$

є лінійно-незалежними розв'язками рівняння  $L[y]=0$ . Загальний інтеграл цього рівняння в такому разі має вигляд:

$$y = b_1 \psi_1(x) + b_2 \psi_2(x) + \dots + b_n \psi_n(x). \quad (1.7)$$

Підставляючи (1.7) в (1.3), одержимо неоднорідну систему  $n$  лінійних алгебричних рівнянь на довільні сталі  $b_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Її визначник

$$W(\alpha) = \begin{vmatrix} \psi_1(\alpha) & \psi_2(\alpha) & \dots & \psi_n(\alpha) \\ \psi_1'(\alpha) & \psi_2'(\alpha) & \dots & \psi_n'(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(\alpha) & \psi_2^{(n-1)}(\alpha) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(\alpha) \end{vmatrix}$$

обов'язково відмінний від нуля (оскільки він є заданим в точці  $x = \alpha \in [a, b]$  визначником Вронського системи лінійно-незалежних розв'язків  $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$  рівняння  $L[y]=0$ ). Тому сталі  $b_i$  є однозначно визначуваними функціями параметра  $\alpha$ :  $b_i = b_i(\alpha)$ . Отже і розв'язок рівняння  $L[y]=0$ , який задовольняє умови (1.4), також – однозначно визначуваний:

$$K(x, \alpha) = b_1(\alpha) \psi_1(x) + b_2(\alpha) \psi_2(x) + \dots + b_n(\alpha) \psi_n(x) \quad (1.8)$$

чи

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{W(\alpha)p_0(\alpha)} \begin{vmatrix} \psi_1(\alpha) & \psi_2(\alpha) & \dots & \psi_n(\alpha) \\ \psi_1'(\alpha) & \psi_2'(\alpha) & \dots & \psi_n'(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-2)}(\alpha) & \psi_2^{(n-2)}(\alpha) & \dots & \psi_n^{(n-2)}(\alpha) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \dots & \psi_n(x) \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Вирази (1.8), (1.9) засвідчують, що частинні за параметром  $\alpha$  похідні (будь-якого порядку) функції Коші задовольняють рівняння  $L[y]=0$ .

Систему функцій

$$K(x, \alpha), \quad \frac{\partial K(x, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{n-1} K(x, \alpha)}{\partial \alpha^{n-1}}, \quad (1.10)$$

можна буде визнати фундаментальною системою розв'язків рівняння (1.1), коли її визначник Вронського (складений за аргументом  $x$ ) виявиться відмінним від нуля в  $I = [a, b]$ , засвідчуючи тим самим лінійну незалежність цієї системи функцій. Але якщо є підстави сподіватись на сукупну лінійну незалежність функцій (1.10), то достатно пересвідчитись, що визначник Вронського відмінний від нуля в будь-якій одній точці з  $I = [a, b]$ .

За допомогою формули (1.9) та умов (1.4) можна ідентифікувати співвідношення [3]:

$$\left. \frac{\partial^{i+j} K(x, \alpha)}{\partial \alpha^i \partial x^j} \right|_{x=\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{при } i+j \leq n-2, \\ \frac{(-1)^i}{p_0(\alpha)} & \text{при } i+j = n-1, \end{cases} \quad i, j \geq 0. \quad (1.11)$$

Беручи до уваги (1.11), визначник Вронського при  $x=\alpha$  можна, виявляється, звести до трикутного і легко пересвідчитись, що він відмінний від нуля. Отже система функцій (1.10) справді завжди є фундаментальною, що й обґрунтовує формулу (1.5).

Зауважимо, що для рівнянь зі змінними коефіцієнтами знаходження функцій  $\psi_i(x)$  пересічно є непростим завданням. Тому безпосередньо залучати формулу (1.9) до практичної побудови функцій  $K(x, \alpha)$  доводиться лише в окремих випадках. Більш ефективними, натомість, виявляються розглянуті в [4, 5] загальні способи визначення функцій Коші у вигляді степеневих рядів.

Можливість записувати загальні розв'язки лінійних рівнянь з використанням однієї лише функції Коші створює методологічні засади для розвитку якісно нових застосувань теорії таких рівнянь [2-8]. Властивість функції Коші відображати конкретне – окремий розв'язок рівняння (1.3) за умов (1.4) – і одночасно окреслювати значно загальніше – загальний розв'язок рівняння (1.1) – можна назвати головною її властивістю.

По суті, функція Коші є математичним об'єктом, який доцільно ставити у відповідність не рівнянню як такому, а суто оператору, що визначає це рівняння. Виходячи з цього, в табл. 1 для прикладу наведено низку лінійних операторів та відповідних їм функцій Коші, серед яких здебільшого є такі, що найчастіше залучаються до аналізу властивостей лінійних рівнянь з похідними, або пересічно застосовуються як модельні відображення реальних систем, або ж стануть в нагоді при подальшому викладі матеріалу.

Таблиця 1 Лінійні оператори та відповідні їм функції Коші

№	$L[y]$	$K(x, \alpha)$
1	$(f(x)y)'$	$\int_{\alpha}^x \frac{ds}{f(s)}$
2	$(f(x)y^n)''$	$\int_{\alpha}^x \frac{1}{f(s)} (x-s)(s-\alpha) ds$
3	$(f(x)y^{(n)})^{(n)}$	$\frac{1}{((n-1)!)^2} \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(s)} (x-s)^{n-1} (s-\alpha)^{n-1} ds$
4	$xy' + y,$	$\frac{1}{x}$
5	$y' + axy, a = \text{const}$	$e^{-\frac{a}{2}(x^2 - \alpha^2)}$
6	$y' + \sin 2x \cdot y$	$\frac{1}{e^2} (\cos 2x - \cos 2\alpha)$
7	$y' + a \cos x \cdot y, a = \text{const}$	$e^{-a(\sin x - \sin \alpha)}$
8	$y'' + \frac{1}{x} y'$	$\alpha \ln \frac{x}{\alpha}$
9	$y'' + \frac{2}{x} y' + k^2 y, k = \text{const}$	$\frac{\alpha}{kx} \sin k(x - \alpha)$
10	$y'' + \frac{p^2}{(1+kx)^4} y; p, k = \text{const}$	$\frac{1}{\psi(x, \alpha)} \sin \psi(x, \alpha)(x - \alpha),$ $\psi(x, \alpha) \equiv \frac{p}{(1+k\alpha)(1+kx)}$
11	$y'' + \frac{p}{f(x)} y, p = \text{const}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-p)^k u_k(x, \alpha) \equiv U(x, \alpha);$ $u_0(x, \alpha) = x - \alpha;$ $u_k(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{x-s}{f(s)} u_{k-1}(s, \alpha) ds, k = 1, 2, \dots$

Таблиця 1 Лінійні оператори та відповідні їм функції Коші (продовження)

№	$L[y]$	$K(x, \alpha)$
12	$(f(x)y)'' + py'', p = \text{const}$	$\frac{1}{p} [x - \alpha - U(x, \alpha)] \equiv \int_{\alpha}^x \frac{(x-s)}{f(s)} U(s, \alpha) ds ;$ $U(x, \alpha) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-p)^k u_k(x, \alpha),$ $u_0(x, \alpha) = x - \alpha;$ $u_k(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{x-s}{f(s)} u_{k-1}(s, \alpha) ds, \quad k = 1, 2, \dots$
13	$y'''' + \frac{2}{x} y''' - \frac{1}{x^2} y'' + \frac{1}{x^3} y'$	$\frac{1}{4} \alpha \left[ (\alpha^2 + x^2) \ln \frac{x}{\alpha} + \alpha^2 - x^2 \right]$
14	$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & y_1 \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix};$ $W(x) \equiv W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \neq 0 \quad \forall x \in I,$ $L[y_i] \equiv y_i^{(n)}(x) + p_1(x) y_i^{(n-1)}(x) + \dots$ $\dots + p_n(x) y_i(x) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}$	$\sum_{i=1}^n \frac{W_{ni}(\alpha)}{W(\alpha)} y_i(x);$ $W(\alpha) \equiv W[y_1(\alpha), \dots, y_n(\alpha)], \quad W_{ni}(\alpha) -$ <p>алгебричне доповнення <math>i</math>-го елемента <math>n</math>-го рядка визначника Вронського</p>

На підставі наведеної в табл. 1 інформації серед іншого можна вивчати й властивості функцій Коші, відповідних суто операторам зі сталими коефіцієнтами. Справді, деякі з наведених в табл. 1 операторів безпосередньо зводяться до операторів зі сталими коефіцієнтами, а деякі стають звідними в результаті певних аналітичних перетворень. Але у багатьох випадках оператори зі сталими дійсними коефіцієнтами заслуговують окремого розгляду, табл. 2.

### 1.3 Функція Коші у випадку рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Звернемо увагу на випадок, коли коефіцієнти  $p_0 \neq 0, p_1, \dots, p_n$  в рівнянні (1.1) та відповідному йому рівнянні (1.3) є сталими.

Виявляється, що в цьому випадку

$$K(x, \alpha) \equiv K(x - \alpha). \quad (1.12)$$

Встановити це можна на підставі (1.9), вважаючи, що  $x - \alpha \equiv t$ . За умови  $x - \alpha \equiv t$  визначник Вронського, записаний як функція  $t$ , при  $x = \alpha$  стає визначником Ван-дер-Монда, що, між іншим, спрощує процес визначення функцій Коші.



Таблиця 2 Функції Коші, відповідні деяким операторам зі сталими коефіцієнтами

№	$L[y]$	$K(x, \alpha)$
1	$y'$	1
2	$y'' - 4y' + 5y$	$e^{2(x-\alpha)} \sin(x-\alpha)$
3	$ay', \quad a = \text{const}$	$\frac{1}{a}$
4	$y' + ay, \quad a = \text{const}$	$e^{-a(x-\alpha)}$
5	$y''$	$x - \alpha$
6	$y'' + \omega^2 y, \quad \omega = \text{const}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega(x - \alpha)$
7	$y'' - \omega^2 y, \quad \omega = \text{const}$	$\frac{1}{\omega} \text{sh } \omega(x - \alpha)$
8	$y'' + 2\omega^2 y' + \omega^4 y$	$(x - \alpha) e^{-\omega^2(x-\alpha)}$
9	$y'' + 2\varepsilon y' + \omega^2 y;$ $\varepsilon, \omega = \text{const}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \omega^2$	$\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} e^{-\varepsilon(x-\alpha)} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}(x - \alpha)\right)$
10	$y'' + ay' + by$	$\frac{e^{s_1(x-\alpha)} - e^{s_2(x-\alpha)}}{s_1 - s_2};$ $s_1, s_2 - \text{довільні (комплексні) числа,}$ $s_1 + s_2 = -a, \quad s_1 s_2 = b$
11	$y''' + y''$	$e^{-(x-\alpha)} + (x - \alpha) - 1$
12	$y''''$	$\frac{(x - \alpha)^3}{3!}$
13	$y'''' + r^2 y'', \quad r = \text{const}$	$\frac{r(x-\alpha) - \sin r(x-\alpha)}{r^3}$
14	$y'''' - \mu^2 y'', \quad \mu = \text{const}$	$\frac{\text{sh} \mu(x-\alpha) - \mu(x-\alpha)}{\mu^3}$
15	$y'''' - \vartheta^4 y, \quad \vartheta = \text{const}$	$\frac{1}{2\vartheta^3} (\text{sh } \vartheta(x-\alpha) - \sin \vartheta(x-\alpha))$
16	$y'''' - \beta y'' - \delta y, \quad \beta, \delta = \text{const}$	$\frac{1}{\mu^2 + r^2} \left( \frac{\text{sh} \mu(x-\alpha)}{\mu} - \frac{\sin r(x-\alpha)}{r} \right);$ $\mu^2 = \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 + \delta} + \frac{1}{2}\beta, \quad r^2 = \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 + \delta} - \frac{1}{2}\beta$
17	$y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_n y,$ $a_1, \dots, a_n = \text{const}$	$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p'_n(s_i)} e^{s_i(x-\alpha)}; \quad p_n(s_i) = 0,$ $p_n(s) = s^n - a_1 s^{n-1} - \dots - a_n$

Простіше, однак, вдатися до заміни незалежної змінної за формулою  $x - \alpha \equiv t$  в рівнянні (1.3). Застосовуючи алгоритм  $dz/dx = dz/dt \cdot dt/dx = dz/dt$ , знайдемо:  $d^j y/dx^j = d^j y/dt^j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . А відтак з'ясуємо, що заміна змінної  $x$  на  $t$  зводить рівняння (1.3) до абсолютно аналогічного рівняння

$$L[y] \equiv p_0 \frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + p_n y = 0. \quad (1.13)$$

Умови (1.4) при цьому набувають вигляду ( $t = x - \alpha = 0$  при  $x = \alpha$ ):

$$y(t)|_{t=0} = y'(t)|_{t=0} = \dots = y^{(n-2)}(t)|_{t=0} = 0, \quad y^{(n-1)}(t)|_{t=0} = \frac{1}{p_0}. \quad (1.14)$$

Оскільки співвідношення (1.13) і (1.14) не відбивають в собі жодної інформації про параметр  $\alpha$ , то окремий розв'язок рівняння (1.13) за умов (1.14) не може бути залежним від  $\alpha$ . То ж можна писати:  $K(t, \alpha) = \varphi(t) \equiv K(x - \alpha)$ .

Звідси випливає, що у випадку сталих  $p_0 \neq 0$ ,  $p_1, \dots, p_n$  відповідна рівнянню (1.1) функція Коші є визначуваною суто через різницю аргумента  $x$  і параметра  $\alpha$  (див. (1.12)). Це, зокрема, унаочнюють приклади, наведені в табл. 2.

Отже, загальний розв'язок (1.5), (1.6) рівняння (1.1) у випадку сталих коефіцієнтів  $p_0 \neq 0$ ,  $p_1, \dots, p_n$  можна подати у вигляді рівності

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i A_i K^{(i)}(x - \alpha) + \int_{\alpha}^x K(x - s) q(s) ds. \quad (1.15)$$

Те, що  $K$  (див. (1.12)), та  $K, K', \dots, K^{(n-1)}$  складають систему лінійно незалежних розв'язків рівняння зі сталими коефіцієнтами, а отже формують розв'язок (1.15), є відомим [9].

Оператори зі сталими коефіцієнтами певним чином співвідносяться один з одним за рівнем їх загальності. Очевидно, що приклад 2 з табл. 2 є окремим випадком прикладу 9. Тут конкретне успадковує властивості загального за рахунок того, що довільні параметри  $\omega, \varepsilon$  набувають конкретних значень (стають числами). При цьому ні оператор, ні функція Коші структурних змін не зазнають. Натомість, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  приклад 9 зводиться до прикладу 7 з відповідними структурними змінами оператора і функції Коші. З аналогічними змінами приклад 6 (як і, зрештою, приклад 7) зводиться до прикладу 5 при  $\omega \rightarrow 0$ . Якщо в прикладі 10 покласти  $s_1 - s_2 \rightarrow 0$ , то з'ясуємо:

$$K = \lim_{s_2, s_1 \rightarrow s} \frac{e^{s_1(x-\alpha)} - e^{s_2(x-\alpha)}}{s_1 - s_2} = (x - \alpha) e^{s(x-\alpha)}.$$

Є підстави структурні зміни вважати незворотними через те, що однозначне відновлення первісних (загальних) оператора і функції Коші в рамках конкретного є неможливим.

Зосередимо тепер увагу на прикладі 16 з табл. 2.

Нехай спочатку  $\beta \rightarrow 0$ . Позначаючи  $\mu^2 = r^2 = \vartheta^2$ , функцію Коші (див. табл. 2) можна подати у вигляді

$$K(t) = \frac{1}{2\vartheta^3} (\text{sh } \vartheta t - \sin \vartheta t)$$

( $t = x - \alpha$ ). Похідні

$$K'(t) = \frac{1}{2\vartheta^2} (\text{ch } \vartheta t - \cos \vartheta t), \quad K''(t) = \frac{1}{2\vartheta} (\text{sh } \vartheta t + \sin \vartheta t),$$

$$K'''(t) = \frac{1}{2} (\text{ch } \vartheta t + \cos \vartheta t),$$

які пов'язані з відомими функціями Крилова [10], відповідають рівнянню

$$y'''' - \vartheta^4 y = 0 \quad (\vartheta^4 = \delta).$$

То ж приклад 16 при  $\beta \rightarrow 0$  зводиться до прикладу 15. Якщо, до того ж, і  $\delta = \vartheta^4 \rightarrow 0$ , то застосовуючи правило Лопіталя, матимемо:

$$K(t)|_{\beta=\vartheta=0} = \frac{\left( \frac{\partial^3}{\partial \vartheta^3} (\text{sh } \vartheta t - \sin \vartheta t) \right) \Big|_{\vartheta=0}}{2 \left( \frac{\partial^3}{\partial \vartheta^3} \vartheta^3 \right) \Big|_{\vartheta=0}} = \frac{t^3}{3!}$$

(приклад 12, табл. 2).

Припустимо, що в прикладі 16 тепер  $\delta \rightarrow 0$ . Розрізнятимемо при цьому два випадки:  $\beta \geq 0$  і  $\beta \leq 0$ . В першому з них  $\mu^2 = \beta \geq 0$ ,  $r^2 = 0$ ,

$$K(t) = \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\text{sh } \mu t}{\mu} - t \right),$$

(див. приклад 14, а в другому  $\mu^2 = 0$ ,  $r^2 = -\beta \geq 0$ ,

$$K(t) = \frac{rt - \sin rt}{r^3}$$

(див. приклад 13). Якщо, до того ж, і  $r \rightarrow 0$ , то

$$K(t)|_{\delta=r=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{rt - \left( \frac{rt}{1!} - \frac{r^3 t^3}{3!} + \frac{r^5 t^5}{5!} - \frac{r^7 t^7}{7!} + \dots \right)}{r^3} = \frac{t^3}{3!},$$

чого і слід було сподіватись для рівняння  $y'''' = 0$  (приклад 12, табл. 2).

Наведені приклади засвідчують, що аналітичні перетворення операторів позначаються на змінах Коші-функцій лише однозначно та з повним збереженням взаємовідповідності між операторами та цими функціями.

Зазначимо, що вивчення відношень загальності стосовно рівнянь з похідними може виявитись корисним при формуванні методологічних засад для дослідження властивостей конкретних систем через властивості інших систем, які з тими чи іншими ознаками є загальнішими. Часто шлях власне від загального до окремого, конкретного є чи не найпродуктивнішим.

## 1.4 Взаємозумовлені оператори

Нехай функції  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  є лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (1.16)$$

порядку  $n \geq 2$  з неперервними в деякому  $I = [a, b]$  коефіцієнтами  $p_1, \dots, p_n$ , такі що

$$W_{n-1}(x) \equiv W[y_1, y_2, \dots, y_{n-1}] \neq 0 \quad \forall x \in I = [a, b]. \quad (1.17)$$

( $W[\cdot]$  – визначник Вронського).

Позначаючи

$$K_{n-1}(x, \alpha) \equiv \frac{1}{W_{n-1}(\alpha)} \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) & \dots & y_{n-1}(\alpha) \\ y_1'(\alpha) & y_2'(\alpha) & \dots & y_{n-1}'(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-3)}(\alpha) & y_2^{(n-3)}(\alpha) & \dots & y_{n-1}^{(n-3)}(\alpha) \\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) \end{vmatrix}, \quad n \geq 2 \quad (1.18)$$

( $K_{n-1}(x, \alpha) = K_1(x, \alpha) \equiv y_1(x)$  при  $n = 2$ ) розглянемо функцію

$$y_n = \int_{\alpha}^x K_{n-1}(x, \beta) \varphi(\beta) d\beta \quad (x, \alpha \in I), \quad (1.19)$$

$\varphi(\cdot)$  – довільна поки що функція.

Розкладаючи визначник у виразі (1.18) за елементами останнього рядка, кожен з яких є розв'язком рівняння (1.16), легко пересвідчитись, що й сама функція  $K_{n-1}(x, \alpha)$  задовольняє рівняння (1.16):

$$L_n[K_{n-1}] = 0 \quad (1.20)$$

( $K_{n-1}(x, \alpha)$  лінійно залежна від  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ ).

Обчислимо похідні функції (1.19):

$$y'_n = \int_{\alpha}^x K'_{n-1}(x, \beta) \varphi(\beta) d\beta,$$

.....

$$y_n^{(n-2)} = \int_{\alpha}^x K_{n-1}^{(n-2)}(x, \beta) \varphi(\beta) d\beta,$$

$$y_n^{(n-1)} = \int_{\alpha}^x K_{n-1}^{(n-1)}(x, \beta) \varphi(\beta) d\beta + W_{n-1}(x) \varphi(x),$$

$$y_n^{(n)} = \int_{\alpha}^x K_{n-1}^{(n)}(x, \beta) \varphi(\beta) d\beta + K_{n-1}^{(n-1)}(x, x) \varphi(x) + \varphi'(x). \quad (1.21)$$

Підставляючи (1.19), (1.21) в (1.16), знайдемо:

$$L[y_n] = \int_{\alpha}^x L_n[K_{n-1}(x, \beta)] \varphi(\beta) d\beta + \varphi'(x) + K_{n-1}^{(n-1)}(x, x) \varphi(x) + p_1(x) \varphi(x) \quad \forall x \in I = [a, b].$$

Враховуючи (1.20), переконуємось, що функція  $y_n(x)$  є розв'язком рівняння (1.16), якщо

$$\varphi'(x) + (p_1(x) + K_{n-1}^{(n-1)}(x, x)) \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in I = [a, b]. \quad (1.22)$$

Диференціюючи співвідношення (1.18), знаходимо

$$K_{n-1}^{(n-1)}(x, x) = \frac{W'_{n-1}(x)}{W_{n-1}(x)}. \quad (1.23)$$

З іншого боку, за формулою Остроградського-Ліувіля

$$\frac{W'_{n-1}(x)}{W_{n-1}(x)} = -\tilde{p}_1(x), \quad (1.24)$$

де  $\tilde{p}_1(x)$  – коефіцієнт біля  $(n-2)$ -ої похідної в рівнянні  $L_{n-1}[y] = 0$ , для якого функції  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  є лінійно незалежними розв'язками. Тому (1.22) можна записати так:

$$\varphi'(x) + A(x) \varphi(x) = 0, \quad (1.25)$$

де

$$A(x) \equiv p_1(x) - \tilde{p}_1(x). \quad (1.26)$$

Отже, зважаючи на (1.25), (1.26), знайдемо:

$$\varphi(x) = C e^{-\int_{\alpha}^x A(s) ds} \quad (x \in I) \quad (1.27)$$

( $C$  – довільна стала).

Кладучи  $C = 1$ , на підставі (1.27) функцію (1.19) можна подати у вигляді

$$y_n(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x K_{n-1}(x, \beta) e^{-\int_{\alpha}^{\beta} A(s) ds} d\beta \quad (x, \alpha \in I). \quad (1.28)$$

З (1.28) знаходимо:

$$y_n(\alpha) = y'_n(\alpha) = \dots = y_n^{(n-2)}(\alpha) = 0, \quad y_n^{(n-1)}(\alpha) = 1.$$

Відтак переконаємося, що визначник Вронського системи функцій  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$  в точці  $x = \alpha \in I = [a, b]$  відмінний від нуля:

$$W_n(\alpha) \equiv W[y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n]_{x=\alpha} = \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) & \dots & y_{n-1}(\alpha) & 0 \\ y'_1(\alpha) & y'_2(\alpha) & \dots & y'_{n-1}(\alpha) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(\alpha) & y_2^{(n-2)}(\alpha) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(\alpha) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(\alpha) & y_2^{(n-1)}(\alpha) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(\alpha) & 1 \end{vmatrix} = W_{n-1}(\alpha) \neq 0.$$

Таким чином, функції  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ , що задовольняють умову (1.17), разом з функцією  $y_n$  утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (1.16). Тому загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді рівності

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} C_i y_i + C_n \int_{\alpha}^x K_{n-1}(x, \beta) e^{-\int_{\alpha}^{\beta} A(s) ds} d\beta \quad (x, \alpha \in I), \quad (1.29)$$

$C_i, i = \overline{1, n}$  – довільні сталі.

Системі функцій  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$  поставимо у відповідність функцію

$$K_n(x, \alpha) = \frac{1}{W_n(\alpha)} \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) & \dots & y_{n-1}(\alpha) & 0 \\ y'_1(\alpha) & y'_2(\alpha) & \dots & y'_{n-1}(\alpha) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(\alpha) & y_2^{(n-2)}(\alpha) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(\alpha) & 0 \\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \end{vmatrix} =$$



$$= \int_{\alpha}^x K_{n-1}(x, \beta) e^{-\int_{\alpha}^{\beta} A(s) ds} d\beta, \quad (1.30)$$

так само, як системі функцій  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  раніше було поставлено у відповідність функцію (1.18).

Легко углядіти, що функції  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  сукупно мають всі ознаки фундаментальної системи розв'язків деякого рівняння  $(n-1)$ -го порядку

$$L_{n-1}[y] \equiv y^{(n-1)} + \tilde{p}_1(x)y^{(n-1)} + \dots + \tilde{p}_{n-1}(x)y = 0. \quad (1.31)$$

Тому вираз (1.18) – відповідна операторів  $L_{n-1}[y]$  Коші-функція. Натомість, вираз (1.30) є функцією Коші, відповідною оператору  $L_n[y]$ .

Відомо, що рівняння (1.31), (1.16) еквівалентні відповідно рівнянням

$$\begin{aligned} & W[y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y] \equiv \\ & \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} & W[y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, y] \equiv \\ & \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & y_n(x, \alpha) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x, \alpha) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x, \alpha) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n)}(x) & y_n^{(n)}(x, \alpha) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

То ж порівнюючи (1.31) з (1.32) та (1.16) з (1.33), однозначно знайдемо:

$$\tilde{p}_i(x) = \frac{(-1)^i}{W_{n-1}(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_{n-1}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ y_1^{(n-i-2)} & y_2^{(n-i-2)} & \dots & y_{n-1}^{(n-i-2)} \\ y_1^{(n-i)} & y_2^{(n-i)} & \dots & y_{n-1}^{(n-i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad (1.34)$$

$$p_j(x) = \frac{(-1)^j}{W_n(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_{n-1}' & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-j-1)} & y_2^{(n-j-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-j-1)} & y_n^{(n-j-1)} \\ y_1^{(n-j+1)} & y_2^{(n-j+1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-j+1)} & y_n^{(n-j+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.35)$$

Окремо можна вирізнити такі співвідношення (див. (1.23), (1.24)):

$$\frac{W'_{n-1}(x)}{W_{n-1}(x)} = K_{n-1}^{(n-1)}(x, x) = -\tilde{p}_1(x), \quad \frac{W'_n(x)}{W_n(x)} = K_n^{(n)}(x, x) = -p_1(x).$$

Викладені тут міркування, з одного боку, відтворюють алгоритм побудови загального розв'язку (1.29) лінійного однорідного рівняння (1.16) за  $n-1$  відомими функціями  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_{n-1}(x)$ , які є окремими розв'язками цього ж рівняння. З іншого боку, через співвідношення (1.30) між функціями Коші  $K_n(x, \alpha)$ ,  $K_{n-1}(x, \alpha)$  вони засвідчують існування певної взаємозумовленості між розв'язками рівнянь (1.16), (1.31).

Рівність (1.30) з однаковими підставами можна вважати ознакою взаємозумовленості безпосередньо операторів  $L_{n-1}[y]$  та  $L_n[y]$ . Через неї можна з'ясувати всі визначальні зв'язки між коефіцієнтами операторів  $L_{n-1}[y]$ ,  $L_n[y]$  (див. також (1.34), (1.35)).

Розглянемо рівняння

$$L_3[y] = y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0,$$

лінійно незалежними розв'язками якого є функції

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2.$$

Поставимо собі за мету визначити відповідну цьому рівнянню функцію Коші  $K_3(x, \alpha)$ .

Послідовно обчислимо:

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2; \quad W_2' = 2x; \quad \frac{W_2'}{W_2} = \frac{2}{x} = -\tilde{p}_1;$$

$$p_1 - \tilde{p}_1 = A = -\frac{3}{x} + \frac{2}{x} = -\frac{1}{x}; \quad \varphi = e^{\alpha \int \frac{ds}{s}} = \frac{x}{\alpha};$$

$$K_2(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x \left( \frac{x}{\alpha} - 1 \right); \quad y_3 = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^x \left( \frac{x^2}{\beta} - x \right) \beta \, d\beta = \frac{1}{2} \frac{x}{\alpha} (x - \alpha)^2.$$

Отже  $y_3 = y_3(x, \alpha)$ ,  $K_3(x, \alpha) \equiv y_3(x, \alpha)$ .

В табл. 3 наведено приклади операторів, які заслуговують на особливу увагу через те, що часто відіграють роль “головних” складових операторів в прикладних задачах дослідження коливань та стійкості стержнів, пластин, колових арок, оболонки тощо. Поруч подано відповідні ним операторам функції Коші, побудовані за тією самою схемою, що й в наведеному раніше прикладі. Помічаємо, що функції Коші можуть мати різні інтегральні зображення. Наголошуючи на цьому, звернемось до прикладів 4 з табл. 3 та 2 з табл. 1.

З одного боку (приклад 4, табл. 3),

$$K(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \int_{\beta}^x \frac{x-s}{f(s)} \, ds \, d\beta.$$

Але до функції Коші можна дійти і з іншого боку.

З рівняння  $(f y'')'' = 0$  випливає, що

$$y'' = \frac{1}{f(x)} (Dx + F), \quad y_*(x) = \int_{\alpha}^x (x-s) \left( D \frac{s}{f(s)} + F \frac{1}{f(s)} \right) ds,$$

де  $D, F$  – сталі.

Таблиця 3 Приклади інтегральних зображень функції Коші

№	$L[y]$	$\frac{1}{f(x)} L[y]$	$K(x, \alpha)$
1	$(f(x)y'')''$	$y''' + 2 \frac{f'(x)}{f(x)} y'' + \frac{f''(x)}{f(x)} y'$	$\int_{\alpha}^x \int_{\beta}^x \frac{1}{f(s)} \, ds \, d\beta \equiv \int_{\alpha}^x \frac{s-\alpha}{f(s)} \, ds$
2	$(f(x)y''')''$	$y'''' + 3 \frac{f'(x)}{f(x)} y''' + 3 \frac{f''(x)}{f(x)} y'' + \frac{f'''(x)}{f(x)} y'$	$\int_{\alpha}^x \int_{\beta}^x \frac{(s-\beta)}{f(s)} \, ds \, d\beta \equiv \frac{1}{2} \int_{\alpha}^x \frac{(s-\alpha)^2}{f(s)} \, ds$
3	$(f(x)y'')'$	$y''' + \frac{f'(x)}{f(x)} y''$	$\int_{\alpha}^x \frac{x-s}{f(s)} \, ds$
4	$(f(x)y''')''$	$y'''' + 2 \frac{f'(x)}{f(x)} y''' + \frac{f''(x)}{f(x)} y''$	$\int_{\alpha}^x \int_{\beta}^x \frac{(x-s)}{f(s)} \, ds \, d\beta$

При цьому, як легко переконатись, справджуються перші дві умови (1.4):  $y(\alpha) = y'(\alpha) = 0$ . На підставі двох наступних умов (1.4) (в даному випадку  $n = 4$ ) матимемо  $D = f(\alpha)$ ,  $F = -\alpha f(\alpha)$ , звідки випливає вираз

$$K(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{(x-s)(s-\alpha)}{f(s)} ds$$

(приклад 2 з табл. 1), структурно відмінний від наведеного раніше.

Таким чином, з єдиності розв'язку відповідної задачі Коші для рівняння  $(f y'')'' = 0$  аргіогі випливає тотожність

$$J_1 = \int_{\alpha}^x \int_{\beta}^x \frac{x-s}{f(s)} ds d\beta \equiv \int_{\alpha}^x \frac{(x-s)(s-\alpha)}{f(s)} ds = J_2.$$

Справедливість цієї тотожності можна встановити й безпосередньо. Дійсно, якщо  $x = \alpha$ , то

$$J_1 = J_2 = 0, \quad J_1' = J_2' = 0, \quad J_1'' \equiv J_2'' = \frac{x-\alpha}{f(s)}, \dots;$$

тому відповідні цим функціям ряди Тейлора співпадають, а отже  $J_1(x, \alpha) \equiv J_2(x, \alpha)$ .

Висловлене тут є справедливим і щодо інших подібних випадків, зокрема – щодо прикладів 1, 2 з табл. 3.

Неважко углядіти, що переваги запропонованої схеми побудови функції Коші (схеми, що спирається на поняття взаємозумовленості операторів) є тим вагомішими, чим більшим є порядок  $n$  оператора  $L_n[y]$ .

## 1.5 Запис та відтворення однорідних рівнянь

В окремих теоретичних дослідженнях перед традиційною формою

$$L_1[y] \equiv y' + p_1(x)y = 0, \quad L_2[y] \equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

$$L_3[y] \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0,$$

$$L_4[y] \equiv y'''' + p_1(x)y''' + p_2(x)y'' + p_3(x)y' + p_4(x)y = 0, \dots \quad (1.36)$$

вагомі переваги можуть мати інші форми зображення однорідних рівнянь. Легко пересвідчитися, наприклад, що рівняння (1.36) однозначно впливають відповідно з рівнянь

$$\begin{vmatrix} 1 & y \\ -p_1 & y' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & y \\ 1 & p_1 & y' \\ -p_1 & -p_1^2 + p_2 & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & y \\ 0 & -1 & -p_1 & y' \\ 1 & p_1 & p_1^2 - p_2 + p_1' & y'' \\ -p_1 & -p_1^2 + p_2 & -p_1^3 + 2p_1p_2 - p_3 + p_1p_1' & y''' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & 1 & -J_1 & y' \\ 0 & -1 & J_1 & -J_2 - 2p_1' & y'' \\ 1 & -J_1 & J_2 + p_1' & -J_3 - u & y''' \\ J_1 & -J_2 & J_3 - p_1p_1' & -J_4 - v & y'''' \end{vmatrix} = 0, \dots, \quad (1.37)$$

де

$$J_j(x) = -p_1(x)J_{j-1}(x) - p_2(x)J_{j-2}(x) - p_3(x)J_{j-3}(x) - p_4(x)J_{j-4}(x)$$

$$(j = 1, 2, \dots; \quad J_0 = 1; \quad J_s = 0, s < 0);$$

$$u = p_1''(x) + 3p_1(x)p_1'(x) + p_2'(x);$$

$$v = -p_1(x)p_2''(x) - 2p_2(x)p_1'(x) - 3p_1^2(x)p_1'(x) - p_1(x)p_2'(x)$$

(очевидно, що  $u(x) = v(x) \equiv 0$ ,  $J_j = \text{const}$  при сталих  $p_i$ ).

Відповідно до (1.32), (1.33) рівняння (1.36) можна подати і у вигляді

$$\begin{vmatrix} y(x) & y \\ y'(x) & y' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y' \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y' \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y'' \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y''' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y_4'(x) & y' \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y_4''(x) & y'' \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y_4'''(x) & y''' \\ y_1''''(x) & y_2''''(x) & y_3''''(x) & y_4''''(x) & y'''' \end{vmatrix} = 0, \dots \quad (1.38)$$

Тут під  $y(x)$ ,  $y_i(x)$  розуміємо функції, що складають відповідні фундаментальні системи розв'язків. А оскільки фундаментальну систему розв'язків складають також і функції (1.10), то (відтворюючи, по суті, (1.38)) рівняння (1.36) є всі підстави подати відповідно у вигляді

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cc} K(x, \alpha) & y \\ K'(x, \alpha) & y' \end{array} \right| = 0, & \left| \begin{array}{ccc} K(x, \alpha) & \dot{K}(x, \alpha) & y \\ K'(x, \alpha) & \dot{K}'(x, \alpha) & y' \\ K''(x, \alpha) & \dot{K}''(x, \alpha) & y'' \end{array} \right| = 0, \\
& \left| \begin{array}{cccc} K(x, \alpha) & \dot{K}(x, \alpha) & \ddot{K}(x, \alpha) & y \\ K'(x, \alpha) & \dot{K}'(x, \alpha) & \ddot{K}'(x, \alpha) & y' \\ K''(x, \alpha) & \dot{K}''(x, \alpha) & \ddot{K}''(x, \alpha) & y'' \\ K'''(x, \alpha) & \dot{K}'''(x, \alpha) & \ddot{K}'''(x, \alpha) & y''' \end{array} \right| = 0, \\
& \left| \begin{array}{ccccc} K(x, \alpha) & \dot{K}(x, \alpha) & \ddot{K}(x, \alpha) & \ddot{\ddot{K}}(x, \alpha) & y \\ K'(x, \alpha) & \dot{K}'(x, \alpha) & \ddot{K}'(x, \alpha) & \ddot{\ddot{K}}'(x, \alpha) & y' \\ K''(x, \alpha) & \dot{K}''(x, \alpha) & \ddot{K}''(x, \alpha) & \ddot{\ddot{K}}''(x, \alpha) & y'' \\ K'''(x, \alpha) & \dot{K}'''(x, \alpha) & \ddot{K}'''(x, \alpha) & \ddot{\ddot{K}}'''(x, \alpha) & y''' \\ K''''(x, \alpha) & \dot{K}''''(x, \alpha) & \ddot{K}''''(x, \alpha) & \ddot{\ddot{K}}''''(x, \alpha) & y'''' \end{array} \right| = 0, \dots \quad (1.39)
\end{aligned}$$

В загальному випадку, рівнянню (1.16) ( $n$  – довільне) еквівалентним є рівняння

$$\left| \begin{array}{cccccc} K(x, \alpha) & \dot{K}(x, \alpha) & \dots & \overset{(n-1)}{K}(x, \alpha) & y \\ K'(x, \alpha) & \dot{K}'(x, \alpha) & \dots & \overset{(n-1)}{K}'(x, \alpha) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n)}(x, \alpha) & \dot{K}^{(n)}(x, \alpha) & \dots & \overset{(n-1)}{K}^{(n)}(x, \alpha) & y^{(n)} \end{array} \right| = 0. \quad (1.40)$$

Позначаючи

$$P_j[K(x, \alpha)] = \left| \begin{array}{cccccc} & K & \dot{K} & \dots & \overset{(n-2)}{K} & \overset{(n-1)}{K} \\ & K' & \dot{K}' & \dots & \overset{(n-2)}{K}' & \overset{(n-1)}{K}' \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-j-1)} & \dot{K}^{(n-j-1)} & \dots & \overset{(n-2)}{K}^{(n-j-1)} & \overset{(n-1)}{K}^{(n-j-1)} & \\ & K^{(n-j+1)} & \dot{K}^{(n-j+1)} & \dots & \overset{(n-2)}{K}^{(n-j+1)} & \overset{(n-1)}{K}^{(n-j+1)} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-1)} & \dot{K}^{(n-1)} & \dots & \overset{(n-2)}{K}^{(n-1)} & \overset{(n-1)}{K}^{(n-1)} & \\ & K^{(n)} & \dot{K}^{(n)} & \dots & \overset{(n-2)}{K}^{(n)} & \overset{(n-1)}{K}^{(n)} \end{array} \right|, \quad (1.41)$$



( $j = \overline{0, n}$ ) коефіцієнти рівняння (1.16), відповідного певній функції Коші  $K = K(x, \alpha)$ , можна визначити за формулою

$$p_j = (-1)^j \frac{P_j[K(x, \alpha)]}{P_0[K(x, \alpha)]}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.42)$$

Зображення (1.36) – (1.39) взаємозалежності змінних  $x$  та  $y$ , помітно відрізняючись за формою, за змістом, проте, майже у всіх відношеннях є рівноцінними.

Звернемось до функції Коші, наведеної в прикладі 2 з табл. 3, і знайдемо визначувані через неї елементи визначника четвертого за ліком рівняння (1.39), імітуючи тим самим відтворення відповідного однорідного рівняння у формі (1.36):

$$K = \int_{\alpha}^x \int_{\beta}^x \frac{(s-\beta)}{f(s)} ds d\beta \equiv \frac{1}{2} \int_{\alpha}^x \frac{(s-\alpha)^2}{f(s)} ds,$$

$$K' = \frac{(x-\alpha)^2}{2} \frac{1}{f(x)}, \quad K'' = (x-\alpha) \frac{1}{f(x)} + \frac{(x-\alpha)^2}{2} \left( \frac{1}{f(x)} \right)',$$

$$K''' = \frac{1}{f(x)} + 2(x-\alpha) \left( \frac{1}{f(x)} \right)' + \frac{(x-\alpha)^2}{2} \left( \frac{1}{f(x)} \right)'' ,$$

$$K'''' = 3 \left( \frac{1}{f(x)} \right)' + 3(x-\alpha) \left( \frac{1}{f(x)} \right)'' + \frac{(x-\alpha)^2}{2} \left( \frac{1}{f(x)} \right)''' ;$$

$$\dot{K} = - \int_{\alpha}^x \frac{s-\alpha}{f(s)} ds, \quad \dot{K}' = - \frac{x-\alpha}{f(x)}, \quad \dot{K}'' = - \frac{1}{f(x)} - (x-\alpha) \left( \frac{1}{f(x)} \right)',$$

$$\dot{K}''' = -2 \left( \frac{1}{f(x)} \right)' - (x-\alpha) \left( \frac{1}{f(x)} \right)'' , \quad \dot{K}'''' = -3 \left( \frac{1}{f(x)} \right)'' - (x-\alpha) \left( \frac{1}{f(x)} \right)''' ;$$

$$\ddot{K} = \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(s)} ds, \quad \ddot{K}' = \frac{1}{f(x)}, \quad \ddot{K}'' = \left( \frac{1}{f(x)} \right)',$$

$$\ddot{K}''' = \left( \frac{1}{f(x)} \right)'' , \quad \ddot{K}'''' = \left( \frac{1}{f(x)} \right)''' ;$$

$$\ddot{K} = - \frac{1}{f(\alpha)}, \quad \ddot{K}' = \ddot{K}'' = \ddot{K}''' = \ddot{K}'''' = 0.$$

(неважко переконатись, що при визначенні цих елементів черговість диференціювання функції Коші за  $x$  та  $\alpha$  значення не має). Беручи до уваги отримані співвідношення, після низки перетворень дійдемо до рівності

$$\frac{1}{f(\alpha)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{f(x)} & y' \\ 0 & -\frac{1}{f(x)} & \left(\frac{1}{f(x)}\right)' & y'' \\ \frac{1}{f(x)} & -2\left(\frac{1}{f(x)}\right)' & \left(\frac{1}{f(x)}\right)'' & y''' \\ 3\left(\frac{1}{f(x)}\right)'' & -3\left(\frac{1}{f(x)}\right)''' & \left(\frac{1}{f(x)}\right)'''' & y'''' \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\frac{1}{f(\alpha)} \left(\frac{1}{f(x)}\right)^3 \left( y'''' + 3 \frac{f'(x)}{f(x)} y''' + 3 \frac{f''(x)}{f(x)} y'' + \frac{f'''(x)}{f(x)} y' \right) = 0,$$

чого і слід було сподіватись (табл. 3, приклад 2).

Підкреслимо таке: незважаючи на те, що відповідні рівнянню (1.40) функції (1.41) залежні одночасно і від змінної  $x$ , і від параметра  $\alpha$ , вирази (1.42), природно, є функціями лише змінної  $x$ ; формально це зумовлено тим, що  $\alpha$  входить лише у деякий спільний для чисельника і знаменника виразу (1.42) множник, або ж ні чисельник, ні знаменник в (1.42) від  $\alpha$  не залежать. Розглянемо два приклади.

Нехай  $K = K(x, \alpha) = \alpha \ln \frac{x}{\alpha}$  є функцією Коші, відповідною деякому рівнянню  $L[y] = 0$  другого порядку. Щоб ідентифікувати це рівняння, перш за все знайдемо величини

$$K' = \frac{\alpha}{x}, \quad K'' = -\frac{\alpha}{x^2}, \quad \dot{K} = \ln \frac{x}{\alpha} - 1, \quad \dot{K}' = \frac{1}{x}, \quad \dot{K}'' = -\frac{1}{x^2}. \quad (1.43)$$

До рівняння у формі (1.36) можна дійти, вдаючись до формул (1.42), відповідно з якими

$$p_1 = -\frac{\begin{vmatrix} K & \dot{K} \\ K'' & \dot{K}'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K & \dot{K} \\ K' & \dot{K}' \end{vmatrix}}, \quad p_2 = \frac{\begin{vmatrix} K' & \dot{K}' \\ K'' & \dot{K}'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K & \dot{K} \\ K' & \dot{K}' \end{vmatrix}}.$$

Беручи до уваги (1.43), знайдемо

$$p_1 = -\frac{-B(x, \alpha) \frac{1}{x^2}}{B(x, \alpha) \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}, \quad p_2 = \frac{B(x, \alpha) \cdot 0}{B(x, \alpha) \frac{1}{x}} = 0,$$

що повністю збігається з наведеним у табл. 1 (приклад 8). Тут через  $B(x, \alpha) = \alpha$  позначено згадуваний спільний множник.

Нехай тепер  $K = (x - \alpha) e^{-\omega^2(x-\alpha)} = (x - \alpha) A$ , і отже

$$\begin{aligned} K' &= A(1 - \omega^2(x - \alpha)), & K'' &= -\omega^2 A(2 - \omega^2(x - \alpha)), \\ \dot{K} &= -A(1 - \omega^2(x - \alpha)), & \dot{K}' &= \omega^2 A(2 - \omega^2(x - \alpha)), \\ \dot{K}'' &= -\omega^4 A(3 - \omega^2(x - \alpha)); \\ p_1 &= -\frac{-2B(x, \alpha)\omega^2}{B(x, \alpha)} = 2\omega^2, & p_2 &= \frac{B(x, \alpha)\omega^4}{B(x, \alpha)} = \omega^4. \end{aligned}$$

Отриманий результат збігається з наведеним у табл. 2 (приклад 8). Тут спільним множником є величина  $B(x, \alpha) = e^{-2\omega^2(x-\alpha)}$ .

Легко переконатись, що функції  $K = \alpha \ln \frac{x}{\alpha}$ ,  $K = (x - \alpha) e^{-\omega^2(x-\alpha)}$  перетворюють суто в тотожності всі рівності (1.40), відповідні однорідним рівнянням третього і вищих порядків (зазначені рівності набувають можливості справджуватись за будь-яких  $y = y(x)$ ). Ці ж  $K = \alpha \ln \frac{x}{\alpha}$ ,  $K = (x - \alpha) e^{-\omega^2(x-\alpha)}$  не можуть правити і за функції Коші, що відповідають рівнянням  $L[y] = 0$  першого порядку (коефіцієнт рівняння набуває залежності від параметра  $\alpha$ ).

Зауважимо, що відповідна оператору першого порядку  $L[y] = y' + py$  функція Коші має таку структуру:

$$K(x, \alpha) = k(\alpha) e^{-\int_{\alpha}^x \varphi(z) dz}.$$

При цьому згідно з (1.41), (1.42)

$$P_0 = K(x, \alpha), \quad P_1 = K'(x, \alpha) = -\varphi(x) K(x, \alpha),$$

$$p = p(x) = -\frac{P_1}{P_0} = -\frac{K'(x, \alpha)}{K(x, \alpha)} = \varphi(x) \quad (K(x, \alpha) = B(x, \alpha))$$

(Тут доречно звернути увагу на приклади 4-7 з табл. 1 та 3, 4 з табл. 2.)

Функція

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{a} x^n \alpha^n \sin(\alpha^m - x^m) \quad (1.44)$$

( $m$  і  $n$  – цілі числа) може правити за функцію Коші, відповідну лінійному оператору другого порядку. Справді, легко з'ясувати, що вирази

$$\begin{aligned} P_0 &= \begin{vmatrix} K & \dot{K} \\ K' & \dot{K}' \end{vmatrix} = W(x, \alpha) = m^2 \alpha^{2n+m-1} x^{2n+m-1}, \\ P_1 &= \begin{vmatrix} K & \dot{K} \\ K'' & \dot{K}'' \end{vmatrix} = W'(x, \alpha) = m^2 (2n + m - 1) \alpha^{2n+m-1} x^{2n+m-2}, \\ P_2 &= \begin{vmatrix} K' & \dot{K}' \\ \dot{K}'' & \dot{K}''' \end{vmatrix} = \\ &= m^2 \{a^2 m^2 x^{2m} + n[2n + m - 1 - a(n - 1)]\} \alpha^{2n+m-1} x^{2n+m-3} \end{aligned} \quad (1.45)$$

мають спільний залежний від параметра  $\alpha$  множник

$$B(x, \alpha) = m^2 \alpha^{2n+m-1} x^{2n+m-2} = \frac{W(x, \alpha)}{x},$$

в зв'язку з чим вирази

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{P_1}{P_0} = -\frac{2n + m - 1}{x}, \\ p_2 &= \frac{P_2}{P_0} = \frac{a^2 m^2 x^{2m} + n[2n + m - 1 - a(n - 1)]}{x^2}, \end{aligned}$$

що є коефіцієнтами визначуваного оператора, не залежать від  $\alpha$ . То ж оператор має вигляд

$$\begin{aligned} L[y] &= y'' + p_1 y' + p_2 y = \\ &= y'' - \frac{2n + m - 1}{x} y' + \frac{a^2 m^2 x^{2m} + n[2n + m - 1 - a(n - 1)]}{x^2} y. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Взаємовідповідні функція Коші (1.44), яка, до речі, задовольняє умову

$$\alpha x^m \dot{K} + x \alpha^m K' = n(x^m + \alpha^m)K,$$

і лінійний оператор (1.46) є залежними від двох параметрів –  $m$  та  $n$ . За умови  $2n + m - 1 = 0$ , зокрема, вирази (1.45) втрачають залежність від  $\alpha$ :

$$P_0 = W(x, \alpha) = m^2, \quad P_1 = W'(x, \alpha) \equiv 0, \quad P_2 = \frac{m^2 [a^2 m^2 x^{2m} - a n(n-1)]}{x^2}$$

( $m \neq 0$  через те, що  $n$  – ціле число). Оператор при цьому набуває вигляду

$$L[y] = y'' + p_2 y = y'' + [a^2(1-2n)^2 x^{-4n} - a n(n-1)x^{-2}]y.$$

До найпростіших з множини (1.44) функцій Коші, відповідних операторам другого порядку, можна віднести такі:

$$a) \quad m = n = 1, \quad K = \frac{\alpha x}{a} \sin a(\alpha - x);$$

$$б) \quad m = -n = -1, \quad K = \frac{\alpha x}{a} \sin \frac{a(x - \alpha)}{\alpha x}.$$

Самі ж оператори мають вигляд:

$$a) \quad y'' - \frac{2}{x} y' + \left(a^2 + \frac{2}{x^2}\right) y;$$

$$б) \quad y'' + \frac{a^2}{x^4} y.$$

У випадку  $a$ ) вирази типу (1.45)  $P_0 = \alpha^2 x^2$ ,  $P_1 = 2\alpha^2 x$ ,  $P_2 = \alpha^2(a^2 x^2 + 2)$  мають спільний залежний від  $\alpha$  множник  $B = \alpha^2$ , такий що коефіцієнти оператора від  $\alpha$  не залежать; натомість у випадку  $б$ ) вирази  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = a^2 x^{-4}$  взагалі не містять в собі  $\alpha$ .

Таким чином, дійсно, далеко не кожна належно гладка функція може відігравати роль функції Коші. Перш за все функція Коші є такою, що відповідні їй функції (1.41) або взагалі не залежать від параметра  $\alpha$ , або ж містять цей параметр тільки в деякому спільному для них всіх множнику  $B = B(x, \alpha)$ .

# 2

## КОНСТРУЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ КОШІ

### 2.1 Функція впливу

Розглянемо рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n y = \delta(x - \alpha), \quad (2.1)$$

де  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака.

Покажемо, що розв'язком рівняння (2.1) є функція впливу [1, 11], означувана як добуток функції Коші  $K(x, \alpha)$  на одиничну функцію Гевісайда  $\theta(x, \alpha)$ :

$$\Phi(x, \alpha) \equiv K(x, \alpha) \theta(x, \alpha). \quad (2.2)$$

Функцію впливу  $\Phi(x, \alpha)$  називають також фундаментальним розв'язком рівняння (2.1).

Враховуючи відомі співвідношення

$$\theta'(x) = \delta(x); \quad v(x) \delta(x - \alpha) = v(\alpha) \delta(x - \alpha) \quad (2.3)$$

(де  $v(x)$  – неперервна функція;  $v(x) \delta(x - \alpha) \equiv 0$ , якщо  $v(\alpha) = 0$ ), і беручи до уваги умови (1.4), послідовно одержуємо:

$$\begin{aligned} \Phi'(x, \alpha) &= K'(x, \alpha) \theta(x - \alpha), \dots, \Phi^{(n-1)}(x, \alpha) = K^{(n-1)}(x, \alpha) \theta(x - \alpha), \\ \Phi^{(n)}(x, \alpha) &= K^{(n)}(x, \alpha) \theta(x - \alpha) + \frac{1}{p_0(\alpha)} \delta(x - \alpha). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Підставляючи (2.4) в (2.1), матимемо:

$$L[\Phi] = \theta(x - \alpha) L[K(x, \alpha)] + \delta(x - \alpha) = \delta(x - \alpha).$$

Очевидно, що фундаментальний розв'язок  $\Phi(x, \alpha)$  визначається з точністю до загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Розглянемо тепер низку рівнянь

$$L[y] = \delta^{(j)}(x - \alpha) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

які відрізняються від (2.1) тим, що їх праві частини є послідовними похідними від дельта-функції за аргументом  $x$ .



Розв'язками цих рівнянь є частинні за параметром  $\alpha$  похідні функції впливу (2.2), тобто

$$\tilde{y}_j = (-1)^j \frac{\partial^j \Phi}{\partial \alpha^j} \quad (j=1, 2, \dots). \quad (2.6)$$

Справедливість останнього твердження випливає з ланцюжка перетворень

$$L[\tilde{y}_j] = (-1)^j L\left[\frac{\partial^j \Phi}{\partial \alpha^j}\right] = (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial \alpha^j} L[\Phi] = (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial \alpha^j} (\delta(x-\alpha)) = \delta^{(j)}(x-\alpha).$$

Отже часткові (окремі) розв'язки рівнянь (2.1) та (2.5), праві частини яких – дельта-функція та її похідні, визначаються відповідно за формулами (2.2) та (2.6), в яких фігурують функція впливу та її похідні.

## 2.2 Функції впливу і нормальні фундаментальні функції

Застосуємо функцію впливу та її властивості до задачі розв'язування рівняння (1.1) за таких умов [2]:

$$y^{(j)}(x_0) = y_j, \quad j = \overline{0, n-1}; \quad x \geq x_0; \quad \{p_0(x) > 0, p_i(x)\} \in C^\infty, \quad i = \overline{0, n}. \quad (2.7)$$

Нехай  $y(x)$  – розв'язок цієї задачі. Продовжуючи функції  $y(x)$  і  $q(x)$  нулем в інтервал  $x < x_0$  та позначаючи ці продовжені функції через  $\tilde{y}$  і  $\tilde{q}$ , як і в [11] одержимо:

$$\tilde{y}^{(i)} = \{y^{(i)}(x)\} + \sum_{j=0}^{i-1} y_j \delta^{(i-j-1)}(x-x_0) \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad (2.8)$$

$\{y^{(i)}(x)\}$  – похідні «гладких» складових ( $i = \overline{1, n-1}$ ).

Переконуємося також, що

$$L[\tilde{y}] = \tilde{y}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j(x) \delta^{(j)}(x-x_0), \quad (2.9)$$

де

$$\begin{aligned} c_0(x) &= y_0 p_{n-1}(x) + y_1 p_{n-2}(x) + \dots + y_{n-1} p_0(x), \\ c_1(x) &= y_0 p_{n-2}(x) + y_1 p_{n-3}(x) + \dots + y_{n-2} p_0(x), \dots \\ c_{n-2}(x) &= y_0 p_1(x) + y_1 p_0(x), \quad c_{n-1}(x) = y_0 p_0(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отже,  $\tilde{y}$  (див. (2.8)) як узагальнена функція задовольняє рівняння (2.9), є його розв'язком. Побудуємо цей розв'язок.

Застосовуючи відому формулу (що при  $n=0$  відбиває в собі й (2.3))

$$v(x) \delta^{(n)}(x-x_0) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i v^{(i)}(x_0) \delta^{(n-i)}(x-x_0), \quad (2.11)$$

( $C_n^i$  – біноміальні коефіцієнти) зведемо рівняння (2.9) до такого вигляду:

$$L[\tilde{y}] = \tilde{q}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j \delta^{(j)}(x - x_0). \quad (2.12)$$

Тут (див. також (2.10))

$$A_j = \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^{i-j} C_i^j c_i^{(i-j)}(x_0), \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (2.13)$$

Вдаючись до функції (2.2) і (2.6), на підставі рівняння (2.12) одержуємо таку формулу:

$$\tilde{y} = \left( \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A_j \frac{\partial^j K}{\partial \alpha^j} \Big|_{\alpha=x_0} + y_*(x, x_0) \right) \theta(x - x_0), \quad (2.14)$$

де

$$y_*(x, x_0) = \int_{x_0}^x K(x, s) q(s) ds. \quad (2.15)$$

Звідси, очевидно, маємо розв'язок задачі Коші  $\{(1.1), (2.7)\}$  для  $x > x_0$ . Цей розв'язок у випадку сталих коефіцієнтів  $p_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) зводиться до відомого результату [12].

Після відповідного перегрупування доданків з урахуванням співвідношень (2.10) і (2.13) формулу (2.14) для  $x > x_0$  можна, маючи на увазі (2.15), записати так:

$$y = \sum_{j=0}^{n-1} Y_j(x, x_0) y_j + y_*(x, x_0). \quad (2.16)$$

Тут  $\{Y_j(x, x_0)\}$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) – система нормальних фундаментальних функцій рівняння  $L[y]=0$ , тобто фундаментальна система його розв'язків, яка задовольняє умови

$$Y_i^{(j)}(x_0, x_0) = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq j, \\ 1 & \text{для } i = j \end{cases} \quad (i, j = \overline{0, n-1}). \quad (2.17)$$

Наведений вище спосіб побудови формул (2.14) і (2.16) дозволяє будувати фундаментальні системи  $\{Y_j(x, x_0)\}$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ), що за означенням повинні задовольняти умови (2.17). Зокрема, для рівнянь другого, третього та четвертого порядків, беручи до уваги формули (2.10), (2.13), (2.14) і (2.16), одержуємо відповідно:

$$Y_0 = p_1^0 K(x, x_0) - \dot{K}(x, x_0), \quad Y_1 \equiv K(x, x_0); \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
Y_0 &= (p_2^0 - p_1^0)K(x, x_0) - p_1^0 \dot{K}(x, x_0) + \ddot{K}(x, x_0), \\
Y_1 &= p_1^0 K(x, x_0) - \dot{K}(x, x_0), \quad Y_2 \equiv K(x, x_0);
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
Y_0 &= (p_3^0 - p_2^0 + p_1^0)K(x, x_0) - (2p_1^0 - p_2^0) \dot{K}(x, x_0) + p_1^0 \ddot{K}(x, x_0) - \ddot{K}(x, x_0), \\
Y_1 &= (p_2^0 - p_1^0)K(x, x_0) - p_1^0 \dot{K}(x, x_0) + \ddot{K}(x, x_0), \\
Y_2 &= p_1^0 K(x, x_0) - \dot{K}(x, x_0), \quad Y_3 \equiv K(x, x_0).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Тут  $p_1^0 = p_1(x_0)$ ,  $p_2^0 = p_2(x_0)$ ,  $p_1^{\prime 0} = p_1'(x_0), \dots$ ;  $\dot{K}(x, x_0) = \frac{\partial K(x, x_0)}{\partial x_0}$ ,

$$\ddot{K}(x, x_0) = \frac{\partial^2 K(x, x_0)}{\partial x_0^2}, \quad \ddot{\ddot{K}}(x, x_0) = \frac{\partial^3 K(x, x_0)}{\partial x_0^3}.$$

Формули (2.18)-(2.20), що відображають нормальні фундаментальні системи розв'язків рівнянь відповідно другого, третього та четвертого порядків, побудовані з залученням функції  $K(x, x_0)$ . Нормальну фундаментальну систему розв'язків можна будувати й безпосередньо. Зокрема, застосувавши метод степеневих рядів, отримаємо загальну формулу

$$Y_k(x, \alpha) = \frac{(x-\alpha)^k}{k!} + \sum_{i=0}^{\infty} b_{n+i, k}(\alpha) \frac{(x-\alpha)^{n+i}}{(n+i)!}, \tag{2.21}$$

в якій коефіцієнти  $b_{n+i, k}(\alpha)$  визначаються як

$$b_{n+i, k}(\alpha) = - \sum_{r=0}^i C_i^r \sum_{j=0}^n p_j^{(i-r)}(\alpha) b_{n-j+r, k}; \tag{2.22}$$

початковими значеннями тут служать елементи визначника Вронського  $W(Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})$  для  $x=\alpha$ , тобто

$$b_{m, k} = \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq k, \\ 1 & \text{для } m = k. \end{cases} \tag{2.23}$$

Застосовуючи формули (2.21)-(2.23), наприклад, до рівняння четвертого порядку, одержуємо

$$\begin{aligned}
Y_0(x, \alpha) &= 1 - p_4(\alpha) \frac{(x-\alpha)^4}{4!} + (-p_4' + p_1 p_4)|_{x=\alpha} \cdot \frac{(x-\alpha)^5}{5!} + \dots, \\
Y_1(x, \alpha) &= x - \alpha - p_3(\alpha) \frac{(x-\alpha)^4}{4!} - (p_4 - p_1 p_3 + p_3')|_{x=\alpha} \cdot \frac{(x-\alpha)^5}{5!} + \dots,
\end{aligned}$$

$$Y_2(x, \alpha) = \frac{(x-\alpha)^2}{2!} - p_2(\alpha) \frac{(x-\alpha)^4}{4!} - (-p_1 p_2 + p_3 + p'_2) \Big|_{x=\alpha} \cdot \frac{(x-\alpha)^5}{5!} + \dots,$$

$$Y_3(x, \alpha) = \frac{(x-\alpha)^3}{3!} - p_1(\alpha) \frac{(x-\alpha)^4}{4!} + (p_1^2 - p'_1 - p_2) \Big|_{x=\alpha} \cdot \frac{(x-\alpha)^5}{5!} + \dots \quad (2.24)$$

Формули (2.24) за умови  $\alpha = 0$  та позначень

$$p_1 = 2 \frac{(EJ)'}{EJ}; \quad p_2 = 2 \frac{(EJ)''}{EJ}; \quad p_3 \equiv 0; \quad p_4 = -\frac{\rho F(x)}{EJ} p^2$$

збігаються з наведеними в [13].

### 2.3 Узагальнений метод початкових параметрів

Ефективним засобом дослідження статички й динаміки деформівних систем зі сталими характеристиками є метод початкових параметрів [14–17]. Цей метод можна поширити і на системи з плавно- та східчасто-змінними характеристиками [13, 18]. При його узагальненні важливу роль відіграють розв'язки відповідних задач спряження. Розглянемо одну з них.

Нехай задано  $m+1$  рівнянь

$$L_i[y] \equiv y^{(n)} + \sum_{v=1}^n p_{vi}(x) y^{(n-v)} = 0 \quad (i = \overline{0, m}), \quad (2.25)$$

коефіцієнти яких  $p_{vi}(x)$  є цілими аналітичними функціями деяких параметрів і голоморфними функціями змінної  $x$  у проміжках  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  ( $i = \overline{0, m}$ ), причому  $x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1}$ .

Кожному з рівнянь (2.25) відповідає єдина функція Коші  $K_i(x, \alpha)$  ( $x, \alpha \in [x_i, x_{i+1}]$ ), яка разом зі своїми послідовними похідними за параметром  $\alpha$  утворює відповідну фундаментальну систему. Тому загальні розв'язки рівнянь (2.25) можна записати так:

$$y_i(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{ki} \frac{\partial^k K}{\partial \alpha^k} \quad (i = \overline{0, m}) \quad (2.26)$$

( $C_{ki}$  – довільні сталі).

Виходячи із формул (2.26) та відповідних умов спряження на межах  $x_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) виділених проміжків, функцію  $K_0(x, \alpha)$  та її послідовні похідні за параметром  $\alpha$  можна продовжити на проміжок  $[x_1, x_{m+1}]$ .

Диференціюючи послідовно співвідношення (2.26) за аргументом  $x$ , одержуємо

$$[y]_i = [W(K)]_i [C]_i, \quad i = \overline{0, m}, \quad (2.27)$$

де  $[W(K)]_i$  – відповідна  $i$ -у рівнянню (2.27) матриця Вронського;  
 $[y]_i = [y_i, y'_i, \dots, y_i^{(n-1)}]^T$ ;  $[C]_i = [C_{0i}, C_{1i}, \dots, C_{(n-1)i}]^T$ . Беручи тут  $x=\alpha$  та підставляючи одержані при цьому значення  $[C]_i$  в формули (2.27), знаходимо:

$$[y(x, \alpha)] = [Y(x, \alpha)][y(\alpha, \alpha)]; \quad (2.28)$$

$$[Y(x, \alpha)] = [W(K(x, \alpha))][W^{-1}(K(\alpha, \alpha))], \quad (2.29)$$

де  $[Y(x, \alpha)]$  – нормальна фундаментальна матриця,

$$[Y(x, \alpha)] = \begin{bmatrix} Y_0(x, \alpha) & Y_1(x, \alpha) & \dots & Y_{n-1}(x, \alpha) \\ Y'_0(x, \alpha) & Y'_1(x, \alpha) & \dots & Y'_{n-1}(x, \alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_0^{(n-1)}(x, \alpha) & Y_1^{(n-1)}(x, \alpha) & \dots & Y_{n-1}^{(n-1)}(x, \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

(при  $x=\alpha$  вона стає одиничною матрицею).

Власне співвідношення (2.28) – (2.30) дають можливість поширити метод початкових параметрів на системи (2.25) зі змінними характеристиками. При цьому для визначення нормальних фундаментальних функцій  $Y_i(x, \alpha)$  за допомогою функції Коші  $K(x, \alpha) \equiv Y_{n-1}(x, \alpha)$  досить визначити перший рядок матричного добутку (2.28). Таким чином, віднайдено ще один спосіб побудови нормальних фундаментальних функцій.

Так, наприклад, для рівняння другого порядку ( $n=2$ ) маємо:

$$\begin{bmatrix} y(x, \alpha) \\ y'(x, \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & \dot{K} \\ K' & \dot{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(\alpha) & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(\alpha, \alpha) \\ y'(\alpha, \alpha) \end{bmatrix},$$

що у повній мірі відповідає (2.18).

## 2.4 Конструювання гладких розв'язків задач спряження

Продовжимо функцію Коші  $K_0(x, \alpha)$  ( $x_0 \leq x, \alpha \leq x_1$ ) першого рівняння системи (2.25) праворуч за межі проміжка  $x_0 \leq x \leq x_1$ , домагаючись в точці  $x = x_1$  її неперервності разом з похідними до  $(n-1)$ -ї включно. А власне, беручи до уваги формули (2.28) та рівність

$$[y_1(x_1, x_1)] = [K_0(x_1, \alpha)], \quad (2.31)$$

матимемо:

$$[K_1(x, x_1, \alpha)] = [Y(x, \alpha)]_1 [K_0(x_1, \alpha)], \quad (2.32)$$

де  $[Y(x, \alpha)]_1$  – нормальна фундаментальна матриця, що відповідає проміжковій

$x_1 \leq x \leq x_2$ . Діючи так само далі, дійдемо до співвідношення

$$[K_j(x, x_j, \dots, x_1, \alpha)] = [Y(x, x_j)]_j [K_{j-1}(x_j, x_{j-1}, \dots, x_1, \alpha)]. \quad (2.33)$$

Тут  $[Y(x, x_j)]_j$  – нормальна фундаментальна матриця для всіх  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = \overline{2, m}$ .

Із співвідношень (2.31)–(2.33) знаходимо

$$[K_j(x, x_j, \dots, x_1, \alpha)] = A(x, x_j, \dots, x_1) [K_0(x_1, \alpha)], \quad (2.34)$$

де

$$A(x, x_j, \dots, x_1) \equiv [Y(x, x_j)]_j [Y(x_j, x_{j-1})]_{j-1} \dots [Y(x_2, x_1)]_1 \quad (2.35)$$

– відповідна перехідна матриця.

Одержані формули дозволяють продовжити функцію  $K_0(x, \alpha)$  разом з її похідними до  $(n-1)$ -ї включно на весь проміжок  $[x_0, x_{m+1}]$ . Кожну із послідовних похідних функцій  $K_0(x, \alpha)$  за параметром  $\alpha$  можна продовжити цілком так само, відповідно використовуючи співвідношення (2.32)–(2.35).

Отже, задача конструювання неперервного загального розв'язку рівнянь (2.25) з неперервними похідними – загально розв'язана. Для визначення сталих  $C_{k0}$  ( $k = 0, n-1$ ), від яких цей розв'язок залежить, служать наявні початкові ( $x = x_0$ ) або граничні ( $x_0 = a$ ;  $x_{m+1} = b$ ) умови.

Із співвідношень (2.31)–(2.35) можна одержувати важливі тотожності. Нехай, наприклад, усі рівняння (2.25) – однакові. Тоді  $K_i(x, \alpha) \equiv K(x, \alpha)$ , і відповідно до (2.34), (2.35) маємо:

$$[K(x_1, \alpha)] \equiv A(x, x_j, \dots, x_1) [K(x_1, \alpha)], \quad (2.36)$$

$$A(x, x_j, \dots, x_1) = [Y(x, x_j)] [Y(x_j, x_{j-1})] \dots [Y(x_2, x_1)]. \quad (2.37)$$

Окремо для рівняння другого порядку ( $m = 1$ )

$$K(x, \alpha) \equiv Y_0(x, x_1) K(x_1, \alpha) + K(x, x_1) K'(x_1, \alpha); \quad (2.38)$$

для рівняння  $n$ -го порядку ( $m = 1$ )

$$K(x, \alpha) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} Y_i(x, x_1) K^{(i)}(x_1, \alpha). \quad (2.39)$$

Коли  $n = 2$ ,  $m = 2$ , то

$$K(x, \alpha) \equiv (Y_0(x, x_2) Y_0(x_2, x_1) + K(x, x_2) Y_0'(x_2, x_1)) K(x_1, \alpha) + (Y_0(x, x_2) K(x_2, x_1) + K(x, x_2) K'(x_2, x_1)) K'(x_1, \alpha) \quad (2.40)$$

(при  $x_2 = x_1$  співвідношення (2.40), зрозуміло, співпадає з (2.38)).

З (2.34), (2.35) неважко одержати й інші подібного типу тотожності, що відповідають різним поєднанням значень  $n$  і  $m$ . Ці тотожності разом з (2.36)–(2.40) стають в нагоді при розв'язуванні багатьох конкретних задач.

## 2.5 Конструювання негладких розв'язків та розв'язків зі скінченними розривами в задачах спряження

На противагу (2.31) задамо умову спряження на межі  $x = x_1$  проміжку  $x_0 \leq x \leq x_1$ , наприклад, співвідношенням

$$[y_1(x_1, x_1)] \equiv [c_0 K_0(x_1, \alpha)],$$

де

$$[c_0 K_0] = [c_0^0 K_0, c_0^1 K_0', \dots, c_0^{n-1} K_0^{(n-1)}]^T \quad (2.41)$$

– матриця-стовпець;  $K_0 = K_0(x, \alpha)$  – функція Коші, що відповідає рівнянню, заданому в проміжку  $x_0 \leq x \leq x_1$ ;  $\{c_0^i\}_{i=0}^{n-1}$  – задані значення розривів неперервності, які власне і формують бажаний ступінь гладкості-негладкості спряжуваних розв'язків низки рівнянь. Тоді замість виразу (2.32) одержуємо

$$[K_1(x, x_1, \alpha)] = [y(x, x_1)]_1 [c_0 K_0(x_1, \alpha)].$$

Умови спряження на межах наступних проміжків можна записати подібно до (2.41):

$$[K_j(x, x_j, \dots, x_1, \alpha)] = [c_{j-1} K_{j-1}(x_j, x_{j-1}, \dots, x_1, \alpha)]. \quad (2.42)$$

Їх послідовне використання разом з формулами, подібними до (2.33)–(2.35), дозволяє будувати відповідні негладкі розв'язки системи (2.25) і розв'язки з заданими розривами функції Коші та її похідних у точках  $x_j$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Зазначимо, що так само можна одержувати (при відповідно заданих умовах спряження) гладкі, негладкі та розривні розв'язки будь-якої задачі з початковими умовами. Тоді у співвідношеннях (2.32) або (2.42) початковими параметрами є матриці-стовпці

$$[y_0] = [y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)]^T, \\ [c_0 y_0] = [c_0^0 y(x_0), c_0^1 y'(x_0), \dots, c_0^{(n-1)}(x_0)]^T.$$

Зауважимо також, що для спрощення необхідних в подальшому перетворень варто відразу враховувати нульові (за їх наявності) початкові значення функції  $y_0$  та її похідних.

## 2.6 Застосування функцій впливу до побудови загальних розв'язків рівнянь з особливостями типу дельта-функції та її похідних в коефіцієнтах

Розглянемо рівняння

$$L[y] - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{ij} \left( y^{(j-1)} \delta(x - x_i) \right)^{(j-1)} = 0. \quad (2.43)$$

Тут  $L[y]$  співпадає з лівою частиною рівняння (1.1),  $\alpha_{ij}$  – деякі параметри,  $r_n = E[n/2]$  – ціла частина числа  $n/2$ ,  $x_i$  – задані точки, причому  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu < b$ . Оперуючи рівнянням (2.43), є сенс кожного разу брати до уваги (2.11). При  $r_n = 1$  загальний випадок (2.43) зводиться до окремого

$$L[y] - \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i y(x_i) \delta(x - x_i) = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.43) можна будувати за допомогою формул:

$$y(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} \left( Q_\nu(x, x_\nu, x_{\nu-1}, \dots, x_1, \alpha) \right), \quad (2.44)$$

$$Q_0(x, \alpha) \equiv K(x, \alpha), \quad (2.45)$$

$$Q_q(x, x_q, x_{q-1}, \dots, x_1, \alpha) = Q_{q-1}(x, x_{q-1}, \dots, x_1, \alpha) + \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{qj} Q_{q-1}^{(j-1)}(x_q, x_{q-1}, \dots, x_1, \alpha) \left. \frac{\partial^{j-1} \Phi(x, \alpha)}{\partial \alpha^{j-1}} \right|_{\alpha=x_q}, \quad (q = \overline{1, \nu}). \quad (2.46)$$

Доведемо це.

Нехай  $\nu = 1$ . Застосовуючи формули (2.2), (2.6) і (1.5), можна записати для цього випадку загальний розв'язок

$$y(x, \alpha) = Q_1(x, x_1, \alpha)$$

рівняння (2.43) у так званій змішаній формі

$$Q_1(x, x_1, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \frac{\partial^k K}{\partial \alpha^k} + \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{1j} y^{(j-1)}(x_1) \frac{\partial^{j-1} \Phi}{\partial \alpha^{j-1}}. \quad (2.47)$$



Покладаючи тут  $x = x_1$ , знаходимо:

$$y(x_1) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left. \frac{\partial^k K}{\partial \alpha^k} \right|_{x=x_1}. \quad (2.48)$$

Диференціюючи (2.47) за змінною  $x$  і кладучи після цього  $x = x_1$ , отримуємо:

$$y'(x_1) = Q_1'(x_1, x_1, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left( \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^k K}{\partial \alpha^k} \right) \right) \right|_{x=x_1}. \quad (2.49)$$

Подібно знаходимо значення при  $x = x_1$  похідних вищих порядків:

$$y^{(j-1)}(x_1) = Q_1^{(j-1)}(x_1, x_1, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left( \left. \frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}} \left( \frac{\partial^k K}{\partial \alpha^k} \right) \right) \right|_{x=x_1}. \quad (2.50)$$

Співвідношення (2.48)-(2.50) дозволяють елімінувати з (2.47) всі величини  $y^{(j-1)}(x_1)$  ( $j = \overline{1, r_n}$ ) і записати загальний розв'язок (при  $\nu = 1$ ) у такій формі:

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \frac{\partial^k Q_1}{\partial \alpha^k}, \quad (2.51)$$

де

$$Q_1(x, x_1, \alpha) = K(x, \alpha) + \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{1j} K^{(j-1)}(x_1, \alpha) \left. \frac{\partial^{j-1} \Phi}{\partial \alpha^{j-1}} \right|_{\alpha=x_1}. \quad (2.52)$$

Використовуючи формулу (2.51), цілком так само, як і у випадку  $\nu = 1$ , будемо загальний розв'язок вигляду (2.51)–(2.52) для  $\nu = 2, \nu = 3, \dots$  В загальному підсумку, власне, і приходимо до (2.44)–(2.46).

Таким чином, будувати загальні розв'язки (2.44)–(2.46) рівнянь вигляду (2.43) (таких, що містять в своїх коефіцієнтах особливості типу дельта-функції та її похідних) дає можливість функція впливу  $\Phi(x, \alpha)$ , що відповідає рівнянню  $L[y] = 0$ .

Щоб унаочнити особливості описаного підходу до побудови розв'язків рівнянь з особливостями (такого підходу, що спирається на загальні формули (2.44)–(2.46)), розглянемо далі ґрунтовніше випадок  $r_n = 1$  ( $n = 2$ ).

## 2.7 Приклад застосування функції впливу до побудови загального розв'язку рівняння з особливостями типу дельта-функції

Однією з основних в прикладній теорії коливань є задача знаходження розв'язку рівняння

$$L[y] \equiv (f(x)y')' + \omega^2 g(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (2.53)$$

за умов

$$(f(x)y' - e_1 y)|_{x=a} = (f(x)y' + e_2 y)|_{x=b} = 0 \quad (e_1, e_2 = \text{const}) \quad (2.54)$$

Покладемо

$$g(x) = m(x) + \sum_{i=1}^k M_i \delta(x - x_i), \quad a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b, \quad (2.55)$$

та вважатимемо функції  $f(x)$ ,  $m(x)$  інтегровними і такими, що

$$f(x) > 0, \quad m(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.56)$$

Рівняння (2.53) після підстановки в нього виразу (2.55) набуває вигляду

$$L[y] \equiv (f(x)y')' + \omega^2 m(x)y = \sum_{i=1}^k \alpha_i y(x_i) \delta(x - x_i), \quad (2.57)$$

де

$$\alpha_i = M_i \lambda^2, \quad \lambda = \sqrt{-1} \omega. \quad (2.58)$$

Будемо будувати загальний розв'язок задачі (2.53)–(2.56), у якій рівняння (2.53) за позначень (2.58) зведено до рівняння (2.57), застосовуючи функцію впливу (2.2).

З викладеного раніше випливає: якщо  $K = K(x, \alpha)$  – функція Коші рівняння

$$L[y] \equiv (f(x)y')' + \omega^2 m(x)y = 0 \quad (2.59)$$

( $K(\alpha, \alpha) = 0$ ,  $K'(\alpha, \alpha) = \frac{1}{f(\alpha)}$ , див. (1.11) та (2.59)), то функція (впливу)

$$\Phi(x, \alpha) \equiv K(x, \alpha) \theta(x, \alpha)$$

є фундаментальним розв'язком рівняння

$$L[y] \equiv (f(x)y')' + \omega^2 m(x)y = \delta(x - \alpha).$$

Загальний розв'язок рівняння (2.57) неважко записати у "змішаний" формі:

$$y = \bar{y}(x) + \sum_{i=1}^k \alpha_i y(x_i) \Phi_{xi}, \quad (2.60)$$

де  $\bar{y}(x) = D_1 \psi_1(x) + D_2 \psi_2(x)$  – загальний розв'язок однорідного рівняння (2.59);  $\Phi_{xi} = \Phi(x, x_i)$ ;  $D_1, D_2$  – довільні сталі.

Маючи на увазі неперервну залежність розв'язку (2.60) від параметрів, будемо послідовно вилучати величини  $y(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). З (2.60) видно, що  $y(x_1) = \bar{y}(x_1)$ , а тому

$$y = \bar{y}(x_1) + \alpha_1 \bar{y}(x_1) \Phi_{x1} + \sum_{i=2}^k \alpha_i y(x_i) \Phi_{xi}.$$

Далі отримуємо:  $y(x_2) = \bar{y}(x_2) + \alpha_1 \bar{y}(x_1) \Phi_{21}$ ,  $\Phi_{21} = \Phi(x_2, x_1)$ . Отже

$$y = \bar{y}(x) + \alpha_1 \bar{y}(x_1) \Phi_{x1} + \alpha_2 (\bar{y}(x_2) + \alpha_1 \bar{y}(x_1) \Phi_{21}) + \sum_{i=3}^k \alpha_i y(x_i) \Phi_{xi}.$$

Застосувавши метод індукції, вилучимо всі величини  $y(x_i)$  і знайдемо:

$$\bar{y}(x) = D_1 Q_1(x) + D_2 Q_2(x), \quad Q_l(x) = Q(\psi_l(x)), \quad l = 1, 2; \quad (2.61)$$

$$Q_{vs}(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^v \alpha_i \psi_i \Phi_{,i} + \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{j>i}^v \alpha_i \alpha_j \psi_i K_{ji} \Phi_{,j} + \\ + \sum_{i=1}^{v-2} \sum_{j>i}^v \sum_{k>j}^v \alpha_i \alpha_j \alpha_k \psi_i K_{ji} K_{kj} \Phi_{,k} + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v \psi_1 K_{21} K_{32} \dots K_{v,v-1} \Phi_{,v}. \quad (2.62)$$

Тут позначено:  $\psi_i = \psi(x_i)$ ,  $K_{ji} = K(x_j, x_i)$ ,  $\Phi_{xi} = \Phi(x, x_i)$ .

Підкреслимо, що так само, як загальний розв'язок (2.61), (2.62) рівняння другого порядку (2.57), будуються загальні розв'язки рівнянь такого ж типу, в яких  $L[y]$  – диференційний вираз деякого вищого порядку. При цьому формула (2.62) зберігає свій вигляд.

Щоб проілюструвати особливості структури функцій  $Q(x)$ , запишемо їх для трьох значень  $k$ :

$$k = 1, \quad Q = \psi + \alpha_1 \psi_1 \Phi_{x1} \quad (\psi = \psi(x)),$$

$$k = 2, \quad Q = \psi + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \psi_i \Phi_{,i} + \alpha_1 \alpha_2 \psi_1 K_{21} \Phi_{,2},$$

$$k = 3, \quad Q = \psi + \sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_i \Phi_{,i} + (\alpha_1 \alpha_2 \psi_1 K_{21} \Phi_{,2} + \alpha_1 \alpha_3 \psi_1 K_{31} \Phi_{,3} + \\ + \alpha_2 \alpha_3 \psi_2 K_{32} \Phi_{,3}) + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi_1 K_{21} K_{32} \Phi_{,3}.$$

Легко зауважити відповідність між кількостями членів у виразах для функцій  $Q(x)$  і елементами арифметичного трикутника:

$(k = 0)$	–		1				
$k = 1$	–		1	1			
2	–		1	2	1		
3	–		1	3	3	1	
4	–		1	4	6	4	1
...	–		.....				

(одиниця у вершині "трикутника" відповідає значенню  $k=0$ , тобто системі без зосереджених чинників, коли  $g(x) = m(x)$ , див. (2.55)).

Важливим є також такий висновок. Якщо відома функція Коші  $K(x, \alpha)$  рівняння  $L[y]=0$ , то функцію  $Q(x, \alpha)$ , що є розв'язком рівняння (2.57), можна побудувати за формулою (2.62) при  $\psi(x) \equiv K(x, \alpha)$  (такі ж висновки мають місце для похідних функції  $K(x, \alpha)$  за параметром  $\alpha$ ). Тому загальному розв'язкові рівняння  $L[y]=0$ , в якому  $\psi_1(x) \equiv K(x, \alpha)$ ,  $\psi_2(x) \equiv \dot{K}(x, \alpha)$  відповідає такий загальний розв'язок рівняння (2.57)

$$y = C_0 Q(x, \alpha) + C_1 \dot{Q}(x, \alpha) \tag{2.63}$$

(що узгоджується з загальною формулою (2.44)).

Розв'язок (2.63), як і функція  $Q(x, \alpha)$ , неперервно залежить від параметрів  $\alpha_i$  та  $x_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ). З формули (2.62), а також з наведених вище формул для функцій  $Q(x)$  видно, зокрема, що за умови  $x_s \rightarrow x_{s-1}$  ( $s = k, s = k-1, \dots, s = 2$ ) відповідні розв'язки стають тотожними; причому останній доданок у виразах для  $Q$  зникає, а до  $\alpha_{s-1}$  додається  $\alpha_s$  (якщо ж  $\alpha \leq x \leq x_1$ , то  $Q \equiv K(x, \alpha)$ ). Аналогічні властивості посідають загальні розв'язки (2.44).

Щодо отриманих загальних розв'язків зробимо такі зауваження:

1. За умов (2.52), коли  $f(x)$  та  $m(x)$  – довільні інтегровні функції (розподілу жорсткості та маси), відповідну функцію Коші  $K(x, \alpha)$  є сенс будувати як степеневий ряд за параметром; за таких обставин застосування отриманих тут загальних розв'язків стає вельми ефективним (в цьому можна буде переконатись далі).

2. Залежність загальних розв'язків від параметра  $\alpha$  (а не тільки від змінної  $x$ ) дає можливість вибирати його значення так, щоб найраціональніше пристосуватись до вигляду граничних умов (2.54) та властивостей (симетрія, періодичність тощо) коефіцієнтів рівняння (2.53).

Проілюструємо зміст останнього зауваження на прикладі крайової задачі

$$L[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad y(a) = y(b) = 0. \quad (2.64)$$

Нехай  $K(x, \alpha)$  – відповідна цій задачі функція Коші. Беручи по черзі  $\alpha = a$  та  $\alpha = b$ , матимемо два розв'язки однорідного рівняння  $L[y] = 0$ :  $y_1 = K(x, a)$ ,  $y_2 = K(x, b)$ . Беручи до уваги визначник

$$W[y_1, y_2]_{x=b} = \begin{vmatrix} K(x, a) & K(x, b) \\ K'(x, a) & K'(x, b) \end{vmatrix} \Big|_{x=b} = \frac{K(b, a)}{p_0(b)},$$

дійдемо висновку, що за виконання умови  $K(b, a) \neq 0$  наведені розв'язки є лінійно-незалежними. Тому загальний розв'язок диференційного рівняння задачі (2.64) можна подати у вигляді:

$$y = C_1 K(x, a) + C_2 K(x, b) + \int_a^x K(x, s) q(s) ds. \quad (2.65)$$

Підставляючи його у крайові умови (див. (2.64)) і визначаючи сталі  $C_1, C_2$ , одержимо розв'язок власне задачі (2.64):

$$y = -\frac{K(x, a)}{K(b, a)} \int_a^b K(b, s) q(s) ds + \int_a^x K(x, s) q(s) ds. \quad (2.66)$$

Той самий розв'язок (2.66) та умову  $K(b, a) \neq 0$  можна отримати, якщо за загальний розв'язок замість (2.65) взяти функцію

$$y = C_0 K(x, a) + C_1 \dot{K}(x, a) + \int_a^x K(x, s) q(s) ds.$$

З (2.66) випливає, зокрема, що відповідна однорідна крайова задача ( $q(x) \equiv 0$ ) має тільки тривіальний розв'язок  $y(x) \equiv 0$ . Ця обставина є визначальною для існування єдиної функції Гріна (додаток А). Якщо ж  $K(b, a) = 0$ , то з умови  $y(a) = 0$  випливає, що  $C_1 = 0$ . Натомість, з умови

$$y(b) = C_0 \cdot 0 + \int_a^b K(b, s) q(s) ds = 0$$

випливає, що: а) коли

$$y^*_{ab} = \int_a^b K(b, s) q(s) ds = 0,$$

то крайова задача має безліч розв'язків ( $C_0$  – довільне); б) коли  $y^*_{ab} \neq 0$ , то вона розв'язків не має.

### 3.1 Побудова функцій Коші у вигляді степеневих рядів

Вважатимемо, що коефіцієнти рівняння (1.1) в заданому замкненому проміжку  $I = [a, b]$  ( $a \leq x \leq b$ ) є абсолютно гладкими (неперервно диференційовними нескінченну кількість разів) функціями. Поряд з рівнянням (1.1) розглянемо спряжене з ним рівняння

$$L^*[z(\alpha)] \equiv \sum_{v=1}^n (-1)^v (p_{n-v}(\alpha) z)^{(v)} + p_n(\alpha) z = \tilde{q}(\alpha) \quad (3.1)$$

з аргументом  $\alpha$  ( $a \leq \alpha \leq b$ ) та неперервною правою частиною  $\tilde{q}(\alpha)$ .

Відповідні однорідні рівняння  $L[y(x)] = 0$  та  $L^*[z(\alpha)] = 0$  називаються взаємно спряженими, як і самі вирази з похідними  $L$  та  $L^*$ , що формують ліві частини цих рівнянь. Інтегрування взаємно спряжених однорідних рівнянь  $L[y(x)] = 0$  та  $L^*[z(\alpha)] = 0$  є еквівалентними задачами [19].

Коефіцієнти рівняння (3.1), поданого у формі (1.1), надалі позначатимемо через  $q_v(\alpha)$  ( $v = \overline{1, n}$ ). Вони визначаються однозначно через  $\{p_j\}_{j=1}^n$ .

Функцію Коші рівняння  $L^*[z(\alpha)] = 0$ , спряженого з рівнянням  $L[y(x)] = 0$ , позначатимемо як  $K^*(\alpha, x)$  ( $\alpha$  – аргумент,  $x$  – параметр); початкові умови для її визначення є аналогічними до умов (1.4). Функції Коші, відповідні вказаним взаємно спряженим однорідним рівнянням, пов'язані між собою співвідношенням

$$K^*(\alpha, x) = (-1)^{n-1} K(x, \alpha). \quad (3.2)$$

Звідси та з наведеного вище висновуємо, що загальний розв'язок рівняння (3.1) можна подати як рівність

$$z = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \frac{\partial^k K}{\partial x^k} + z_*(\alpha, x), \quad (3.3)$$

де

$$z_*(\alpha, x) = (-1)^{n-1} \int_x^\alpha K(s, \alpha) \tilde{q}(s) ds \quad (3.4)$$

– окремий розв'язок, який при  $\alpha=x$  задовольняє нульові початкові умови;  $B_k$  – довільні сталі. Таким чином, щоб побудувати загальні розв'язки рівнянь (1.1) і (3.1), достатньо мати лише одну функцію – функцію Коші  $K(x, \alpha)$  (основну фундаментальну функцію).

У випадку самоспряжених рівнянь ( $L^* \equiv L$ , число  $n$  – парне; див. (3.2))

$$K^*(\alpha, x) = -K(x, \alpha), \quad (3.5)$$

а розв'язки (1.5) і (3.3) та (1.6) і (3.4) збігаються.

Якщо коефіцієнти рівняння (1.1) (а отже й (3.1)) є сталими, то з (1.5) та (3.3) випливають відомі формули

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \frac{\partial^k K}{\partial x^k} + y_*(x, \alpha), \quad z = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \frac{\partial^k K}{\partial x^k} + z_*(\alpha, x),$$

структура яких зумовлена тим, що для рівнянь зі сталими коефіцієнтами  $K(x, \alpha) \equiv K(x - \alpha)$ , а тому частинні похідні функції Коші за аргументом  $x$  та за параметром  $\alpha$  пов'язані співвідношенням

$$\frac{\partial^s K}{\partial x^s} = (-1)^s \frac{\partial^s K}{\partial \alpha^s} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Вдамося до побудови функції Коші та її похідних у вигляді рядів Тейлора. Візьмемо до уваги те, що будь-яку функцію  $\tilde{K} = \tilde{K}(x, \alpha)$ , наділену властивістю абсолютної гладкості за кожною з двох незалежних змінних  $x$  і  $\alpha$ , можна подати у вигляді ряду

$$\tilde{K}(x, \alpha) = \sum_{r=n-1}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r C_r^j b_{r-j,j}(\zeta) (x - \zeta)^{r-j} (\alpha - \zeta)^j, \quad (3.6)$$

де

$$b_{r-j,j}(\zeta) = \left. \frac{\partial^r \tilde{K}(x, \alpha)}{\partial x^{r-j} \partial \alpha^j} \right|_{x=\alpha=\zeta} \quad (a \leq \zeta \leq b). \quad (3.7)$$

Нехай в рівнянні (1.1)  $p_0(x) \equiv 1$ . В такому разі можна записати:

$$K^{(n)} + p_1(x) K^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) K' + p_n(x) K \equiv 0, \\ K^{(n)} + q_1(\alpha) K^{(n-1)} + \dots + q_{n-1}(\alpha) K' + q_n(\alpha) K \equiv 0, \quad (3.8)$$

де  $K^{(j)}(x, \alpha) = \frac{\partial^j K(x, \alpha)}{\partial x^j}$ ,  $K^{(j)}(x, \alpha) = \frac{\partial^j K(x, \alpha)}{\partial \alpha^j}$ .

Розглядаючи послідовно рівняння першого, другого, третього та вищих порядків і використовуючи тотожності (3.8) та співвідношення (1.4)–(1.6), (3.1)–(3.5), встановлюємо такі правила визначення величин (3.7):

$$b_{l,k}(q_1, q'_1, \dots) \sim (-1)^{n-1} b_{k,l}(p_1, p'_1, \dots), \quad (3.9)$$

(щоб визначити елемент  $b_{l,k}$ , потрібно елемент  $b_{k,l}$  домножити на  $(-1)^{n-1}$ , замінюючи одночасно в ньому  $p_1, p'_1, \dots$  відповідно на  $q_1, q'_1, \dots$  (при визначенні  $b_{k,l}$  обернені операції необхідно виконати над  $b_{l,k}$ ; у випадку самоспряжених рівнянь  $b_{l,k} \equiv -b_{k,l}$ );

$$b_{n-1,n-1} \Big|_{n=N} = b_{n-1,n} \Big|_{n=N-1} \quad (N = 2; 3; \dots); \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{n+s,m} &= - \sum_{k=0}^s C_s^k \sum_{i=1}^n p_i^{(s-k)}(\zeta) b_{n-i+k,m} \\ b_{m,n+s} &= - \sum_{k=0}^s C_s^k \sum_{i=1}^n q_i^{(s-k)}(\zeta) b_{m,n-i+k} \end{aligned} \right\}. \quad (3.11)$$

Наведені співвідношення застосовні до рівнянь (1.1) і (3.1) деякого порядку  $n = N$  за таким алгоритмом. Вважаючи відомим для  $n = N-1$  визначник Вронського  $W(K)$  системи функцій  $K, K'_\alpha, \dots, K_{\alpha^{n-1}}^{(n-1)}$  при  $x = \alpha = \zeta$  (можна виходити також і з транспонованого визначника системи функцій  $K, K'_x, \dots, K_x^{(n-1)}$ ), записуємо аналогічний визначник для  $n = N$ . Формально його можна отримати облямовуванням визначника для  $n = N-1$  рядком зверху (зважаючи на (1.11)) і стовпчиком праворуч (з використанням властивості (3.9)), додаючи далі діагональний елемент  $b_{N-1, N-1}$ , який визначається співвідношеннями (3.10), (3.11). Побудова визначника для  $n = N-1$ , якщо він заздалегідь не відомий, здійснюється аналогічно на підставі визначника для  $n = N-2$  тощо.

Так, наприклад, при  $p_1(x) \equiv 0$  для рівняння шостого порядку, вдаючись до позначень

$$\begin{aligned} b_{5,4} &= p_2^2 - p_4 + p_3' - p_2''; & b_{4,5} &= -q_2^2 + q_4 - q_3' + q_2'', \\ b_{5,5} &= p_5 - 2p_2p_3 + 4p_2p_2' - p_2'' + p_3'' - p_4', \end{aligned}$$

матимемо:



$$W(K)|_{x=\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -p_2 & -q_3 + q'_2 \\ 0 & -1 & 0 & p_2 & -p_3 + 2p'_2 & b_{4,5} \\ 1 & 0 & -p_2 & p_3 - p'_2 & b_{5,4} & b_{5,5} \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Виділені в (3.12) діагональні мінори, починаючи від одиниці внизу ліворуч, є визначниками  $W(K)$ , що відповідають рівнянням (1.1) і (3.1) при  $n = 1; 2; 3; 4; 5$  (тут всюди вважаємо, що  $p_1(x) \equiv 0$ ).

Якщо  $p_1(x) \neq 0$ , то послідовне застосування наведених тут правил для рівнянь до четвертого, наприклад, порядку включно дозволяє з'ясувати, що

$$W(K)|_{x=\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 0 & -1 & -p_1 & b_{2,3} \\ 1 & p_1 & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

де

$$\begin{aligned} b_{2,3} &= -p_1^2 + p_2 - 2p'_1, & b_{3,2} &= p_1^2 - p_2 + p'_1 \\ b_{3,3} &= p_1^3 - 2p_1p_2 + p_3 + 3p_1p'_1 - p'_2 + p''_1 \quad (p_0 = q_0 \equiv 1). \end{aligned}$$

Таким самим чином можна будувати визначники типу (3.12) і (3.13) для рівнянь вищих порядків. Очевидно, що елементи визначників нижчого порядку правлять за первинну інформацію в рекурентних співвідношеннях (3.11), що дає можливість послідовно знаходити величини (3.7).

До речі, на підставі викладеного тут можна отримати відому формулу Остроградського-Ліувіля шляхом, який не зустрічається в літературі. Дійсно, із першої тотожності (1.9) випливає, що

$$K^{(n)} \Big|_{x=\alpha} = W' (W p_0)^{-1}; \quad (3.14)$$

натомість тотожність (3.8) доводить, що

$$K^{(n)} \Big|_{x=\alpha} = -p_1 p_0^2. \quad (3.15)$$

То ж порівнюючи (3.14) та (3.15), знайдемо сподіване:

$$W' W^{-1} = -p_1 p_0^{-1}.$$

Запропонований спосіб побудови функції Коші передбачає послідовне визначення величин (3.7) для рівнянь довільно високих порядків, починаючи з випадку  $N = 2$ . Зауважимо, що всі ці величини (за винятком первинних елементів, що є числами 0, або  $-1$ , або 1) виражаються через коефіцієнти  $p_v(\zeta)$ ,  $q_v(\zeta)$  та їх похідні за алгоритмом такої структури:

$$b_{r-j,j}(\zeta) = (-1)^j J_{r+j-n+1}(\zeta) + \mu_{r-j,j}(\zeta), \quad (3.16)$$

де

$$J_k = -\sum_{i=1}^n p_i(\zeta) J_{k-i}; \quad J_0 = 1; \quad J_s(\zeta) \equiv 0 \text{ для } s < 0 \quad (3.17)$$

(при цьому ті з величин  $\mu_{r-j,j}^{(r)}(\zeta)$ , які не дорівнюють нулеві тотожно, анулюються при  $p'_v(\zeta) = q'_v(\zeta) = \dots = 0$ ).

Таким чином, можна стверджувати, що задача побудови зображення типу (3.6), загалом – розв'язана. Як функція Коші, так і її похідні для рівнянь (1.1) і (3.1) з абсолютно гладкими коефіцієнтами є відображуваними у вигляді степеневих рядів Тейлора (формули (3.7) – (3.11)).

Дійсно, покладаючи  $\zeta = \alpha$ , з (3.6), для рівняння  $L[y] = 0$  одержуємо формулу

$$K_{\alpha^k}^{(k)}(x, \alpha) = \sum_{r=n-1}^{\infty} \frac{1}{(r-k)!} b_{r-k,k}^{(r)}(\alpha) (x-\alpha)^{r-k} \quad (k = \overline{0, n-1}). \quad (3.18)$$

Аналогічно, для рівняння  $L^*[z] = 0$ :

$$K_{x^k}^{(k)}(x, \alpha) = \sum_{r=n-1}^{\infty} \frac{1}{(r-k)!} b_{k,r-k}^{(r)}(x) (\alpha-x)^{r-k} \quad (k = \overline{0, n-1}). \quad (3.19)$$

(Зауважимо, що в (3.18) і (3.19) ніщо не заважає покласти  $k = n$ ;  $k = n+1$ ; ..., і віднайти відповідні формули для похідних ще вищого порядку.)

Збіжність побудованих рядів у даному випадку є апіорно очевидною.

Для побудови окремих розв'язків неоднорідних рівнянь доцільно розгнати  $p(\alpha)$  і  $q(x)$  (якщо вони є належно гладкими функціями) в ряди Тейлора за степенями  $\alpha - x$  і  $x - \alpha$  та застосувати формули (3.18) і (3.19) при  $k = 0$ ; в такому випадку інтегрування не викликає особливих труднощів; відповідні частинні розв'язки вигляду (1.6) також будуть степеневими рядами.

Вдаючись до формул (3.16), (3.17) і (3.6) одержуємо таке зображення функції  $\tilde{K}(x, \alpha)$ , на підставі якого неважко отримати відповідні зображення (3.18), (3.19):

$$\tilde{K}(x, \alpha) = \varphi(x - \alpha, \zeta) + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r C_r^j \mu_{r-j,j}(\zeta) (x - \zeta)^{r-j} (\alpha - \zeta)^j .$$

Тут

$$\varphi(x - \alpha, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1+k)!} J_k(\zeta) (x - \alpha)^{n-1+k} .$$

Сума цього ряду визначається формулами

$$\varphi = \sum_{v=1}^n \frac{e^{s_v(\zeta)(x-\alpha)}}{P'_n[s_v(\zeta)]} = (-1)^{n-1} \sum_{v=1}^n \frac{e^{-s_v(\zeta)(\alpha-x)}}{Q'_n[-s_v(\zeta)]},$$

де  $P_n(s)$  і  $Q_n(s)$  – "характеристичні многочлени" рівнянь (1.1) і (3.1) відповідно,

$$P_n(s) = s^n + \sum_{v=1}^n p_v(\zeta) s^{n-v}; \quad Q_n(s) = s^n + \sum_{v=1}^n (-1)^v p_v(\zeta) s^{n-v},$$

$s_v(\zeta)$ ,  $-s_v(\zeta)$  – корені цих многочленів (вони вважаються простими, що, проте, не применшує загальності отриманих результатів). Зазначимо, що при  $p_v = \text{const}$  викладене тут містить в собі відомі результати як окремі випадки.

Підкреслимо ще таке. З теореми про існування та єдиність розв'язків задачі Коші випливає: якщо які-небудь параметри в коефіцієнтах первісного (вихідного) рівняння прямують до певних значень, то відповідна функція Коші завжди переходить при цьому у функцію Коші, відповідну граничному (наслідковому) рівнянню. Іншими словами, при будь-якій зміні визначальних параметрів завжди зберігається взаємна відповідність між рівняннями та його основною фундаментальною функцією.

## 3.2 Функції Коші як ряди за параметром

У багатьох випадках функцію  $K(x, \alpha)$  доцільно будувати у вигляді ряду за деяким параметром. Таку побудову можна здійснювати по-різному: виходячи з формули (3.18), шляхом відповідного перегруповування її доданків або розгортання її в ряд Маклорена за відповідним параметром; за допомогою формули (1.9), в якій система функцій  $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^n$  відображена у вигляді рядів за параметром тощо [20-25]. Один із загальних підходів випливає з розгляду відповідних інтегро-диференціальних рівнянь.

Розглянемо рівняння [5, 24]

$$L[y] = p M[y], \quad (3.20)$$

де  $p$  – деякий параметр (дійсний або комплексний),

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=1}^n p_{\nu}(x) y^{(n-\nu)}(x),$$

$$M[y] \equiv \sum_{\mu=1}^m b_{\mu}(x) y^{(m-\mu)}(x); \quad n > m. \quad (3.21)$$

Коефіцієнти виразів з похідними (3.20), (3.21) від  $p$  не залежать і є інтегровними функціями змінної  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) та цілими аналітичними функціями деяких параметрів  $b_1, b_2, \dots, b_l$ .

Розв'язок задачі Коші, який визначає функцію впливу рівняння (3.20), як відомо, співпадає з розв'язком такого інтегро-диференційного рівняння другого роду

$$Q(x, \alpha) = K(x, \alpha) + p \int_{\alpha}^x K(x, t) M(Q(t, \alpha)) dt, \quad (3.22)$$

де  $K(x, \alpha)$  – функція Коші (відповідна рівнянню  $L[y] = 0$  фундаментальна функція); її можна визначити, зокрема, за формулою (1.9), чи за відповідними таблицями (див., наприклад, табл. 1-3), чи за допомогою формул (3.11), чи за формулою

$$K(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1+k)!} b_{n-1+k,0}(\alpha) (x-\alpha)^{n-1+k} \quad (3.23)$$

тощо.

Підставляючи в (3.22) ряд

$$Q(x, \alpha) = Q_0(x, \alpha) + p Q_1(x, \alpha) + p^2 Q_2(x, \alpha) + \dots, \quad (3.24)$$

одержуємо для його коефіцієнтів такі співвідношення:

$$Q_r(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x K(x, t) U_{r-1}(t, \alpha) dt, \quad r = 1, 2, \dots,$$

$$Q_0(x, \alpha) = K(x, \alpha), \quad U_{r-1}(x, \alpha) = M[Q_{r-1}(x, \alpha)]. \quad (3.25)$$

Звідси послідовно знаходимо:

$$Q_1(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x K(x, t) M[K(t, \alpha)] dt,$$

$$Q_2(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \int_{\alpha}^z K(x, z) M[K(z, t)] M[K(t, \alpha)] dz dt,$$

$$Q_3(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \int_{\alpha}^z \int_{\alpha}^u K(x, u) M[K(u, z)] M[K(z, t)] M[K(t, \alpha)] dudzdt, \dots \quad (3.26)$$

(у випадку  $M[y] = v(x)y$  з (3.25), (3.26) впливають добре відомі формули для визначення ітерованих ядер відповідного інтегрального рівняння Вольтерра).

Диференціюючи інтеграл (3.25) з урахуванням формул (3.22), (3.23), маємо

$$\left. \frac{\partial Q^{(n+s)}}{\partial x^{n+s}} \right|_{x=\alpha} = \alpha_{s,r}(\alpha, \alpha) \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (3.27)$$

причому

$$\begin{aligned} \alpha_{s,r}(x, \alpha) &= \alpha_{0,r}(x, \alpha) b_{n+s-1,0}(x) + \alpha'_{s-1,r}(x, \alpha), \\ \alpha_{0,r}(x, \alpha) &= U_{r-1}(x, \alpha), \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

Формулу (3.28) неважко перетворити до такого (зручного для обчислень) вигляду

$$\begin{aligned} \alpha_{s+1,r}(x, \alpha) &= \alpha_{0,r}^{(s+1)}(x, \alpha) + \sum_{j=0}^s \alpha_{0,r}^{(j)}(x, \alpha) \left[ \sum_{i=0}^{s-j} C_{i+j}^j b_{n+s-j-i,0}^{(i)}(x) \right], \\ s &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Із співвідношень (3.25)–(3.28), (3.29) випливає, що

$$Q_r(x, \alpha) = \sum_{l=r}^{\infty} \frac{1}{l!} a_{l,r}(\alpha, \alpha) (x - \alpha)^l, \quad (3.30)$$

де

$$a_{l,r}(\alpha, \alpha) = \alpha_{l-n,r}(\alpha, \alpha), \quad l_r = (r+1)n - 1 - rm. \quad (3.31)$$

Отже, задача побудови основної фундаментальної функції  $Q(x, \alpha)$  рівняння (3.20) у вигляді ряду за параметром  $p$  в загальному – розв'язана. Коефіцієнти  $Q_r(x, \alpha)$  ряду (3.24) визначаються за квадратурними формулами (3.25), (3.26) або відповідними степеневими рядами (3.30), (3.31). Можна показати, що функція  $Q(x, \alpha)$  є цілою аналітичною функцією параметрів  $b_1, b_2, \dots, b_l$  та має неперервні похідні за аргументом  $x$  до  $(n-1)$ -ої включно [24].

### 3.3 Зображення розв'язків рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння зі сталими коефіцієнтами (дійсними або комплексними)

$$y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1} y' - a_n y = 0. \quad (3.32)$$

Функція Коші цього рівняння залежить, як відомо, від різниці  $x - \alpha$ , тобто

$$K(x, \alpha) = \varphi(x - \alpha), \quad (3.33)$$

причому  $\varphi(x)$  – всюди збіжний степеневий ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1+k)!} J_k x^{n-1+k}, \quad (3.34)$$

де

$$J_k = a_1 J_{k-1} + \dots + a_n J_{k-n}, \quad J_0 = 1, \quad J_j = 0 \text{ для } j < 0. \quad (3.35)$$

Звідси, застосувавши метод індукції, неважко одержати формулу [16]

$$\begin{aligned} \varphi^{(n-1)}(x) = & \frac{1}{0!} + \left( \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \dots + \frac{a_n x^n}{n!} \right) + \\ & + \left( \frac{a_1^2 x^2}{2!} + \frac{a_2^2 x^4}{4!} + \dots + \frac{a_n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{2a_1 a_2 x^3}{3!} + \dots + \frac{2a_{n-1} a_n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) + \dots, \end{aligned}$$

а, отже, виразити функцію (3.34) безпосередньо через коефіцієнти рівняння (3.32):

$$\varphi(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left( \frac{a_1 x^n}{n!} + \dots + \frac{a_n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) + \dots \quad (3.36)$$

Розв'язок (3.34), (3.35) або (3.36) визначається без знаходження коренів відповідного характеристичного многочлена, а при прямуванні коефіцієнтів рівняння (3.32) до деяких значень переходить у розв'язок граничного рівняння. Нехай характеристичний многочлен

$$p_n(s) = s^n - a_1 s^{n-1} - \dots - a_{n-1} s - a_n$$

має  $m$  різних коренів  $s_q$  ( $q = 1, 2, \dots, m$ ), кратність кожного з яких позначена через  $v_q$ . Тоді функцію (3.36) можна, як відомо, записати так [17]:

$$\varphi(x) = \sum_{q=1}^m \frac{1}{(v_q - 1)!} \frac{\partial^{v_q-1}}{\partial s^{v_q-1}} \left\{ \frac{e^{s_q x}}{(s - s_q)^{-v_q} \prod_i (s - s_i)^{v_i}} \right\}, \quad (3.37)$$

причому диференціювання виконується за змінною  $s$  і в кінцевий результат вноситься  $s = s_q$ .

У випадку, коли всі корені характеристичного многочлена є простими (тобто всі  $v_q = 1$  і  $m = n$ ),

$$\varphi(x) = \sum_{q=1}^n \frac{1}{p'_n(s_q)} e^{s_q x}. \quad (3.38)$$

Враховуючи єдиність розв'язку відповідної задачі Коші та порівнюючи (3.34) і (3.38), одержуємо формулу

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1+k)!} J_k x^{n-1+k} = \sum_{q=1}^n \frac{1}{p'_n(s_q)} e^{s_q x} \quad (3.39)$$

(якщо серед коренів є кратні, то потрібно використати співвідношення (3.37)).

Зауважимо, що формулу (3.39) та аналогічні до неї можна застосовувати для визначення сум відповідних рядів. Як приклад розглянемо випадок, коли  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ ,  $a_n = a$ .

Кладучи в (3.39)

$$I_k = I_{rn} = a^r \quad (r = 0, 1, 2, \dots); \quad p'_n(s_q) = ns_q^{n-1},$$

маємо

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r x^{rn+m-1}}{(rn+n-1)!} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \frac{1}{s_q^{n-1}} e^{s_q x}.$$

Звідси одержуємо більш компактну формулу

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r x^{rn}}{(rn)!} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n e^{s_q x}. \quad (3.40)$$

Зазначимо, що відомий спосіб Г. К. Еванса [26] знаходження сум рядів (3.40) пов'язаний з обчисленнями, обсяг яких істотно зростає зі збільшенням  $n$ .

Через функцію (3.33), загальний розв'язок рівняння (3.32) можна подати у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \varphi^{(i)}(x) \quad (3.41)$$

( $C_i$  – довільні сталі). Формула (3.41) відома [9] і узгоджується з викладеним в розділі 1.

Основна фундаментальна функція  $\varphi(x)$  має важливу властивість: якщо коефіцієнти рівняння (3.32) прямують до деяких значень (зокрема, до нуля або до таких значень, при яких дискримінант характеристичного многочлена рівний нулеві), то вона переходить в основну фундаментальну функцію граничного рівняння. Аналогічні властивості мають похідні від  $\varphi$  будь-якого порядку, а також відповідний частинний розв'язок. Очевидно, для рівняння (3.32) не існує іншої, відмінної від  $\varphi$ , функції, яка має вказану властивість і утворює разом із своїми похідними до  $n-1$ -го порядку включно фундаментальну систему його розв'язків (у цьому сенсі функція  $\varphi$  також – єдина).

### 3.4 Матрична функція Коші та загальний розв'язок системи лінійних рівнянь другого порядку

Розглянемо систему лінійних диференційних рівнянь, записану в матричному вигляді [27]

$$A(t)\ddot{q} + B(t)\dot{q} + C(t)q = f(t), \quad (3.42)$$

де  $A, B, C$  – квадратні матриці, елементи яких позначені відповідно як  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ );  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ ,  $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$  – матриці-стовпці.

Щоб визначити однозначно вектор-функцію  $q(t)$ , потрібно задати для деякого моменту часу  $t = \tau$  початкові умови:

$$q(\tau) = q_0, \quad \dot{q}(\tau) = \dot{q}_0. \quad (3.43)$$

Надалі вважатимемо, що матриці  $A, B$  і  $C$  та права частина  $f$  є неперервними функціями аргумента  $t$  і, крім цього,  $\det A(t) > 0$ .

Розглянемо спочатку відповідне (3.42) однорідне рівняння

$$A\ddot{Y} + B\dot{Y} + CY = 0 \quad (3.44)$$

для матриці-функції  $Y(t)$ . Оскільки  $\det A(t) > 0$ , то існує матриця  $A^{-1}$ , обернена до  $A$ . Тому це рівняння можна перетворити до такого:

$$\ddot{Y} + \tilde{B}\dot{Y} + \tilde{C}Y = 0, \quad (3.45)$$

де

$$\tilde{B} = A^{-1}B; \quad \tilde{C} = A^{-1}C. \quad (3.46)$$

Розв'язки  $Y_1, Y_2$  рівняння (3.45) (що є наслідком співвідношень (3.44), (3.46)) називаються лінійно незалежними, якщо тотожність  $Y_1C_1 + Y_2C_2 \equiv 0$  зі сталими матрицями  $C_1, C_2$  можлива тільки за умови  $C_1 = C_2 = 0$ , і залежними – в протилежному випадку. Розв'язки  $Y_1, Y_2$  будуть лінійно незалежними тоді й тільки тоді, коли відмінний від нуля визначник блочної матриці

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ \dot{Y}_1 & \dot{Y}_2 \end{bmatrix}.$$

Якщо розв'язки  $Y_1, Y_2$  – лінійно незалежні, то будь-який розв'язок рівняння (3.45) визначається за формулою

$$Y = Y_1C_1 + Y_2C_2. \quad (3.47)$$

Якщо  $Y$  – розв'язок рівняння (3.45), а  $c$  – сталий вектор, то  $q(t) = Y(t)c$  – загальний розв'язок рівняння



$$\ddot{q} + \tilde{B}\dot{q} + \tilde{C}q = 0. \quad (3.48)$$

Звідси та з формули (3.47) випливає, що загальний розв'язок рівняння (3.48) має вигляд

$$q(t) = Y_1(t)c_1 + Y_2(t)c_2. \quad (3.49)$$

Так само, як для одного лінійного рівняння, вводимо матричну функцію Коші  $K(t, \tau)$ . Ця функція аргумента  $t$  і параметра  $\tau$  є розв'язком матричного рівняння (3.45) та задовольняє такі початкові умови:

$$K(\tau, \tau) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \tau}(\tau, \tau) = E, \quad (3.50)$$

де  $E$  – одинична матриця. З теорії диференціальних рівнянь випливає [24], що така функція існує і є єдиною. Неважко перевірити, що функція Коші та її частинна похідна за параметром  $\tau$  є лінійно незалежними розв'язками рівняння (3.45). Отже, беручи до уваги (3.49), загальний розв'язок рівняння (3.48) запишемо в такому вигляді:

$$q(t) = K(t, \tau)c_1 + \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial \tau}c_2. \quad (3.51)$$

Тепер розглянемо відповідне неоднорідне рівняння (3.42). Після множення обох його частин на матрицю  $A^{-1}$  зліва та врахування позначень (3.46), одержуємо:

$$\ddot{q} + \tilde{B}\dot{q} + \tilde{C}q = A^{-1}f. \quad (3.52)$$

Розв'язок цього рівняння, як і в одновимірному випадку, є сумою загального розв'язку (3.51) однорідного рівняння та деякого окремого розв'язку неоднорідного рівняння, тобто

$$q(t) = K(t, \tau)c_1 + \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial \tau}c_2 + q^*(t). \quad (3.53)$$

Довільні сталі вектори  $c_1$  і  $c_2$  можна визначати з умови задоволення відповідних початкових умов (3.43).

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що розв'язок неоднорідного рівняння (3.52), подібно до окремого розв'язку (1.6) для одновимірного рівняння, визначається формулою:

$$q^*(t) = \int_{\tau}^t K(t, s) A^{-1}(s) f(s) ds. \quad (3.54)$$

Цей розв'язок для  $t = \tau$  задовольняє нульові умови, тобто

$$q^*(\tau) = 0; \quad \dot{q}^*(\tau) = 0 \quad (3.55)$$

(щоб переконатися в цьому, досить використати при диференціюванні інтеграла (3.54) співвідношення (3.50)).

Для того, щоб розв'язати задачу (3.52), (3.43), подаючи розв'язок у вигляді (3.53), необхідно знайти матриці

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial \tau}.$$

Нехай матриця  $K(t, \tau)$  має вигляд

$$K(t, \tau) = \begin{bmatrix} K_{11}(t, \tau) & K_{12}(t, \tau) \\ K_{21}(t, \tau) & K_{22}(t, \tau) \end{bmatrix}.$$

Розгортаючи кожен її елемент  $K_{ij}(t, \tau)$  ( $i, j = 1, 2$ ) в ряд Тейлора в околі точки  $t = \tau$ , переконуємось у справедливості такого матричного співвідношення:

$$K(t, \tau) = K(\tau, \tau) + \frac{t - \tau}{1!} \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=\tau} + \frac{(t - \tau)^2}{2!} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \Big|_{t=\tau} + \dots$$

Оскільки  $K(\tau, \tau) = 0$  і  $\frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = E$ , то

$$K(t, \tau) = \frac{t - \tau}{1!} E + \frac{(t - \tau)^2}{2!} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \Big|_{t=\tau} + \dots$$

З рівняння (3.45) при  $t = \tau$  знаходимо:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \Big|_{t=\tau} = -\tilde{B}(\tau).$$

Отже,

$$K(t, \tau) = \frac{t - \tau}{1!} E + \frac{(t - \tau)^2}{2!} \tilde{B}(\tau) + \dots$$

Звідси

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} \Big|_{t=\tau} = -E; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial \tau} \Big|_{t=\tau} = \tilde{B}(\tau). \quad (3.56)$$

Застосовуючи розв'язок  $q(t)$  у формі (3.53), а також умови (3.43), (3.55), (3.50) та знайдені матриці (3.56), приходимо до зображення розв'язку задачі (3.52), (3.43) в такому вигляді:

$$q(t) = K(t, \tau) \left[ \dot{q}_0 + \tilde{B}(\tau) q_0 \right] - \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial \tau} q_0 + \int_{\tau}^t K(t, s) A^{-1}(s) f(s) ds. \quad (3.57)$$

Порівняємо розв'язки системи рівнянь (3.52) з розв'язком одинокого рівняння

$$L[q] = \ddot{q} + b(t)\dot{q} + c(t)q = f(t). \quad (3.58)$$

Розв'язком задачі Коші для рівняння (3.58) є функція

$$q(t) = (\dot{q}_0 + b(\tau)q_0)K(t, \tau) - \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial \tau} q_0 + \int_{\tau}^t K(t, s) f(s) ds. \quad (3.59)$$

Порівнюючи (3.57) і (3.59), доходимо висновку, що рух лінійної системи з  $k$  ступенями вільності визначається формулою, яка повністю аналогічна відповідній формулі для системи з одним ступенем вільності. Зрештою, (3.59) можна вважати окремим (частковим) випадком (3.57).

Зауважимо, що аналогічні результати справедливі для лінійних систем довільного порядку з довільною кількістю ступенів вільності.

Розглянемо такий приклад. Нехай  $\tilde{B}$  і  $\tilde{C}$  в однорідному рівнянні, що відповідає рівнянню (3.52), є сталими матрицями. Тоді відповідну матричну функцію Коші  $K(t, \tau) \equiv \tilde{\varphi}(t - \tau)$  можна будувати за формулами вигляду (3.33)–(3.35), замінюючи там сталі  $a_1$  та  $a_2$  матрицями  $\tilde{B}$  та  $\tilde{C}$ . Отже,

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} J_k \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (3.60)$$

де  $J_k = \tilde{B}J_{k-1} + \tilde{C}J_{k-2}$ ,  $J_0 = E$ ,  $J_j = \theta$  ( $j < 0$ );  $E$  та  $\theta$  – одинична та нульова матриці. Неважко углядіти, що матричний ряд (3.60) можна записати і так:

$$\tilde{\varphi}(t) = \exp \tilde{B}t \cdot \frac{\sin \tilde{C}t}{\tilde{C}}.$$

Остання формула узгоджується з відомими результатами [27].

### 3.5 Звідні рівняння та системи рівнянь

Окремий клас складають рівняння зі змінними коефіцієнтами, які, однак, можна звести до відповідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Звернемо увагу на таке загальне твердження [1]: якщо однорідне рівняння

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (p_n(x) \neq 0)$$

за допомогою заміни

$$t = g(x) \quad x \in I = [a, b], t \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$$

незалежної змінної  $x$  на  $t(g(x) -$  неперервно диференційовна  $n$  разів функція, така що  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b])$  можна звести до однорідного ж рівняння зі сталими коефіцієнтами, то необхідно, щоб

$$g(x) = \int \sqrt[k]{p_n(x)} dx \quad (k = \text{const} \neq 0).$$

Можна навести й інші подібні твердження щодо такого типу звідності рівнянь.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами такого вигляду

$$\begin{aligned} y_1' &= \left( a_{11}g' - \frac{u_1'}{u_1} \right) y_1 + a_{12}g' \frac{u_2}{u_1} y_2 + \dots + a_{1n}g' \frac{u_n}{u_1} y_n, \\ y_2' &= a_{21}g' \frac{u_1}{u_2} y_1 + \left( a_{22}g' - \frac{u_2'}{u_2} \right) y_2 + \dots + a_{2n}g' \frac{u_n}{u_2} y_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n' &= a_{n1}g' \frac{u_1}{u_n} y_1 + a_{n2}g' \frac{u_2}{u_n} y_2 + \dots + \left( a_{nn}g' - \frac{u_n'}{u_n} \right) y_n. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Тут  $g = g(x)$  і  $u_k = u_k(x)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – задані функції, що мають неперервні перші похідні, причому  $u_k = u_k(x)$  не набувають нульових значень в окресленому проміжку  $x_1 < x < x_2$ ;  $a_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) – сталі (дійсні або комплексні) коефіцієнти.

Систему рівнянь (3.61) називатимемо звідною, наголошуючи на тому, що заміною змінних

$$y_k = \frac{z_k}{u_k}, \quad t = g(x) \quad (3.62)$$

її можна звести до системи рівнянь

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.63)$$

зі сталими коефіцієнтами; і навпаки, при заміні (3.62) система (3.63) переходить у систему (3.61).

Загальний розв'язок системи (3.63) має вигляд

$$z = c e^{At}, \quad (3.64)$$

де  $z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}^T$  – матриця-стовпець розв'язків;  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}^T$  – довільна стала матриця-стовпець;  $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$  – матриця коефіцієнтів.

Кладучи

$$e^{At} = [q_{ij}(t)]_{i,j=1}^n,$$

розв'язок системи (3.64) запишемо в розгорнутій формі:

$$z_1(t) = c_1 q_{11}(t) + c_2 q_{12}(t) + \dots + c_n q_{1n}(t),$$

$$z_2(t) = c_1 q_{21}(t) + c_2 q_{22}(t) + \dots + c_n q_{2n}(t),$$

$$\dots$$

$$z_n(t) = c_1 q_{n1}(t) + c_2 q_{n2}(t) + \dots + c_n q_{nn}(t).$$

Звідси, враховуючи (3.62), одержуємо загальний розв'язок системи (3.61):

$$y_k(x) = z_k [g(x)] u_k^{-1}(x).$$

Очевидно, що подібно можна будувати загальний розв'язок системи неоднорідних рівнянь.

Розглянемо деякі часткові випадки.

Нехай  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$ ,  $a_{12} = a_{23} = \dots = a_{n-1,n} = 1$ ,  $a_{nk} = \alpha_{n-k+1}$ , а інші коефіцієнти – нулі. В цьому випадку система (3.61) зводиться до системи

$$z'_1 = z_2, \quad z'_2 = z_3, \quad \dots, \quad z'_n = \alpha_n z_1 + \alpha_{n-1} z_2 + \dots + \alpha_1 z_n,$$

яка рівносильна одному рівнянню

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z^{(n-i)}(t). \quad (3.65)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$z(t) = c_0 \varphi(t) + c_1 \varphi'(t) + \dots + c_{n-1} \varphi^{(n-1)}(t),$$

визначувана через фундаментальну функцію  $\varphi(t)$ , яка, в свою чергу, визначається за формулами (3.34)-(3.35) або (3.37)-(3.38).

Отже загальний розв'язок системи (3.61) рівнянь зі змінними коефіцієнтами, відповідної одному рівнянню (3.65) зі сталими коефіцієнтами, має вигляд:

$$y(x) = c_0 \psi_0(x) + c_1 \psi_1(x) + \dots + c_{n-1} \psi_{n-1}(x),$$

де

$$\psi_0 = \frac{1}{u(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_k [g(x)]^{n+k-1}}{(n+k-1)!} = \sum_{q=1}^n \frac{e^{s_q [g(x)]}}{p'_n(s_q)}, \quad (3.66)$$

а фундаментальні функції  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ , ...,  $\psi_{n-1}(x)$  визначаються за формулами, одержаними відповідним чином з формул для визначення функцій  $\varphi'(t)$ ,  $\varphi''(t)$ , ...,  $\varphi^{(n-1)}(t)$  (у випадку кратних коренів для знаходження суми ряду (3.66) можна вдатись до формули (3.37)).

Надамо отриманому результату іншої форми, дуже часто зручної для конкретних застосувань. При цьому заради спрощення записів обмежимося розглядом рівняння другого порядку.

Рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3.67)$$

заміною

$$y(x) = \frac{z(x)}{u(x)}, \quad t = g(x) \quad (3.68)$$

зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти  $p(x)$ ,  $q(x)$  мають таку структуру:

$$p(x) = 2u'u^{-1} - (\alpha_1 g' + g''(g')^{-1}), \quad (3.69)$$

$$q(x) = u''u^{-1} - u'u^{-1}(\alpha_1 g' + g''(g')^{-1}) - \alpha_2 g'^2, \quad (3.70)$$

де  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  – довільні параметри;  $u(x)$ ,  $g(x)$  – двічі неперервно диференційовні функції, причому  $u(x)$  і  $g'(x)$  не набувають нульових значень в наперед окресленому проміжку  $x_1 < x < x_2$ . При цьому фундаментальна система розв'язків рівняння (3.67) визначається за формулами

$$\psi_0(x) = \frac{1}{u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_k g^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{u} \sum_{l=1}^2 \frac{e^{s_l g}}{p_2'(s_l)},$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_k g^k}{k!} = \frac{1}{u} \sum_{l=1}^2 \frac{s_l e^{s_l g}}{p_2'(s_l)},$$

де  $s_1, s_2$  – корені рівняння  $p_2(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_2 = 0$ ;

$$J_k = \alpha_1 J_{k-1} + \alpha_2 J_{k-2}; \quad J_0 = 1; \quad J_k = 0 \quad (k < 0).$$

Цей результат легко перенести на відповідні звідні системи. Покажемо це на найпростішому прикладі.

Розглянемо систему диференційних рівнянь

$$Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y = 0, \quad (3.71)$$

де  $Y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}^T$  – матриця-стовпець;  $P, Q$  – квадратні матриці порядку  $n$ , визначувані за формулами

$$P(x) = -A_1 g'(x) + E \left( \frac{2u'(x)}{u(x)} - \frac{g''(x)}{g'(x)} \right),$$

$$P(x) = -A_1 g'(x) \frac{u'(x)}{u(x)} - A_2 [g'(x)]^2 + E \left( \frac{u''(x)}{u(x)} - \frac{u'(x)}{u(x)} \frac{g''(x)}{g'(x)} \right).$$

Тут  $E$  – одинична, а  $A_j = [a_{kl}]_{k,l=1}^n$  – сталі матриці; до функцій  $u(x)$  і  $g(x)$  висуваються такі самі вимоги, як і у випадку рівняння (3.67).

Неважко переконатись, що система рівнянь (3.71) є звідною у зазначеному вище розумінні, причому відповідна заміна змінних має вигляд (3.68). Загальний розв'язок системи (3.71) можна записати так:

$$Y(x) = \psi_0(x) c_0 + \psi_1(x) c_1.$$

Тут  $c_0, c_1$  – довільні сталі матриці-стовпці;  $\psi_0(x), \psi_1(x)$  – матриці, що мають вигляд

$$\psi_0 = \frac{1}{u(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_k [g(x)]^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{u(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_k [g(x)]^k}{k!},$$

де

$$J_k = A_1 J_{k-1} + A_2 J_{k-2}; \quad J_0 = E; \quad J_j = \theta \quad (j < 0).$$

Очевидно, що система (3.71) є узагальненням багатьох відомих звідних рівнянь другого порядку. Наприклад, для  $n=1$ ,  $u(x) \equiv 1$ ,  $g(x) = \ln x$  або  $g(x) = \arccos x$  матимемо векторні аналоги рівнянь відповідно Ойлера та Чебишова.

Повернемось до рівняння (3.67) (за позначень (3.69), (3.70)), подаючи його в такому вигляді:

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0, \quad (3.72)$$

$$p_0(x) = \frac{u(x)}{g'^2(x)} \neq 0, \quad p_1(x) = 2 \frac{u'(x)}{g'^2(x)} - \frac{u(x)}{g'(x)} \left( \alpha_1 + \frac{g''(x)}{g'^2(x)} \right),$$

$$p_2(x) = \frac{u''(x)}{g'^2(x)} - \frac{u'(x)}{g'(x)} \left( \alpha_1 + \frac{g''(x)}{g'^2(x)} \right) - \alpha_2 u(x). \quad (3.73)$$

Підставимо в нього перший вираз (3.68) і, враховуючи (3.73), дійдемо до рівності

$$\frac{1}{g'^2(x)} z'' - \frac{1}{g'(x)} \left( \alpha_1 + \frac{g''(x)}{g'^2(x)} \right) z' - \alpha_2 z = 0, \quad z = z(x). \quad (3.74)$$

Беручи ж до уваги співвідношення  $t - g(x) = 0$  (див. (3.68)), матимемо:

$$z'' - \alpha_1 z' - \alpha_2 z = 0, \quad z = z(t). \quad (3.75)$$

Таким чином, рівняння (3.67) (за позначень (3.69), (3.70)), (3.72) (за позначень (3.73)) та (3.74) зі змінними коефіцієнтами є рівноцінними рівнянню (3.75) зі сталими коефіцієнтами.

Нехай функції  $z_1 = z_1(t)$ ,  $z_2 = z_2(t)$  складають фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.75). Тоді відповідно до означення (1.9) цьому рівнянню можна поставити у відповідність функцію Коші

$$\tilde{K}(t, \tilde{\alpha}) = \frac{\begin{vmatrix} z_1(\tilde{\alpha}) & z_2(\tilde{\alpha}) \\ z_1(t) & z_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ \frac{dz_1(t)}{dt} & \frac{dz_2(t)}{dt} \end{vmatrix}_{t=\tilde{\alpha}}}, \quad (3.76)$$

де  $\tilde{\alpha}$  – відповідний змінній  $t$  параметр.

Зважаючи на (3.68), вдамося до низки таких перетворень виразу (3.76):

$$\begin{aligned} \tilde{K}(t, \tilde{\alpha}) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1(\alpha)u(\alpha) & y_2(\alpha)u(\alpha) \\ y_1(x)u(x) & y_2(x)u(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{y_1(x)u(x)}{\frac{d(y_1(x)u(x))}{dx} \frac{dx(t)}{dt}} & \frac{y_2(x)u(x)}{\frac{d(y_2(x)u(x))}{dx} \frac{dx(t)}{dt}} \end{vmatrix}_{t=\tilde{\alpha}}} = \\ &= \frac{g'(\alpha)u(x) \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dy_1(x)}{dx}u(x) + y_1(x)\frac{du(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx}u(x) + y_2(x)\frac{du(x)}{dx} \end{vmatrix}_{x=\alpha}} = \\ &= \frac{g'(\alpha)u(x) \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{u(\alpha) \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1'(\alpha) & y_2'(\alpha) \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

(тут позначено  $x(t)|_{t=\tilde{\alpha}} = \alpha$ ). Таким чином, справджується співвідношення

$$\tilde{K}(t, \tilde{\alpha}) \equiv \tilde{K}(g(x), g(\alpha)) = \frac{g'(\alpha)u(x)}{u(\alpha)} K(x, \alpha) = \frac{u(x)}{g'(\alpha)} K_{p0}(x, \alpha), \quad (3.77)$$

де  $K(x, \alpha)$  – функція Коші, відповідна рівнянню (3.67), а  $K_{p0}(x, \alpha)$  – функція Коші, відповідна рівнянню (3.72).

Рівнянню (3.75) відповідає функція Коші (див. приклад 9 з табл. 2)

$$\tilde{K}(t, \tilde{\alpha}) = \frac{e^{s_1(t-\tilde{\alpha})} - e^{s_2(t-\tilde{\alpha})}}{s_1 - s_2},$$

де  $s_1, s_2$  – довільні (комплексні) числа, що є коренями квадратного рівняння



$s^2 - \alpha_1 s - \alpha_2 = 0$ . Отже, вдаючись до (3.77), відповідну рівнянню (3.67) функцію Коші можна подати у вигляді

$$K(x, \alpha) = \frac{u(\alpha)}{(s_2 - s_1)u(x)g'(\alpha)} \left( e^{s_2(g(x)-g(\alpha))} - e^{s_1(g(x)-g(\alpha))} \right), \quad (3.78)$$

або за позначень

$$E_1 = e^{s_1 g(x)}, \quad E_2 = e^{s_2 g(x)}$$

– у вигляді

$$K(x, \alpha) = \frac{u(\alpha)}{(s_2 - s_1)u(x)g'(\alpha)} \left[ \frac{E_2(x)}{E_2(\alpha)} - \frac{E_1(x)}{E_1(\alpha)} \right]. \quad (3.79)$$

Легко також з'ясувати (за допомогою чи (3.78), чи (3.79)), що

$$W(x) = -\frac{g'}{u^2} e^{(s_1+s_2)g(x)} = -\frac{g'}{u^2} E_1 \cdot E_2,$$

$$\Psi_0 = \frac{E_1 - E_2}{(s_1 - s_2)u}; \quad \Psi_1 = \frac{s_1 E_1 - s_2 E_2}{(s_1 - s_2)u}.$$

Якщо  $s_1 = a + \omega i$ ,  $s_2 = a - \omega i$  ( $i = \sqrt{-1}$ ), то  $s_2 - s_1 = -2\omega i$  і  $e^{s_2 A} - e^{s_1 A} = e^{aA} (e^{i\omega A} - e^{-i\omega A}) = e^{aA} \cdot 2i \sin \omega A$  ( $A = g(x) - g(\alpha)$ ). Таким чином, у випадку комплексно спряжених  $s_1, s_2$

$$K(x, \alpha) = -\frac{u(\alpha)}{u(x)g'(\alpha)} e^{a(g(x)-g(\alpha))} \frac{\sin \omega(g(x)-g(\alpha))}{\omega}.$$

У випадку  $g(x) = \ln x$  ( $g' = \frac{1}{x}$ ) маємо:

$$e^{s_i(g(x)-g(\alpha))} = e^{s_i \ln \frac{x}{\alpha}} = \left( \frac{x}{\alpha} \right)^{s_i} \quad (i = 1, 2),$$

$$K(x, \alpha) = -\frac{\alpha u(\alpha)}{(s_2 - s_1)u(x)} \left[ \left( \frac{x}{\alpha} \right)^{s_2} - \left( \frac{x}{\alpha} \right)^{s_1} \right].$$

Можливість досліджувати звідні рівняння (зі змінними коефіцієнтами) в рамках теорії рівнянь зі сталими коефіцієнтами пересічно дає певні методологічні переваги. Значної користі є підстави сподіватись і від дослідження взаємозумовленості функцій Коші, що відповідають звідним рівнянням, та функцій Коші, відповідних рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

# 4

## НЕПЕРЕРВНО-ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ

### 4.1 Рівняння малих коливань стержня, вала, линви

Розглядаючи коливання пружного стержня з прямою віссю (рис. 1) під дією вісно розподіленої сили  $Q(x, t)$  ( $x$  – координата поперечного перерізу стержня,  $t$  – час), вважатимемо їх малими і такими, що справджують так звану гіпотезу плоских перерізів. Завдяки малій переміщенню та збереженню форми і розмірів плоских перерізів задача про коливання стержня є геометрично лінійною. Вважатимемо також, що в перерізах стержня виникають лише поздовжні зусилля, визначувані за формулою

$$N(x) = E S(x) u', \quad (4.1)$$

де  $u = u(x, t)$  – поздовжнє переміщення перерізу з координатою  $x$ ,  $u' = \partial u / \partial x = \varepsilon$  – відносна деформація,  $E$  – модуль пружності матеріалу стержня,  $S(x)$  – площа поперечного перерізу стержня. За таких припущень задача набуває ознак фізично лінійної задачі про чисто поздовжні коливання стержня.

Спираючись на принцип кінетостатики, можна укласти відображену на рис. 2 схему зусиль, що діють на деякий елемент  $dx$  стержня (див. рис. 1), та відповідно до неї написати таку умову динамічної рівноваги цього елемента:

$$\begin{aligned} N(x) + g(x) \ddot{u}(x, t) dx + \chi(x) \dot{u}(x, t) dx + \kappa(x) u(x, t) dx = \\ = N(x) + N'(x) dx + Q(x, t) dx, \end{aligned}$$

де  $g(x)$  – характеристика розподілу мас;  $\chi(x)$  та  $\kappa(x)$  – коефіцієнти сил в'язкого тертя у довкіллі та сил пружної реакції довкілля;  $\dot{u} = \partial u / \partial t$ ,  $\ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2$ . Звідси, зважаючи на (4.1), отримуємо відоме рівняння малих поздовжніх коливань

$$g(x) \ddot{u} + \chi(x) \dot{u} + \kappa(x) u - (f(x) u)' = Q(x, t), \quad (4.2)$$

в якому  $f(x) = E S(x)$  – поздовжня жорсткість стержня.

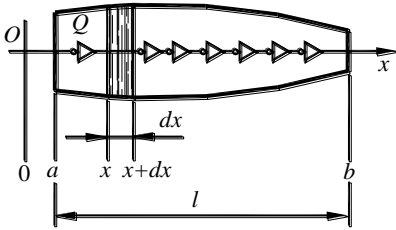


Рисунок 1 Схема стержня, навантаженого розосередженим вісним зусиллям.

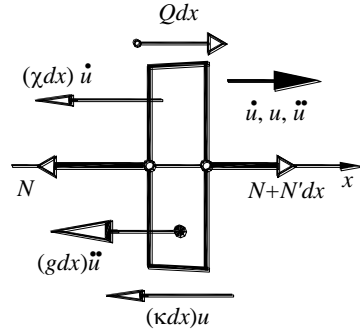


Рисунок 2 Схема сил, що діють на елемент стержня.

Зауважимо, що наближене рівняння (4.2) підпорядковане принципам так званої технічної теорії; воно є справедливим для відносно малих частот коливної зміни деформацій, коли довжина хвилі деформацій більша за розміри поперечного перерізу стержня [14].

Цілком подібно виводиться рівняння малих крутних коливань пружного вала [10]:

$$\rho I(x)\ddot{\varphi} + \chi(x)\dot{\varphi} + \kappa(x)\varphi - (f(x)\varphi)' = M(x, t). \quad (4.3)$$

Тут  $\varphi = \varphi(x, t)$  – кут закручування,  $I_0(x)$  – полярний момент інерції поперечного перерізу вала,  $f = GI_\kappa(x)$  – крутна жорсткість ( $G$  – модуль зсуву),  $M(x, t)$  – зовнішнє моментне навантаження; інші позначення в (4.3) мають такий самий зміст, як і в (4.2).

Аналогічним рівнянням [10] описуються малі поперечні коливання линви (струни)

$$(N(x)u')' - g(x)\ddot{u} - \chi(x)\dot{u} - \kappa(x)u = Q(x, t), \quad (4.4)$$

де  $N(x)$  – зусилля розтягу;  $Q(x, t)$  – зовнішнє поперечне навантаження.

Задача про малі коливання набуває конкретного змісту, якщо відповідне зпосеред (4.2)–(4.4) рівняння доповнити ще й відповідними граничними умовами на лівому ( $x = a$ ) та правому ( $x = b$ ) кінцях, а також початковими умовами, що визначають переміщення перерізів та їх швидкостей в початковий момент.

## 4.2 Задача про розтяг-стиск пружного стержня

Розглянемо випадок, коли в рівнянні (4.2) позовжне переміщення  $u$  та вісне навантаження  $Q$  залежать тільки від змінної  $x$  (статична задача). Тоді матимемо рівняння зі звичайними похідними

$$(f(x)u')' - \kappa(x)u = -Q(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (4.5)$$

Нехай, наприклад, граничні умови є такими:

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0. \quad (4.6)$$

Вони відповідають консолю, лівий кінець якої є закріпленим, а правий – вільним.

Вдаючись до функції Коші  $K(x, \alpha)$  і покладаючи в ній  $\alpha = a$ , загальний розв'язок рівняння (4.5) запишемо у вигляді (1.5):

$$u(x) = C_0 K(x, a) + C_1 \dot{K}(x, a) - \int_a^x K(x, s) Q(s) ds, \quad (4.7)$$

де  $C_0, C_1$  – довільні сталі.

Підставляючи (4.7) в (4.6), знайдемо

$$C_1 = 0, \quad C_0 = \frac{1}{K'(b, a)} \int_a^b K'(b, s) Q(s) ds. \quad (4.8)$$

Отже, розв'язок задачі (4.5)-(4.6) окреслюють співвідношення (4.7)-(4.8). При цьому  $K'(b, a) \neq 0$ . Остання нерівність пересічно впливає із змісту самої задачі (це, зокрема, простежується далі в розділі 4.7, де аналізуються окремі задачі про вимушені коливання).

Якщо реакція доквілля та позовжна жорсткість є сталими ( $\kappa(x) = \kappa_0 = \text{const}$ ,  $f = f_0 = \text{const}$ ), то  $K(x, \alpha) = c^{-1} \text{sh } c(x - \alpha)$ ,  $c = \sqrt{\kappa_0/f_0}$ . За наявності пружної реакції доквілля, прояв якої оцінюється коефіцієнтом  $\kappa = \kappa_0 \nu(x)$ , віднайти функцію Коші можна, звертаючись до методології, викладеної в наступному розділі.

Співвідношення (4.7)-(4.8) істотно спрощуються за відсутності пружної реакції доквілля ( $\kappa(x) \equiv 0$ ). В цьому випадку

$$u(x) = \int_a^b Q(s) ds \cdot \int_a^x \frac{ds}{f(s)} - \int_a^x \int_t^x \frac{ds}{f(s)} Q(t) dt,$$

$$N(x) = f(x)u'(x) = \int_x^b Q(s) ds.$$

Якщо, до того ж,  $f = f_0 = \text{const}$ , то перша з цих формул набуває такого вигляду:

$$u(x) = \frac{1}{f_0} \left( x \int_x^l Q(s) ds + \int_0^x s Q(s) ds \right), \quad (4.9)$$

де  $l = b$  – довжина стержня ( $a = 0$ ).

Нехай, для прикладу,

$$Q(x) = q_0 + \sum_{i=1}^n P_i \delta(x - x_i); \quad 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < l$$

( $q_0$  – стала,  $P_i$  – силовий параметр, відповідний точці  $x_i$ ). При цьому з формули (4.9) отримуємо

$$u(l) = \frac{1}{f_0} \left( 0,5 q_0 l^2 + \sum_{i=1}^n x_i P_i \right).$$

Цілком аналогічно можна розв'язувати задачі про розтяг-стиск пружних стержнів за інших граничних умов [28].

### 4.3 Задачі про вільні коливання механічних систем

Рівняння малих коливань (4.2) (або (4.3) чи (4.4)) розглядатимемо сумісно з граничними умовами

$$(f(x)u' - e_1 u)|_{x=a} = 0, \quad (f(x)u' + e_2 u)|_{x=b} = 0, \quad (4.10)$$

що відповідають стержням з пружно закріпленими кінцями. Тут  $e_1 \geq 0$ ,  $e_2 \geq 0$  – параметри закріплень.

У випадку вільних коливань зовнішні навантаження відсутні:  $Q(x, t) \equiv 0$  (чи  $M(x, t) \equiv 0$ ). Нехай, крім цього,  $\chi(x) \equiv 0$  і  $\kappa(x) \equiv 0$  (тертя та пружність довкілля не беруться до уваги).

Підставляючи в рівняння (4.2) та умови (4.10) добуток

$$u(x, t) = y(x) e^{\lambda t}, \quad \lambda = \sqrt{-1} \omega$$

( $\omega$  – частотний параметр), приходимо до такої задачі на власні значення для звичайного диференційного рівняння:

$$L[y] = (f(x) y')' - \lambda^2 g(x) y = 0; \quad (4.11)$$

$$(f(x) y' - e_1 y)|_{x=a} = 0, \quad (f(x) y' + e_2 y)|_{x=b} = 0. \quad (4.12)$$

В загальному випадку вважатимемо, що

$$g(x) = m(x) + \sum_{i=1}^n M_i \delta(x - x_i), \quad (4.13)$$

де  $m(x) = \rho S(x)$  – функція, що характеризує розподіл маси вздовж стержня чи вала ( $\rho$  – густина матеріалу,  $S$  – площа поперечного перерізу стержня чи вала);  $M_i$  – параметр, що відповідає значенню маси, зосередженої в точці  $x_i$  осі стержня чи вала;  $\delta = \delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака;  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ . При  $m(x) \neq 0$  та існуванні хоча б одного  $M_i \neq 0$  аналізована система, зрозуміло, належатиме до класу неперервно-дискретних. При  $m(x) \equiv 0$  і існуванні  $k \leq n$  величин  $M_i \neq 0$  вона перетворюється в дискретну з  $k$  ступенями вільності; якщо ж  $M_1 = M_2 = \dots = M_n = 0$  при  $m(x) \neq 0$ , то систему слід віднести до континуальних (неперервних). Функції  $f(x)$  і  $m(x)$  вважаються інтегровними і такими, що задовольняють нерівності  $f(x) > 0$ ,  $m(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ .

Як зазначалося вище, задача (4.11)-(4.13) є однією з основних у теорії коливань. Якщо цю задачу вдається розв'язати, визначивши власні частоти й форми коливань, то стає можливим побудувати й розв'язки відповідних задач про вільні та вимушені коливання з заданими початковими умовами (розв'язки так званих змішаних задач), вдаючись до відомих методів [10-18, 20-25].

#### 4.4 Функція Коші та загальний розв'язок рівняння другого порядку

В багатьох задачах найрізноманітнішого, в тому числі й механічного, змісту оперують рівнянням другого порядку

$$L[y] \equiv p(x) y'' + q(x) y' + r(x) y = v(x), \quad (4.14)$$

коефіцієнти  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  і права частина  $v(x)$  якого – неперервні функції;  $p(x) > 0$ ;  $v(x) \neq 0$ . Це рівняння, як відомо, має єдиний розв'язок, який би при  $x = x_0$  задовольняв умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (4.15)$$

Згідно з викладеним у розд. 1 загальний розв'язок рівняння (4.14) можна визначати за формулою

$$y = C_0 K(x, \alpha) + C_1 \dot{K}(x, \alpha) + \int_{\alpha}^x K(x, s) v(s) ds. \quad (4.16)$$

На підставі (1.4) і (1.9) знайдемо:

$$\dot{K}(\alpha, \alpha) = -\frac{1}{p(\alpha)}, \quad \dot{K}'(\alpha, \alpha) = \frac{q(\alpha) - p'(\alpha)}{p^2(\alpha)}. \quad (4.17)$$

Покладемо в (4.16)  $\alpha = x_0$  і (зважаючи на початкові умови (4.15) та співвідношення (1.4), (4.17)) визначимо сталі  $C_0, C_1$ , а далі – розв’язок задачі Коші (4.14), (4.15):

$$y = y_0 Y_0(x, x_0) + y'_0 Y_1(x, x_0) + \int_{x_0}^x K(x, s) v(s) ds. \quad (4.18)$$

Тут

$$\begin{aligned} Y_0 &= (-p'(x_0) + q(x_0)) K(x, x_0) - p(x_0) \dot{K}(x, x_0), \\ Y_1 &= p(x_0) K(x, x_0) \end{aligned} \quad (4.19)$$

– нормальні фундаментальні функції (вони утворюють так звану нормальну фундаментальну систему, відповідну рівнянню (4.14)). Як і повинно бути, при  $x = x_0$

$$W[Y_0, Y_1] \Big|_{x=x_0} \equiv \begin{vmatrix} Y_0 & Y_1 \\ Y'_0 & Y'_1 \end{vmatrix} \Big|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Отже, побудувавши лише одну функцію  $K(x, \alpha)$ , можна одночасно відтворити як загальний розв’язок (4.16) рівняння (4.14), так і розв’язок (4.18) відповідної задачі Коші. Очевидно, вважаючи  $y_0$  і  $y'_0$  довільними сталими, а  $x_0$  – параметром, (4.18) (разом з (4.19)) також можна вважати загальним розв’язком рівняння (4.14).

## 4.5 Частотні рівняння континуальних систем

Застосуємо функцію  $K(x, \alpha)$  та її властивості до задачі (4.11)–(4.13) у випадку, коли зосереджені маси відсутні. Надаючи у формулі (4.16) параметру  $\alpha$  значення  $a$  і зважаючи на те, що  $v(x) \equiv 0$ , запишемо загальний розв’язок рівняння (4.11) у вигляді

$$y = C_0 K(x, a) + C_1 \dot{K}(x, a). \quad (4.20)$$

Беручи до уваги, що  $p \equiv f$ ,  $q \equiv f'$ , на підставі граничних умов (4.12) та співвідношень (1.4), (4.17) приходимо до системи однорідних алгебричних рівнянь для визначення сталих  $C_0, C_1$ , що фігурують в (4.20):

$$C_0 + C_1 e_1 \frac{1}{f(a)} = 0, \quad C_0 A(b, a) + C_1 \dot{A}(b, a) = 0, \quad (4.21)$$

де

$$A(b, a) = f(b) K'(b, a) + e_2 K(b, a), \quad \dot{A} = \frac{\partial A(b, a)}{\partial a}. \quad (4.22)$$

Система рівнянь (4.21) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, зрозуміло, коли її визначник дорівнює нулеві. Це дає підстави, зважаючи на (4.22), записати співвідношення такого вигляду:

$$(e_1 e_2 K + e_1 f(b) K' - e_2 f(a) \dot{K} - f(a) f(b) \dot{K}') \Big|_{x=b}^{\alpha=a} = 0. \quad (4.23)$$

Його можна назвати універсальним характеристичним рівнянням задач про малі поздовжні та крутні коливання прямих стержнів-валів, а також задач про малі поперечні коливання линв.

Із (4.23) в окремих (часткових) випадках маємо:

$$K(b, a) = 0, \quad K'(b, a) = 0, \quad \dot{K}(b, a) = 0, \quad \dot{K}'(b, a) = 0. \quad (4.24)$$

Перше з цих рівнянь відповідає стержневій з жорстко закріпленими кінцями, друге й третє – консолі (відповідно з лівим і правим затиснутим кінцем), останнє – вільному стержню.

Розглянемо випадок сталого розподілу параметрів.

Нехай коефіцієнти рівняння (4.11) є сталими, а у виразі (4.13)  $M_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тоді відповідна цьому рівнянню функція Коші та її похідні визначаються за формулами

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{k} \sin k(x-a), & K' &= \cos k(x-a), \\ \dot{K} &= -\cos k(x-a), & \dot{K}' &= k \sin k(x-a), \end{aligned} \quad (4.25)$$

де

$$k^2 = \frac{m}{f} \omega^2, \quad \omega^2 = -\lambda^2 \quad (4.26)$$

( $m = \rho S$ ,  $f = ES$ ;  $\rho$  і  $S$  – густина матеріалу і площа поперечного перерізу стержня;  $E$  – модуль Юнга).

Враховуючи (4.24), (4.25), одержуємо частотні рівняння для типових випадків формування граничних умов, табл. 4; поруч в таблиці відображено хвильові числа та форми власних коливань ( $l = b - a$ ;  $X = x - a$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ). Частоти власних коливань визначаються за відомою формулою (див. (4.26))

$$\omega_n = k_n \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (4.27)$$



Таблиця 4 Частотні рівняння для окремих випадків граничних умов

Схема стержня	Частотне рівняння	Хвильові числа	Форми власних коливань
	$\frac{\sin kl}{k} = 0$	$k_n = \frac{n\pi}{l}$	$y_n = \sin k_n X$
	$\cos kl = 0$	$k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2l}$	$y_n = \sin k_n X$
	$\cos kl = 0$	$k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2l}$	$y_n = \cos k_n X$
	$k \sin kl = 0$	$k_0 = 0, k_n = \frac{n\pi}{l}$	$y_0 \equiv 1; y_n = \cos k_n X$

основною називають частоту, яка відповідає хвильовому числу  $k_1$ . Значення  $k_0$  в останньому рядку табл. 4 (стержень з вільними кінцями) є кратним коренем частотного рівняння; всі інші хвильові числа – прості корені відповідних частотних рівнянь.

Розглянемо тепер характеристичне рівняння (4.23). Беручи до уваги формули (4.25), запишемо його так:

$$A_1^2 \eta \frac{\sin z}{z} + A_1(1 + \eta) \cos z - z \sin z = 0. \quad (4.28)$$

Звідси одержуємо

$$\Delta = (1 + \eta)^2 \cos^2 z + 4\eta \sin^2 z > 0, \quad A_1 = \frac{z}{2\eta \sin z} + \left( \sqrt{\Delta} - (1 + \eta) \cos^2 z \right);$$

тут

$$z = kl; \quad A_i = \frac{e_i l}{f} \quad (i = 1, 2); \quad A_2 = \eta A_1.$$

Отже, кожному  $\eta \geq 0$  при  $z \geq 0$  відповідають, як і повинно бути, певні невід'ємні вартості параметрів  $A_1$  і  $A_2$ . В граничних випадках хвильові числа, визначені з (4.28), прямують до відповідних значень з табл. 4. Зокрема, якщо  $z \rightarrow 0$ , то з (4.28) випливає, що  $A_1 \rightarrow 0$  і  $A_2 \rightarrow 0$  (кінці стержня не закріплені). Такого типу граничні переходи корисно враховувати, коли потрібно оцінити вплив пружного закріплення на власні частоти.

Розглянемо приклад.

Нехай лівий кінець стержня закріплений жорстко ( $e_1 \rightarrow \infty$ ), а правий – пружно. Тоді з (4.28) маємо рівняння

$$-\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = q, \quad q = \frac{f}{e_2 l}. \quad (4.29)$$

Коли  $e_2 \rightarrow \infty$ , то хвильові числа наближаються до значень, наведених у другому рядочку табл. 4. Враховуючи це, обчислюємо для заданих вартостей  $kl$  праву частину рівняння (4.29), тобто параметр  $q$ . Зокрема, для  $n = 1$  одержуємо:

$\frac{2l}{\pi} k_1(q)$	1	1,01	1,3	1,5	1,7	1,99	2
$q$	$\infty$	40,1	0,96	0,42	0,19	0,005	0

Отже, при поступовому збільшенні величини  $e_2$  від нуля (консоль) до безмежності (жорстко закріплені обидва кінці) основна частота коливань монотонно зростає. Її екстремальні значення відповідають хвильовим числам  $k_1 = 2l/\pi$  та  $k_1 = l/\pi$ , визначуваним за формулою (4.27) при  $n = 1$ . При цьому, як бачимо, розв'язування трансцендентного рівняння можна замінити табулюванням відповідних функцій. Поступати подібно доцільно і в складніших випадках (наприклад при дослідженні рівняння (4.28)).

#### 4.6 Один клас задач з точними розв'язками

Відомо, що рівняння другого порядку

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (4.30)$$

з неперервними в деякому  $I = [a, b]$  коефіцієнтами  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  та гладким в тому самому  $I = [a, b]$  коефіцієнтом  $p_0(x) \neq 0$  зводиться в  $I = [a, b]$  до самоспряженого

$$(f(x)y')' - g(x)y = 0. \quad (4.31)$$

В цьому легко пересвідчитись, поклавши

$$f(x) = p_0(x)\varepsilon(x), \quad g(x) = -p_2(x)\varepsilon(x);$$

$$\varepsilon(x) = \frac{C}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}, \quad C = \text{const} \neq 0.$$

Таким чином, всі висновки, що впливають з аналізу рівнянь типу (4.30), в однаковій мірі стосуються й рівнянь типу (4.31). Проте часто самоспряжені рівняння посідають додаткові нетривіальні властивості (наприклад, друга рівність (4.17) набуває вигляду  $\dot{K}'(\alpha, \alpha) = 0$  з досить важливими наслідками), а тому заслуговують на окрему увагу.

Розглянемо рівняння

$$\left(\frac{1}{z'}y'\right)' - c^2 z'y = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (4.32)$$

( $c = \text{const} > 0$ ). Тут  $z = z(x)$  вважається монотонною функцією, такою що  $z'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$  (див., наприклад, [29]).

Неважко переконатися, що фундаментальну систему розв'язків цього рівняння можна визначити за формулами

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{e^{cz(x)}}{c}, & \psi_2 &= \frac{e^{-cz(x)}}{c}; \\ W(\psi_1, \psi_2) &= -\frac{2z'}{c} \neq 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Згідно з (1.9) відповідна рівнянню (4.32) функція Коші має вигляд:

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{c} \text{sh } c(z(x) - z(\alpha)). \quad (4.34)$$

Нехай в (4.32)-(4.34)  $c^2 = -k^2 < 0$ . Використавши відомі співвідношення між гіперболічними і тригонометричними функціями, виведемо формулу

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{k} \sin k(z(x) - z(\alpha)). \quad (4.35)$$

Підставляючи (4.35) в (4.23) і (4.24), одержимо відповідні частотні рівняння. При цьому, наприклад, для стержня з затиснутими кінцями (якому відповідає перше з рівнянь (4.24)) матимемо такі формули:

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{n\pi}{z(b) - z(a)}, & \omega_n &= k_n \sqrt{\frac{f_0}{m_0}}, \\ y_n &= \sin k_n(z(x) - z(\alpha)) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Інші рівняння (4.24) також легко розв'язуються для довільних заданих функцій  $z'(x)$ . Відповідні хвильові числа, власні частоти й форми одержимо з табл. 4, якщо в ній всюди замість  $l$  запишемо  $z(b) - z(a)$ , а також  $z(x) - z(a)$  замість  $X(x)$ . Крім цього потрібно врахувати також залежності, що випливають із співставлення рівнянь (4.11) і (4.32):

$$f(x) = \frac{1}{z'(x)} f_0, \quad m(x) = z'(x) m_0, \quad f_0 = f(a), \quad m_0 = m(a).$$

Із співвідношень (4.24) і (4.36) випливають такі висновки про позовжні (крутильні) коливання розглянутого класу стержнів зі змінним розподілом параметрів:

а) хвильові числа та власні частоти є кратними до відповідної основної частоти (як і для однорідних стержнів сталого перерізу);

б) власні частоти та форми коливань суттєво залежать від властивостей функцій  $z(x)$  розподілу параметрів;

в) для стержня з вільними кінцями значення  $k_0 = 0$  є кратним коренем частотного рівняння; всі інші хвильові числа є простими коренями частотних рівнянь.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай  $a = 0$ ,  $b = l$ ,

$$z'(x) = \theta(x) + \sum_{s=1}^n \beta_s \theta(x - x_s), \quad (4.37)$$

де  $\theta(\cdot)$  – одинична функція Гевісайда;  $\beta_s, x_s$  ( $s = \overline{1, n}$ ) – параметри. Тоді

$$z(x) = x \theta(x) + \sum_{s=1}^n \beta_s (x - x_s) \theta(x - x_s). \quad (4.38)$$

Підставляючи (4.37), (4.38) в (4.36), отримаємо вирази для визначення власних частот і форм відповідних сходячих стержнів (за будь-яких допустимих значень параметрів  $\beta_s, x_s$   $s = \overline{1, n}$ ).

Якщо  $n = 2$ ,  $\beta_1 = -\beta_2 = \beta$ ,  $x_1 = d$ ,  $x_2 = l - d$  (симетричний відносно середнього перерізу стержень з затиснутими кінцями), то

$$k_n = \frac{n\pi}{l + \beta(l - 2d)}, \quad \omega_n = k_n \sqrt{\frac{f_0}{m_0}},$$

$$y_n = \sin k_n (x \theta(x) + \beta(x - d) \theta(x - d) - \beta(x - l + d) \theta(x - l + d)). \quad (4.39)$$

Для двосходинкової консолі з лівим закріпленим кінцем матимемо

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2(x_1 + \chi(l - x_1))}, \quad \beta_1 = \chi - 1,$$

$$y_n = \sin k_n (x + (\chi - 1)(x - x_1) \theta(x - x_1)), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Одержані співвідношення в граничних випадках узгоджуються з відомими формулами [28-30]. До цього додамо, що параметри  $\beta, d, x_1$  можуть суттєво впливати на власні частоти і форми. Зокрема, можливими є граничні переходи  $\omega_1 \rightarrow 0$  та  $\omega_1 \rightarrow \infty$ . Частоти можуть бути дуже малими, коли  $k_1 \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow \infty$  та  $\chi \rightarrow \infty$ , і дуже великими за умов:  $k_1 \rightarrow \infty$  для  $\beta = \varepsilon - 1$ , коли  $\varepsilon \rightarrow 0$  і  $d \rightarrow 0$ ;  $k_1 \rightarrow \infty$ , якщо  $x_1 \rightarrow 0$  та  $\chi \rightarrow 0$ .

Приклад 2. Нехай  $z'(x) = A/x$ ,  $A = \text{const}$ . Отже,

$$z(x) = z(a) + A \ln \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

Для стержня з закріпленими кінцями отримуємо:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{A \ln \frac{b}{a}} \sqrt{\frac{f_0}{m_0}}, \quad n = \overline{1, n}, \quad y_n = \sin \left( \frac{n\pi}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{x}{a} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.40)$$

Очевидно, що коли виконуються умови

$$A = l, \quad \frac{b}{a} = e \quad (\ln e = 1), \quad \frac{m_0}{f_0} = \frac{\rho}{E}, \quad (4.41)$$

то формула (4.40) співпадає формально з відповідною формулою для стержня сталого поперечного перерізу. Наслідком умов (4.41) є таке співвідношення:

$$l = b - a = a(e - 1) \approx 1,72a.$$

Тому тут частоти (4.40) суттєво залежать від величини  $a$ . Їх можна значно зменшити або збільшити, відповідно підбираючи параметри  $a$  і  $A$ .

Приклад 3. Якщо  $z'(x) = 1 + Bx$ ,  $B \geq 0$ , то

$$z(b) - z(a) = l \left( 1 + \frac{1}{2} B(l + 2a) \right), \quad a \geq 0.$$

Звідси видно, що частоти з табл. 4 будуть у цьому випадку зменшуватися при зростанні параметрів  $B$  і  $a$ .

Наведені приклади доводять, що власні частоти розглянутих стержнів можуть відрізнятися на декілька порядків від власних частот відповідних однорідних стержнів сталого поперечного перерізу. Власні функції вигляду (4.36) надають можливість будувати графіки, які б відображали відносні поздовжні відхилення перерізів даного стержня від природного рівноважного стану. При цьому максимальні значення вказаних відхилень, як і їх розташування (характер пучності), а також координати нерухомих перерізів (вузлів), істотно залежать від властивостей функції  $z = z(x)$ .

Відзначимо, що співвідношення (4.36) чи аналогічні їм дають змогу: по-перше, будувати точні розв'язки відповідних змішаних задач; по-друге, використовувати точні розв'язки деяких змішаних задач як еталонні при розробці наближених методів дослідження коливних систем із змінним розподілом параметрів; по-третє, застосовуючи формули вигляду (4.37) і метод характеристичних рядів [31-45], оцінювати нижчі частоти та відповідні характеристичні показники для стержнів зі східчасто-сталими характеристиками.

## 4.7 Вимушені коливання

Розглянемо задачу про поздовжні коливання консолі під дією вісної збурювальної сили  $P \cos \omega t$ , прикладеної до вільного кінця. Формально задача зводиться до побудови такого розв'язку однорідного рівняння

$$g(x)\ddot{u} - (f(x)u')' = 0$$

(відповідного рівнянню (4.2) за умов  $\chi(x) = \kappa(x) \equiv 0$ ), який би задовольняв неоднорідні крайові умови [14, 46]

$$u(x, t)|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=b} = P \cos \omega t.$$

Записуючи розв'язок як добуток

$$u(x, t) = y(x) \cos \omega t,$$

після відокремлення змінних отримаємо крайову задачу

$$(f(x)y')' + \omega^2 g(x)y = 0, \quad y(a) = 0, \quad y'(b) = P. \quad (4.42)$$

Як і раніше, шукатимемо загальний розв'язок у формі (4.20). Беручи до уваги аналітичні співвідношення, що окреслюють дану крайову задачу, знаходимо:

$$y(x, a) = \frac{P}{f(b)K'(b, a)} K(x, a), \quad u(x, a, t) = y(x, a) \cos \omega t. \quad (4.43)$$

Зауважимо, що отриманий розв'язок задовольняє такі початкові умови:

$$u(x, a, 0) = y(x, a), \quad \left. \frac{\partial u(x, a, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (4.44)$$

Співвідношення (4.43) визначають амплітуди вимушених коливань за умови  $K'(b, a) \neq 0$ , тобто тоді, коли частота збурювальної сили не збігається з будь-якою з власних частот коливання консолі (див. табл. 4, рядки 2 і 3). Можливі статичні переміщення перерізів консолі можна визначити аналогічно – на підставі (4.42), вважаючи, що  $\omega = 0$ :

$$\tilde{y}(x, a) = \frac{P}{f(b)\tilde{K}'(b, a)} \tilde{K}(x, a),$$

де  $\tilde{K}(x, a) = \int_a^x \frac{ds}{f(s)}$  (див. табл. 1, приклад 1).

Одним з важливих параметрів, що характеризують динамічні процеси в коливних системах, є коефіцієнт динамічності – відношення величин  $y(x, a)$ ,  $\tilde{y}(x, a)$ , що відповідають вільному кінцю консолі ( $x = b$ ) [46]:

$$\mu = \frac{y(b, a)}{\tilde{y}(b, a)} = K(b, a) \left( f(b) K'(b, a) \int_a^b \frac{ds}{f(s)} \right)^{-1}. \quad (4.45)$$

Позначимо через  $\omega_n$  корені рівняння  $K'(b, a) = 0$ , а через  $P_n$  – корені рівняння  $K(b, a) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). З формули (4.45) висновуємо: якщо частота збурювальної сили наближається до будь-якої з власних частот  $\omega_n$ , то коефіцієнт динамічності  $\mu$  необмежено зростає (наступає резонанс), а коли – до будь-якого з  $P_n$ , то  $\mu \rightarrow 0$  (спостерігається антирезонанс).

Зазначимо, що цілком аналогічно можна досліджувати задачі про вимушені коливання багатьох інших неперервних систем, а також і багатьох неперервно-дискретних систем, серед яких – системи, збудовані розосередженим навантаженням  $q(x)\cos\omega t$  чи  $q(x)\sin\omega t$ .

Нехай, наприклад, задачу зведено до розв'язування неоднорідного рівняння

$$g(x)\ddot{u} - (f(x)u')' = q(x)\cos\omega t \quad (4.46)$$

з однорідними крайовими умовами

$$u(x, t)|_{x=a} = 0, \quad u(x, t)|_{x=b} = 0. \quad (4.47)$$

Після відокремлення змінних, як і в попередньому випадку, отримаємо задачу, що відрізнятиметься від крайової задачі (4.42) тільки умовою  $y(b) = 0$  (що фігуруватиме замість умови  $y'(b) = P$ ). Діючи так само, як і в 4.2, знайдемо розв'язок задачі (4.46)-(4.47) в такому вигляді:

$$y(x, a) = -\frac{K(x, a)}{K(b, a)} \int_a^b K(b, s)q(s)ds + \int_a^x K(x, s)q(s)ds,$$

$$u(x, a, t) = y(x, a)\cos\omega t$$

( $K(x, a)$  – функція Коші, відповідна рівнянню (4.42)). Зазначимо, що початкові умови тут є такими самими, як і в задачі про консоль (мають вигляд (4.44)). В загальному випадку (довільні вісне навантаження та початкові умови) можна застосовувати до побудови розв'язків відповідних змішаних задач метод головних координат (див., наприклад, [14]).

### 5.1 Універсальні частотні рівняння для стержнів з "включеннями"

Зосередимо увагу на питаннях якісного аналізу властивостей систем, що описуються крайовими задачами для лінійних рівнянь з похідними.

Звернемося знову до задачі (2.53-2.55), надаючи їй змісту задачі про коливання стержня (вала, линви). Вважатимемо (див. (2.55))  $g = g(x)$  узагальненою функцією густини розподілу мас стержня;  $m = m(x)$  – неперервно розподілена маса,  $M_i$  – параметри, що характеризують значення точково скупчених мас.

Підставляючи загальний розв'язок (2.61) рівняння (2.57) в граничні умови (2.54) (покладаючи при цьому  $\alpha = a$ ), доходимо висновку, що характеристичне (частотне) рівняння задачі про вільні коливання пружно закріпленого стержня, який несе в собі скінченну кількість  $k$  приєднаних мас, можна записати як

$$(e_1 e_2 Q + e_1 f(b) Q' - e_2 f(a) \dot{Q} - f(a) f(b) \dot{Q}') \Big|_{\alpha=a}^{x=b} = 0, \quad (5.1)$$

де функція  $Q(x, \alpha)$  визначується за відповідною формулою (2.62), в якій  $\psi(x) \equiv K(x, \alpha)$ .

На підставі (5.1) матимемо рівняння

$$Q(b, a) = 0, \quad Q'(b, a) = 0, \quad -\dot{Q}(b, a) = 0, \quad -\dot{Q}'(b, a) = 0. \quad (5.2)$$

Вони відповідають тим самим умовам закріплення стержня, що й рівняння (4.24) (відповідно: затиснуті кінці, консоль з лівим закріпленням, консоль з правим закріпленням, вільні кінці).

Отже, щоб побудувати універсальні частотні рівняння (5.1), (5.2) континуально-дискретних систем, досить мати функцію впливу  $\Phi(x, \alpha)$  для відповідної континуальної системи – стержня без зосереджених мас. Така побудова здійснюється з застосуванням формули (2.62) без залучення умов спряження за будь-яких допустимих вартостей параметрів та за будь-яких допустимих



функцій розподілу жорсткостей і мас в досліджуваних моделях. Зокрема, якщо спрямувати розподілену масу стержня (вала, струни) до нуля, то (5.1), (5.2) переходять у частотні рівняння відповідних систем зі скінченною кількістю ступенів вільності ( $k$ ), що дорівнює кількості зосереджених мас.

Зазначимо, що вказані частотні рівняння можна застосовувати і в складніших випадках. Нехай, наприклад, маса  $M_i$  прикріплена через пружину з коефіцієнтом жорсткості  $c_i$  ще й до деякої площини, перпендикулярної до осі стержня. В такому разі параметр  $\alpha_i$  за наявності зовнішнього тертя, що характеризується коефіцієнтом  $\chi_i$ , визначатиметься за формулою

$$\alpha_i = M_i \lambda^2 + b_i \lambda + c_i \quad (i = \overline{1, k}), \quad (5.3)$$

а не за (2.58) (зрозуміло, що тут  $b_i \geq 0$ ,  $c_i \geq 0$ ).

При враховуванні розподілених параметрів, таких як зовнішнє тертя  $\chi(x)$  та пружна реакція довкілля  $\kappa(x)$ , вираз з похідними  $L[y]$  в (2.53) необхідно замінити на такий:

$$L[y] \equiv (f(x) y')' - (m(x) \lambda^2 + \chi(x) \lambda + \kappa(x)) y. \quad (5.4)$$

Тоді функція  $\psi \equiv K(x, \alpha)$  у відповідній формулі (2.62) визначається із рівняння  $L[y] = 0$  ( $L[y]$  – права частина в (5.4)).

## 5.2 Умови кратності та близькості частот

Аналізуючи частотні рівняння, можна одержувати деякі якісні висновки про власні частоти та вплив на них різних параметрів.

Нехай, наприклад, в задачі (2.53–2.55),  $M_1 = M_2 = \dots = M_k = M$ . Тоді при  $M \rightarrow \infty$  перше з рівнянь (5.2) (стержень із затиснутими кінцями, який несе  $k$  однакових зосереджених мас) з урахуванням формул (2.62)–(2.63), (5.1) стане таким:

$$\lambda^{2k} K_{1a} K_{21} K_{32} \dots K_{k, k-1} K_{bk} = 0. \quad (5.5)$$

Звідси, окрім рівності  $\lambda^{2k} = 0$ , одержуємо низку рівнянь

$$K_{1a} = 0; \quad K_{21} = 0; \quad K_{32} = 0; \quad \dots; \quad K_{k, k-1} = 0; \quad K_{bk} = 0. \quad (5.6)$$

Вони відповідають  $(k+1)$  стержням завдовжки

$$x_1 - a; \quad x_2 - x_1; \quad x_3 - x_2; \quad \dots; \quad x_k - x_{k-1}; \quad b - x_k, \quad (5.7)$$

кінці яких є затиснутими. Очевидно, що при достатно великих значеннях  $M$  власні частоти стержня будуть близькими до частот, визначуваних з рівнянь (5.6) (а також до частоти, рівної нулеві).

Якщо ж ліві частини рівнянь (5.6) – тотожно рівні, та довжини (5.7) – однакові, то кожне з цих рівнянь матиме однакові корені  $\lambda_j^2 < 0$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Тоді стержень завдовжки  $l$  матиме дві множини частот: досить малі частоти  $\omega_s^2$  ( $s = \overline{1, k}$ ), які відповідають рівнянню  $\lambda^{2k} = 0$ , та частоти  $\omega_r^2$  ( $r = k + 1, k + 2, \dots$ ), що будуть  $k + 1$  кратними і близькими до частот  $\omega_t^2$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) стержня з затиснутими кінцями завдовжки  $\tilde{l} = l(k + 1)^{-1}$ .

Тут можливі й інші численні варіанти нетривіального поєднання значень параметрів. Наприклад, коли в рівняннях (5.6) тільки  $K_{1a} \equiv K_{bk}$ , то при великих значеннях  $M$  досить малими будуть частоти  $\omega_s^2$  ( $s = \overline{1, k}$ ), а частоти  $\omega_j^2$  ( $r = k + 1, k + 2; j = 1, 2, \dots$ ) – близькими до двократних; всі інші частоти  $\omega_p^2$  ( $p = k + 3, k + 4, \dots$ ), взагалі кажучи, будуть простими.

Висловлені якісні висновки можна уточнювати. Зокрема, будуючи відповідні наближені рівняння (подібні до (5.5)), потрібно утримувати в формулі (2.60) від зникання при граничних переходах одну чи дві передостанні суми. Вказані висновки якісного змісту є сенс враховувати, зокрема, при дослідженні динаміки машин, які моделюються [47] системами пружно з'єднаних мас.

Очевидно, що подібні міркування можна поширити і на відповідні багатопараметричні задачі з урахуванням зовнішнього тертя та пружних в'язей, коли беруться до уваги співвідношення (5.3), (5.4) (величинами  $c_i$ ,  $b_i$  можна формально оперувати так само, як і величиною  $M_i$ ).

Розглядаючи наступні рівняння (5.2), що стосуються консолі з лівим закріпленням кінцем, консолі з правим закріпленням кінцем та вільного стержня, при  $M \rightarrow \infty$  одержуємо відповідно:

$$\lambda^{2s} = 0, \quad K_{1a} = 0, \quad K_{21} = 0, \quad \dots, \quad K_{k, k-1} = 0, \quad K'_{bk} = 0; \quad (5.8)$$

$$\lambda^{2s} = 0, \quad \dot{K}_{1a} = 0, \quad K_{21} = 0, \quad \dots, \quad K_{k, k-1} = 0, \quad K_{bk} = 0; \quad (5.9)$$

$$\lambda^{2s} = 0, \quad \dot{K}_{1a} = 0, \quad K_{21} = 0, \quad \dots, \quad K_{k, k-1} = 0, \quad K'_{bk} = 0. \quad (5.10)$$

Звідси неважко дійти висновків, подібних до наведених вище (стосовно рівнянь (5.6), що відповідають стержневі з затиснутими кінцями).

Зокрема, при  $M \rightarrow \infty$  перша консоль (їй відповідає система рівнянь (5.8)) може мати  $k$  кратних частот  $\omega_+^2 \rightarrow 0$ , безліч  $(k-1)$  разів кратних частот  $\omega_j^2$ , що відповідають стержневі завдовжки  $\tilde{l} = (x_k - a)k^{-1}$  з жорстко закріпленнями

кінцями, і частоти  $\omega_s^2$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) консолі, довжина якої  $b - x_k$ . Подібно, друга консоль (рівняння (5.9)) може мати такі самі кратні частоти  $\omega_+^2 \rightarrow 0$  та  $\omega_j^2$  (що відповідають стержневі завдовжки  $\tilde{l} = (b - x_1)k^{-1}$ ), а також частоти  $\omega_q^2$  ( $q = 1, 2, \dots$ ), що відповідають консолі завдовжки  $x_1 - a$ .

Ці висновки, як і попередні, узгоджуються з окремими відомими раніше та з тими, що випливають з вірогідних інтуїтивних міркувань (зрозуміло, наприклад, що велика маса діє як жорстка в'язь і їй відповідатиме мала частота). Однак метод функцій впливу дозволяє одержувати граничні співвідношення вигляду (5.5)–(5.10) та відповідні якісні висновки загального характеру, а в разі необхідності – ще й кількісні оцінки.

### 5.3 Окремі приклади якісного аналізу

Розглянемо спочатку стержень з затиснутими кінцями, який несе в собі дві точкові маси (перше з рівнянь (5.2) при  $k = 2$ ). Враховуючи відповідну формулу (2.62), одержуємо частотне рівняння

$$K_{ba} - \omega^2(M_1 K_{1a} K_{b1} + M_2 K_{2a} K_{b2}) + \omega^4 M_1 M_2 K_{1a} K_{21} K_{b2} = 0. \quad (5.11)$$

Тут і далі

$$K_{ba} = K(b, a), \quad K_{ia} = K(x_i, a), \quad K_{bi} = K(b, x_i), \quad K_{ji} = K(x_j, x_i). \quad (5.12)$$

Розглянемо декілька граничних випадків.

Якщо  $x_1 \rightarrow x_2$ , то  $K_{21} \rightarrow 0$ ;  $K_{1a} \rightarrow K_{2a}$ ;  $K_{b1} \rightarrow K_{b2}$ . Тоді, як і повинно бути, із (5.11) знаходимо

$$K_{ba} - \omega^2 M K_{2a} K_{b2} = 0 \quad (M = M_1 + M_2). \quad (5.13)$$

Звідси при  $M \rightarrow 0$  та  $M \rightarrow \infty$  маємо такі рівняння:

$$K_{ba} = 0, \quad \omega^2 K_{2a} K_{b2} = 0. \quad (5.14)$$

Рівності  $K_{ba} = 0$  (перше з рівнянь (5.14)) та рівності  $K_{2a} = 0$  і/чи  $K_{b2} = 0$ , що випливають з другого рівняння (5.14), співпадають, як і повинно бути, з першим частотним рівнянням (4.24).

Нехай, наприклад, стержень в точці  $x = x_2$  несе скупчену масу  $M$ ; при цьому поперечний переріз  $x = x_2$  є площиною його симетрії. Тоді при  $M \rightarrow \infty$  власні частоти (вони визначаються із рівнянь  $K_{2a} \equiv K_{b2} = 0$ ) стають кратними, крім однієї, яка прямує до нуля ( $\omega_+^2 \rightarrow 0$ ).

Якщо  $x_1 \rightarrow a$  ( $K_{1a} \rightarrow 0$ ) або  $x_2 \rightarrow b$  ( $K_{2b} \rightarrow 0$ ), то із (5.11) відповідно маємо:

$$K_{ba} - \omega^2 M_2 K_{2a} K_{b2} = 0, \quad K_{ba} - \omega^2 M_1 K_{1a} K_{b1} = 0. \quad (5.15)$$

Отже, при наближенні скупченої маси до затиснутого кінця вона перестає впливати на власні частоти.

Щоб отримати стосовно розглянутих випадків певні кількісні оцінки, необхідно, очевидно, порівняти частоти, визначувані з точного рівняння (5.11) та з граничних рівнянь (5.13)–(5.15).

Далі розглянемо консоль з двома зосередженими масами, правий кінець якої – вільний (друге з рівнянь (5.2)). Враховуючи (2.62), запишемо відповідне частотне рівняння:

$$K'_{ba} - \omega^2 (M_1 K_{1a} K'_{b1} + M_2 K_{2a} K'_{b2}) + \omega^4 M_1 M_2 K_{1a} K_{21} K'_{b2} = 0. \quad (5.16)$$

Якщо покласти  $x_1 = x_2$  ( $K_{21} = 0$ ,  $K_{1a} = K_{2a}$ ), то матимемо, зрозуміло, рівняння для консолі з однією масою:

$$K'_{ba} - \omega^2 M K_{2a} K'_{b2} = 0 \quad (M = M_1 + M_2). \quad (5.17)$$

Коли ж в рівнянні (5.16)  $M_1 \rightarrow \infty$ ,  $M_2 \rightarrow \infty$ , а в рівнянні (5.17)  $M \rightarrow \infty$ , то матимемо часткові випадки, про які вже йшлося (як і повинно бути, з'являються системи рівностей  $\{K'_{b1} = 0, K_{1a} = 0\}$  та  $\{K'_{b2} = 0, K_{2a} = 0\}$ ); при цьому, якщо  $x_1 - x_2 \rightarrow 0$ , то ці системи рівностей збігаються. Аналогічними вже висловленим є також висновки про вплив мас на власні частоти для випадків  $x_1 \rightarrow a$  або  $x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow a$ .

Розглянемо тепер відповідну систему з двома ступенями вільності. Нехтуючи розподіленою масою у рівнянні (2.53), маємо функцію Коші у вигляді

$$K(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{ds}{f(s)}.$$

Звідси випливає, що

$$K'_{ba} = K'_{b1} = K'_{b2} = \frac{1}{f(b)}.$$

Враховуючи це в (5.16), одержуємо рівняння

$$1 - \omega^2 (M_1 K_{1a} + M_2 K_{2a}) + \omega^4 M_1 M_2 K_{1a} K_{21} = 0. \quad (5.18)$$

Отже, як і повинно бути, частина консолі, розміщена за масою  $M_2$  ( $x_2 < x \leq b$ ), перестала впливати на власні частоти.

Розглянемо ще один випадок. Нехай на ділянці  $x_1 < x < x_2$  жорсткість стержня є малою ( $\max f(x) = \varepsilon > 0$  – мале число). Очевидно, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справджується умова  $K_{21} \rightarrow \infty$ . Тоді, беручи до уваги рівність  $K_{2a} = K_{1a} + K_{21}$ , знаходимо

$$\omega^2 M_2 (1 - \omega^2 M_1 K_{1a}) = 0. \quad (5.19)$$

Отже, одна з частот наближається до нуля, а інша – до значення, що відповідає невагомій консолі з масою  $M_1$  на вільному кінці. Цілком подібні висновки можна одержати для консолі з правим закріпленим кінцем (третє з рівнянь (5.2)).

Розглянемо останнє рівняння (5.2). Враховуючи формулу (2.62), запишемо частотне рівняння для  $k = 3$ :

$$\begin{aligned} & \dot{K}'_{ba} - \omega^2 (M_1 \dot{K}'_{1a} K'_{b1} + M_2 \dot{K}'_{2a} K'_{b2} + M_3 \dot{K}'_{3a} K'_{b3}) + \\ & + \omega^4 (M_1 M_2 K_{21} \dot{K}'_{1a} K'_{b2} + M_1 M_3 K_{31} \dot{K}'_{1a} K'_{b3} + M_2 M_3 K_{32} \dot{K}'_{2a} K'_{b3}) - \\ & - \omega^6 M_1 M_2 M_3 K_{21} K_{32} \dot{K}'_{1a} K'_{b3} = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Нехай  $x_1 \rightarrow x_2$ . Тоді  $K_{21} \rightarrow 0$ ,  $K_{1a} \rightarrow K_{2a}$ ,  $K'_{b1} \rightarrow K'_{b2}$ ,  $K_{31} \rightarrow K_{32}$ . Позначаючи  $M = M_1 + M_2$ , матимемо

$$\dot{K}'_{ba} - \omega^2 (M \dot{K}'_{2a} K'_{b2} + M_3 \dot{K}'_{3a} K'_{b3}) + \omega^4 M M_3 K_{32} \dot{K}'_{2a} K'_{b3} = 0. \quad (5.21)$$

Подібно, при  $x_2 \rightarrow x_3$ , позначивши  $M = M_2 + M_3$ , одержимо

$$\dot{K}'_{ba} - \omega^2 (M_1 \dot{K}'_{1a} K'_{b1} + M \dot{K}'_{3a} K'_{b3}) + \omega^4 M M_1 K_{31} \dot{K}'_{1a} K'_{b3} = 0. \quad (5.22)$$

Якщо в (5.21)  $x_2 \rightarrow x_3$ , або в (5.22)  $x_1 \rightarrow x_3$ , то знаходимо таке частотне рівняння:



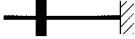

$$\dot{K}'_{ba} - \omega^2 M \dot{K}'_{3a} K'_{b3} = 0 \quad (M = M_1 + M_2 + M_3). \quad (5.23)$$

Звідси при  $M \rightarrow \infty$  матимемо відповідно умову прямування частоти до нуля та частотні рівняння для двох консолей – з лівим вільним кінцем і правим вільним кінцем:

$$\omega_{\pm}^2 \rightarrow 0, \quad \dot{K}'_{3a} = 0, \quad K'_{b3} = 0. \quad (5.24)$$

Запишемо тепер декілька характеристичних рівнянь для стержнів сталого поперечного перерізу з однією скупченою масою  $M$  (табл. 5;  $z = kl$ ,  $\gamma = \frac{M}{ml}$ ,  $k^2 = \frac{m}{f_0} \omega^2$ ). Якщо в формулах (4.25) та (5.13), (5.17), (5.2) (третє рівняння), (5.23) покласти  $a = 0$ ,  $b = l$ , то для  $k = 1$  одержимо рівняння, наведені в табл. 5.

**Таблиця 5 Частотні рівняння для стержня сталого перерізу зі зскупленою масою за різних граничних умов**

Схема стержня	Частотне рівняння	Додаткова умова
	$\frac{\sin z}{z} - \gamma \sin kx_1 \sin k(l - x_1) = 0$	
	$\frac{\sin z}{z} - \gamma \sin^2 \frac{z}{2} = 0$	$x_1 = \frac{l}{2}$
	$\cos z - \gamma z \sin kx_1 \cos k(l - x_1) = 0$	
	$\cos z - \gamma z \sin z = 0$	$x_1 \rightarrow l$
	$\cos z - \gamma z \cos kx_1 \sin k(l - x_1) = 0$	
	$\cos z - \gamma z \sin z = 0$	$x_1 \rightarrow 0$
	$k^2 \left( \frac{\sin z}{z} + \gamma \sin kx_1 \cos k(l - x_1) \right) = 0$	
	$k^2 \left( \frac{\sin z}{z} + \gamma \cos^2 \frac{z}{2} \right) = 0$	$x_1 = \frac{l}{2}$
	$k^2 \left( \frac{\sin z}{z} + \gamma \cos z \right) = 0$	$x_1 \rightarrow l, \quad x_1 \rightarrow 0$

В [48] ці частотні рівняння були отримані іншим способом – шляхом розв’язання відповідних задач спряження або використання граничної умови з частотним параметром (для консолі з масою на вільному кінці). В тій самій роботі розглядаються приклади обчислення нижчих частот та наводяться асимптотичні формули для високих частот  $\omega_n, n \gg 1$ .

#### 5.4 Системи з малими розподіленими параметрами

**Характеристичні рівняння систем зі скінченною кількістю ступенів вільності.** Нехай розподілені параметри є значно меншими від зосереджених в тому розумінні, що

$$\int_a^b \rho(x) S(x) dx \ll \sum_{i=1}^k M_i ; \quad (5.25)$$

$$\int_a^b b(x) dx \ll \sum_{i=1}^k b_i ; \quad \int_a^b c(x) dx \ll \sum_{i=1}^k c_i . \quad (5.26)$$

Тоді, нехтуючи розподіленими (розосередженими) характеристиками в порівнянні зі скупченими, матимемо замість (2.57) (з урахуванням (5.4)) таке рівняння:

$$(f y')' = \sum_{i=1}^k \alpha_i y(x_i) \delta(x - x_i), \quad (5.27)$$

де параметри  $\alpha_i$  визначені згідно з (5.3).

Отже

$$K(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{ds}{f(s)}, \quad K' = \frac{1}{f(x)}, \quad \dot{K} = \frac{1}{f(\alpha)}, \quad \dot{K}' \equiv 0. \quad (5.28)$$

Підставляючи ці вирази в (2.60) і (5.2), приходимо до характеристичних рівнянь відповідних систем з  $k$  ступенями вільності:

$$K_{ba} + \sum_{i=1}^k \alpha_i K_{ia} K_{bi} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i}^k \alpha_i \alpha_j K_{ia} K_{ji} K_{bj} + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k K_{1a} K_{21} K_{32} \dots K_{bk} = 0; \quad (5.29)$$

$$1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i K_{ia} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i}^k \alpha_i \alpha_j K_{ia} K_{ji} + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k K_{1a} K_{21} K_{32} \dots K_{k,k-1} = 0; \quad (5.30)$$

$$1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i K_{bi} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i}^k \alpha_i \alpha_j K_{ji} K_{bj} + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k K_{21} K_{32} \dots K_{bk} = 0; \quad (5.31)$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i}^k \alpha_i \alpha_j K_{ji} + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j>i>s>j}^k \alpha_i \alpha_j \alpha_s K_{ji} K_{sj} + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k K_{21} K_{32} \dots K_{k,k-1} = 0. \quad (5.32)$$

(рівняння (5.32) відповідає стержню з вільними кінцями, який в окремих випадках слід вважати системою з  $k-1$  ступенями вільності). Тут позначено:

$$K_{ba} = \int_a^b \frac{ds}{f(s)}, \quad K_{ia} = \int_a^{x_i} \frac{ds}{f(s)}, \quad K_{bi} = \int_{x_i}^b \frac{ds}{f(s)}, \quad K_{ji} = \int_{x_i}^{x_j} \frac{ds}{f(s)}. \quad (5.33)$$

Рівняння (5.29)–(5.32) відповідають типовим схемам закріплення кінців стержня (жорстке закріплення кінців, консоль з правим вільним кінцем, консоль з лівим вільним кінцем, стержень з вільними кінцями). Якщо  $c_i = b_i = 0$ , то останнє з цих рівнянь завжди має нульовий корінь  $\lambda^2 = 0$  (бо  $\alpha_i = M_i \lambda^2$ ; цей випадок відповідає переміщенню стержня як жорсткого тіла); всі інші корені відповідають умові  $\lambda_i^2 < 0$  ( $\omega_i^2 > 0$ ).

Зауважимо, що кожному з побудованих частотних рівнянь завжди можна поставити у відповідність універсальне частотне рівняння відповідної континуально-дискретної системи.

Розглянемо, для прикладу, власні круті коливання пружного стержня з вільними кінцями, який несе три тонкі диски (відповідне частотне рівняння (5.20) з урахуванням розподіленої маси одержано вище). Якщо взяти до уваги співвідношення (5.3) і (5.28), то воно стане таким:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 K_{21} + \alpha_1 \alpha_3 K_{31} + \\ + \alpha_2 \alpha_3 K_{32} + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 K_{21} K_{32} = 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

До цього ж рівняння приходимо, беручи в (5.32)  $k = 3$ .

Якщо жорсткості ділянок стержня між дисками є сталими ( $f_1, f_2 = \text{const}$ ), то

$$\begin{aligned} K_{21} = \frac{1}{f_1}(x_2 - x_1), \quad K_{32} = \frac{1}{f_2}(x_3 - x_2), \\ K_{31} = \int_{x_1}^{x_3} \frac{ds}{f(s)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{f_1} + \int_{x_2}^{x_3} \frac{ds}{f_2} = K_{21} + K_{32}. \end{aligned}$$

Отже, маємо характеристичне рівняння шостого степеня ( $n = 2k = 6$ ). Його корені визначають комплексні частоти системи (враховуються сили зовнішнього тертя та реакції пружних в'язей).

Для випадку  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = A$  із (5.34) одержуємо:

$$A[3 + 2A(K_{21} + K_{32}) + A^2 K_{21} K_{32}] = 0.$$

Звідси знаходимо значення  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$  величини  $\lambda$ . Перші два значення, визначувані з рівняння

$$J\lambda^2 + b_0\lambda + c_0 = 0 \quad (A = 0),$$

відповідають вільним згасальним коливанням стержня як жорсткого тіла, прикріпленого до пружини жорсткістю  $c_0$ . Інші значення  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) є коренями рівнянь



$$J\lambda^2 + b_0\lambda + c_0 = A_i \quad (i=1, 2)$$

і визначають частоти (комплексні) власне крутих коливань. Тут

$$A_{1,2} = \frac{1}{\chi K_{21}} \left[ -(1+\chi) \mp \sqrt{1-\chi+\chi^2} \right]; \quad \chi = \frac{K_{32}}{K_{21}}.$$

Звідси випливає, що  $A_i < 0$  ( $i=1, 2$ ). Отже, власні крутильні коливання розглянутого стержня є згасальними за довільних допустимих значень усіх параметрів.

Якщо тертя не враховується та пружні в'язі відсутні ( $c_i = b_i = 0$ ), то

$$\alpha_i = -J_i \omega^2 \quad (\omega = \sqrt{-1} \lambda). \quad (5.35)$$

Тоді із (5.34) маємо:

$$-\omega^2 \{ J_1 + J_2 + J_3 - \omega^2 [ J_1 J_2 K_{21} + J_2 J_3 K_{32} + J_1 J_3 (K_{21} + K_{32}) ] + \omega^4 J_1 J_2 J_3 K_{21} K_{32} \} = 0. \quad (5.36)$$

Значення  $\omega^2 = 0$  відповідає станові байдужої рівноваги системи (як твердого тіла). Квадрати власних частот крутильних коливань є коренями біквадратного рівняння (5.36). Якщо диски однакові ( $J_1 = J_2 = J_3 = J$ ;  $K_{21} = K_{32} = c_0$ ), то це рівняння є таким:

$$z^2 - 4z + 3 = 0 \quad (z = J/c_0 \omega^2).$$

Звідси легко визначити значення частот.

Якщо ж в (5.34), наприклад,  $\alpha_3 = 0$ , то для випадку (5.35) одержуємо

$$\omega^2 = c_0 (J_1 + J_2) (J_1 J_2)^{-1}$$

(ця формула відома [10]).

Коли береться до уваги тертя за наявності додаткових пружних в'язей, то замість формул (5.35) необхідно використовувати співвідношення (5.3). Відповідні характеристичні рівняння будуються цілком подібно.

**Частотні функції регулярних систем.** Розглянемо характеристичні рівняння (5.29)–(5.32) за умов

$$\alpha_j = A, \quad K_{ja} = jB \quad (j = \overline{1, k}). \quad (5.37)$$

Ці умови відповідають стержням, які належать до так званих регулярних систем [14, 47, 49] (утворених з певної кількості однакових елементів). Враховуючи вказані умови, ставимо послідовно у відповідність рівнянням (5.29) і (5.32) такі многочлени:

$$D_1 = \Lambda + 2; \quad D_2 = \Lambda^2 + 4\Lambda + 3; \quad D_3 = \Lambda^3 + 6\Lambda^2 + 10\Lambda + 4; \quad \dots; \quad (5.38)$$

$$D_{k-1} = \Lambda^{k-1} + C_{2(k-1)}^1 \Lambda^{k-2} + C_{2(k-1)-1}^2 \Lambda^{k-3} + \dots + C_k^{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Тут

$$\Lambda = AB = \left( M\lambda^2 + b_0\lambda + c_0 \right) \int_a^b \frac{ds}{f(s)}, \quad (5.39)$$

$C_n^m$  – біноміальні коефіцієнти.

Співвідношення (5.38) узгоджуються з відомими [47], які отримані іншим способом – розглядаючи крутильні коливання відповідного однорідного багатомасового вала сталого перерізу з вільними кінцями.

Многочлени (5.38) називають частотними функціями. Прирівнюючи їх до нуля, матимемо відповідні частотні рівняння. Зауважимо, що при записі цих многочленів у випадку стержня з вільними кінцями, для якого вихідним є рівняння (5.32), відкинута множник  $A$  (що відповідає розв'язкові частотного рівняння  $A=0$ , тобто переміщенню стержня без закручування).

Для характеристичних рівнянь (5.30) і (5.31) (консольні вали), після врахування умов (5.37) одержуємо частотні функції

$$D_1 = \Lambda + 1, \quad D_2 = \Lambda^2 + 3\Lambda + 1, \quad D_3 = \Lambda^3 + 5\Lambda^2 + 6\Lambda + 1, \quad \dots, \quad (5.40)$$

$$D_k = \Lambda^k + C_{2k-1}^1 \Lambda^{k-1} + C_{2k-2}^2 \Lambda^{k-2} + \dots + C_k^k.$$

І хоча частотні функції (5.38) і (5.40) для однорідних і неоднорідних регулярних систем записуються однаково, однак частоти та характеристичні показники можуть істотно відрізнятися (однорідним системам у формулі (5.39) відповідає жорсткість  $f(x) \equiv f_0 = \text{const}$ ).

"Квадрати частот" ( $-\Lambda$ ) є при цьому завжди додатними і простими коренями характеристичних рівнянь. Їх можна знаходити графічно, а для характеристичних рівнянь (5.38) – за відомою формулою [14, 47]

$$\Lambda_i = 2(\cos \theta_i - 1), \quad \theta_i = \frac{i\pi}{k+1} \quad (i = \overline{1, k}).$$

Кожному кореневі  $\Lambda_i$  відповідають два значення  $\lambda_{1,2}$  характеристичного показника  $\lambda$ , які визначаються з квадратного рівняння, що випливає із співвідношення (5.39). При розв'язуванні відповідних задач про вільні та вимушені коливання можна скористатись, наприклад, методом головних коливань [14].

Отже, запропонований спосіб дає змогу будувати частотні функції для неоднорідних регулярних систем з довільними законами розподілу жорсткості (в тому числі – східчато-змінними) та застосовувати надалі відомі методи побудови розв'язків. Це доцільно враховувати, зокрема, при дослідженні динаміки машин, які моделюються системами пружно з'єднаних мас [47].

### Випадки наявності абсолютно жорстких і абсолютно податних ділянок.

Розглянемо декілька прикладів, коли жорсткість окремих ділянок стержня є дуже великою або, навпаки, дуже малою.

Вважаючи, що виконуються умови (5.25)–(5.28), розглядаємо частотне рівняння (5.29) для  $k = 2$  і рівняння (5.11), в якому враховується розподілена маса стержня (при цьому вона є тут набагато меншою від зосереджених мас  $M_1$  і  $M_2$ ).

Якщо жорсткість стержня на ділянках  $a < x < x_1$ ,  $x_1 < x < x_2$  та  $x_2 < x < b$  є сталою і дуже великою, то можна вирізнити такі випадки:

$$a) K_{1a} \rightarrow 0; \quad б) K_{21} \rightarrow 0; \quad в) K_{b2} \rightarrow 0. \quad (5.41)$$

Із формул (5.12) і (5.28) маємо:

$$K_{ba} = K_{1a} + K_{21} + K_{b2}; \quad K_{b1} = K_{21} + K_{b2}; \quad K_{2a} = K_{1a} + K_{21}. \quad (5.42)$$

Враховуючи ці співвідношення, із (5.30) для випадків (5.41) одержуємо такі рівняння:

$$a) K_{b1} - \omega^2 M_2 K_{21} K_{b2} = 0; \quad б) K_{1a} + K_{b2} - \omega^2 (M_1 + M_2) K_{1a} K_{b2} = 0; \\ в) K_{2a} - \omega^2 M_1 K_{1a} K_{21} = 0 \quad (5.43)$$

(кінці стержня, як і у вихідному рівнянні, у випадках *a*), *б*), *в*) вважаються закріпленими).

Із рівнянь (5.43) видно, що у випадках (5.41) вихідна система ( $k = 2$ ) втрачає один ступінь вільності; необмежене збільшення жорсткості “може закріпити” одну з мас (5.41 *a*, *в*) або “зафіксувати” відносно розташування мас (5.41 *б*). Неважко перекоонатися, що для інших варіантів вибору жорстких ділянок система якісно не зміниться, тобто  $k$  залишиться незмінним ( $k = 2$ ). Наприклад: якщо  $K_{ca} \rightarrow 0$  (де  $a < c < x_1$ ), або  $K_{rs} \rightarrow 0$ , то  $x_1 < r < s < x_2$ ; якщо  $K_{bq} \rightarrow 0$ , то  $x_2 < q < b$  тощо. Однак наявність ділянок з великою жорсткістю може значно збільшити частоти.

Розглянемо протилежні можливості, коли жорсткість окремих ділянок зникає:

$$a) K_{1a} \rightarrow \infty; \quad б) K_{21} \rightarrow \infty; \quad в) K_{b2} \rightarrow \infty. \quad (5.44)$$

Співвідношенням (5.44), як випливає з (5.11) і (5.33), відповідають такі частотні рівняння:

$$a) 1 - \omega^2 (M_1 K_{b1} + M_2 K_{b2}) + \omega^4 M_1 M_2 K_{21} K_{b2} = 0, \\ б) (1 - \omega^2 M_1 K_{1a}) (1 - \omega^2 M_2 K_{b2}) = 0, \\ в) 1 - \omega^2 (M_1 K_{1a} + M_2 K_{2a}) + \omega^4 M_1 M_2 K_{21} K_{1a} = 0. \quad (5.45)$$

Тепер, очевидно, змінюються умови закріплення. Дійсно, порівнюючи рівняння (5.45) і (5.16) з (5.17) або (5.18) ( $k = 1$  чи  $k = 2$ ), приходимо до висновку, що кожен з випадків *a*) та *в*) відповідає консолі (з лівим і правим вільним кінцем), а випадок *б*) – двом консолям, не зв'язаним між собою. При іншому виборі ділянок з великою податністю можна одержати подібні висновки.

Зауважимо, що кожне з граничних рівнянь (5.43) і (5.45) дає додаткові можливості для якісного аналізу вихідної коливної системи, якій відповідає частотне рівняння (5.11). Проліструємо це.

**Приклад 1.** Якщо розподілена маса стержня з закріпленими кінцями достатно мала, а жорсткість ділянки  $x \in (a, x_1)$  досить велика, то рівняння (5.11) матиме один корінь, близький до значення  $\omega^2$ , визначуваного з рівняння (5.43 *a*); безліч інших його коренів будуть великими (тим більшими, чим менша розподілена маса і чим більша вказана жорсткість).

**Приклад 2.** Нехай квадрати двох нижчих частот стержня з закріпленими кінцями мають бути близькими, а всі інші частоти повинні значно відрізнитися від них. Із наведеного вище випливає така пропозиція: розподілена маса і жорсткість ділянки  $x_1 < x < x_2$  стержня, частотне рівняння якого – (5.11), повинні бути малими; має виконуватися також умова  $M_1 K_{1a} = M_2 K_{b2}$  (див. рівняння (5.45 *б*)).

**Системи з тертям і пружними в'язями.** Розглянемо для прикладу стержень з двома зосередженими масами, прикріпленими пружно до нерухомої площини, яка перпендикулярна до його вісі. Коефіцієнти пружних в'язей позначатимемо як  $c_1, c_2$ , а відповідні коефіцієнти зовнішнього тертя – як  $b_1, b_2$ .

Щоб побудувати частотні рівняння, беремо у формулі (2.62)  $\psi(x) \equiv K(x, \alpha)$  ( $K$  – функція Коші для (5.4)). Тоді

$$Q = K_{\alpha\alpha} + \sum_{i=1}^2 \alpha_i K_{i\alpha} \Phi_{xi} + \alpha_1 \alpha_2 K_{1\alpha} K_{21} \Phi_{x2}. \quad (5.46)$$

Підставляючи функцію (5.46) та її похідні в (5.1)–(5.2) і враховуючи формули (5.3) для параметрів  $\alpha_i$ , приходимо до універсальних характеристичних рівнянь відповідних систем із зовнішнім тертям і пружними в'язями.

Зокрема, для консолі (друге рівняння (5.2)) маємо:

$$A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda^3 + A_4 \lambda^4 = 0, \quad (5.47)$$

де

$$A_0 = K'_{ba} + \sum_{i=1}^2 c_i K_{ia} K'_{bi} + c_1 c_2 a_{21} \quad (a_{21} = K_{1a} K_{21} K'_{b2}),$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^2 b_i K_{ia} K'_{bi} + c_1 b_2 + c_2 b_1,$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^2 M_i K_{ia} K'_{bi} + (M_1 c_2 + M_2 c_1) a_{21} + b_1 b_2,$$

$$A_3 = b_1 M_2 + b_2 M_1, \quad A_4 = M_1 M_2 a_{21}. \quad (5.48)$$

Оскільки  $K(x, \alpha)$  є цілою функцією параметра  $\lambda$ , то характеристичне рівняння (5.47) (див. також (5.48)), взагалі кажучи, можна побудувати лише наближено. Воно сильно спрощується, коли не враховуються розподілені параметри ( $m(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ). При відсутності тертя, виходячи із (5.47), одержуємо бікватратне рівняння ( $\lambda^2 = -\omega^2$ ):

$$1 + \sum_{i=1}^2 c_i K_{ia} + c_1 c_2 \tilde{a}_{21} - \omega^2 \left[ \sum_{i=1}^2 M_i K_{ia} + (M_1 c_2 + M_2 c_1) \tilde{a}_{21} \right] + \omega^4 M_1 M_2 \tilde{a}_{21} = 0, \quad (5.49)$$

де

$$\tilde{a}_{21} = K_{1a} K_{21}, \quad K_{ia} = \int_a^{x_i} \frac{ds}{f(s)}, \quad K_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{f(s)}. \quad (5.50)$$

Його розв'язки  $\omega_1^2$  і  $\omega_2^2$  завжди невід'ємні та різні. Всі параметри системи можуть приймати тут довільні допустимі значення ( $f(x) > 0$ ;  $a \leq x \leq b$ ;  $M_i > 0$ ;  $c_i \geq 0$ ;  $i = 1, 2$ ).

Розглянемо декілька граничних випадків рівняння (5.49) (див. також (5.50)) і виведемо формули для частот.

Нехай  $K_{1a} \rightarrow \infty$ . Тоді, враховуючи співвідношення (5.42), маємо:

$$c_1 + c_2 + c_1 c_2 K_{21} - \omega^2 \left[ \sum_{i=1}^2 M_i + (M_1 c_2 + M_2 c_1) K_{21} \right] + \omega^4 M_1 M_2 K_{21} = 0. \quad (5.51)$$

Якщо  $c_2 \rightarrow \infty$  або  $c_1 \rightarrow \infty$ , то одержуємо відповідно

$$\omega_j^2 = M_j^{-1} (c_j + K_{21}^{-1}) \quad (j = 1, 2). \quad (5.52)$$

Кожна з цих формул визначає, очевидно, частоту коливань безмасової консолі зі скупченою масою, прикріпленої пружно до нерухомої площини. Подібні формули неважко записати, коли в рівнянні (5.51)  $c_1 \rightarrow 0$  або  $c_2 \rightarrow 0$  (стержні, один кінець яких вільний, а другий – пружно прикріплений).

Із (5.52) для  $K_{21} \rightarrow \infty$ ,  $c_j \rightarrow 0$  маємо відповідно

$$\omega_j^2 = c_j M_j^{-1}, \quad \omega_j^2 = M_j^{-1} K_{21}^{-1}, \quad (j = 1, 2). \quad (5.53)$$

Якщо ж  $c_1 = c_2 \rightarrow 0$ , то із (5.51) знаходимо

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = K_{21}^{-1} (M_2^{-1} + M_1^{-1}). \quad (5.54)$$

Співвідношення (5.54) при  $M_2 \rightarrow \infty$  або  $M_1 \rightarrow \infty$  узгоджується, як і повинно бути, з другою формулою (5.53) (кожна з них визначає власну частоту коливань безмасової консолі змінного поперечного перерізу, яка несе зосереджену масу).

Для стержнів сталого поперечного перерізу останні з одержаних співвідношень наводяться в довідниках [10]. Зауважимо також, що коли в (5.51) жорсткість стержня є дуже великою ( $K_{21} \rightarrow 0$ ), то він коливається з частотою відповідного гармонічного осцилятора.

## 5.5 Способи побудови функцій впливу

Як впливає з попереднього розгляду, маючи функцію  $K(x, \alpha)$  відповідного рівняння, можна отримувати універсальні характеристичні рівняння, встановлювати якісні висновки, визначати власні частоти і форми та досліджувати малі коливання системи. Тому проблема її конструктивної побудови є досить важливою. Основними можна вважати три способи, які тут розглянемо в загальних рисах (див. також розділ 3).

**Використання фундаментальних систем розв'язків.** Маючи, наприклад, фундаментальну систему  $\{\psi_1(x), \psi_2(x)\}$  для рівняння  $L[y] = 0$ , де  $L$  – диференційний вираз (5.4), будемо функцію Коші за формулою (1.9) (в даному випадку  $n = 2$ ). Цей спосіб доцільно застосовувати до добре вивчених рівнянь, для яких фундаментальну систему можна записати у вигляді квадратур або виразити через елементарні чи спеціальні функції. Приклади наведено в табл. 6 (з запозиченнями з табл. 1, 2).

**Ряди за характеристичним параметром.** Другий спосіб ґрунтується на відомому методі Пікара (так званому методі послідовних наближень) (див., наприклад, [19, 5, 24]). В цьому випадку функція  $K(x, \alpha)$  будується як ряд за степенями параметра  $\lambda$  (чи  $\lambda^2$ ).

Наприклад, для рівняння (2.53)

$$K(x, \alpha) = K_0(x, \alpha) + \lambda^2 K_1(x, \alpha) + \lambda^4 K_2(x, \alpha) + \dots, \quad (5.55)$$

де

$$K_0(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{ds}{f(s)}, \quad \lambda^2 = -\omega^2; \quad (5.56)$$

$$K_i(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x K_0(x, s) m(s) K_{i-1}(s, \alpha) ds \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (5.57)$$

Таблиця 6 Лінійні оператори другого порядку та відповідні їм функції Коші

№	$L[y]$	$K(x, \alpha)$	Додаткові умови
1	$y'' + \omega^2 y, \quad \omega = \text{const}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega(x - \alpha)$	$\omega^2 \geq 0$
2	$y'' + 2\varepsilon y' + \omega^2 y;$ $\varepsilon, \omega = \text{const}$	$\frac{1}{k} e^{-\varepsilon(x-\alpha)} \sin k(x-\alpha)$	$k = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon},$ $\varepsilon \leq \omega^2$
3	$(f(x)y)'$	$\int_{\alpha}^x \frac{ds}{f(s)}$	$f(x) > 0$
4	$\left(\frac{1}{z'(x)} y'\right)' + c^2 z'(x)y,$ $c = \text{const}$	$\frac{1}{c} \sin c(z(x) - z(\alpha))$	$z'(x) \neq 0$
5	$y'' - \frac{2}{x^2} y$	$\frac{1}{3} \left( \frac{x^2}{\alpha} - \frac{\alpha^2}{x} \right)$	
6	$y'' + \frac{2}{x} y' + k^2 y,$ $k = \text{const}$	$\frac{\alpha}{kx} \sin k(x - \alpha)$	$k^2 \geq 0$
7	$(x^2 y')' + \chi^2 x^2 y,$ $\chi = \text{const}$	$\frac{1}{\chi \alpha x} \sin \chi(x - \alpha)$	$\chi^2 \geq 0$
8	$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y$	$\sqrt{\frac{\alpha}{x}} \sin(x - \alpha)$	
9	$y'' - \frac{a}{x^4} y,$ $a = \text{const}$	$\frac{\alpha x}{a} \sin a \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} \right)$	
10	$y'' - \frac{2n+m-1}{x} y' +$ $+\frac{1}{x^2} \left\{ a^2 m^2 x^{2m} + \right.$ $\left. + n [2n+m-1 - a(n-1)] \right\} y$	$\frac{1}{a} x^n \alpha^n \sin a (\alpha^m - x^m)$	$n, m \in Z$

Звідси одержуємо формули для похідних:

$$K'_0 = \frac{1}{f(x)}, \quad \dot{K}_0 = -\frac{1}{f(\alpha)}, \quad \dot{K}'_0 \equiv 0; \quad (5.58)$$

$$K'_i = \frac{1}{f(x)} \int_{\alpha}^x m(s) K_{i-1}(s, \alpha) ds \quad (i=1, 2, \dots),$$

$$\dot{K}_i = \int_{\alpha}^x K_0(x, s) m(s) \dot{K}_{i-1}(s, \alpha) ds \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$\dot{K}'_i = \frac{1}{f(x)} \int_{\alpha}^x m(s) \dot{K}_{i-1}(s, \alpha) ds \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (5.59)$$

Покажемо, що ряд (5.55) є функцією Коші рівняння (2.53). Спочатку переконаємося, що він задовольняє формально і це рівняння, і умови

$$K(\alpha, \alpha) = 0, \quad K'(\alpha, \alpha) = \frac{1}{p_0(\alpha)}. \quad (5.60)$$

З використанням формул (5.58)-(5.59) знаходимо:

$$fK = 1 + \lambda^2 \int_{\alpha}^x K_0(s, \alpha) m(s) ds + \lambda^4 \int_{\alpha}^x K_1(s, \alpha) m(s) ds + \dots; \quad (5.61)$$

$$(fK)' = \lambda^2 m(x) [K_0(x, \alpha) + \lambda^2 K_1(x, \alpha) + \dots] = \lambda^2 m(x) K. \quad (5.62)$$

Очевидно, що умови (5.60) виконуються:

$$K(\alpha, \alpha) = 0; \quad K'(\alpha, \alpha) = \frac{1}{f(\alpha)}.$$

Залишається довести абсолютну збіжність рядів (5.55) та (5.61), (5.62).

Із співвідношень (5.56) і (5.57) випливає, що мажорантою для (5.55) є ряд

$$A|x - \alpha| + \lambda^2 A^2 B \frac{|x - \alpha|^3}{3!} + \lambda^4 A^3 B^2 \frac{|x - \alpha|^5}{5!} + \dots, \quad (5.63)$$

де  $A$  та  $B$  – найбільші значення функцій  $\frac{1}{f(x)}$  та  $m(x)$  в замкненому інтервалі  $a \leq x \leq b$ . Отже

$$|K(x, \alpha)| \leq A \frac{\text{sh} \lambda \sqrt{AB} |x - \alpha|}{\lambda \sqrt{AB}}. \quad (5.64)$$

Тому ряд (5.55) збігається абсолютно і рівномірно ( $\forall x, \alpha \in [a, b]; |\lambda| < \infty$ ). Це неважко встановити і для рядів (5.61), (5.62).

Аналогічно можна розглянути випадки, коли в (5.55) замість  $\lambda^2$  буде  $\lambda$ , або коли диференційний вираз  $L[y]$  визначатиметься формулою (5.4). Таким чином, функцію Коші для розглянутих задач можна завжди будувати як ряд за параметром  $\lambda$ .



**Степеневі ряди.** Третій спосіб спирається на побудову функцій впливу у вигляді рядів за степенями різниці  $x - \alpha$ . Проілюструємо його на прикладі рівняння

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (x \in [a, b]). \quad (5.65)$$

Очевидною є тотожність

$$K''(x, \alpha) + q(x)K(x, \alpha) \equiv 0.$$

Диференціюючи її послідовно, вважаючи при цьому коефіцієнт  $q(x)$  голоморфною функцією, знаходимо

$$K''' + q'K + qK' \equiv 0, \quad K^{IV} + q''K + 2q'K' + qK'' \equiv 0, \dots$$

За означенням, для рівняння (5.65)  $K(\alpha, \alpha) = 0$ ;  $K'(\alpha, \alpha) = 1$ . Враховуючи це та використовуючи одержані тотожності, приходимо до такої формули:

$$K^{(2+j)}(\alpha, \alpha) \equiv b_{2+j}(\alpha) = - \sum_{i=0}^j C_j^i q^{(j-i)}(\alpha) b_i(\alpha); \quad (5.66)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots; \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1(\alpha) \equiv 1.$$

Отже, відповідну рівнянню (5.65) функцію Коші можна будувати як ряд Тейлора

$$K(x, \alpha) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} b_r(\alpha) (x - \alpha)^r, \quad (5.67)$$

коефіцієнти якого визначаються співвідношеннями (5.66).

Зауважимо, що функція  $K(x, \alpha)$ , як розв'язок задачі Коші, існує та є єдиною. Тому степеневий ряд (5.67) – інше зображення відповідного ряду (5.55), збіжність якого доведена (співвідношення (5.63), (5.64)). Наведемо для прикладу деякі коефіцієнти  $b_r$  ( $r = \overline{2, 9}$ ):  $0$ ;  $-q$ ;  $-2q'$ ;  $q^2 - 3q''$ ;  $6q'q - 4q'''$ ;  $-q^3 + 10q'^2 + 13qq'' - 5q^{IV}$ ;  $-12q'q^2 + 48q'q'' + 24q''q - 6q^V$ ;  $q^4 - 52qq'^2 - 34q''q^2 + 63q''^2 + 98q'q''' + 40qq^{IV} - 7q^V$ .

## 5.6 Функції впливу та метод початкових параметрів

У дослідженнях коливань неоднорідних систем з кусково-сталими характеристиками часто застосовується метод початкових параметрів [10, 50]. Його можна поширити на системи з кусково-змінними характеристиками, використовуючи нормальну фундаментальну систему розв'язків (2.17). Один із варіантів методу – у формі Коші [10] – проілюструємо на прикладі задачі про поздовжні коливання консолі, складеної з двох частин.

Отже, після відокремлення змінних одержуємо два рівняння

$$L_1[y] = 0, \quad a \leq x \leq c, \quad L_2[y] = 0, \quad c \leq x \leq b, \quad (5.68)$$

а також граничні умови та умови спряження

$$y_1(a) = 0, \quad N_2(b) = f_2(b) y_2'(b) = 0; \quad (5.69)$$

$$y_1(c) = y_2(c), \quad N_1(c) \equiv N_2(c). \quad (5.70)$$

Тут  $L_i$  – диференційний вираз (2.53), в якому  $f = f_i(x)$ ,  $g = m_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ; індекс “1” відповідає лівій частині консолі, а індекс “2” – правій).

Виразимо тепер довільні сталі  $C_0, C_1$  в загальному розв’язку

$$y = C_0 K(x, \alpha) + C_1 \dot{K}(x, \alpha)$$

через початкові параметри (в довільній точці  $x = \alpha$ ) – вісні переміщення  $y(\alpha)$  і зусилля  $N(\alpha)$ . Для цього розглядаємо допоміжну задачу

$$(f y')' + \omega^2 m(x)y = 0; \quad y(x, \alpha)|_{x=\alpha} = y(\alpha), \quad y'(x, \alpha)|_{x=\alpha} = \frac{N(\alpha)}{f(\alpha)}. \quad (5.71)$$

Беручи до уваги формули (4.14) - (4.19), її розв’язок записуємо так:

$$y(x, \alpha) = N(\alpha)K(x, \alpha) - f(\alpha)y(\alpha)\dot{K}(x, \alpha); \quad (5.72)$$

тоді

$$N(x, \alpha) = f(x)[N(\alpha)K'(x, \alpha) - f(\alpha)y(\alpha)\dot{K}'(x, \alpha)]. \quad (5.73)$$

Нехай  $K_i(x, \alpha)$  ( $i = 1, 2$ ) – функції Коші рівнянь (5.68). Використовуючи умови (5.69), (5.70) і формули (5.72), (5.73), одержуємо низку співвідношень:

$$\begin{aligned} y_1(x, a) &= N(a)K_1(x, a); \quad N_1(x, a) = f_1(x)[N(a)K_1'(x, a)]; \\ N_2(x, c) &= f_2(x)[N_1(c, a)K_2'(x, c) - f_2(c)y_1(c, a)\dot{K}_2'(x, c)]. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Звідси, кладучи  $x = b$ , одержуємо частотне рівняння задачі (5.68), (5.69) ( $N_2(b, c) = 0$ ):

$$f_1(c)K_1'(c, a)K_2'(b, c) - f_2(c)K_1(c, a)\dot{K}_2'(b, c) = 0. \quad (5.75)$$

Розглянемо окремі випадки. Коли  $c \rightarrow a$  або  $c \rightarrow b$ , то із (5.75) відповідно маємо рівняння  $K_2'(b, a) = 0$ ;  $K_1'(b, a) = 0$  (тобто ліва чи права ділянки консолі перестають впливати на її власні коливання). При цьому враховано, що

$$K_1'(a, a) = \frac{1}{f_1(a)}; \quad K_1(a, a) = 0; \quad K_2'(b, b) = \frac{1}{f_2(b)}; \quad \dot{K}_2'(b, b) = 0. \quad (5.76)$$

Якщо вважати ліві частини рівнянь (5.68) тотожно рівними, то  $f_1 \equiv f_2 \equiv f$ ,  $K_1 \equiv K_2 \equiv K$ . Тоді із (5.75) та (4.24) висновуємо, що

$$K'(c, a)K'(b, c) - K(c, a)\dot{K}'(b, c) \equiv K'(b, a). \quad (5.77)$$

Доведемо цю тотожність.

Запишемо рівняння (5.71) у вигляді

$$y'' + f' f^{-1} y' + \omega^2 m(x) f^{-1} y = 0, \quad (5.78)$$

а його функцію Коші позначимо  $\tilde{K}(x, \alpha)$ . Незавжди переконалися, що функції Коші рівнянь (5.71) і (5.78) пов'язані формулою

$$K(x, \alpha) \equiv \tilde{K}(x, \alpha) f^{-1}(\alpha). \quad (5.79)$$

Підставивши її в (5.77), одержимо:

$$\tilde{K}'(c, a) \tilde{K}'(b, c) + \tilde{K}(c, a) \tilde{Y}'_0(b, c) \equiv \tilde{K}'(b, a), \quad (5.80)$$

де

$$\tilde{Y}'_0(x, \alpha) = p_1(\alpha) \tilde{K}'(x, \alpha) - \dot{\tilde{K}}'(x, \alpha) \quad (p_1 = f' f^{-1}). \quad (5.81)$$

З іншого боку, це ж співвідношення (5.80) матимемо, якщо продиференціюємо за аргументом  $x$  відповідну тотожність (вона, як і повинно бути, співпадає з (2.38))

$$\tilde{K}(x, \alpha) \equiv \tilde{Y}'_0(x, \beta) \tilde{K}(\beta, \alpha) + \tilde{K}(x, \beta) \tilde{K}'(\beta, \alpha) \quad (\alpha \leq \beta \leq x). \quad (5.82)$$

Відзначимо, що рівняння (5.75) можна застосовувати також до континуально-дискретних систем. В таких випадках обидві або одну з функцій Коші в (5.75) потрібно замінити на відповідні функції, побудовані за формулами (2.60)-(2.62).

Якщо замість розглянутої консолі матимемо складений з двох частин стержень, обидва кінці якого закріплені жорстко, то для побудови частотного рівняння потрібно лише другу граничну умову (5.69) замінити на  $y_2(b) = 0$ . Тоді після застосування формул (5.72)-(5.74) одержимо:

$$f_1(c) K'_1(c, a) K_2(b, c) - f_2(c) K_1(c, a) \dot{K}_2(b, c) = 0.$$

З цього рівняння, як і для консолі (див. (5.75)-(5.76)), у випадках  $c \rightarrow a$ ,  $c \rightarrow b$ ,  $K_1 \equiv K_2 \equiv K$  матимемо такі рівняння відповідно:

$$K_2(b, a) = 0, \quad K_1(b, a) = 0, \quad K(b, a) = 0. \quad (5.83)$$

Якщо стержні мають більше ділянок, то розглянутий варіант методу початкових параметрів можна записати в матричній формі. Зауважимо, що для обґрунтування останньої рівності (5.83) також можна застосовувати формули (5.79), (5.81)-(5.82).

# 6

## МЕТОД ЧАСТКОВОЇ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ТА ПРИКЛАДИ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

### 6.1 Рівняння руху в прямій і оберненій формах

При вивченні малих коливань консервативних механічних систем зі скінченною кількістю ступенів вільності доцільно використовувати диференційні рівняння руху в зусиллях або в переміщеннях, будуючи відповідні матриці впливу жорсткостей і податностей [8, 51]. Ці системи пересічно правлять за розрахункові моделі реальних об'єктів зі сталим розподілом параметрів. Визначальну роль в створенні таких моделей відіграє дискретизація. Тут методологія дискретизації за допомогою функції Коші та фундаментальних розв'язків (функцій впливу) узагальнюється на задачі про коливання та стійкість неоднорідних пружних систем з відокремлюваними змінними.

Розглянемо механічну систему з голономними двобічними ідеальними в'язями, яка за дії заданих навантажень перебуває в стані рівноваги. Положення системи визначатимемо узагальненими координатами  $q_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ), приймаючи, що в рівноважному стані  $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$ .

Навантаження можуть мати консервативні та неконсервативні складові; вважатимемо, що вони залежні тільки від положення системи. Тоді за довільних малих відхилень системи від стану рівноваги узагальнені сили  $Q_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) можна вважати лінійними однорідними функціями змінних  $q_j$ :

$$Q_i = - \sum_{j=1}^k c_{ij} q_j, \quad c_{ij} = - \left. \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right|_{q_1=q_2=\dots=q_k=0}. \quad (6.1)$$

Формально до співвідношень (6.1) можна дійти, розгортаючи функції  $Q_i(q_1, q_2, \dots, q_k)$  в околі точки  $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$  у ряд Тейлора і опускаючи в ньому нелінійні члени як малі вищого порядку, а також враховуючи при цьому, що в стані рівноваги  $Q_i(0, 0, \dots, 0) = 0$ .

Виведемо диференційні рівняння (в зусиллях або в переміщеннях) руху системи в околі стану рівноваги [51]. Позначимо через  $F_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) узагальнені сили, які потрібно прикласти до системи, щоб утримати її в рівновазі при малих переміщеннях. Згідно з принципом можливих переміщень

$$\bar{F}_i + Q_i = 0 \quad (i = \overline{1, k}). \quad (6.2)$$

Звідси, враховуючи (6.1), одержуємо:

$$F = Cq, \quad C = [c_{ij}], \quad (6.3)$$

де  $C$  – матриця жорсткості;  $F = (F_1, F_2, \dots, F_k)^T$  і  $q = (q_1, q_2, \dots, q_k)^T$  – відповідні матриці-стовпці;  $c_{ij}$  – коефіцієнти впливу жорсткості системи.

Вважаючи матрицю  $C$  неособливою ( $\det C \neq 0$ ), із (6.3) приходимо до альтернативного співвідношення

$$q = \beta F, \quad \beta = [\beta_{ij}]; \quad \beta = C^{-1}, \quad (6.4)$$

де  $\beta$  – матриця податності, а її елементи  $\beta_{ij}$  – коефіцієнти впливу податності системи.

Для консервативних систем ці матриці є симетричними, а якщо в системі діють неконсервативні параметричні навантаження (стежні сили, потік рідини чи газу тощо) – несиметричними [52-55].

Залежності (6.3) або (6.4) є умовами рівноваги механічної системи в будь-якому положенні, що визначається малими значеннями узагальнених координат. Величини (див. (6.2))  $F_i$  називають утримними, а  $Q_i$  – відновлювальними силами (походження цих назв пов'язане з розглядом стійких станів рівноваги консервативних систем).

Із (6.3) та (6.4) неважко одержати рівняння руху системи в околі вихідного рівноважного стану. Дійсно, вважаючи, що сили прикладені динамічно, та враховуючи узагальнені сили інерції, замість (6.3) матимемо:

$$F^\circ(t) = Cq, \quad F_i^\circ(t) = F_i(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (i = \overline{1, k}),$$

де  $F^\circ = (F_1^\circ, F_1^\circ, \dots, F_k^\circ)^T$ ,  $T$  – кінетична енергія системи (в малому околі положення рівноваги вона є додатно визначеною квадратичною формою з коефіцієнтами  $a_{ij}$ ). Звідси приходимо до рівнянь

$$A \frac{d^2 q}{dt^2} + Cq = F(t), \quad q = \beta \left( F(t) - A \frac{d^2 q}{dt^2} \right). \quad (6.5)$$

Тут  $A = [a_{ij}]$  – інерційна матриця.

Співвідношення (6.5) називають відповідно диференційними рівняннями руху системи в прямій формі чи в зусиллях, та в оберненій формі чи в переміщеннях [51]. Вони описують малі коливання системи, якщо досліджуваний стан рівноваги є стійким (за дії консервативних і неконсервативних навантажень).

## 6.2 Побудова матриць впливу податностей і жорсткостей

Знаходження коефіцієнтів податності  $\beta_{ij}$  проілюструємо на задачі про вільні крутні коливання пружного тонкого консольного вала круглого поперечного перерізу з жорсткими тонкими круглими дисками. Центри дисків збігаються з точками  $x_i$  осі вала.

Підставляючи в рівняння малих коливань і в граничні умови  $\varphi(x, t) = y(x) \exp \lambda t$  ( $\varphi$  – кут закручування;  $y = y(x)$  – його амплітудне значення,  $\lambda$  – характеристичний показник), одержуємо задачу

$$L[y] - \sum_{i=1}^k \alpha_i y(x_i) \delta(x - x_i) = 0; \quad (6.6)$$

$$y(a) = 0, \quad M(b) \equiv f(b) y'(b) = 0; \quad (6.7)$$

$$L[y] \equiv (f y')' - \lambda^2 \rho(x) J(x) y. \quad (6.8)$$

Тут  $\alpha_i = J_i \lambda^2$ ;  $J_i$  – момент інерції  $i$ -го диска;  $f = G J_k(x)$  – крутна жорсткість вала;  $l = b - a$  – його довжина;  $\rho(x)$ ,  $J(x)$  – густина матеріалу та полярний момент інерції поперечного перерізу. Масою вала поки що нехтуємо (проти маси дисків).

Розглянемо допоміжну задачу

$$(f y')' = -M_j \delta(x - x_j); \quad y(a) = 0, \quad f(b) y'(b) = 0; \quad (6.9)$$

$M_j$  – зовнішній крутний момент, прикладений у перерізі  $x = x_j$ .

Загальний розв'язок рівняння (6.9) має вигляд

$$y = C_0 K_{xa} + C_1 \dot{K}_{xa} - M_j \Phi_{xj}, \quad (6.10)$$

де

$$K_{xa} \equiv K(x, a) = \int_a^x \frac{ds}{f(s)}, \quad (6.11)$$

$$\Phi_{x_j} \equiv K_{x_j} \theta_{x_j}, \quad K_{x_j} = K(x, x_j), \quad \theta_{x_j} = \theta(x - x_j);$$

$C_0, C_1$  – довільні сталі. Підставляючи (6.10) у граничні умови (6.7), одержуємо розв'язок допоміжної задачі

$$y = M_j (K_{x_a} - \Phi_{x_j}). \quad (6.12)$$

Розглянемо співвідношення, які випливають із (6.4):

$$q_i = \beta_{i1} F_1 + \beta_{i2} F_2 + \dots + \beta_{ik} F_k \quad (i = \overline{1, k}).$$

Звідси бачимо, що  $\beta_{ij}$  – переміщення в точці  $x_i$ , яке зумовлене дією одиничної узагальненої сили, прикладеної в точці  $x_j$ . Із (6.12) одержуємо:

$$\beta_{ij} = K_{ia} = \int_a^{x_i} \frac{ds}{f(s)} \quad (x_j \geq x_i). \quad (6.13)$$

Якщо момент прикладено в точці  $x_i$ , то, використовуючи (6.11), (6.12), знаходимо:

$$\beta_{ji} = K_{ja} - K_{ji} = K_{ia} = \beta_{ij} \quad (x_j \geq x_i).$$

Зауважимо, що симетричність матриці податності консервативних пружних систем у загальному випадку впливає з відомої теореми взаємності Дж. Максвелла [51].

Отже, елементи матриці  $\beta$  можна визначати тут за єдиною формулою (6.13) для будь-якої допустимої крутної жорсткості  $f(x) > 0$  (очевидно, також і для східчастих стержнів). Тепер неважко записати диференціальне рівняння (6.5) руху системи в переміщеннях.

Щоб одержати рівняння руху цієї ж системи в зусиллях, необхідно задати матрицю жорсткості  $C$ . Її елементи можна визначити, обертаючи матрицю податності  $\beta$ , або розглядаючи таку допоміжну задачу:

$$(f y')' = - \sum_{i=1}^k F_i \delta(x - x_i); \quad y(a) = 0, \quad f(b) y'(b) = 0.$$

Цілком подібно можна будувати рівняння руху для задач з відокремлюваними змінними в складніших випадках (розглядаючи різні види коливань стержневих систем, пластин, оболонок і пружних тіл; зокрема тоді, коли наявні сталі та змінні в часі параметричні навантаження). При цьому, в разі потреби, можна враховувати також сили тертя та сили пружних в'язей, які пропорційні відповідно узагальненим швидкостям і переміщенням.

### 6.3 Застосовність методу часткової дискретизації до неперервно-дискретних та неперервних систем

Рівняння руху вигляду (6.5) можна використовувати для дослідження континуально-дискретних і континуальних систем. Дійсно, нехай у задачі (6.6)-6.8) розподілені параметри є набагато меншими від зосереджених, тобто

$$\int_a^b \rho(x) J(x) dx \ll \sum_{i=1}^k J_i .$$

Тоді в (6.8) можна знехтувати другим доданком. Функцію Коші в такому разі визначатиме вираз (6.11), а частотне рівняння можна записати в явному вигляді для довільного  $k$  (див. (5.30)):

$$1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i K_{ia} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i}^k \alpha_i \alpha_j K_{ia} K_{ji} + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k K_{1a} K_{21} \dots K_{k,k-1} = 0 .$$

Складаючи рівняння (6.5), можна враховувати й розподілену масу, дописуючи в (6.6) до  $J_i$  величини

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x) J(x) dx \quad (i = \overline{1, k+1}); \quad x_0 = a, \quad x_{k+1} = b . \quad (6.14)$$

Інший спосіб її враховування – введення додаткових дисків з моментами інерції (6.14), які зосереджені в деяких проміжних точках  $\tilde{x}_i$  ( $x_{i-1} < \tilde{x}_i < x_i$ ).

Важливо, що вводити параметри (6.14), застосовуючи тим самим часткову дискретизацію (жорсткість вала при цьому не підлягає дискретизації), можна і тоді, коли дисків в механічній системі як таких не існує ( $J_i = 0$ ).

Вибираючи в цьому випадку відповідним чином точки  $x_i$ , можна одержувати з потрібною точністю двобічні наближення до частот [57–60, 45]. Уперше таку можливість засвідчив Дж. П. Ден Гартог в задачі для однорідної струни [56]. У задачах про визначення дивергентних критичних значень можна дискретизувати розподілене навантаження.

Застосуємо коефіцієнти впливу (6.13) до аналогічної задачі для рівняння (6.6), в якому параметри  $\alpha_i$  визначаються так:

$$\alpha_i = J_i \lambda^2 + b_i \lambda + c_i \quad (i = \overline{1, k}) .$$

Тут  $b_i$  і  $c_i$  – коефіцієнти тертя та пружного зв'язку для  $i$ -го диска. Спираючись на викладене вище, запишемо рівняння малих вільних коливань системи в такому вигляді:



$$\sum_{j=1}^k \beta_{ij} v_j + q_i = 0 \quad (i = \overline{1, k}), \quad (6.15)$$

де

$$v_j = J_j \frac{d^2 q_i}{dt^2} + b_j \frac{dq_i}{dt} + c_j q_j \quad (j = \overline{1, k}). \quad (6.16)$$

У випадку вимушених коливань вихідне рівняння (6.6) буде неоднорідним, тобто матиме задану праву частину. Дискретизуючи її, одержуємо відповідну неоднорідну систему рівнянь вигляду (6.15), (6.16). Цю систему можна розв'язувати відомими добре опрацьованими методами [10, 14, 51].

Підставляючи в (6.15), (6.16)  $q_s = A_s \exp \lambda t$  ( $s = \overline{1, k}$ ), прийдемо до відповідного характеристичного рівняння задачі. Зокрема, якщо  $k=2$  та  $b_i=0$  ( $i=1, 2$ ), одержимо:

$$J_1 J_2 K_{1a} K_{21} \omega^4 - [(J_1 c_2 + J_2 c_1) K_{1a} K_{21} + J_1 K_{1a} + J_2 K_{2a}] \omega^2 + 1 + c_1 K_{1a} + c_2 K_{2a} + c_1 c_2 K_{1a} K_{21} = 0 \quad (\omega^2 = -\lambda^2). \quad (6.17)$$

Останнє співвідношення є одним з універсальних частотних рівнянь. Усі параметри системи можуть набувати тут довільних допустимих значень. Завдяки цьому можна дійти до загальних висновків про вплив різних чинників на власні частоти та форми коливань, встановлювати межі застосовності відповідних розрахункових формул тощо. Зауважимо, що в часткових випадках, коли параметри  $J_i$ ,  $c_i$ ,  $K_{1a}$ ,  $K_{21}$  прямують до нуля чи безмежності, або ж до якихось інших допустимих значень, із (6.17) можна вивести нові корисні співвідношення. Усі ці співвідношення для східчастих валів з кусково-сталими перерізами узгоджуються з результатами [10, 61], що одержані іншими способами. Істотним є те, що тут засвідчено можливість уникнути застосування умов спряження.

## 6.4 Малі поперечні коливання конічних стержнів

Проілюструємо метод часткової дискретизації на прикладі задачі про вільні поперечні коливання консолі змінного поперечного перерізу. Для коефіцієнтів впливу маємо формулу [45]

$$\beta_{ij} = -x_j \dot{K}(x_i, 0) - K(x_i, 0) = \int_0^{x_i} \frac{(x_i - s)(x_j - s)}{f(s)} ds \quad (i \leq j). \quad (6.18)$$

Звідси для кінцевого стержня, коли

$$K(x, \alpha) = \frac{(x - \alpha)^3}{6 f_0 (1 - \gamma x)^2 (1 - \gamma \alpha)^2} \quad (0 \leq \gamma \leq 1); \quad (6.19)$$

$$x_i = \frac{1}{2n}(2i + 1) \quad (i = \overline{0, n-1}) \quad (6.20)$$

( $\gamma$  – параметр конусності;  $\gamma = 0$  – циліндр,  $0 < \gamma < 1$  – зрізаний конус,  $\gamma = 1$  – повний конус), матимемо:

$$\beta_{ij} = \frac{x_i^2}{6 f_0 (1 - \gamma x_i)^2} [3x_j - x_i (2\gamma x_i + 1)]; \quad (6.21)$$

$$M_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x) dx = \frac{m_0 l}{3n} \left[ 3 - \frac{3\gamma}{n} (2j - 1) + \frac{\gamma^2}{n^2} (3j^2 - 3j + 1) \right]. \quad (6.22)$$

У випадку консолі з кусково-сталім перерізом із (6.18)-(6.20) виводимо формули [59]

$$\beta_{ij} = \left( \frac{l}{n} \right)^3 \left\{ \frac{1}{8f_i} \left( j - i + \frac{1}{3} \right) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{f_k} \left[ ij - k(i + j) + k^2 + \frac{1}{12} \right] \right\} \quad (i \leq j); \quad (6.23)$$

$$x_i = a_{i-1} + \frac{l}{2n} = \frac{l}{2n}(2i - 1), \quad a_i = \frac{i}{n}l \quad (i = \overline{1, n}). \quad (6.24)$$

Їх можна застосовувати і до консолей, переріз яких є неперервною функцією вісної координати.

Результати проведених обчислень основної частоти для  $\gamma = 1$  (кінцевий коловий стержень). з використанням найпростіших двосторонніх оцінок наведено в табл. 7 [45, 62]. Коефіцієнти відповідних частотних рівнянь визначалися за формулами

$$A_0 = 1; \quad A_1 = \sum_{i=1}^n M_i \beta_{ii}, \quad A_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n M_i M_j \begin{vmatrix} \beta_{ii} & \beta_{ij} \\ \beta_{ji} & \beta_{jj} \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j>i}^{n-1} \sum_{k>j}^n M_i M_j M_k \begin{vmatrix} \beta_{ii} & \beta_{ij} & \beta_{ik} \\ \beta_{ji} & \beta_{jj} & \beta_{jk} \\ \beta_{ki} & \beta_{kj} & \beta_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = M_1 M_2 \dots M_n \det [\beta]. \quad (6.25)$$

Таблиця 7 Результати обчислень основної частоти

$n$		2	4	6	8	10	20	50	100
1	$\underline{\Omega}_0^2$	41,687	61,811	68,761	71,434	72,681	74,312	74,312	74,813
	$\overline{\Omega}_0^2$	41,772	64,529	72,851	75,694	76,844	78,025	78,025	78,206
	$\Omega_{0cp}^2$	41,730	63,170	70,806	73,564	74,763	76,169	76,189	76,510
2	$\underline{\Omega}_0^2$	41,687	61,811	68,767	71,475	72,819	73,793	74,703	75,084
	$\overline{\Omega}_0^2$	41,772	64,530	72,861	75,769	77,092	78,178	78,358	78,658
	$\Omega_{0cp}^2$	41,730	63,170	70,814	73,622	74,956	75,985	76,530	76,871
3	$\underline{\Omega}_0^2$	13,467	37,247	55,085	64,133	68,466	74,303	74,303	74,788
	$\overline{\Omega}_0^2$	13,866	39,711	66,601	78,453	79,756	78,589	78,589	78,252
	$\Omega_{0cp}^2$	13,670	38,480	60,840	71,290	74,110	76,450	76,450	76,520

У графах 1, 2 і 3 табл. 7 записано значення основної частоти, обчислені відповідно за формулами (6.21)-(6.22), (6.18) (тут коефіцієнти впливу визначалися шляхом чисельного інтегрування), а також (6.23)-(6.24). Як бачимо, починаючи з  $n = 10$ , розглянуті три варіанти методу часткової дискретизації приводять до майже однакових середніх значень основної частоти (які відрізняються від точного значення  $a\omega_0^2 = 75,21$  [45, 62] менше, ніж на 1%). Обсяг обчислень є найменшим у першому варіанті, коли використовуються формули вигляду (6.21) і (6.22).

## 6.5 Приклад задачі про розгалуження форм рівноваги

Коли визначаються дивергентні значення, то можна дискретизувати розподілене навантаження. Розглянемо, наприклад, задачу

$$u'' + p(1-x)u = 0; \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0,$$

де

$$u = y'(x), \quad p = \frac{N_0}{f_0} l^3 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Вона виникає тоді, коли досліджуються стійкість пружної консолі під дією власної ваги [63, 44] або вільні коливання консолі з лінійно-змінним розподілом маси. Останнє дозволяє скористатися тут рівнянням (5.30) (після дискретизації функції  $1-x$ ). Тоді [59] для

$$x_i = \frac{1}{20}(2i-1), \quad \alpha_i = -\frac{p}{10}(1-x_i) \quad (i = \overline{1; 10})$$

перші три коефіцієнти характеристичного рівняння

$$a_0 - pa_1 + p^2a_2 - p^3a_3 + \dots = 0 \quad (6.26)$$

набувають значень

$$a_0 = 1; \quad a_1 = \frac{1}{2^2 n^3} \sum_{i=1}^n (2i-1)[2n-(2i-1)] = \frac{670}{4 \cdot 10^3};$$

$$a_2 = \frac{1}{2^3 n^6} \sum_{i=1}^{n-1} (2i-1)[2n-(2i-1)] \sum_{j=2}^n (j-i)[2n-(2i-1)] = \frac{89430}{4^2 \cdot 10^6} \quad (n=10).$$

Застосовуючи для визначення найменшого кореня рівняння (6.26) нижню оцінку [50], одержимо  $p_- = 7,79$ , що відрізняється від точного значення  $p_0 = 7,83$  [63] менше, ніж на 1%.

## 6.6 Деякі задачі для пружних пластин і оболонок

Розглянемо питання про коефіцієнти впливу  $\beta_{ij}$  для круглих і кільцевих пластинок сталої товщини (поперечні коливання). Диференційне рівняння відповідної допоміжної задачі вигляду (6.9) є таким:

$$u^{IV} + \frac{2}{r} u''' - \frac{1}{r^2} (1+2n^2) u'' + \frac{1}{r^3} (1+2n^2) u' - \frac{n^2}{r^4} (4-n^2) u = 0. \quad (6.27)$$

Це є рівняння Ойлера, фундаментальну систему розв'язків якого утворюють функції

$$r^n, \quad r^{-n}, \quad r^{2+n}, \quad r^{2-n}. \quad (6.28)$$

При цьому динамічний прогин в полярній системі координат  $(r, \varphi)$  зображено формулою

$$W(r, \varphi, t) = u(r) \cos n\varphi \cdot e^{i\omega t} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Функція Коші рівняння (6.27), побудована за формулою (1.9) з використанням (6.28), має вигляд

$$K(r, \alpha) = \frac{\alpha}{8n} \left[ \frac{\alpha^n r^{-n+2} - r^n \alpha^{-n+2}}{n-1} + \frac{\alpha^{-n} r^{n+2} - r^{-n} \alpha^{n+2}}{n+1} \right]. \quad (6.29)$$

Вона стає невизначеною, якщо  $n = 0$  або  $n = 1$ . Розкриваючи ці невизначеності, знаходимо

$$K(r, \alpha) = \frac{\alpha}{4} \left[ \alpha^2 - r^2 + (\alpha^2 + r^2) \ln \frac{r}{\alpha} \right]; \quad (6.30)$$

$$K(r, \alpha) = \frac{\alpha}{8} \left[ 2\alpha r \ln \frac{r}{\alpha} + \frac{1}{2} \left( \frac{r^3}{\alpha} - \frac{\alpha^3}{r} \right) \right]. \quad (6.31)$$

Нехай пластинка є суцільною, а її край – жорстко заправлений. Якщо  $n = 0$  (вісесиметричні коливання), то обмежений у нулі розв'язок допоміжної задачі має вигляд:

$$u = C_0 + C_1 r^2 - \frac{P_j}{r_j} \Phi(r, r_j), \quad (6.32)$$

де  $\Phi$  – фундаментальний розв'язок, в якому функція Коші визначена формулою (6.30). Підставляючи (6.32) в граничні умови

$$u(R) = 0, \quad u'(R) = 0,$$

знаходимо довільні сталі  $C_0, C_1$ , після чого одержуємо формулу

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2R} \left[ (R^2 - r_i^2) K'_{Rj} - 2R K_{Rj} \right]. \quad (6.33)$$

У випадку  $i = j = 1$  звідси, зокрема, визначаємо частоту власних коливань безмасової пластинки, яка несе скупчену масу  $M$  на колі  $r = r_1$ :

$$\frac{\omega^2}{D} = \frac{1}{\tilde{\rho} \beta_{11}}, \quad M = 2\pi r_1 \tilde{\rho} \quad (6.34)$$

( $\tilde{\rho}$  – лінійна густина "ребра",  $D$  – циліндрична жорсткість). Підставивши (6.30) у вираз (6.33), одержимо:

$$\beta_{11} = \frac{r_1}{2R} \left( \frac{1}{4} R^3 - \frac{1}{4} \frac{r_1^4}{R} - r_1^2 R \ln \frac{R}{r_1} \right). \quad (6.35)$$

Для пластинки, край якої закріплений шарнірно, маємо умови

$$u(R) = 0, \quad u''(R) + \nu R^{-1} u' = 0.$$

Поступаючи так само, як у випадку жорсткого защемлення, зокрема, знайдемо:

$$\begin{aligned} \beta_{11} = & \frac{r_1}{2(1+\nu)} \left[ \frac{3}{4} R^2 - r_1^2 \left( 1 - \ln \frac{R}{r_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{r_1^4}{R^2} + \nu \frac{1}{4} R^2 - r_1^2 \ln \frac{R}{r_1} - \frac{1}{4} \frac{r_1^4}{R^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

З формул (6.35) і (6.36), враховуючи залежності (6.34) і спрямовуючи  $\eta_1$  до нуля, одержуємо відомі формули для квадрата частоти у випадках, коли маса  $M$  зосереджена в центрі пластини ( $r = 0$ ) [10]:

$$\omega^2 = \frac{16\pi D}{MR^2}, \quad \omega^2 = \frac{16\pi D(1+\nu)}{MR^2(3+\nu)}.$$

Доцільно зробити такі зауваження:

1. Вдаючись до формул (6.29) – (6.31), що визначають функції Коші, неважко будувати коефіцієнти  $\beta_{ij}$  у складніших випадках (довільні значення  $n$ , пружно-закріплений край, пружне спірання зосереджених мас, наявність неперервно або східчасто розподіленої маси  $\rho(r)h$  та пружної основи з жорсткістю  $c(r)$  тощо);

2. Для кільцевих пластинок коефіцієнти  $\beta_{ij}$  визначаються цілком подібно (для довільних  $n = 0, 1, 2, \dots$  розв'язок допоміжної задачі, записаний з урахуванням (6.28) та (6.29) – (6.31), матиме чотири довільні сталі  $C_0, C_1, C_2, C_3$ , які знаходяться з чотирьох граничних умов, заданих попарно на краях  $r = r_0$  і  $r = R$ ; кільцевих пластинок стосується також зауваження 1);

3. Рівняння поперечних коливань круглої пластинки на пружній основі зі сталим коефіцієнтом жорсткості  $c = EhR^{-2}$  співпадає, як відомо, з рівнянням коливань пологої сферичної оболонки (в рамках технічної моментної теорії оболонок). Тому, визначивши частоту  $\omega_{ns}^2$  круглої пластинки, матимемо одночасно частоту  $\tilde{\omega}_{ns}^2$  відповідної пологої сферичної оболонки [10, 48]:

$$\tilde{\omega}_{ns}^2 = \omega_{ns}^2 + \frac{E}{\rho h} \left( \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots; \\ s = 1, 2, \dots \end{array} \right);$$

4. Для колових циліндричних оболонок зі сталим розподілом параметрів коефіцієнти  $\beta_{ij}$  визначати неважко, оскільки відповідні рівняння мають четвертий або восьмий порядок [64-66].

Вивчаючи вісесиметричні коливання круглої пластинки та циліндричної оболонки, товщини яких визначаються формулами

$$h(r) = h_0 r^{\frac{1}{3}q} \quad \text{та} \quad h(x) = h_0 x^s,$$

маємо відповідно рівняння [66, 67]:

$$r^4 W^{IV} + 2r^3(1+q)W''' + r^2(q^2 - 1 + q(1+\nu))W'' + r(1-q)(1-\nu q)W' - \frac{1}{D_0}\rho(r)\omega^2 r^{4-\frac{2}{3}q}W = 0, \quad (6.37)$$

$$x^4 W^{IV} + 65x^3 W''' + 3s(3s-1)x^2 W'' - \frac{1}{D_0}\rho(x)\omega^2 l^4 x^{4-2s}W = 0 \quad (6.38)$$

( $q$  і  $s$  – довільні дійсні параметри).

Нехай у цих рівняннях  $\omega = 0$ . Тоді неважко знайти фундаментальні системи розв'язків. Зокрема, якщо  $q = 1$ , то для (6.37) фундаментальну систему розв'язків складають функції

$$1, r, r^{c+\frac{1}{2}}, r^{-c+\frac{1}{2}} \quad \left( c = \frac{5}{4} - \nu \right),$$

а для (6.38) при довільних  $s$  – функції

$$1, x, x^{-3s}, x^{5-3s}.$$

Далі, як і вище, будемо функції Коші  $K(r, \alpha)$  і  $K(x, \alpha)$  та визначаємо коефіцієнти  $\beta_{ij}$  (для тих чи інших граничних умов). Це дає можливість, дискретизуючи функції  $\rho(r)$  та  $\rho(x)$ , отримати відповідні рівняння руху. Цілком так само є сенс поступати і у випадках невісесиметричних коливань.

Відзначимо, що даний спосіб застосовний також до конічних оболонок сталої товщини з нерозтяжним меридіаном [66], або до тих випадків, коли коливання є несиметричними та враховуються тільки нормальні складові сил інерції [68]. Наприклад, із (6.37), записуючи замість  $r$  змінну  $x$ , для  $q = 0$  і  $\omega = 0$  матимемо рівняння з відповідною головною частиною диференційного виразу, що не дискретизується; фундаментальна система розв'язків є такою:

$$1, x^2, \ln x, x^2 \ln x$$

(функція  $K(x, \alpha)$  збігається з (6.30)). При цьому коефіцієнт біля  $W$ , який потрібно дискретизувати, визначається формулою [66]

$$-\frac{1}{D}\omega^2 \rho h l^4 + \frac{k^2}{x^2} \quad \left( k^2 = \frac{12l^2}{n^2 \operatorname{tg}^2 \tilde{\alpha}} \right).$$

Очевидно, і тут розподілену масу можна вважати змінною ( $\rho = \rho(x)$ ).

## 6.7 Радіальні коливання куль і циліндрів

Основним для задачі про радіальні коливання куль та циліндрів можна вважати рівняння [69]

$$\left( \frac{\lambda(r) + 2\mu(r)}{r^2} y' \right)' + (\omega^2 \rho(r)r^{-2} - 4\mu'(r)r^{-3})y = 0, \quad (6.39)$$

що розглядається за таких умов:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-2} y < \infty, \quad \left( \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} y' - \frac{4\mu'}{r^3} \right) \Big|_{r=R} = 0. \quad (6.40)$$

Тут  $\lambda = \lambda(r)$  і  $\mu = \mu(r)$  – параметри Ляме;  $\rho = \rho(r)$  – питома маса;  $\omega$  – частотний параметр;  $r$  – радіальна змінна ( $0 \leq r \leq R$ );  $R$  – радіус кулі;  $y = y(r)$  – амплітуда радіального переміщення.

Розглянемо багат шарову суцільну кулю, параметри Ляме якої є східчато-сталими функціями. Дискретизуючи відповідно розподілену масу та диференціюючи функцію  $\mu(r)$ , маємо:

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^n \rho_i \delta(r - r_i), \quad \mu'(r) = \sum_{i=1}^n (\mu_i - \mu_{i-1}) \delta(r - r_i)$$

$$(0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < R). \quad (6.41)$$

При цьому розв'язок рівняння (6.39), що задовольняє першу з умов (6.40), визначається за формулою (2.62). Підставивши цей розв'язок у другу умову (6.40), одержуємо частотне рівняння задачі в такому вигляді

$$1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Psi_i + \dots + \alpha_1 \dots \alpha_n K_{21} \dots K_{n,n-1} -$$

$$- \frac{4\mu(R)}{R^3} \left( \Psi_R + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Psi_i K_{Ri} + \dots + \alpha_1 \dots \alpha_n \Psi_1 K_{21} \dots K_{Rn} \right) = 0. \quad (6.42)$$

Тут

$$\alpha_i = \omega^2 \rho_i r_i^{-2} - 4(\mu_i - \mu_{i-1}) r_i^{-3}, \quad \rho_i = \frac{M_i}{4\pi r_i^2}, \quad \Psi_i = \int_0^{r_i} \frac{s^2 ds}{\lambda(s) + 2\mu(s)},$$

$$K_{Ri} = K(R, r_i). \quad (6.43)$$



Для прикладу аналізуватимемо найпростішу модель (коли  $n=1$ ). В такому випадку

$$\mu(r) = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\theta(r - r_1) \quad (r_1 \leq R); \quad (6.44)$$

$$K_{R1} = \frac{1}{3} \Lambda_1 R^3 (1 - c), \quad \Psi_{R1} = \frac{1}{3} \Lambda_0 r_1^3 + K_{R1},$$

$$\Lambda_j = \frac{1}{\lambda_j + 2\mu_j} \quad (j = 0; 1), \quad c = \left(\frac{r_1}{R}\right)^3. \quad (6.45)$$

При цьому із рівняння (6.42) знаходимо:

$$\omega^2 = \frac{12\pi r_1}{M_1} \left( K_0 + \frac{4\mu_1 K_1 (1 - c)}{3K_1 + 4c\mu_1} \right) \text{ або } \omega^2 = \frac{12\pi r_1}{M_1} \left[ K_0 + \frac{2E_1(1 - c)}{3(1 + \nu_1 + 2c(1 - 2\nu_1))} \right], \quad (6.46)$$

де

$$K_j = \frac{1}{3} \frac{E_j}{1 - 2\nu_j} \quad (j = 0; 1) \quad (6.47)$$

( $K_0, K_1$  – модулі об'ємного стискування внутрішнього та зовнішнього шарів). Якщо  $K_0 \equiv K_1$ , то формули (6.46) можна записати так:

$$\omega^2 = \frac{12\pi r_1 E(1 - \nu)}{M_1 (1 - 2\nu) [1 + \nu + 2c(1 - 2\nu)]} \quad (6.48)$$

(останнє рівняння неважко одержати також безпосередньо з рівняння (6.42), вважаючи однаковими пружні сталі шарів).

Наведені формули дозволяють оцінювати вплив неоднорідності (матеріалу шарів і розташування маси) на основну частоту. Зокрема, позначаючи

$$\omega^2 \Big|_{\nu=0} = A; \quad \omega^2 \Big|_{\nu=0,49} = B; \quad \frac{B}{A} = C, \quad (6.49)$$

із (6.48) знаходимо

$$C \xrightarrow{c \rightarrow 0} 34; \quad C \xrightarrow{c \rightarrow 0} 98 \quad \left( c = \left(\frac{r_1}{R}\right)^3 \right). \quad (6.50)$$

Якщо  $M_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  і  $c \rightarrow 1$ , тобто коли на поверхні кулі розподілена рівномірно вся маса, яка дорівнює масі відповідної однорідної кулі, то з (6.48) або з (6.46) маємо [2, 59]:

$$\omega^2 = \frac{3E_0}{(1 - 2\nu_0)\rho R^2}. \quad (6.51)$$

Вважаючи модуль зовнішнього шару  $K_1$  досить великим, із (6.46) одержуємо

$$\omega^2 \approx \frac{12\pi\eta_1}{M_1} K_0 \left( 1 + \frac{2E_1(1-2\nu_0)}{E_0(1+2\nu_1)}(1-c) \right). \quad (6.52)$$

Звідси видно, що частота вільних коливань істотно залежатиме від пружних сталей, коли  $E_1 \gg E_0$ ,  $\nu_0 \neq 0,5$ ,  $0 < c < 1$ .

Розглянемо тепер порожнисту кулю (кульовий шар)  $a \leq r \leq R$ . Частотні рівняння можна записати так:

$$\begin{aligned} \dot{F}(R, a) + \frac{e(a)}{f(a)} F(R, a) &= 0, \quad F(R, a) = 0, \\ \dot{K}(R, a) + \frac{e(a)}{f(a)} K(R, a) &= 0, \quad K(R, a) = 0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Тут

$$\begin{aligned} F(r, \alpha) &= f(r)K'(R, \alpha) - 4 \frac{\mu(R)}{R^3} K(R, \alpha), \\ F(R, \alpha) &= f(R)K'(R, \alpha) - e(R)K(R, \alpha) \end{aligned} \quad (6.54)$$

( $K(R, \alpha)$  – функція Коші). Перше з цих рівнянь відповідає вільним поверхням кульового шару; друге – нерухомій внутрішній поверхні і вільній зовнішній; третє – навпаки; четверте – обидвом нерухомим ( $y(a) = y(R=0)$ ).

Якщо кульовий шар має ще й маси, зосереджені на поверхнях  $r = r_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то відповідні частотні рівняння одержимо із (6.53), замінивши функцію  $K(R, \alpha)$  на функцію  $Q(R, \alpha)$ .

Зокрема, підставляючи в (6.54) функцію

$$Q = K_{r\alpha} + \alpha_1 K_{1\alpha} K_{r1},$$

матимемо для випадку  $n = 1$  такі рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{F}_Q(R, a) + \frac{e(a)}{f(a)} F_Q(R, a) &= 0, \quad F_Q(R, a) = 0, \\ \dot{Q}(R, a) + \frac{e(a)}{f(a)} Q(R, a) &= 0, \quad Q(R, a) = 0, \end{aligned} \quad (6.55)$$

де

$$F_Q(r, \alpha) = f(r)[K'(r, \alpha) + e(r)K(r, \alpha)] + \alpha_1 [f(r)K_{1\alpha}K'_{r1} + e(r)K_{1\alpha}K_{r1}]. \quad (6.56)$$

Спрямовуючи тут розподілену масу кульового шару до нуля, одержимо відповідні рівняння вигляду (6.42). Тому висновки та формули (6.46)-(6.52) і подібні до них зберігаються також для континуально-дискретних систем за умови, що розподілена маса шарів значно менша від мас на поверхнях.

Із (6.55)–(6.56) при  $M_1 \rightarrow \infty$  відповідно знаходимо:

$$\omega^2 F(R, r_1) \left[ \dot{K}(r_1, a) + \frac{e(a)}{f(a)} K(r_1, a) \right] = 0, \quad \omega^2 K(r_1, a) F(R, r_1) = 0;$$

$$\omega^2 K(R, r_1) \left[ \dot{K}(r_1, a) + \frac{e(a)}{f(a)} K(r_1, a) \right] = 0, \quad \omega^2 K(R, r_1) K(r_1, a) = 0. \quad (6.57)$$

Звідси, беручи до уваги рівняння (6.53), щодо частот коливних процесів можна зробити низку корисних висновків якісного рівня. Наприклад, звертаючись до першого рівняння (6.57), можна висувати таке: якщо кульовий шар, поверхні якого  $r = a$  та  $r = R$  – вільні, має достатню велику масу  $M_1$ , розподілену рівномірно на поверхні  $r = r_1$ , то найменша частота  $\omega^2$  коливання кульового шару є близькою до нуля, а всі інші – близькими до частот із двох характерних множин, перша з яких відповідає кулі з вільною зовнішню поверхнею та нерухомою внутрішньою, друга – кулі з нерухомою зовнішньою та вільною внутрішньою поверхнею.

Із (6.57) у випадках  $r_1 \rightarrow a$  та  $r_1 \rightarrow R$  приходимо до рівнянь, що узгоджуються з (6.53)–(6.56), а також між собою (наприклад, із першого і другого рівнянь (6.57) при  $r_1 \rightarrow a$  маємо:  $\omega^2 F(R, a) = 0$ ).

Для розглянутих задач доцільно мати також коефіцієнти впливу податностей  $\beta_{ij}$ . Наприклад, з допоміжного рівняння

$$(f(r) y')' = -P_j \delta(r - r_j)$$

з умовами (6.49), беручи до уваги співвідношення (6.39)–(6.45), для суцільної кулі одержуємо

$$\beta_{ij} = \frac{1 + eK(R, r_j)}{1 + e\gamma_0(R)} y_0(r_i) \quad (r_i \leq r_j).$$

Тут

$$K(r, \alpha) = \int_{\alpha}^r \frac{ds}{f(s)}; \quad y_0(r) = \int_0^r \frac{ds}{f(s)}; \quad \beta_{ji} = \beta_{ij}.$$

Вдаючись до матриці податності  $\beta$ , можна записати відповідні рівняння руху (6.5) і визначити величини (6.25). Для подальшого дослідження вільних чи вимушених коливань і знаходження амплітудних значень переміщень і напружень можна застосовувати відомі методи.

## 7.1 Універсальне рівняння пружної лінії балки

Диференційне рівняння поздовжньо-поперечного згину стержня на пружній основі можна записати так:

$$L[y] \equiv (fy'')' + p(Ny') + c(x)y = G(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad (7.1)$$

де  $f = EJ(x) > 0$  – жорсткість на згин;  $p$  – параметр;  $N(x)$  – поздовжня сила в поперечному перерізі стержня;  $c(x)$  – коефіцієнт пружності основи;  $G(x)$  – поперечне навантаження, визначуване відповідно до рис. 3 за формулою [70]

$$G(x) = \sum_{i=1}^r \{ q_i(x)[\theta(x-x_i) - \theta(x-x_i-l_i)] + P_i \delta(x-x_i) + M_i \delta'(x-x_i) \}; \quad (7.2)$$

$q_i(x)$  – поперечне навантаження на ділянці  $x_i < x < x_i + l_i$ ;  $P_i$  і  $M_i$  – величини, що визначають зосереджені в перерізі  $x = x_i$  ( $i = \overline{1, r}$ ,  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_r < b$ ) силу і момент.

Нехай  $K(x, a)$  – функція Коші, що відповідає рівнянню (7.1), в якому  $G(x)$  визначається за формулою (7.2). Тоді загальний розв'язок цього рівняння, визначений з використанням нормальних фундаментальних функцій і формул (2.2), (2.6), має такий вигляд:

$$y = y_0 Y_0(x, a) + y_1 Y_1(x, a) + y_2 Y_2(x, a) + y_3 Y_3(x, a) + y_*(x, a). \quad (7.3)$$

Тут

$$y_0 = y(a), \quad y_1 = y'(a), \quad y_2 = y''(a), \quad y_3 = y'''(a);$$

$$y_*(x, a) = \sum_{i=1}^r [\theta(x-x_i)F_i(x, x_i) - \theta(x-x_i-l_i)F(x, x_i+l_i)] +$$

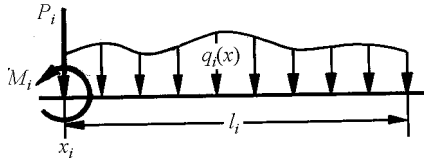


Рисунок 3 Схема поперечного навантаження стержня на пружній основі.

$$+ \sum_{i=1}^r \left[ P_i \Phi(x, x_i) - M_i \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=x_i} \right], \quad (7.4)$$

де

$$F_i(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \Phi(x, \tau) q_i(\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, r}).$$

Формула (7.3) відтворює універсальне рівняння пружної лінії стержня.

## 7.2 Окремий випадок рівняння пружної лінії

Якщо  $N(x) \equiv 0$ , то із співвідношень (2.20), враховуючи залежності

$$p_1(x) = 2f' f^{-1}, \quad p_2(x) = f'' f^{-1},$$

одержимо:

$$\begin{aligned} Y_0 &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} (f(\alpha) \ddot{K}), & Y_1 &= f(\alpha) \ddot{K}, \\ Y_2 &= f'(\alpha) K - f(\alpha) \dot{K}, & Y_3 &= f(\alpha) K. \end{aligned}$$

Якщо, до того ж,  $c(x) \equiv 0$ ,  $a = 0$ ,  $b = l$ , то рівняння пружної лінії можна записати так:

$$y = y(0) + y'(0)x + M(0) \dot{K}(x, 0) + Q(0) K(x, 0) + y_*(x, 0), \quad (7.5)$$

де

$$K(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{(x-s)(s-\alpha)}{f(s)} ds,$$

а початкові параметри  $y(0)$ ,  $y'(0)$ ,  $M(0)$ ,  $Q(0)$  відповідають послідовно прогинові, куту повороту перерізу стержня, згинальному моменту та перерізальній силі на лівому кінці балки  $x = 0$ ; ці параметри можна вважати також і довільними сталими. Зазначимо, що співвідношення (7.5) було встановлено Ш. Е. Мікеладзе [71], але без використання функцій  $K(x, \alpha)$  і  $\Phi(x, \alpha)$ .



Таким чином, для визначення двох сталих  $y_0 = y(0)$  і  $y'_0 = y'(0)$  та  $n$  реакцій  $R_j$  пружних опор маємо систему цілком відповідно  $n + 2$  лінійних алгебричних рівнянь (7.10)–(7.12). Якщо яка-небудь з опор є жорсткою, то в (7.12) необхідно формально покласти відповідну з величин  $c_j$  безмежно великою; наприклад, якщо абсолютно жорсткою є перша опора, то, природно, в (7.12) слід покласти  $c_1 \rightarrow \infty$ .

Розглядаючи визначники отриманої системи рівнянь, послідовно для  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$  знаходимо:

$$\Delta_2 = (a_2 - a_1)^2, \quad \Delta_3 = \Phi_{21}(a_3 - a_2)^2 + \Phi_{32}(a_2 - a_1)^2,$$

$$\Delta_4 = \Phi_{21}\Phi_{32}(a_4 - a_3)^2 + \Phi_{21}\Phi_{43}(a_3 - a_2)^2 + \Phi_{32}\Phi_{43}(a_2 - a_1)^2. \quad (7.13)$$

Отже,  $\Delta_n > 0$  ( $n = 2, 3, 4$ ; з однаковим висновком обчислення можна провадити і для більших  $n$ ). Тому розглянута задача має єдиний розв'язок для випадків всіх пружних опор, поєднання пружних і жорстких опор, всіх жорстких опор.

Для прикладу розглянемо балку на трьох пружних опорах, коли і  $f = EJ = \text{const}$ , і  $q = \text{const}$  (рис. 4). Нехай  $a_1 \rightarrow 0$ ,  $a_2 = L$ ,  $a_3 = 2L$ . Тоді система рівнянь (7.10)–(7.12) набуває вигляду:

$$2R_1 + R_2 = 2qL, \quad R_1 + R_2 + R_3 = 2qL; \quad (7.14)$$

$$y_0 - R_1 c_1^{-1} = 0, \quad y_0 + y'_0 L - \frac{1}{6} R_1 L^3 (EJ)^{-1} - R_2 c_2^{-1} = -\frac{qL^4}{24EJ},$$

$$y_0 + y'_0 2L - \frac{R_1 (2L)^3}{6EJ} - \frac{R_2 L^3}{6EJ} - R_3 c_3^{-1} = -\frac{q(2L)^4}{24EJ}.$$

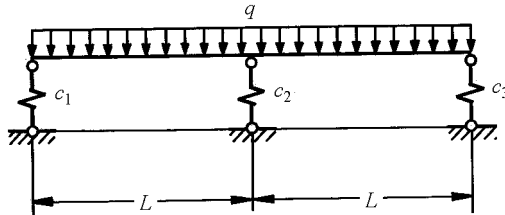


Рисунок 4 Приклад балки на трьох опорах зі сталим розподіленням навантаженням.

З рівнянь (7.14) випливає, що  $R_1 = R_3$ . Усуваючи сталі  $y_0$  і  $y'_0$ , знаходимо

$$R_1 = R_3 = qL \frac{\frac{1}{4}\beta + 4c_2^{-1}}{c_1^{-1} + 4c_2^{-1} + c_3^{-1} + \frac{2}{3}\beta},$$

$$R_2 = 2qL \frac{c_1^{-1} + c_3^{-1} + \frac{5}{12}\beta}{c_1^{-1} + 4c_2^{-1} + c_3^{-1} + \frac{2}{3}\beta}, \quad (7.15)$$

де  $\beta = L^3(EJ)^{-1}$ .

Звідси, розглядаючи окремі більш конкретні випадки, легко дійти до відомих результатів. Зокрема, якщо всі опори є жорсткими ( $c_i \rightarrow \infty$ ), то

$$R_1 = R_3 = \frac{3}{8}qL, \quad R_2 = \frac{5}{4}qL. \quad (7.16)$$

Для абсолютно жорсткого стержня на пружних опорах ( $\beta = 0$ ) одержуємо:

$$R_1 = R_3 = qL \frac{4c_2^{-1}}{c_1^{-1} + 4c_2^{-1} + c_3^{-1}}, \quad R_2 = 2qL \frac{c_1^{-1} + c_3^{-1}}{c_1^{-1} + 4c_2^{-1} + c_3^{-1}}.$$

Для випадку  $EJ \rightarrow \infty$  та  $c_2 \rightarrow \infty$ , маємо:  $R_1 = R_3 \rightarrow 0$ ,  $R_2 \rightarrow 2qL$ ; якщо ж  $EJ \rightarrow \infty$ ,  $c_1 = c_3 \rightarrow \infty$ , то  $R_1 = R_3 \rightarrow qL$ ,  $R_2 \rightarrow 0$ . Зауважимо, що на підставі рівнянь (7.10)-(7.14) можна отримувати умови застосовності ще більш простих рівнянь або формул.

Якщо, наприклад,  $c_1 = c_3 = \infty$ ,  $c_2 = c$ , то вдаючись до (7.15), обчислимо:

$cl^3(EJ)^{-1}$	0	0,1	0,5	1	5	1000	$\infty$
$R_1(qL)^{-1}$	1	0,99	0,95	0,9	0,55	0,38	0,375
$R_2(qL)^{-1}$	0	0,02	0,1	0,2	0,9	1,24	1,25

Отже, якщо виконуються нерівності  $0 < cl^3(EJ)^{-1} < 0,1$ , то впливом проміжної пружної опори на реакції  $R_1$  і  $R_2$  можна знехтувати; якщо ж  $cl^3(EJ)^{-1} > 10^3$ , то пружну опору можна розглядати як абсолютно жорстку і визначати реакції за формулами (7.16).



## 7.4 Балка з проміжною пружною опорою: аналіз пружної лінії

Розглянемо стержень (балку), модель якого зображена на рис. 5. Визначаючи пружну лінію стержня, спиратимемося на такий формалізований опис:

$$L[y] = -R\delta(x - x_2) + G\delta(x - x_3); \quad (7.17)$$

$$y(a) = 0, \quad (fy'')|_{x=a} = 0, \quad cy'(x_2) = R; \quad (7.18)$$

$$(fy'')|_{x=b} = 0, \quad [(fy'')' + Py']|_{x=b} = 0. \quad (7.19)$$

(тут використано такі самі позначення, як і у рівнянні (7.1); сила  $P$  вважається консервативною). Розв'язок рівняння (7.17) визначається за формулою

$$y = C_0 + C_1(x - x_1) + C_2K_{x1} + C_3\dot{K}_{x1} - R\Phi_{x2} + G\Phi_{x3}, \quad (7.20)$$

де

$$x_1 = a, \quad K(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(t)}(x - t)U(t, \alpha)dt, \quad (7.21)$$

а функція  $U = U(x, \alpha)$  є розв'язком задачі [44]

$$U'' + \frac{1}{f(x)}PU = 0, \quad U(\alpha) = 0, \quad U'(\alpha) = 1.$$

З формул (3.24)–(3.25) неважко одержати такі співвідношення:

$$U(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-P)^k u_k(x, \alpha); \quad (7.22)$$

$$u_k(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{x-t}{f(t)} u_{k-1}(t, \alpha)dt, \quad u_0(x, \alpha) = x - \alpha, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.23)$$

Використовуючи (7.20)–(7.23), знаходимо:

$$fy'' = C_2U_{x1} + C_3\dot{U}_{x1} - RU_{x2}\theta_{x2} + GU_{x3}\theta_{x3}$$

(надалі  $x_3 = b$ ).

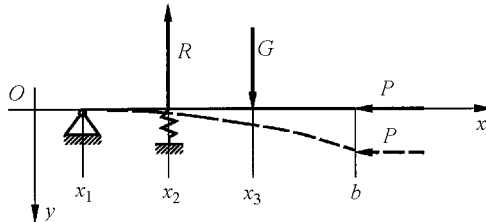


Рисунок 5 Схема стержня довільного поперечного перерізу з проміжною опорою при поздовжньо-поперечному згині.

Беручи до уваги (7.20), (7.21) і (7.18), доходимо висновку, що  $C_0 = 0$  і  $C_3 = 0$ . Підставляючи далі (7.20) в умови (7.19), матимемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} C_2 U_{b1} - R U_{b2} &= 0, \\ C_1 P + C_2 (U'_{b1} + P K'_{b1}) - R (U'_{b2} + P K'_{b2}) &= -G, \\ C_1 (x_2 - a) + C_2 K_{21} - R c^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{G}{\Delta(x_2 - a)} \left( c^{-1} U_{b1} - K_{21} U_{b2} \right), \\ C_2 &= \frac{G}{\Delta} U_{b2}, \quad R = \frac{G}{\Delta} U_{b1}, \end{aligned}$$

де

$$\Delta = U_{b1} U'_{b2} - U'_{b1} U_{b2} + P \left[ U_{b2} \left( K'_{b2} - \frac{1}{c(x_2 - a)} \right) - U_{b2} \left( K'_{b1} - \frac{K_{21}}{c(x_2 - a)} \right) \right]. \quad (7.24)$$

Із порівняння ряду (7.22) з аналогічним рядом для функції Коші  $K(x, \alpha)$ , відповідної рівнянню (7.17) випливає, що

$$K(x, \alpha) \equiv \frac{1}{P} [(x - \alpha) - U(x, \alpha)].$$

Завдяки цьому формулу (7.24) можна спростити до такого вигляду

$$\Delta = U_{ba} - U_{b2} + PD, \quad (7.25)$$

де

$$D = \frac{1}{x_2 - a} \left( U_{b2} K_{2a} - c^{-1} U_{ba} \right). \quad (7.26)$$

Наведені співвідношення дозволяють записати розв'язок задачі (7.17)-(7.19):

$$y(x) = \frac{G}{\Delta} \left\{ -(x - a)D + U_{b2} K_{xa} - U_{ba} \Phi_{x2} \right\} + G \Phi_{x3}, \quad (7.27)$$

який визначає пружну лінію балки. Звідси, кладучи  $x = b$ , одержуємо прогин кінця стержня

$$y(b) = \frac{G}{\Delta} \left\{ -(b - a)D + \frac{1}{P} [(b - \alpha)U_{b2} - (b - x_2)U_{ba}] \right\}. \quad (7.28)$$

Відзначимо, що найменше значення розв'язку рівняння  $\Delta(P) = 0$ , в якому  $\Delta$  визначене за формулами (7.25)-(7.26), відповідає ойлеровій критичній силі:  $P = P_e$ . Очевидно, що у випадку  $P \rightarrow P_e$  співвідношення (7.27) і (7.28) втрачають сенс (оскільки, як і повинно бути,  $y \rightarrow \infty$ ). Якщо сила  $P$  є розтяжною, то в рівнянні (7.17) знак “+” біля  $P$  потрібно замінити на “-”; у цьому випадку  $\Delta(P) \neq 0$ .

Якщо  $f(x) = f_0 = \text{const}$ , то

$$U(x, \alpha) = k^{-1} \sin k(x - \alpha); \quad k^2 = Pf_0^{-1},$$

$$K(x, \alpha) = (k^2 f_0)^{-1} [x - \alpha - k^{-1} \sin k(x - \alpha)]$$

і всі наведені вище співвідношення значно спрощуються.

Розглянемо тепер деякі часткові випадки. Нехай  $c \rightarrow \infty$ , тобто опора в точці  $x = x_2$  є абсолютно жорсткою. Тоді в формулах (7.25)-(7.28)

$$D = \frac{1}{x_2 - a} U_{b2} K_{2a}. \quad (7.29)$$

Зауважимо, що коли  $c \rightarrow \infty$  і  $x_2 \rightarrow b$ , то

$$D \rightarrow \infty, \quad \Delta \rightarrow U_{ba}, \quad y(b) \rightarrow 0.$$

При  $c \rightarrow \infty$ ,  $x_2 \rightarrow a$  після розкриття невизначеності типу  $\frac{0}{0}$  одержимо:

$$y(b) \rightarrow -\frac{1}{U_{ba} P} [(b-a) \dot{U}_{ba} + U_{ba}]. \quad (7.30)$$

Для випадку  $P \rightarrow 0$  (беручи до уваги, що  $\dot{U}_{ba} \rightarrow -1$ , і враховуючи відповідні формули) знаходимо:

$$y(b) \rightarrow \frac{1}{P} [-(b-a) - P \dot{u}_1(b-a) \dots + b-a - P \dot{u}_1 + \dots] \rightarrow [-(b-a) \dot{u}_1 - u_1]$$

і, отже

$$y(b) \rightarrow \int_a^b \frac{1}{f(s)} (b-s)^2 ds. \quad (7.31)$$

Залежності (7.30)-(7.31) узгоджуються з відомими [44].

Якщо  $P = 0$ , то

$$U(x, \alpha) = x - \alpha, \quad K(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(s)} (x-s)(s-\alpha) ds;$$

$$\Delta = x_2 - a, \quad D = D_0 = \frac{1}{x_2 - a} [(b-x_2) K_{2a} - c^{-1} (b-a)].$$

У цьому випадку прогин кінця стержня ( $x = b$ ), визначений із (7.28), є таким:

$$y(b) = \frac{G}{x_2 - a} [-(b-a)(D_0 + K_{b2}) + (b-x_2) K_{ba}].$$

Звідси для випадку  $f(x) = f_0 = \text{const}$ , беручи до уваги формулу

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{6} f_0^{-1} (x - \alpha)^3,$$

одержуємо (для  $a = 0$  і  $b = l$ )

$$y(l) = G \left[ l^2 c^{-1} x_2^{-2} + \frac{1}{3} l(l - x_2)^2 f_0^{-1} \right].$$

Якщо  $c \rightarrow \infty$ , то

$$y(l) \rightarrow \frac{1}{3f_0} Gl(l - x_2)^2,$$

і для  $x_2 \rightarrow 0$  та  $x_2 \rightarrow l$  одержуємо відповідно:

$$y(l) \rightarrow \frac{Gl^3}{3f_0}, \quad y(l) \rightarrow 0,$$

що узгоджується з формулами (7.31) і (7.29). Перша з цих формул засвідчує, що дві безмежно близькі шарнірні опори є рівноцінними жорсткому закріпленню. Цей висновок, як видно із формул (7.30) і (7.31), є справедливим також і для стержня змінного поперечного перерізу.

## 7.5 Балка з проміжною пружною опорою: критичні значення стискувальної сили

Як зазначалося вище, ойлерові критичні значення сил можна визначати, порівнюючи до нуля вираз (7.25). Після використання зображення (7.22) та подібного ряду для функції  $K(x, \alpha)$  (див. (7.21)), одержимо рівняння  $\Delta(P) = 0$  у вигляді ряду за параметром  $P$ :

$$\Delta \equiv a_0 - Pa_1 + P^2 a_2 - \dots = 0.$$

Нижню  $P_-$  та верхню  $P_+$  оцінки критичного значення  $P_e$  стискувальної сили зручно визначати, застосовуючи відомі оцінки С. А. Бернштейна [72, 44, 50]. Найпростіші з них обчислюються за формулами

$$P_- < P_e < P_+,$$

$$P_- = a_0(a_1 - 2a_0 a_2)^{-\frac{1}{2}}, \quad P_+ = 2a_0 \left[ a_1 + (a_1 - 4a_0 a_2)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} \quad (7.32)$$

(маючи ще два коефіцієнти –  $a_3$  та  $a_4$ , можна застосовувати дещо складніші оцінки [50, 72] і обчислити значення  $P_-$  та  $P_+$ , які між собою відрізняються лише частками відсотка [44]).

Якщо, наприклад, жорсткість консолі визначається за формулою

$$f(x) = EJ_0 e^{-v\zeta} \quad \left( \zeta = \frac{x}{l} \right),$$

то

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{v^2} \left( e^{v\zeta} - v\zeta - 1 \right) \Big|_{\zeta=1},$$

$$a_2 = \frac{1}{4v^4} \left( e^{2v\zeta} + 4e^{v\zeta} - 4v\zeta e^{v\zeta} - 2v\zeta - 5 \right) \Big|_{\zeta=1}. \quad (7.33)$$

Результати обчислень оцінок за формулами (7.32) є такими:

$v$	0	1	-1	2	-2	10	-10	-100
$P_-$	2,45	1,76	3,26	1,19	4,07	0,0064	11,66	101,53
$P_+$	2,54	1,86	3,30	1,29	4,13	0,0069	11,68	101,53

Як бачимо, параметр  $v$  вельми помітно впливає на критичні значення сил.

Із формул (7.33) і (7.32) одержуємо такі асимптотичні вирази: якщо  $v \rightarrow \infty$ , то  $P_- \rightarrow \sqrt{2} v^2 e^{-v}$  і  $P_+ \rightarrow 2v^2 e^{-v}$ ; якщо  $v \rightarrow -\infty$ , то  $P_-, P_+ \rightarrow |v|$ . Зокрема, при  $v \leq -100$  можна вважати, що  $P_e = |v|$ .

Відзначимо, що цілком аналогічно можна обчислювати значення  $P_-$  та  $P_+$  і для стержнів східчато-змінного перерізу. Нехай, наприклад,

$$f(x) = EJ_0 \left[ 1 + \left( d e^{-v\zeta} - 1 \right) \theta(\zeta - \zeta_1) \right], \quad d = \frac{EJ_0}{EJ_1}.$$

Тоді

$$\tilde{a}_0 = 1, \quad \tilde{a}_1 = \frac{1}{2} \zeta_1 (2 - \zeta_1) + d a_1 \Big|_{\zeta=1-\zeta_1},$$

$$\tilde{a}_2 = \frac{1}{24} \zeta_1^3 (4 - 3\zeta_1) + \frac{d}{2v^3} \left[ e^{v(1-\zeta_1)} (2v\zeta_1 - v\zeta_1^2 - 4\zeta_1) + 4\zeta_1 - 3v\zeta_1^2 + \right.$$

$$\left. + 2v\zeta_1 - v^2 \zeta_1^2 + v^2 \zeta_1^3 \right] + d^2 a_2 \Big|_{\zeta=1-\zeta_1}.$$

Звідси для  $\zeta_1 = 1$  одержуємо значення коефіцієнтів  $\tilde{a}_0 = 1$ ,  $\tilde{a}_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\tilde{a}_2 = \frac{1}{24}$ , що відповідають задачі про стійкість консолі сталої жорсткості, а для  $\zeta_1 = 0$  – значення коефіцієнтів (7.33).

## 7.6 Приклади обчислення критичних значень навантажень для консолей

Нехай згинальна жорсткість стержня та параметр стискувальної сили визначаються формулами

$$f(\zeta) = EJ_0 \left(1 + \nu_1 \zeta + \nu_2 \zeta^2\right)^{-1}, \quad P = \frac{Gl^2}{EJ_0},$$

де  $\zeta = x/l$ ;  $\nu_1, \nu_2$  – сталі, які задовольняють такі умови:  $\nu_1^2/4 - \nu_2 < 0$ ,  $\nu_2 > 0$ ;  $\nu_1 > -1$ ,  $\nu_2 = 0$  або  $\nu_1 = 0$ ,  $\nu_2 \geq -1$ . В цьому випадку критичні значення параметра  $P$  можна визначати, розглядаючи рівняння [73]

$$M'' + \frac{P}{f(\zeta)} M = 0, \quad (7.34)$$

де  $M = -f(x)y''$  – згинальний момент;  $y = y(x)$  – прогин. Для консольного стержня маємо граничні умови:

$$M(0) = 0, \quad M'(1) = 0 \quad (7.35)$$

(початок відліку  $x = 0$  – на вільному кінці).

Функцію Коші, відповідну рівнянню (7.34), можна визначати, очевидно, застосовуючи формулу (7.22). Загальний розв'язок рівняння (7.34) з використанням умов (7.35) дає нам характеристичне рівняння  $u'(1,0) = 0$ , де

$$u'(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-P)^k u'_k(x,0), \quad (7.36)$$

причому коефіцієнти  $u'_k(x,0)$  визначаються на підставі (7.23). Звідси неважко визначати відповідні величини  $a_0, a_1, a_2$  та застосувати оцінки (7.32).

Результати розрахунку стійкості для окремих значень  $\nu_1$  та  $\nu_2$  є такими:

$\nu_1, \nu_2$	$\nu_1 = \nu_2 = 0$	$\nu_1 = -1,$ $\nu_2 = 0$	$\nu_1 = 10,$ $\nu_2 = 0$	$\nu_1 = 0,$ $\nu_2 = -1$	$\nu_1 = 0,$ $\nu_2 = 10$	$\nu_1 = \nu_2 = 1$
$P_-$	2,45	3,35	0,594	4,79	0,369	1,32
$P_+$	2,54	3,51	0,634	4,91	0,372	1,36

Отже, і тут найпростіші оцінки дозволяють одержувати ойлерові критичні значення та досліджувати вплив на них наявних параметрів.

Розглянемо ще випадок, коли  $\nu_1 = -1, \nu_2 = 0$ . При цьому матимемо рівняння

$$u'' + p(1-\zeta)u = 0 \quad (7.37)$$

та умови  $u(0) = 0, u'(1) = 0$  ( $u = y'(x)$ ), до яких зводиться задача Ойлера про стійкість консолі сталого поперечного перерізу під дією власної ваги [63].

Діючи так само, як і в попередній задачі, матимемо рівняння

$$u'(1,0) = 0. \quad (7.38)$$

Застосуємо тут спосіб побудови функції Коші  $U(x, \alpha)$  у вигляді степеневого ряду (див. підрозділ 3.1) для найпростішого рівняння

$$u'' + q(x)u = 0. \quad (7.39)$$

Матимемо:

$$U(x, \alpha) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{b_r(\alpha)}{r!} (x - \alpha)^r \quad (b_1 = 1), \quad (7.40)$$

причому шість наступних після  $b_1$  коефіцієнтів  $b_r$  ( $r = \overline{2,7}$ ) визначають формули

$$0; -q; -2q'; q^2 - 3q''; 6qq' - 4q''' ; -q^3 + 10q'^2 + 13qq'' - 5q^{IV}. \quad (7.41)$$

Для рівняння (7.37)  $q \equiv P(1-x)$ . Із співвідношень (7.36)–(7.41) випливає [44], що  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \frac{1}{6}$ ,  $a_2 = \frac{4}{6!}$ , а оцінки (7.32) набувають значень:

$P_- = 7,75$ ;  $P_+ = 8,25$  (перше з них відрізняється від значення 7,83, яке вважають точним [2], на 1 %, а друге – на 6 %). Вдамося, проте, до точніших оцінок: враховуючи, що  $a_3 = \frac{28}{9!}$ ,  $a_4 = \frac{280}{12!}$ , знайдемо  $P_- = 7,837$ ,  $P_+ = 7,838$ .

То ж виявляється, що точне критичне значення параметра  $P$  є більшим від 7,837, але меншим від 7,838.

## 7.7 Приклади визначення прогинів стиснутих стержнів

Розглянемо консольний стержень, стиснутий поздовжною силою  $H$  (неконсервативною) за одночасної дії поперечної сили  $P$  (рис. 6; обидві сили прикладені до вільного кінця). Такому стержню відповідає задача

$$f y'' = -Hy + P(l-x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

розв'язок якої, згідно з викладеним в розділі 1 та підрозділі 4.4, має вигляд:

$$y = \int_0^x \frac{P}{kf} (l-s) \sin k(x-s) ds,$$

де  $k^2 = Hf^{-1}$ ,  $f = EJ$ . Виконуючи операцію інтегрування, отримаємо вираз

$$y = \frac{P}{k^3 f} [k(l-x) - kl \cos kx + \sin kx].$$

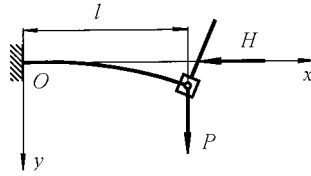


Рисунок 6 Схема консолі з тілом на вільному кінці, на яку діють поздовжня та поперечна сили.

Звідси, зокрема, випливає, що прогин вільного кінця ( $x = l$ ) стержня визначатиметься за формулою

$$y(l) = \frac{P}{k^3 f} (\sin kl - kl \cos kl). \quad (7.42)$$

Зауважимо, що при  $H \rightarrow 0$  після розкриття невизначеності (яка спостерігається при  $k \rightarrow 0$ ) матимемо відомий вираз  $y(l) = \frac{Pl^3}{3f}$ .

Розглянемо тепер стиснутий поздовжними силами  $H$  стержень з шарнірно закріпленими кінцями, до якого в точці  $x = \frac{l}{2}$  його осі прикладена також і поперечна сила  $P$  (рис. 7). Щоб визначити прогин стержня, розглянемо відповідне рівняння (7.1)

$$(fy'')'' + Hy'' = P\delta(x - x_1) \quad (f = \text{const})$$

чи

$$y^{IV} + k^2 y'' = \frac{P}{f} \delta(x - x_1)$$

та його розв'язок (7.3)

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 K_{x_0} + C_3 \dot{K}_{x_0} + \frac{P}{f} \Phi_{x_1}. \quad (7.43)$$

Тут

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{k^2} \left( x - \alpha - \frac{\sin k(x - \alpha)}{k} \right), \quad k = \sqrt{\frac{H}{f}}; \quad (7.44)$$

$$\Phi_{x_1} = K(x, x_1) \theta(x - x_1), \quad x_1 = \frac{l}{2}. \quad (7.45)$$



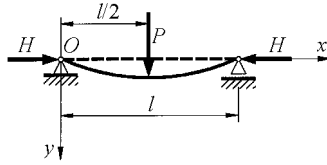


Рисунок 7 Схеми поздовжньо-поперечного навантаження пружного стержня зі шарнірним закріпленням кінців.

Шарнірному закріпленню кінців стержня відповідають умови

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y(l) = y''(l) = 0. \quad (7.46)$$

Підставляючи (7.43) у першу та другу з них, висновуємо, що  $C_0 = 0$ , як і  $C_3 = 0$ . Зважаючи на симетрію прогину, маємо додаткову умову:  $y'(l/2) = 0$ . Звідси та з останньої рівності (7.46) отримуємо два рівняння на сталі  $C_1, C_2$ :

$$C_1 + C_2 K\left(\frac{l}{2}, 0\right) = 0, \quad C_2 K''(l, 0) + \frac{P}{f} K''\left(l, \frac{l}{2}\right) = 0.$$

Беручи до уваги формули (7.44) і (7.45), знаходимо розв'язки цих рівнянь:

$$C_2 = -\frac{P}{2f} \cdot \frac{1}{\cos u}, \quad C_1 = -\frac{P}{2k^2 f} \left( \frac{1}{\cos u} - 1 \right) \quad (u = \frac{kl}{2}). \quad (7.47)$$

Тепер із (7.43) після нескладних перетворень отримуємо:

$$y(x) = \frac{P}{2k^2 f} \left( \frac{\sin kx}{k \cos u} - x \right) + \frac{P}{f} \Phi_{x1}. \quad (7.48)$$

Отже,

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2k^3 f} (\operatorname{tg} u - u) \quad \left( k^3 = \frac{8u^3}{l^3} \right). \quad (7.49)$$

Зауважимо, що звідси у випадку відсутності вісної сили (коли  $H \rightarrow 0$ , а отже і  $u \rightarrow 0$ ) після розкриття невизначеності типу  $\frac{0}{0}$  доходимо відомої

формули  $y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48EI}$ . Неважко переконатися також, що із співвідношень (7.47) і (7.48) впливає рівність  $y(l) = 0$  (як і повинно бути).

### 8.1 Класифікація сил [52,53,10]

Нехай в деяку початкову мить часу до певної точки тіла прикладена стала (незмінна за величиною та напрямом дії) сила. Припустимо, що тіло здійснює безмежно малі переміщення. Якщо сила переміщається разом з точкою початкового її прикладання, то кажуть, що робота даної сили дорівнює добуткові величини сили і проекції переміщення на напрямок дії сили; у випадку, коли переміщення сили і точки її прикладання не збігаються, роботу слід визначати як добуток сили та відповідної проекції переміщення початкової точки її прикладання.

Виходячи із сказаного, розглянемо роботу сили, прикладеної до абсолютно твердого тіла, яка має одну з двох властивостей: а) сила не змінює лінії своєї дії; б) сила прикладена до однієї і тієї ж точки тіла, і при його переміщеннях завжди перпендикулярна до деякої лінії, незмінно зв'язаної з тілом (різновид стежної сили).

Якщо тіло рухається поступально, тобто вектори переміщення всіх точок тіла є однаковими, то робота дорівнюватиме скалярному добутку сили на переміщення. Якщо ж тіло обертається навколо деякого центра, що лежить на лінії дії сил, то переміщення точок будуть перпендикулярними до неї; тому робота розглядуваної сили дорівнюватиме нулю.

Будь-яке пласке переміщення твердого тіла можна зобразити як суму поступального руху з вектором переміщення полюса (що є довільно заданою точкою), та обертального руху навколо вказаного полюса. Покажемо, що робота сили у випадку а) або б) залежить від послідовності, в якій відбувається переміщення тіла з одного положення в інше.

Візьмемо за полюс яку-небудь точку, що належить лінії дії сили перед переміщенням тіла. Повернемо тіло на деякий кут навколо такого полюса (робота сили при цьому рівна нулеві), а опісля надамо тілу поступальне переміщення з вектором переміщення полюса. Цей вектор залежатиме в загальному випадку від того, де вибрано полюс. Звідси випливає, що робота такої сили, здійснена на заданому переміщенні тіла, залежить від способу, в який переміщення відбувається. Сили, що мають зазначену властивість, називаються неконсервативними.

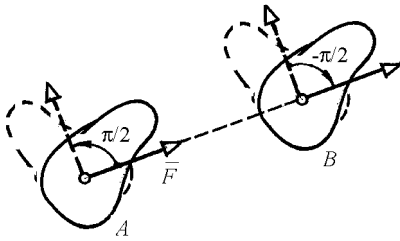


Рисунок 8 Сила, що жорстко злучена з твердим тілом.

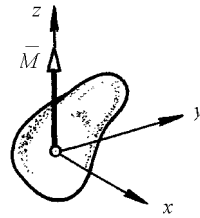


Рисунок 9 Сталій момент сил.

Приклади неконсервативних навантажень ілюструють рис. 8, 9 [74]. Сила  $\bar{F}$ , зображена на рис. 8, жорстко злучена з твердим тілом і тому є незмінною для спостерігача, що рухається разом з тілом. На заданому прямолінійному поступальному переміщенні тіла з положення  $A$  в положення  $B$  вона виконує певну роботу. Проте, якщо в положенні  $A$  здійснити поворот системи "тіло – сила" на кут  $\pi/2$ , а потім, відтворивши в такому стані задане її переміщення, виконати поворот на кут  $-\pi/2$ , то виявиться, що кінцеве положення  $B$  тіла досягається без виконання роботи. Отже, сила  $\bar{F}$  є неконсервативною. Так само, пара сил, що характеризується сталим моментом  $\bar{M}$  (рис. 9), є неконсервативною. Дійсно, простий поворот тіла навколо осі  $z$  на кут  $\pi$  можливий за виконання деякої додатної роботи момента  $\bar{M}$ , натомість двома послідовними поворотами на кут  $\pi$  навколо осей  $x$  і  $y$  досягається те саме кінцеве положення тіла, але без виконання роботи.

Якщо ж робота сил не залежить від способу здійснення переміщення та визначається початковим і кінцевим положенням тіла, то ці сили називаються консервативними. Потенціалом таких сил (потенціальною енергією) називають роботу, виконану ними на переміщеннях тіла з кінцевого положення в початкове (це початкове положення можна вважати довільним; потенціальна енергія при цьому визначається з точністю до сталості).

В реальних механічних системах завжди наявні сили, робота яких на дійсних переміщеннях системи від'ємна (наприклад, сили тертя). Такі сили називають дисипативними; вони є окремим видом неконсервативних сил.

Сили називаються гіроскопічними, якщо сума їх робіт на будь-якому дійсному зникаюче малому переміщенні системи дорівнює нулеві ([14, 75], означення Томсона і Тета). Такі сили можуть бути як дійсними силами, прикладеними до системи, так і деякими складовими членами в рівняннях руху (наприклад, коріолісовими силами інерції). Тому застосовуючи термін "гіроскопічні сили", доречно брати до уваги його умовність.



Рисунок 10 Схема класифікації сил.

Відповідно до щойно викладеного можна укласти [74] просту схему класифікації пересічно діючих на механічні системи навантажень, рис. 10; тут  $F$  – силовий чинник (сила чи момент);  $q$  – переміщення (лінійне чи кутове);  $t$  – час;  $dA$  – робота силового чинника на зникаюче малому переміщенні (елементарна робота);  $dП$  – приріст (диференціал) потенціальної енергії.

В багатьох випадках силові чинники, а відповідно і механічні системи, до яких вони прикладені, зручно поділяти на окремі типи, вдаючись до чисто формальних ознак. Звернемося, наприклад, до лінійних автономних механічних систем з  $k$  ступенями вільності, яким у відповідність можна поставити диференційне рівняння

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = Q. \quad (8.1)$$

Тут  $q$  – матриця-стовпчик з узагальнених координат;  $(\dot{\cdot}) = d(\cdot)/dt$ ;  $t$  – час;  $A, B, C$  – квадратні матриці порядку  $k$  зі сталими дійсними елементами  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  відповідно;  $Q$  – матриця-стовпчик, яка складається з елементів  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ , що містять  $q_i$  та  $\dot{q}_i$  степенів не нижче двох, і яка обертається на нуль, коли всі  $q_i$  та  $\dot{q}_i$  набувають значення нуль.

Величину  $A\ddot{q}$  можна розглядати як узагальнену даламберову силу інерції. Матриця  $A \equiv [a_{ij}]$ , яку складають узагальнені інерційні параметри  $a_{ij}$ , вважається симетричною і такою, що квадратична форма

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

яка відображає узагальнену кінетичну енергію механічної системи, є додатно означеною ("т" – позначення операції транспонування матриці).

Взяті з протилежним знаком складові  $B\dot{q}$ ,  $Cq$  рівняння (8.1) можна тлумачити як прикладені до системи узагальнені сили, що за означенням лінійно залежать від узагальнених відповідно швидкостей і переміщень:

$$\tilde{Q}_{bi} = -\sum_{j=1}^k b_{ij} \dot{q}_j, \quad \tilde{Q}_{ci} = -\sum_{j=1}^k c_{ij} q_j.$$

Натомість, складову  $Q$  є сенс розглядати як узагальнену силу, залежну від  $\dot{q}$  та  $q$  нелінійно. Вона відображає певний відносно вузький клас нелінійних сил.

Матриця  $B$  відповідає таким трьом моделям сил тертя: в'язкому, частотно незалежному та сухому. Якщо сили  $\tilde{Q}_{ci}$  мають потенціал, то у випадку систем зі стійким станом рівноваги  $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$  матриця  $C$  є симетричною та додатно означеною. З додатної означеності матриць  $A, C$  випливає, зокрема, додатність всіх їх головних мінорів (відповідно до теореми Сильвестра), а також існування обернених матриць  $A^{-1}$ ,  $C^{-1}$ .

Будь-яку квадратну матрицю  $D$  можна подати як суму симетричної матриці  $D_1$  з елементами  $d_{ij}^{(1)} = (d_{ij} + d_{ji})/2$  та навкіс симетричної матриці  $D_2$  з елементами  $d_{ij}^{(2)} = (d_{ij} - d_{ji})/2$ . То ж в даному випадку можна написати:

$$B = B_1 + B_2, \quad C = C_1 + C_2. \quad (8.2)$$

$$b_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}), \quad b_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji}), \quad c_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}), \quad c_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji});$$

зауважимо, що  $B_1^T = B_1$ ,  $B_2^T = -B_2$ ;  $C_1^T = C_1$ ,  $C_2^T = -C_2$ . Зважаючи на (8.2), рівняння (8.1) можна звести до вигляду

$$A\ddot{q} + B_1\dot{q} + B_2\dot{q} + C_1q + C_2q = Q. \quad (8.3)$$

Сили  $C_1q$  (позиційні з симетричними матрицями  $C_1$ ) називають консервативними або потенціальними, а відповідну їм квадратичну форму

$$P = \frac{1}{2} q^T C q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} q_i q_j \quad (c_{ij} = c_{ji})$$

потенціальною енергією системи. Ці сили або відображають реальні пружні сили, або ж формально сприймаються як такі, через що досить часто їх називають квазіпружними.

Силам  $B_1\dot{q}$  (з симетричними матрицями  $B_1$ ) можна поставити у відповідність квадратичну форму

$$F = \frac{1}{2} \dot{q}^T B_1 \dot{q}.$$

Цю форму, якщо вона невід'ємна (додатно напівозначена), називають функцією розвіювання або дисипативною функцією (Релея); в такому разі і відповідні сили  $B_1\dot{q}$  називають дисипативними. Якщо  $F$  є додатно означеною (а не просто невід'ємною), то дисипацію називають повною, в іншому ж разі – неповною. Якщо форма  $F$  – від'ємно означена, то відповідно і дисипація вважається від'ємною; сили  $B_1\dot{q}$  при цьому називають або силами з від'ємною дисипацією, або ж прискорювальними силами (останні терміни доцільно застосовувати і у випадку знакової неозначеності квадратичної форми).

Сили  $B_2\dot{q}$  (з навкіс симетричними матрицями  $B_2$ ) називають гіроскопічними. Потужність цих сил на будь-яких дійсних переміщеннях  $q$  завжди дорівнює нулю, через що їх слід віднести до консервативних.

Для позначення сил  $C_2q$  (позиційних з навкіс симетричними матрицями  $C_2$ ) усталеного терміна не існує. Називають ці сили псевдогіроскопічними, циркуляційними, стежними тощо. Проте, є сенс називати їх просто неконсервативними позиційними на протигагу консервативним позиційним  $C_1q$ .

Спираючись на наведену класифікацію сил, можна відповідним чином розрізнити загалом лінійні системи (8.3) зі сталими параметрами, в яких відсутні силові чинники  $Q$ . Зокрема, системи, що знаходяться під дією лише гіроскопічних сил або гіроскопічних сил разом з позиційними консервативними, є сенс називати гіроскопічними. Для таких систем справджується теорема повного збереження механічної енергії, а отже ці системи є також і консервативними. Всі інші системи можна віднести до неконсервативних. Будемо вважати, що у всіх коливальних системах присутні консервативні (квазіпружні) сили. Системи, в яких враховується дія дисипативних сил, будемо називати дисипативними. В залежності від характеру прояву сил дисипації будемо розрізнити системи з повною дисипацією, з неповною дисипацією та з від'ємною дисипацією. Системи перших двох типів називають також пасивними. Системи з від'ємною дисипацією і (або) з позиційними неконсервативними силами відносяться до активних систем. В пасивних системах можливі або стаціонарні, або згасальні коливання. В активних системах можливе й самозбудження коливань. Загалом активні лінійні системи є моделями автоколивальних або потенційно автоколивальних систем.

## 8.2 Поняття про стійкість механічних систем. Теорема Лагранжа-Діріхле та Ляпунова-Четаєва

Нехай механічна система знаходиться в стані рівноваги. Надаючи подумки точкам цієї системи безмежно малі швидкості, можна формально синтезувати деякий її (збурений) рух. Якщо відхилення системи від рівноважного стану як завгодно довго після збурення залишатимуться безмежно малими для всіх можливих збурених рухів, то рівновагу, що передувала збуренню, можна визнати стійкою (при необмеженому зменшенні відхилень – стійкою асимптотично). В протилежному випадку рівновагу доведеться визнати нестійкою [52].

Нехай на систему діють тільки консервативні та дисипативні сили. Доведено, що за дії таких сил положення рівноваги системи буде стійким, якщо йому відповідатиме ізольований мінімум потенціала консервативних сил. Це твердження називають теоремою Лагранжа-Діріхле.

Положення системи будемо визначати узагальненими координатами  $q_1, q_2, \dots$ , причому вважатимемо, що в розглядуваному положенні рівноваги  $q_1 = q_2 = \dots = 0$ . Потенціал консервативних сил  $\Pi(q_1, q_2, \dots)$  в положенні рівноваги системи покладемо рівним нулеві:  $\Pi(0, 0, \dots) = 0$ .

Вважається, що потенціал консервативних сил монотонно зростає зі збільшенням відхилень узагальнених координат від тих їх значень, що відповідають стану рівноваги системи. Однак це зростання може продовжуватися не безмежно. Після того, як потенціал досягнув деякого значення  $\Pi_1$ , далі він може почати зменшуватися. Таких значень  $\Pi_1$  може виявитися багато; виберемо серед них найменше і назвемо його потенціальним бар'єром  $E$ . Область значень узагальнених координат в околі досліджуваного стану рівноваги, в якому потенціал консервативних сил не досягає потенціального бар'єра  $E$ , називається областю мінімуму функції  $\Pi$ , або потенціальною ямою. За даних припущень функція  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots)$  перетворюється на нуль тільки в точці  $q_1 = q_2 = \dots = 0$ , якщо система не полишає потенціальної ями.

Виведемо систему з окресленого стану рівноваги, надавши їй елементам таких швидкостей, щоб значення кінетичної енергії  $T$  не досягло потенціального бар'єра  $E$ . З теореми про кінетичну енергію в цьому випадку випливає, що потенціальна енергія завжди буде меншою від  $E$ , тобто система не може вийти за потенціальний бар'єр (буде знаходитися в потенціальній ямі). При необмеженому зменшенні початкових швидкостей збуреного руху потенціальна енергія прямуватиме до нуля, а положення системи буде безмежно мало відрізнятися від досліджуваної рівноваги (або співпадатиме з нею), що й доводить теорему.

Теорема Лагранжа-Діріхле визначає тільки достатню, але, взагалі кажучи, не необхідну умову стійкості. Зокрема, за наявності дисипативних сил типу кулонівського тертя рівновага може бути стійкою за відсутності мінімуму потенціальної енергії.

Прямолинійний стержень, здеформований у межах пружності його матеріалу, здатний виконати певну роботу, повністю повертаючись до прямолинійної форми рівноваги після зняття навантаження за деякою програмою; в цьому випадку енергія незавантаженого стержня в недеформованому стані має мінімум. Енергія слабозігнутого стержня за наявності деяких неусувних стискувальних сил, прикладених, наприклад, до його кінців, виявиться недостатною, щоб виконати роботу проти подовжніх сил і досягнути повного випрямлення стержня; в цьому випадку потенціальна енергія стиснутого стержня в стані прямолинійної форми рівноваги не є мінімальною і вказаний стан рівноваги може бути нестійким.

Нехай потенціальна енергія консервативної системи не набуває свого мінімального значення в деякому стані рівноваги системи. Якщо відсутність мінімуму визначається членами найнижчого порядку, які є в розгортці виразу для визначення потенціальної енергії в степеневий ряд за узагальненими координатами, то розглядуваний стан рівноваги є нестійким.

Доведення цієї теореми є досить складним. Тут обмежимося тільки її тлумаченням. Для цього розглянемо приклад, коли потенціальна енергія системи зображується рядом

$$P(q_1, q_1, \dots) = \frac{1}{2} \sum_n a_n q_n^2 + \varepsilon(q_1, q_1, \dots),$$

де  $\varepsilon(q_1, q_1, \dots)$  є величиною третього або вищого порядку мализни у випадку малих значень узагальнених координат.

За додатності всіх коефіцієнтів  $a_n$  функція  $P = P(q_1, q_1, \dots)$  має мінімум при  $q_1 = q_2 = \dots = 0$  (рівновага – стійка). Якщо ж хоча б один з коефіцієнтів  $a_n$  має від'ємне значення, то рівновага – нестійка. Це було з'ясовано Ляпуновим [76]. Випадок, коли частина коефіцієнтів додатна, а інші – нулі, і потенціальна енергія не набуває свого мінімального значення в стані рівноваги системи (це залежить від функції  $\varepsilon = \varepsilon(q_1, q_1, \dots)$ ), питання про стійкість-нестійкість, взагалі кажучи, залишається відкритим. Однак, якщо всі коефіцієнти  $a_n$  рівні нулеві, і розгортка функції  $P = P(q_1, q_1, \dots)$  фактично починається з малих третього порядку мализни, то мінімум потенціальної енергії вже неможливий; тут рівновага є нестійкою. Доведення останнього твердження належить Четаєву [77].



Підкреслимо, що О. М. Ляпуновим [76] викладено більш загальні означення та методи дослідження стійкості від поданих тут. Результати Ляпунова мають велике значення для розвитку загальної теорії стійкості – однієї з найскладніших і найважливіших проблем науки й техніки. Викладу та використанню цих результатів присвячено низку спеціальних монографій і величезну кількість статей.

Означення стійкості рівноваги, запропоноване тут, є умовним за термінологією Ляпунова. Воно може відрізнятись від загального означення стійкості за Ляпуновим тільки в деяких вироджених випадках, коли нехтується зведеними масами, що відповідають деяким узагальненим координатам. В механіці пружного тіла такі вироджені випадки не розглядаються.

Розгляд задач про стійкість пружних систем на засадах теорії Ляпунова є необхідним для виявлення помилок, що виникають інколи через неправильне застосування статичного методу дослідження стійкості. Недостатність статичного методу для надійного дослідження стійкості уперше відзначив, мабуть, Е. Л. Ніколаї [78] на прикладі стержня, звантаженого стезним крутним моментом. Відносно повний виклад теорії стійкості пружних систем наведено в монографії В. В. Болотіна [54 – 55].

### 8.3 Стійкість за першим наближенням

Припустимо, що в рівняннях збуреного руху в околі стану рівноваги  $q_1 = q_2 = \dots = 0$  залишено лише члени, які є лінійними відносно узагальнених координат, швидкостей та прискорень. Такі рівняння називаються рівняннями першого наближення. Якщо вони мають тільки обмежені розв'язки, то окреслений стан рівноваги називається стійким за першим наближенням.

У випадку, коли на систему діють тільки консервативні сили, її стійкість гарантується стійкістю за першим наближенням. Доведення цього твердження ґрунтується на використанні головних (нормальних) координат, через які кінетична та потенціальна енергії для збуреного руху в першому наближенні зображуються так:

$$T = \frac{1}{2} \sum a_n \dot{q}_n^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum c_n q_n^2. \quad (8.4)$$

Відповідні рівняння збуреного руху матимуть вигляд:

$$a_n \ddot{q}_n + c_n q_n = 0 \quad (a_n > 0). \quad (8.5)$$

Ці рівняння можуть мати обмежені (періодичні) розв'язки тільки за додатних  $c_n$ . З іншого боку, якщо всі коефіцієнти  $c_n$  додатні, то потенціальна енергія (8.4) має мінімум, тобто умова обмеженості розв'язків рівнянь (8.5) є достатною умовою стійкості при консервативному навантаженні. Якщо ж серед коефіцієнтів  $c_n$  є хоча б один від'ємний, то система нестійка. Кількість від'ємних коефіцієнтів називають ступенем нестійкості системи.

Вельми важливим є поняття критичного навантаження.

Припустимо, що сили, прикладені в різних точках пружної системи, виникли в результаті монотонного їх збільшення від нульового значення. За дії належно малих силових чинників деформація вказаної системи одно-значно визначається власне навантаженням. Заради корисних спрощень можна вважати, що навантаження виникло шляхом зростання всіх сил, пропорційного зростанню деякого параметра  $H$ , який назвемо параметром навантаження (надалі матимемо на увазі тільки такий характер навантаження; сили інерції, що виникають в результаті деформації при навантаженні пружної системи, вважаються малими і ними нехтується).

Позначимо через  $H_k$  таке значення параметра навантаження, яке дозволяє розрізнити випадки: якщо значення параметра  $H$  є меншим від  $H_k$ , то рівновага системи є стійкою; при зникаюче малому перевищенні величиною  $H$  цього значення розглядуваний стан рівноваги системи стає нестійким, або ж неможливим. Навантаження, яке відповідає вказаному значенню  $H_k$ , називається критичним.

Критичні навантаження визначають або шляхом безпосереднього дослідження збуреного руху системи (динамічний метод), або через дослідження потенціальної енергії системи з використанням теорем Лагранжа-Діріхле і Ляпунова-Четаєва (енергетичний метод), або вдаючись до статичного методу дослідження стійкості (деяке уявлення про цей метод дають подані в розділі 7 матеріали, які стосуються знаходження ойлерових сил).

Задача визначення критичного навантаження часто підмінюється простішою задачею дослідження або рівнянь першого наближення, або умов існування екстремальних значень потенціальної енергії (за наявності потенціалу сил), або стану байдужої рівноваги тощо. Таке підмінювання не завжди є коректним, на чому буде наголошено далі. Проте часткові методи спрощеного визначення критичного навантаження досить часто виявляються ефективними і методологічно раціональними. Через це вони завжди заслуговують на увагу та критичний аналіз.

У випадку системи зі скінченною кількістю ступенів вільності рівняння першого наближення збуреного руху є системою звичайних однорідних лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, залежними від параметра навантаження. У випадку узагальнених координат

$$q_i = d_i e^{\lambda t} \quad (i = \overline{1, k})$$

( $d_i$  – сталі) рівнянням першого наближення відповідає характеристичне рівняння

$$A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \dots + A_{2k}\lambda^{2k} = 0, \quad (8.6)$$

де  $A_0, \dots, A_{2k}$  – коефіцієнти, що залежать від "будови" системи і параметрів навантаження.

Стосовно вказаних систем Ляпуновим доведено такі теореми:

А° Якщо дійсні частини всіх коренів рівняння (8.6) є від'ємними, то розглядуваний стан рівноваги буде стійким (асимптотично).

В° Якщо серед коренів рівняння (8.6) є хоча б один з додатною дійсною частиною, то розглядуваний стан рівноваги – нестійкий.

Очевидно, що дослідження (не)стійкості за першим наближенням, взагалі кажучи, не може дати розв'язку задачі про (не)стійкість тільки у випадку, коли дійсні частини коренів рівняння (8.6) мають нульові та від'ємні значення.

Потенціальні системи (системи, на які діють лише консервативні сили) пересічно правлять за певні ідеалізації реальних об'єктів, взаємодія яких з доквіллям супроводжується розвіюванням (дисипацією) енергії:

$$\frac{d(T + \Pi)}{dt} = -2F \leq 0!$$

Поряд з дисипативними в реальних системах дуже часто виникають (самочинно) чи формуються (штучно за допомогою спеціальних технічних засобів) силові чинники, які мають ознаки гіроскопічності. То ж природно постає запитання, чи можна на підставі інформації про (не)стійкість (стійкість-нестійкість) потенціальної системи зорієнтуватись і щодо (не)стійкості цієї ж системи за наявності дисипативних чи/і гіроскопічних сил. Відповідь на це запитання дають відомі теореми Томсона і Тета (див., наприклад, [14, 75]):

1° Якщо нестійкість незбуреного руху потенціальної системи (системи, на яку діють лише консервативні сили) має непарний степінь (кількість від'ємних коефіцієнтів  $c_i$  у відображуваній другим виразом (8.4) квадратичній формі є непарною), то стабілізувати рух не можливо ніякими (додатковими) гіроскопічними силами.

2° Якщо незбурений рух системи, на яку діють лише консервативні сили, є стійким, то він залишиться стійким і тоді, коли до системи прикласти додатково довільні гіроскопічні та дисипативні (повного чи неповного розвіювання енергії) сили.

3° Якщо незбурений рух системи, на яку діють лише консервативні сили, є стійким, то він стає асимптотично стійким тоді, коли до системи прикласти додатково довільні гіроскопічні сили та врахувати дисипативні сили з повним розвіюванням енергії.

4° Нестійкий незбурений рух системи, на яку діють лише консервативні сили, залишиться також нестійким, коли до системи прикласти додатково довільні гіроскопічні сили та врахувати будь-які дисипативні сили, що наділені властивістю повного розвіювання енергії.

З останньої теореми випливає, зокрема, що стабілізація нестійкої консервативної системи, досягнута за допомогою гіроскопічних ефектів (приклад – "спляча" дзига), є безсумнівно тимчасовою; з плином часу вона обов'язково порушиться, оскільки в будь-якій реальній системі завжди виявлять свою присутність чинники повної дисипації енергії, якими б вони незначними не здавалися. Власне тому Томсон і Тет запропонували стійкість системи, наявну за дії лише консервативних сил, називати віковою, а стійкість, досягну за допомогою стабілізаційних гіроскопічних ефектів, – тимчасовою. Зазначимо також, що до предметів (об'єктів) висловлювань теорем 3° та 4° застосовні теореми А° та В° Ляпунова про стійкість-нестійкість за першим наближенням.

#### 8.4 Критерій Рауса-Гурвіца. Основні різновиди втрати стійкості

Щоб усі корені рівняння (8.6) мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатно справджуваності нерівностей

$$A_0 > 0, \quad \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_{2k} > 0, \quad (8.7)$$

де

$$\Delta_1 = A_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_{2k} = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & A_7 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 & A_6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 & A_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_2 & A_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{2k-3} & A_{2k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{2(k-2)} & A_{2(k-1)} & A_{2k} \end{vmatrix}, \quad (8.8)$$

причому  $A_i$  слід замінити нулем, якщо  $i > 2k$ . Так, наприклад, для системи з двома ступенями вільності, тобто для рівняння

$$A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^3 + A_4\lambda^4 = 0$$

останній з визначників (8.7) є таким:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 & 0 \\ 0 & A_0 & A_2 & A_4 \end{vmatrix} = A_4\Delta_3.$$

З наведеного пояснення та з (8.8) випливає, що

$$\Delta_{2k} = A_{2k}\Delta_{2k-1}.$$

Лінійна динамічна система називається аперіодично стійкою, якщо її характеристичний многочлен

$$\psi(s) = \Psi_0 + \Psi_1s + \dots + \Psi_ns^n \quad (\Psi_i > 0)$$

має тільки дійсні від'ємні корені. В [79] доведено, що всі корені рівняння  $\psi(s) = 0$  є від'ємними (і простими) тоді і тільки тоді, коли функція

$$\phi(z) = \psi(z^2) + z\psi'(z^2)$$

є многочленом Гурвіца. Це твердження називають теоремою про аперіодичну стійкість (назва пояснюється тим, що відповідні розв'язки вигляду  $\exp st$  завдяки умовам  $s_i < 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) є неколивними, обмеженими і такими, що прямують до нуля). Теорема про аперіодичну стійкість відіграє особливу роль серед засобів дослідження стійкості за першим наближенням.

Нехай рівновага системи є стійкою асимптотично за достатно малого навантаження. Зі збільшенням параметра навантаження коефіцієнти характеристичного рівняння (8.6), а отже і величини (8.7), звичайно, змінюються. Вважатимемо цю зміну неперервною. При цьому нестійкість може настати або коли, меншою мірою, один з коренів  $\lambda$  рівняння (8.6), переходячи через нуль, стане додатним, або коли два комплексно-спряжені корені з від'ємними дійсними частинами перетворюються на чисто уявні, а опісля їхні дійсні частини стануть додатними. Відомо [77], що в першому випадку стає нулем коефіцієнт  $A_0$ , а в другому – величина  $\Delta_{2k-1}$ .

Отже, якщо зі зростанням параметра навантаження настає нестійкість, то за вказаних умов критичне значення параметра збігається з найменшим коренем одного з двох рівнянь

$$A_0 = 0; \quad \Delta_{2k-1} = 0.$$

Оскільки при  $A_0 = 0$  рівняння (8.6) має нульовий корінь ( $\lambda = 0$ ), чому відповідають довільні сталі значення узагальнених координат  $q_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ), то в такому випадку існує стан байдужої рівноваги. Якщо при цьому навантаження виявиться критичним, то казатимемо, що пружна система втрачає стійкість за Ойлером (це є так званий статичний різновид утрати стійкості або дивергенція).

З наведеного вище випливає, що для  $\Delta_{2k-1} = 0$  хоча б два корені рівняння (8.6) є чисто уявними ( $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ). Оскільки при цьому дійсні частини решти коренів – від’ємні, то в системі встановлюється періодичний рух, а критичному навантаженню відповідає “розгойдування” системи. Відповідний (динамічний) вид втрати стійкості називатимемо автоколивним (або флатером).

### **8.5 Про енергетичний та статичний методи визначення критичного навантаження [52].**

Найменше навантаження, за якого сумарна потенціальна енергія пружної системи втрачає ознаку мінімуму в досліджуваному стані рівноваги, назвемо енергокритичним навантаженням. Знаходження цього навантаження є задачею енергокритичного методу дослідження стійкості пружних систем.

Значення параметра навантаження, для якого можливі безмежно близькі форми рівноваги, назвемо критичними в сенсі Ойлера, а відповідне навантаження – ойлеровим (його ще можна назвати навантаженням біфуркації або розгалуження форм рівноваги).

Значення параметра навантаження, при як завгодно малому перевищенні якого відсутня форма рівноваги, безмежно близька до досліджуваної, назвемо граничним. Граничним назвемо також і відповідне навантаження. Власне знаходження ойлерового і граничного навантажень є визначальними задачами статичного методу дослідження стійкості пружних систем.

За наявності в пружній системі неконсервативних сил поняття енергокритичного навантаження, взагалі кажучи, втрачає сенс. Ойлерове навантаження в таких системах може за певних умов бути критичним (про це йтиметься далі).

В деяких особливих випадках ойлерове та енергокритичне навантаження можуть відрізнитися в консервативних системах. Наприклад, коли при ойлеровому значенні параметра навантаження  $H = H_e$  не відбувається зміни знаку в жодному з коефіцієнтів  $c_n(H)$  виразу (8.4), то потенціальна енергія може не втрачати мінімуму для  $H = H_e$ , тобто ойлерове навантаження може виявитися при цьому нижчим від енергокритичного. Ойлерове навантаження може не існувати, коли коефіцієнт  $c_n(H)$  змінює знак після перетворення на безмежність (про це ще йтиметься), причому енергокритичне навантаження існує.

З наведеного вище випливає, зокрема, що наявність потенціала сил, які можуть призвести до втрати пружною системою стійкості, не є ані необхідною, ані достатною умовою існування ойлерового навантаження або його співпадання з критичним навантаженням.

## 8.6 Збурений рух стиснутого стержня в найпростішому випадку

Рівняння згину балки під впливом поперечного навантаження з інтенсивністю  $p(x)$  та стискувальної сили  $H$  можна подати у вигляді

$$Dy^{IV} + Hy'' = p(x), \quad (8.9)$$

де  $x$  – координата поперечного перерізу стержня;  $D$  – параметр, що характеризує жорсткість стержня. Припустимо, що опір довкілля рухові стержня пропорційний швидкостям  $\partial y / \partial t$  руху його елементів ( $y$  – поперечне відхилення точки осі стержня від стану прямолінійності;  $t$  – час). Додуючи до опору довкілля ще й інерційний чинник, інтенсивність  $p$  поперечного навантаження визначатимемо за формулою

$$p = -b \frac{\partial y}{\partial t} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (8.10)$$

де  $b = b(x)$  – коефіцієнт тертя,  $m = m(x)$  – маса одиниці довжини (подовжинна маса) стержня. То ж підставляючи (8.10) в рівняння (8.9) та замінюючи звичайні похідні на частинні, одержимо рівняння збуреного руху, що відповідає поперечним коливанням стержня:

$$D \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial y}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (8.11)$$

Окремий розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$y = \varphi(x)\phi(t) \quad (8.12)$$

(зазначимо, що така форма розв'язку рівняння (8.11) можлива лише у виняткових випадках).

Рівняння (8.11) за умови (8.12) стає таким:

$$\left( D \frac{d^4 \varphi}{dx^4} + H \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \phi + \left( m(x) \frac{d^2 \phi}{dt^2} + b(x) \frac{d\phi}{dt} \right) \varphi = 0,$$

або

$$\frac{D \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} + H \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2}}{m(x) \varphi(x)} = - \frac{\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \frac{b(x)}{m(x)} \frac{d\phi(t)}{dt}}{\phi(t)}. \quad (8.13)$$

Якщо  $b(x)/m(x) = \text{const}$ , тобто коефіцієнт тертя пропорційний подовжинній масі стержня, то права частина останньої рівності не залежатиме від змінної  $x$ . Натомість, ліва частина цієї ж рівності не залежить від змінної  $t$ . Звідси випливає, що права і ліва частини рівняння (8.13) повинні дорівнювати деякій одній і тій самій сталій  $\lambda$ , яку назовемо власним числом. Таким чином

$$D \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} + H \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} - \lambda m(x) \varphi(x) = 0; \quad (8.14)$$

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + 2c \frac{d\phi(t)}{dt} + \lambda \phi(t) = 0. \quad (8.15)$$

Тут величина

$$c = \frac{1}{2} \frac{b(x)}{m(x)}$$

вважається сталою. Її називають зведеним коефіцієнтом тертя.

У випадку стержня, зображеного на рис. 11, маємо:

$$y(0) = y(l) = 0, \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0.$$

Ці граничні умови задовольняються, якщо

$$\varphi = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = \overline{1, \infty},$$

причому з рівняння (8.14) при  $m = \text{const}$  отримаємо рівність  $\lambda = \lambda_n$ , де

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{ml^2} \left( n^2 D \frac{\pi^2}{l^2} - H \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

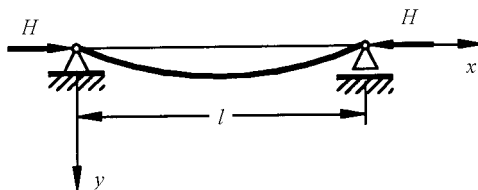


Рисунок 11 Схема поздовжньо навантаженого стержня.



Зауважимо, що

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \frac{\pi^2}{ml^2} \left( D \frac{\pi^2}{l^2} - H \right).$$

Якщо всі власні числа є додатними ( $\lambda_1 > 0$ ), то розв'язки рівняння (8.15) загасатимуть з часом при  $c > 0$ , або вони будуть періодичними за відсутності тертя, коли  $c = 0$ . Якщо ж  $\lambda_1$  стане від'ємним, що можливе тільки тоді, коли стискувальна сила перевищить ойлерову, то рівняння (8.15) при  $\lambda = \lambda_1$  матиме розв'язок, необмежено зростаючий з часом за експоненціальним законом. В розглянутому випадку ойлерова сила є критичною.

Коли  $\lambda = 0$ , рівняння (8.14) стає незалежним від характеру розподілу мас і переходить у рівняння статички, з якого визначаються ойлерові сили. Отже ойлерове навантаження можна визначати як таке найменше навантаження, при якому власне число відповідної динамічної задачі перетворюється на нуль. В самоспряжених задачах про власні значення всі  $\lambda$  – дійсні, і тому мова може йти тільки про ойлерові критичні навантаження.

Припустимо, що зображений схемно на рис. 11 стержень несе в своєму середньому перерізі скупчену масу  $M$ . Нехтуючи масою самого стержня, запишемо рівняння малих його коливань в околі прямолінійної форми рівноваги у вигляді

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = P_0,$$

розуміючи під  $P_0$  силу, що діє на масу  $M$  з боку стержня;  $P_0 = -P$  ( $P$  – сила, з якою маса діє на стержень).

Проводячи аналогію з таким самим за будовою стержнем, але навантаженим в своєму середньому перерізі зосередженою поперечною силою  $P$  (див. підрозділ 7.7, рис. 7), за допомогою формули (7.49) визначимо коефіцієнт впливу  $\beta_{11} = y(l/2)|_{P=1}$ :

$$\beta_{11} = \frac{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}}{2kH} \quad (k = \sqrt{\frac{H}{D}}). \quad (8.16)$$

Оскільки  $P_0 = -\frac{y}{\beta_{11}}$ , то рівняння малих коливань матиме вигляд

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{M \beta_{11}} y = 0. \quad (8.17)$$

Характер розв'язків рівняння (8.17) визначається знаком коефіцієнта впливу (8.16): при  $\beta_{11} > 0$  всі розв'язки обмежені; при  $\beta_{11} \leq 0$  розв'язки є необмежено зростаючими. Дослідимо знак коефіцієнта впливу  $\beta_{11}$ . Найпростіше зробити це графічно (рис. 12). Звертаючись до наведеного графіка можна укласти таблицю:

Інтервал зміни $kl$	$]0, \pi]$	$[\pi, 2v_1[$	$]2v_1, 3\pi]$	$[3\pi, 2v_2[$	$]2v_2, 5\pi]$	...	$]2v_n\pi, 2\pi n]$	...
Знак $\beta_{11}$	+	-	+	-	+	...	+	...

В ній величини  $v_1, \dots, v_n, \dots$ , що розташовані у порядку зростання, є додатними коренями рівняння  $\operatorname{tg} kl/2 - kl/2 = 0$ . Як бачимо, перехід від додатних до від'ємних чисел  $\lambda_0 = (M\beta_{11})^{-1}$  відбувається через нуль, а від від'ємних до додатних – через безмежність. Найменше значення параметра  $kl$ , для якого  $\beta_{11}^{-1} = 0$ , становить  $\pi$ . Звідси одержуємо ойлерове навантаження  $H_0 = \pi^2 D/l^2$ , яке не залежить від розміщення мас, що впливає з самого його означення. Однак це ще не означає, що умови стійкості також не залежать від розподілу мас. Дійсно, з результатів попереднього підрозділу випливає, що балка з рівномірно розподіленою масою нестійка при надойлеровій силі  $H > \pi^2 D/l^2$ , а безінерційна балка з зосередженою масою посередині прогону може бути нестійкою, якщо

$$2v_n < \sqrt{H/D} l < \pi + 2v_n,$$

де  $n$  – ціле число.

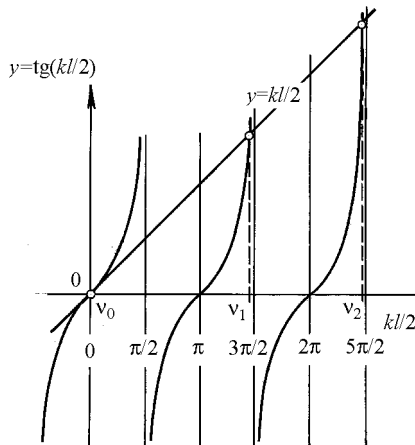


Рисунок 12 Графіки функцій, співвідношення яких визначає знак коефіцієнта впливу.

Зазначимо, що безінерційність балки-моделі є ознакою надмірної ідеалізації реальної балки і що при надойлерових навантаженнях власне силами інерції самої балки нехтувати не можна, якою малою не сприймалася б її маса. Оскільки при дослідженні стійкості системи часто нехтують масами окремих її частин, то наслідки вияву зумовленої цим безінерційності завжди викликають особливий інтерес.

## 8.7 Особливий випадок застосування енергетичного методу

Розглянемо консольний стержень з масою  $M$  на вільному кінці. Стержень стискається силою  $H$ , яка завжди скерована вздовж його недеформованої осі (див. рис. 6). Така сила є неконсервативною (див. підрозділ 8.1). Нехтуючи масою стержня, матимемо систему з одним ступенем вільності.

Згідно з формулою (7.42) сила  $P_0$ , що діє на масу  $M$  з боку стержня при малих його відхиленнях від вертикалі, має вигляд

$$P_0 = -G = \frac{kH}{\sin kl - kl \cos kl} v \left( v = y(l), k = \sqrt{\frac{H}{D}} \right). \quad (8.18)$$

Отже, при малих відхиленнях системи від рівноважного стану на масу  $M$  діє сила  $P_0$ , яка є консервативною. Її потенціал можна записати так:

$$\Pi = \frac{1}{2} a(H) v^2, \quad (8.19)$$

де

$$a(H) = \frac{kH}{\sin kl - kl \cos kl}. \quad (8.20)$$

Беручи до уваги те, що найменший з усіх додатних коренів  $kl$  рівняння  $\sin kl - kl \cos kl = 0$  дорівнює  $kl = 4,493$ , знаходимо енергокритичне навантаження

$$H_* = \frac{20,2 D}{l^2}. \quad (8.21)$$

Це навантаження в розглянутому випадку системи з одним ступенем вільності співпадає з критичним навантаженням, визначеним методом малих коливань (ойлерового навантаження тут не існує).

Наведений приклад засвідчує, що, схематизуючи неконсервативну систему, деколи можна перетворити її в консервативну (робота сили  $H$  не залежить від шляху, оскільки спосіб переміщення вільного кінця – єдиний). В таких випадках критичне навантаження можна визначити енергетичним методом.

Зауважимо, що аналогічна ситуація виникає в задачі про стійкість консольного стержня, стиснутого стежною силою  $H$ , причому зберігаються формули (8.18) – (8.21).

### 9.1 Рівновага системи без тертя за дії неконсервативних навантажень

Розглянемо задачу про стійкість певного стану рівноваги пружної системи з двома ступенями вільності за дії заданого навантаження, яке може мати як консервативні (що мають потенціал), так і неконсервативні (що не мають потенціалу) складові. Під стійкістю розумітимемо обмеженість розв'язків відповідних диференційних рівнянь. Тертям нехтуємо.

Припустимо, що діюче на систему навантаження визначається однозначно двома безрозмірними параметрами  $p$  і  $\eta$ . За параметри обираються такі величини, щоб за умови  $\eta = 0$  система набувала властивостей консервативної (коли неконсервативні складові навантаження зникають), а за умови  $p = \eta = 0$  система перебувала в натуральному стані (напруження набувають нульових значень). Нехай, окрім цього, при значеннях  $p$ ,  $\eta$ , менших за деякі критичні, форму рівноваги системи можна ототожнювати з початковою формою, відповідною умові  $p = \eta = 0$ .

Рівняння малих коливань системи в околі досліджуваного стану рівноваги можна записати в такому вигляді [89]:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11}(p, \eta) q_1 + c_{12}(p, \eta) q_2 &= 0, \\ a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21}(p, \eta) q_1 + c_{22}(p, \eta) q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9.1)$$

де  $q_i$  – узагальнені координати;  $a_{ii}$  – деякі додатні параметри;  $c_{ii}(p, \eta)$  – відомі функції (вони вважаються неперервними для всіх тих значень  $p$  і  $\eta$ , що не перевищують критичних). Вважаємо, що нульовий розв'язок  $q_1 = q_2 = 0$  рівнянь (9.1) відповідає рівноважному стану системи, стійкість якого власне і досліджується. Спробуємо визначити на площині  $(\eta, p)$  область  $D_0$ , в якій цей нульовий розв'язок завжди є стійким.

Розв'язок системи рівнянь (9.1) запишемо у вигляді  $q_i = A_i \exp \lambda t$  ( $A_i$  – сталі,  $\lambda$  – деякий параметр). Тоді для  $\lambda$  одержуємо характеристичне рівняння

$$p_4 \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_0 = 0. \quad (9.2)$$

Тут

$$p_4 = a_{11}a_{22}; \quad p_2 = c_{11}a_{22} + c_{22}a_{11}; \quad p_0 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}. \quad (9.3)$$

Коефіцієнт  $p_4$ , зрозуміло, завжди додатний. Позначимо через  $\Delta_0$  дискримінант рівняння (9.2):

$$\Delta_0 = p_2^2 - 4p_0p_4. \quad (9.4)$$

Розв'язки системи (9.1) є обмеженими, якщо всі коефіцієнти рівняння (9.2) і його дискримінант (9.4) – додатні. Нульовий розв'язок може стати нестійким тільки внаслідок порушення однієї з таких нерівностей:

$$p_0 > 0, \quad \Delta_0 > 0. \quad (9.5)$$

Порушенню першої з них відповідає неколивна (дивергентна) втрата стійкості, а порушенню другої – коливна (флатерна). Для  $\eta = p = 0$  нерівності (9.5), очевидно, виконуються; завдяки неперервності вони виконуються і для значень  $\eta$  і  $p$ , достатно близьких до нуля. Отже, деякий окіл точки  $\eta = p = 0$  площини  $(\eta, p)$  завжди належить до шуканої області  $D_0$ . Границя області  $D_0$  визначається в площині  $(\eta, p)$  двома кривими, при переході через які змінюють знак чи  $p_0$ , чи  $\Delta_0$  відповідно.

Перша з цих кривих визначається рівнянням

$$S_0(\eta, p) = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0. \quad (9.6)$$

Криву лінію  $p = p_0(\eta)$ , що відповідає цьому рівнянню, називатимемо статичною кривою.

Для знаходження другої лінії розглянемо другу нерівність (9.5), яку можна записати так:

$$F(\eta, p, a) \equiv \frac{1}{4a}(ac_{11} - c_{22})^2 + c_{12}c_{21} > 0 \quad \left( a = \frac{a_{22}}{a_{11}} > 0 \right). \quad (9.7)$$

Ліва частина залежить тут не тільки від  $\eta$  і  $p$ , але й від величини  $a$ . Оскільки тут  $a > 0$ , то виконання нерівності (9.7) є очевидним, якщо  $c_{12}c_{21} > 0$ . Якщо ж  $c_{12}c_{21} < 0$ , то як впливає із (9.7), стійкість зберігатиметься лише для значень  $a$ , що лежать поза проміжком  $(a_1, a_2)$ :

$$a_{1,2} = c_{11}^{-2} \left( p_0 - c_{12}c_{21} \mp 2\sqrt{-p_0c_{12}c_{21}} \right) \quad (p_0 > 0). \quad (9.8)$$

В області  $D_0$  стійкість повинна зберігатися для будь-яких  $a$ . Отже, друга лінія, що обмежує область  $D_0$ , визначається рівнянням

$$S_*(\eta, p) \equiv c_{12}c_{21} = 0. \quad (9.9)$$

Лінію  $p = p_*(\eta)$ , яка відповідає цьому рівнянню, називатимемо динамічною кривою. Таким чином, область  $D_0$  можна вважати визначеною.

Із формули (9.8) випливає, що динамічній кривій відповідають кратні значення параметра  $a$ , які визначаються співвідношенням

$$a = a_*(\eta) = \frac{a_{22}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{c_{11}} \Big|_{p=p_*(\eta)}. \quad (9.10)$$

Ці значення  $a_*$  є особливими в тому сенсі, що для них нульовий розв'язок системи (9.1) є нестійким, як тільки  $p > p_*$ .

## 9.2 Рівновага системи з тертям за дії неконсервативних навантажень

Врахуємо в рівняннях (9.1) малі сили тертя, пропорційні до швидкостей. Тоді матимемо таку систему рівнянь [89]:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + b_1\dot{q}_1 + c_{11}(p, \eta)q_1 + c_{12}(p, \eta)q_2 &= 0, \\ a_{22}\ddot{q}_2 + b_2\dot{q}_2 + c_{21}(p, \eta)q_1 + c_{22}(p, \eta)q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9.11)$$

де  $b_1, b_2$  – деякі малі додатні параметри.

Будемо досліджувати стійкість нульового розв'язку цієї системи. Характеристичне рівняння системи має вигляд

$$p_4\lambda^4 + p_3\lambda^3 + \tilde{p}_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0. \quad (9.12)$$

Тут

$$p_3 = b_1a_{22} + b_2a_{11}, \quad \tilde{p}_2 = p_2 + b_1b_2, \quad p_1 = b_1c_{22} + b_2c_{11};$$

коефіцієнти  $p_0, p_2$  і  $p_4$  визначені формулами (9.3).

Нульовий розв'язок системи (9.11) є стійким асимптотично, якщо всі корені рівняння (9.12) мають від'ємні дійсні частини. За теоремою Гурвіца для цього необхідно й достатно в даному випадку, щоб усі коефіцієнти характеристичного рівняння були додатними та задовольняли умову

$$\Delta \equiv p_1(p_3\tilde{p}_2 - p_1p_4) - p_0p_3^2 > 0.$$

Для належно малих значень параметрів  $\eta$  і  $p$  досліджуваний розв'язок, зрозуміло, є стійким асимптотично. Він може стати нестійким тільки внаслідок порушення однієї з нерівностей [52]

$$p_0 > 0, \quad \Delta > 0. \quad (9.13)$$

Позначимо через  $D$  ту область площини  $(\eta, p)$ , в якій нульовий розв'язок системи рівнянь (9.11) є стійким асимптотично за будь-якого значення величини  $a$  та за довільних малих значень параметрів  $b_1$  і  $b_2$ . Оскільки перші нерівності в (9.13) і (9.5) – однакові, то статична крива  $p_0(\eta)$ , яка обмежує  $D_0$ , є частиною границі і для області  $D$ . Щоб визначити в даному випадку динамічну криву  $\tilde{p}_*(\eta)$ , використаємо другу нерівність (9.9). Її можна перетворити до такого вигляду

$$a_{11} \left[ b_1 b_2 (a c_{11} - c_{22})^2 + (b_1 a + b_2)^2 c_{12} c_{21} \right] + b_1 b_2 p_1 p_3 > 0. \quad (9.14)$$

Ця нерівність в області  $D_0$  ( $c_{12} c_{21} > 0$ ) завжди виконується; вона також виконується для  $p = p_*(\eta)$  і  $a = a_*(\eta)$ . Отже, та частина кривої  $p_*(\eta)$ , що обмежує  $D_0$ , завжди належить області  $D$ .

Неважко переконалися, що крива  $\tilde{p}_*(\eta)$  незначно відрізняється від кривої  $p_*(\eta)$  при малих значеннях  $b_1$  і  $b_2$ . Дійсно, вираз в квадратних дужках (9.14) є величиною другого порядку мализни щодо  $b_1$ ,  $b_2$ , а доданок  $b_1 b_2 p_1 p_3$  – величиною четвертого порядку мализни. Якщо при визначенні області  $D$  знехтувати в (9.14) останнім доданком, або вважати, що  $\tilde{p}_2 = p_2$ , то крива  $\tilde{p}_*(\eta)$  повинна визначатися, очевидно, з рівняння (9.9), тобто матимемо  $\tilde{p}_*(\eta) = p_*(\eta)$ . При цьому області  $D$  і  $D_0$  співпадають. Зазначимо, що вперше задача про визначення області вірогідної стійкості була поставлена і розв'язана іншим способом [52, 80, 126], що описується нижче.

Дослідження пружних систем, що втрачають стійкість у формі вияву автоколивань, без урахування тертя дає можливість визначати "критичне" значення  $\tilde{p}_*$  параметра навантаження, яке дозволяє вирізнити область нестійкості та область сумнівної стійкості. Враховуючи мале тертя, пропорційне до швидкостей (так зване зовнішнє тертя), можна показати, що не вся сумнівна область є областю стійкості, а границя останньої деколи істотно залежить від відношення коефіцієнтів тертя  $\mu = b_1/b_2$ . У зв'язку з невизначеністю цих коефіцієнтів тут виникає задача про знаходження найбільшого значення  $p_*$  параметра навантаження, такого що для значень  $p \in [0, p_*)$  рівновага системи є стійкою при будь-якому малому терті (задача про визначення області вірогідної стійкості). Розв'язання задачі ґрунтується на використанні нерівності (9.14), зведеної завдяки мализні  $b_1$  і  $b_2$  до вигляду

$$F(\mu)(a c_{11} - c_{22})^2 + c_{12} c_{21} > 0 \quad \left( F(\mu) = \frac{\mu}{(\mu a + 1)^2}, \quad \mu = \frac{b_1}{b_2} \right). \quad (9.15)$$

Неважко переконатися, що функція  $F(\mu)$  є завжди додатною та задовольняє умови  $F_{\min} < F(\mu) \leq F_{\max}$ , причому

$$F_{\min} = \lim_{\mu \rightarrow 0} F(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} F(\mu) = 0, \quad F_{\max} = F(a^{-1}) = \frac{1}{4a}.$$

Очевидно, що співвідношення  $F(\mu) = F_{\max} = 1/(4a)$  забезпечує відсутність дестабілізації (при цьому умови (9.7) і (9.15) співпадають). Оскільки, однак, відношення  $\mu$  невідомих нам коефіцієнтів малого тертя може набувати будь-яких значень з інтервалу  $(0, \infty)$ , то функція  $F(\mu)$  може бути як завгодно малою. Тому перший доданок в (9.15) за умови обмеженості множника  $(ac_{11} - c_{22})^2$  також може бути як завгодно малим. Отже, динамічна крива  $p_*(\eta)$  відповідає найменшим (за модулем) кореням рівняння (9.9). Статична крива визначається, очевидно, рівнянням (9.6).

Таким чином, область вірогідної стійкості для найпростіших систем може бути окреслена на підставі розгляду рівнянь першого наближення двома способами: без урахування малого зовнішнього тертя та з його врахуванням. Важливо, що в цій області завжди зберігається асимптотична стійкість (відповідна нелінійна система є стійкою) і що будь-які зміни параметрів  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  в цій же області не викликають дестабілізації в розглянутих системах з двома ступенями вільності.

### 9.3 Область стійкості лінійної системи без тертя

Розглянемо задачу про малі коливання пружної консолі з твердим тілом на вільному кінці, навантаженої консервативною  $G$  та стежною  $H$  силами (рис. 13). Виведемо, перш за все, відповідне їй характеристичне (частотне) рівняння.

Знехтуємо спочатку наявністю твердого тіла на вільному кінці пружної консолі, і діючи так само, як це було зроблено в підрозділі 4.3, стосовно неї замість (4.11) – (4.12) одержимо таку крайову задачу:

$$L[y] \equiv y^{IV} + py'' + a\lambda^2 y = 0 \quad (0 \leq x \leq 1); \quad (9.16)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(1) = 0, \quad \left( y''' + \frac{Gl^2}{f} y' \right) \Big|_{x=1} = 0. \quad (9.17)$$

Тут  $p = (G + H)l^2/f$ ;  $a = ml^4/f$ ;  $l$  – довжина консолі;  $f = EJ$  – жорсткість консолі на згин;  $J$  – центральний момент інерції перерізу консолі.



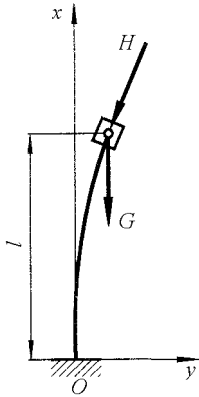


Рисунок 13 Схема пружної консолі з твердим тілом на вільному кінці, навантаженої консервативною та стежною силами.

Підставляючи загальний розв'язок

$$y = C_0 K + C_1 \dot{K} + C_2 \ddot{K} + C_3 \ddot{\ddot{K}} \quad (K = K(x, \alpha))$$

рівняння (9.16) у перші дві умови (9.17), при  $\alpha = 0$  отримаємо:  $C_2 = C_3 = 0$ . Інші дві умови (9.17) за таких самих обставин дають систему двох однорідних алгебричних рівнянь на сталі  $C_0$  і  $C_1$ , визначником якої є вираз

$$\Delta \equiv \left[ K''\dot{K}''' - K'''\dot{K}'' + \frac{Gl^2}{f}(K''\dot{K}' - K'\dot{K}'') \right]_{x=1, \alpha=0}, \quad (9.18)$$

в якому  $K(x, \alpha)$  – відповідна рівнянню (9.16) функція Коші (див. табл. 2: приклад 16). Рівність  $\Delta = 0$  є частотним рівнянням задачі (9.16) – (9.17).

Щоб одержати характеристичний визначник для консолі, яка в деякій точці  $0 < x_1 \leq 1$  несе тверде тіло, можна (на підставі викладеного у підрозділах 2.6 та 5.1) розглянути замість (9.16) відповідне рівняння з особливостями в коефіцієнтах:

$$\left. \begin{aligned} L[y] - \alpha_{11} \delta(x - x_1) y - \alpha_{12} (y' \delta(x - x_1))' &= 0, \\ \alpha_{11} &= -\frac{Ml^4}{f} \lambda^2, \quad \alpha_{12} = -\frac{Jl^3}{f} \lambda^2, \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

де  $M$  – маса тіла;  $J = Mr^2$  – його центральний момент інерції ( $r$  – радіус інерції);  $l$  – довжина консолі;  $f$  – жорсткість. Застосовуючи формулу (2.46), далі можна записати відповідну рівнянню (9.19) функцію

$$Q(x, \alpha) = K_{x\alpha} + \alpha_{11} K_{1\alpha} \Phi_{x1} + \alpha_{12} K'_{1\alpha} \dot{\Phi}_{x1} \quad (9.20)$$

( $q = 1$ ;  $r_n = 2$ ). Тут

$$\Phi_{x1} = \Phi(x, x_1) \equiv K(x, x_1) \theta(x - x_1) \quad (9.21)$$

є функцією впливу, відповідною рівнянню (9.16). Підставляючи, нарешті, в (9.18) замість функції Коші  $K(x, \alpha)$  функцію  $Q(x, \alpha)$ , задану рівнянням (9.20) (разом з (9.21)), можна отримати шуканий характеристичний визначник.

Послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned}
 Q' &= K' + \alpha_{11}K_{1\alpha} \Phi_{x1} + \alpha_{12}K'_{1\alpha} \dot{\Phi}_{x1}, \\
 \dot{Q}' &= \dot{K}' + \alpha_{11}\dot{K}_{1\alpha} \Phi_{x1} + \alpha_{12}\dot{K}'_{1\alpha} \dot{\Phi}_{x1}, \\
 Q'' &= K'' + \alpha_{11}K_{1\alpha} \Phi''_{x1} + \alpha_{12}K'_{1\alpha} \dot{\Phi}''_{x1}, \\
 \dot{Q}'' &= \dot{K}'' + \alpha_{11}\dot{K}_{1\alpha} \Phi''_{x1} + \alpha_{12}\dot{K}'_{1\alpha} \dot{\Phi}''_{x1}, \\
 Q''' &= K''' + \alpha_{11}K_{1\alpha} \Phi'''_{x1} + \alpha_{12}K'_{1\alpha} \dot{\Phi}'''_{x1}, \\
 \dot{Q}''' &= \dot{K}''' + \alpha_{11}\dot{K}_{1\alpha} \Phi'''_{x1} + \alpha_{12}\dot{K}'_{1\alpha} \dot{\Phi}'''_{x1}.
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

Нехтуючи масою консолі у порівнянні з масою тіла, матимемо (див. приклад 13 з табл. 2):

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{k^2} \left( x - \alpha - \frac{\sin k(x - \alpha)}{k} \right) \quad (k = \sqrt{p}). \tag{9.23}$$

Беручи до уваги те, що тіло розміщене на вільному кінці (а отже  $x_1 \rightarrow 1$ ), формули (9.22) подамо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 Q' &= K', \quad \dot{Q}' = \dot{K}', \\
 Q'' &= K'' - \alpha_{12}K', \quad \dot{Q}'' = \dot{K}'' - \alpha_{12}\dot{K}', \\
 Q''' &= K''' + \alpha_{11}K, \quad \dot{Q}''' = \dot{K}''' + \alpha_{11}\dot{K}.
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

Підставивши співвідношення (9.24) в (9.18), після нескладних перетворень отримаємо характеристичний визначник

$$\begin{aligned}
 \Delta(Q) \equiv & \left[ K''\dot{K}''' - K'''\dot{K}'' + \frac{Gl^2}{f} (K''\dot{K}' - K'\dot{K}'') - \alpha_{12} (K'\dot{K}''' - K''\dot{K}') + \right. \\
 & \left. + \alpha_{11} (\dot{K}K'' - K\dot{K}'') - \alpha_{11}\alpha_{12} (K'\dot{K} - K\dot{K}') \right]_{x=1, \alpha=0}.
 \end{aligned}$$

Звідси, беручи до уваги функцію (9.23) та її похідні

$$K' = \frac{1 - \cos k(x - \alpha)}{k^2}, \quad \dot{K} = \frac{-1 + \cos k(x - \alpha)}{k^2}, \quad \dot{K}' = -\frac{\sin k(x - \alpha)}{k},$$

$$\dot{K}'' = -\cos k(x - \alpha), \quad \dot{K}''' = k \sin k(x - \alpha), \quad K'' = \frac{\sin k(x - \alpha)}{k}, \quad K''' = \cos k(x - \alpha),$$

одержуємо частотне рівняння розглянутої системи з двома ступенями вільності:

$$p_0 + p_2\Lambda^2 + p_4\Lambda^4 = 0, \tag{9.25}$$

де

$$\begin{aligned} \Lambda^2 &= \frac{Ml^3}{f} \lambda^2, & p_0 &= \eta + (1-\eta) \cos k, & \eta &= \frac{H}{G+H}, \\ p_2 &= \frac{1}{k^2} \left[ \left( a_* k + \frac{1}{k} \right) \sin k - \cos k \right], & p_4 &= \frac{a_*}{k^4} \Gamma(k), \\ a_* &= \frac{\rho^2}{l^2}, & \Gamma(k) &= 2 - 2 \cos k - k \sin k. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Умови обмеженості розв'язків для випадку  $k = (2n+1)\pi$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), наприклад, мають вигляд

$$\begin{aligned} p_0 = 2\eta - 1 > 0, \quad p_2 = \frac{1}{((2n+1)\pi)^2} > 0, \quad p_4 = \frac{4a_*}{((2n+1)\pi)^4} > 0, \\ p_2^2 - 4p_0 p_4 = \frac{1 - 16a_*(2\eta - 1)}{((2n+1)\pi)^4} > 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\eta > \frac{1}{2}, \quad a_* < \frac{1}{16(2\eta - 1)}.$$

Очевидно, що при  $k = 2n\pi$  ( $n=1, 2, \dots$ ) обмежених розв'язків не існує.

У випадку ж  $k = 0$  частотне рівняння набуває вигляду

$$p_0 + p_2 \Lambda^2 + p_4 \Lambda^4 \equiv 1 + \left( a_* + \frac{1}{3} \right) \Lambda^2 + \frac{a_*}{12} \Lambda^4 = 0.$$

Тут  $D = p_2^2 - 4p_0 p_4 = \left( \frac{1}{3} + a_* \right)^2 - \frac{4a_*}{12} > 0$  (для будь-якого  $a_* \geq 0$ , як і слід було сподіватись). Отже

$$\Lambda_1^2 = -\frac{6}{a_*} \left( \frac{1}{3} + a_* - \sqrt{D} \right), \quad \Lambda_2^2 = -\frac{6}{a_*} \left( \frac{1}{3} + a_* + \sqrt{D} \right).$$

Якщо  $a_* \rightarrow 0$ , то  $\Lambda_1^2 \rightarrow -3$ ,  $\Lambda_2^2 \rightarrow -\infty$ . То ж, беручи до уваги корінь  $\Lambda_1^2 \rightarrow -3$ ,

для  $a_* = 0$  матимемо  $\frac{Ml^3}{f} \lambda^2 = -3$  і відомий результат  $\omega^2 = -\lambda^2 = 3 \frac{EJ}{Ml^3}$ .

Нагомість, наприклад, для  $a_* = 0,1$  одержуємо:  $\omega_1^2 \approx 2,42 \frac{EI}{Ml^3}$ ;  $\omega_2^2 \approx 49,58 \frac{EI}{Ml^3}$ .

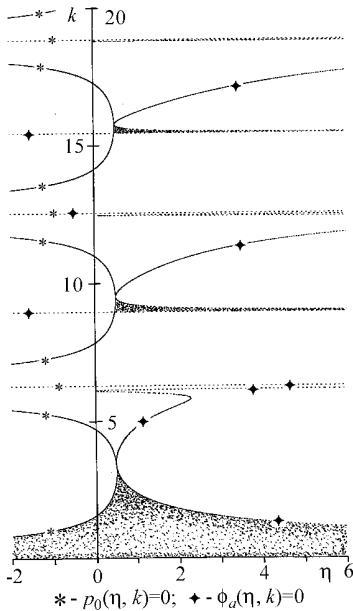


Рисунок 14 Область стійкості системи у випадку, коли  $a_* = 1$ .

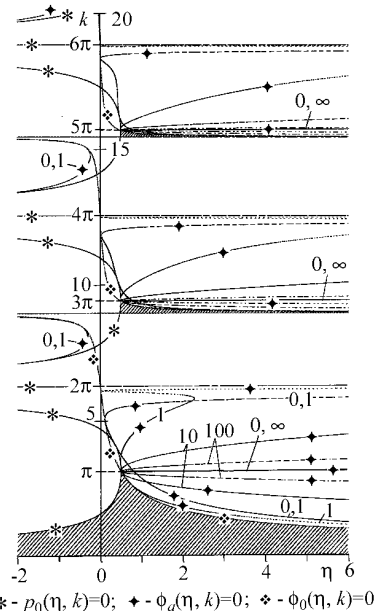


Рисунок 15 Вплив параметра  $a_*$  системи на розміри і конфігурацію області стійкості.

Аналітично область стійкості даної системи можна описати формулою

$$\begin{aligned}
 & (\eta + (1 - \eta)\cos k > 0) \cap \left( \left( a_*k + \frac{1}{k} \right) \sin k - \cos k > 0 \right) \cap (\Gamma(k) > 0) \cap \\
 & \cap \left( \left( \left( a_*k + \frac{1}{k} \right) \sin k - \cos k \right)^2 - 4a_*\Gamma(k)(\eta + (1 - \eta)\cos k) > 0 \right).
 \end{aligned}$$

З цієї формули випливає, що розміри і конфігурація області стійкості залежать від значення параметра  $a_*$  системи. На рис. 14 зображено область стійкості для випадку, коли  $a_* = 1$ ; границю області формують графік функції  $p_0 \equiv \eta + (1 - \eta)\cos k = 0$ , та графік функції (разом з асимптотами)

$$\phi_a \equiv \left( \left( a_*k + \frac{1}{k} \right) \sin k - \cos k \right)^2 - 4a_*\Gamma(k)(\eta + (1 - \eta)\cos k) = 0.$$

Ступінь впливу параметра  $a_*$  на область стійкості ілюструє рис. 15, де суміщено графіки функції  $\phi_a = 0$ , відповідні значенням  $a_* = 0; 0,1; 1; 10; 100; \infty$ . Причому, якщо  $a_* = 0$ , то область стійкості окреслюється нерівністю  $(\eta + (1 - \eta)\cos k > 0) \cap (\sin k - k \cos k > 0) \cap (\Gamma(k) > 0)$ , а якщо  $a_* = \infty$ , то – нерівністю  $(\eta + (1 - \eta)\cos k > 0) \cap (\sin k > 0) \cap (\Gamma(k) > 0)$ .

Назвемо область гарантованої (беззапечної) стійкості системи область таких значень параметрів  $k \geq 0, \eta$ , за яких система стійка, незалежно від того, якого значення набуває параметр  $a_*$ . Аналітично область гарантованої стійкості лінійної системи, про яку тут йдеться, відображає нерівність

$$(\eta + (1 - \eta)\cos k > 0) \cap (\sin k > 0) \cap (\Gamma(k) > 0) \cap \\ \cap (\Phi_0 \equiv \sin k(\sin k - k \cos k) - (\eta + (1 - \eta)\cos k)\Gamma(k) > 0),$$

а графічно – заштрихована на рис. 15 частина площини  $k - \eta$ .

Зважаючи на повну відповідність між рівняннями (9.25) і (9.2), з урахуванням формул (9.26) і (9.1), знайдемо коефіцієнти  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) рівнянь малих коливань, що відповідають вказаній системі:

$$c_{11} = \frac{EJ}{l^3} \frac{k^3}{\Gamma} \sin k, \quad c_{12} = \frac{EJ}{l^2} \frac{1}{\Gamma} (\cos k - 1 + \eta\Gamma), \\ c_{21} = \frac{EJ}{l^2} \frac{k^2}{\Gamma} (\cos k - 1), \quad c_{22} = \frac{EJ}{l} \frac{k}{\Gamma} (\sin k - k \cos k). \quad (9.27)$$

#### 9.4 Приклад побудови області вірогідної стійкості механічної системи з двома ступенями вільності

Побудуємо для зображеної на рис. 13 консолі означену раніше область вірогідної стійкості, розрізняючи три випадки:  $1^\circ$  – в досліджуваному стані рівноваги стержень є стиснутим;  $2^\circ$  – стержень є розтягнутим, коли його форма – прямолінійна;  $3^\circ$  – сили  $\bar{G}$  і  $\bar{H}$  врівноважуються в досліджуваному стані рівноваги ( $\bar{G} + \bar{H} = 0$ , стержень є "незавантаженим") [89].

Для стискувальних сил  $\bar{G}$  і  $\bar{H}$  функції  $c_{ij}(p, \eta)$  визначаються формулами (9.27). Вони зберігають свій вигляд також і тоді, коли одна із сил – розтягувальна, а друга (стискувальна) за абсолютною величиною є більшою. Тоді параметри  $p$  і  $\eta$  в досліджуваному стані визначаються співвідношеннями

$$p^2 = \frac{l^2}{EJ} |\bar{G} + \bar{H}|, \quad \bar{H} = \eta(\bar{G} + \bar{H}). \quad (9.28)$$

Статична та динамічна криві будуються за такими рівняннями:

$$\eta = \eta_0(k) = \frac{\cos k}{\cos k - 1}; \quad (9.29)$$

$$\eta = \eta_*(k) = \frac{1 - \cos k}{2 - 2\cos k - k \sin k}. \quad (9.30)$$

Вони у вигляді відповідно графіків  $k = k_0(\eta)$ ,  $k = k_*(\eta)$  та окреслювана за допомогою них область  $D_0$  для випадку 1° зображені на рис. 16 ( $A, B$  – точки перетину графіків в діапазоні  $0 < k \leq \pi$ ; причому точка  $A(1/2, \pi)$  є вершиною області  $D_0$ ).

Як бачимо, для  $\eta \geq \frac{1}{2}$  і  $k > k_*(\eta)$  в системі може проявлятися коливна втрата стійкості; якщо  $\eta < \frac{1}{2}$ , то для  $k > k_0(\eta)$  стержень втрачає стійкість шляхом дивергенції. Зауважимо, що для стискувальних сил  $\bar{G}$  і  $\bar{H}$  параметр  $\eta$  змінюється в проміжку  $(0, 1)$ ; якщо  $\bar{G}$  – стискувальна, а  $\bar{H}$  – розтягувальна, причому  $\bar{G} > \bar{H}$ , то  $\eta < 0$ ; коли  $\bar{G}$  – розтягувальна, а  $\bar{H}$  – стискувальна ( $\bar{G} < \bar{H}$ ), то  $\eta > 1$ .

У випадку 2° формули для  $c_{ij}(p, \eta)$  можна одержати із співвідношень (9.27), замінюючи  $p$  на  $\sqrt{-1}p$  та переходячи від тригонометричних функцій уявного аргумента до функцій гіперболічних. Щоб побудувати шукану область  $D_0$  вказану заміну достатно зробити в рівняннях (9.29) – (9.30).

Таким чином одержуємо такі рівняння статичної та динамічної кривих:

$$\eta = \eta_0(k) = \frac{chk}{chk - 1}; \quad \eta = \eta_*(k) = \frac{1 - chk}{2 - 2chk + kshk}.$$

Ці криві у вигляді графіків  $k = k_0(\eta)$ ,  $k = k_*(\eta)$  та відповідна область вірогідної стійкості зображені на рис. 17.

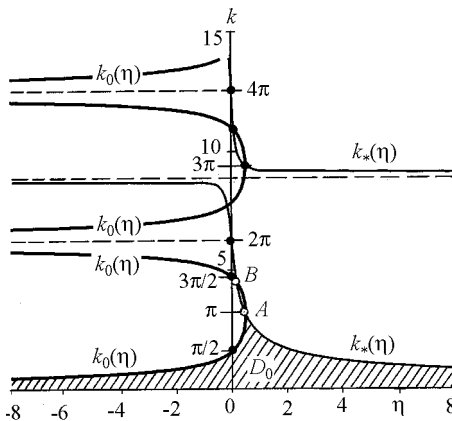


Рисунок 16 Область вірогідної стійкості стиснутого стержня.

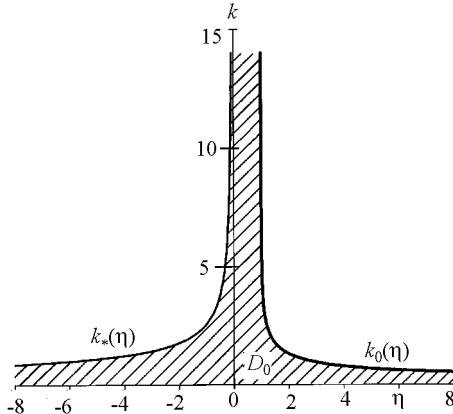


Рисунок 17 Область вірогідної стійкості розтягнутого стержня.

Як бачимо, рівновага стержня є стійкою за будь-якого навантаження, якщо  $0 \leq \eta \leq 1$  (обидві сили  $\bar{G}$  і  $\bar{H}$  є розтягувальними); статична втрата стійкості відбувається для  $\eta > 1$  ( $\bar{H}$  – розтягувальна,  $\bar{G}$  – стискувальна, причому  $\bar{H} > \bar{G}$ ); коливна втрата стійкості настає для  $\eta < 0$  ( $\bar{H}$  – стискувальна,  $\bar{G}$  – розтягувальна, причому  $\bar{H} < \bar{G}$ ).

У випадку 3°, коли  $\bar{G} + \bar{H} = 0$ , друге із співвідношень (9.28) втрачає сенс ( $\eta = \infty$ ). Вирази для коефіцієнтів  $c_{ij}$  можна тут одержати, наприклад, із формул (9.27) шляхом граничного переходу  $p \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow \infty$  за умови, що  $p^2 \eta = \pm Hl^2/EJ$  (верхній знак відповідає стискувальній силі  $\bar{H}$ , нижній – розтягувальній). Ці вирази мають вигляд

$$c_{11} = 12 \frac{EJ}{l^3}, \quad c_{12} = -\frac{EJ}{l^2} \left( 6 \mp \frac{Hl^2}{EJ} \right), \quad c_{21} = -6 \frac{EJ}{l^2}, \quad c_{22} = 4 \frac{EJ}{l}. \quad (9.31)$$

Підставляючи значення  $c_{ij}$  у рівняння (9.6) і (9.9), відповідно знаходимо

$$2 \pm \frac{Hl^2}{EJ} = 0; \quad 6 \mp \frac{Hl^2}{EJ} = 0.$$

Звідси випливає, що в даному випадку втрата стійкості відбувається шляхом дивергенції для розтягувальної сили  $\bar{H}$ , причому критичним є значення  $H_0 = 2EJ \cdot l^{-2}$ ; якщо  $\bar{H}$  – стискувальна сила, то втрата стійкості має коливний характер і може наставати для  $H > H_e$ , де  $H_e = 6EJ/l^2$ .

Статична та динамічна криві, як і область  $D_0$ , не залежать від параметрів  $a_{22}/a_{11} = \rho^2$  чи  $a_* = (\rho/l)^2$  (див. (9.25), (9.26)). Натомість автоколивна втрата стійкості є суттєво залежною від значення параметра  $a_* = (\rho/l)^2$  (який надалі називатимемо безрозмірним інерційним параметром). Перш за все знайдемо критичні значення  $\tilde{a}_*$  параметра  $a_*$  (за критичних значень безрозмірного інерційного параметра автоколивна втрата стійкості настає відразу, як тільки виникне співвідношення  $k > k_*(\eta)$ , тобто як тільки вперше з'являться комплексні з додатними дійсними частинами характеристичні показники  $\lambda$ ).

Використовуючи співвідношення (9.10) і формули (9.27), для випадку 1° одержуємо

$$a_*(\eta) = \left. \frac{\sin k - k \cos k}{k^2 \sin k} \right|_{k=k_*(\eta)}. \quad (9.32)$$

Для випадку 2° відповідно

$$a_*(\eta) = \left. \frac{k \operatorname{ch} k - k \operatorname{sh} k}{k^2 \operatorname{sh} k} \right|_{k=k_*(\eta)}. \quad (9.33)$$

За формулами (9.32) – (9.33) побудовано графіки залежності критичних значень  $\tilde{a}_*$  безрозмірного параметра  $a_*$  від параметра неконсервативності  $\eta$  (рис. 18). У випадку 3° критичне значення параметра  $a_*$ , як видно безпосередньо з формул (9.31), становить  $\tilde{a}_* = 1/3$  (це впливає також і з рис. 18).

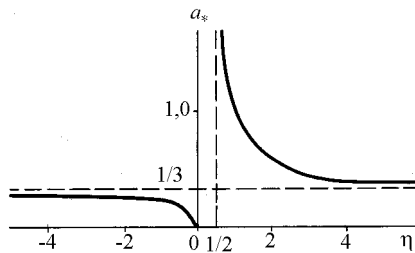


Рисунок 18 Графік залежності критичних значень безрозмірного інерційного параметра від параметра неконсервативності.



## 9.5 Інший спосіб побудови області вірогідної стійкості

Досліджувати модель консолі можна й іншим способом [52]. Пружну консоль завдовжки  $l$ , стиснуту консервативною  $G$  і стежною  $H$  силами, будемо розглядати як систему з двома ступенями вільності (масою консолі знехтуємо), керуючись рівняннями малих коливань стержня в околі прямолінійної форми рівноваги. За узагальнені координати візьмемо прогин та кут повороту вільного кінця. Ці координати позначимо через  $v$  ( $v = y(l)$ ) та  $\varphi$  ( $\varphi = dy/dx|_{x=l}$ ) відповідно. Поставимо собі за мету водночас з'ясувати вплив на стійкість консолі стежного навантаження двох типів (рис. 19), передбачаючи для зручності на її вільному кінці дві рознесені маси  $M/2$ .

Припустимо, що в зображеній на рис. 19, а системі діють малі сили тертя, пропорційні швидкостям. Малі коливання такої системи можна описати рівняннями [52]:

$$M \frac{d^2 v}{dt^2} = P_0 - b_1 \frac{dv}{dt},$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_0 - b_2 \frac{d\varphi}{dt},$$

де  $P_0$  та  $M_0$  – сила та момент, що діють на пару зосереджених мас  $M/2$  з боку стержня;  $b_1$  і  $b_2$  – деякі малі додатні параметри, що характеризують тертя;  $J = Mr^2$  – центральний момент інерції кінцевих мас, кожна з яких зміщена в бік симетрично до осі стержня на віддаль  $\rho$ .

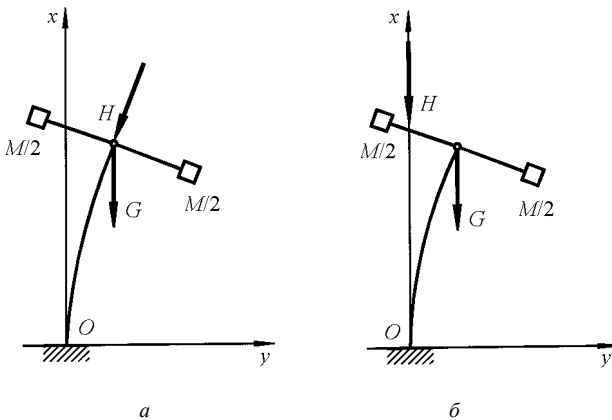


Рисунок 19 Схеми пружних консолей з рознесеним твердим тілом на вільному кінці, навантажених консервативною та неконсервативною силами.

Величини  $P_0$  і  $M_0$  залежать певним чином від переміщення і кута повороту кінця стержня [52]:

$$P_0 = -c_{11}v - c_{12}\varphi, \quad M_0 = -c_{21}v - c_{22}\varphi,$$

де (порівняймо з (9.27))

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{G+H}{\Gamma} \kappa \sin \kappa l, & c_{12} &= \frac{G+H}{\Gamma} (\cos \kappa l - 1 + \eta \Gamma), \\ c_{21} &= \frac{G+H}{\Gamma} (\cos \kappa l - 1), & c_{22} &= \frac{G+H}{\kappa \Gamma} (\sin \kappa l - \kappa l \cos \kappa l); \\ \kappa &= \sqrt{\frac{G+H}{D}}, & \eta &= \frac{H}{G+H}, & \Gamma &= 2 - 2 \cos \kappa l - \kappa l \sin \kappa l. \end{aligned} \quad (9.34)$$

( $D \equiv f = EJ$  – сталий параметр). Отже, рівняння малих коливань системи можна записати так:

$$M \frac{d^2 v}{dt^2} + b_1 \frac{dv}{dt} + c_{11}v + c_{12}\varphi = 0, \quad J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + b_2 \frac{d\varphi}{dt} + c_{21}v + c_{22}\varphi = 0. \quad (9.35)$$

Розв'язки цих рівнянь шукатимемо у вигляді

$$v = Ae^{\lambda t}, \quad \varphi = Be^{\lambda t}, \quad (9.36)$$

де  $A$ ,  $B$  – сталі,  $\lambda$  – характеристичний показник. То ж, підставляючи (9.36) в (9.35), отримаємо систему однорідних алгебричних рівнянь для  $A$  та  $B$ ; умовою існування відмінного від нуля розв'язку цієї системи є рівність нулеві її визначника:

$$\begin{vmatrix} M\lambda^2 + b_1\lambda + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & J\lambda^2 + b_2\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Розгортаючи цей визначник, маємо характеристичне рівняння

$$p_0\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0, \quad (9.37)$$

в якому

$$\begin{aligned} p_0 &= JM = \rho^2 M^2, & p_1 &= b_1 J + b_2 M = b_2 M (\mu \rho^2 + 1), \\ p_2 &= Jc_{11} + Mc_{22} + b_1 b_2 = M (\rho^2 c_{11} + c_{22}) + b_1 b_2, \\ p_3 &= b_2 (\mu c_{22} + c_{11}), & p_4 &= c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}, \quad \mu = b_1 / b_2. \end{aligned} \quad (9.38)$$

За аналогічних припущень коливання системи, зображеної на рис. 19, б, описуватимуться рівняннями

$$M \frac{d^2 v}{dt^2} + b_1 \frac{dv}{dt} + c_{11} v + c_{21} \varphi = 0, \quad J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + b_2 \frac{d\varphi}{dt} + c_{12} v + c_{22} \varphi = 0, \quad (9.39)$$

причому коефіцієнти  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) визначаються за формулами (9.34).

Системи рівнянь (9.39) і (9.35) відрізняються одна від одної розташуванням коефіцієнтів  $c_{12}$  і  $c_{21}$ . В умови ж стійкості ці величини входять тільки у вигляді добутку  $c_{12}c_{21}$ . Звідси випливає, що системи, зображені на рис. 19 є еквівалентними за ознаками стійкості. То ж звернемося до системи рівнянь (9.35).

Для визначення критичного навантаження достатньо дослідити вплив параметрів навантаження на знак величин

$$p_4 \equiv \frac{(G+H)^2}{\Gamma(k)} [\eta + (1-\eta)\cos k] \quad (k = \kappa l), \quad (9.40)$$

$$\Delta_\mu \equiv p_3(p_1 p_2 - p_0 p_3) - p_1^2 p_4 = M^2 b_2^2 (\mu \rho^2 + 1)^2 W(F, \rho, c_{ij}), \quad (9.41)$$

де

$$W \equiv (\rho^2 c_{11} - c_{22})^2 F(\mu) + c_{12} c_{21} + b, \quad F(\mu) = \frac{\mu}{(\mu \rho^2 + 1)^2}, \quad b = \frac{\mu c_{22} + c_{11}}{\mu \rho^2 + 1} \frac{b_1 b_2}{M}.$$

З (9.40) випливає, що знак  $p_4$  залежить від поєднання знаків виразів

$$F_1(\eta, k) \equiv \eta + (1-\eta)\cos k \quad \text{та} \quad \Gamma(k) = 2 - 2\cos k - k \sin k.$$

Зокрема,  $p_4 > 0$ , коли

$$[(F_1(\eta, k) > 0) \cap (\Gamma(k) > 0)] \cup [(F_1(\eta, k) < 0) \cap (\Gamma(k) < 0)].$$

Беручи до уваги (9.34), знайдемо:

$$W \equiv \frac{(G+H)^2}{\Gamma^2(k)} [FS^2 + (\cos k - 1)(\cos k - 1 - \eta\Gamma(k))] + B, \quad (9.42)$$

де

$$B = b \left( \frac{\Gamma(k)}{G+H} \right)^2, \quad S = \left[ a^2 k \sin k - \frac{1}{k} (\sin k - k \cos k) \right] l \quad \left( a = \frac{\rho}{l} \right). \quad (9.43)$$

Звідси випливає, що знак визначника  $\Delta_\mu$  (див. (9.41)) співпадає зі знаком виразу

$$F_\mu \equiv FS^2 + (\cos k - 1)(\cos k - 1 + \eta\Gamma(k)) + B, \quad (9.44)$$

в якому фігурує величина

$$F_2(\eta, k) \equiv \eta\Gamma(k) + \cos k - 1.$$

Раніше зазначалось, що величина  $F(\mu)$  завжди додатна:

$$F_{\min} < F(\mu) \leq F_{\max},$$

$$(F_{\min} = \lim_{\mu \rightarrow 0} F(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} F(\mu) = 0, F_{\max} = F(\mu)|_{\mu = \frac{1}{\rho^2}} = \frac{1}{4\rho^2}).$$

Через це перший доданок у виразі (9.44) завжди є невід'ємним. Тому, якщо нерівність  $F_\mu > 0$  окреслює деяку множину  $D_\mu$  значень величин  $\eta, k$ , то нерівність  $F_2(\eta, k) < 0$ , яка випливає з попередньої за умови, що  $FS^2 \rightarrow 0$  (і з урахуванням того, що  $\cos k - 1 \leq 0$ ), окреслюватиме деяку вужчу множину  $D_0$  значень  $\eta, k$  ( $D_0 \subset D_\mu$ ).

Поставити множині  $D_\mu$  у відповідність множину  $D_0$  можна з таких міркувань. Оскільки відношення  $\mu = b_1/b_2$  коефіцієнтів  $b_1, b_2$  малого тертя, які вважаються невідомими, в загальному випадку може набувати будь-яких значень з інтервалу  $(0, \infty)$ , то функція  $F(\mu)$  може набувати як завгодно малих значень. Оскільки величина  $S = S(a, k)$  при  $k \geq 0$  є обмеженою, то величина  $FS^2$  у виразі (9.44) може ставати безмежно малою. Зрозуміло, що стійкість системи за умови  $(\eta, k) \in D_0$  є не менш вірогідною, ніж за умови  $(\eta, k) \in D_\mu$ .

Множину  $D_0$  відповідно до її аналітичного означення

$$\{[(F_1(\eta, k) > 0) \cap (\Gamma(k) > 0)] \cup [(F_1(\eta, k) < 0) \cap (\Gamma(k) < 0)]\} \cap (F_2(\eta, k) < 0)$$

можна легко зобразити графічно. Її фрагмент подано на рис. 20. При цьому виділено графіки функцій  $F_1(\eta, k) = 0$ ,  $F_2(\eta, k) = 0$  з відповідними асимптотами  $a_1, a_2, \dots, a_5, \dots$  (ці графіки раніше були зображені на рис. 16); підкреслимо, що (непарні) прямі  $a_1, a_3, a_5, \dots$  є водночас і асимптотами функції  $F_1(\eta, k) = 0$ , і гілками функції  $F_2(\eta, k) = 0$ . Зрозуміло, що елемент множини  $D_0$ , який відповідає умові  $0 < k < \pi$ , відтворює на рис. 20 одноіменну множину з рис. 16.

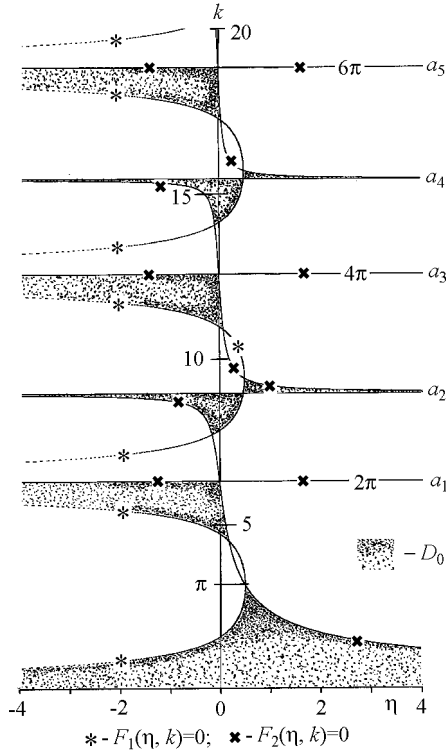


Рисунок 20 Графічне зображення множини  $D_0$ .

Побудуємо тепер для прикладу множину  $D_\mu$ , відповідну конкретним  $B \rightarrow 0$ ,  $\mu = \mu^* = 1/\rho^2$ ,  $F = F_{\max} = 1/(4\rho^2)$ ,  $a = a^* = 1/2$ . Вдаючись до виразів (9.43) та (9.44), умову  $\Delta_\mu > 0$  стійкості рівноважного стану системи можна записати у вигляді:

$$F_\mu = F_\mu^* = F_\mu|_{\mu^*, a^*} \equiv \left( \frac{k^2 - 4}{4k} \sin k + \cos k \right)^2 + (\cos k - 1)(\cos k - 1 + \eta\Gamma) > 0.$$

Натомість умова  $p_4 > 0$  залишається без змін; з неї випливає, що

$$[\eta + (1 - \eta)\cos k]/\Gamma(k) > 0.$$

Таким чином, множину  $D_\mu|_{\mu^*, a^*}$  можна аналітично означити як таку, що задовольняє умову

$$\{[(F_1(\eta, k) > 0) \cap (\Gamma(k) > 0)] \cup [(F_1(\eta, k) < 0) \cap (\Gamma(k) < 0)]\} \cap (F_\mu^*(\eta, k) > 0).$$

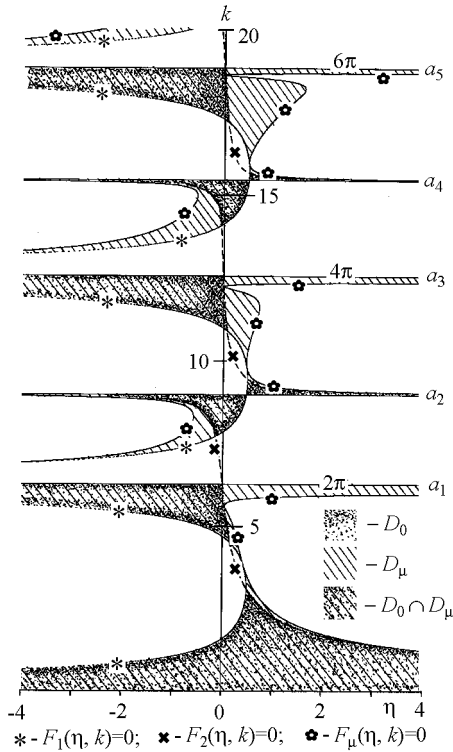


Рисунок 21 Порівняння множин  $D_0$  і  $D_\mu$  графічними засобами.

Фрагмент цієї множини зображено на рис. 21 у вигляді заштрихованої області  $D_\mu$ . Перенесемо на рис. 21 ще й зображення множини  $D_0$  з рис. 20. В підсумку отримаємо графічне унаочнення тієї обставини, що  $D_0$  є частиною  $D_\mu$  ( $D_0 \subset D_\mu$ ). Вірогідність стійкості системи за навантажень, що відповідають області  $D_0$  є, зрозуміло, не меншою, ніж за навантажень, що відповідають області  $D_\mu$ . При формуванні  $D_0$ , зауважимо, не доводилось оперувати кількісною інформацією про тертя.

Підкреслимо, що при визначенні областей  $D_\mu$ ,  $D_0$  не брались до уваги умов додатності коефіцієнтів  $p_2, p_3$  (див. (9.38); тут  $p_0 > 0$  і  $p_1 > 0$  за змістом моделі). Тому реально область стійкості системи може виявитись значно вужчою від тих областей, що зображені на рис. 20, 21. То ж звернемося до умов додатності величин  $p_2, p_3$ .

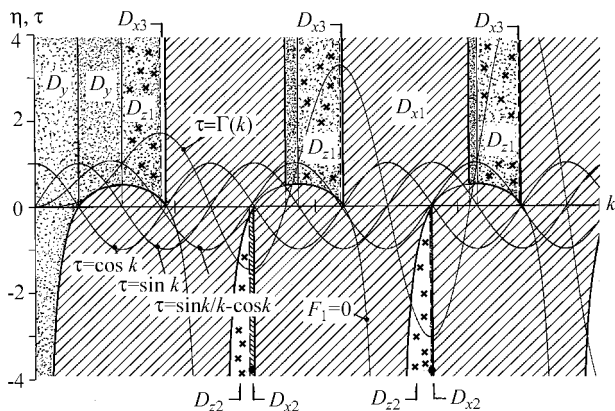


Рисунок 22 Аналіз ознак стійкості без залучення інформації про параметри системи та параметри тертя.

Вважаючи, що  $Ml(G+H) \neq (>)0$  та  $B = M^2 l^2 b_2^2 (G+H)^2 \neq (>)0$ , і позначаючи

$$b_1 / \sqrt{Ml(G+H)} = \beta_1 > 0, \quad b_2 / \sqrt{Ml(G+H)} = \beta_2 > 0 \quad (\beta_1/\beta_2 = \mu),$$

запишемо ці умови у вигляді

$$\Omega_1 \equiv \frac{1}{\Gamma(k)} \left( \left( \frac{\rho^2}{l^2} k + \frac{1}{k} \right) \text{sink} - \cos k \right) + \beta_1 \beta_2 > 0,$$

$$\Omega_2 \equiv \beta_1 \frac{1}{\Gamma(k)} \left[ \left( \frac{1}{\mu^2} k + \frac{1}{k} \right) \text{sink} - \cos k \right] > 0.$$

Легко бачити, що нерівність  $\Omega_2(b_1, \mu, l, k) > 0$  заперечується нерівностями  $\Gamma(k) > 0 \cap \text{sink} < 0 \cap \cos k > 0$  та  $\Gamma(k) < 0 \cap \text{sink} > 0 \cap \cos k < 0$ . Якщо ще й зважити на нерівність  $[\eta + (1-\eta)\cos k]/\Gamma(k) > 0$ , то без детального аналізу та безпосереднього оперування параметрами  $b_1, \mu, l, \rho$  можна ідентифікувати досить значну множину режимів навантаження таких, за яких стани рівноваги системи виявляться нестійкими (заштрихована на рис. 22 область  $D_{x1}$ ;  $F_1 = 0$  позначає криву  $F_1(k, \eta) \equiv [\eta + (1-\eta)\cos k] = 0$ ). Аналогічно, легко переконались, що нерівність  $\Omega_2 > 0$  порушується і тоді, коли набувають чинності нерівність  $\Gamma(k) < 0 \cap \text{sink} > 0 \cap \text{sink}/k - \cos k > 0$  (заштриховані області  $D_{x2}$ ) чи нерівність  $\Gamma(k) > 0 \cap \text{sink} < 0 \cap \text{sink}/k - \cos k < 0$  (незапов-

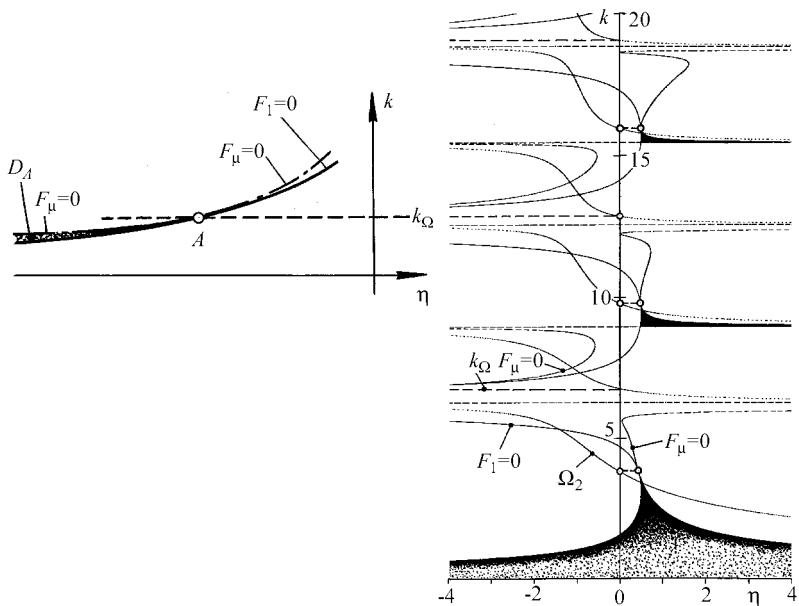


Рисунок 23 Область стійкості системи з тертям.

нені позначками області  $D_{x3}$ ). До того ж, можна з'ясувати, що нерівності як  $\Omega_1 > 0$ ,  $\Omega_2 > 0$  так і  $[\eta + (1 - \eta)\cos k]/\Gamma(k) > 0$  обов'язково справджуються, коли  $\Gamma(k) > 0 \cap \sin k > 0 \cap \sin k/k - \cos k > 0$  (області  $D_y$  на рис. 22). Режими ж навантаження з області  $D_{z1}$ ,  $D_{z2}$  потребують більш витонченого аналізу.

Повертаючись до прикладу, коли  $\mu = \mu^* = 1/\rho^2$ ,  $a = a^* = 1/2$ , зауважимо, що умова  $\Omega_2 > 0$  в цьому випадку набуває вигляду

$$\Omega_2 \equiv \frac{1}{\Gamma(k)} \left[ \left( \frac{k}{4} + \frac{1}{k} \right) \sin k - \cos k \right] > 0$$

і стає більш жорсткішою, ніж умова  $\Omega_1 > 0$ . На підставі неї наведений на рис. 21 результат, що стосується системи з тертям, легко звести до остаточного, рис. 23. Тут  $k_\Omega$  – паралельні до координатної осі  $\eta$  прямі, що проходять через нулі функції  $\Omega_2 = \Omega_2(k)$  і точки  $A$  дотику лівих гілок графіка  $F_\mu = 0$  до відповідних гілок графіка  $F_1 \equiv [\eta + (1 - \eta)\cos k] = 0$ . До точок  $A$  прилягають ділянки  $D_A$  області стійкості системи при  $\eta < 0$  (на рис. 23 схематично відображено лише одну таку ділянку  $D_A$ ).



## 9.6 Вплив тертя на область вірогідної стійкості

Покажемо, що в даній задачі враховування малого тертя деколи може відігравати визначальну роль. Припустимо, що тертя відсутнє ( $b_1 = b_2 = 0$ ). Тоді замість (9.35) матимемо рівняння

$$M \frac{d^2 v}{dt^2} + c_{11} v + c_{12} \varphi = 0, \quad J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c_{21} v + c_{22} \varphi = 0. \quad (9.45)$$

Їм відповідає характеристичне рівняння

$$p_0 \omega^4 + p_2 \omega^2 + p_4 = 0, \quad (9.46)$$

коефіцієнти  $p_0$ ,  $p_2$ ,  $p_4$  якого, визначаються за формулами (9.38).

Нульовий розв'язок системи (9.45) стійкий за першим наближенням тоді й тільки тоді, коли всі коефіцієнти рівняння (9.46) (з чисто уявними коренями) та його дискримінант

$$\Delta_0 = p_2^2 - 4p_0 p_4$$

є додатними.

Міркуючи аналогічно, як і за наявності тертя, неважко встановити, що тривіальний розв'язок системи (9.45) може стати нестійким тільки внаслідок порушення однієї з нерівностей  $p_4 > 0$ ,  $\Delta_0 > 0$ . При порушенні першої з них досліджувана система втрачає стійкість статично, переходячи через стан байдужої рівноваги при  $p_4 = 0$ , а при порушенні другої втрата стійкості має автоколивний характер.

Як було показано вище, необхідні та достатні умови стійкості нульового розв'язку системи (9.35) (за наявності тертя) мають вигляд:  $p_4 > 0$ ,  $\Delta_\mu > 0$ .

Вважатимемо, що  $0 < k < \pi$ . Порівнюючи умови  $(p_4 > 0) \cap (\Delta_0 > 0)$  і  $(p_4 > 0) \cap (\Delta_\mu > 0)$ , бачимо, що у випадку статичної втрати стійкості мале тертя не впливає на критичні значення параметрів.

Нехай тепер втрата стійкості є автоколивною,  $1/2 \leq \eta \leq 1$ . Порівняємо умови  $\Delta_0 > 0$  і  $\Delta_\mu > 0$ . За відсутності тертя матимемо таку умову стійкості:

$$\frac{1}{4\rho^2} (\rho^2 c_{11} - c_{22})^2 + c_{12} c_{21} > 0. \quad (9.47)$$

За наявності ж тертя умова стійкості має вигляд

$$(\rho^2 c_{11} - c_{22})^2 F(\mu) + c_{12} c_{21} > 0. \quad (9.48)$$

Ліва частина останньої нерівності залежна від відношення  $\mu$  коефіцієнтів малого тертя  $b_1$  та  $b_2$ . Але при  $b_1 \rightarrow 0$ ,  $b_2 \rightarrow 0$  умова (9.48) не переходить, взагалі кажучи, в умову (9.47). Іншими словами, критичні параметри, визначені з урахуванням малого тертя, як правило, не співпадатимуть з критичними параметрами, знайденими без його урахування. Виникає запитання, наскільки істотно може позначитись "ігнорування" тертя на результатах дослідження стійкості системи?

Очевидно, що нерівність (9.48) переходить в (9.47), коли  $F = 1/(2\rho)^2$ , тобто коли  $F(\mu)$  набуває максимального з можливих значень, досяжного за умови

$$b_2 = b_1\rho^2. \quad (9.49)$$

З виразів (9.42) і (9.43) видно, що ліва частина нерівності (9.48) залежить від параметрів  $k$ ,  $\mu$ ,  $a$  і  $\eta$ . Позначимо найменші додатні значення параметра  $k$ , за яких порушується умова (9.48), через  $k_\mu^0(a, \eta)$ , а ті із значень  $k$ , які відповідають  $F_{\max}$  – через  $k_*^0(a, \eta)$ . Оскільки функція  $F(\mu)$  додатна, то, зрозуміло, при заданих параметрах  $a$  і  $\eta$  величина  $k_*^0(a, \eta)$  перевищує, як правило, відповідну величину  $k_\mu^0(a, \eta)$ . Отже, за умови  $b_2 = b_1\rho^2$  чи  $\mu = (1/\rho)^2$  втрата стійкості настає, як правило, пізніше, ніж за інших значень  $\mu$ . Тому, якщо коефіцієнти малого тертя задовольняють співвідношення (9.49), то тертя називатимемо найкращим. Мінімальні значення величини  $k_\mu^0(a, \eta)$ , як з'ясовано раніше, дорівнюють  $k_*(\eta)$  і досягаються при  $F = 0$ , коли  $\mu \rightarrow 0$  чи  $\mu \rightarrow \infty$ . В цьому випадку тертя назвемо найгіршим.

На рис. 24 наведено графіки залежностей  $k = k_*(\eta) = \text{const}$  і  $k = k_*^0(a, \eta)$  для двох значень параметра  $\eta$ :  $\eta = 1/2$  і  $\eta = 1$ . Відповідні значенню  $\eta = 1/2$  значення  $k = k_\mu^0(a, 1/2)$ , заповнюють деяку область, обмежену прямою  $k = k_*(1/2) = \pi$  і кривою  $k = k_*^0(a, 1/2)$ . Аналогічну область значень  $k = k_\mu^0(a, \eta)$  можна побудувати для будь-якого значення  $\eta$  з інтервалу  $(1/2; 1)$ . Зокрема, для випадку  $\eta = 1$  така область на рис. 24 виділена штрихуванням.

З викладеного та з рис. 24 випливає таке. Мале тертя може викликати ефект дестабілізації; одержане з урахуванням як завгодно малого відмінного від найкращого тертя критичне значення навантаження пересічно є меншим від значення, одержуваного без врахування тертя. Розходження може бути величезним; наприклад, у випадку  $\eta = 1$  за малих значень параметра  $a$  найгірше тертя може зменшити критичне навантаження приблизно в 4 рази.

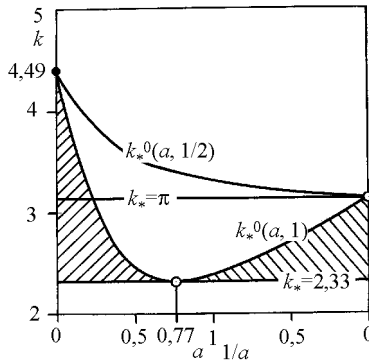


Рисунок 24 Графіки, що унаочнюють аналіз стійкості системи за наявності та відсутності тертя.

Оскільки відношення  $\mu$  коефіцієнтів малого тертя є невизначеним, то критичні параметри доводиться визначати за припущення, що тертя є найгіршим. Так, власне, і була вище визначена область вірогідної стійкості, належність параметрів якій забезпечує стійку рівновагу системи за довільного малого тертя.

Покажемо, що вплив тертя на величину критичного навантаження суттєво залежить від розлету кінцевих мас, тобто від значення параметра  $a$ . З цією метою розглянемо випадок, коли  $\eta = 1$ . Рис. 24 засвідчує, що пряма  $k = k_* = 2,33$  дотикає криву  $k = k_*^0(a, 1)$  в точці  $a_0 = 0,77$ . Очевидно, що при значеннях  $a = a_0 = 0,77$  критичне навантаження є найменшим ( $k = k_*$ ) і його значення не залежить від відношення  $\mu$  коефіцієнтів малого тертя.

Нехай  $\eta_0 \neq 1$ . Можна показати, що при неперервному зменшенні  $\eta$  від 1 до 0,5 абсциса  $a_0(\eta)$  точки дотику графіків  $k = k_*(\eta_0)$ ,  $k = k_*^0(a, \eta_0)$  буде відповідно змінюватись від значення  $a_0(1) = 0,77$  до значення  $a_0(1/2) = \infty$ . Кожна точка  $a_0(\eta_0)$  відповідає мінімуму на відповідній кривій  $k = k_*^0(a, \eta_0)$  і посідає такі самі властивості, що і виділена раніше точка дотику графіків  $k = k_* = 2,33$  і  $k = k_*^0(a, 1)$  з абсцисою  $a_0 = 0,77$ . В таких точках мінімуму справджується рівність  $\rho^2 c_{11} = c_{22}$ . При цьому умови (9.47) і (9.48) співпадають, очевидно, для будь-якого  $\mu$ ; значення критичного навантаження є мінімальним, дестабілізація – відсутня.

Відзначимо, що в області вірогідної стійкості (рис. 16) рівновага системи стійка за будь-яких значень параметра  $a$ . Очевидно, що якщо розлет кінцевих мас несприятливий ( $a = a_0$ ), то втрата стійкості може відбуватися безпосередньо над кривою  $k = k_*(\eta)$ .

Суттєвий вплив малого тертя на критичні параметри при автоколивній втраті стійкості стає більш зрозумілим, якщо розглянути детальніше загальну умову  $\Delta_\mu > 0$ , в якій фігурує вираз (9.41). Дійсно, нехай втрата стійкості відбувається внаслідок порушення умови (9.41), яку можна записати у вигляді нерівності

$$p_1^2 \left[ \frac{p_3}{p_1} p_2 - \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^2 p_0 - p_4 \right] > 0. \quad (9.50)$$

Всі коефіцієнти (9.38) характеристичного рівняння (9.37), що фігурують в умові (9.50) в цьому випадку додатні; причому тут припускається, що в коефіцієнті  $p_2$  збережено добуток малих величин  $b_1, b_2$ . Отже, область стійкості рівноваги визначається нерівністю

$$p_0 \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^2 - p_2 \left( \frac{p_3}{p_1} \right) + p_4 < 0 \quad (9.51)$$

або ж нерівністю

$$\frac{p_2 - \sqrt{\Delta}}{2p_0} < \frac{p_3}{p_1} < \frac{p_2 + \sqrt{\Delta}}{2p_0}, \quad (9.52)$$

де

$$\Delta = p_2^2 - 4p_0p_4. \quad (9.53)$$

Зауважимо, що величина  $p_3/p_1$ , яка фігурує в (9.51), (9.52), залежить від відношення  $\mu$  коефіцієнтів малого тертя.

За відсутності тертя характеристичне рівняння переходить в таке:

$$p_0\lambda^4 + p_2^*\lambda^2 + p_4 = 0, \quad (9.54)$$

при цьому, очевидно, справджується рівність

$$p_2 = p_2^* + \varepsilon^2 \quad (\varepsilon^2 = b_1b_2). \quad (9.55)$$

Виходячи з рівняння (9.54), границю нестійкості рівноваги знайдемо, порівнюючи до нуля його дискримінант:

$$\Delta_0 = p_2^{*2} - 4p_0p_4. \quad (9.56)$$

Порівнюючи формули (9.53) і (9.56) і зважаючи на (9.55), отримуємо:

$$\Delta = \Delta_0 + \varepsilon^2(2p_2^* + \varepsilon^2). \quad (9.57)$$

Нехай тертя є малим настільки, що величиною  $\varepsilon^2$  в рівності (9.55) можна знехтувати. Тоді  $p_2 = p_2^*$  і  $\Delta = \Delta_0$  (з точністю до величин другого порядку мализни), і з умов (9.52) випливають такі твердження:

1. Мале тертя, як правило, викликає дестабілізацію, причому її величина залежить від параметра  $\mu$ .

2. Дестабілізація відсутня тоді й тільки тоді, коли параметри системи задовольняють умову

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_2}{2p_0} \quad (9.58)$$

(вдаючись до цієї умови, можна вирізнити обидва випадки відсутності дестабілізації, означувані співвідношеннями (9.49) та  $\rho^2 c_{11} = c_{22}$ ).

Дійсно, якщо виконується рівність (9.58), то, як видно з (9.52), стійкість спостерігається доти, поки величина (9.49) є додатною, так що границі областей стійкості ( $\Delta = 0$ ) і нестійкості ( $\Delta_0 = 0$ ) в даному випадку збігаються. Навпаки, коли дестабілізація відсутня, то параметри системи повинні, очевидно, задовольняти умову (9.58).

Відзначимо, що мале тертя може стабілізувати нестійку рівновагу; при цьому врахування величин другого порядку мализни ( $\varepsilon^2$ ) є суттєвим. Дійсно, наявність в правій частині формули (9.57) другого доданка може дещо розширити область стійкості (9.52). Останнє набуває важливого значення в тих випадках, коли система без врахування тертя нестійка або перебуває на границі області нестійкості ( $\Delta_0 \leq 0$ ).

## 9.7 Задача про стійкість консолі, стиснутої консервативною та стежною силами, як системи з одним ступенем вільності

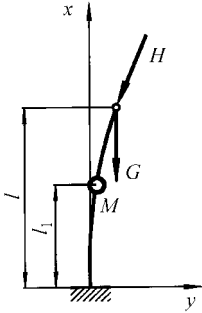
Розглянемо малі коливання консолі, схемно зображеної на рис. 25, в околі прямолінійної форми рівноваги. Вважаючи, що скупчена в деякій точці осі консолі маса  $M$  задовольняє умову  $M \gg ml$  ( $m = \cos nt$  – маса одиниці довжини консолі,  $l$  – довжина консолі), зведемо дослідження даної системи з одним ступенем вільності до такої задачі:

$$L[y] - \alpha_{11} \delta(x - x_1) y = 0 \quad (0 \leq x \leq 1); \quad (9.59)$$

$$y(0) = y'(0) = 0; \quad y''(1) = 0, \quad y'''(1) + \frac{Gl^2}{f} y'(1) = 0, \quad (9.60)$$

де  $\alpha_{11} = -Ml^3 \lambda^2 / f$ ;  $x_1 = l_1 / l$  – безрозмірна координата скупченої маси  $M$  ( $0 < x_1 \leq 1$ ); інші позначення такі самі, як і в задачі про стійкість безмасової консолі з тілом на вільному кінці.

Рисунок 25 Схема пружної консолі зі скупченою масою.



Щоб одержати характеристичне рівняння задачі (9.59)-(9.60), потрібно в формулі (9.18) для  $\Delta$  замінити функцію  $K(x, \alpha)$  відповідною рівнянню (9.59) функцією

$$Q(x, \alpha) = K(x, \alpha) + \alpha_{11} K(x_1, \alpha) \Phi(x, x_1),$$

або в спрощеному записі

$$Q = K + \alpha_{11} K_{1\alpha} \Phi_{x_1} \quad (9.61)$$

( $\Phi_{x_1} \equiv \Phi(x, x_1) \equiv K(x, x_1) \theta(x - x_1)$  – відповідний фундаментальний розв’язок).

Із співвідношення (9.61) отримемо вирази для похідних:

$$Q^{(i)} = K^{(i)} + \alpha_{11} K_{1\alpha} \Phi_{x_1}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\dot{Q}^{(i)} = \dot{K}^{(i)} + \alpha_{11} \dot{K}_{1\alpha} \Phi_{x_1}^{(i)} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (9.62)$$

(тут  $\dot{Q}^{(0)} \equiv \dot{Q}$ ;  $\dot{K}^{(0)} \equiv \dot{K}$ ).

Підставляючи (9.61) і (9.62) у співвідношення (9.18), одержимо відповідний характеристичний визначник  $\tilde{\Delta}$  задачі (9.59) – (9.60):

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \alpha_{11} \left[ A + \frac{Gl^2}{f} B \right] \Bigg|_{x=1, \alpha=0}, \quad (9.63)$$

де

$$A = K_{1\alpha} (K''_{x_1} \dot{K}''' - K'''_{x_1} \dot{K}'') + \dot{K}_{1\alpha} (K'''_{x_1} K'' - K''_{x_1} K''');$$

$$B = K_{1\alpha} (K''_{x_1} \dot{K}' - K'_{x_1} \dot{K}'') + \dot{K}_{1\alpha} (K'_{x_1} K'' - K''_{x_1} K'); \quad (9.64)$$

( $\Delta$  у формулі (9.63) визначене формулою (9.18)). Тут враховано, що для  $x > x_1$  можна замість  $\Phi_{x_1}$  писати  $K_{x_1}$  (це стосується і відповідних похідних).

Оскільки масою консолі зневажено (у порівнянні зі скупченою масою  $M$ ), то функцію  $K(x, \alpha)$  визначатиме формула (9.23), з використанням якої можна належно перетворити і спростити вирази (9.64), а відтак відповідне задачі (9.59)–(9.60) характеристичне рівняння (9.63) записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \eta + (1 - \eta) \cos k + \Lambda^2 k^{-3} \{ \sin kx_1 - kx_1 \cos kx_1 + \\ & + (1 - \eta) [(\sin kx_1 - kx_1)(\cos k - \cos kx_1) + \\ & + (1 - \cos kx_1)(\sin k - \sin kx_1 - \sin k(1 - x_1))] \} = 0. \end{aligned} \quad (9.65)$$

$$\text{Тут } \Lambda^2 = \frac{Ml^3}{f} \lambda^2, \quad \eta = \frac{H}{G+H}, \quad k = \sqrt{p}; \quad p = \frac{G+H}{f} l^2.$$

Зауважимо, що в часткових випадках ( $x_1 \rightarrow 1$ ;  $x_1 \rightarrow 0$ ;  $\eta = 0$ ;  $\eta = 1$ ;  $k = 0$ ) з рівняння (9.65) впливають відомі частотні рівняння чи співвідношення. Зокрема, коли діє тільки стежна сила  $H$  ( $\eta = 1$ ), то частота коливань визначається, очевидно, за такою формулою:

$$\omega^2 = \frac{f}{Ml^3} \frac{k^3}{\sin kx_1 - kx_1 \cos kx_1}. \quad (9.66)$$

Оскільки найменший додатний корінь знаменника в (9.66) становить  $kx_1 = 4,49$ , то відповідно до співвідношення  $k^2 = p = Hl^2/f$  критичне значення стежної сили визначатиметься за формулою

$$H_{\text{кр}} = (4,49)^2 \frac{EI}{l^2 x_1^2}.$$

Отже,  $H_{\text{кр}} \rightarrow \infty$  у випадку, коли  $x_1 \rightarrow 0$ .

Звідси випливає, що за наявності подібних до  $H$  сил можливо покращити стійкість (уникнути флатера) відповідним розташуванням зосередженої маси  $M$ . Зауважимо, що вплив маси консолі ( $ml$ ) і сили  $G$  неважко врахувати, якщо в співвідношеннях (9.63)–(9.64) функцію  $K(x, \alpha)$  подавати як

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} \left( \frac{\sin \mu x}{\mu} - \frac{\sin \nu x}{\nu} \right).$$

Очевидно, що з (9.65) можна одержати формулу, подібну до (9.66), і визначити критичне значення  $(G+H)_{\text{кр}}$  величини  $G+H$  як функцію параметра  $\eta$ .

Звернемо увагу на два види втрати стійкості “ненавантаженої” консолі (консолі, яка фактично навантажена, але так, що рівнодійна  $\bar{R}$  сил  $\bar{G}$  і  $\bar{H}$  спрямована майже паралельно до координатної осі  $y$ , рис. 26).

Нехай в характеристичному рівнянні (9.25) і відповідних формулах (9.26)  $k \rightarrow 0$ , а  $\eta k^2 \rightarrow \pm Hl^2 f^{-1}$ . Цей випадок, як зазначалось раніше, відповідає дії на консоль з твердим тілом на вільному кінці двох однакових за модулем і протилежно спрямованих сил (неконсервативної  $G$  та стежної  $H$ ), так що в прямолінійному стані консолі дотримується умова  $\bar{G} + \bar{H} = 0$ .

Замість (9.26) матимемо (див. випадок  $3^\circ$  з 9.4 та (9.31)):

$$p_0 = 1 \pm \frac{P}{2} \quad \left( P = Hl^2 f^{-1} \right), \quad p_2 = \frac{1}{3} + a_*, \quad p_4 = \frac{1}{12} a_* \quad \left( a_* = \frac{\rho^2}{l^2} \right).$$

Звідси випливає, що відповідне характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$12 \pm 6P + (4 + 12a_*) \Lambda^2 + a_* \Lambda^4 = 0.$$

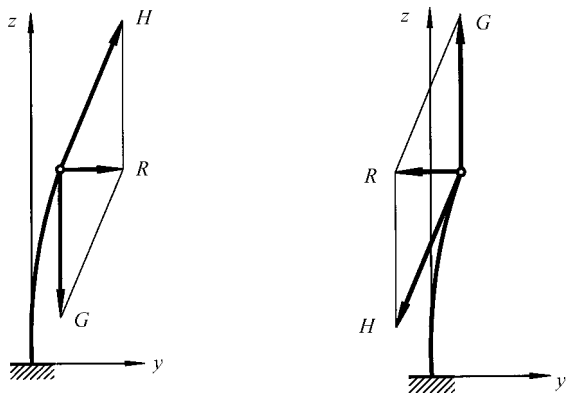


Рисунок 26 Схеми особливого навантаження консолі.

Отже, статична втрата стійкості настає, коли  $G > 2f/l^2$  (сила  $G$  – стискувальна). Найменше флатерне критичне значення  $P$  знайдемо з умови  $p_2^2 - 4p_0p_4 = 0$ :

$$P_{\text{фл}} = \frac{2}{3} \frac{9a_*^2 + 3a_* + 1}{a_*}.$$

Характер втрати стійкості є зрозумілим з рис. 26.

Неважко перекоонатися, що найменша ва́ртість  $(P_{\text{фл}})_{\text{мін}} = 6f/l^2$  параметра  $P_{\text{фл}}$  відповідає значенню інерційного параметра  $a_* = 1/3$ . До того ж, стає очевидним, що  $P_{\text{фл}}$  необмежено зростає, коли  $a_* \rightarrow 0$  та  $a_* \rightarrow \infty$ .

Це узгоджується з викладеним раніше, а також і доповнює його (оскільки раніше йшлося лише про розміщення зосередженої маси на вільному кінці пружної консолі).

В рамках задачі (9.59)–(9.60), зокрема, можна записати

$$1 - \eta = 1 - \frac{G}{G+H} = \pm \frac{H}{G+H}, \quad k^2 = p = \frac{G+H}{f} l^2,$$

а для малих значень параметра  $k$  відповідно до (9.65) матимемо:

$$\sin kx_1 - kx_1 \approx -\frac{(kx_1)^3}{3!},$$



$$\cos k - \cos kx_1 \approx -\frac{1}{2}k^2(1-x_1^2),$$

$$1 - \cos kx_1 \approx \frac{1}{2}k^2x_1^2,$$

$$\sin k - \sin k(1-x_1) - \sin kx_1 \approx -\frac{1}{2}k^3x_1(1-x_1).$$

Отже, якщо  $k \rightarrow 0$  та  $\eta k^2 \rightarrow \pm P$ , то рівняння (9.65) набуде вигляду

$$1 \pm \frac{P}{2} + \Lambda^2 \frac{x_1^3}{12} [4 \mp P(1-x_1)(2-x_1)] = 0. \quad (9.67)$$

Звідси отримуємо формулу для визначення коливань безмасової консолі, схема якої наведена на рис. 25, за особливого навантаження, рис. 26:

$$\omega^2 = \frac{f}{x_1^3 M l^3} \frac{12 \pm 6P}{4 \mp P(1-x_1)(2-x_1)}.$$

Як і повинно бути,  $\omega^2 \rightarrow \infty$ , коли  $x_1 \rightarrow 0$ .

Отже, як і раніше, ойлерове значення сили  $H$  не залежить від кількості ступенів вільності:

$$H_e = 2EJ/l^2$$

(стежна сила – розтягувальна). Флатерне ж значення  $H_*$  сили  $H$  залежить від розміщення скупченої маси  $M$ , тобто від величини  $x_1$  ( $0 < x_1 \leq 1$ ):

$$H_* = \frac{4}{(1-x_1)(2-x_1)} \frac{f}{l^2} \quad (P_{\text{фл}} = \frac{4}{(1-x_1)(2-x_1)}).$$

Зауважимо, що у випадку відповідної системи з двома ступенями вільності замість (9.67) матимемо таке характеристичне рівняння:

$$12 \pm 6P + \Lambda^2 \left\{ x_1^3 [4 \mp P(1-x_1)(2-x_1)] + 6a_* x_1 [2 \mp P(1-x_1)^2] \right\} + \Lambda^4 a_* [1 \mp P(1-x_1)^2] = 0.$$

З нього випливають ті окремі випадки, що розглядалися раніше. Воно ж дозволяє проаналізувати вплив параметра  $a_* = \rho^2/l^2$  на динамічну поведінку консолі в особливому випадку навантаження.

## 10.1 Вихідні положення

Нехай вісна лінія (вісь) стержня в недеформованому стані є відтинком пласкої кривої. Вважатимемо, що кінці вісної лінії розташовані на координатній осі  $Oz$  і є нерухомими. Якщо стержень має угнутість в бік від'ємного напрямку координатної осі  $Oy$ , перпендикулярної до  $Oz$ , то рівняння недеформованої осі стержня можна подати у вигляді:  $y_0 = -f(z)$  ( $|f(z)| > 0$ ). Вважатимемо також, що стержень навантажено розподіленим вздовж його вісної лінії зусиллям, скерованим перпендикулярно до  $Oz$ , так само, як і координатна вісь  $Oy$ . Такого типу стержні називають арками. Арка вважається пологою, якщо нахил її вісної лінії до координатної осі  $Oz$  є малим:  $|f'(z)| \ll 1$ . При викладі матеріалу цього розділу спиратимемось на [52],

Довжина вісної лінії арки в недеформованому стані визначається за формулою

$$L_0 = \int_0^l \sqrt{1 + f'^2(z)} dz,$$

де  $l$  — відстань між опорами. Для пологої арки  $\sqrt{1 + f'^2} \approx 1 + \frac{1}{2} f'^2$ , а отже

$$L_0 = \int_0^l \left( 1 + \frac{1}{2} f'^2(z) \right) dz.$$

У випадку малих деформацій довжина вісної лінії може бути визначена за формулою

$$L = \int_0^l \left( 1 + \frac{1}{2} y'^2(z) \right) dz,$$

де  $y'^2 = (f'(z) - v'(z))^2$ ;  $v(z)$  — вертикальна складова зміщення осі арки.

При деформації арки виникає горизонтальна складова  $H$  реакції елементів, на які спирається арка. Цю складову реакції називатимемо арковим розпиральним зусиллям. Посилаючись на закон Гука, вкорочення осі арки визначатимемо за формулою  $L_0 - L \approx Hl/(E^*F)$  ( $L$  — довжина осі деформованої арки,  $E^* = E/(1 - \nu_*^2)$ ,  $E$  — модуль пружності,  $\nu_*$  — коефіцієнт Пуассона,  $F$  — площа нормального поперечного перерізу тіла арки). Звідси впливає така залежність між вертикальними переміщеннями  $v$  точок осі арки і розпиральним зусиллям  $H$ :

$$\frac{Hl}{E^*F} = \int_0^l \left( \nu_* f' - \frac{1}{2} v'^2 \right) dz. \quad (10.1)$$

При визначенні вертикальних переміщень точок осі пологої арки можна скористатись залежністю

$$Dv''(z) = -M,$$

в якій  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  — так звана циліндрична жорсткість,  $h$  — товщина тіла арки,  $M$  — згинальний момент, який в даному випадку визначається за формулою

$$M(z) = M_0 + Az - \int_0^z (z - \zeta) p(\zeta) d\zeta - H(f - v),$$

причому стискувальна сила  $H$  вважається напрямленою вздовж осі  $Oz$ ; тут  $p(z)$  — інтенсивність вертикального навантаження,  $M_0$ ,  $A$  — момент та реакція-сила на лівій опорі.

З двох останніх формул отримуємо рівняння

$$Dv'' + Hv = -m(z), \quad (10.2)$$

де  $m(z)$  — згинальний момент в арці, визначуваний без урахування її деформації:

$$m(z) = M_0 + Az - \int_0^z (z - \zeta) p(\zeta) d\zeta - H f(z). \quad (10.3)$$

Розв'язок рівняння (10.2), що задовольняє умову  $v(0) = 0$ , можна записати так:

$$v(z) = cK(z, 0) - \int_0^z m(s) K(z, s) ds. \quad (10.4)$$

Тут  $K(z, \alpha) = \left( \sqrt{\frac{H}{D}} \right)^{-1} \sin \sqrt{\frac{H}{D}}(z - \alpha)$ ;  $c$  — стала, визначувана з умови  $v(l) = 0$ , що в даному випадку має вигляд

$$cK(l, 0) - \int_0^l m(s) K(l, s) ds = 0. \quad (10.5)$$

Розв'язок (10.4) містить в собі ще три невідомі величини —  $H$ ,  $M_0$ ,  $A$ . Їх можна знайти на підставі співвідношення (10.1) та умов (двох) кріплення країв арки (умови защекнення, затиснення країв, наприклад, мають вигляд:  $v'(0) = v'(l) = 0$ ). Отже загалом, задача зводиться до визначення (чотирьох) величин  $H$ ,  $M_0$ ,  $A$ ,  $c$  на підставі тільки що вказаних трьох умов та рівняння (10.5).

## 10.2 Залежність між навантаженням і розпиральним зусиллям у двохарній арці

Надалі задаватимемо навантаження у вигляді

$$p(z) = q p_1(z),$$

де  $p_1(z)$  — функція, яка відображає закон зміни навантаження;  $q$  — параметр навантаження. Вважатимемо для визначеності, що кінці арки закріплені шарнірно. Тоді  $M_0 = 0$ ,

$$A = \frac{1}{l} \int_0^l (l - \zeta) p(\zeta) d\zeta,$$

і, отже, формулу (10.3) можна записати так:

$$m(z) = q m_0(z) - H f(z), \quad (10.6)$$

де  $m_0(z)$  — відома функція.

Зважаючи на (10.6) і (10.4), рівняння (10.1) можна подати у вигляді

$$h_0(H, c) - 2q[h_1(H) + ch_c(H)] + q^2 h_2(H) = 0, \quad (10.7)$$

де

$$h_0 = \frac{H}{D} \int_0^l \left[ c \cos \sqrt{\frac{H}{D}} z + \sqrt{\frac{H}{D}} L_f(z) \right]^2 dz - 2c \sqrt{\frac{H}{D}} \int_0^l f'(z) \cos \sqrt{\frac{H}{D}} z dz -$$

$$-2 \frac{H}{D} \int_0^l L_f(z) f'(z) dz + 2 \frac{Hl}{EF}, \quad L_f(z) = \int_0^z f(\zeta) \cos \sqrt{\frac{H}{D}}(z-\zeta) d\zeta;$$

$$h_1 = \frac{1}{D} \int_0^l L_{m_0}(z) \left[ \frac{H}{D} L_f(z) - f'(z) \right] dz, \quad L_{m_0}(z) = \int_0^z m_0(\zeta) \cos \sqrt{\frac{H}{D}}(z-\zeta) d\zeta;$$

$$h_2 = \frac{1}{D^2} \int_0^l L_{m_0}^2(z) dz, \quad h_c = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{H}{D}} \int_0^l L_{m_0}(z) \cos \sqrt{\frac{H}{D}} z dz.$$

Рівняння (10.7) повністю визначає параметр навантаження  $q$  при заданому розпиральному зусиллі  $H$ , якщо тільки не стає нулем коефіцієнт при  $c$  у формулі (10.5). Однак, якщо

$$H = \frac{(n\pi)^2 D}{l^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (10.8)$$

то формулу (10.5) не можна застосовувати для знаходження  $c$ . В цьому випадку повинен перетворюватись на нуль інтеграл у формулі (10.5), тобто

$$\int_0^l [q m_0(\zeta) - H f(\zeta)] \sin \frac{n\pi}{l} \zeta d\zeta = 0. \quad (10.9)$$

Інтегруючи частинами та беручи до уваги, що  $m_0(0) = m_0(l) = 0$ ,  $m'' = -q p_1(z)$ , можна знайти

$$\int_0^l m_0(\zeta) \sin \frac{n\pi}{l} \zeta d\zeta = \left( \frac{l}{n\pi} \right)^2 \int_0^l p_1(\zeta) \sin \frac{n\pi}{l} \zeta d\zeta.$$

Вважаючи останній інтеграл відмінним від нуля та використовуючи (10.9), можна визначити параметр навантаження ( $q = q_n$ ), коли задано розпиральне зусилля (10.8), тобто

$$q_n = \frac{n^2 \pi^2 D a_n(f)}{l^2 a_n(p_1)} \quad (a_n(p_1) \neq 0). \quad (10.10)$$

Тут  $a_n(f)$  і  $a_n(p_1)$  — коефіцієнти Фур'є розгортання функцій  $f(z)$  та  $p_1(z)$  в ряд за синусами:

$$a_n(\vartheta) = \frac{2}{l} \int_0^l \vartheta(z) \sin \frac{n\pi}{l} z dz. \quad (10.11)$$

Після визначення вказаним способом навантаження  $q_n$  для заданого розпирального зусилля (10.8), у формулі (10.4) залишається одна невідома стала  $c$ , яка знаходиться з рівняння (10.7). Отже, задача формально повністю

розв'язується, якщо коефіцієнти  $a_n(p_1)$  відмінні від нуля для всіх цілих чисел  $n$ . Але, якщо для деякого  $n = k$   $a_k(p_1) = 0$ , то умова (10.9) не може задовольнятися за будь-якого значення параметра навантаження, якщо  $a_k(f) \neq 0$ , і задовольняється при довільному  $q$ , якщо  $a_k(f) = 0$ .

В останньому випадку параметр навантаження  $q$  можна виразити через невизначену сталу  $c$  з рівняння (10.7). Відповідне значення розпирального зусилля

$$H_k = (k\pi)^2 D/l^2 \quad (a_k(f) = a_k(p_1) = 0)$$

називають ойлеровим. Найменше з них називається основним ойлеровим значенням розпирального зусилля.

### 10.3 Найпростіша симетрична арка

У випадку симетричної арки ( $f(z) = f(l - z)$ ) з симетричним навантаженням ( $p(z) = p(l - z)$ ) коефіцієнти  $a_n(f)$  та  $a_n(p_1)$  типу (10.11) будуть нулями для парних значень  $n$ . В цьому випадку основним ойлеровим значенням розпирального зусилля буде величина

$$H_e = 4\pi^2 D/l^2. \quad (10.12)$$

Зауважимо, що при дії такого несиметричного навантаження, при якому  $a_2(p_1) \neq 0$ , умова (10.9) може дотримуватись лише якщо  $q = 0$ . Деформований стан арки за відсутності навантаження ( $q = 0$ ) інколи можна забезпечити спеціальним процесом деформування-розвантаження. Проте, практичний інтерес представляють такі форми рівноваги, які досяжні за монотонного наростання параметра навантаження з плином часу (надалі вважатимемо, що "умова монотонності" завжди справджується). В такому випадку ойлерового значення (10.12) розпирального зусилля досягнути не вдасться і за несиметричного навантаження; значення граничного навантаження є меншим ойлерового ( $H < H_e$ ). Щоб проілюструвати це, розглянемо випадок, коли недеформована форма вісної лінії арки є напівхвилею синусоїди

$$f(z) = e \sin \frac{\pi}{l} z$$

( $e$  — підйом арки ( $e \ll l$ )), а інтенсивність навантаження задається подібною за структурою формулою

$$p(z) = q \frac{\pi^4 e D}{l^4} \sin \frac{\pi}{l} z \quad (10.13)$$

(множник  $\pi^4 e D / l^4$  введено для того, щоб спростити подальші перетворення).

Визначивши опорні реакції

$$A = B = \frac{1}{2} \int_0^l p(z) dz = \frac{\pi^3 eD}{l^3} q,$$

далі знайдемо поперечну силу при  $H = 0$

$$Q_0(z) = A - \int_0^z p(\zeta) d\zeta = \frac{\pi^3 eD}{l^3} q \cos \frac{\pi}{l} z,$$

а потім і величину

$$qm_0(z) = \int_0^z Q_0(\zeta) d\zeta = \frac{\pi^2 eD}{l^2} q \sin \frac{\pi}{l} z.$$

Називатимемо надалі параметром розпирання величину

$$\eta = \frac{Hl^2}{\pi^2 D}.$$

Вважаючи, що умова (10.8) не задовольняється ( $\sqrt{\eta}$  не є натуральним числом), знаходимо вертикальне переміщення (10.3) восі арки:

$$v(z) = e \frac{\eta - q}{\eta - 1} \sin \frac{\pi}{l} z \quad (\eta \neq 1, 4, 9, \dots). \quad (10.14)$$

При цьому рівняння (10.1) набуває вигляду:

$$(q - 1)^2 = (\eta - 1)^2 \left( 1 - \frac{4i^2}{e^2} \eta \right), \quad (10.15)$$

де  $i$  — радіус інерції поперечного перерізу,  $i^2 = I_x/F$ ;  $I_x$  — момент інерції поперечного перерізу арки відносно осі  $Ox$ , що перетинає вісню лінію арки, залишаючись при цьому перпендикулярною до восей  $Oy$ ,  $Oz$ .

Якщо  $\eta \rightarrow 1$ , остання формула дає  $q_1 = 1$ , що співпадає з (10.10), оскільки в даному випадку

$$a_1(f) = e, \quad a_1(p_1) = \frac{\pi^4 D}{l^4} e.$$

Звідси випливає, що формула (10.15) справедлива при  $\eta < 4$ .

Значенню  $\eta = 4$  відповідає основне ойлерове значення (10.12) розпираного зусилля і невизначене (з точністю до сталої  $c$ ) значення навантаження ( $q$ ) та прогинів ( $v$ ). Припускаючи далі, що умова  $\eta < 4$  задовольняється, знаходимо з формули (10.15), що

$$q = 1 \pm (1 - \eta) \sqrt{1 - (2i/e)^2 \eta} \quad (\eta < 4).$$

Коли процес навантаження починається від недеформованого стану ( $\eta = 0$  при  $q = 0$ ), матимемо однозначну залежність між параметрами навантаження і розпирання:

$$q = 1 + (\eta - 1)\sqrt{1 - (2i/e)^2\eta} \quad (\eta < 4).$$

З цієї формули видно, що максимальне значення параметра розпирання, при якому параметр навантаження набуває дійсні значення, становитиме:

$$\eta_{\max} = \frac{e^2}{4i^2}. \quad (10.16)$$

Цьому значенню параметра розпирання відповідає прямолінійна форма деформованої арки ( $v = f$ ).

Позначаючи  $v(l/2) = eV$ , на підставі (10.14) і (10.15) знайдемо залежність

$$q = V \left[ \frac{e^2}{4i^2} (V^2 - 3V + 2) + 1 \right] \quad (10.17)$$

між параметром  $q$  навантаження і величиною  $V$ , що характеризує прогин середини арки, рис. 27. Особливості цієї залежності ідентифікують, зокрема, похідні

$$\frac{dq}{dV} = \frac{e^2}{4i^2} \left( 3V^2 - 6V + 2 + \frac{4i^2}{e^2} \right), \quad \frac{d^2q}{dV^2} = \frac{3e^2}{2i^2} (V - 1).$$

Поєднання рівностей  $q = q(V, e, i)$  і  $dq(V, e, i)/dV = 0$ , наприклад, дозволяє відтворити графік  $g$  залежності

$$g = \frac{2V - 3}{3V^2 - 6V + 2} V^2$$

з відповідними асимптотами  $V - 1 = \mp 1/\sqrt{3}$ , середній гілці якого відповідають точки екстремуму функції  $q = q(V, e, i)$  при різних фіксованих  $e/i$ . Функція ж  $d^2q/dV^2 = d^2q(V, e, i)/dV^2$  допомагає розрізняти максимуми та мінімуми функції  $q = q(V, e, i)$ , а також контролювати області її опуклості-увігнутості [125].

З наведених аналітичних залежностей та рис. 27 випливає, що за помірної викривленості арки ( $e \leq 2i$ ) залежність між навантаженням  $q$  і прогином  $V$  є однозначною (практично лінійною при  $e < i$ ). Проте, якщо  $e > 2i$ , то малому зростанню навантаження, починаючи від нульового його значення, відповідатиме мале збільшення прогину середини арки (і навпаки) тільки доти, поки точка кривої  $q = q(V, e, i)$  при фіксованому  $e/i$  не досягне кривої



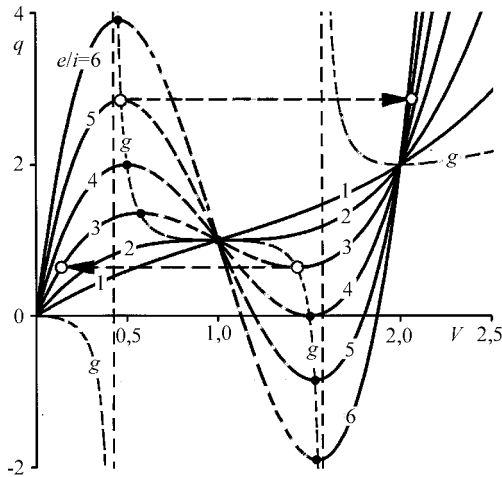


Рисунок 27 Графіки, що відображають взаємозалежність між параметром навантаження і прогином середини арки за різних значень параметрів арки.

$g$  (середньої її гілки). А от далі, щонайменше (будь-яке зникаюче мале) збільшення  $q$  призведе до помітного (стрибкоподібного) збільшення  $V$  (арка лускає — миттєво вельми помітно змінює форму рівноваги). Для прикладу на рис. 27 процес лускання, відповідний значенню параметра арки  $e/i = 5$ , відображено горизонтальним вектором, спрямованим праворуч). Розвантаження суттєво zdeформованої арки також може відбуватись з лусканням (приклад такого процесу для випадку  $e/i = 3$ , відображено на рис. 27 горизонтальним вектором, спрямованим ліворуч). Таке тлумачення процесу лускання арки є традиційним. Проте, воно далеко не бездоганне.

Позначмо через  $q^*, V^*$  значення  $q, V$ , що відповідають початку процесу лускання арки, а через  $V_m$  — значення величини  $V$  в мить завершення цього процесу. Зрозуміло, що  $q^*, V^*$  та  $V_m$  повинні задовольняти рівняння (10.17), причому  $V^*$  і  $V_m$  можна тлумачити як корені цього рівняння. Зважаючи на те, що  $V^*$  — двократний корінь, запишемо за Віетом:

$$2V^* + V_m = 3, \quad V^{*2} + 2V^*V_m = 2 + k^2, \quad V^{*2}V_m = k^2q_m,$$

де  $k = 2i/e$ . Звідси

$$V^* = 1 \mp \sqrt{\frac{1-k^2}{3}}, \quad V_m = 1 \pm 2\sqrt{\frac{1-k^2}{3}}, \quad q_m = 1 \pm \frac{2}{3} \frac{1-k^2}{k^2} \sqrt{\frac{1-k^2}{3}}. \quad (10.18)$$

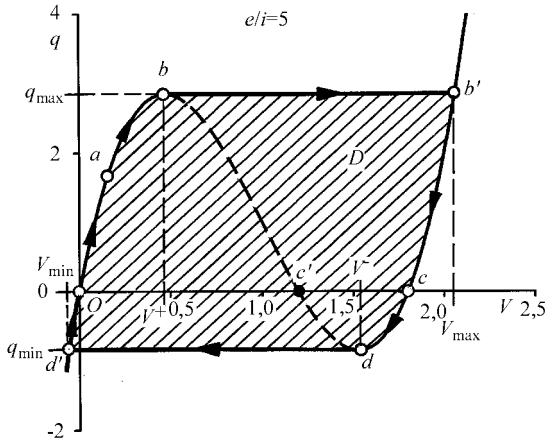


Рисунок 28 Графічне зображення процесів деформації арки.

Деформація арки пов'язана з виконанням над нею механічної роботи. За умовний вимірник елементарної роботи можна взяти величину  $dw = qdV$ . При деформації арки відповідно до характеристики (10.17) від стану  $V_0$  до стану  $V_1$  над нею повинна бути виконана (умовна) робота

$$W_{01} = \int_{V_0}^{V_1} dw = \int_{V_0}^{V_1} q dV = \frac{1}{4k^2} \left[ V^2(V^2 - 4V + 2(2 + k^2)) \right] \Big|_{V_0}^{V_1}. \quad (10.19)$$

Розглянемо замкнутий процес (цикл)  $abb'cdd'Oa$  деформації арки, початкові і завершенню якого відповідає деяка точка  $a$ , рис. 28 ( $e/i = 5$ ). При формальному тлумаченні прямого  $bb'$  та зворотного  $dd'$  пролускувань, довелося б визнати, що в процесі деформації арки над нею виконано механічну роботу, пропорційну площі заштрихованої області  $D$ . Оскільки арка в результаті циклової деформації свого стану не змінила, то наслідками виконання над нею роботи можуть бути закумуляована чи/та розвіяна в ній енергія в такій самій кількості. Проте, в аналітичній моделі арки акумулятивних чи/та дисипативних чинників не передбачено. Хоча, звичайно, можна припустити, що в якихось інших перерізах тіла арки цикли деформацій або залишаються незавершеними, або ж відбуваються в протилежному (у порівнянні з відображенням на рис. 28) напрямі; власне в цьому випадку можна сподіватись, що окремі перерізи арки здатні акумулювати енергію, забезпечуючи належні енергетичні стани арки в цілому. Уникаючи ж додаткових припущень і суперечностей, що пересічно супроводять їх, залишається визнати, що процеси "навантаження-деформація" відбуваються виключно у відповідності з характеристикою (10.17).

На підставі співвідношень (10.17), (10.18) знайдемо: при  $q = 0$

$$V_0 = 0, \quad V_0^- = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - k^2}, \quad V_0^+ = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - k^2}$$

( $V_0, V_0^-, V_0^+$  — абсциси точок перетину функції (10.17) з віссю абсцис; при  $k < 1/2$  таких точок є три, при  $k > 1/2$  — одна, при  $k = 1/2$  дві точки перетину збігаються в одну точку дотику  $V_0^- = V_0^+ = 3/2$ ); при  $V^* = V^+$

$$V^* = V^+ = 1 - \sqrt{\frac{1-k^2}{3}}, \quad V_m = V_{\max} = 1 + 2\sqrt{\frac{1-k^2}{3}}, \quad q_m = q_{\max} = 1 + \frac{2}{3} \frac{1-k^2}{k^2} \sqrt{\frac{1-k^2}{3}};$$

при  $V^* = V^-$

$$V^* = V^- = 1 + \sqrt{\frac{1-k^2}{3}}, \quad V_m = V_{\min} = 1 - 2\sqrt{\frac{1-k^2}{3}}, \quad q_m = q_{\min} = 1 - \frac{2}{3} \frac{1-k^2}{k^2} \sqrt{\frac{1-k^2}{3}}.$$

То ж, вдаючись до (10.19), можна обчислити (умовні) роботи

$$W_{Ob} = \left(\frac{k^2 + 2}{6k}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1-k^2}{3}}\right)^2, \quad W_{Obc'cb'} = \left(\frac{4k^2 - 1}{6k}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 + 2\sqrt{\frac{1-k^2}{3}}\right)^2.$$

Величина  $W_{Obc'cb'}$  може суттєво перевищувати величину  $W_{Ob}$ .

Звернемо, однак, увагу на тлумачення поняття лускання арки. Зауважимо (див. характеристику  $d'Oabc'dcb$  на рис. 28), що для утримування арки в деформованому стані до неї необхідно прикласти зусилля  $q$ , знак якого збігається зі знаком деформації  $V$ , доти, поки  $V < V_0^-$ . Але як тільки деформація досягне значення  $V = V_0^- + 0$ , арка за будь-якого додатного приросту деформації ( $\delta V > 0$ ) набуде властивості самовільно прямувати до стану ( $V = V_0^+, q = 0$ ), зображуваного точкою  $c$  (для утримування деякої деформації  $V_0^- + 0 \leq V \leq V_0^+ - 0$  в цьому випадку необхідно прикласти до арки відповідне зусилля  $q$ , знак якого є протилежним до знаку деформації  $V$ ). Аналогічно, арка, перебуваючи в деякому стані  $V = V_0^+ + 0$ , за будь-якого від'ємного приросту деформації ( $\delta V < 0$ ) починає прямувати до стану ( $V = V_0^-, q = 0$ ), зображуваного точкою  $c'$ . Взагалі кажучи, стани арки, яким відповідають деформації  $V_0^- + 0 \leq V \leq V_0^+ - 0$ , можна тлумачити як стани байдужої рівноваги.

Дослідимо тепер, як змінюється параметр навантаження зі зростанням  $\eta$ . Для цього знаходимо

$$\frac{dq}{d\eta} = \frac{1 + 2i^2/e^2 - 6(i/e)^2\eta}{\sqrt{1 - (2i/e)^2\eta}} \quad (\eta < 4). \quad (10.20)$$

При  $e^2 > 22i^2$  чисельник останнього виразу буде додатним в розглядуваній області зміни параметра навантаження ( $\eta < 4$ ), і отже, максимальне значення параметра навантаження досягатиметься при прямуванні параметра  $\eta$  до ойлерового значення:

$$q_{\max} = \lim_{\eta \rightarrow 4-0} q = 1 + 3\sqrt{1 - 16i^2/e^2} \quad (e^2 > 22i^2). \quad (10.21)$$

Якщо ж  $e^2 < 22i^2$ , то збільшення навантаження з ростом  $\eta$  буде відбуватися доти, доки параметр розпирання не досягне величини

$$\eta_0 = \frac{1}{3} + \frac{e^2}{6i^2},$$

причому похідна (10.17) змінить знак. При подальшому збільшенні  $\eta$  відбувається зменшення параметра навантаження.

Враховуючи умову (10.16), маємо:  $\eta_0 \leq \frac{e^2}{4i^2}$ , тобто

$$\frac{1}{3} + \frac{e^2}{6i^2} \leq \frac{e^2}{4i^2}, \quad e > 2i.$$

Отже, при  $2i < e < \sqrt{22}i$  максимальне значення параметра навантаження досягається при  $\eta = \eta_0$ :

$$q_{\max} = 1 + \frac{2}{9} \left( \frac{e^2}{i^2} - 1 \right) \sqrt{3(1 - 4i^2/e^2)} \quad (2i < e < \sqrt{22}i). \quad (10.22)$$

Цією формулою визначається граничне навантаження. Зауважимо, що при  $e > 2i$  граничного навантаження не існує (в такому випадку з певним наближенням арку можна замінити балкою).

Формулою (10.21) визначається (ойлерове) навантаження, при якому відбувається біфуркація форм рівноваги: поруч зі зміщеннями, визначуваними за формулами (10.14) і (10.15), можливою стає нова форма рівноваги при сталому (ойлеровому) розпиранні:

$$v = e \frac{\eta - q}{\eta - 1} \sin \frac{\pi}{l} z + c \sin \frac{2\pi}{l} z \quad (\eta = 4). \quad (10.23)$$

Підстановка цієї функції в формулу (10.1) дає рівність

$$(q - 1)^2 = 9 - 144 \frac{i^2}{e^2} - 36 \frac{c^2}{e^2}. \quad (10.24)$$

При  $c = 0$  остання рівність збігається з результатом (10.21). Отже, коли виникають нові форми рівноваги з ойлеровим розпиранням, навантаження повинно зменшуватися у відповідності з формулою (10.24). Це свідчить про те, що деформація, визначувана згідно з (10.23), є нестійкою.

З висловленого випливає, що формули (10.21) і (10.22) визначають критичне навантаження. Графік його зміни в залежності від відношення  $e/i$  зображено на рис. 29 кривою 1; частина цієї кривої, розташована ліворуч від виділеної точки, визначає граничне навантаження, а права частина — ойлерове.

Наведені вище висновки відповідають припущенню, що напруження в арці не перевищують границі пропорційності. Щоб визначити їх, знайдемо спочатку максимальні напруження при згині

$$|\sigma_{зг}|_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{D}{W} \left| \ddot{v} \left( \frac{l}{2} \right) \right|$$

та вісне напруження  $|\sigma_c| = H/F$  ( $M_{\max}$ ,  $W$  — максимальний згинальний момент і момент опору поперечного перерізу арки). Використовуючи формулу (10.14), одержуємо

$$|\sigma_{зг}|_{\max} = \frac{D}{W} \frac{\pi^2}{l^2} - \frac{\eta - q}{\eta - 1} e.$$

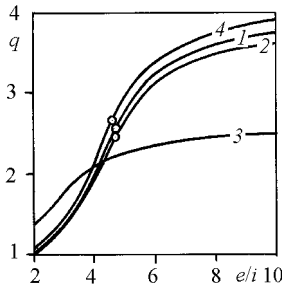


Рисунок 29 Графіки, що відображають вплив параметрів арки на критичне навантаження.

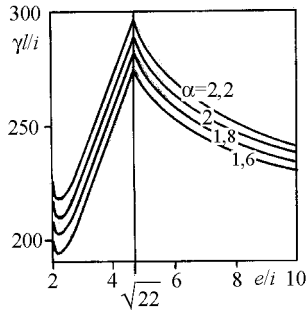


Рисунок 30 Умови, за яких досягається граничне напруження при критичному навантаженні.

Вісне ж напруження задовольняє умову

$$\frac{|\sigma_c|}{E^*} = \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 \eta.$$

Для сумарного напруження  $\sigma = |\sigma_{зг}| + |\sigma_c|$  матимемо формулу

$$\frac{\sigma}{E^*} = \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 \left( \eta + \alpha \frac{e}{i} - \frac{\eta - q}{\eta - 1} \right) \quad (D = E^* i^2 F), \quad (10.25)$$

де позначено  $\alpha = \frac{iF}{W}$ . Для прямокутного поперечного перерізу  $\alpha = \sqrt{3}$ , для кругового  $\alpha = 2$ .

Зобразимо границю пропорційності у вигляді

$$\sigma_n = \gamma^2 E \cdot 10^{-3} \quad (\gamma \approx 1).$$

Вважаючи  $\sigma = \sigma_n$ , з (10.25) отримуємо:

$$\frac{\gamma l}{i} = 10\pi \sqrt{10 \left( \eta + \alpha \frac{e}{i} - \frac{\eta - q}{\eta - 1} \right)}.$$

Залежність  $\gamma l/i$  від відношення  $e/i$ , при якій досягається гранична величина напруження при критичному навантаженні, наводиться на рис. 30. З наведених результатів випливає, що для випадку прямокутного поперечного перерізу розглядуваної арки закон Гука застосовний, якщо  $\gamma l/i \geq 280$ , і незастосовний при  $\gamma l/i \leq 210$ . Найбільша гнучкість вимагається при  $e\sqrt{22}i \approx 4,7i$ .

## 10.4 Двошарнірна арка. Застосування тригонометричних рядів

Функції  $f(z)$  і  $m_0(z)$  завжди можна зобразити рядами Фур'є:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad m_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_0) \sin \frac{n\pi}{l} z,$$

де коефіцієнти  $a_n(f)$ ,  $a_n(m_0)$  визначаються відповідно до формули (10.11).

Рівняння (10.2) для цього випадку набуває вигляду:

$$D \frac{d^2 v}{dz^2} + H v = \sum_{n=1}^{\infty} [H a_n(f) - q a_n(m_0)] \sin \frac{n\pi}{l} z.$$

Кладучи

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(v) \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad (10.26)$$

знаходимо

$$a_n(v) = \frac{H a_n(f) - q a_n(m_0)}{H - D \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2}. \quad (10.27)$$

Підставляючи (10.26) в (10.1), отримуємо:

$$\frac{Hl}{E^* F} = \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(v) \left[ a_n(f) - \frac{1}{2} a_n(v) \right] \left( \frac{l}{n\pi} \right)^2.$$

Звідси, згідно з (10.27), одержимо рівняння для визначення параметра навантаження ( $q$ ) при заданому розпиранні ( $H$ ):

$$h_0 - 2qh_1 + q^2 h_2 = 0, \quad (10.28)$$

де

$$h_0 = H \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(f) \frac{\left( 2D \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 - H \right) \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2}{\left( H - D \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right)^2} + \frac{4}{E^* F} \right],$$

$$h_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) a_n(m_0) \frac{D \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4}{\left( H - D \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right)^2}, \quad h_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(m_0) \frac{\left( \frac{n\pi}{l} \right)^2}{\left( H - D \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right)^2}.$$

Для  $H = D\pi^2/l^2$  знаменник формули (10.27) перетворюється на нуль. Вимагаючи при цьому, щоб анулювався і чисельник, та вважаючи, що  $a_1(m_0) \neq 0$ , знаходимо

$$q = H \frac{a_1(f)}{a_1(m_0)} = \frac{D\pi^2 a_1(f)}{l^2 a_1(m_0)}.$$

В цьому випадку формули (10.27) і (10.28) придатні до застосування при

$$H < \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 D. \quad (10.29)$$

Граничне навантаження знаходиться у півінтервалі (10.29), а ойлерове — на його межі  $H = 4\pi^2 D/l^2$ .

Ця умова еквівалентна нерівності  $a_1(p_1) \neq 0$ , оскільки  $a_1(p_1) = -\pi^2 a_1(m_0)/l^2$  внаслідок того, що  $m_0'' = -p_1$ . При навантаженні незмінного напрямку (додолу) умова  $a_1(p_1) \neq 0$  завжди справджується.

Розглянемо приклад синусоїдально викривленої арки, на яку діє зосереджена сила. Вважатимемо, що вісна лінія арки в ненавантаженому стані визначається рівнянням  $f = e \sin \pi z/l$ , а тому

$$a_1(f) = e, \quad a_n(f) = 0 \text{ при } n \geq 2. \quad (10.30)$$

Зосереджена сила  $P$ , прикладена в точці  $z = u$ . В цьому випадку згинальний момент при  $H = 0$  визначатиметься за формулою

$$qm_0(z) = \begin{cases} \frac{1}{l} P(l-u)z & z < u, \\ \frac{1}{l} Pu z & z > u. \end{cases}$$

Розгорнемо останній вираз у відповідний ряд Фур'є:

$$qm_0(z) = \frac{2P}{\pi^2} l \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} u \cdot \sin \frac{n\pi}{l} z. \quad (10.31)$$

Вважаючи тут параметром навантаження величину

$$q = \frac{2Pl^3}{\pi^4 eD}, \quad (10.32)$$

на підставі (10.31), знаходимо що

$$a_n(m_0) = \frac{\pi^2 De}{l^2 n^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{l} u. \quad (10.33)$$



Підставляючи (10.30) і (10.33) в (10.28) і досліджуючи отриманий результат, як це робилось в попередньому підрозділі, можна віднайти відповідне критичне значення параметра навантаження. Результати такого дослідження зображено графічно на рис. 29 кривими 2 ( $u = l/2$ ) і 3 ( $u = l/4$ ). В останньому випадку ( $u = l/4$ ) ойлерового навантаження не існує, а при  $u = l/2$  ойлеровим значенням навантаження відповідає частина кривої 2, що лежить праворуч від виділеної точки.

## 10.5 Двошарнірна рівномірно навантажена параболічна арка

Розглянемо арку, вісь якої в недеформованому стані є параболою і має максимальний підйом  $e$ :

$$f(z) = 4e \left( z/l - z^2/l^2 \right). \quad (10.34)$$

Нехай арка несе рівномірне розосереджене навантаження з інтенсивністю  $p = \text{const}$ . Для цього навантаження за формулою (10.11) матимемо такий перший коефіцієнт Фур'є

$$a_1(p) = \frac{4}{\pi} p.$$

Виберемо параметр навантаження  $q$  так, щоб перший коефіцієнт Фур'є  $a_1(p)$  в даному випадку та у випадку навантаження, заданого законом (10.13), співпадали (такий принцип збережемо і для випадку дії зосередженої сили, прикладеної до середини арки, коли параметр навантаження визначається за формулою (10.32)). Для цього потрібно покласти

$$q = \frac{4l^4 p}{\pi^5 D e}. \quad (10.35)$$

Диференціюючи (10.2), можна одержати для даної арки таке рівняння

$$D \frac{d^4 v}{dz^4} + H \frac{d^2 v}{dz^2} = p - \frac{8eH}{l^2}. \quad (10.36)$$

Розв'язок цього рівняння для випадку шарнірного закріплення, зокрема, має вигляд

$$v(z) = D \left( \frac{p}{H^2} - \frac{8e}{Hl^2} \right) \left[ \frac{\cos \sqrt{\frac{H}{D}} \left( \frac{l}{2} - 1 \right)}{\cos \sqrt{\frac{H}{D}} \frac{l}{2}} - 1 \right] - \left( \frac{p}{2H} - \frac{4e}{l^2} \right) z(l-z).$$

Підставляючи останній вираз в рівняння (10.1) та виконуючи операцію інтегрування, знаходимо рівняння для визначення параметра (10.35):

$$\left(\frac{\pi^5}{128}q - u^2\right)^2 \left(\frac{2}{3}u^3 - 5\operatorname{tg}u + 5u + u\operatorname{tg}u\right) + \left(\frac{\pi^5}{128}q - u^2\right) 4u^2 \left(\frac{1}{3}u^2 - \operatorname{tg}u + u\right) + \frac{i^3}{e^2}u^9 = 0, \quad (10.37)$$

де  $u = \sqrt{H/D}l/2$ . З рівняння (10.37) можна знайти ойлєрове навантаження для випадку  $u = \pi$ , коли розпирання визначається за формулою (10.12). Граничне навантаження визначається екстремальним значенням параметра навантаження  $q$  з рівняння (10.37) при  $u < \pi$ . Для цього потрібно знайти значення  $u$  таке, що  $dq/du|_{u=u_0} = 0$  ( $u < \pi$ ) та визначити параметр навантаження при  $u = u_0$ . Знайденим таким чином значенням критичного параметра навантаження відповідає крива 4 на рис 29.

## 10.6 Арка з затиснутими кінцями

При достатно малій силі  $H$  можна побудувати однозначний розв'язок рівняння (10.2) за будь-яких умов закріплення кінців. Позначимо цей розв'язок через  $v_1(z)$ . Граничне навантаження можна визначати, застосовуючи вказаний розв'язок та рівняння (10.1). Спосіб затиснення кінців арки при цьому жодної ролі не відіграватиме. Проте, знаходження ойлєрових значень в даному випадку потребує застосування більш загального підходу.

Зобразимо можливий для деякого (ойлєрового) розпирання неоднозначний розв'язок рівняння (10.36) так:

$$v(z) = v_1(z) + cv_c(z). \quad (10.38)$$

Функція  $v_1$  за домовленістю повинна бути розв'язком розглядуваної задачі, тобто задовольняти рівняння

$$D \frac{d^4 v_1}{dz^4} + H \frac{d^2 v_1}{dz^2} = p(z) + H \frac{d^2 f}{dz^2},$$

одержане з (10.2) диференціюванням, та відповідні граничні умови. Крім цього, розпирання  $H$  повинно задовольняти умову (10.1):

$$\frac{Hl}{EF} = \int_0^l \left( \dot{v}_1 \dot{f} - \frac{1}{2} \dot{v}_1^2 \right) dz. \quad (10.39)$$

Щоб при тому самому розпиранні допустимим виявився і розв'язок вигляду (10.38), функція  $v_c(z)$  повинна задовольняти рівняння

$$D \frac{d^4 v_c}{dz^4} + H \frac{d^2 v_c}{dz^2} = 0 \quad (10.40)$$

та умову

$$\int_0^l (\dot{v}_c \dot{f} - \dot{v}_c \dot{v}_1 + c \dot{v}_c^2) dz = 0.$$

Якщо навантаження тільки щойно досягло ойлєрового значення ( $c$  — безмежно мала величина), остання умова набуває вигляду

$$\int_0^l \dot{v}_c (f - \dot{v}_1) dz = 0. \quad (10.41)$$

Отже, задача про визначення ойлєрового розпирання може бути зведена до знаходження таких значень  $H$ , для яких існує розв'язок рівняння (10.40), що задовольняє задані граничні умови та співвідношення (10.41). Можливість задоволення співвідношення (10.41) залежить (при заданих граничних умовах) від форми арки (вигляду функції  $f(z)$ ) і типу навантаження. В загальному ж випадку вказана задача не розв'язується (ойлєрового навантаження не існує).

Звернемося до прикладу. Розглянемо параболічну арку (10.34) з затиснутими кінцями, яка несе рівномірно розподілене навантаження  $p$ . Для неї можна знайти

$$v_1(z) = \left( \frac{p}{H^2} - \frac{8e}{l^2} \right) \left\{ \frac{z^2 - lz}{2} + \sqrt{\frac{D}{H}} \frac{l}{2} \left[ \sin \sqrt{\frac{H}{D}} z + \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{H}{D}} \frac{l}{2} \left( \sqrt{\frac{H}{D}} z - 1 \right) \right] \right\}.$$

Підставляючи цей вираз в формулу (10.39), одержуємо рівняння для знаходження параметра навантаження (10.35):

$$\begin{aligned} & (5u^2 - 12 + 3u^2 \operatorname{ctg}^2 u + 9u \operatorname{ctg} u) \left( \frac{\pi^5}{128} q - u^2 \right)^2 + \\ & + 4u^2 (u^2 - 3 + 3u \operatorname{ctg} u) \left( \frac{\pi^5}{128} q - u^2 \right) + 3u^8 \frac{l^2}{e^2} = 0 \quad \left( u = \sqrt{\frac{H}{D}} \frac{l}{2} \right). \end{aligned} \quad (10.42)$$

Знайдемо тепер загальний розв'язок рівняння (10.40) для граничних умов

$$v_c(0) = \dot{v}_c(0) = v_c(l) = \dot{v}_c(l) = 0.$$

Для того, щоб існував такий розв'язок, потрібно виконання умови

$$4u \sin u \cos u - 4 \sin^2 u \cos^2 u = 4 \sin^4 u \quad \text{або} \quad (u \cos u - \sin u) \sin u = 0.$$



Рисунок 31 Зарисовки вигляду вісних ліній арки з затиснутими кінцями.

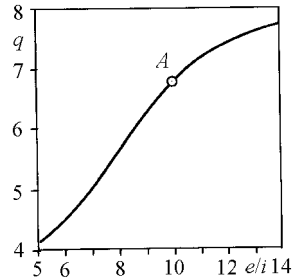


Рисунок 32 Графік, що відображає вплив параметрів параболічної арки на критичне навантаження.

Найменшому кореню цього рівняння ( $u = \pi$ ) відповідає значення  $H = H_k = 4\pi^2 D/l^2$ . Розв'язок рівняння (10.40) для цього значення  $H$  не задовольняє умову (10.41), бо функції  $\dot{v}_c(z)$ ,  $\dot{f}(z)$  і  $\dot{v}_1(z)$  змінюють знак одночасно, при цьому вираз під інтегралом у формулі (10.41) знаку не змінює.

Найменшим коренем рівняння  $u \cos u - \sin u = 0$  є число  $u = 4,493$ . Йому відповідає сила  $H = 80,8 D/l^2$ . При цій силі розв'язок рівняння (10.40) задовольняє умову (10.41). Зарисовка вигляду функції  $v_c$  наведена на рис. 31 (пунктиром показано вигляд розв'язку рівняння (10.40) при  $u = \pi$ ).

Підставляючи значення  $u = 4,493$  в рівняння (10.42), одержуємо ойлерове значення параметра  $q$ . Графічне зображення отриманої таким чином залежності подано на рис. 32. Як і раніше (див. рис. 29) точкою  $A$  позначено співвідношення між параметрами арки, для якого граничне та ойлерове навантаження співпадають. Частина кривої ліворуч від точки  $A$ , відповідає граничному навантаженню, а частина кривої праворуч — ойлеровому.

## 10.7 Прояв стисливості восі арки

Припустимо, що вісь арки нестислива. Такий випадок матиме місце, коли  $F = \infty$ ,  $I_x < \infty$ . При цьому можна користуватися рівняннями з попередніх підрозділів, кладучи в них  $i = \sqrt{I_x/F} = 0$ . Визначені таким чином значення критичного параметра навантаження для нестисливої арки становитимуть:

1. Синусоїдально викривлена арка: а) при синусоїдальному навантаженні —  $q = 4$ ; б) для зосередженого навантаження, прикладеного до середини арки —  $q = 3,89$ ; в) для зосередженого навантаження, прикладеного на віддалі  $u = l/4$  від опори —  $q = 2,59$ ;

2. Параболічна арка, яка несе рівномірно розосереджене навантаження: а) при шарнірному кріпленні —  $q = 4,13$ ; б) при затиснутих кінцях —  $q = 8,44$ .

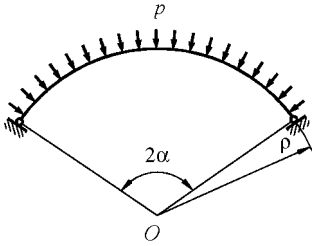


Рисунок 33 Схема колової арки.

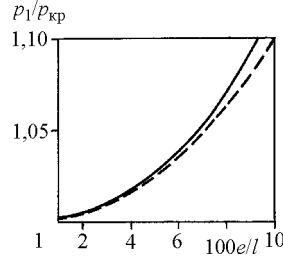


Рисунок 34 Характеристика похибок.

З проведених розрахунків випливає, що в межах п'ятивідсоткової похибки стисливістю вісної лінії арки можна завжди нехтувати, якщо  $e > 20i$ , а для двошарнірної арки — навіть при  $e > 12i$ . Викривленням вісної лінії можна нехтувати і вважати стержень прямою балкою тоді, коли  $e < i$ .

## 10.8 Рівномірно стиснута колова арка

Розглянемо арку, вісна лінія якої є дугою кола радіуса  $\rho$ . Довжину вісної лінії позначимо через  $L$ :  $L = 2\alpha\rho$ , де  $2\alpha$  — центральний кут дуги, утвореної віссю арки (рис. 33). Нехай арка навантажена гідростатичним тиском з інтенсивністю  $p$  на одиницю довжини осі арки. Коли ця арка є пологою, то з прийнятним рівнем точності радіальне гідростатичне навантаження можна замінити вертикальним зі сталою інтенсивністю, віднесеною до одиниці довжини горизонтальної проекції вісної лінії. Відстань між опорами даної арки і її підйом відповідно становлять:  $l = 2\rho\sin\alpha$ ,  $e = \rho(1 - \cos\alpha)$ .

Використовуючи результати, зображені на рис. 32 і рис. 29 (крива 4), можна визначити критичний параметр (10.35). У випадку нестисливої осі цей параметр має значення: для двошарнірної арки  $q = 4,13$ , а для затиснутої — 8,44. Відповідні цим випадкам критичні навантаження становлять:  $p_1 = 1,03\pi^5 D e / l^4$ ,  $p_2 = 2,11\pi^5 D e / l^4$ .

Для випадку непологої колової арки з нерозтяжною вісною лінією відомі точні розв'язки. Для двошарнірної, зокрема, арки справедлива формула [52]

$$p_k = \frac{D}{\rho} \left( \frac{4\pi^2}{L} - \frac{1}{\rho^2} \right).$$

Відношення  $\eta = p_1/p_k$  характеризує похибку, яку привносить припущення про пологість колової арки. Залежність значень цього відношення від параметрів арки зображена на рис. 34 суцільною кривою. Штрихова лінія на цьому ж рисунку відповідає затиснутій коловій арці.

### 11.1 Характеристичні ряди і їх фундаментальна властивість

Розглянемо деяку пружну систему, яка перебуває під впливом заданих навантажень. Ці навантаження можуть мати консервативні та неконсервативні складові  $p_k$ , що змінюються монотонно в деякій області, що містить точку  $p_k = 0$ . Система вважається такою, що при зміні параметрів навантажень у цій області існує певний стан її рівноваги (незбурена форма руху).

Нехай дослідження збурених форм руху даної системи (її малих коливань біля незбуреної форми рівноваги) зведено до відповідної однорідної крайової задачі для лінійного диференційного рівняння (системи рівнянь) з частинними похідними для деякої функції  $u(x, t)$ , де  $x$  — просторова координата або сукупність таких координат,  $t$  — час. Підстановка  $u(x, t) = f(x) \exp \lambda t$  приводить до відповідної узагальненої (багатопараметричної і деколи нелінійної) задачі на власні значення відносно параметрів навантажень  $p_k$  та характеристичного показника  $\lambda$ .

Будемо ставити за певними правилами у відповідність до даній системі (вказаній узагальненій задачі) деякий ряд за характеристичним показником  $\lambda$  з коефіцієнтами, що залежать від параметрів системи та прикладених до неї силових чинників, і називатимемо його характеристичним (неодновимірній системі, взагалі кажучи, відповідає злічення сукупність характеристичних рядів).

При цьому розрізнятимемо два випадки: в першому з них характеристичний ряд можна подати у вигляді

$$R_1 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(p, a, b) \lambda^k, \quad (11.1)$$

в другому — у вигляді

$$R_2 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}(p, a) \lambda^{2k}. \quad (11.2)$$

Тут  $p$ ,  $a$ ,  $b$  — параметри, які характеризують відповідно прикладені навантаження, властивості даної системи (розподіли мас і жорсткостей, геометричні характеристики тощо) та сили тертя, пропорційні швидкостям, причому  $p = (p_1, p_2, \dots, p_i)$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_j)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ .

Постановку задачі, яка приводить до другого випадку, називатимемо ідеалізованою (до відповідного характеристичного ряду (див. (11.2)) приходимо тоді, наприклад, коли не враховується тертя, коли надається перевага квазістатичному підходу до тлумачення задач про флатер систем у надзвуковому потоці газу, коли робиться припущення про ідеальність пружних властивостей матеріалу тощо). Уточнення задачі про малі коливання та стійкість рівноваги системи, навіть коли враховуються малі неідеальності, веде до першого випадку — характеристичного ряду (11.1).

Відповідні пружним системам характеристичні ряди вирізняються однією фундаментальною властивістю — вони є цілими аналітичними функціями характеристичного показника та параметрів навантажень (пересічно, функціями нульового роду) [24, 72, 82]. Ця властивість характеристичних рядів зумовлена, передовсім, аналітичною залежністю від параметрів  $\lambda$  і  $p$  загальних розв'язків диференціальних рівнянь і відповідних крайових умов. Власне на ній у значній мірі ґрунтується метод характеристичних рядів, власне вона використовується далі для розвитку засад методології застосування теорії цілих функцій до задач про коливання і стійкість багатопараметричних пружних систем [31 — 45].

## 11.2 Узагальнений критерій Рауса-Гурвіца та рівняння для визначення критичних навантажень (перший випадок зображення характеристичного ряду)

Для цілих функцій з дійсними коефіцієнтами відоме таке узагальнення теореми Гурвіца [83]: всі корені ряду (11.1) мають від'ємні дійсні частини тоді й тільки тоді, коли задовольняються нерівності

$$A_0 > 0; D_\mu > 0; \mu = 1, 2, \dots, \quad (11.3)$$

де

$$D_\mu = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & \dots & A_{2\mu-1} \\ A_0 & A_2 & \dots & A_{2\mu-2} \\ 0 & A_1 & \dots & A_{2\mu-3} \\ 0 & A_0 & \dots & A_{2\mu-4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_\mu \end{vmatrix}. \quad (11.4)$$

Зауважимо, що коли в (11.1), починаючи з деякого  $k$ , коефіцієнти  $A_{k+1}$ ,  $A_{k+2}$ , ... — нулі, то кількість нерівностей (11.3) стає зліченною і вони переходять у критерій Рауса-Гурвіца для многочлена  $k$ -го степеня (який для  $k=2n$  відповідає деякій системі з  $n$  ступенями вільності). При цьому, як відомо [52, 77], для кожного фіксованого  $k_0$  справджується тотожність

$$D_{k_0} \equiv A_{k_0} D_{k_0-1}$$

(тут в умовах (11.3) слід покладати  $\mu = 1, 2, \dots, k_0$ ). Якщо коефіцієнти такого многочлена залежать неперервно від деякого параметра  $p$  і при певному його значенні  $p = p_0$  задовольняють критерій Рауса-Гурвіца, то при неперервній зміні  $p$  серед нерівностей вигляду (11.3) першими можуть перестати виконуватися такі дві нерівності:

$$A_0 > 0; \quad D_{k_0-1} > 0. \quad (11.5)$$

Порушення першої з нерівностей (11.5) настає тоді, зрозуміло, коли у характеристичного полінома з'являється корінь, що дорівнює нулеві (втрата стійкості за Ойлером), другої — при появі чисто уявних коренів (автоколивна втрата стійкості). Зауважимо, що визначник  $D_{k_0-1}$  називають результатом дійсної та уявної частин многочлена  $p_{k_0}(\lambda)$  для  $\lambda = \pm\sqrt{-1} \omega$  [77].

Нехай рівновага системи є стійкою асимптотично за певних фіксованих значень параметрів (зокрема, коли  $p = 0$ ). При цьому всі корені рівняння  $R_1 = 0$  знаходяться у лівій півплощині комплексної змінної  $\lambda$ . Внаслідок неперервної залежності коефіцієнтів ряду (11.1), а отже і величин  $D_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ), від параметра  $p$  нестійкість може наставати двома шляхами: коли один з коренів рівняння перетворюється на нуль і далі стає додатним; коли два комплексно-спряжені корені перетворюються на чисто уявні і їх дійсні частини стають додатними.

Очевидно, поява нульового кореня зумовлена тут, як і для систем зі скінченною кількістю ступенів вільності, порушенням першої з нерівностей (11.3). Щоб з'ясувати питання про те, яка з них порушується при появі чисто уявних коренів, припустимо, що зі зміною параметра  $p$  на уявну вісь  $\text{Re} \lambda = 0$  виходять (а потім перетинають її) деякі з коренів ряду (11.1), розміщені в крузі  $|\lambda| < R$  ( $R$  — достатньо велике фіксоване число), і розглянемо послідовність часткових сум [31]

$$R_{1,n} \equiv \sum_{k=0}^n A_k(p, a, b) \lambda^k, \quad |\lambda| < R. \quad (11.6)$$



Члени цієї послідовності, завдяки її рівномірній збіжності до функції  $R_1$ , починаючи з деякого  $n > N$ , відрізняються від  $R_1$  як завгодно мало; з другого боку, в згаданому крузі може бути лише скінченна кількість коренів рівняння  $R_1 = 0$  (нулі цілої функції не мають граничної точки на скінченній віддалі). Тому для  $n > N$  усі корені многочленів (11.6) з круга  $|\lambda| < R$  будуть відрізнятися за модулем як завгодно мало від відповідних коренів функції  $R_1$ . Застосовуючи до цих поліномів кожного разу другу з нерівностей (11.5) для  $k_0 = n+1, n+2, \dots$ , а також враховуючи сказане щодо нульового кореня, одержуємо відповідно два рівняння для дослідження стійкості:

$$A_0 = 0; \quad A = 0, \quad (11.7)$$

де  $A$  — визначник, який одержується із (11.4) при необмеженому збільшенні кількості рядків та стовпців.

Позначимо найменший корінь першого з рівнянь (11.7) через  $p_0$ , другого — через  $p_*$ . Для визначення  $p_*$  можна вдатися до процесу послідовного знаходження найменших коренів  $p_{*k}$  низки визначників  $D_k$ ,  $k = n+1, n+2, \dots$ , (при цьому питання про досягнуту точність вимагає додаткового розгляду; в подальшому воно ефективно розв'язується шляхом побудови відповідних послідовностей двобічних оцінок).

Отже маємо такий висновок: якщо зі збільшенням параметра навантаження настає нестійкість, то критичне значення цього параметра для системи, котрій відповідає характеристичний ряд (11.1), співпадає з меншим із значень  $p_0, p_*$ . При цьому система втрачає стійкість за Ойлером (дивергенція), якщо  $p_0 < p_*$ , і шляхом автоколивань (флатера), коли  $p_* < p_0$ .

### 11.3 Узагальнення критерія аперіодичної стійкості та загальні рівняння для визначення критичних навантажень (другий випадок зображення характеристичного ряду)

Звернемося спочатку до викладеного в розділі 8. Лінійна динамічна система називається аперіодично стійкою, якщо її характеристичний многочлен

$$\psi(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n \quad (a_i > 0)$$

має тільки дійсні від'ємні корені. Відомо, що всі корені рівняння  $\psi(s) = 0$  від'ємні (і прості) тоді й тільки тоді, коли функція

$$\phi(z) = \psi(z^2) + z\psi'(z^2)$$

є многочленом Гурвіца.

Покажемо, що наведений критерій можна узагальнити настільки, щоб він став застосовним до більш широкого класу динамічних систем.

Нехай задано цілу функцію роду нуль з дійсними коефіцієнтами, яка має безмежну кількість коренів, причому всі вони — від’ємні та прості. Запишемо для цієї функції відповідний ряд Маклорена

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (11.8)$$

Із формул Вієта випливає, що всі коефіцієнти  $a_n$ , мають однакові знаки; у разі  $a_0 > 0$  всі вони є додатними.

Звернемося до низки класифікаційних означень цілих функцій [83]. Ціла функція називається Н-функцією (функцією, що належить до класу Н) відносно даної замкненої півплощини (наприклад, нижньої), якщо вона не має в цій замкненій півплощині коренів. Натомість, ціла функція називається функцією класу В, якщо для кожного  $\eta > 0$  справджується нерівність

$$|\zeta(z)| = \left| \frac{F(z)}{\bar{F}(z)} \right| = \left| \frac{g(z) + ih(z)}{g(z) - ih(z)} \right| < 1 + \eta$$

для всіх достатньо великих за модулем  $z$ , що лежать у верхній півплощині  $\text{Im } z > 0$ . Ціла функція називається функцією класу НВ, якщо вона належить як до класу Н, так і до класу В. Іншими словами, клас НВ утворюють функції класу В, які не мають нулів у нижній півплощині.

Введемо функцію [33]

$$f(z) = \varphi(z^2) + z \varphi'(z^2) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (na_n z^{2n-1} + a_n z^{2n}),$$

а також функцію

$$F(z) = f(iz) = g(z) + ih(z) \quad (i = \sqrt{-1}),$$

в якій

$$g(z) = a_0 - a_1 z^2 + a_2 z^4 - \dots = \varphi(-z^2),$$

$$h(z) = a_1 z - 2a_2 z^3 + 3a_3 z^5 - \dots = z \varphi'(-z^2).$$

Очевидно, що функцію  $\varphi(z)$  можна зобразити як добуток

$$\varphi(z) = a_0 \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{\alpha_k} \right) \quad (\alpha_k < 0).$$

Звідси випливає, що  $g(z)$  і  $h(z)$  можна записати так:

$$g(z) = a_0 \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_n}\right); \quad h(z) = a_1 z \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\nu_n}\right);$$

тут всі корені  $\mu_n$  і  $\nu_n$  дійсні та задовольняють нерівності

$$\dots < \nu_{-2} < \mu_{-2} < \nu_{-1} < \mu_{-1} < 0 < \mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \dots$$

Тому, за відомою теоремою [83], функція  $F(z)$  належить до класу НВ.

Навпаки, якщо  $F(z)$  належить до класу НВ, то оскільки всі корені функцій  $g(z)$  і  $h(z)$  є дійсними, то функції

$$g(\sqrt{z}) = a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - \dots; \quad \frac{h(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = a_1 - 2a_2 z + 3a_3 z^2 - \dots$$

мають корені всі додатні. Отже, всі корені функції  $\varphi(z)$  (а також її похідної) — від'ємні.

Таким чином, справедливим є твердження: ціла дійсна функція роду нуль  $\varphi(z)$  має всі корені від'ємні та прості тоді й тільки тоді, коли функція  $F(z)$  належить до класу НВ. Застосувавши до  $F(z)$  узагальнений критерій Гурвіца, висловлене твердження можна сформулювати так: необхідними та достатніми умовами для того, щоб усі корені цілої дійсної функції (11.8) були від'ємними та простими, є виконання нерівностей

$$a_0 > 0; \quad \tilde{D}_\mu > 0; \quad \mu = 1, 2, \dots, \quad (11.9)$$

де  $\tilde{D}_\mu$  — визначники, одержані із (11.4) заміною

$$A_{2\mu} = a_\mu, \quad A_{2\mu-1} = \mu a_\mu. \quad (11.10)$$

Відзначимо, що у випадках, коли  $\varphi(z)$  — многочлен, узагальнені умови аперіодичної стійкості (11.9) — (11.10) співпадають з відомими умовами.

Розглянемо тепер безпосередньо випадок, коли характеристичний ряд має вигляд (11.2). Тут спостерігається критичний випадок за Ляпуновим, оскільки корені рівняння  $R_2 = 0$ , можуть бути чисто уявними. При цьому стійкість можлива, якщо всі корені  $\lambda_i^2$  ряду (11.2) — від'ємні; нестійкість настає при появі серед коренів додатних або комплексних.

Вдаючись до міркувань, аналогічних до тих, якими довелось керуватися при аналізі першого випадку характеристичного ряду, та застосовуючи узагальнений критерій аперіодичної стійкості, дійдемо такого висновку: якщо із збільшенням параметрів навантажень настає нестійкість, то "критичне" значення відповідного параметра для системи, якій відповідає

характеристичний ряд (11.2), співпадає з меншим із значень величин  $\tilde{p}_0$ ,  $\tilde{p}^*$ , що є найменшими коренями рівнянь

$$B_0 = 0; \quad B = 0,$$

де  $B$  — визначник, одержаний із визначника  $A$  (11.7) заміною

$$A_0 = B_0; \quad A_{2\mu-1} = \mu B_{2\mu}; \quad A_{2\mu} = B_{2\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots). \quad (11.11)$$

Зауважимо таке. Якщо в даному випадку має місце ойлерова втрата стійкості, то значення величин  $p_0$  і  $\tilde{p}_0$  співпадають ( $A_0 \equiv B_0$ ) і вони дійсно є критичними незалежно від того, чи “неідеальності” враховуються, чи ні.

## 11.4 Узагальнена теорема Ерміта-Білера

В рамках якісної теорії малих коливань і стійкості континуально-дискретних пружних систем важливе місце посідає класичний критерій Ерміта-Білера стійкості многочленів, а також наведене тут його узагальнення на цілі функції.

Справедливою є така теорема [83]: щоби функції  $g(z)$  і  $h(z)$  склали нормовану дійсну пару, або, що рівноцінно, щоби функція

$$F(z) = g(z) + ih(z)$$

належала до класу НВ, необхідно і достатно, щоб  $g(z)$  і  $h(z)$  мали таку структуру:

$$g(z) = a e^{u(z)} (z - a_0) \prod_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_v} \right) e^{P_v \left( \frac{z}{a_v} \right)};$$

$$h(z) = b e^{v(z)} (z - b_0) \prod_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{b_v} \right) e^{P_v \left( \frac{z}{b_v} \right)},$$

де всі корені  $a_i$  та  $b_i$  дійсні і задовольняють нерівності

$$\dots < a_{-2} < b_{-2} < a_{-1} < b_{-1} < a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \dots, \quad b_{-1} < 0 < a_1;$$

цілі дійсні функції  $u(z)$ ,  $v(z)$  і показники Вейерштраса  $P_v$  такі, що ряд

$$f(z) = u(z) - v(z) + \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left[ P_v \left( \frac{z}{a_v} \right) - P_v \left( \frac{z}{b_v} \right) \right] \quad (11.12)$$

збігається до константи, а сталі  $a$  та  $b$  мають однаковий знак.

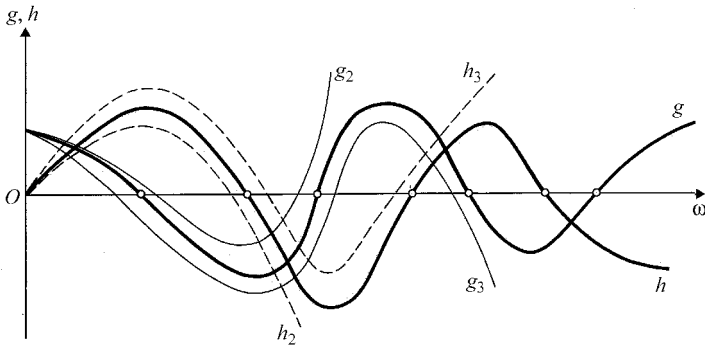


Рисунок 35 Зображення функцій  $g = g(\omega)$  і  $h = h(\omega)$ , що складають дійсну пару.

Корисною є також така теорема. Функція  $F(z)$  належить до класу НВ тоді й тільки тоді, коли: а) усі корені функцій  $g(z)$  і  $h(z)$  дійсні, прості та чергуються один з одним; б) ряд (11.12) збігається до константи; в) умова  $h'(x)g(x) - h(x)g'(x) > 0$  виконується хоча б для одного дійсного значення  $x$ .

Ця теорема є, як відомо, узагальненням теореми Ерміта-Білера на цілі трансцендентні функції. Новою суттєвою умовою тут є вимога б) [83]. Зазначимо, що для многочленів і взагалі цілих функцій порядку нижчого 1 ця умова автоматично виконується [83].

Очевидно, що для характеристичних рядів вигляду (11.1)

$$h'(0)g(0) - h(0)g'(0) > 0$$

( $p < p_{кр}$ ;  $p_{кр}$  — критичне значення параметра навантаження  $p$ ). Тому необхідну та достатню умову асимптотичної стійкості можна сформулювати в цьому випадку так: всі корені рівняння  $R_1 = 0$  лежать у лівій півплощині  $\text{Re } \lambda < 0$  тоді й тільки тоді, коли функції  $g(\omega)$  і  $h(\omega)$  утворюють нормовану дійсну пару.

Оскільки для систем, що розглядаються тут, при значеннях параметра навантаження  $p < p_*$  вимоги б) і в) явно виконуються, то залишається, по суті, визначальною тільки вимога: всі корені функцій  $g(\omega)$  і  $h(\omega)$  повинні бути дійсними, простими та чергуватися один з одним за будь-якого фіксованого значення  $p \in [0, p_*)$  (рис. 35; зображено лише праву півплощину, оскільки  $g_1(\omega^2)$  — функція парна, а  $\omega h_1(\omega^2)$  — непарна).

Зауважимо, що випадок, коли характеристичний ряд задачі має вигляд (11.2), зводиться до тільки що розглянутого за допомогою узагальненого критерія аперіодичної стійкості.

## 11.5 Двобічні послідовності оцінок критичних значень параметра навантаження при автоколивній втраті системою стійкості

Нехай деяка пружна система з розподіленими параметрами, що схильна втратити стійкість шляхом автоколивань при певному критичному значенні  $p = p_*$ . параметра навантаження, виконує малі коливання біля досліджуваної форми рівноваги. Припустимо, що характеристичний ряд цієї системи має вигляд (11.1) і втрата стійкості зумовлена переходом у праву півплощину  $\text{Re} \lambda < 0$  деяких коренів цього ряду, розташованих у крузі  $|\lambda| < R$ . В підрозділі 11.2 знаходження значення  $p_*$  було зведене до процесу, пов'язаного з визначенням відповідних нулів послідовності визначників Гурвіца все більш високих порядків. Покажемо, що для визначення критичного значення  $p_*$  параметра навантаження можна використовувати двобічні оцінки; при цьому достатню точність, як правило, вдається досягти, використовуючи визначники Гурвіца невисоких порядків [22 — 25, 31, 81, 95].

Запишемо пару відповідних характеристичному ряду (11.1) функцій

$$g(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{2n} \omega^{2n}; \quad h(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} A_{2n-1} \omega^{2n-1}. \quad (11.13)$$

Окреслимо властивості цих функцій, які використовуватимуться далі: для значень параметра навантаження, менших від критичного, вони утворюють дійсну пару, так що всі їх корені є дійсними, простими і чергуються один з одним; кожна з них є також функцією роду  $1^*$ , тобто належить до класу функцій, що є замиканням многочленів з дійсними та простими коренями [83].

Розглянемо, зокрема, деяку дійсну цілу функцію роду  $1^*$

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \quad (a_0 > 0) \quad (11.14)$$

і від'ємними і простими коренями. Відповідна їй послідовність часткових сум

$$F_n(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11.15)$$

збігається рівномірно до (11.14), причому корені многочленів (11.15) також є від'ємними і простими (хоча б починаючи з деякого  $n$ ).

Позначимо суму коренів многочлена  $F_n(s)$  через

$$J(n) = \sum_{i=1}^n s_i = -a_{n-1} a_n^{-1} \quad (s_i < 0)$$

і віднайдемо умови, за виконання яких справджуються нерівності

$$F_{2m-1}(s) < F_{2m+1}(s) < F_{2m+2}(s) < F_{2m}(s). \quad (11.16)$$

З урахуванням (11.15) для крайніх нерівностей (11.16) маємо:

$$F_{2m} - F_{2m+2} = -s^{2m+1}(a_{2m+1} + a_{2m+2}s) > 0,$$

$$F_{2m-1} - F_{2m-1} = s^{2m}(a_{2m} + a_{2m+1}s) > 0.$$

Отже, для  $s < 0$  ці нерівності виконуються, якщо відповідно

$$s > J(2m+2), \quad s > J(2m+1).$$

На підставі відомої теореми Гюа (див., наприклад, [84]) для многочленів (11.15) одержуємо:

$$J(2m+1) > J(2m+2) \quad (m=1, 2, \dots).$$

Враховуючи це, а також те, що середня нерівність (11.16) виконується для будь-яких  $s$  і  $m$ , маємо такий висновок: елементи послідовності (11.15) задовольняють нерівності (11.16) для  $s > J(2m+2)$ .

Звідси випливає така властивість частинних сум (11.15): для вказаних значень  $s$  "парна" послідовність  $\{F_{2m}\}$  наближає функцію (є наближенням функції)  $F(s)$  згори, а "непарна" послідовність  $\{F_{2m+1}\}$  — здолу.

Розглянемо тепер послідовності многочленів, що відповідають функціям (11.13)

$$g_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{2k} \omega^{2k}; \quad h_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A_{2k-1} \omega^{2k-1}. \quad (11.17)$$

Завдяки окресленим вище властивостям, ці многочлени утворюють дійсні пари функцій (хоча б починаючи з деякого  $n$ ). При цьому послідовність  $\{g_{2m}\}$  наближає функцію  $g$  згори, а  $\{g_{2m+1}\}$  — здолу; натомість послідовність  $\{h_{2m}\}$  наближає функцію  $h$  здолу, а  $\{h_{2m+1}\}$  — згори (див. рис. 35; тут  $m=1$ ).

З наближенням параметра  $p$  до значення  $p_*$  деякі сусідні корені функцій (11.13) наближаються один до одного, збігаючись в один корінь при  $p = p_*$ , так що ці функції перестають утворювати при деякому  $p = p_* + \varepsilon$  дійсну пару. Те ж саме відбувається і з парами многочленів (11.17) для відповідних значень параметра навантаження. Позначимо відповідно через

$$P_{2m}, P_{2m+1}, P_{2m+2}, P_{2m+1}, P_{2m+1}, 2m$$

найменші значення параметра  $p$ , для яких зливаються корені многочленів

$$g_{2m}, h_{2m}, g_{2m+1}, h_{2m+1}, g_{2m+2}, h_{2m+2}, g_{2m+1}, h_{2m}.$$

Нехай втрата стійкості відбувається, наприклад, внаслідок злиття при  $p = p^*$  сусідніх коренів функцій (11.13) з непарними номерами (корені функції  $h$  нумеруються без урахування нульового кореня). Із сказаного вище випливає, що із зміною параметра  $p$  корені дійсних пар  $g_{2m}$  і  $h_{2m}$  можуть зливатися тільки при значеннях  $p_{2m} < p^*$  (раніше), а корені пар  $g_{2m+1}$  і  $h_{2m+1}$  лише при  $p_{2m+1} > p^*$  (пізніше, ніж відповідні корені дійсної пари функцій (11.13)).

Оскільки, крім цього, із збільшенням  $m$ , многочлени  $g_{2m}$  і  $h_{2m}$ , які рівномірно для значень  $\omega < R$  наближають функції відповідно  $g$  і  $h$ , перестають утворювати дійсні пари при все ще дещо більших, ніж  $p_{2m}$ , значеннях параметра навантаження, а  $g_{2m+1}$  і  $h_{2m+1}$  — при значеннях, усе ще дещо менших, ніж  $p_{2m+1}$ , то в даному випадку справджуються такі двобічні послідовності оцінок:

$$p_{2m} < p_{2m+2} < \dots < p^* < \dots < p_{2m+3} < p_{2m+1}. \quad (11.18)$$

При цьому для обчислення значень критичного навантаження з нестачею ( $p_{2m}, p_{2m+1}, \dots$ ) маємо рівняння

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & \dots & A_{8m-1} \\ A_0 & A_2 & A_4 & \dots & A_{8m-2} \\ 0 & A_1 & A_3 & \dots & A_{8m-3} \\ 0 & A_0 & A_2 & \dots & A_{8m-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{4m} \end{vmatrix} = 0, \quad (11.19)$$

а для визначення значень критичного навантаження з лишком ( $p_{2m+1}, p_{2m+3}, \dots$ ) — рівняння

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & \dots & A_{8m+3} \\ A_0 & A_2 & A_4 & \dots & A_{8m+2} \\ 0 & A_1 & A_3 & \dots & A_{8m+1} \\ 0 & A_0 & A_2 & \dots & A_{8m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{4m+2} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.20)$$



Елементи  $A_i$  необхідно замінити на нулі, коли йдеться про визначник в рівнянні (11.19) для  $i > 4m$ , і визначник в рівнянні (11.20) для  $i > 4m + 2$ . Зазначимо також, що оскільки послідовність  $\{p_{2m}\}$  монотонно зростає і є обмеженою згори значенням  $p^*$ , а  $\{p_{2m+1}\}$  монотонно спадає і обмежена здолу тим самим значенням  $p^*$ , то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} p_{2m+1} = p^*.$$

Розглянутий випадок автоколивної втрати стійкості, що зумовлена злиттям коренів з непарними номерами, зустрічається найчастіше; причому, як підтверджують численні приклади, при втраті стійкості зливаються перші корені функцій (11.13). В таких випадках достатно близькі, як правило, нижня та верхня оцінки визначаються з використанням детермінантів (11.19) і (11.20) третього та п'ятого порядків відповідно ( $m = 1$ ).

Виявляється, що для одержання верхньої оцінки критичного значення навантаження пересічно можна використовувати головний мінор визначника третього порядку в рівнянні (11.20). То ж матимемо найпростіші двобічні оцінки критичного навантаження

$$p_2 < p^* < p'_3,$$

де  $p_2$ , і  $p'_3$ , — найменші за модулем корені рівнянь

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Підкреслимо, що власне ці найпростіші оцінки є досить ефективними при розв'язуванні багатьох конкретних задач практичного спрямування. Зокрема, є сенс наголосити на тому, що верхня оцінка перевищує нижню, як правило, не більш як на 3 %).

Важливо зазначити, що і у випадках ідеалізованої постановки задач, коли характеристичні ряди мають вигляд (11.2), для критичних значень навантажень при автоколивній втраті системою стійкості справджуються двобічні послідовності оцінок, подібні до послідовностей (11.18). Їх можна побудувати, використовуючи узагальнений критерій аперіодичної стійкості, цілком так само, як це було зроблено вище у випадку характеристичних рядів (11.1). При цьому відповідні рівняння для визначення критичних навантажень (з нестачею та з лишком) можна отримати з наведених вище рівнянь (11.19) та інших заміною (11.11).

Зокрема, найпростіша двобічна оцінка у випадку ідеалізованої постановки задач має вигляд

$$\tilde{p}_2 < \tilde{p}^* < \tilde{p}'_3,$$

де  $\tilde{p}_2$  і  $\tilde{p}'_3$  найменші за модулем корені рівнянь

$$\begin{vmatrix} B_2 & 2B_4 & 0 \\ B_0 & B_2 & B_4 \\ 0 & B_2 & 2B_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B_2 & 2B_4 & 3B_6 \\ B_0 & B_2 & B_4 \\ 0 & B_2 & 2B_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.21)$$

З (11.21) видно, що "найгрубіші" наближення згори до значення  $\tilde{p}^*$  можна визначати також і за допомогою рівнянь

$$B_2 = 0, \quad B_2^2 - 2B_0B_4 = 0.$$

## 11.6 Ефект дестабілізації та умови його відсутності

Припустимо, що деяка пружна система втрачає стійкість рівноваги шляхом автоколивань. Тоді, відповідно до викладеного в 11.1, одержане у першому випадку зображення характеристичного ряду (див. (11.1)) значення навантаження  $p_*$  є критичним, оскільки при  $p < p_*$  досліджувана форма рівноваги — стійка асимптотично, а при  $p > p_*$  — нестійка. В другому випадку (ідеалізована постановка задачі) "критичне" значення  $\tilde{p}^*$  є таким, що для  $p > \tilde{p}^*$  дана форма рівноваги є нестійкою, якщо ж  $p < \tilde{p}^*$ , то щодо (не)стійкості без додаткового дослідження нічого конкретного стверджувати нема підстав [33, 37, 44, 52, 54].

У багатьох працях [55, 85, 86, 87] чисельними засобами з'ясовано, що критичне значення  $p_*$ , визначуване з урахуванням малих неідеальностей, виявляється меншим від відповідного значення  $\tilde{p}^*$  (або за певних співвідношень між параметрами системи дорівнює йому); тобто у випадках автоколивної втрати стійкості можлива так звана дестабілізація, причому значення  $p_*$  і  $\tilde{p}^*$  можуть суттєво відрізнятись одне від одного.

У зв'язку з цим виникає необхідність як можна більш вичерпного вивчення можливого рівня дестабілізації та умов її відсутності (умов дотримання рівності  $\tilde{p}^* = p_*$ ). Тут обмежимося, головним чином, дослідженням умов відсутності дестабілізації, зважаючи на те, що в науковій літературі пересічно з'ясовують лише "критичне" значення  $\tilde{p}^*$ , та беручи до уваги те, що наявність цих умов дозволила б у відповідних випадках обмежитися простішим у математичному відношенні розглядом задачі в ідеалізованій постановці.

Питання, пов'язані з ефектом дестабілізації, розглядатимемо для систем з довільною кількістю ступенів вільності, які мають таку властивість: якщо при дослідженні задачі малі неідеальності враховуються, то відповідний характеристичний ряд (многочлен) має вигляд (11.1), якщо ж вони не враховуються, то характеристичний ряд набуває вигляду (11.2); до того ж справджуються співвідношення

$$B_{2k} = A_{2k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

В цьому випадку ряди (11.1), (11.2) можна зобразити так:

$$R_1(i\omega) = g_1(\omega^2) + i\omega h_1(\omega^2) \quad (i = \sqrt{-1}), \quad R_2(i\omega) = g_1(\omega^2),$$

де  $\omega$  — частотний параметр;

$$\begin{aligned} g_1(\omega^2) &= A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 - A_6\omega^6 + \dots, \\ h_1(\omega^2) &= A_1 - A_3\omega^2 + A_5\omega^4 - A_7\omega^6 + \dots \end{aligned} \quad (11.22)$$

Покажемо спочатку, що тут виконується нерівність  $p_* \leq \tilde{p}_*$ , причому, як правило, ефект дестабілізації має місце. Необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості полягають у цьому, що всі корені функцій (11.22) повинні бути дійсними, простими та чергуватися один з одним (див. 11.4). При цьому критичне значення  $p_*$  є найменшим значенням параметра  $p$ , при якому ці функції перестають утворювати дійсну пару; втрата стійкості зумовлена злиттям хоча б двох сусідніх коренів рівнянь

$$g_1(\omega^2) = 0, \quad h_1(\omega^2) = 0 \quad (11.23)$$

(за винятком нульового кореня, оскільки втрата стійкості не є ойлеровою).

Аналогічно, застосовуючи узагальнений критерій аперіодичної стійкості, необхідні та достатні умови того, що всі корені  $\lambda_i^2$  рівняння  $R_2 = 0$  є від'ємними і простими, можна сформулювати так:  $\lambda_i^2 < 0 \forall i$ ,  $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$  ( $i \neq j$ ) тоді й тільки тоді, коли дійсну пару утворюють функції  $g_1(\omega^2)$  і  $\omega g_1'(\omega^2)$ . При цьому "критичне" значення  $\tilde{p}_*$  є найменшим значенням параметра навантаження, для якого ці функції перестають утворювати дійсну пару, так що для  $p = \tilde{p}_*$  стають кратними, а для  $p > \tilde{p}_*$  перестають бути дійсними хоча б два сусідні корені рівнянь

$$g_1(\omega^2) = 0, \quad g_1'(\omega^2) = 0 \quad (11.24)$$

(рис. 36). Зауважимо, що тут при  $p = \tilde{p}_*$  два сусідні корені першого рівняння (11.24) (тобто частоти системи  $\omega_i^2$ ,  $\omega_{i+1}^2$ ;  $\omega_i^2 = \omega_{i+1}^2$ ), завжди співпадають з одним (розміщеним при  $p < \tilde{p}_*$  між  $\omega_i^2$  і  $\omega_{i+1}^2$ ) коренем другого рівняння (11.24).

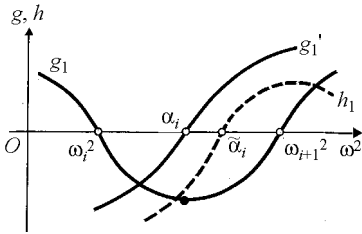


Рисунок 36 Ілюстрація наявності ефекту дестабілізації та формальних умов його зникання (внаслідок злиття, з одного боку, суміжних коренів дійсної пари функцій  $g_1$  і  $h_1$  та, з другого, — відповідних коренів пари функцій  $g_1$  і  $g_1'$ ).

Отже, зі зміною параметра  $p$  функції (11.23) перестають бути дійсною парою, взагалі кажучи, раніше, ніж функції (11.24). З цього й випливає нерівність  $p_* \leq \tilde{p}_*$ .

Розглянемо тепер умови відсутності дестабілізації. Позначимо через  $\omega_i^2(p)$ ,  $\omega_{i+1}^2(p)$  сусідні нулі функції  $g_1(\omega^2)$ , які визначають той інтервал

$$J = \omega_{i+1}^2(0) - \omega_i^2(0),$$

в якому при  $p = \tilde{p}_*$  порушуються умови дійсності пари функцій (11.23), а через  $\tilde{\alpha}_i(p)$ ,  $\alpha_i(p)$  — нулі функцій  $h_1(\omega^2)$  і  $g_1'(\omega^2)$  із того самого інтервалу  $J$  (див. рис. 36). Ефект дестабілізації можна оцінити величиною

$$r(p_*) = \frac{1}{2} J |\tilde{\alpha}_i(p_*) - \alpha_i(p_*)|. \quad (11.25)$$

За таких позначень, беручи до уваги співвідношення

$$\alpha_i(\tilde{p}_*) = \omega_i^2(\tilde{p}_*) = \tilde{\omega}_{i+1}^2(\tilde{p}_*), \quad \tilde{\alpha}_i(p_*) = \omega_i^2(p_*) \quad \text{або} \quad \tilde{\alpha}_i(p_*) = \omega_{i+1}^2(p_*),$$

для  $p = \tilde{p}_*$  маємо рівність  $r(p_*) = 0$  як необхідну ознаку відсутності дестабілізації. Навпаки, якщо виконується рівність, то справджується і рівність  $p_* = \tilde{p}_*$ , оскільки

$$\alpha_i(p_*) = \tilde{\alpha}_i(p_*) = \omega_i^2(p_*) = \omega_{i+1}^2(p_*).$$

Таким чином, дестабілізація відсутня тоді й тільки тоді, коли  $r(p_*) = 0$ .

Еквівалентним до тільки що висловленого є таке твердження: для відсутності дестабілізації необхідно і достатно виконання рівності

$$R[\omega_i^2(p_*)] = 0, \quad (11.26)$$

де  $R$  — результат функцій  $h_1(\omega^2)$  і  $g_1'(\omega^2)$ .

Зауважимо, що величина (11.25) задовольняє нерівність

$$0 \leq r(p_*) \leq 1;$$

тому ступінь дестабілізації можна вважати незначним, коли  $r \ll 1$ .

Із (11.26) для систем з двома ступенями вільності одержуємо умову:

$$A_3 A_1^{-1} = 2 A_4 A_2^{-1} \text{ для } p = p^*, \quad (11.27)$$

яка раніше була виведена іншими способами [80, 87].

У випадку  $n = 3$  після елімінування з умови (11.26) величин  $\omega_1^2(p^*)$  та  $\omega_2^2(p^*)$  можна знайти:

$$\left[ \frac{A_3}{A_1} \pm \sqrt{\left( \frac{A_3}{A_1} \right)^2 - 4 \frac{A_5}{A_1}} \right]_{p=p^*} = \left[ \frac{2A_4}{A_2} \pm \sqrt{\left( \frac{2A_4}{A_2} \right)^2 - 4 \frac{3A_6}{A_2}} \right]_{p=p^*}, \quad (11.28)$$

тут "плюс" перед знаком кореня відповідає втраті стійкості внаслідок злиття першої частоти з другою, а "мінус" — другої частоти з третьою.

Зрозуміло, що умови вигляду (11.27) і (11.28) можна одержати також і для систем з чотирма чи п'ятьма ступенями вільності; а от вже для випадків  $n > 5$  встановити умови такого самого змісту в явній формі, виходячи тільки з (11.26), мабуть, неможливо.

Для систем з довільною кількістю ступенів вільності неважко одержати такі достатні умови відсутності дестабілізації:

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2A_4}{A_2}, \frac{A_5}{A_1} = \frac{3A_6}{A_2}, \dots, \frac{A_{2k-1}}{A_1} = \frac{kA_{2k}}{A_2}, \dots \quad (p = p^*). \quad (11.29)$$

Дійсно, застосовуючи замість (11.23) узагальнений критерій Гурвіца, а замість (11.24) — узагальнений критерій аперіодичної стійкості, маємо відповідно системи нерівностей

$$A_0 > 0, \quad A_1 > 0, \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & A_3 A_1^{-1} \\ A_0 & A_2 \end{array} \right| > 0, \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & A_3 A_1^{-1} & A_5 A_1^{-1} \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & 1 & A_3 A_1^{-1} \end{array} \right| > 0, \dots;$$

$$A_0 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 2A_4 A_2^{-1} \\ A_0 & A_2 \end{array} \right| > 0, \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2A_4 A_2^{-1} & 3A_6 A_2^{-1} \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & 1 & 2A_4 A_2^{-1} \end{array} \right| > 0, \dots;$$

порівняння цих нерівностей дає власне умови (11.29). У випадку  $n = k = 2$ , (система з двома ступенями вільності) відсутність дестабілізації знову визначається умовою (11.27), тобто в цьому випадку умови (11.29) є й необхідними.

Одержані співвідношення поряд з тим, що дозволяють ефективно проводити аналіз наявності-відсутності дестабілізації, дають також можливість підбирати параметри систем оптимально так, щоб ефект дестабілізації при автоколивній втраті стійкості був належно малим. Вони ж дозволяють отримувати корисну інформацію про такі можливі розподіли в системі пропорційних до узагальнених швидкостей малих сил тертя, які аргіогі гарантують відсутність дестабілізації.

Нехай малі коливання деякої континуально-дискретної пружної системи описуються лінійними диференційними рівняннями з відповідними крайовими умовами (та умовами спряження), причому характеристичне рівняння задачі має вигляд

$$F(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k, p, r) = 0; \quad (11.30)$$

тут  $\Lambda_i$ ,  $p$ ,  $r$  — безрозмірні параметри, що залежать відповідно від характеристичного показника  $\lambda$ , зовнішніх навантажень і характеристик системи. До того ж, нехай ліва частина рівняння (11.30) є цілою аналітичною функцією (многочленом) від  $\lambda$ , а параметри  $\Lambda_i$  визначаються за формулою

$$\Lambda_i = a_i \lambda^2 + b_i \lambda + c_i \quad (i = \overline{1, k}), \quad (11.31)$$

де  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ ,  $c_i > 0$  — деякі сталі. Розгортаючи функцію  $F$  у ряд Маклорена за характеристичним показником  $\lambda$ , і вважаючи при цьому величини  $b_i$  належно малими, щоб можна було знехтувати членами з добутками цих величин, одержуємо:

$$F(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k, p, r) = \sum_{q=0}^{\infty} A_q \lambda^q,$$

де

$$A_{2s} = \frac{1}{s!} \left[ \left( \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial}{\partial \Lambda_i} \right)^s F \right]_{\lambda=0},$$

$$A_{2s-1} = \frac{1}{(s-1)!} \left[ \left( \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial}{\partial \Lambda_i} \right)^{s-1} \left( \sum_{i=1}^k b_i \frac{\partial}{\partial \Lambda_i} \right) F \right]_{\lambda=0}.$$

Звідси видно, що коли виконуються співвідношення

$$b_i = \varepsilon a_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (\varepsilon = \text{const} > 0), \quad (11.32)$$

то

$$A_{2s-1} = \varepsilon s A_{2s} \quad (s = 1, 2, \dots),$$

і, отже, умови відсутності дестабілізації (11.29) задовольняються тотожно.

Таким чином, якщо параметри  $b_i$  (що характеризують сили малого тертя) пропорційні до відповідних параметрів  $a_i$  (залежних від розподілу мас) з одним і тим самим коефіцієнтом пропорційності  $\varepsilon$ , то в таких дискретних, континуальних і дискретно-континуальних системах ефект дестабілізації — відсутній. При цьому значення  $\tilde{p}_*$  параметра навантаження, визначене в рамках ідеалізованої постановки задачі ( $b_i = 0$ ), завжди є критичним, оскільки враховування відповідно до (11.32) як завгодно малих сил тертя ( $\varepsilon > 0$ ) усуває "критичний" випадок і забезпечує асимптотичну стійкість системи для значень параметра навантаження  $p < \tilde{p}_*$ .

### 11.7 Приклади аналізу наявності-відсутності дестабілізації з застосуванням методу характеристичних рядів

Нехай малі коливання пружної системи в околі досліджуваного стану рівноваги ( $q = 0$ ) описуються рівнянням

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0,$$

де  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — задані квадратні матриці порядку  $m$ , причому  $C$  — несиметрична матриця з елементами, що залежать від параметрів навантажень;  $q$  — матриці-стовпці з узагальнених координат. У цьому випадку, очевидно, замість (11.31) маємо:

$$\Lambda_{ij} = a_{ij}\lambda^2 + b_{ij}\lambda,$$

де  $a_{ij}$  і  $b_{ij}$  — елементи матриць  $A$  і  $B$  відповідно.

Припустимо, що система втрачає стійкість рівноваги шляхом автоколивань. Згідно з (11.32) дестабілізація тут відсутня, якщо

$$B = \varepsilon A.$$

Для випадку, коли матриця  $A$  — одинична, а  $B$  — діагональна, відсутність дестабілізації була з'ясована іншим способом [55, 88].

Співвідношення (11.32) виконуються в багатьох задачах для систем з розподіленими параметрами. Наприклад, досліджуючи стійкість консолі, стиснутої стежною силою, маємо задачу [55, 88]:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b_0 \frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

$$y(0, t) = y'_x(0, t) = 0; \quad y''_{x^2}(l, t) = y'''_{x^3}(l, t) = 0.$$

( $E, J, P, m, b_0, l$  — сталі параметри,  $x$  — незалежна координата,  $t$  — час,  $y$  — залежна змінна). Записуючи розв'язок у вигляді  $y(x, t) = f(x) \exp \lambda t$ ,

одержимо відповідну крайову задачу; при цьому параметр  $\Lambda$  в (11.31) визначатиметься за формулою

$$\Lambda = a\lambda^2 + b\lambda \quad \left( a = \frac{ml^4}{EJ}, \quad b = \frac{b_0 l^4}{EJ} \right).$$

Отже, умова (11.32) виконується і ефект дестабілізації відсутній.

В багатьох значно складніших неконсервативних задачах пружної стійкості висновок про відсутність дестабілізації одержується аналогічно [44]. Шляхом чисельного аналізу таких висновок одержано, зокрема, в праці [65], присвяченій дослідженню впливу аеродинамічного демпфування на флатер тришарових панелей і колових циліндричних оболонок.

Нехай циліндрична оболонка (або прямокутна в плані циліндрична панель, шарнірно закріплена на прямолінійних краях), завантажена рівномірно розподіленими поздовжними зусиллями та нормальним до її поверхні тиском, обтікається надзвуковим потоком газу. Малі коливання такої оболонки описуються системою рівнянь [55, 90]

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + \kappa \left[ \frac{T_1 - T_2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - B_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right] &= 0, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w - \kappa \left[ \frac{T_1 - T_2}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + B_2 \frac{\partial v}{\partial t} \right] &= 0, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + \kappa \left\{ \frac{1}{R^2} \left[ T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + T_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + B_3 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{BV}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right] \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (11.33)$$

де  $u, v, w$  — переміщення точок серединної поверхні оболонки чи панелі;  $\alpha, \beta$  — координатні незалежні змінні;  $t$  — час;  $T_1, T_2$  — параметри навантаження;  $V, B$  — параметри, що характеризують аеродинамічну дію газу;  $c^2 = \frac{\rho^2}{12R^2}$ ;  $\kappa = \frac{1-v^2}{E\delta}$ ;  $m, \rho, R, v, \delta$  — незмінні параметри оболонки (панелі);  $E$  — модуль пружності;  $B_1, B_2, B_3$  — коефіцієнти тертя;  $M_i, N_i$  ( $i=1,2$ ),  $Q_1, S_1$  — узагальнені зусилля, що є однорідними лінійними формами функцій  $u, v, w$  та їх похідних за змінними  $\alpha$  і  $\beta$ ;  $c_M, c_Q, c_N, c_S$  — коефіцієнти жорсткості пружних закріплень у відповідних напрямках;  $L_{ij}$  — диференціальні оператори, які мають вигляд



$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$L_{13} = L_{31} = \nu \frac{\partial}{\partial \alpha} - c^2 \left( \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right), \quad L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2},$$

$$L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{3-\nu}{2} c^2 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta}, \quad L_{33} = c^2 \left( \nabla^2 \nabla^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right).$$

Розглянемо випадок пружного закріплення криволінійних країв (коли  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$ ):

$$M_1 - c_M \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0, \quad Q_1 - T_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha} - c_Q w = 0, \quad N_1 - c_N u = 0, \quad S_1 - c_S v = 0.$$

Для випадку панелі, крім цього, задаються умови на прямолінійних краях ( $\beta = 0$ ,  $\beta = \beta_0$ ):

$$u = w = M_2 = N_2 = 0 \quad \text{або} \quad u = v = w = M_2 = 0.$$

Підстановка  $u = \tilde{u}(\alpha) \cos n\beta e^{\lambda t}$ ,  $v = \tilde{v}(\alpha) \sin n\beta e^{\lambda t}$ ,  $w = \tilde{w}(\alpha) \cos n\beta e^{\lambda t}$  веде до крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь на функції  $\tilde{u}(\alpha)$ ,  $\tilde{v}(\alpha)$ ,  $\tilde{w}(\alpha)$ , характеристичне рівняння якої має вигляд (11.30), причому

$$\Lambda_i = a_i \lambda^2 + b_i \lambda \quad \left( a_i = \frac{mR^2}{D}, \quad b_i = \frac{R^2}{D} B_i, \quad D = \frac{E\rho}{12(1-\nu^2)}; \quad i=1,2,3 \right).$$

Отже, згідно з умовами (11.32) дестабілізація відсутня, якщо  $B_1 = B_2 = B_3$ . Взагалі кажучи, ця умова не виконується, оскільки лише коефіцієнт  $B_3$  залежить від аеродинамічного демпфування [55]. Тому тут може мати місце дестабілізація [37]. Зауважимо, що при  $T_1 = T_2 = 0$  та  $B_1 = B_2 = B_3 = 0$  ця задача досліджувалася в праці [90].

Отже, у випадках автоколивної втрати стійкості циліндричних оболонок (панелей) у надзвуковому газовому потоці при малому терті, пропорційному до швидкостей, як правило, присутній ефект дестабілізації. Питання про те, коли і наскільки цей ефект є суттєвим, вимагає окремих досліджень.

Відзначимо, що у випадках, коли в системі рівнянь (11.33) можна нехтувати членами з похідними за часом функцій  $u$  і  $v$  [55, 91], коефіцієнти відповідного характеристичного рівняння задовольнятимуть співвідношення (11.32) (як і в наведеному тут прикладі про консоль, стиснуту стежною силою). Тоді дестабілізація відсутня і аеродинамічне демпфування збільшує критичну швидкість флатера.

**12.1 Двобічні послідовності оцінок нижчих  
частот і ойлерових значень навантажень  
для багатопараметричних пружних систем**

Розглянемо континуально-дискретну пружну систему, що здійснює малі коливання в околі деякого стійкого стану рівноваги. Припустимо, що характеристичний ряд системи має вигляд (11.2), так що рівняння для визначення частот можна записати так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k(p_1, p_2, \dots; r_1, r_2, \dots) \omega^{2k} = 0. \quad (12.1)$$

Тут  $\omega = i\lambda$  — параметр частоти;  $p_1, p_2, \dots$  — параметри навантажень;  $r_1, r_2, \dots$  — параметри, які характеризують властивості системи і які можна вважати незалежними від навантажень (розподіл мас, жорсткостей, геометричні характеристики тощо);  $c_k = B_{2k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

У випадку вільних коливань пружної системи при відсутності навантаження ( $p_1 = p_2 = \dots = 0$ ) та фіксованих значеннях усіх інших параметрів рівняння (12.1) набуває такого вигляду:

$$1 - a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 - a_3 \omega^6 + \dots = 0, \quad (12.2)$$

де  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — деякі константи (ліву частину цього рівняння в [72] названо спектральною функцією).

Припускаючи, що найменший корінь рівняння (12.2) є простим, С. А. Бернштейн одержав для першої та другої частот такі послідовності двобічних оцінок [72]:

$$\left[ \psi_j(b_k) \alpha_k^{-1} \right]^{\frac{1}{2k}} < \omega_j < \left[ \varphi_j(b_k) \alpha_k^{-1} \right]^{\frac{1}{2k}}, \quad j = 1, 2, \quad (12.3)$$

де

$$b_k = \alpha_{2k} \alpha_k^{-2}, \quad \psi_1(b_k) = b_k^{-\frac{1}{2}}, \quad \varphi_1(b_k) = 2 \left[ 1 + (2b_k - 1)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1},$$

$$\psi_2(b_k) = 2 \left[ 1 - (2b_k - 1)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}, \quad \varphi_2(b_k) = 2 \left[ 1 - \left( \frac{4}{3} b_k - \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1},$$

а числа  $\alpha_k$  пов'язані з коефіцієнтами  $a_k$  формулами Ньютона

$$\alpha_k = a_1 \alpha_{k-1} - a_2 \alpha_{k-2} + \dots + (-1)^k a_{k-1} \alpha_1 + (-1)^{k+1} k a_k. \quad (12.4)$$

Покажемо, що для завантаженої системи, яка тут розглядається, справедливими є оцінки, аналогічні до (12.3)[32].

Оскільки положення рівноваги системи є стійким, то  $c_0 > 0$  і рівняння (12.1) можна записати так:

$$1 - \frac{c_1}{c_0} \omega^2 + \frac{c_2}{c_0} \omega^4 - \frac{c_3}{c_0} \omega^6 + \dots = 0. \quad (12.5)$$

Розглянемо у просторі  $(p_1, p_1, \dots, r_1, r_2, \dots)$  параметрів системи область  $G$ , окреслювану нерівністю  $c_1^2 - 4c_0 c_2 \geq 0$ , і таку, що  $(0, 0, \dots, r_1^0, r_2^0, \dots) \in G$  (згадана нерівність є достатньою умовою того, що найменші корені рівняння (12.5) є різними). За формулами Ньютона (12.4) визначимо в цій області функції  $C_k(p_1, p_1, \dots, r_1, r_2, \dots)$  параметрів системи:

$$c_0 C_k = c_1 C_{k-1} - c_2 C_{k-2} + \dots + (-1)^k c_{k-1} C_1 + (-1)^{k+1} k c_k. \quad (12.6)$$

Порівнюючи рівняння (12.2) і (12.5) та враховуючи неперервну залежність коренів рівняння (12.5) від параметрів  $p_1, p_1, \dots, r_1, r_2, \dots$ , дійдемо такого висновку: для завантаженої континуально-дискретної пружної системи, коли її параметри змінюються в області  $G$ , справджуються послідовності оцінок, одержаних із (12.3) заміною чисел  $\alpha_k$  на функції  $C_k(p_1, p_1, \dots, r_1, r_2, \dots)$  [32].

Цілком так само можна оцінювати критичні ойлерові значення параметрів навантажень. При цьому потрібно тільки зобразити вільний член  $B_0$  характеристичного ряду (11.2) або (11.1) у вигляді розгортки в ряд за тим із параметрів навантажень (наприклад,  $p_1 = p$ ), ойлерове значення якого необхідно обчислити. Тоді замість (12.1) матимемо рівняння

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tilde{c}_k(p_2, p_3, \dots, r_1, r_2, \dots) p^{2k} = 0.$$

Отже, у формулах (12.6) коефіцієнти  $c_k$  потрібно замінити на величини  $\tilde{c}_k$  [44].

Неважко переконатися, що одержаний висновок зберігає силу і щодо оцінок третьої частоти та наближеної формули для четвертої частоти розглядуваної системи [72].

Таким чином, маючи коефіцієнти характеристичного ряду (11.2) даної навантаженої континуально-дискретної пружної системи, для обчислення та якісного аналізу нижчих частот її коливань та ойлерових значень навантажень можна застосовувати оцінки, подібні до (12.3).

Розглянемо більш детально перше наближення (здолу та згори) для основної частоти

$$\frac{B_0}{\sqrt{B_2^2 - 2B_0B_4}} < \omega_1^2 < \frac{2B_0}{B_2 + \sqrt{B_2^2 - 2B_0B_4}}. \quad (12.7)$$

Розрахунки засвідчують, що ці найпростіші оцінки часто є цілком достатніми для визначення основної частоти та дослідження впливу на неї різних параметрів (у більшості випадків оцінки (12.7) різняться між собою частками відсотка). Аналіз оцінок (12.7) у багатьох випадках дозволяє одержувати корисні висновки і щодо стійкості системи [38, 41, 44].

Якісна картина, що зустрічається найчастіше, зображена на рис. 37. Тут йдеться про оцінки основної частоти  $\omega_1$ , коли змінюється лише один з параметрів  $p$ .

Якщо система втрачає стійкість за Ойлером, то відповідно до викладеного в 11.3  $B_0 \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow p_0$ ; вказані оцінки необмежено наближаються одна до одної, коли параметр  $p$  прямує до  $p_0$  (рис. 37, а). Якщо ж втрата стійкості має коливний характер, то оцінки "віддаляються" одна від одної (рис. 37, б). При цьому вважається, що втрата стійкості зумовлена злиттям першої та другої частот. Значення параметра навантаження  $p$ , при яких стають нулями підкореневі вирази в (12.7) праворуч і ліворуч, позначені відповідно через  $p^*$  і  $p^{**}$ . Ці значення відповідають, як правило, першим наближенням здолу і згори до критичного значення параметра навантаження при автоколивній втраті стійкості, якщо для зникаюче малих значень параметрів тертя дестабілізація відсутня [52 — 55], або до "квазікритичного" значення  $\tilde{p}^*$ , якщо дестабілізація має місце. Висловлене узгоджується з побудованими раніше найпростішими двобічними оцінками для автоколивної втрати стійкості (перше з рівнянь (11.21) та рівняння  $B_2^2 - 2B_0B_4 = 0$ ) і є, по суті, іншим способом побудови вказаних оцінок. Очевидно, цей спосіб є менш загальним, ніж запропонований в 11.5.

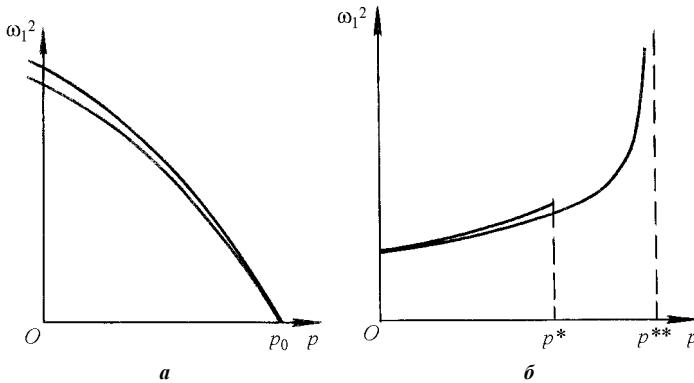


Рисунок 37 Ілюстрація залежності оцінок основної частоти від параметра навантаження для дивергенції (а) і флатера (б).

Зазначимо, що наведений спосіб побудови оцінок нижчих частот (чи ойлєрових сил) для пружних систем можна розглядати також і як спосіб одержання двобічних наближень до перших гілок власних значень відповідних багатопараметричних задач.

## 12.2 Про побудову характеристичних визначників узагальнених крайових задач на власні значення у вигляді рядів за параметром

Розглянемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння

$$y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1} y' - a_n y = 0 \quad (12.8)$$

з крайовими умовами

$$V_i(y) = \mu_{i0} y(a) + \mu_{i1} y'(a) + \dots + \mu_{i,n-1} y^{(n-1)}(a) + \\ + \nu_{i0} y(b) + \nu_{i1} y'(b) + \dots + \nu_{i,n-1} y^{(n-1)}(b) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.9)$$

Коефіцієнти  $a_i$ , та  $\mu_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  вважаються залежними від деяких параметрів

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ . Точка  $\beta_1 = \beta_1^0, \beta_2 = \beta_2^0, \dots, \beta_s = \beta_s^0$  простору параметрів називається характеристичною точкою задачі (12.8) — (12.9), якщо для відповідних їй значень параметрів ця задача має нетривіальні розв'язки.

Необхідною та достатною умовою існування нетривіальних розв'язків даної задачі є, як відомо, рівність нулеві відповідного характеристичного визначника  $\Delta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = 0$ , що й дозволяє виявити множину характе-

ристичних точок задачі. Якщо ця множина містить точки з дійсними координатами, що утворюють у просторі параметрів деякі лінії (поверхні, гіперповерхні), то останні називають лініями власних значень.

Нехай коефіцієнти рівняння (12.8) та крайових умов (12.9) є цілими аналітичними функціями кожного з параметрів  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ . Тоді відповідна фундаментальна система розв'язків  $\{\psi_0(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)\}$ , а також характеристичний визначник задачі

$$\Delta = \begin{vmatrix} V_1(\psi_0) & V_1(\psi_1) & \dots & V_1(\psi_{n-1}) \\ V_2(\psi_0) & V_2(\psi_1) & \dots & V_2(\psi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(\psi_0) & V_n(\psi_1) & \dots & V_n(\psi_{n-1}) \end{vmatrix} \quad (12.10)$$

будуть мати ту ж саму властивість аналітичності щодо параметрів. Тому, використовуючи зображення фундаментальної системи розв'язків у вигляді рядів, можна побудувати визначник (12.10) як ряд за одним із параметрів задачі (питання про те, якому із параметрів надати перевагу, диктується часто фізичним змістом задачі). Якщо вказаним параметром є характеристичний показник  $\lambda$ , то приходимо до характеристичного ряду вигляду (11.1) або (11.2).

Відзначимо, що в літературі зустрічаються також й інші способи визначення коефіцієнтів характеристичних рядів (див., наприклад, [20, 72, 92]). Однак, для багатопараметричних задач зі звичайними лінійними диференціальними рівняннями найбільш раціональним виявляється підхід, що ґрунтується на застосуванні методу функцій впливу та зображенні основної фундаментальної функції  $K(x, \alpha)$  рядом за характеристичним показником  $\lambda$  (або за його квадратом  $\lambda^2$ ).

### 12.3 Характеристичні ряди і дослідження механічних пружних систем

Розглянемо задачу про малі поперечні коливання та стійкість прямолінійної форми рівноваги стиснутого (розтягнутого) однорідного стержня завдовжки  $l$  з пружно закріпленими кінцями. Відповідна узагальнена задача на власні значення має вигляд [10, 15]:

$$f^{IV} - \beta f'' - \delta f = 0 \quad (0 \leq x \leq 1); \quad (12.11)$$

$$f'''(0) + \vartheta_0 f(0) = 0, \quad f'''(1) - \vartheta_1 f(1) = 0,$$

$$f''(0) - \psi_0 f'(0) = 0, \quad f''(1) + \psi_1 f'(1) = 0. \quad (12.12)$$

Тут

$$\beta = -\frac{Gl^2}{EJ}, \quad \delta = -(a\lambda^2 + B\lambda), \quad a = \frac{ml^4}{EJ}, \quad B = \frac{bl^4}{EJ}, \quad (12.13)$$

$G$  — стискувальна сила;  $EJ$  — жорсткість стержня при згині;  $m$  — його подовжинна маса;  $b$  — коефіцієнт тертя;  $\vartheta_i, \psi_i$  ( $i = 0, 1$ ) — параметри жорсткості закріплення кінців.

Для одержання характеристичного рівняння та побудови відповідних характеристичних рядів зручно використати таку форму загального розв'язку

$$f(x) = C_0\varphi(x) + C_1\varphi'(x) + C_2\varphi''(x) + C_3\varphi'''(x), \quad (12.14)$$

де  $C_i$  — довільні сталі;  $\varphi(x)$  — розв'язок задачі Коші для рівняння (12.11) з початковими умовами  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ ,  $\varphi'''(0) = 1$ , причому  $\varphi$  визначається або степеневим рядом, або його сумою [15, 16, 21]

$$\varphi(x, \beta, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_k x^{k+3}}{(k+3)!} \equiv \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} \left( \frac{\text{sh } \mu x}{\mu} - \frac{\sin \nu x}{\nu} \right), \quad (12.15)$$

в яких

$$J_0 = 1, \quad J_k = \beta J_{k-2} + \delta J_{k-4} \quad (J_j = 0 \text{ для } j < 0); \quad (12.16)$$

$$\mu^2 = \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 + \delta} + \frac{1}{2}\beta, \quad \nu^2 = \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 + \delta} - \frac{1}{2}\beta. \quad (12.17)$$

Підставляючи загальний розв'язок (12.14) у крайові умови (12.12), одержуємо характеристичне рівняння задачі в такому вигляді:

$$\left[ (\beta^2 + \vartheta_0 \psi_0) \psi + \beta \chi + \vartheta_0 \psi' + \psi_0 \chi' + \beta \vartheta + \rho \right]_{x=1} = 0,$$

де

$$\psi(x) = F_0(x) + \psi_1 F_2'(x) + \vartheta_1 F_4'(x) + \psi_1 \vartheta_1 F_4(x),$$

$$\chi(x) = W_0(x) + \psi_1 F_0'(x) + \vartheta_1 F_2'(x) + \psi_1 \vartheta_1 F_2(x),$$

$$\rho(x) = W_1(x) + \psi_1 W_0'(x) + \vartheta_1 F_0'(x) + \psi_1 \vartheta_1 F_0(x),$$

$$\vartheta(x) = \phi_0(x) + \psi_1 \phi_1'(x) + \vartheta_1 \phi_2'(x) + \psi_1 \vartheta_1 \phi_2(x);$$

$$F_{2s}(x) = (\varphi^{(3-s)})^2 - \varphi^{(2-s)} \varphi^{(4-s)} \quad (s = 0, 1, 2),$$

$$W_s(x) = (\varphi^{(s+4)})^2 - \varphi^{(s+3)} \varphi^{(s+5)} \quad (s = 0, 1),$$

$$\phi_{2-s}(x) = \varphi^{(s+1)} \varphi^{(s+3)} - \varphi^{(s)} \varphi^{(s+4)} \quad (s = 0, 1, 2). \quad (12.18)$$

З наведених формул безпосередньо впливають такі тотожності:

$$\phi_2 \equiv F_4'' - F_2, \quad \phi_1 \equiv F_2'' - F_0, \quad \phi_0 \equiv F_0'' - W_0. \quad (12.19)$$

Використовуючи співвідношення (12.15) — (12.16), одержуємо зображення функцій  $F_{2s}$  і  $W_s$  у вигляді рядів за параметром  $\delta$ :

$$F_{2s} = \frac{1}{4}(s-1)(s-2) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+s-1} f_{2s,n}(x, \beta) \delta^n; \quad (12.20)$$

$$f_{2s,n}(x, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n+s-1+m}^{2n+s-1} \frac{\beta^m x^{4n+2s+2m}}{(4n+2s+2m)!}; \quad (12.21)$$

$$W_s = (-1)^{s+1} \beta^{s+1} + \sum_{n=1+s}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-2-s} w_{s,n}(x, \beta) \delta^n,$$

$$w_{s,n}(x, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n-2-s+m}^{2n-2-s} \frac{\beta^m x^{4n+2m-2-2s}}{(4n+2m-2-2s)!}.$$

Звідси впливають тотожності

$$F_0(x, \beta, \delta) = 1 - \delta F_4(x, \beta, \delta); \quad (12.22)$$

$$W_0(x, \beta, \delta) = -\beta - \delta F_2(x, \beta, \delta), \quad W_1(x, \beta, \delta) = \beta^2 + \delta^2 F_4(x, \beta, \delta);$$

$$(\beta^2 + 4\delta)F_4 = \beta F_4'' - 2F_2'' + 2, \quad (\beta^2 + 4\delta)F_2 = 2\delta F_4'' + \beta F_2'' - \beta. \quad (12.23)$$

Помножимо першу рівність (12.23) на  $\beta$  і додамо результат до подвоєної другої; в підсумку отримаємо:

$$2F_2(x, \beta, \delta) = F_4''(x, \beta, \delta) - \beta F_4(x, \beta, \delta). \quad (12.24)$$

Враховуючи, до того ж, співвідношення (12.19), дійдемо висновку, що в даному випадку основною можна вважати функцію  $F_4(x, \beta, \delta)$ , оскільки всі інші функції (12.18) є визначуваними через неї.

Зазначимо, що цей висновок та отримані тотожності дозволяють у багатьох випадках суттєво спростити вигляд характеристичних визначників і полегшити побудову відповідних характеристичних рядів. Зокрема, частотне рівняння, відповідне задачі, про яку тут йдеться, можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\delta^2 + \vartheta_0 \vartheta_1 \psi_0 \psi_1) F_4 + [\vartheta_0 \vartheta_1 (\psi_0 + \psi_1) - (\vartheta_0 + \vartheta_1) \delta] F_4' + \right. \\ & \left. + (\vartheta_0 \vartheta_1 - \delta \psi_0 \psi_1) F_4'' + [\psi_0 \psi_1 (\vartheta_0 + \vartheta_1) - (\psi_0 + \psi_1) \delta] F_2' + \right. \end{aligned}$$



$$+(\vartheta_1 \psi_0 + \vartheta_0 \psi_1) F_2'' + (\vartheta_0 \psi_0 + \vartheta_1 \psi_1) F_0 \Big|_{x=1} = 0. \quad (12.25)$$

Підставляючи сюди зображення (12.20) і враховуючи залежність (12.13) параметра  $\delta$  від характеристичного показника  $\lambda$ , одержуємо характеристичні ряди (11.1) і (11.2).

Рівняння (12.25) в багатьох конкретних випадках можна значно спростити (враховуючи, зокрема, способи закріплення кінців стержня, сторін пластинки, торців циліндричної оболонки тощо). Наприклад, рівняння

$$F_4(1, \beta, \delta) = 0, \quad F_4'(1, \beta, \delta) = 0, \quad F_4''(1, \beta, \delta) = 0, \quad (12.26)$$

$$(\vartheta_1 F_4' + F_0)|_{x=1} = 0, \quad \delta^2 F_4(1, \beta, \delta) = 0, \quad F_0(1, \beta, \delta) = 0 \quad (12.27)$$

є конкретизованим записом загального рівняння (12.25) для стержня у випадках відповідно: затиснутих кінців; одного затиснутого, а другого шарнірно закріпленого кінців; шарнірно закріплених кінців; лівого затиснутого кінця, а правого — пружно спертого; вільних кінців; консольного закріплення (два останні випадки відповідають є стежній силі).

Із співвідношень (12.20), (12.21) і (12.26) безпосередньо випливає, що відповідні рівнянням (12.26) коефіцієнти характеристичних рядів (11.2), визначаються за такими формулами:

$$R_2(\Lambda^2) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}(\beta) \Lambda^{2k} \quad \left( \Lambda = \lambda a^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$B_{2k}(\beta) = 2^{2k+1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2k-1+m}^{2k-1} \frac{\beta^m}{(4k+2m+4)!}, \quad (12.28)$$

$$B_{2k}(\beta) = 2^{2k+1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2k-1+m}^{2k-1} \frac{\beta^m}{(4k+2m+3)!}, \quad (12.29)$$

$$B_{2k}(\beta) = 2^{2k+1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2k-1+m}^{2k-1} \frac{\beta^m}{(4k+2m+2)!} \quad (12.30)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

Звідси, покладаючи  $k = 0$ , одержуємо рівняння, з яких визначаються ойлерові значення навантажень.

Одержані формули стають помітно простішими за відсутності стискувальної (розтягувальної) сили. При  $\beta = 0$  із (12.28) — (12.30) відповідно маємо:

$$B_{2k} = \frac{2^{2k+1}}{(4k+4)!}, \quad B_{2k} = \frac{2^{2k+1}}{(4k+3)!}, \quad B_{2k} = \frac{2^{2k+1}}{(4k+2)!}. \quad (12.31)$$

У випадках, коли задачі вигляду (12.11) — (12.12) залежать від одного спектрального параметра, для побудови характеристичних визначників можна застосовувати, як відомо, класичну теорію інтегральних рівнянь. При цьому коефіцієнти вигляду (12.31) збігаються з коефіцієнтами відповідного визначника Фредгольма або, що те ж саме, відповідної спектральної функції. На цих засадах в працях [72, 92] було визначено лише декілька перших коефіцієнтів вигляду (12.31) ( $k = 0, 1, 2, 3$ ), оскільки із збільшенням  $k$  визначення відповідних коефіцієнтів, що потребує обчислення  $k$ -кратних інтегралів, стає практично неможливим. Інший спосіб запропонував С. А. Бернштейн [72], вдаючись до узагальнення методу переміщень. Проте і тут виникли подібні до зазначених труднощі щодо обчислення величин (12.31); це стало причиною визнання того, що "спектральну функцію практично неможливо побудувати; доводиться обмежуватися побудовою двох-трьох її перших членів" [72, стор. 58].

## 12.4 Характеристичні ряди в задачах з "ускладненими" крайовими умовами

Запропонований спосіб побудови характеристичних рядів можна застосовувати і до задач з так званими ускладненими крайовими умовами, в яких фігурують похідні за часом. Як приклад розглянемо задачу про малі коливання пружної консолі з абсолютно твердим тілом на вільному кінці, завантаженої консервативною  $G$  та стежною  $H$  силами (див. рис. 13). Відповідна крайова задача після відокремлення змінних матиме такий вигляд [41]:

$$f^{IV} - \beta f'' + (a\lambda^2 + B\lambda)f = 0; \quad (12.32)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \left[ f'' + (r_1 r_2 a \lambda^2 + b_2 \lambda) f' \right]_{x=1} = 0,$$

$$\left[ f''' - \beta(1-\eta) f' + (r_2 a \lambda^2 + b_1 \lambda) f \right]_{x=1} = 0, \quad (12.33)$$

де

$$\beta = -\frac{G+H}{EJ} l^2, \quad r_1 = \frac{\rho^2}{l^2}, \quad r_2 = \frac{M}{ml}, \quad \eta = \frac{H}{G+H}, \quad b_1 = \frac{\varepsilon_2 l}{EJ}, \quad b_2 = \frac{\varepsilon_2 l^2}{EJ}; \quad (12.34)$$

$M$  — маса тіла;  $\rho^2$  — його центральний радіус інерції;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — коефіцієнти тертя (інші позначення такі самі, що і в (12.13)).

Характеристичне рівняння задачі (12.32) — (12.33) має вигляд:

$$\{F_0 + \beta(1 - \eta)F_2 + (b_1F_2' + b_2F_4')\lambda + [r_2a(F_4' + \eta_1F_2') + b_1b_2F_4]\lambda^2 + r_2a(b_1 + \eta_1b_2)F_4\lambda^3 + \eta_1r_2^2a^2F_4\lambda^4\}\Big|_{x=1} = 0. \quad (12.35)$$

Враховуючи формули (12.20) — (12.22), визначаємо коефіцієнти характеристичного ряду (11.1), відповідного цій задачі:

$$\begin{aligned} A_0 &= [1 + \beta(1 - \eta)f_{2,0}]\Big|_{x=1}, \\ A_1 &= [2Bf_{4,0} + 2^2B\beta(1 - \eta)f_{2,1} + b_1f_{2,0}' + 2b_2f_{4,0}']\Big|_{x=1}, \\ A_2 &= [2af_{4,0} + 2^3B^2f_{4,1} + 2^2a\beta(1 - \eta)f_{2,1} + 2^2Bb_1f_{2,1}' + \\ &\quad + 2^3Bb_2f_{4,1}' + r_2a(2f_{4,0}' + \eta_1f_{2,0}') + 2b_1b_2f_{4,0}']\Big|_{x=1}, \dots \end{aligned} \quad (12.36)$$

Звідси для  $B = b_1 = b_2 = 0$  одержуємо коефіцієнти відповідного характеристичного ряду (11.2). Зокрема, для незавантаженої консолі ( $\beta = 0$ ) маємо:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \quad B_2 = a\left(\frac{2}{4!} + \frac{2}{3!}r_2 + \eta_1r_2\right), \\ B_4 &= a^2\left(\frac{2^3}{8!} + \frac{2^3}{7!}r_2 + \frac{2^2}{5!}\eta_1r_2 + \frac{2}{4!}\eta_1r_2^2\right). \end{aligned} \quad (12.37)$$

Підкреслимо, посилаючись на розглянутий приклад, одну важливу властивість характеристичних рядів. Якщо маса стержня є дуже малою у порівнянні з масою тіла ( $ml \ll M$ ), а тертя не береться до уваги, то в формулах (12.35) — (12.36) залишається покласти  $a = B = 0$ . Тоді ліва частина рівняння (12.35) або, що те ж саме, характеристичний ряд (11.1) перетворюється на характеристичний многочлен відповідної системи з двома ступенями вільності, а величини (12.36) — в його коефіцієнти. Очевидно, що до того самого многочлена прийдемо, покладаючи  $a = B = 0$  у вихідній крайовій задачі (12.32) — (12.33) і застосовуючи, природно, загальний розв'язок вигляду (12.14). Отже, характеристичні многочлени дискретних систем, що є "граничними виявами" деяких континуально-дискретних систем, можна одержувати із відповідних характеристичних рядів. Цей спосіб побудови характеристичних многочленів помітно відрізняється від загальноприйнятих і часто має перед ними вагомі переваги (особливо, коли йдеться про багатопараметричні системи).

## 12.5 Про форми зображення характеристичних визначників

Вибір фундаментальної системи розв'язків диференційного рівняння задачі у вигляді функції (12.15) та її похідних зумовлює відповідну форму характеристичного визначника. Оскільки в літературі розв'язки подають пересічно в іншому вигляді, то виникає запитання про те, як це позначається на зображеннях одержуваних характеристичних визначників?

Зокрема, вдаючись до (12.15), (12.17) і (12.18), знайдемо:

$$F_4(x, \beta, \delta) = (\mu^2 + \nu^2)^{-2} \left[ (\mu^2 - \nu^2) \frac{\text{sh } \mu x \sin \nu x}{\mu \nu} + 2(1 - \text{ch } \mu x \cos \nu x) \right], \quad (12.38)$$

звідки

$$F_4'(x, \beta, \delta) = (\mu^2 + \nu^2)^{-1} \left[ \frac{\sin \nu x}{\nu} \text{ch } \mu x - \frac{\text{sh } \mu x}{\mu} \cos \nu x \right]; \quad (12.39)$$

$$F_4''(x, \beta, \delta) = \frac{1}{\mu \nu} \text{sh } \mu x \sin \nu x. \quad (12.40)$$

На підставі ж тотожностей (12.22) і (12.24)

$$F_2(x, \beta, \delta) = (\mu^2 + \nu^2)^{-2} \left[ 2\mu \nu \text{sh } \mu x \sin \nu x + (\nu^2 - \mu^2)(1 - \text{ch } \mu x \cos \nu x) \right]; \quad (12.41)$$

$$F_0(x, \beta, \delta) = (\mu^2 + \nu^2)^{-2} \left[ \nu^4 + \mu^4 + 2\mu^2 \nu^2 \text{ch } \mu x \cos \nu x + \mu \nu (\nu^2 - \mu^2) \text{sh } \mu x \sin \nu x \right]; \quad (12.42)$$

$$F_2'(x, \beta, \delta) = (\mu^2 + \nu^2)^{-1} [\mu \text{sh } \mu x \cos \nu x + \nu \text{ch } \mu x \sin \nu x]; \quad (12.43)$$

$$F_0'(x, \beta, \delta) = \frac{\mu \nu}{\mu^2 + \nu^2} [\nu \text{sh } \mu x \cos \nu x + \mu \text{ch } \mu x \sin \nu x]. \quad (12.44)$$

Подібно визначаємо й інші функції (12.18) та їх похідні. Підставляючи отримані формули в ліві частини рівнянь (12.25) — (12.27) і (12.35), знаходимо замкнені вирази для відповідних характеристичних рядів (суми рядів).

Кладучи у співвідношеннях (12.38) — (12.42), наприклад,  $x=1$ , матимемо в замкненій формі рівняння (12.26), (12.27), а також рівняння (окремих випадок (12.35))

$$F_0(1, \beta, \delta) + \beta(1 - \eta)F_2(1, \beta, \delta) = 0,$$

яке відповідає відомій задачі про стійкість однорідної пружної консолі, що знаходиться під дією консервативної  $G$  та стежної  $H$  сил.

Неважко переконатися, що характеристичні рівняння (або, що те ж саме, характеристичні визначники) відрізняються від тих відповідних рівнянь (визначників), що пересічно зустрічаються в літературі, такою важливою властивістю: вони не містять зайвих коренів і витримують граничні переходи за будь-яким із параметрів задачі (це пояснюється єдиністю визначення функції Коші  $\varphi(x, \beta, \delta)$ ); така сама ситуація, до речі, спостерігається, наприклад, коли застосовується метод початкових параметрів).

Так, у випадку задачі про малі поперечні коливання стиснутого (розтягнутого) прямолінійного стержня з жорстко затиснутими кінцями необхідно оперувати першим з рівнянь (12.26), тобто рівнянням

$$F_4(1, \beta, \delta) = 0, \quad (12.45)$$

ліву частину якого визначає формула (12.38);

$$\beta = -\frac{Gl^2}{EI}, \quad \delta = \frac{ml^4}{EI} \omega^2;$$

$G > 0$  — стискувальна сила,  $\omega$  — параметр частоти.

В літературі ж (див. [55, 72] та інші джерела) замість (12.45) зустрічається рівняння

$$(\mu^2 + \nu^2)^2 F_4(1, \beta, \delta) = 0, \quad (12.46)$$

яке з урахуванням (12.38) рівносильне рівнянню

$$\frac{1}{\mu\nu} (\mu^2 - \nu^2) \operatorname{sh} \mu \sin \nu + 2(1 - \operatorname{ch} \mu \cos \nu) = 0. \quad (12.47)$$

Беручи до уваги, що відповідно до (12.17)  $(\mu^2 + \nu^2) = \beta^2 + 4\delta$ , та порівнюючи між собою рівняння (12.45) і (12.46) бачимо, що друге з них має зайві корені, які в площині параметрів  $(\beta, \delta)$  розміщені на параболі  $\delta = -\beta^2/4$ .

В тому, що рівняння (12.46) має за будь-якого значення параметра навантаження  $\beta$  зайвий корінь, можна переконатися й безпосередньо, підставляючи значення  $\mu^2 = -\nu^2 = \beta/2$  в рівняння (12.47). При цьому виявиться, що  $\delta = -a\lambda^2 = -\beta^2/4$ ; то ж одне із значень характеристичного показника  $\lambda$  для  $\beta \neq 0$  виявляється додатним (для  $\beta = 0$  зайвим є корінь  $\lambda = 0$ ).

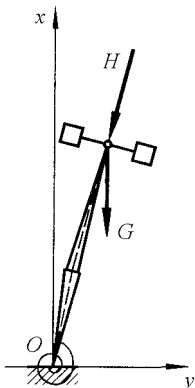
Зайвий корінь може стати причиною неправильного висновку про нестійкість прямолінійної форми рівноваги розглянутого стержня за довільних значень сили  $G \neq 0$ . Аналогічна ситуація зустрічається також і в інших подібних задачах. Зазначимо, що в складніших випадках наявність зайвих розв'язків може викликати певні помітні ускладнення та вагомні помилки.

## 12.6 Задача про консоль з абсолютно твердим тілом на вільному кінці (навантажену консервативною та стежною силами)

Розглянемо задачу про стійкість прямолінійної форми рівноваги пружної консолі, схему якої наведено на рис. 38 (пружність закріплення до уваги поки що не береться). Дослідимо вплив на критичне навантаження центрального радіуса інерції тіла при різних значеннях відношення мас тіла та стержня [41]. Часткові випадки цієї задачі досліджувалися іншим методом [52, 85]; у першій із вказаних праць маса тіла вважалася зосередженою на вільному кінці консолі, а у другій — маса стержня вважалася зникаюче малою у порівнянні з масою тіла.

Відповідна крайова задача розглядалася в 12.4, де й побудовано характеристичний ряд системи, див. формули (12.36). Покладемо у цих формулах  $B = b_1 = b_2 = 0$  і застосуємо найпростіші двобічні оцінки  $\tilde{p}_2 < \tilde{p}_* < \tilde{p}'_3$  (див. 11.5) для знаходження критичних значень  $\tilde{p}_*$  навантажень (як функцій параметрів  $r_1$ ,  $r_2$  і  $\eta$ ) у випадку автоколивної втрати стійкості. Вирізнимо два значення параметра консервативності:  $\eta = 1$  і  $\eta = 0,5$ , рис 39; під критичним навантаженням  $\tilde{p}_*$  розумітимемо таке, що  $\tilde{p}_* E J l^{-2} = (G + H)_*$ . Криві 1, 2, ..., 6 на рис. 39 відповідають таким значенням параметра  $r_1$ : 0; 0,05; 0,1; 1; 2; 5; при побудові цих кривих використовувалася тільки нижня оцінка (верхня і нижня оцінки відрізняються одна від одної не більше як на два відсотки).

Як бачимо, центральний радіус інерції тіла може помітно зменшити критичне навантаження стержня, стиснутого стежною та консервативною силами (до чотирьох разів у випадку  $\eta = 1$ ,  $r_1 \gg 1$ ); зі зменшенням параметра неконсервативності  $\eta$  вплив радіуса інерції на критичне навантаження поступово зменшується (до двох разів для  $\eta = 0,5$ ).



Вважатимемо, що нижній кінець консолі затиснутий пружно. Дослідимо вплив параметра пружності закріплення  $\psi$  на стійкість консолі у випадку  $r_1 = r_2 = 0$ .

Замінімо в (12.33) другу з крайових умов для  $x = 0$  умовою

$$f'(0) - \psi f''(0) = 0,$$

і одержимо замість (12.35) таке рівняння:

$$\{F_0 - p(1 - \eta)F_2 + \psi[F'_0 - p(1 - \eta)F'_2]\}_{x=1} = 0. \quad (12.48)$$

Рисунок 38 Схема пружно закріпленої консолі з рознесеною на вільному кінці масою, яка навантажена консервативною та стежною силами.

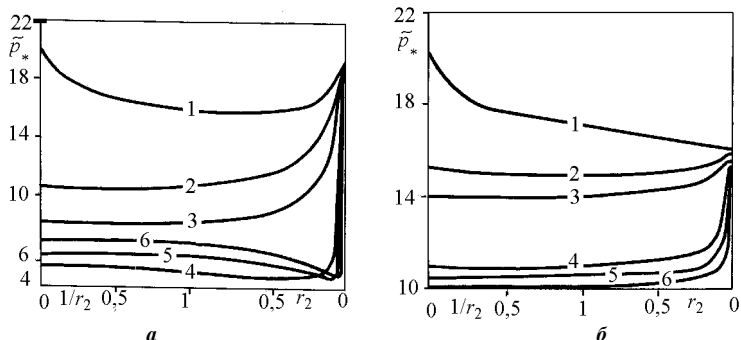


Рисунок 39 Графіки залежності флатерно критичних значень навантаження  $\tilde{p}_*$  від радіуса  $r_1$  інерцій тіла та відношення  $r_2$  мас тіла і стержня для двох значень параметра неконсервативності:  $\eta=1$  (а)  $\eta=0,5$  (б).

Коефіцієнти відповідного характеристичного ряду визначаються так само, як у задачі про консоль із жорстким закріпленням. Дивергенційно критичні значення навантаження визначаємо за допомогою рівняння  $B_0 = 0$ . При знаходженні флатерно критичних значень навантаження вдаємося до оцінок  $\tilde{p}_2 < \tilde{p}_* < \tilde{p}_3$ . Окремі результати обчислень відобразимо у формі рис. 40 — 42 ("динамічні криві" побудовано за нижніми оцінками; верхні оцінки перевищують відповідні нижні не більш, як на 3 %).

На рис. 40 і 41 відображено області стійкості системи в площині параметрів неконсервативності ( $\eta$ ) і сумарного стискувального навантаження ( $p$ ) для різних значень параметра жорсткості затиснення ( $\psi$ ), причому "статичні" криві зображено штриховими, а "динамічні" — суцільними лініями. Наведена графічна інформація наочно засвідчує, що жорсткість затиснення може суттєво впливати як на критичні значення навантаження стержня, так і на характер втрати стійкості. На рис. 42 відображено залежність критичного навантаження від параметра  $\psi$  для випадку  $\eta=1$  (діє тільки стежна сила). Особливу увагу тут привертає немонотонність цієї залежності; звідси випливає, зокрема, що у випадку меншої жорсткості закріплення консолі її рівновага може виявитися більш стійкою. Підкреслимо, що одержані результати істотно доповнюють відомі, встановлені іншими методами [52, 55, 85].

Розглянемо детальніше частковий випадок, коли  $\psi = 0$ ,  $\eta = 1$  (що відповідає класичній задачі про стійкість пружного стержня за дії стежної сили). Беручи до уваги (12.48), (12.22), (12.21), одержимо ряд (11.2):

$$R_2(\lambda^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1} (a\lambda^2)^n f_{4,n-1}(1, \beta), \quad (12.49)$$

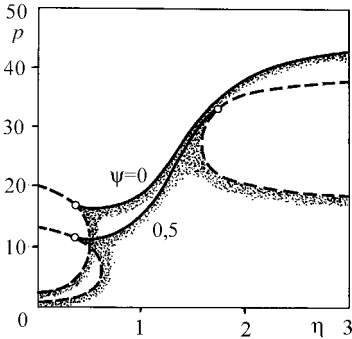


Рисунок 40 Области стійкості консолі у випадках жорсткого ( $\psi = 0$ ) та пружного ( $\psi = 0,5$ ) зашкєнення її кінця.

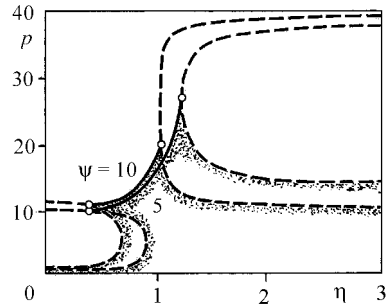


Рисунок 41 Области стійкості консолі у випадку пружного зашкєнення, коли  $\psi = 5$  та  $\psi = 10$ .

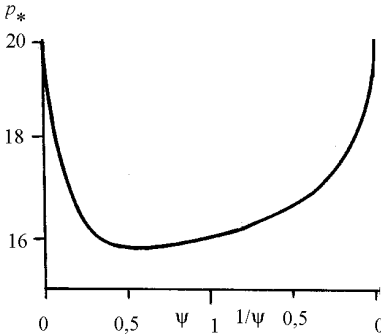


Рисунок 42 Графік залежності критичного значення стежної сили від параметра податливості зашкєнення.

де

$$f_{4,n}(x, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n+1+m}^{2n+1} \frac{\beta^m x^{4n+2m+4}}{(4n+2m+4)!}.$$

Отже,

$$B_0 = 1, B_2 = 2af_{4,0}(1, \beta), B_4 = 2^3 a^2 f_{4,1}(1, \beta), B_6 = 2^5 a^3 f_{4,2}(1, \beta), \dots \quad (12.50)$$

Зазначимо, що наведені тут коефіцієнти доцільно мати також і у закнєненій формі (зобразивши їх суми через елементарні функції). Застосовуючи співвідношення

$$f_{4,n}(x, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n+1+m}^{2n+1} \frac{\beta^m x^{4n+2m+4}}{(4n+2m+4)!} = \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} f(x, \beta)}{\partial \beta^{2n+1}}, \quad (12.51)$$



де

$$f(x, \beta) = \beta^{-1} \left( \operatorname{ch} \beta^{\frac{1}{2}} x - 1 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k x^{2k+2}}{(2k+2)!}, \quad (12.52)$$

знайдемо:

$$\begin{aligned} f_{4,0} &= \frac{1}{2} x \psi_2 - \beta^{-1} \psi_1 + \beta^{-2}, \\ f_{4,1} &= \frac{1}{8 \cdot 3!} \left( x^3 \beta^{-1} \psi_2 - 9x^2 \beta^{-2} \psi_1 + 33x \beta^{-2} \psi_2 - 48\beta^{-3} \psi_1 + 48\beta^{-4} \right), \\ f_{4,2} &= \frac{1}{2^5 \cdot 5!} \left( x^5 \beta^{-2} \psi_2 - 20x^4 \beta^{-3} \psi_1 + 185x^3 \beta^{-3} \psi_2 - 975x^2 \beta^{-4} \psi_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2895x \beta^{-4} \psi_2 - 3840(\beta^{-5} \psi_1 + \beta^{-6}) \right), \end{aligned} \quad (12.53)$$

де

$$\psi_1 = \beta^{-1} \operatorname{ch} \beta^{\frac{1}{2}} x, \quad \psi_2 = \beta^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sh} \beta^{\frac{1}{2}} x. \quad (12.54)$$

Кладучи в формулах (12.53)  $\beta = -p$ ,  $x = 1$  і враховуючи залежності між гіперболічними та тригонометричними функціями, одержуємо такі суми коефіцієнтів (12.50) характеристичного ряду (12.49):

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{k^4} (2 - 2 \cos k - k \sin k), \quad k = \sqrt{p} = \sqrt{HI^2 (EJ)^{-1}}, \\ B_4 &= \frac{1}{3! k^8} \left[ k^3 \sin k + 9k^2 \cos k - 33k \sin k + 48(1 - \cos k) \right], \\ B_6 &= \frac{1}{5! k^{12}} \left[ -k^5 \sin k - 20k^4 \cos k + 185k^3 \sin k + 975k^2 \cos k - \right. \\ &\quad \left. - 2895k \sin k + 3840(1 - \cos k) \right]. \end{aligned} \quad (12.55)$$

Оскільки  $B_0 = 1$ , то втрата стійкості за Ойлером є неможливою (не існує суміжних з прямолінійною форм рівноваги). Застосовуючи оцінки  $\tilde{p}_2 < \tilde{p}^* < \tilde{p}_3^*$  і формули (12.55), знаходимо

$$19,679 < \tilde{p}^* < 20,208.$$

Отже, точність визначення "критичної" сили  $\tilde{p}^*$  (що відповідає автоколивній нестійкості консолі за дії стежної сили) методом характеристичних рядів з застосуванням найпростіших двобічних оцінок є вельми високою.

Як відомо (див., наприклад, [54, 93]), точним є значення  $\tilde{p}_* \approx 20$ . Воно обчислюється як найменше значення параметра  $p$ , при якому стають критичними частоти систем. Відповідні узагальнену задачу на власні значення та частотне рівняння тут можна отримати з (12.32) — (12.34) за умов  $\eta = 1$ ,  $r_i = b_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ); ліву частину рівняння  $F_0(\omega^2, p) = 0$  в цьому випадку визначатиме формула (12.42) при  $x = 1$ . Отже навіть тоді, коли розв'язок вдається одержати в замкненому вигляді, дослідження стійкості є нелегкою задачею [10, 55, 93, 94 тощо]. За відсутності замкнених розв'язків застосування точного методу, взагалі кажучи, стає неможливим. Натомість метод характеристичних рядів з застосуванням двобічних оцінок  $\tilde{p}_2 < \tilde{p}_* < \tilde{p}'_2$  (або ж складніших оцінок, див. 11.5) не пов'язаний з наявністю замкнених розв'язків та відповідних трансцендентних рівнянь. У цьому полягає його головна перевага перед іншими методами.

Проілюструємо тепер застосування найпростіших оцінок (12.7) у випадку визначення основної частоти коливань і дослідження її залежності від різних параметрів на прикладі системи, схема якої наведена на рис. 13.

Із формул (12.36) для  $B = b_1 = b_2 = 0$  знайдемо коефіцієнти

$$B_0 = 1 - p(1 - \eta)f_{2,0}(1, -p),$$

$$B_2 = \left[ 2f_{0,1} - 4p(1 - \eta)f_{2,1} + 2r_2f'_{4,0} + \eta r_2f'_{2,0} \right]_{\beta=-p}^{x=1},$$

$$B_4 = \left[ 8f_{0,2} - 16p(1 - \eta)f_{2,2} + 8r_2f'_{4,1} + 4r_1r_2f'_{2,1} + 2r_1r_2^2f_{4,0} \right]_{\beta=-p}^{x=1}$$

відповідного характеристичного ряду (11.2) і, використовуючи оцінки (12.7), дослідимо вплив параметрів  $r_1$  і  $r_2$  на перші гілки власних значень (або, що це ж саме, на основну частоту стиснутого стержня) для таких випадків: стежна сила відсутня ( $\eta = 0$ ); консервативна сила відсутня ( $\eta = 1$ ); консоль незавантажена ( $p = \eta = 0$ ).

Результати обчислень графічно відображено на рис.43 — 45. Зазначимо, що пересічно верхня оцінка перевищує нижню дуже мало, через що на рисунках відповідні пари ліній зображено одинарними лініями; лише в неконсервативній задачі з наближенням значень параметра  $p$  до критичних відмінність між оцінками стає щораз більшою і відповідні криві кожної пари розбігаються, утворюючи “вилки” (див. рис. 44). При необхідності звузити ці “вилки” доводиться вдаватись до складніших оцінок (12.3). В табл. 8 для прикладу наведено оцінки (12.7) та (12.3) здолу  $\omega_-^2$  і згори  $\omega_+^2$  квадрата основної частоти  $\Omega_1^2$  коливань для випадку  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $\eta = 1$  (стержень з рівномірно розподіленою масою за дії стежної сили).

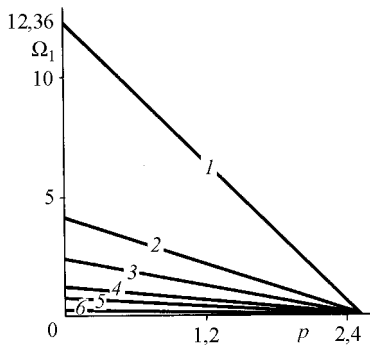


Рисунок 43 Графіки залежності основної частоти від консервативної стискувальної сили для різних значень радіуса інерції тіла  $r_1$  та відношення маси тіла й стержня  $r_2$  :  
 1 —  $r_1 = 0, r_2 = 0$ ; 2 —  $r_1 = 0, r_2 = 0,5$ ;  
 3 —  $r_1 = 0, r_2 = 1$ ; 4 —  $r_1 = 0,5, r_2 = 1$ ;  
 5 —  $r_1 = 1, r_2 = 1$ ; 6 —  $r_1 = 10, r_2 = 1$ .

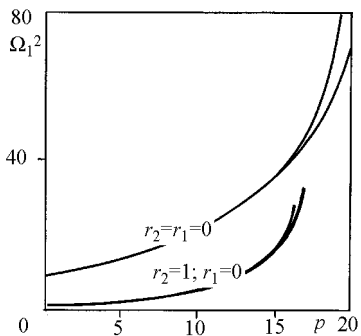


Рисунок 44 Графіки залежності основної частоти коливань консолі від стискувальної сили за відсутності ( $r_1 = r_2 = 0$ ) та наявності ( $r_1 = 0, r_2 = 1$ ) зосередженої маси.

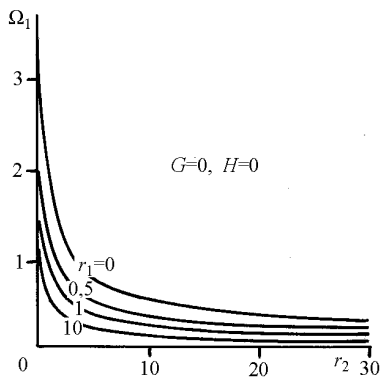


Рисунок 45 Графіки залежності основної частоти від відношення мас тіла і стержня  $r_2$  за різних значень радіуса інерції  $r_1$  тіла у випадку відсутності стискувальних сил ( $G = H = 0$ ).

Таблиця 8 Порівняння двобічних оцінок квадрата основної частоти коливань системи за різних значень стискувальної стежної сили

Оцінки (12.7)			Оцінки (12.3)		
$p$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$	$p$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$
0	12,358	12,365	0	12,364	12,364
10	26,708	26,815	10	26,812	26,812
15	43,324	44,095	15	44,064	44,080
17	54,721	56,935	17	56,767	56,857
19	72,056	81,734	19	79,930	81,413
19,6	79,319	101,979	19,6	92,850	100,190
19,7	80,667	—	19,7	95,767	109,522
19,8	83,912	—	19,8	98,834	—

Наведені в таблиці дані, таким чином, засвідчують можливість у даному випадку, використовуючи не більше п'яти перших коефіцієнтів характеристичного ряду (11.2) визначити основну частоту вельми точно для значень параметра  $p$  з доволі широкого проміжку  $[0; 19,6]$  (автоколивна втрата стійкості, нагадаємо, настає при  $\tilde{p}_* \approx 20$ ).

Розглянемо, нарешті, задачу про стійкість в докільлі з великим опором пружно закріпленої консолі за дії стежної сили. Дослідимо вплив параметрів тертя та пружності закріплення на критичне навантаження.

Відповідне характеристичне рівняння одержуємо з рівняння (12.48) при  $\eta = 1$ . Коефіцієнти характеристичного ряду вигляду (11.1) для  $\psi = 0$  визначаються за формулами

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 2Bf_1, \quad A_2 = 2(af_1 + 2B^2 f_2), \quad A_3 = 2^4 B(af_2 + 2B^2 f_3),$$

$$A_4 = 2^3(a^2 f_2 + 2^2 \cdot 3aB^2 f_3 + 2^4 B^4 f_4), \dots,$$

де

$$f_n = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n-1+m}^{2n-1} \frac{\beta^m}{(4n+2m)!}.$$

Звідси, беручи до уваги рівняння (12.48), неважко одержати формули для випадку  $\psi \neq 0$ .

Критичне навантаження визначаємо, застосовуючи наведені раніше (див. 11.5) двобічні оцінки  $p_2 < p_* < p'_3$ . Результати обчислень відображено графіками на рис. 46 з використанням позначень

$$b_0 = \frac{Bl^2}{\sqrt{mEJ}}, \quad p_* = \frac{Hl^2}{EJ}.$$

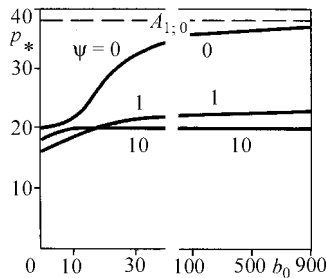


Рисунок 46 Графіки залежності критичних значень стежної сили ( $p_*$ ) від параметра тертя ( $b_0$ ) за різних вартостей параметра податності зашечкування ( $\psi$ ).

На підставі наведеної інформації можна зробити висновки: 1) малими є підстави вважати значення параметра тертя з проміжку  $0 < b_0 < 0,5$ , оскільки власне в цьому проміжку із збільшенням  $b_0$  критична сила збільшується незначно (до 5%); 2) для значень  $b_0 > 30$  і невеликих  $\psi$  критична сила суттєво (майже у два рази) більша, ніж для  $b_0 = 0$ ; 3) граничне значення критичної сили при  $b_0 \rightarrow \infty$  мало відрізняється від найменшого кореня рівняння  $A_1 = 0$ ; зокрема, у випадку  $\psi = 0$  (жорстке закріплення) залежність  $p_* = p_*(b_0)$  обмежена відповідною прямою  $A_{1;0}$ .

### 12.7 Задача про пружно затиснуту балку з проміжною опорою

Звернемося до пружного стержня, лівий кінець якого затиснутий пружно (жорсткість закріплення характеризується параметром  $\psi$ ), а положення правої опори визначається параметром  $r$ ; до правого кінця стержня прикладена стискувальна (розтягувальна) стежна сила  $H$  (рис. 47). Поставимо цьому стержню у відповідність таку крайову задачу [95]:

$$f_j^{IV}(\xi_j) + p f_j''(\xi_j) - \Lambda^2 f_j(\xi_j) = 0 \quad (j = 1, 2);$$

$$f_1(0) = f_1(a_1) = f_2(0) = f_2''(a_2) = f_2'''(a_2) = 0, \quad f_1''(0) - \psi f_1'(0) = 0,$$

$$f_1'(a_1) = f_2'(0), \quad f_1''(a_1) = f_2''(0),$$

де  $\xi_1 l = x$ ,  $\xi_2 l = x - r$ ,  $a_1 l = r$ ,  $a_2 l = l - r$ ;  $j = 1$  відповідає лівій ділянці стержня ( $0 \leq x \leq r$ ), а  $j = 2$  — правій ( $r \leq x \leq l$ ); Характеристичний визначник задачі має такий вигляд:

$$\Delta = 1 - \Lambda^2 [F_4(a_2)\phi'(a_1) + F_4'(a_2)\phi(a_1)], \quad (12.56)$$

де  $\phi \equiv F_4' + \psi F_4$  є визначуваною за формулами (12.20) або (12.38).

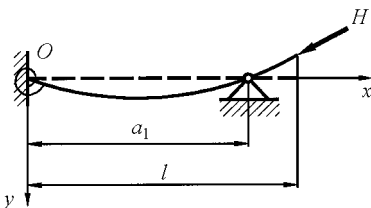


Рисунок 47 Схема стержня з пружно зашкеленим лівим кінцем та жорсткою проміжною опорою, навантаженого стискувальною стежною силою на вільному кінці.

Розглянемо випадок відсутності стискувальної сили ( $H = 0$ ) і дослідимо вплив окремих параметрів на нижчі частоти. Коефіцієнтами характеристичного ряду вигляду (11.2) тут є величини

$$B_0 = 1 + \frac{2}{3!} \psi a_1, \quad B_2 = 2 \left[ \frac{2^2}{6!} a_1^4 + \frac{2}{(3!)^2} a_1 a_2^3 + \frac{1}{4!} a_2^4 + 2\psi a_1 \left( \frac{2}{7!} a_1^4 + \frac{2^2}{3!4!} a_1 a_2^3 + \frac{1}{3!4!} a_2^4 \right) \right],$$

$$B_4 = 2^3 \left[ \frac{2^2}{10!} a_1^8 + \frac{2}{3!7!} a_1^5 a_2^3 + \frac{2}{4!6!} a_1^4 a_2^4 + \frac{2}{3!7!} a_1 a_2^7 + \frac{1}{8!} a_2^8 + 2\psi a_1 \left( \frac{2}{11!} a_1^8 + \frac{1}{3!8!} a_1^5 a_2^3 + \frac{1}{4!7!} a_1^4 a_2^4 + \frac{1}{4!7!} a_1 a_2^7 + \frac{1}{3!8!} a_2^8 \right) \right], \dots$$

Результати обчислень оцінок вигляду (12.3) для  $j = 1, 2$  відображено на рис. 48: першим частотам відповідають нижні криві (вони починаються, як і повинно бути, в точці  $(0; 3,5)$ ; верхня оцінка практично збігається з нижньою для всіх значень параметрів  $r$  і  $\psi$ ); другим частотам — верхні криві, причому нижні оцінки зображено суцільними лініями, а верхні — переривчастими. Звідси випливає, що застосовуючи найпростіші оцінки (з використанням лише трьох коефіцієнтів характеристичного ряду), основну частоту коливань як функцію параметрів  $r$  і  $\psi$  вдається визначити тут з вельми високою точністю; “неоднозначність” ж визначення другої частоти не перевищує приблизно 10 %.

Спробуємо тепер з’ясувати вплив параметра  $r$  на характер втрати стійкості стержня, а також і на величину критичної сили.

Коефіцієнти відповідного характеристичного ряду (11.2) неважко знайти, використовуючи формули (12.20) — (12.21) і (12.56). З урахуванням співвідношень (12.51) — (12.54) їх можна записати в замкненій формі. Зокрема, для  $\psi = 0$  маємо:

$$B_0 = \alpha_1^{-1} u_1; \quad B_2 p^2 = \frac{1}{2} \varphi(\alpha_1) - \frac{1}{6} \alpha_1 u_1 + \alpha_1 u_1 g(\alpha_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2);$$

$$B_4 p^4 = \frac{1}{5!} (\alpha_1^3 u_1 + 10 \alpha_1^2 v_1 - 45 \alpha_1 u_1 + 105 \varphi(\alpha_1)) + \frac{1}{3!} \{ (-\alpha_1 u_1 + 3 \varphi(\alpha_1)) g(\alpha_2) + 9 \alpha_2^2 v_2 - 33 \alpha_2 u_2 + 48(1 - v_2) \} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} [ (\alpha_1^2 v_1 - 6 \alpha_1 u_1 + 15 \varphi(\alpha_1)) \varphi(\alpha_2) + (\alpha_2^2 v_2 - 6 \alpha_2 u_2 + 15 \varphi(\alpha_2)) \varphi(\alpha_1) ],$$

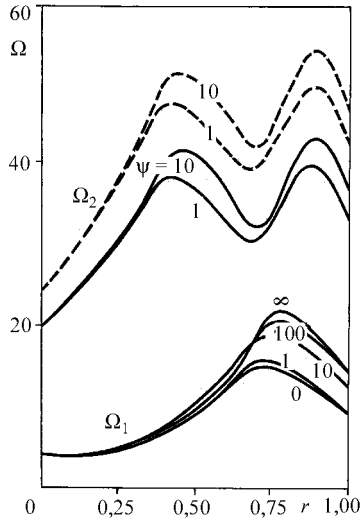


Рисунок 48 Графічне зображення оцінок першої та другої частот незавантаженого стержня.

$$\begin{aligned}
 B_2 p^6 = & \frac{1}{7!} \left( -\alpha_1^5 u_1 - 21\alpha_1^4 v_1 + 210\alpha_1^3 u_1 + 1260\alpha_1^2 v_1 - 4725\alpha_1 u_1 + \right. \\
 & \left. + 10395\varphi(\alpha_1) \right) + \frac{1}{5!} \left\{ \left( \alpha_1^3 u_1 + 10\alpha_1^2 v_1 - 45\alpha_1 u_1 + 105\varphi(\alpha_1) \right) g(\alpha_2) + \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left[ \left( -\alpha_1^4 v_1 + 15\alpha_1^3 u_1 + 105\alpha_1^2 v_1 - 420\alpha_1 u_1 + 945\varphi(\alpha_1) \right) \varphi(\alpha_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \varphi(\alpha_1) \left( -\alpha_2^4 v_2 + 15\alpha_2^3 u_2 + 105\alpha_2^2 v_2 - 420\alpha_2 u_2 + 945\varphi(\alpha_2) \right) \right] \right\} + \\
 & \alpha_1^{-1} u_1 \left( -\alpha_2^5 u_2 - 20\alpha_2^4 v_2 + 185\alpha_2^3 u_2 + 975\alpha_2^2 v_2 - 2895\alpha_2 u_2 + 3840(1-v_2) \right) + \\
 & + \left( \frac{1}{3!} \right)^2 \left[ \left( 3\varphi(\alpha_1) - \alpha_1 u_1 \right) \left( \alpha_2^3 u_2 + 9\alpha_2^2 v_2 - 33\alpha_2 u_2 + 48(1-v_2) \right) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1^2 v_1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 6\alpha_1 u_1 + 15\varphi(\alpha_1) \right) \left( \alpha_2^2 v_2 - 6\alpha_2 u_2 + 15\varphi(\alpha_2) \right) \right],
 \end{aligned}$$

де

$$\alpha_i = \sqrt{p a_i}, \quad \sin \alpha_i = u_i, \quad \cos \alpha_i = v_i,$$

$$\frac{1}{\alpha} \sin \alpha - \cos \alpha = \varphi(\alpha); \quad 2 - 2 \cos \alpha - \alpha \sin \alpha = g(\alpha).$$

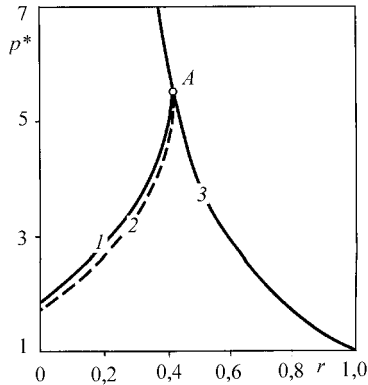


Рисунок 49 Графік залежностей флатерно та дивергенційно критичних значень стержної сили від розташування опори стержня.

Діючи методологічно так само, як і в попередніх прикладах, можна побудувати такі графіки залежності критичного навантаження від параметра  $r$ , рис. 49: відповідні (з лишком і нестачею) критичним значенням навантаження при автоколивній втраті стійкості — 1 і 2; відповідний точкам розгалуження форм рівноваги — 3. На осі ординат відклалися значення величини  $p^*$ , пов'язаної з критичним навантаженням співвідношенням  $p_{кр} = \pi^2 p^*$ ; то ж значення  $p^* = 1$  є критичним для стержня, кінці якого закріплені шарнірно ( $r = 1$ ). Криві 1 і 2 побудовано за рівняннями (11.21), а крива — за рівнянням  $B_0 = 0$ . Через те, що графіки 1, 2 лягають досить близько один біля одного, неоднозначність визначення критичних значень навантаження при автоколивній втраті стійкості є відносно невисокою (не перевищує приблизно 5%). Причому ця неоднозначність є тим помітнішою, чим менших значень набуває параметр  $r$ , що характеризує розташування опори. Побудовані графіки перетинаються в точці  $A$  з координатами  $r = 0,418$ ;  $p^* \approx 5,7$ .

На підставі відображеної на рис. 49 інформації можна зробити такі досить важливі висновки [95]:

1. Характер втрати стійкості системи змінюється зі зміною розташування опори: при  $r \leq 0,418l$  система втрачає стійкість шляхом автоколивань, а при  $r > 0,418l$  втрата стійкості відбувається за Ойлером.

2. Для розглянутої системи існує оптимальне розташування опори: коли  $r = 0,418l$ , критична сила є найбільшою і це найбільше її значення перевищує критичну силу для шарнірно закріпленого на кінцях стержня в 5,7 рази і в 2,8 рази — для консольного.



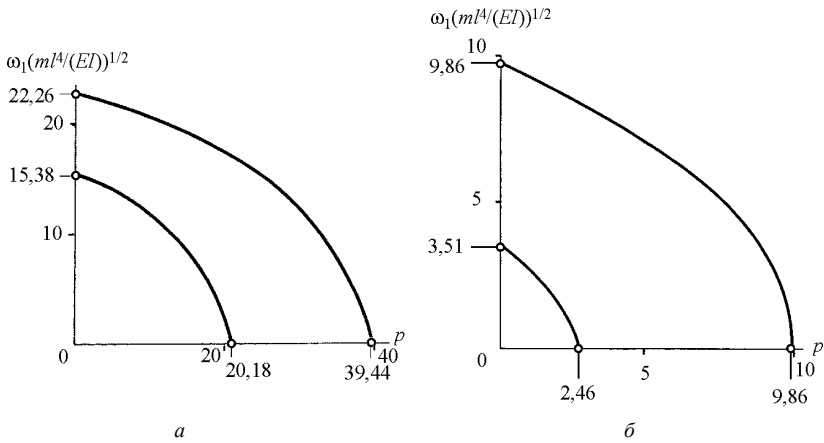


Рисунок 50 Залежність основної частоти від стискальної консервативної сили: *a* — стержень з затиснутими кінцями та стержень з одним затиснутим, а другим шарнірно закріпленими кінцями; *б* — стержень з двома шарнірно закріпленими кінцями та консоль.

Очевидно, що на підставі співвідношень (12.20) — (12.24) та (12.51) — (12.54) можна одержувати суми коефіцієнтів характеристичних рядів задач будь-якого змісту, яким відповідає модель (12.11). Інший спосіб сумування ґрунтується на розгортанні кожної з функцій (12.38) — (12.44) в степеневий ряд за параметром частоти ( $a\omega^2$ ) та подальшому елімінуванні з цього ряду величин  $\mu^2$  і  $\nu^2$  (з використанням формул (12.17)). Цей спосіб застосовано в праці [35]: спочатку знайдено суми перших трьох коефіцієнтів розкладу для функцій  $F_4(x, \beta, \delta)$  (вони збігаються з (12.55)); диференціюванням цих сум за аргументом  $x$ , одержано відповідні замкнені вирази для інших частотних рівнянь (12.26) — (12.27). Зрозуміло, що перший спосіб побудови замкнених виразів (формули (12.51) — (12.54)) є простішим.

Вдаючись до цього способу, відносно легко оцінити вплив стискувальної консервативної сили на основну частоту поперечних коливань прямих стержнів, рис. 50. На рис. 50, *a* верхня крива відповідає стержневі з затиснутими кінцями, друга — з затиснутим одним кінцем і шарнірно закріпленим другим; на рис. 50, *б* верхня — шарнірно опертому стержню, а нижня — консолі.

Всі подані графічно залежності будувалися за нижньою оцінкою (12.7), оскільки ті, що відповідають верхній, майже не відрізняються (найбільша різниця між оцінками спостерігається при  $p = 0$  і становить приблизно 1%). Зауважимо, що графік, відповідний стержню з шарнірно закріпленими кінцями, не відрізняється практично від побудованого за відомою для цього випадку точною формулою (див., наприклад, [51, 52]).

### 13.1 Постановка проблеми та спосіб її розв'язання

Нехай дослідження малих коливань деякої пружної системи зведено до розв'язування узагальненої крайової задачі

$$L[y] - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{ij} a_{ij}(x) [y^{(j-1)}(x) \delta(x - x_i)]^{(j-1)} = 0; \quad (13.1)$$

$$V_s[y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)] = 0, \\ s = \overline{1, n}; \quad (13.2)$$

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{v=1}^n p_v(x) y^{(n-v)}(x). \quad (13.3)$$

Тут  $r_n = E[n/2]$ ,  $p_v(x)$ ,  $a_{ij}(x)$  — задані на окресленому проміжку голоморфні функції. Вони, а також коефіцієнти крайових умов та величини  $\alpha_{ij}$  вважаються цілими аналітичними функціями параметрів задачі та характеристичного показника  $\lambda$ .

Розглянемо питання про побудову характеристичного визначника даної задачі, з якого можна б одержувати характеристичні ряди (11.1) і (11.2) з коефіцієнтами, що залежать явним чином від параметрів системи. Для випадку диференційного рівняння другого порядку це питання розглядалося в 2. 7.

Спосіб побудови характеристичних визначників задач (13.1) — (13.3) ґрунтується на формулі загального розв'язку рівняння (13.1) [2, 5, 6, 127]

$$y(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} [Q_m(x, x_m, x_{m-1}, \dots, x_1, \alpha)], \quad (13.4)$$

$$Q_q(x, x_q, x_{q-1}, \dots, x_1, \alpha) = Q_{q-1}(x, x_{q-1}, \dots, x_1, \alpha) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{qj} Q_{q-1}^{(j-1)}(x_q, x_{q-1}, \dots, x_1, \alpha) f_{qj}(x, x_q), \quad q = \overline{1, m}, \quad (13.5)$$

$$f_{ij}(x, x_i) = (-1)^{j-1} \frac{\partial^{j-1} (K(x, \alpha) a_{ij}(\alpha))}{\partial \alpha^{j-1}} \Big|_{\alpha=x_i}, \quad \theta(x - x_i), \quad (13.6)$$

$$Q_0(x, \alpha) = K(x, \alpha), \quad (13.7)$$

де  $K(x, \alpha)$  — функція Коші рівняння  $L[y] = 0$  ( $L[y]$  — диференційний вираз (13.3)). Формула (13.5) цілком подібна до одержаної в 2.6 і доводиться так само (при  $p_0(x) \equiv 1$  формула (2.44) і формула (13.5) для  $a_{ij}(x) \equiv 1$  є тотожними).

Зображення функції  $K(x, \alpha)$  у вигляді ряду за характеристичним показником  $\lambda$  або за іншим параметром  $p$  можна будувати, застосовуючи формули (3.24) — (3.25), (3.26) — (3.31).

### 13.2 Загальне зображення характеристичного визначника задачі для диференційного рівняння четвертого порядку

Загальний розв'язок рівняння  $L[y] = 0$  з лівою частиною (13.3) визначаємо за формулою ( $n = 4$ )

$$y(x, a) = C_0 K(x, a) + C_1 \dot{K}(x, a) + C_2 \ddot{K}(x, a) + C_3 \dddot{K}(x, a).$$

Підставляючи цей розв'язок у граничні умови

$$\left. \begin{aligned} fy'' - \psi_0 y' - d_0 y = 0 \\ (fy'')' - c_0 y' + \vartheta_0 y = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x = a, \quad \left. \begin{aligned} fy'' + \psi_1 y' - d_1 y = 0 \\ (fy'')' - c_1 y' - \vartheta_1 y = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x = b,$$

одержимо характеристичний визначник задачі

$$\Delta = \{(c_1 d_1 + \vartheta_1 \psi_1) T_1 + (f' \psi_1 + c_1 f) T_2 + f^2 T_3 - \\ - f d_1 T_4 - (d_1 f' + \vartheta_1 f) T_1' + \psi_1 f T_2'\}_{x=b}. \quad (13.8)$$

Тут

$$T_1 = -\gamma_{01} F_4 + \beta_0 \dot{F}_4 + \beta_1 F_{22} - \alpha_1 \dot{F}_{22} - F_{02} - \alpha_0 \Phi_{22},$$

$$T_2 = -\gamma_{01} F_{21} + \beta_0 \dot{F}_{21} + \beta_1 F_0 - \alpha_1 \dot{F}_0 - W_{02} - \alpha_0 \Phi_{11},$$

$$T_3 = -\gamma_{01}F_{01} + \beta_0\dot{F}_{01} + \beta_1W_{01} - \alpha_1\dot{W}_{01} - W_{10} - \alpha_0\Phi_{01},$$

$$T_4 = -\gamma_{01}\Phi_{21} + \beta_0\dot{\Phi}_{21} + \beta_1\Phi_{12} - \alpha_1\dot{\Phi}_{12} - \Phi_{02} - \alpha_0V_0; \quad (13.9)$$

$$\alpha_0 = \left[ f^{-1}(2f'^2 + f'\psi_0 - f'' + \tilde{N} + c_0) \right] \Big|_{x=a},$$

$$\beta_0 = \left[ 2f^{-3}f'^2\psi_0 + f^{-2}(f'f'' - \tilde{N}f' + 2f'c_0 - f'd_0) + f^{-1}(9_0 - f''') \right] \Big|_{x=a},$$

$$\tilde{N} = N - \lambda^2\mu - b_2\lambda, \quad \beta_1 = \left[ -2f^{-2}f'\psi_0 + f^{-1}(-3f'' + \tilde{N} + d_0) \right] \Big|_{x=a},$$

$$\alpha_1 = -\left[ f^{-1}(2f' + \psi_0) \right] \Big|_{x=a}, \quad \gamma_{01} = \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0; \quad (13.10)$$

інші функції, що є у визначнику (13.8), визначаються формулами

$$F_4 = K\dot{K}' - \dot{K}K', \quad F_{21} = K'\dot{K}'' - K''\dot{K}',$$

$$F_{22} = \dot{K}\dot{K}'' - \dot{K}''\dot{K}', \quad F_0 = \dot{K}'\ddot{K}'' - \dot{K}''\ddot{K}',$$

$$F_{01} = K''\dot{K}''' - K'''\dot{K}'', \quad F_{02} = \ddot{K}\ddot{K}' - \ddot{K}'\ddot{K}; \quad (13.11)$$

$$W_{10} = \ddot{K}''\ddot{K}''' - \ddot{K}'''\ddot{K}'', \quad W_{01} = \ddot{K}'''\dot{K}' - \dot{K}''\ddot{K}''',$$

$$W_{02} = \ddot{K}'\ddot{K}'' - \ddot{K}''\ddot{K}', \quad V_0 = K\ddot{K}''' - \ddot{K}K'''; \quad (13.12)$$

$$\Phi_{01} = K''\ddot{K}''' - K'''\ddot{K}'', \quad \Phi_{02} = \ddot{K}\ddot{K}''' - \ddot{K}''\ddot{K}''',$$

$$\Phi_{11} = K'\ddot{K}'' - K''\ddot{K}', \quad \Phi_{12} = \dot{K}\ddot{K}''' - \ddot{K}\dot{K}''',$$

$$\Phi_{21} = K\dot{K}''' - \dot{K}K''', \quad \Phi_{22} = K\ddot{K}' - K'\ddot{K}. \quad (13.13)$$

З наведених співвідношень випливають такі залежності:

$$\Phi_{01} \equiv \ddot{F}_{01} - W_{01}, \quad \Phi_{02} \equiv F''_{02} - W_{02},$$

$$\Phi_{11} \equiv \ddot{F}_{21} - F_0, \quad \Phi_{12} \equiv F''_{22} - F_0,$$

$$\Phi_{21} \equiv F''_{4} - F_{21}, \quad \Phi_{22} \equiv \ddot{F}_4 - F_{22},$$

$$V_0 \equiv \mathcal{F}''_{22} - \Phi_{11}, \quad V_0 \equiv \ddot{\mathcal{F}}_{21} - \Phi_{12},$$

$$V_0 \equiv \ddot{F}''_{4} - F''_{22} - \ddot{F}_{21} + F_0. \quad (13.14)$$

Тому функції (13.13) і  $V_0$  можна одержувати, диференціюючи та додаючи (віднімаючи) інші, тобто (13.11) — (13.12). Отже, для побудови характеристичного визначника (13.8) досить оперувати у відповідності з (13.9) — (13.14) дев'ятьма функціями [5]

$$F_4, F_0, W_{10}; \quad F_{2i}, W_{oi}, F_{oi}, \quad i = 1, 2. \quad (13.15)$$

При цьому коефіцієнти відповідного диференційного рівняння (13.3) визначаються, наприклад, за такими формулами:

$$p_1(x) = 2f' f^{-1}, \quad p_2(x) = (f'' + N - \lambda^2 \mu - b_2 \lambda) f^{-1},$$

$$p_3(x) = (N' - \lambda^2 \mu' - b_2' \lambda) f^{-1}, \quad p_4(x) = (\kappa + \lambda^2 g + b_1 \lambda) f^{-1},$$

де  $f(x)$  — жорсткість стержня на згин;  $g(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $b_1(x)$ ,  $b_2(x)$  — його розподілені маса, момент інерції та коефіцієнти тертя;  $N(x)$ ,  $\kappa(x)$  — поздовжнє зусилля та коефіцієнт жорсткості пружної основи. Зауважимо, що  $p_i(x)$  ( $i = 1, 4$ ) можуть мати й іншу структуру (в задачах про автоколивну втрату стійкості, про коливання елементів з потоком рідини тощо).

### 13.3 Характеристичні визначники в основних випадках граничних умов

Основними для стержнів можна вважати такі граничні умови:

на лівому кінці ( $x = a$ )	на правому кінці ( $x = b$ )	
$y = y' = 0$	$y = y' = 0$	(13.16)
$y = y' = 0$	$y = fy'' = 0$	(13.17)
$y = fy'' = 0$	$y = y' = 0$	(13.18)
$y = fy'' = 0$	$y = fy'' = 0$	(13.19)
$y = y' = 0$	$fy'' = 0$ $(fy'')' + Gy' = 0$	(13.20)

При побудові характеристичних визначників крайових задач, відповідних рівнянню (13.1) і наведеним граничним умовам, доцільно оперувати такими функціями, які тут виникають природно:

$$F(x, \alpha) = K\dot{K}' - K' \dot{K} \quad (F \equiv F_4), \quad (13.21)$$

$$S(x, \alpha) = f(\alpha)\dot{F} - 2f'(\alpha)F, \quad (13.22)$$

$$R(x, \alpha) = f(x)F_{01} - GF_{21}. \quad (13.23)$$

Тоді відповідні характеристичні рівняння можна записати так:

$$F = 0, \quad F' = 0, \quad S = 0, \quad S' = 0, \quad R = 0 \quad (13.24)$$

(тут  $\alpha = a$ ,  $x = b$ ). Перше з них відповідає жорсткому закріпленню кінців стержня; друге — жорсткому закріпленню лівого кінця і шарнірному правого; третє, навпаки, — шарнірному лівого і жорсткому правого; четверте — шарнірному закріпленню обох кінців; п'яте — консолі.

Функції (13.21) — (13.23) і рівняння (13.24) доцільно подавати також і у дещо іншій формі. Нехай замість (13.3) маємо диференційний вираз

$$L[y] \equiv (f(x)y''') + (N(x)y') + (\mu(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + \kappa(x))y; \quad (13.25)$$

відповідну йому функцію Коші позначаємо як  $Q = Q(x, \alpha)$ . Беручи в формулах (13.21) — (13.23) до уваги очевидне співвідношення

$$K(x, \alpha) = f(\alpha)Q(x, \alpha),$$

знайдемо:

$$F(x, \alpha) = f^2(\alpha)(Q\dot{Q}' - Q'\dot{Q}), \quad (13.26)$$

$$S(x, \alpha) = f^3(\alpha)(Q\ddot{Q}'' - Q''\ddot{Q}), \quad (13.27)$$

$$R(x, \alpha) = f^2(\alpha)[f(x)F_{01}(Q) - GF_{21}(Q)]. \quad (13.28)$$

Тому замість характеристичних рівнянь (13.24) матимемо для задач, в яких вираз  $L[y]$  визначений формулою (13.25), такі рівняння:

$$\Delta|_{x=b}^{\alpha=a} = 0, \quad \Delta'|_{x=b}^{\alpha=a} = 0, \quad \dot{\Delta}|_{x=b}^{\alpha=a} = 0, \quad \dot{\Delta}'|_{x=b}^{\alpha=a} = 0; \quad (13.29)$$

$$[f(x)F_{01}(Q) - GF_{21}(Q)]|_{x=b}^{\alpha=a} = 0. \quad (13.30)$$

Тут

$$\Delta \equiv Q\dot{Q}' - Q'\dot{Q} \quad (\Delta = F(Q)).$$

Зазначимо, що при побудові характеристичних визначників для основних випадків граничних умов параметр  $\alpha$  вибирався рівним координаті лівого кінця стержня. Такий вибір дозволяє використовувати співвідношення, які задовольняє функція Коші та її похідні (коли  $x = \alpha = a$ ). Завдяки цьому вдається одержати раціональні та компактні зображення характеристичних рівнянь (зокрема, (13.24) і (13.29) — (13.30)). Виходячи з останніх і застосовуючи формули для загальних розв'язків рівнянь (13.1), приходимо до нового способу побудови універсальних характеристичних рівнянь у значно складніших випадках, коли параметри  $\alpha_{ij} \neq 0$  [5 — 7, 44, 96].

### 13.4 Побудова характеристичних рівнянь для пружних стержнів з зосередженими чинниками

Нехай дослідження динамічної поведінки стержня зведено до крайової задачі вигляду (13.1) — (13.2), причому: диференційний вираз  $L[y]$  визначається формулами (13.3) ( $n = 4$ ) або (13.25);

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_i \dots < x_m < b; \quad -\alpha_{i1} = \lambda^2 M_i + \lambda \varepsilon_{i1} + c_{i1}, \quad (i = \overline{1, m});$$

$$\alpha_{i2} = \lambda^2 J_i + \lambda \varepsilon_{i2} + c_{i2}. \quad (13.31)$$

Тут  $M_i$ ,  $J_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $c_{ij}$  — характеристики зосереджених у точці  $x_i$  чинників (відповідно маса, центральний момент інерції, коефіцієнти зовнішнього тертя та пружності опор).

Беручи до уваги формули (13.4) — (13.7) і результати, отримані в 13.3, одержуємо загальне правило: для стержнів, що мають пружні опори та рознесені зосереджені (в точках  $x_i$ ) маси, характеристичні рівняння будуються так само, як і для стержнів без "включень". При цьому граничним умовам (13.16) — (13.20) відповідають співвідношення (13.21) — (13.23) або (13.26) — (13.28) і універсальні характеристичні рівняння (13.24) або (13.29) — (13.30); відповідні функції  $F$ ,  $S$ ,  $R$  та  $\Delta$  одержуємо з цих співвідношень, замінюючи  $K(x, \alpha)$  ( $Q(x, \alpha)$ ) на функції  $Q_q(x, x_q, \dots, x_1, \alpha)$  (див. (13.5) і (2.46)) [5, 6, 44]. Зазначимо, що застосування даного правила не вимагає оперування умовами спряження в точках  $x_i$ . Це є однією з істотних переваг методу функцій впливу перед іншими методами.

За відсутності параметрів (13.31) ( $\alpha_{i2} = 0$ ) функція  $Q_m(x, x_m, \dots, x_1, \alpha)$  визначається за формулою (2.62) в явному вигляді (для диференційного рівняння довільного порядку). Тому й характеристичні рівняння в цьому випадку записуються явно для довільної кількості "включень". Якщо зосереджена та рознесена в точці  $x_i$  маса прикріплена до стержня пружно, то параметри  $\alpha_{i1}$  і  $\alpha_{i2}$  є такими [44, 96]:

$$\tilde{\alpha}_{i1} = M_i \lambda^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{i1} \lambda + \tilde{c}_{i1}}{M_i \lambda^2 + \tilde{\varepsilon}_{i1} \lambda + \tilde{c}_{i1}}, \quad \tilde{\alpha}_{i2} = J_i \lambda^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{i2} \lambda + \tilde{c}_{i2}}{J_i \lambda^2 + \tilde{\varepsilon}_{i2} \lambda + \tilde{c}_{i2}}, \quad (13.32)$$

де  $\tilde{c}_{ij}$  та  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  — відповідні коефіцієнти жорсткості та зовнішнього тертя. У випадках наявності в точці  $x_i$  обох мас ( $M_i$  і  $\tilde{M}_i$ ) потрібно ввести сумарний параметр

$$\alpha_{i1} + \tilde{\alpha}_{i1} \quad (\alpha_{i2} + \tilde{\alpha}_{i2}).$$

### 13.5 Приклади побудови загальних формул для власних частот

Розглянемо найпростіші приклади. Нехай  $m = 1$ ,  $N(x) \equiv 0$ . Тоді, згідно з (2.46)

$$Q_1(x, x_1, \alpha) = \Phi_{x\alpha} + \alpha_{11} \Phi_{1\alpha} \Phi_{x1}. \quad (13.33)$$

Якщо розподілені параметри значно менші від зосереджених, то

$$\Phi_{x\alpha} = \Phi(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(s)} (x-s)(s-\alpha) ds \cdot \theta(x-\alpha). \quad (13.34)$$

Вважаючи, крім цього, що  $a = 0$ , та підставляючи (13.33) в (13.26) і (13.29), після деяких перетворень одержуємо:

$$\alpha_{11} = V(l, 0) \left[ V(x_1, 0) \int_{x_1}^l \frac{(t-x_1)^2}{f(t)} dt + V(l, x_1) \int_0^{x_1} \frac{(t-x_1)^2}{f(t)} dt \right]^{-1}, \quad (13.35)$$

де

$$V = V(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{dt}{f(t)} \int_{\alpha}^x \frac{t^2 dt}{f(t)} - \left( \int_{\alpha}^x \frac{t dt}{f(t)} \right)^2; \quad (13.36)$$

$$\alpha_{11} = V'(l, 0) \left[ V(x_1, 0) \frac{(l-x_1)^2}{f(l)} + V'(l, x_1) \int_0^{x_1} \frac{(t-x_1)^2}{f(t)} dt \right]^{-1}; \quad (13.37)$$

$$\alpha_{11} = l^2 \left[ (l-x_1)^2 \int_0^{x_1} \frac{t^2}{f(t)} dt + x_1^2 \int_{x_1}^l \frac{(l-t)^2}{f(t)} dt \right]^{-1}. \quad (13.38)$$

Використовуючи (13.33) — (13.34), таким самим чином з рівняння (13.30) одержуємо формулу для консолі з масою  $M$  на вільному кінці  $x_1 = l$ :

$$\alpha_{11} = \left[ \int_0^l \frac{1}{f(s)} (l-s)^2 ds \right]^{-1}. \quad (13.39)$$

Співвідношення (13.35), (13.37) — (13.39), які є квадратними рівняннями відносно характеристичного показника  $\lambda$ , дозволяють знаходити частоти (комплексні) згасальних коливань відповідних систем з одним ступенем вільності при будь-якій заданій жорсткості стержня на згин  $f(x) > 0$  ( $0 \leq x \leq l$ ) та довільному коефіцієнті зовнішнього тертя, що задовольняє умову коливальності. Зауважимо, що у випадках  $f(x) = EJ_0 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_{ij} = c_{ij} = 0$ , з одержаних співвідношень випливають відомі формули для частот власних коливань і для критичних швидкостей валів з масивним диском [10].



Якщо, наприклад, консоль (з пружною опорою жорсткості  $c$  і коефіцієнтом тертя  $b$ ) крім жорстко прикріпленої маси  $M$  має також пружно прикріплену масу  $\tilde{M}$  (з жорсткістю пружини  $\tilde{c}$  і коефіцієнтом тертя  $\varepsilon$ ), то із (13.39) одержуємо таке рівняння:

$$M\lambda^2 + b\lambda + c + \frac{\varepsilon\lambda + \tilde{c}}{\tilde{M}\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \tilde{c}} \tilde{M}\lambda^2 + \left( \int_0^l \frac{(l-s)^2}{f(s)} ds \right)^{-1} = 0.$$

Звідси можна визначати частоти відповідних систем з двома ступенями вільності, а в окремих випадках одержувати відомі розв'язки.

Розглянемо задачу про вільні коливання безмасової балки з вільними кінцями, яка має скупчені маси в точках осі з координатами  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) і в цих же точках спирається на пружні опори з демпферами. Щоб побудувати відповідний загальний розв'язок  $y(x, \alpha) = \sum_{s=1}^n B_s Q_{Vs}$ , визначаємо функції  $Q_{Vs}(x)$  за наведеними в розділі 2 формулами, кладучи там

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = x, \quad \psi_3 = \Phi, \quad \psi_4 = \dot{\Phi}$$

(тут  $\Phi(x, \alpha)$  — інтеграл (13.34)). Вважаючи параметр  $\alpha$  рівним нулеві та підставляючи одержаний загальний розв'язок в граничні умови на лівому кінці ( $y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = 0$ ), переконаємося, що  $A_3 = 0$  і  $A_4 = 0$ . Після цього умови на правому кінці приводять нас до системи лінійних алгебричних рівнянь на сталі  $A_1$  і  $A_2$ . Прирівнюючи визначник цієї системи до нуля, одержуємо характеристичне рівняння в такому вигляді:

$$\begin{vmatrix} Q_{31}'' & Q_{32}'' \\ Q_{31}''' & Q_{32}''' \end{vmatrix}_{x=l} \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Звідси, кладучи  $x_1 = 0$ , після перетворень знаходимо:

$$\alpha_1 \alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 \alpha_3 x_3^2 + \alpha_2 \alpha_3 (x_3 - x_2)^2 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \{ x_2 [(x_2 - x_3) \Phi_{31} + x_3 \Phi_{32}] + x_3 \Phi_{21} (x_3 - x_2) \} = 0, \quad (13.40)$$

де

$$\Phi_{ij} = \int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{f(s)} (x_i - s)(s - x_j) ds; \quad \alpha_{i1} = \alpha_i \quad (i = \overline{1, 3}).$$

З рівняння (13.40) можна визначати характеристичні показники (частоти) багатьох відповідних систем з трьома, двома та одним ступенями вільності, критичні швидкості легких валів з масивними дисками, а також, беручи до уваги формули (13.32), і систем з більшою кількістю ступенів вільності (до шести).

Нехай, наприклад,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \infty$ . Тоді замість (13.40) маємо рівняння

$$x_2^2 + \alpha_3 \{ x_2 [(x_2 - x_3) \Phi_{31} + x_3 \Phi_{32}] + x_3 \Phi_{21} (x_3 - x_2) \} = 0.$$

Звідси, кладучи

$$x_2 = l - a, \quad x_3 = l, \quad f = EJ_0 = \text{const}, \quad \alpha_3 = M\omega^2,$$

$$\Phi_{21} = \frac{1}{6f}(l-a)^3, \quad \Phi_{31} = \frac{l^3}{6f}, \quad \Phi_{32} = \frac{a^3}{6f},$$

визначаємо відоме значення критичної швидкості обертання легкого (безмасового) вала з диском на кінці:

$$\omega_{\text{кр}}^2 = \frac{3f}{a^2 l}.$$

З (13.40) у конкретних випадках можна одержувати також відповіді на питання про те, за яких умов пружні опори доцільно вважати абсолютно жорсткими, жорсткість на згин яких ділянок неоднорідної балки можна приймати безмежно великою тощо.

Нехай, наприклад,  $\alpha_1 = \alpha_3 = -c$ ,  $\alpha_2 = -M\lambda^2$ . Тоді з рівняння (13.40) для балки сталожорсткості (невагомої завдовжки  $l$  з пружними опорами на кінцях, яка несе зосереджену масу  $M$  в точці  $x_2 = l/2$ ) одержуємо формулу:

$$\omega^2 = \frac{2c}{M} \left( 1 + \frac{1}{24} \frac{cl^3}{EI} \right)^{-1}.$$

Очевидно, що при  $\frac{1}{24} \frac{cl^3}{EI} \ll 1$  балку можна вважати абсолютно жорсткою.

Якщо жорсткість ділянки балки, наприклад, між точками її осі  $x_2$  та  $x_3$  набагато більша, ніж жорсткість між точками  $x_1$  і  $x_2$ , то в рівнянні (13.40) потрібно покласти  $\Phi_{32} \equiv 0$ ,  $\Phi_{31} \equiv \Phi_{21}$ ; якщо ж балку можна вважати абсолютно жорсткою, то вираз у фігурних дужках рівняння (13.40) тотожно рівний нулеві. В останньому випадку, до того ж, лівий кінець можна вважати закріпленим шарнірно, якщо спрямувати  $\alpha_1$  до безмежності. При цьому рівняння (13.40) стає таким:  $\alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0$ . Звідси неважко одержати також розв'язки відповідних задач про коливання жорсткого бруска з масами та пружними опорами.

Розглянемо ще стержень з двома ступенями вільності, який у точках  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) має пружні опори та зосереджені маси; лівий кінець ( $x = a$ ) — жорстко закріплений, правий — вільний. Характеристичне рівняння, одержане із (13.30) для  $G = 0$ , запишемо так:

$$1 - \sum_{i=1}^2 \alpha_i \int_a^{x_i} \frac{1}{f(t)} (x_i - t)^2 dt + \alpha_1 \alpha_2 B = 0, \quad (13.41)$$

де

$$B = (x_1 - x_2)^2 V(x_1 a) + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{f(t)} (x_2 - t)^2 dt \int_a^{x_1} \frac{(x_1 - t)^2}{f(t)} dt;$$

функція  $V(x, \alpha)$  визначена формулою (13.36). Звідси неважко знайти власні частоти.

З рівняння (13.41) у випадку  $\alpha_1 \rightarrow \infty$  одержуємо рівняння для частоти коливань безмасової консолі з жорсткою опорою в точці  $x_1$  та зосередженою масою і пружною опорою в точці  $x_2$ :

$$-(M_2 \lambda^2 + \varepsilon_{21} \lambda + c_{21}) = B^{-1} \int_a^{x_1} \frac{1}{f(t)} (x_1 - t)^2 dt.$$

Аналогічно, при  $\alpha_2 \rightarrow \infty$  із (13.41) знаходимо

$$-(M_1 \lambda^2 + \varepsilon_{11} \lambda + c_{11}) = B^{-1} \int_a^{x_2} \frac{1}{f(t)} (x_2 - t)^2 dt,$$

що узгоджується з формулою (13.37).

### 13.6 Характеристичні ряди в задачах про поперечні коливання та стійкість стержнів

Функція Коші диференційного рівняння

$$L_0[y] \equiv y^{IV} + 2f'f^{-1}y''' + (f'' + p)f^{-1}y'' = 0 \quad (13.42)$$

визначається за формулою

$$K_0(x, \alpha) = f(\alpha) J_0(x, \alpha), \quad (13.43)$$

де

$$J_0(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(t)} (x - t) U(t, \alpha) dt,$$

а  $U(x, \alpha)$  є функцією Коші диференційного рівняння другого порядку

$$u'' + pf^{-1}(x)u = 0,$$

яку згідно з викладеним в 7 можна знаходити, вдаючись до співвідношень

$$J_0(x, \alpha) = \frac{1}{p} [x - \alpha - U(x, \alpha)], \quad (13.44)$$

$$J_0(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} (-p)^{k-1} u_k(x, \alpha); \quad (13.45)$$

коефіцієнти  $u_k(x, \alpha)$ , в свою чергу, послідовно визначаються за співвідношеннями (7.23).

Функцію Коші диференційного рівняння

$$y^{IV} + 2f'f^{-1}y''' + f''f^{-1}y'' + p(Ny')'f^{-1} = 0 \quad (13.46)$$

можна подати як ряд за параметром  $p$  [44]:

$$K(x, \alpha, p) = f(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (-p)^k V_k(x, \alpha), \quad (13.47)$$

в якому

$$V_0(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(s)} (x-s)(s-\alpha) ds; \quad (13.48)$$

$$V_k(x, \alpha) = - \int_{\alpha}^x N(t) \dot{V}_0(x, t) V_{k-1}'(t, \alpha) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13.49)$$

Диференційному рівнянню

$$L_0[y] + \mu \frac{g(x)}{f(x)} y = 0, \quad (13.50)$$

в якому вираз  $L_0[y]$  має вигляд (13.42), можна поставити у відповідність функцію-ряд Коші

$$K(x, \alpha, p, \mu) = f(\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i J_i(x, \alpha, p), \quad (13.51)$$

де

$$J_i(x, \alpha, p) = \int_{\alpha}^x g(t) J_0(x, t, p) J_{i-1}(t, \alpha, p) dt, \quad (13.52)$$

і стосовно функції  $J_0(x, \alpha, p)$  справджуються формули (13.44) — (13.45).

Функцію ж Коші диференційного рівняння (13.50), в якому  $L_0[y]$  має вигляд (13.46), можна визначити за формулами (13.51) — (13.52), причому

$$J_0(x, \alpha, p) = \sum_{k=0}^{\infty} (-p)^k V_k(x, \alpha),$$

а функції  $V_0(x, \alpha)$  і  $V_k(x, \alpha)$  визначаються відповідно до (13.48) — (13.49).

Зазначимо, що ряди (13.47) і (13.51) залишаються чинними для довільних значень параметрів  $p$ ,  $\mu$  (вони є цілими функціями цих параметрів) за будь-яких значень змінних  $x$  та параметра  $\alpha$ , належних до областей визначення відповідних диференційних рівнянь.

Перше з характеристичних рівнянь (13.24), беручи до уваги співвідношення (13.51), можна записати в такому вигляді:

$$\Delta(b, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k(b, a) = 0, \quad (13.53)$$

де

$$A_k(x, \alpha) = \sum_{i=0}^k g_{i, k-i}(x, \alpha); \quad (13.54)$$

$$g_{ij}(x, \alpha) = J_i J'_j - J'_i J_j. \quad (13.55)$$

Тут функції  $J_i(x, \alpha, p)$  визначаються за формулами (13.52). Із (13.53), покладаючи  $\mu = \lambda^2 + \varepsilon\lambda$ , одержуємо характеристичний ряд вигляду (11.1); а у випадку  $\mu = \lambda^2$  — ряд вигляду (11.2), причому  $B_{2k} \equiv A_{2k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Ці характеристичні ряди відповідають задачам про коливання та стійкість стержнів із защемленими кінцями.

Очевидно, що, виходячи з (13.53), наступні два характеристичні рівняння (13.24), а також відповідні рівняння (13.29), можна зобразити так:  $\Delta'(b, a) = 0$ ,  $\dot{\Delta}(b, a) = 0$ ,  $\dot{\Delta}'(b, a) = 0$ . Звідси, як і в попередньому випадку, можна отримати характеристичні ряди (11.1) та (11.2) шляхом диференціювання співвідношень (13.54), (13.55) за змінними  $x$  і  $\alpha$ .

Останнє з характеристичних рівнянь (13.24) у випадку дії на консоль консервативної  $G$  і стежної  $H$  сил з урахуванням формул (13.51) — (13.52) можна записати у вигляді

$$R(l, 0) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(l, 0) \mu^k = 0. \quad (13.56)$$

Тут

$$A_k(x, \alpha) = \sum_{i=0}^k V_{i, k-i}(x, \alpha) - p(1 - \eta) W_{i, k-i}(x, \alpha),$$

$$V_{i,j}(x, \alpha) = (J_i'' J_j''' - J_i''' J_j'') f^2(\alpha) f(x), \quad W_{i,j}(x, \alpha) = (J_i' J_j'' - J_i'' J_j') f^2(\alpha),$$

$$p = (G + H) l^2 (E J_0)^{-1}; \quad \eta = H(G + H)^{-1}.$$

Із (13.56), покладаючи

$$\mu = \frac{m_0 l^4}{f_0} \lambda^2 + \frac{b_0 l^4}{f_0} \lambda, \quad \mu = \frac{m_0 l^4}{f_0} \lambda^2 \quad (f_0 = E J_0),$$

одержуємо відповідно характеристичні ряди (11.1) і (11.2).

При побудові характеристичних рядів для визначення ойлєрових значень сталої стискуючої сили (див. рівняння (13.42)) доцільно враховувати тотожності

$$F(x, \alpha) \equiv f^2(\alpha) \Delta(x, \alpha), \quad R(x, \alpha) \equiv \dot{U}(x, \alpha) f^2(\alpha) f^{-1}(x);$$

$$\Delta(x, \alpha) \equiv \frac{1}{p^2} [2 + \dot{U} - U' - (x - \alpha) \dot{U}'],$$

які впливають з формул (13.21) — (13.23) та (13.44) — (13.45). Тут функція  $U(x, \alpha)$  визначається за допомогою співвідношень (7.22) — (7.23). При цьому характеристичні ряди, що відповідають граничним умовам (13.16) — (13.20), мають вигляд

$$A_0(p) \equiv a_0 - p a_1 + p^2 a_2 - \dots = 0, \quad (13.57)$$

а коефіцієнти  $a_j(b, a)$  знаходяться за формулами відповідно

$$a_j(x, \alpha) = \dot{u}_{2+j} - u'_{2+j} - (x - \alpha) \dot{u}'_{2+j}; \quad a_j(x, \alpha) = u_{j+1} + (x - \alpha) \dot{u}_{j+1};$$

$$a_j(x, \alpha) = u_{j+1} - (x - \alpha) u'_{j+1}; \quad a_j(x, \alpha) = u_j; \quad a_j(x, \alpha) = -\dot{u}_j,$$

де

$$u_k(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(t)} (x - t) u_{k-1}(t, \alpha) dt, \quad u_0(x, \alpha) = x - \alpha, \quad k = 1, 2, \dots$$

Звідси, кладучи  $\alpha = 0$  та  $x = 1$ , виводимо для випадку  $N(x) \equiv 1$  рекурентні співвідношення [44]:

$$a_k = \dot{u}_{k+2} - u'_{k+2} - \dot{u}'_{k+2}, \quad a_k = u_{k+1} + \dot{u}_{k+1};$$

$$a_k = u_{k+1} - u'_{k+1}, \quad a_k = u_k, \quad a_k = -\dot{u}_k;$$

$$u_i(s_{i+1}) = \int_0^{s_{i+1}} \frac{1}{f(s_i)} (s_{i+1} - s_i) u_{i-1}(s_i) ds_i; \quad (13.58)$$

$$u'_{i+1}(s_{i+2}) = \int_0^{s_{i+2}} \frac{1}{f(s_{i+1})} u_i(s_{i+1}) ds_{i+1}, \quad (13.59)$$

$$i = 1, 2, \dots, \quad \dot{u}_0(s_1) \equiv 1, \quad u_0(s_1) \equiv s_1.$$

Формули для знаходження  $\dot{u}_i(s_{i+1})$  та  $\dot{u}'_{i+1}(s_{i+2})$  одержуються із співвідношень (13.58) і (13.59), якщо в них замість всіх  $u$  та  $u'$  підставити відповідно  $\dot{u}$  та  $\dot{u}'$ .

У випадку  $N(x) \neq 1$  коефіцієнти характеристичного ряду (13.57) визначаються з урахуванням формул (13.47) — (13.49). Наприклад, для стержня з защекненими кінцями

$$a_k = a_k(b, a), \quad a_k(x, \alpha) = \sum_{i=0}^k V_{i, k-i},$$

де

$$V_{ij}(x, \alpha) = V_i \dot{V}'_j - \dot{V}'_i V'_j.$$

Трьом наступним рівнянням (13.24) відповідають ряди (13.57), коефіцієнти яких визначаються так:  $a_k = a'_k(b, a)$ ,  $a_k = \dot{a}_k(b, a)$ ,  $a_k = \dot{a}'_k(b, a)$ . Аналогічно, з останнього рівняння (13.24) одержимо характеристичний ряд з коефіцієнтами

$$c_k = c_k(b, a), \quad c_k(x, \alpha) = \sum_{i=0}^k U_{i, k-i};$$

$$U_{i,j}(x, \alpha) = V_i'' \dot{V}'_j''' - V_i''' \dot{V}'_j''.$$

Зокрема, для  $a = 0$ ,  $b = l$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \int_0^1 q(t) \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} dt - q(1) \int_0^1 \frac{1-t}{\varphi(t)} dt, \quad a_2 = q(1) \left\{ \int_0^1 q(t) \int_t^1 \frac{ds}{\varphi(s)} \int_0^t \frac{s-1}{\varphi(s)} ds dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 q(t) \left[ - \int_0^t \frac{s ds}{\varphi(s)} \int_0^1 \frac{ds}{\varphi(s)} + \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} \int_0^1 \frac{s ds}{\varphi(s)} \right] dt \right\} - \int_0^1 q(t) \dot{V}'_1(t, 0) dt,$$

де

$$\dot{V}'_1(x, \alpha) = - \int_{\alpha}^x q(t) \int_t^1 \frac{ds}{\varphi(s)} \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} dt,$$

причому в (13.57)  $p = \frac{N_0 l^3}{f_0}$ ,  $N(x) = N_0 q\left(\frac{x}{l}\right)$ ,  $f_0 = EJ(0)$ .

Володіючи зображеннями (13.43), (13.47) і (13.50) функцій Коші, подібно до тільки що викладеного можна будувати характеристичні ряди, які відповідають функціям (13.15), а також окремим випадкам загального рівняння (13.8). Спосіб побудови характеристичних рядів, що ґрунтується на зображенні функцій впливу як рядів за параметром, застосовний також і до крайових задач з рівняннями вищих порядків.

**14.1 Вплив параметрів на вільні коливання консолей  
зі зкупченими масами**

Для задач про вільні коливання консольних стержнів з масою  $M$  на вільному кінці три перші коефіцієнти характеристичного ряду (11.2), побудовані з урахуванням формул (13.56) — (13.59), можна перетворити до такого вигляду [44, 45]:

$$\begin{aligned}
 B_0 = 1, \quad B_2 = & \int_0^1 \psi(t) \int_0^t \frac{(t-s)^2}{\varphi(s)} ds dt + \mu \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{\varphi(s)} ds, \\
 B_4 = & \left( \int_0^1 \psi(t) \int_0^t \frac{s(t-s)}{\varphi(s)} ds dt \right) \left( \int_0^1 \psi(t) \int_0^t \frac{t(s-t)}{\varphi(s)} ds dt \right) + \\
 & + \left( \int_0^1 \psi(t) \int_0^t \frac{t s(t-s)}{\varphi(s)} ds dt \right) \left( \int_0^1 \psi(t) \int_0^t \frac{(t-s)}{\varphi(s)} ds dt \right) + \\
 & + \int_0^1 \psi(t) \int_0^t \psi(u) J_0(t, u) \left( \int_0^u \frac{1}{\varphi(s)} (u-s)(s-t) ds \right) du dt + \\
 & + \mu \left\{ - \int_0^1 \psi(t) J_0(1, t) \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} (t-s)(s-1) ds dt + \right. \\
 & \left. + \int_0^1 \psi(t)(1-t) [J_0(1, 0) J_0(t, 0) - J_0(1, 0) J_0(t, 0)] dt \right\}, \quad (14.1)
 \end{aligned}$$

де

$$J_0(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{\varphi(s)} (x-s)(s-\alpha) ds; \quad \mu = \frac{M}{m_0 l}, \quad m_0 = m(0). \quad (14.2)$$



Нехай жорсткість і маса консолі визначені формулами

$$f = f_0 \Phi\left(\frac{x}{l}\right); \quad g = m_0 \Psi\left(\frac{x}{l}\right); \quad \Phi = \left(1 - \gamma \frac{x}{l}\right)^n, \quad \Psi = \left(1 - \gamma \frac{x}{l}\right)^m,$$

де  $\gamma$  — параметр "конусності",  $l$  — довжина консолі,  $m$  і  $n$  — параметри поперечного перерізу, що можуть набувати довільних дійсних значень (якщо стержень є тілом обертання, то  $n = 2m$ ).

Розглядатимемо консолі, зображені на рис. 51.

Після обчислення інтегралів у формулах (14.1) — (14.2) для консолі, яка є зрізаним круговим конусом ( $n = 4$ ,  $m = 2$ ), характеристичне рівняння можна записати так:

$$1 - \left[ \frac{1}{60}(5 - 4\gamma) + \frac{\mu}{3}(1 - \gamma)^{-1} \right] a \omega^2 + \frac{1}{360} \left[ \frac{1}{8} + \frac{\Phi_1(\gamma)}{28\gamma^8} + \mu \frac{\Phi_2(\gamma)}{\gamma^7(1 - \gamma)} \right] a^2 \omega^4 - \dots = 0$$

$$\left( a = \frac{m_0 l^4}{f_0} \right), \quad (14.3)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_1(\gamma) = & 4\gamma^7 + 14\gamma^6 + 84\gamma^5 - 875\gamma^4 + 1820\gamma^3 - \\ & - 1470\gamma^2 + 420\gamma + 420(1 - \gamma)^4 \ln(1 - \gamma), \end{aligned} \quad (14.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\gamma) = & \gamma^7 + \gamma^6 + 3\gamma^5 + 15\gamma^4 - 110\gamma^3 + 150\gamma^2 - \\ & - 60\gamma - 60(1 - \gamma)^3 \ln(1 - \gamma). \end{aligned} \quad (14.5)$$

При  $\gamma \rightarrow 0$  із (14.3), зокрема, одержуємо:

$$1 - \frac{1}{12}(1 + 4\mu)a\omega^2 + \frac{1}{7!}(1 + 8\mu)a^2\omega^4 - \dots = 0.$$

Зауважимо, що для малих значень параметра конусності  $\gamma$  корисно замість точних формул (14.4) — (14.5) застосовувати відповідні ряди

$$\gamma^{-8} \Phi_1(\gamma) = -420 \cdot 24 \left( \frac{3!}{8!} + \frac{4!}{9!} \gamma + \frac{5!}{10!} \gamma^2 + \dots \right),$$

$$\gamma^{-7} \Phi_2(\gamma) = 1 - 360 \left( \frac{3!}{7!} + \frac{4!}{8!} \gamma + \frac{5!}{9!} \gamma^2 + \dots \right).$$

Якщо  $M = 0$  ( $\mu = 0$ ), то замість (14.3) матимемо рівняння

$$1 - \frac{1}{60}(5 - 4\gamma)a\omega^2 + \frac{1}{360} \left( \frac{1}{8} + \frac{\Phi_1(\gamma)}{28\gamma^8} \right) a^2 \omega^4 - \dots = 0, \quad (14.6)$$

що узгоджується з викладеним в [22].

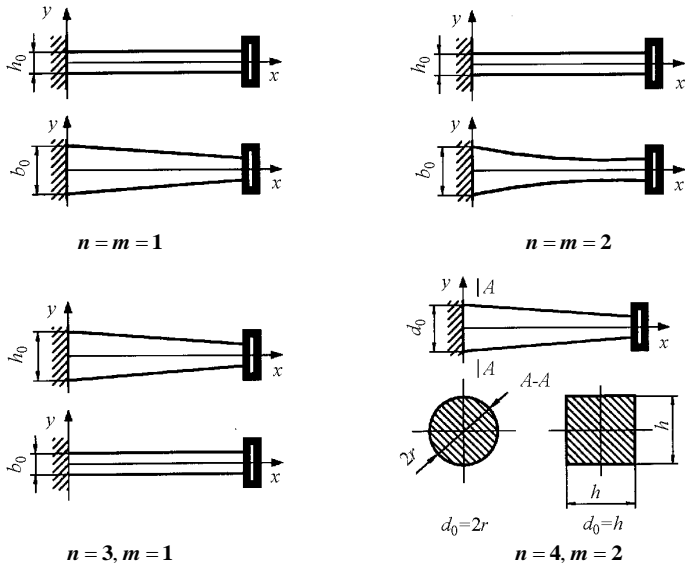


Рисунок 51 Схеми консольних балок з різними змінними поперечними перерізами.

Застосовуючи до рівняння (14.3) двобічні оцінки (12.7) основної частоти коливань — нижню  $\underline{a\omega_0^2}$  і верхню  $\overline{a\omega_0^2}$ , укладемо табл. 9. Значення, наведені в передостанньому стовпчику таблиці, визначалися за наближеною формулою [45]

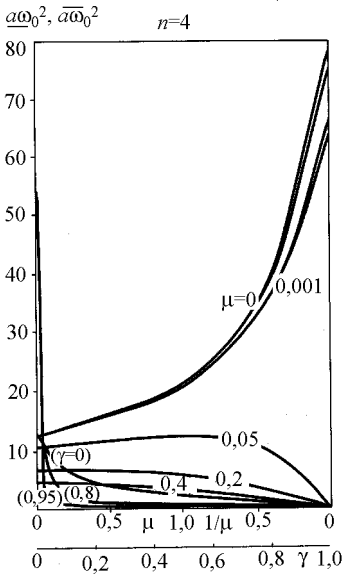
$$\mu a\omega_0^2 \approx 3(1-\gamma) \quad (\mu = M/m_0l), \quad (14.7)$$

яку можна одержати із (14.3) або (13.39), коли  $\mu \gg 1$ . В останньому стовпчику таблиці записана відносна різниця  $\varepsilon$  між значеннями (14.7) та середніми значеннями  $\frac{1}{2}(\underline{a\omega_0^2} + \overline{a\omega_0^2})$ .

Результати обчислень в графічній формі подано на рис. 52. Криві 1 відображають залежність величин  $\underline{a\omega_0^2}$  і  $\overline{a\omega_0^2}$  від відношення мас ( $\mu = M(m_0l)^{-1}$ ) для заданих значень параметра конусності  $\gamma$ , а криві 2 — залежність цих величин від  $\gamma$  для заданих вартостей параметра  $\mu$ . З наведених графіків випливає, що при малих значеннях  $\mu$  ( $0 \leq \mu < 0,05$ ) нижня та верхня оцінки зростають зі збільшенням параметра  $\gamma$ . У випадку ж  $\mu \geq 0,05$  вказані оцінки зменшуються і прямують до нуля (тим інтенсивніше, чим більшими є параметри  $\gamma$  і  $\mu$ ). Зростання параметра  $\mu$ , починаючи від значення  $\mu = 4$ , перестає впливати на основну частоту, значення якої наближається до рівня, що відповідає системі з одним ступенем вільності.

Таблиця 9 Результати обчислень нижньої та верхньої оцінок основної частоти коливань

№	$\gamma$	$\mu$	$a\omega_0^2$	$\overline{a\omega_0^2}$	$a\omega_0^2$	$\varepsilon, \%$
1	0,1	1	2,260589	2,260655	2,700	19,437
2		2	1,230687	1,230709	1,350	9,694
3		5	0,519878	0,519892	0,540	3,860
4		10	0,264876	0,264877	0,270	1,925
5		20	0,133707	0,133711	0,135	0,972
6	0,4	1	1,649875	1,649929	1,800	9,097
7		2	0,860930	0,860943	0,900	4,542
8		5	0,353601	0,353594	0,360	1,810
9		10	0,178385	0,178389	0,180	0,897
10		20	0,089595	0,089595	0,090	0,446
11	0,6	1	1,150676	1,150721	1,200	4,284
12		2	0,587449	0,587458	0,600	2,128
13		5	0,237969	0,237972	0,240	0,840
14		10	0,119490	0,119490	0,120	0,418
15		20	0,059873	0,059873	0,060	0,167
16	0,8	1	0,592943	0,592947	0,600	1,180
17		2	0,298226	0,298227	0,300	0,604
18		5	0,119716	0,119716	0,120	0,251
19		10	0,059929	0,059929	0,060	0,167
20		20	0,029982	0,029982	0,030	0,067



Аналізуючи дані з табл. 9, бачимо, що обчислені за формулою (14.7) значення квадрата основної частоти перевищують точні його значення менш, ніж на 5%, коли:  $\mu = 5, \gamma = 0,1$ ;  $\mu = 2, \gamma = 0,4$  та  $\mu = 1, \gamma \geq 0,6$ .

Загалом отримані результати дозволяють зробити такі висновки [45]:

1. Формули (14.1) визначають коефіцієнти  $B_2$  і  $B_4$  характеристичного ряду (11.2) в замкненому вигляді для змінних жорсткостей  $f(x)$ , що дозволяє обчислювати відповідні інтеграли в аналітичному вигляді.

2. Формула (13.39) дає достатньо точні значення основної частоти у випадках, коли зосереджена маса є досить великою у порівнянні з розосередженою масою стержня.

Рисунок 52 Залежності оцінок основної частоти коливань консульного колового конуса від співвідношення мас та параметра конусності (верхня і нижня оцінки часто є близькими).

3. Найпростіші оцінки (12.7) дають досить високу точність обчислень. Для стержня, що є зрізаним конусом, відносна різниця між двобічними оцінками основної частоти не перевищує 0,1% завжди, окрім випадків  $0,8 \leq \gamma < 1$  і  $\mu < 0,05$ ; але й тут вона не перевищує 4%.

4. Двобічні оцінки  $\underline{a\omega_0^2}$  і  $\overline{a\omega_0^2}$  зростають зі збільшенням параметра конусності  $\gamma$  за умови, що відношення мас  $\mu$  є достатньо малим (наприклад, коли  $\mu = 0,001$ ); оцінки зменшуються і прямують до нуля, коли  $\mu \geq 0,05$ .

5. Наближена формула (14.7) є дуже простою та дає достатню точність при визначенні основної частоти для значень  $\mu \geq 5$ . Відносна різниця між точними значеннями та наближеними оцінками (14.7) основної частоти не перевищує 5% при  $\mu = 5$  для  $\gamma = 0,1$ , при  $\mu = 2$  для  $\gamma = 0,4$ , при  $\mu = 1$  для  $\gamma \geq 0,6$ .

6. В окремих випадках найпростіші оцінки (12.7) узгоджуються з відомими значеннями, одержаними іншими методами: для циліндра ( $\gamma = 0$ ,  $\mu = 0$ ), зокрема, —  $\underline{\omega_0^2 a} = 12,358$ , а  $\overline{a\omega_0^2} = 12,364$ ; для повного конуса ( $\gamma = 1$ ,  $\mu = 0$ ) —  $\underline{a\omega_0^2} = 74,828$ ,  $\overline{a\omega_0^2} = 78,196$ .

У випадку  $n = 3$ ,  $\mu = 0$  після обчислення інтегралів (14.1) — (14.2) знаходимо:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{24\gamma^4} \left( 1 + 12\Gamma^2 - 16\Gamma^3 + 3\Gamma^4 + 12\Gamma^2 \ln \Gamma \right); \quad (14.8)$$

$$B_4 = \frac{1}{72\gamma^8} \left\{ \frac{1}{60} + \Gamma^2 \left[ \frac{7}{2} - \frac{32}{3}\Gamma + \frac{9}{4}\Gamma^2 + \frac{32}{5}\Gamma^3 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2}\Gamma^4 + \left( \frac{3}{2} - 9\Gamma^2 + \frac{1}{2}\Gamma^4 \right) \ln \Gamma \right] \right\}, \quad (14.9)$$

де  $\Gamma = 1 - \gamma$ .

Результати обчислення найпростіших двобічних оцінок (12.7) з використанням формул (14.8) — (14.9) наведено в табл. 10 (тут їх названо аналітичними). У тій самій таблиці наведено також нижню і верхню оцінки, які одержані при чисельному обчисленні інтегралів (14.1) — (14.2) (умовно їх названо чисельними) та відносну різницю між середніми значеннями основної частоти, одержаними аналітично та чисельно (параметр  $\varepsilon$ , %).

Наведені результати обчислень є можливість порівняти з відповідними даними, визначеними експериментально [45]. Експеримент провадився за допомогою пристрою, схема якого наведена на рис. 53.

Таблиця 10 Порівняння аналітичних, чисельних та експериментальних оцінок основної частоти

№	$\gamma$	Аналітичні оцінки		Чисельні оцінки		$\epsilon, \%$	Експеримент
		$\overline{a \omega_0^2}$	$\overline{a \omega_0^2}$	$\overline{a \omega_0^2}$	$\overline{a \omega_0^2}$		
1	0	12,3583	12,3640	12,3557	12,3613	0,02	—
2	0,2	13,0134	13,0223	13,0134	13,0223	0	14,02
3	0,4	13,9553	13,9705	13,9553	13,9705	0	—
4	0,6	15,4582	15,4892	15,4583	15,4892	0	14,43
5	0,8	18,3730	18,4594	18,3731	18,4596	0	—
6	1,0	28,0264	28,5156	29,9395	31,2905	7,66	32,03

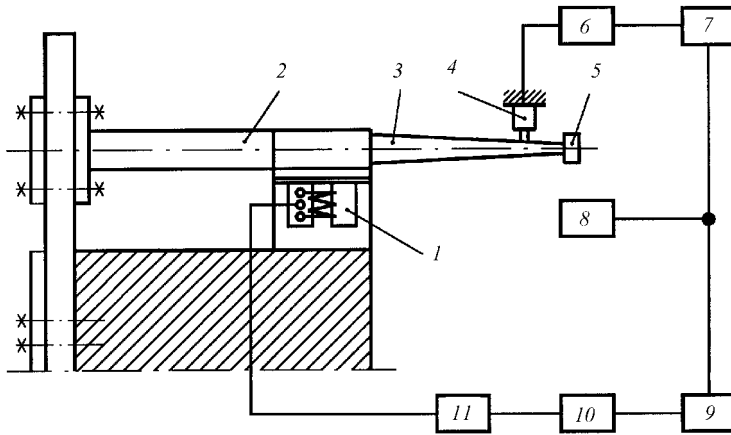


Рисунок 53 Схема пристрою для експериментального визначення власних частот вільних коливань зразків пружних консолей з зосередженими масами:  
 1 — електромагнет; 2 — основа; 3 — консоль; 4 — чутник (давач); 5 — зосереджена маса; 6 — вимірювальний пристрій; 7 — осцилоскоп; 8 — лічильник імпульсів;  
 9 — генератор; 10 — посилювач; 11 — резонансний LC-контур.

Генератор 9, посилювач 10, резонансний LC-контур 11 та електромагнет 1 складають систему збудження згинальних коливань. Чутник 4, вимірювач коливань 6, осцилоскоп 7 та лічильник імпульсів 8 формують систему вимірювання частоти коливань. Якщо частота коливань, вимушуваних системою збудрення, збігається з власною частотою коливань консолі-зразка, то на екрані осцилоскопа формується еліпс; перехід через резонанс супроводжується обертанням цього еліпса. Амплітуди коливань кінця основи 2, в якій зашкрекнено зразок 3, є в 100...1000 разів меншими від амплітуд коливань зосередженої маси 5 (підкреслимо, що тут енергія коливань підводиться не безпосередньо до зосередженої маси, а до зашкрекненого кінця консолі-зразка). Різниця між теоретичними та експериментальними значеннями ідентифікованих частот не перевищує в даному випадку 8 % (див. табл. 10).

У табл. 11 наведено оцінки (12.7) основної частоти консолей для випадків  $n = 1, 2, 3, 4$ , причому інтеграли (14.1) — (14.2) тут визначалися чисельно для заданих, фіксованих вартостей параметра  $\mu$  (стовпці 4 і 5). У стовпці 6 записано значення основної частоти, одержані за допомогою формули Данкерлі [50]

$$a\omega_0^2 = (B_2)^{-1}, \quad (14.10)$$

а в стовпці 7 — значення, обчислені за формулою (14.7) чи за формулами, наведеними в табл. 12. У стовпцях 8 і 9 табл. 11 наведено також відносні різниці між оцінками  $\mu a\omega_0^2$  і  $\frac{a\omega_0^2}{\underline{\omega_0^2}}$ , та середніми значеннями двобічних оцінок  $\overline{a\omega_0^2}$  і  $\underline{a\omega_0^2}$ , які можна вважати точними (це впливає з табл. 10) [45].

У табл. 13 вказано межі зміни параметрів  $\mu$  і  $\gamma$ , в яких можна застосовувати найпростіші оцінки для основної частоти (при цьому похибка не буде перевищувати 5 %). Верхня частина цієї таблиці (A) відповідає формулі (14.10), а нижня (B) — формулам з табл. 12.

Таблиця 11 Порівняння оцінок основної частоти коливань різних консолей

$n$	$\gamma$	$\mu$	$\frac{a\omega_0^2}{\underline{\omega_0^2}}$	$\overline{a\omega_0^2}$	$\frac{a\omega_0^2}{\underline{\omega_0^2}}$	$\mu a\omega_0^2$	$\varepsilon_1, \%$	$\varepsilon_2, \%$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,2	1,0	2,380952	2,380963	2,356	2,845	1,05	19,49
	0,2	2,5	1,055409	1,055412	1,051	1,138	0,38	7,87
	0,2	5,0	0,547645	0,547645	0,546	0,569	0,36	3,83
	0,8	1,0	2,127660	2,127670	2,108	2,282	0,94	7,24
	0,8	2,5	0,887075	0,887080	0,884	0,913	0,33	2,93
	0,8	5,0	0,449903	0,449903	0,449	0,456	0,22	1,33
2	0,2	1,0	2,318034	2,318102	2,297	2,693	0,91	16,18
	0,2	2,5	1,012146	1,012153	1,008	1,077	0,39	6,42
	0,2	5,0	0,522030	0,522030	0,521	0,539	0,20	3,26
	0,8	1,0	1,584158	1,584221	1,574	1,619	0,63	2,21
	0,8	2,5	0,641168	0,641693	0,640	0,648	0,25	0,93
	0,8	5,0	0,322290	0,322290	0,322	0,324	0,10	0,62
3	0,2	1,0	2,135611	2,135703	2,116	2,545	0,94	19,15
	0,2	2,5	0,945895	0,945940	0,942	1,018	0,42	7,61
	0,2	5,0	0,491135	0,491135	0,489	0,509	0,41	3,67
	0,8	1,0	0,988777	0,988782	0,985	1,046	0,40	5,76
	0,8	2,5	0,408981	0,408988	0,408	0,418	0,10	2,20
	0,8	5,0	0,206834	0,206834	0,206	0,209	0,10	0,97
4	0,2	1,0	2,076488	2,076543	2,055	2,400	1,04	15,58
	0,2	2,5	0,903857	0,903862	0,900	0,960	0,42	6,21
	0,2	5,0	0,465556	0,465558	0,464	0,480	0,33	3,10
	0,8	1,0	0,592943	0,592948	0,589	0,600	0,59	1,19
	0,8	2,5	0,238865	0,238868	0,238	0,240	0,10	0,47
	0,8	5,0	0,119716	0,119716	0,119	0,120	0,10	0,24

Таблиця 12 Формули для обчислення значень основної частоти

$n$	$\mu a \omega_0^2$
0	3
1	$2\gamma^3(3\gamma^2 - 2\gamma - 2(1-\gamma)^2 \ln(1-\gamma))^{-1}$
2	$\gamma^3(2\gamma - \gamma^2 + 2(1-\gamma)\ln(1-\gamma))^{-1}$
3	$-2\gamma^3(\gamma^2 + 2\gamma + 2\ln(1-\gamma))^{-1}$
4	$3(1-\gamma)$

Таблиця 13 Межі застосовуваності найпростіших оцінок частоти

$\mu$		Межі для параметра конусності $\gamma$ за різних $n$			
		1	2	3	4
A	0	0 — 0,7	0 — 0,6	0 — 0,5	0 — 0,4
	0,4	0 — 0,8	0 — 0,8	0 — 0,9	0 — 0,8
	1,0	0 — 1,0	0 — 1,0	0 — 0,99	0 — 0,99
B	1,0	—	0,9 — 1,0	—	0,5 — 0,99
	1,667	—	0,6 — 1,0	—	0,4 — 0,99
	2,5	0,7 — 1,0	0,4 — 1,0	0,8 — 0,99	0,1 — 0,99
	5,0	0 — 1,0	0 — 1,0	0 — 0,99	0 — 0,99

Графіки залежності двобічних оцінок  $\underline{\mu a \omega_0^2}$  і  $\overline{\mu a \omega_0^2}$  від параметрів конусності зображено на рис. 54 — 56 відповідно для  $n=1$  (клин із лінійно-змінною шириною),  $n=2$  (клин з параболічно-змінною шириною),  $n=3$  (клин з лінійно-змінною висотою). Як бачимо, вплив параметрів  $\gamma$  і  $\mu$  на основну частоту вільних коливань не відрізняється якісно від розглянутого раніше для випадку  $n=4$  (коловий конус, див. рис. 52). Однак, кількісні відмінності можуть бути значними, особливо для достатньо малих  $\mu$  і  $\gamma \geq 0,4$ . На рис. 57 відображено залежності від параметра "конусності"  $\gamma$  найпростіших оцінок  $\underline{\mu a \omega_0^2}$  та  $\overline{\mu a \omega_0^2}$ . Як і повинно бути, коли  $\gamma \rightarrow 1$ , то відповідні значення оцінок прямують до нуля у випадках  $n=3$  і  $n=4$  та до значень 2 і 1 у випадках  $n=1$  та  $n=2$ . Зазначимо, що при  $\mu \geq 20$  суцільні лінії на рис. 57, а та б збігаються.

Із наведених таблиць і графіків для задач про вільні коливання консолей змінного поперечного перерізу впливають такі додаткові висновки [45]:

1. Застосування методу функцій впливу та двобічних оцінок дозволяє визначати основну частоту практично точно для довільних значень параметрів. Наявність загальних формул вигляду (14.1) дає змогу застосовувати до знаходження декількох перших коефіцієнтів відповідних характеристичних рядів чисельні методи (обчислення означених інтегралів). Завдяки цьому знімаються обмеження на закони зміни допустимих функцій  $f(x)$  і  $g(x)$ , що характеризують жорсткість і масу стержня.

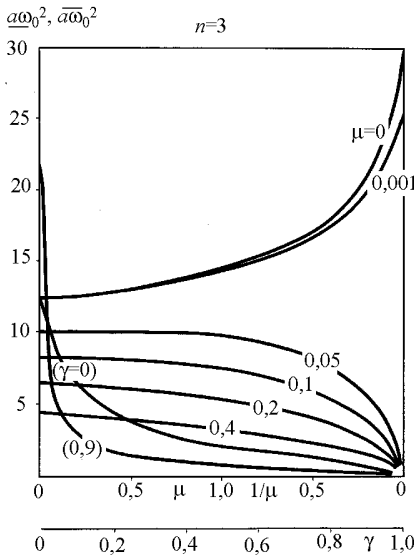
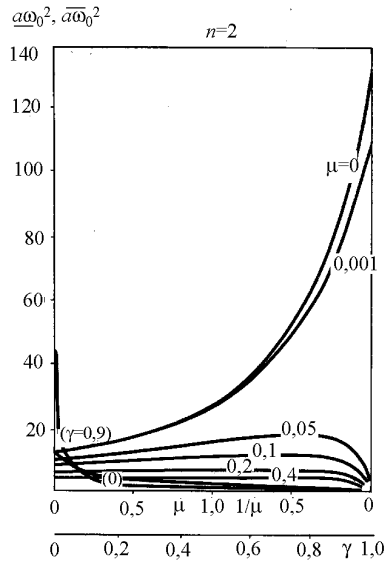
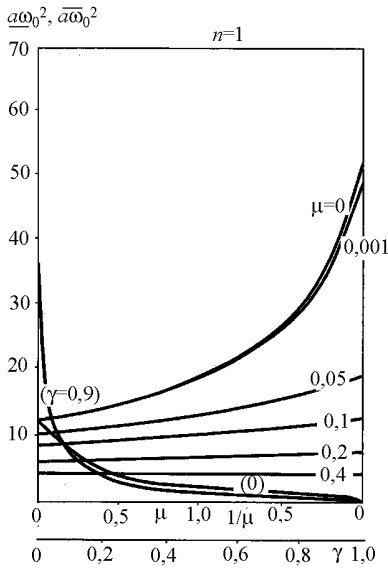


Рисунок 54 Залежності оцінок основної частоти коливань консольного клина з лінійно-змінною шириною від відношення мас та параметра конусності.

Рисунок 55 Залежності оцінок основної частоти коливань консольного клина з параболічно-змінною шириною від відношення мас та параметра конусності.

Рисунок 56 Залежності оцінок основної частоти коливань консольного клина з лінійно-змінною висотою від відношення мас та параметра конусності.

2. Якщо зосереджена маса відсутня ( $\mu = 0$ ) або дуже мала ( $\mu \leq 0,01$ ), то збільшення параметра "конусності"  $\gamma$  веде до значного збільшення основної частоти. Параметри поперечного перерізу ( $n$  і  $m$ ) впливають найбільш суттєво на основну частоту саме для вказаних вартостей параметра  $\mu$ .



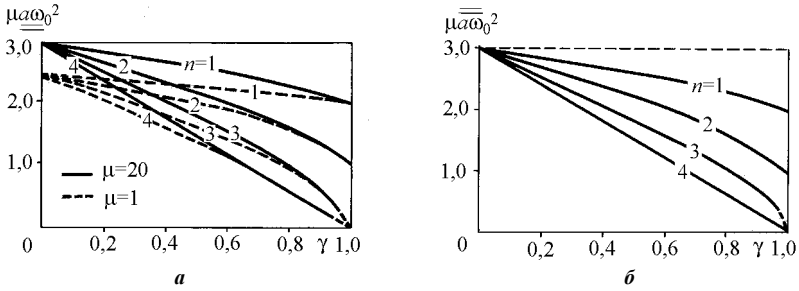


Рисунок 57 Залежності найпростіших нижніх (а) та верхніх (б) оцінок основної частоти від параметра "конусності".

3. Якщо виконуються умови із табл. 13, то основну частоту можна визначати з точністю до 5 % за найпростішими оцінками.

4. Результати обчислень узгоджуються для  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 0$  з відомими, одержаними іншими методами [97, 98].

## 14.2 Основна частота коливань тонкостінного стержня

Розглянемо задачу про вплив параметрів "тонкостінності" та умов закріплення прямолинійного пружного стержня відкритого профілю, поперечний переріз якого має вісь симетрії, на основну частоту його вільних коливань. Використовуючи відомі рівняння малих коливань [99] і записуючи переміщення стержня при крученні та згині у вигляді

$$u_k(x, t) = f_k(x) e^{i\omega t} \quad (k = 1, 2),$$

приходимо до крайової задачі

$$I y^{IV} - D_2 y'' - D_4 y = 0, \quad (14.11)$$

$$y = y' - \psi_1 y'' = 0 \text{ для } \xi = 0, \quad y = y' + \psi_2 y'' = 0 \text{ для } \xi = 1, \quad (14.12)$$

де

$$y = \begin{bmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -\Lambda^2 & 0 \\ 0 & n - \Lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} m_1 & a_y m_1 \\ a_y m_2 & i^2 m_2 \end{bmatrix}, \quad \psi_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda^2 = \frac{\rho l^2}{E} \omega^2, \quad n = \frac{GJ_3}{EJ_2} l^2, \quad m_i = \frac{Fl^2}{J_i}, \quad r^2 = a_y^2 + \frac{J_1}{F} \quad (i=1, 2).$$

Тут  $a_y$  — віддаль між центром згину та віссю стержня;  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  — параметри пружного защекнення;  $\rho$  — густина матеріалу ( $\rho g = \gamma$  — питома сила ваги,  $g$  — прискорення вільного падіння);  $GJ_3$  — жорсткість перерізу при крученні;  $J_1$ ,  $J_2$  відповідно головний і секторіальний моменти інерції;  $F$  — площа поперечного перерізу, розташованого на деякій віддалі  $\xi = \frac{x}{l}$  від лівої опори;  $l$  — довжина стержня.

Рівнянню (14.11) і граничним умовам (14.12) можна поставити у відповідність характеристичне рівняння [36]

$$A_0 - A_1 \Lambda^2 + A_2 \Lambda^4 - \dots = 0,$$

де

$$A_0 = \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{3}(a_{11} + b_{11}) + a_{11}b_{11} \right) a \Big|_{\xi=1},$$

$$A_1 = \left[ \left( \frac{1}{2} + b_{11} \right) \beta_a + \left( \frac{1}{2} + a_{11} \right) \beta_b - (1 + a_{11} + b_{11}) \psi - \frac{1}{6} \beta_0 \right] a + \left( \frac{1}{12} + \frac{a_{11} - b_{11}}{3} + a_{11}b_{11} \right) (a_b \gamma_a - a_0 \gamma + a_a \gamma_b - \gamma_0 \Phi^{VIII}) \Big|_{\xi=1}$$

(коефіцієнт  $A_2$  має подібну структуру);

$$a = a_a a_b - a_0 \Phi^{VIII}; \quad \gamma_b = \chi' + b_{22} \chi''; \quad a_a = \Phi^{IX} + a_{22} \Phi^X;$$

$$\gamma_0 = \chi'' + (a_{22} + b_{22}) \chi''' + na_{22} b_{22} \chi^{IV}; \quad a_b = \Phi^{IX} + b_{22} \Phi^X;$$

$$\beta_a = \psi + a_{22} \psi''; \quad a_0 = \Phi^X + (a_{22} + b_{22}) \Phi^{XI} + na_{22} b_{22} \Phi^X;$$

$$\beta_b = \psi' + b_{22} \psi''; \quad \gamma = \gamma_a \gamma_b - \gamma_0 \chi;$$

$$\beta_0 = \psi'' + (a_{11} + b_{11}) \psi''' + na_{11} b_{11} \psi^{IV}; \quad \gamma_a = \chi' + a_{22} \chi'';$$

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+11)!} n^k \xi^{2k+11}; \quad \Psi(\xi) = \frac{\xi^5}{5!} - m_1 \frac{\xi^7}{7!};$$

$$\chi(\xi) = \frac{\xi^5}{5!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k N_k \xi^{2k+7}}{(2k+7)!}; \quad N_k = (k+2)n + (k+1)r^2 m_2.$$

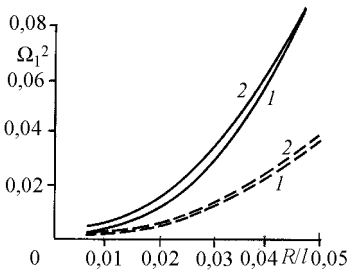


Рисунок 58 Графіки залежностей основної частоти коливання тонкостінного стержня від його параметрів для двох випадків закріплення кінців: шарнірного (пунктирні лінії) та жорсткого (суцільні лінії).

Вдаючись до двобічних оцінок (12.7), можна визначати основні частоти коливання системи за багатьох нетривіальних умов, а також досліджувати вплив на неї найрізноманітніших параметрів та чинників геометричного, механічного, фізичного тощо змісту.

Формули, за допомогою яких можна визначати коефіцієнти характеристичного ряду задачі суттєво спрощуються, коли параметр  $n$  є нулем. Проте, цей параметр може набувати й немалих значень (при відповідних геометричних параметрах стержня). Тому є сенс дослідити тут вплив хоча б, наприклад, параметрів "тонкостінності" на основну частоту коливань стержня якоїсь однієї належно показової конструкції при різних типах закріплення його кінців.

Для прикладу розглянемо трубчастий циліндричний стержень колового поперечного перерізу, розрізаний уздовж твірної. При цьому розрізнятимемо шарнірне (за якого  $a_{ij} = b_{ij} = \infty$ , коли  $i = j$  і  $a_{ij} = b_{ij} = 0$ , коли  $i \neq j$ ) та жорстке (за якого  $a_{ij} = b_{ij} = 0$ ) закріплення. Для такого стержня параметр  $n$  визначається за формулою

$$n = \frac{8}{\pi(\pi^2 - 6)(1 + \nu)} \frac{(\delta/d)^2}{(d/l)^2},$$

де  $\delta$ ,  $d$  — товщина і діаметр стержня. Визначальними вважатимемо геометричні параметри  $\delta/d$  та  $d/l$ .

Результати обчислення оцінок (12.7) для основної частоти коливань відображено на рис. 58. Пунктирні лінії відповідають шарнірному закріпленню кінців, суцільні — жорсткому. Криві 1, що розташовані в кожній парі здолу, відповідають значенню  $n = 0$ , а криві 2, що розташовані згори — граничному значенню параметра  $\delta/d = 0,1$ . В усіх випадках будувалися тільки нижні оцінки, оскільки верхні практично збігаються з нижніми.

Отже, вплив жорсткості зашечкнення на основну частоту є найбільшим, коли  $d/l = 0,1$ ; інший параметр тонкостінності  $\delta/d$ , незалежно від жорсткості зашечкнення кінців, впливає на основну частоту коливань відносно мало [36].

### 14.3 Коливання пружно закріпленої консолі з урахуванням її власної ваги

Розглянемо задачу про малі поперечні коливання консолі сталого поперечного перерізу за дії лінійно змінної сили. Нижній кінець консолі ( $x = 1$ ) вважаємо закріпленим пружно, верхній ( $x = 0$ ) — вільним. Відповідне диференціальне рівняння та граничні умови можна записати так:

$$y^{IV} + vxy'' + vy' + a\lambda^2 y = 0, \quad (14.13)$$

$$y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y(1) = 0; \quad y'' + \psi y'(1) = 0. \quad (14.14)$$

Тут

$$v = ql^3 f^{-1}; \quad a = ml^4 f^{-1}, \quad \psi = cl^3 f^{-1} \quad (f = EJ);$$

$q$  — питома вага стержня.

Застосовуючи методику, викладену в розділі 13, одержуємо характеристичне рівняння задачі:

$$(\psi F_{02} + F'_{02})|_{\alpha=0} = 0, \quad (14.15)$$

де функція  $F_{02}$  визначена відповідно до (13.11).

Будуючи за допомогою викладеного в розділі 3 способу функцію Коші  $K(x, 0)$ , на підставі (13.11) знаходимо:

$$F_{02} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r \frac{C_r^k}{r!} (b_{k,2} b_{r+1-k,3} - b_{k,3} b_{r+1-k,2}) x^r,$$

де

$$b_{r,2} = -(r-3)v b_{r-3,2} - a\lambda^2 b_{r-4,2},$$

$$b_{r,3} = -(r-3)v b_{r-3,3} - a\lambda^2 b_{r-4,3},$$

причому

$$b_{1,2} = 1, \quad b_{0,2} = b_{2,2} = b_{3,2} = 0,$$

$$b_{0,3} = -1, \quad b_{1,3} = b_{2,3} = b_{3,3} = 0.$$

На підставі наведених співвідношень перші коефіцієнти характеристичного ряду (11.2) задачі (14.13) — (14.14) для випадку жорсткого зашкелення ( $\psi \rightarrow \infty$ ) можна подати у вигляді:

$$B_0 = 1 - \frac{1}{3!} vx^3 + \frac{4}{6!} v^2 x^6 - \frac{28}{9!} v^3 x^9 + \frac{280}{12!} v^4 x^{12} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3640}{15!}v^5x^{15} + \frac{58240}{18!}v^6x^{18} - \dots, \\
 B_2 = & \frac{2}{4!}x^4 - \frac{18}{7!}vx^7 + \frac{200}{10!}v^2x^{10} - \frac{2760}{13!}v^3x^{13} + \\
 & + \frac{45920}{16!}v^4x^{16} - \frac{897124}{19!}v^5x^{19} + \dots, \\
 B_4 = & \frac{8}{8!}x^8 - \frac{192}{11!}vx^{11} + \frac{4184}{14!}v^2x^{14} - \\
 & - \frac{96360}{17!}v^3x^{17} + \frac{2422115}{20!}v^4x^{20} - \dots \quad (x=1). \tag{14.16}
 \end{aligned}$$

Звідси після диференціювання за змінною  $x$  одержуємо формули для коефіцієнтів характеристичного ряду, відповідного рівнянню (14.15) [45].

Застосовуючи двобічні оцінки (12.7), можна укласти табл. 14 та побудувати рис. 59 ( $\Omega_1 = \sqrt{c_1}$  — основна частота вільних коливань консолі).

Таблиця 14 Оцінки основної частоти вільних коливань консольного стержня

$\psi$	$\nu$	$(\underline{c_1})^{1/2}$	$(\overline{c_1})^{1/2}$	Відносна похибка, %
0	-0,1	0,62167	0,62167	0
0	-14,0	2,14352	2,14470	0,055
1	1	0,98916	0,98917	0,001
1	-6	1,85208	1,85252	0,024
4	0	1,57285	1,57295	0,006
4	-4	1,88193	1,88235	0,022
10	4	1,29956	1,29958	0,002
10	-16	2,11201	2,11284	0,039
$\infty$	0	1,87495	1,87519	0,013
$\infty$	-14	2,42121	2,42259	0,057

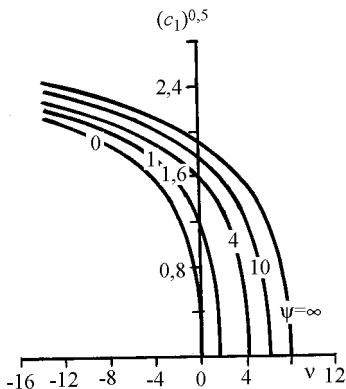


Рисунок 59 Графіки залежності основної частоти вільних коливань консольного стержня від лінійно змінної вісної сили ( $\nu > 0$  — стиск,  $\nu < 0$  — розтяг) для різних значень параметра податності зашкєнення  $\psi$ .

З наведеної інформації випливає, що дана методика дозволила одержати практично точні значення основної частоти для будь-яких заданих параметрів навантаження  $\nu$  та пружного закріплення  $\psi$ . Зауважимо, що критичне значення власної ваги жорстко закріпленої консолі (абсциса точки перетину крайньої кривої  $\psi = \infty$  на рис. 59 з горизонтальною координатною віссю) узгоджується з відомим значенням  $\nu = 7,83$  [63].

З рівняння  $F_{02}|_{x=1} = 0$  (14.16), застосовуючи оцінки (12.3), знаходимо:

$$7,837 < \nu < 7,838$$

Ті ж самі значення, як і повинно бути, можна отримати, розглядаючи задачу стійкості консолі з жорстким закріпленням за дії власної ваги (див. 7.6).

#### 14.4 Вільні коливання неоднорідних за матеріалом конічних консолей

Розглянемо задачу про малі згинальні коливання неоднорідного пружного консольного стержня, що несе на своєму вільному кінці скупчену масу  $M$ , рис. 60. Неоднорідність стержня зумовлена тим, що його складають сувісні оболонка та серцевина (пасердя) з різних матеріалів. Подовжній переріз формують рівнобедрені трапеції, а довільний поперечний — концентричні кола (стержень, що є урізаним конусом), або квадрати (стержень, що є пірамідою), або прямокутники (стержень-клин). Консоль характеризує такі параметри:  $R_{01}, R_{02}, h_{01}, h_{02}, b_0$  — розміри поперечного перерізу консолі в місці її закріплення;  $H_1, H_2$  — висоти "твірних" конусів, вимірювані від основи консолі;  $l$  — довжина консолі;  $R_1, R_2$  — радіуси інерції перерізу консолі при її основі;  $\rho_1 (\rho_2), E_1 (E_2)$  — густина і модуль Юнга оболонки (серцевини);  $I_0, m_0$  — момент інерції перерізу та подовжинна маса консолі в місці її закріплення. Окремі випадки можливого поєднання геометричних параметрів консолі відображено на рис 61. Спряження серцевини і оболонки вважається ідеальним, таким, що не допускає взаємного зміщення точок дотикання.

Жорсткість стержня (конуса чи піраміди) на згин і його подовжинна маса визначаються формулами [22, 45]

$$f(x) = (1 - a_1 x)^4 - \beta^4 (1 - e)(1 - a_2 x)^4, \quad (14.17)$$

$$g(x) = (1 - a_1 x)^2 - \beta^2 (1 - \gamma)(1 - a_2 x)^2, \quad (14.18)$$

де

$$a_1 = \frac{l}{H_1}, \quad a_2 = \frac{l}{H_2}, \quad \beta = \frac{R_2}{R_1}, \quad \gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad e = \frac{E_2}{E_1}.$$

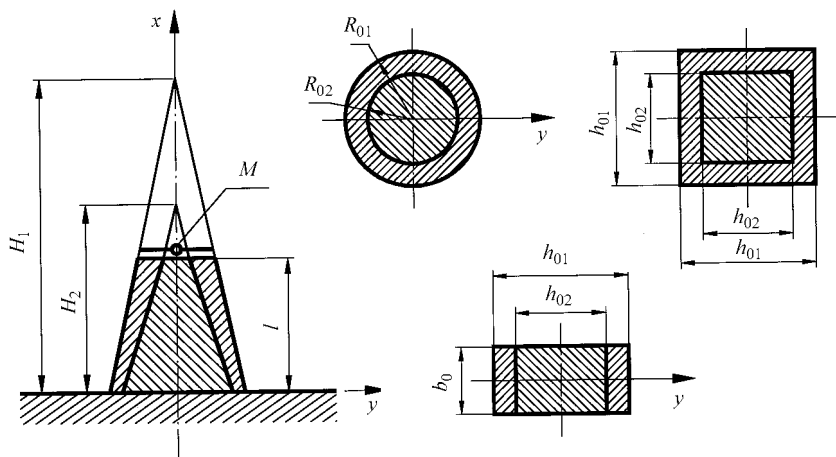


Рисунок 60 Модель неоднорідного консольного стержня.

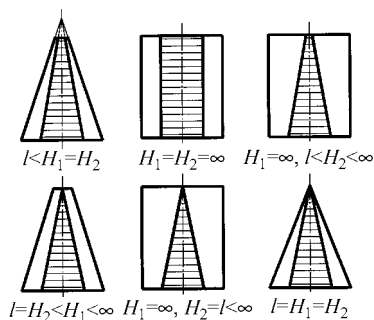


Рисунок 61 Різні варіанти поєднання оболонки і сердечини в неоднорідному консольному стержні.

У випадку однорідного конуса чи піраміди, коли  $R_2 = 0$ , рівняння (14.17) і (14.18) набувають вигляду

$$f(x) = (1 - a_1 x)^4,$$

$$g(x) = (1 - a_1 x)^2,$$

а у випадку лінійного клина — вигляду

$$f(x) = (1 - a_1 x)^3 - \beta^3 (1 - e)(1 - a_2 x)^3,$$

$$g(x) = (1 - a_1 x) - \beta(1 - \gamma)(1 - a_2 x),$$

де  $\beta = h_{02}/h_{01}$ .

За параметри основної та другої частот братимемо відповідно величини  $a\omega_1^2$  та  $a\omega_2^2$ , в яких

$$a = \frac{m_0 l^4}{E_1 I_0}.$$

Вільні коливання консолі, модель якої відображена на рис. 60, можна описати рівнянням

$$L[y] - \alpha_1 f^{-1}(x_1) \delta(x - x_1) y(x_1) = 0, \quad (14.19)$$

в якому  $L[y]$  — лінійний диференціальний оператор:

$$L[y] = y^{IV} + \frac{2f'(x)}{f(x)} y''' + \frac{f''(x)}{f(x)} y'' - \omega^2 v(x) y; \quad (14.20)$$

$$\alpha_1 = \omega^2 M, \quad v(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \quad \mu = \frac{M}{m_0 l};$$

$\omega$  — частотний параметр. Граничні умови окреслюються рівностями

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0. \quad (14.21)$$

Загальний розв'язок рівняння (14.19) подамо у вигляді:

$$y(x, \alpha) = C_0 Q(x, \alpha) + C_1 \dot{Q}(x, \alpha) + C_2 \ddot{Q}(x, \alpha) + C_3 \ddot{\ddot{Q}}(x, \alpha), \quad (14.22)$$

де

$$Q(x, \alpha) = K(x, \alpha) + \alpha_1 f^{-1}(x_1) K(x_1, \alpha) \Phi(x, x_1);$$

$C_0, C_1, C_2, C_3$  — довільні сталі;  $K(x, \alpha)$  — функція Коші, відповідна рівнянню  $L[y] = 0$ ;  $\Phi(x, \alpha) = K(x, \alpha) \theta(x - \alpha)$  — функція впливу.

На підставі (14.21) — (14.22) матимемо таке характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned} \Delta \equiv & [K''(x, \alpha) \dot{K}'''(x, \alpha) - K'''(x, \alpha) \dot{K}''(x, \alpha)] + \\ & + \alpha_1 f^{-1}(x_1) [\dot{K}'''(x, \alpha) K''(x, x_1) K(x_1, \alpha) + \\ & + K''(x, \alpha) K'''(x, x_1) \dot{K}(x_1, \alpha) - K'''(x, \alpha) K''(x, x_1) \dot{K}(x_1, \alpha) - \\ & - \dot{K}''(x, \alpha) K'''(x, x_1) K(x_1, \alpha)] \Big|_{x=1, \alpha=0} = 0. \end{aligned} \quad (14.23)$$



Якщо  $x_1 = l$ , то рівняння (14.23) набуває вигляду:

$$\Delta \equiv [K''(x, \alpha) \dot{K}'''(x, \alpha) - K'''(x, \alpha) \dot{K}''(x, \alpha)] + \\ + \alpha_1 f^{-1}(l) [\dot{K}''(x, \alpha) K(x, \alpha) - K''(x, \alpha) \dot{K}(x, \alpha)] \Big|_{x=x_1=l, \alpha=0} = 0. \quad (14.24)$$

Якщо до того ж  $\mu \rightarrow \infty$ , то (14.24) перетворюється у рівність

$$\dot{K}''(x, \alpha) K(x, \alpha) - K''(x, \alpha) \dot{K}(x, \alpha) \Big|_{x=x_1=l, \alpha=0} = 0. \quad (14.25)$$

Відповідні задачі (14.19) — (14.22) характеристичні рівняння (14.23), (14.24) і (14.25) можна подати у формі ряду за частотним параметром  $\omega$ :

$$\Delta \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-\omega)^{2k} A_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (14.26)$$

Цього можна досягнути, розгортаючи в ряд за частотним параметром  $\omega$  відповідну функцію Коші:

$$K(x, \alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\omega)^{2i} K_i(x, \alpha). \quad (14.27)$$

На підставі (14.27) коефіцієнти характеристичного рівняння (14.26) можна записати так [44, 45]:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{(t-s)^2}{f(s)} ds dt + M \int_0^l \frac{(l-s)^2}{f(s)} ds, \\ A_2 = \int_0^l g(t) \left\{ \int_0^t g(u) J_0(t, u) \left[ \int_0^u \frac{(u-s)(s-t)}{f(s)} ds \right] du \right\} dt + \\ + \left\{ \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{s(t-s)}{f(s)} ds dt \right\} \left\{ \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{t(s-t)}{f(s)} ds dt \right\} + \\ + \left\{ \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{ts(t-s)}{f(s)} ds dt \right\} \left\{ \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{(t-s)}{f(s)} ds dt \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + M \left\{ - \int_0^l g(t) J_0(l, t) \left[ \int_0^t \frac{(t-s)(s-l)}{f(s)} ds \right] dt + \right. \\
 & \left. + \int_0^l g(t)(l-t) [J_0(l, 0) J_0(t, 0) - \dot{J}_0(l, 0) J_0(t, 0)] dt \right\},
 \end{aligned}$$

де

$$J_0(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{(x-s)(s-\alpha)}{f(s)} ds.$$

Значення коефіцієнтів  $A_1, A_2$  в кожному конкретному випадку можна знайти як аналітично, так чисельними методами. Вдамося, зокрема, до методу часткової дискретизації (див. розділ 6).

Диференціальні рівняння малих коливань безмасової консолі з вмонтованими в неї  $n$  зосередженими масами  $M_k$  (або ж реальної консолі з вмонтованими в неї масами  $M_k$ , для якої

$$\int_0^l g(x) dx \ll \sum_{i=1}^n M_i,$$

можна записати в так званій оберненій формі:

$$\left. \begin{aligned}
 & \alpha_{11} M_1 y_1'' + \alpha_{12} M_2 y_2'' + \dots + \alpha_{1n} M_n y_n'' + y_1 = 0, \\
 & \alpha_{21} M_1 y_1'' + \alpha_{22} M_2 y_2'' + \dots + \alpha_{2n} M_n y_n'' + y_2 = 0, \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \alpha_{n1} M_1 y_1'' + \alpha_{n2} M_2 y_2'' + \dots + \alpha_{nn} M_n y_n'' + y_n = 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (14.28)$$

де  $M_k$  — скупчена в деякій точці  $x = x_k$  маса,  $y_k = y(x_k, t)$ ,  $t$  — час,  $y'' = d^2 y / dt^2$ ,  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  — коефіцієнти впливу; більш компактним (з урахуванням також маси, зосередженої на кінці консолі) є такий запис цих рівнянь:

$$\sum_{j=1}^n M_j \alpha_{ij} \frac{d^2 y_j}{dt^2} + y_i = 0, \quad i = \overline{0, n}. \quad (14.29)$$

Системі диференційних рівнянь (14.29) (чи (14.28)) відповідає характеристичне рівняння (див. (6.25))

$$\begin{vmatrix} 1 - M_1 \alpha_{11} \omega^2 & M_2 \alpha_{12} \omega^2 & \dots & M_n \alpha_{1n} \omega^2 \\ M_1 \alpha_{21} \omega^2 & 1 - M_2 \alpha_{22} \omega^2 & \dots & M_n \alpha_{2n} \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1 \alpha_{n1} \omega^2 & M_2 \alpha_{n2} \omega^2 & \dots & 1 - M_n \alpha_{nn} \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (14.30)$$

яке можна подати у вигляді (розгортаючи визначник в ряд):

$$\Delta \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k \omega^{2k} A_k \Big|_{\substack{x=1, \\ \alpha=0}} = 0. \quad (14.31)$$

Порівнюючи (14.30) і (14.31), знайдемо:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \sum_{i=1}^n M_i \alpha_{ii}, \quad A_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n M_i M_j \begin{vmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=3}^n M_i M_j M_k \begin{vmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} & \alpha_{ik} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} & \alpha_{jk} \\ \alpha_{ki} & \alpha_{kj} & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$A_n = M_1 M_2 M_3 \dots M_n \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}. \quad (14.32)$$

Скупчені маси визначаються за формулами

$$M_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) dx \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (14.33)$$

Коефіцієнти впливу визначаються за формулою (див. (6.18))

$$\alpha_{ij} = -x_j \dot{\Phi}(x_i, 0) - \Phi(x_i, 0), \quad (14.34)$$

в якому  $\Phi(x, \alpha)$  є функцією впливу диференційного рівняння  $L[y] = 0$  (тут враховано, що  $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ ).

У випадку відсутності вісного навантаження ( $p(x)=0$ ) вираз (14.34) можна записати у вигляді інтеграла [2, 45]

$$\alpha_{ji} = \int_0^{x_i} \frac{(x_i - s)(x_j - s)}{f(s)} ds, \quad (14.35)$$

або суми (див. (6.23))

$$\alpha_{ij} = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \left\{ \frac{1}{8f_i} \left(j - i + \frac{1}{3}\right) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{f_k} \left[ ij - k(i+j) + k^2 + \frac{1}{12} \right] \right\},$$

$$i \leq j, \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad (14.36)$$

де  $f_i$  і  $M_i$  — жорсткість на згин і маса ділянки стержня між точками  $x = x_{i-1}$  і  $x = x_i$  (остання формула отримана для дискретизованого стержня, тобто стержня, що складається з наперед заданої множини ділянок, кожній з яких відповідають сталі параметри).

В табл. 15 наведено результати обчислень коефіцієнтів характеристичних рядів та оцінок параметрів частот вільних коливань, що відповідають кінчним консолям з різними поєднаннями матеріалів оболонки і серцевини та геометричних параметрів. Обчислення провадилися двома методами — з застосуванням двобічних оцінок та з використанням засобів часткової дискретизації. При використанні першого методу (з залученням чисельного інтегрування) до уваги брались лише перші три коефіцієнти характеристичного ряду ( $A_0 = 1$  і  $A_1, A_2$ ) та визначався параметр тільки основної частоти  $a\omega_1^2$ . Натомість, при використанні другого методу брались до уваги перші п'ять коефіцієнтів  $A_0 = 1, A_1, \dots, A_4$  характеристичного ряду та визначались параметри як основної  $a\omega_1^2$ , так і другої  $a\omega_2^2$  частот (консоль при цьому ділилась на 100 часток, а розрахунки велись за формулами (14.32) — (14.33), (14.35), (14.36)). В таблиці наводиться також оцінка  $\Delta(a\omega_1^2)$  різниці між значеннями параметра основної частоти, обчисленими двома зазначеними методами, яка засвідчує відносно малу розбіжність між відповідними результатами.

У наочній формі таблицю доповнюють рис. 62 — 65. Графіки з рис. 62 — 64, що відображають залежності параметра основної частоти від одних параметрів власне консолі при фіксованих інших, впливають як з методу двобічних оцінок, так і з методу часткової дискретизації (впливу відмінностей методів на отримувану за допомогою них графічну інформацію тут практично не відчувається). Графіки з рис. 65, що відображають залежності параметра другої частоти від геометричного параметра  $\beta$  при фіксованих всіх інших, побудовано методом часткової дискретизації [45].

Таблиця 15 Результати обчислення параметрів основної (першої) та другої частот власних поперечних коливань неоднорідної кінцічної консолі

№ з/л	Матеріал	Геометричні параметри *		Метод найпростіших двобічних оцінок				Метод часткової дискредитації						Різниця $\Delta(\alpha\omega_1^2)$ , %
		$e$	$\gamma$	$A_1 10^2$	$A_2 10^4$	$\alpha\omega_1^2$	$A_1 10^2$	$A_2 10^4$	$A_3 10^8$	$A_4 10^{11}$	$\alpha\omega_1^2$	$\alpha\omega_2^2$		
1	Алюміній-дерево	6,360	2,700	4,803	1,555	22,451	4,851	1,585	9,315	1,615	22,202	359,897	1,10	
2	Дерево-алюміній	0,157	0,370	4,827	1,389	22,125	4,864	1,409	7,093	1,040	21,940	380,606	0,84	
3	Алюміній-скло	1,250	1,080	4,989	1,540	21,467	5,031	1,564	8,548	1,363	21,268	377,972	0,93	
4	Скло алюміній	0,800	0,926	5,000	1,534	21,388	5,045	1,558	8,420	1,330	21,194	380,606	0,91	
5	Алюміній-мідь	0,636	0,300	4,679	1,309	22,829	4,714	1,327	6,499	9,271	22,643	417,179	0,81	
6	Мідь-алюміній	1,570	3,333	6,160	2,476	17,458	6,232	2,532	1,832	3,910	17,238	289,410	1,26	
7	Сталь-бетон	10,500	3,930	4,673	1,545	23,177	4,723	1,577	9,607	1,736	22,899	352,280	1,20	
8	Бетон-сталь	0,095	0,254	4,770	1,351	22,370	4,808	1,370	6,769	9,740	22,187	412,374	0,82	
9	Сталь 45-сталь 65HSA	1,024	1,005	4,997	1,538	21,422	5,039	1,562	8,488	1,348	21,226	379,148	0,92	
10	Сталь 65HSA-сталь 45	0,977	0,995	5,000	1,540	21,399	5,044	1,564	8,497	1,350	21,203	379,079	0,92	
11	Мідь-цинк	1,375	1,257	5,060	1,594	21,177	5,103	1,620	9,049	1,479	20,979	370,165	0,95	
12	Цинк-мідь	0,727	0,796	4,950	1,490	21,632	4,985	1,513	8,031	1,244	21,439	387,103	0,90	

\*  $a_1 = 0,5$ ;  $a_2 = 0,75$ ;  $\beta = 0,5$ .

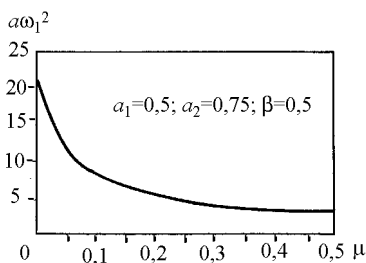


Рисунок 62 Залежність параметра основної частоти від відношення згупченої та розосередженої мас для консолі оболонка—серцевина з поєднанням матеріалів скло—алюміній.

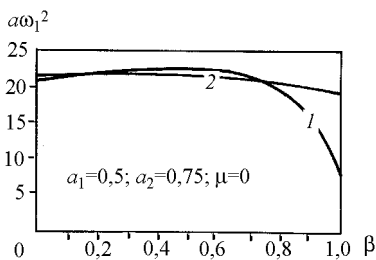


Рисунок 63 Залежність параметра основної частоти від геометричного параметра  $\beta$  для консолі оболонка—серцевина з поєднанням матеріалів бетон—сталь (1) і скло—алюміній (2).

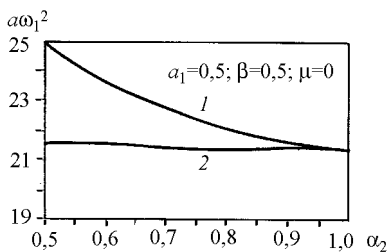


Рисунок 64 Залежність параметра основної частоти від геометричного параметра  $a_1$  для консолі оболонка—серцевина з поєднанням матеріалів бетон—сталь (1) і скло—алюміній (2).

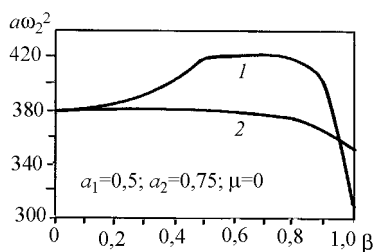


Рисунок 65 Залежність параметра другої частоти від геометричного параметра  $\beta$  для консолі оболонка—серцевина з поєднанням матеріалів бетон—сталь (1) і скло—алюміній (2).

Тож поєднання методів двобічних оцінок та часткової дискретизації дає можливість вельми раціонально і ефективно провадити дослідження впливу різних чинників на вільні поперечні коливання неоднорідних консолей, що несуть на своєму вільному кінці зосереджену масу. При цьому і тут досягається задовільна точність.

## 14.5 Коливання та стійкість кінцевих консолей за дії консервативної і неконсервативної сил

Припустімо (див. рис. 60), що нижній кінець стержня ( $x = 0$ ) — пружно зашкелений, а до верхнього ( $x = 1$ ) прикладені стискувальні сили — консервативна  $G$  і неконсервативна стежна  $H$ . Вважаючи, що  $H_1 = H_2$  (перший і останній варіанти на рис. 61), одержимо таку задачу на власні значення:

$$(f(x)y'')'' + py'' - \Omega^2 g(x)y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) + \sigma y''(0) = 0, \quad (fy'')|_{x=1} = 0, \quad ((fy'')' + Gy')|_{x=1} = 0.$$

Тут

$$f(x) = (1 - \gamma x)^4, \quad g(x) = (1 - \gamma x)^2, \quad \gamma = \frac{l}{H_1}, \quad \Omega^2 = a\omega^2,$$

$$p = \frac{l^2}{f_0}(G + H), \quad a = \frac{m_0 l^4}{f_0} \quad (f_0 = EJ(0));$$

$\sigma$  — коефіцієнт жорсткості защекнення.

Щоб дослідити вплив параметрів "конусності", жорсткості защекнення та вісного навантаження ( $\gamma$ ,  $\sigma$  і  $p$ ) на динамічну поведінку стержня, застосуємо метод характеристичних рядів і найпростіші оцінки (12.7) і ( $\tilde{p}_2 < \tilde{p}^*$ , див. 11.5).

Розглянемо спочатку випадок жорсткого защекнення ( $\sigma = 0$ ) за наявності тільки неконсервативної сили  $H$  ( $G = 0$ ). Тоді коефіцієнти характеристичного ряду (11.2) можна записати так [22]:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{p} \int_0^A (1 + \gamma t)^{-6} [F(t) - tF'(t)] dt,$$

$$B_4 = \frac{1}{p^2} \int_0^A \int_0^A [(1 + \gamma t)(1 + \gamma \tau)]^{-6} \{F(t - \tau)[F'(\tau)\tau - F(t)] +$$

$$+ F(t)[F'(\tau) + \gamma F(\tau)](t - \tau)\} dt d\tau, \dots, \quad (A = (1 - \gamma)^{-1}, \quad F(t) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \sqrt{pt} - t).$$

(14.37)

Зауважмо, що звідси для  $\gamma = 0$  (стержень сталого поперечного перерізу) можна одержати формули (12.55), а у випадку  $p \rightarrow 0$  (вісна сила зникає) — формули, які узгоджуються з (14.6).

Визначимо основну частоту власних коливань стержня за дії стискувальної стежної сили  $H$ . Результати обчислень наведено в табл. 16, з якої випливає, що основна частота істотно збільшується, коли сила  $H$  зростає (для кожного значення  $\gamma \in [0; 0,7]$ ).

Таблиця 16 Результати обчислень основної (першої) частоти коливань консолі у випадку жорсткого її закріплення.

$\gamma = 0$			$\gamma = 0,2$			$\gamma = 0,5$			$\gamma = 0,7$		
$p$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$	$p$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$	$p$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$	$p$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$
0	12,36	12,36	0	14,81	14,82	1	26,54	26,66	1	43,98	44,60
1	13,25	13,26	1	16,44	16,46	2	33,24	33,50	2	71,27	74,79
5	17,77	17,79	5	25,46	25,55	3	42,06	42,68	3	104,83	119,60
10	26,70	26,81	10	48,81	50,04	4	53,94	55,53	3,1	108,56	125,60
15	43,32	44,10	11	57,05	59,50	5	70,35	75,18	3,2	112,54	132,80
19,5	78,01	96,40	12	67,72	73,38	6	94,36	126,80			
19,6	79,32	101,98	13	82,20	104,20						

Таблиця 17 Результати обчислень основної (першої) частоти коливань консолі при пружному її закріпленні.

$\sigma_0$	$\gamma = 0$		$\gamma = 0,2$		$\gamma = 0,6$		$\gamma = 0,8$	
	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$
1	2,726	2,727	3,262	3,263	7,016	7,023	11,804	11,843
5	0,664	0,665	0,786	0,787	1,776	1,777	3,037	3,039
10	0,342	0,343	0,404	0,405	0,917	0,918	1,573	1,574
15	0,229	0,230	0,271	0,272	0,618	0,619	1,061	1,062
20	0,173	0,174	0,204	0,205	0,466	0,467	0,800	0,801

У випадку пружного защекнення стержня ( $\sigma \neq 0$ ) в формулах (14.37), починаючи з тієї, що відповідає коефіцієнту  $B_2$ , з'являються додаткові доданки  $\tilde{B}_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), пропорційні до параметра  $\sigma$  [22]. Зокрема, коли  $p \rightarrow 0$ , то

$$\tilde{B}_2 = \frac{\sigma}{30} (10 - 15\gamma + 16\gamma^2), \quad \tilde{B}_4 = \frac{\sigma}{7!} (8 - 7\gamma)$$

(при  $p \neq 0$  існують подібні до (14.37) формули для визначення коефіцієнтів характеристичного ряду).

В табл. 17 зосереджено результати обчислень основної частоти для різних значень  $\sigma$ . З наведеної в ній інформації випливає, що з послабленням жорсткості защекнення частота коливань монотонно зменшується (тим інтенсивніше, чим більшим є параметр конусності  $\gamma$ ).

За наявності стежної сили можна обчислити оцінки  $\tilde{p}_2 < \tilde{p}^* < \tilde{p}'_3$  (див. 11.5) для критичного навантаження  $p^*(\gamma, \sigma)$ , що відповідає автоколивній втраті стійкості. Деякі з результатів обчислень зображено на рис. 66 і рис. 67. Перший з рисунків засвідчує, що залежність критичного значення стежної сили від параметра пружності защекнення є немонотонною (як і для стержня сталого поперечного перерізу). З другого випливає, що тут, на відміну від випадку жорсткого закріплення (див. табл. 16), збільшення параметра конусності не мусить зменшувати монотонно критичну силу, графік  $p^* = p^*(\gamma)$ , наприклад, для  $\sigma = 5$ , має яскраво виражений мінімум (при  $\gamma \approx 0,27$ ).

Зауважимо, що в роботі [100] для випадку  $\gamma = 0,5$ ,  $\sigma = 0$  іншим способом одержано наближене значення критичної сили, що дорівнює 6,51. Воно перевищує приблизно на 9% відповідне значення  $p^*(1/2, 0)$ .

Нехай на консоль, окрім стежної сили  $H$ , діє ще й консервативна стискувальна (чи розтягувальна) сила  $G$ . Коефіцієнти відповідного характеристичного ряду будуються подібно, як і для випадку  $G = 0$ . Однак, оскільки [22]

$$B_0 = \eta + (1 - \gamma)(1 - \eta) \left[ \left( \frac{\gamma}{\sqrt{p}} - \sigma\sqrt{p} \right) \sin \frac{\sqrt{p}}{1 - \gamma} + \cos \frac{\sqrt{p}}{1 - \gamma} \right], \quad \eta = \frac{H}{G + H},$$

то тут можлива й дивергентна нестійкість.



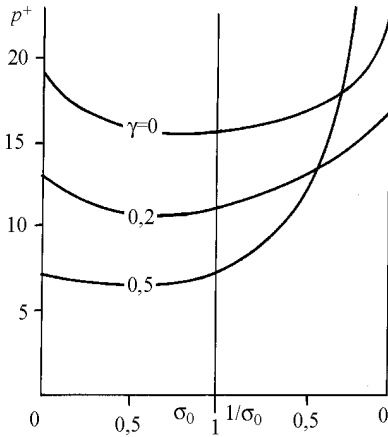


Рисунок 66 Графіки залежності критичного значення стежної сили від параметра податності защекнення для різних значень параметра конусності.

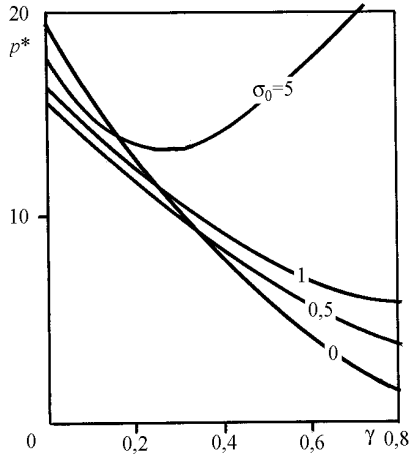


Рисунок 67 Графіки залежності критичного значення стежної сили від параметра конусності для різних значень параметра податності защекнення.

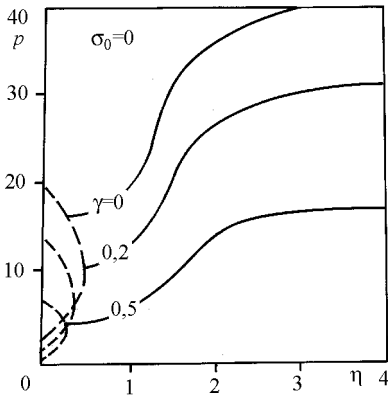


Рисунок 68 Границі області стійкості у випадку жорсткого защекнення консолі для трьох значень параметра конусності.

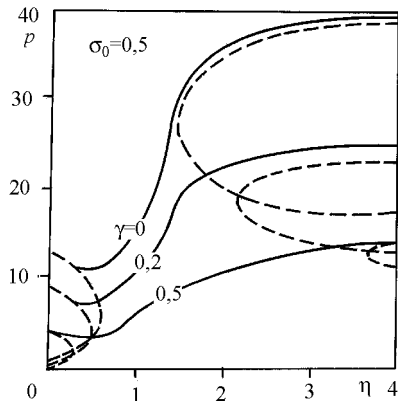


Рисунок 69 Границі області стійкості у випадку пружного защекнення консолі для трьох значень параметра конусності.

Результати дослідження впливу параметрів  $\gamma$  і  $\sigma$  на критичні значення та характер втрати стійкості зображено на рис. 68 — 69. На них побудовано границі області (не)стійкості в площині параметрів неконсервативності  $\eta$  та сумарного навантаження  $p$  для  $\gamma = 0; 0,2; 0,5$  і таких значень  $\sigma$ :  $\sigma_0 = 0; 0,5; 5$  (суцільні лінії відповідають флатеру, штрихові — дивергенції). Легко бачити, що ступінь жорсткості защекнення помітно впливає на критичні навантаження та характер втрати стійкості кінцевих консолей.

### 15.1 Частотні функції як ряди за параметрами для одного класу систем зі сталим розподілом параметрів

Розглядатимемо пружні системи, при дослідженні малих коливань і стійкості яких виникають задачі на власні значення для рівняння вигляду

$$y^{IV} - \tilde{\alpha}y''' - \beta y'' - \gamma y' - \delta y = 0. \quad (15.1)$$

Коефіцієнти цього рівняння вважатимемо цілими функціями характеристичного показника  $\lambda$  та інших параметрів.

Для побудови відповідних характеристичних рядів застосуємо викладений в 13.2 спосіб та формули (3.33) — (3.35). В такому разі, для функцій (13.11) — (13.14) можна встановити такі зображення [15]:

$$\begin{aligned} F_{2s} &= \sum_{n=2s}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} \sum_{k=0}^{n-2s} \left( L_n^{k+s} \right)_1 I_k I_{n-2s-k} \quad (s=0, 1, 2), \\ \Phi_{2-s} &= \sum_{n=2-s}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} \sum_{k=0}^{n+2s-2} \left( M_{n+2s-2}^k \right)_{1-s} I_k I_{n+2s-2-k}, \\ W_s &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} \sum_{k=0}^{n+2} \left( N_n^k \right)_0 I_{k+s} I_{n+2+s-k} \quad (s=0, 1). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Тут

$$\begin{aligned} \left( L_n^k \right)_p &= 2C_n^k - C_n^{k-p} - C_n^{k+p}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \\ \left( M_n^k \right)_p &= C_{n+p}^{k+1} - C_{n+p}^{k+2+p} + C_{n+p}^{k-1+p} - C_{n+p}^{k-2}, \\ \left( N_n^k \right)_p &= C_n^{k-1+p} - C_n^{k+p} + C_n^{k-1-p} - C_n^{k-2-p}; \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\begin{aligned} I_0 &= 1, \quad I_1 = \tilde{\alpha}, \quad I_2 = \tilde{\alpha}^2 + \beta, \quad I_3 = \tilde{\alpha}^3 + 2\tilde{\alpha}\beta + \gamma, \\ I_n &= \tilde{\alpha}I_{n-1} + \beta I_{n-2} + \gamma I_{n-3} + \delta I_{n-4} \quad (n=4, 5, \dots). \end{aligned} \quad (15.4)$$

Вирази для функцій  $\Phi_0$  і  $V_0$  одержуємо із формул (15.2) для  $\Phi_2$  і  $F_0$ , якщо в них числа  $\left(M_{n-2}^k\right)_1$  та  $\left(L_n^k\right)_1$  замінити відповідно на числа  $\left(N_n^k\right)_1$  і  $\left(L_n^k\right)_3$ .

У багатьох задачах коефіцієнти рівняння (15.1) є підстави вважати такими:

$$\tilde{\alpha} = 0, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma_0 + \gamma_1\lambda, \quad \delta = \delta_0 + \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2.$$

Наведені співвідношення між коефіцієнтами і параметром  $\lambda$  зустрічаються, наприклад, у задачах про динамічну поведінку стиснутих (розтягнутих) панелей у надзвуковому потоці ( $\gamma_1 = 0$  [54, 55]), стержня на пружній основі або за дії магнітного поля ( $\gamma = 0$  [86, 128]), трубопроводів і пластинок, що несуть потік рідини ( $\gamma_0 = \delta_0 = 0$  [102, 129]) тощо. В усіх таких випадках (які вирізняються рівністю  $\tilde{\alpha} = 0$ ) для побудови відповідних характеристичних рядів зручно використовувати формули, одержані із першої формули (15.2) з урахуванням співвідношень (15.3) — (15.4)

$$F_0 = 1 - \gamma \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i \frac{\beta^{m-i} \gamma^i x^{2m+3+i}}{(2m+3+i)!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-1} \delta^n f_{0,n}(x, \beta, \gamma),$$

$$F_{2s} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-1+s} \delta^n f_{2s,n}(x, \beta, \gamma) \quad (s=1, 2), \quad (15.5)$$

де

$$f_{2s,n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m f_{2s,im}^{(n)} \frac{\beta^{m-i} \gamma^i x^{2m+2s+4n+i}}{(2m+2s+4n+i)!},$$

$$f_{2s,0m}^{(n)} = C_{2n-1+s+m}^{2n-1+s} \quad (s=0, 1, 2), \quad k_m = \frac{1}{2} [1 + (-1)^m],$$

$$f_{0,mn}^{(n)} = (-1)^m [2C_{n+(m-1+k_m)/2}^n - k_m C_{n-1+m/2}^{n-1}],$$

$$f_{2,mm}^{(n)} = (-1)^m C_{n-1+(m+1+k_m)/2}^n, \quad f_{4,mm}^{(n)} = k_m C_{n+m/2}^n,$$

$$f_{2s,ij}^{(n)} = C_j^i f_{2s,ii}^{(n)} f_{2s,0j}^{(n)} [f_{2s,0i}^{(n)}]^{-1}. \quad (15.6)$$

Неважко одержати аналогічні формули, що відповідають двом іншим співвідношенням (15.2).

Враховуючи, що в даному випадку

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^4 [P_4'(s_i)]^{-1} e^{s_i x},$$

де  $s_i$  — корені характеристичного многочлена

$$P_4(s) = s^4 - \beta s^2 - \gamma s - \delta,$$

одержуємо, зокрема, суми рядів (15.5) у такому вигляді:

$$S_j = A_1 (s_1^j s_2^j f_{12} + s_3^j s_4^j f_{34}) + A_2 (s_2^j s_3^j f_{23} + s_4^j s_1^j f_{41}) + \\ + A_3 (s_1^j s_3^j f_{13} + s_2^j s_4^j f_{24}), \quad j = \overline{0, 4}.$$

Тут:

$$A_1 = (\alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{23} \alpha_{24})^{-1}, \quad A_2 = (\alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{42} \alpha_{43})^{-1}, \\ A_3 = (\alpha_{12} \alpha_{14} \alpha_{32} \alpha_{34})^{-1}, \quad \alpha_{ik} = s_i - s_k \quad (i, k = \overline{1, 4}; \quad i \neq k); \\ f_{rs} = e^{(s_r + s_i)x}.$$

В даному випадку

$$S_0 = F_4, \quad S_1 = F_2, \quad S_2 = F_0, \quad S_3 = W_0, \quad S_4 = W_1. \quad (15.7)$$

З формул (15.5) і (15.7) у випадку, коли  $\tilde{\alpha} = \gamma = 0$ , випливають відповідні залежності, які фігурують в 12.3 — 12.5.

## 15.2 Якісний аналіз впливу параметричних чинників на коливання та стійкість систем зі сталим розподілом параметрів

Покажемо, що стосовно багатьох систем можна одержувати нетривіальні висновки якісного рівня щодо впливу різних параметрів на частоти власних коливань, критичні значення навантажень, характер втрат стійкості тощо, аналізуючи лише відповідні характеристичні ряди і не вдаючись при цьому до обчислень.

Нехай дослідження малих коливань деякої пружної системи зведено до такої задачі [38]:

$$f^{IV} - \beta f''' - \gamma f'' - \delta f = 0, \quad (15.8)$$

$$f'''(0) + \chi_0 f'(0) = 0, \quad f''(0) - \psi_0 f'(0) = 0,$$

$$f'''(1) - \chi_1 f'(1) = 0, \quad f''(1) + \psi_1 f'(1) = 0. \quad (15.9)$$

Розглянемо спочатку окремі випадки цієї задачі, коли умови відсутності дестабілізації (11.32) виконуються і характеристичний ряд має вигляд (11.2):

$$R_2(\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{2k} \delta^k. \quad (15.10)$$

**1° Прямокутна пластинка** завтовшки  $h$  зі сторонами  $a$  і  $b$  обтікається надзвуковим газовим потоком (задача про панельний флатер). З двох протилежних країв пластинка закріплена шарнірно, два інші краї — защекнені пружно. Вектор швидкості  $u$  незбуреного потоку газу паралельний до осі  $x$ , яка збігається з одним шарнірно закріпленим краєм; вісь  $y$  перпендикулярна до  $x$ . У серединній площині пластинки діють стискувальні (розтягувальні) зусилля  $N_x$  і  $N_y$  (вони вважаються додатними у випадку розтягу); аеродинамічна дія потоку враховується за лінійним наближенням так званої поршневої теорії [55]. У цьому випадку

$$\beta = 2n_1^2 + \tilde{N}_x, \quad n_1 = n\pi \frac{a}{b}, \quad \tilde{N}_x = \frac{1}{D} N_x a^2, \quad \gamma = \pm \frac{a^3 \rho u^2}{D \sqrt{M^2 - 1}}, \quad \delta = \delta_1 - q,$$

$$\delta_1 = \frac{1}{D} a^4 \rho_0 h \omega^2, \quad q = \tilde{N}_y + n_1^4, \quad \tilde{N}_y = \frac{1}{D} a^2 n_1^2 N_y, \quad \chi_0 = \chi_1 = \infty,$$

$$0 \leq \psi_1 < \infty, \quad 0 \leq \psi_1 < \infty. \quad (15.11)$$

Тут  $D$ ,  $\rho_0$  — відповідно циліндрична жорсткість і питома густина пластинки;  $\rho$ ,  $M$  — густина і число Маха незбуреного потоку,  $\omega$  — параметр частоти;  $n$  — число півхвиль у напрямку осі  $y$ ;  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  — параметри пружного защекнення.

Враховуючи (15.5) і (15.6), для коефіцієнтів характеристичного ряду (15.10) знайдемо такі формули:

$$B_{2k} = 2^{2k+1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0, 2, \dots} C_{k+i}^k C_{2k+1+m}^{m-i} \frac{\beta^{m-i} \gamma^i}{(2m+4k+i+2)!} \times$$

$$\times \left[ 1 + \frac{\psi_0 + \psi_1}{2m+4k+i+3} + \frac{\psi_0 \psi_1}{(2m+4k+i+3)(2m+4k+i+4)} \right]. \quad (15.12)$$

Беручи також до уваги, що  $\delta = \delta_1 - q$ , запишемо ряд (15.10) за степенями частотного параметра  $\delta_1$ :

$$R_2(\delta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tilde{B}_{2k} \delta_1^k, \quad (15.13)$$

де

$$\tilde{B}_{2k} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+k}^l B_{2(l+q)} q^l. \quad (15.14)$$

З формул (15.12) — (15.14) випливає, що

- 1) коефіцієнти  $B_{2k}$ , а також  $\tilde{B}_{2k}$ , є парними функціями параметра  $\gamma$ ;
- 2) у випадку  $\beta \geq 0$  і  $q \geq 0$  виконуються нерівності

$$B_{2k} \geq 0 \text{ та } \tilde{B}_{2k} \geq 0$$

(для довільних допустимих значень параметрів  $\gamma$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi_1$ ,  $n$ );

- 3) нулі  $\mu_i$  і  $\nu_i$  функцій  $R_2(\delta)$  та  $R_2(\delta_1)$  задовольняють співвідношення

$$\nu_i = \mu_i + q \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Звідси дійдемо таких висновків:

а) в рамках наведеної постановки задачі напрямок потоку, що характеризується знаком параметра  $\gamma$ , за будь-яких значень інших параметрів не впливає на частоти власних коливань пластинки та на критичні значення частоти, які відповідають дивергенції або флатеру;

б) дивергентна втрата стійкості є неможливою ( $\tilde{B}_0 > 0$ ) для розтягувальних зусиль, а також для стискувальних, якщо вони задовольняють нерівності  $\beta \geq 0$ ,  $q \geq 0$ ;

в) при визначенні критичних значень флатера можна вважати, що  $q = 0$  (оскільки корені функцій  $R_2(\delta)$  і  $R_2(\delta_1)$  стають кратними одночасно — при одних і тих самих значеннях інших параметрів). Зокрема, зусилля  $N_y$  не впливають на критичні значення флатера.

**2° Тришарова колова циліндрична оболонка** обтікається з зовнішнього боку вздовж твірної надзвуковим потоком газу. В такому разі [65]

$$\beta = \theta_*^{-1} n_x n^2 (1 + n^2), \quad \gamma = \mp \theta_*^{-1} p_* n^4, \quad \delta = \theta_*^{-1} n^4 \omega_*^2 - q,$$

$$q = \theta_*^{-1} n^4 \left[ \frac{1 + \theta n^2 k}{1 + n^2 k} (1 - n^2)^2 + n_s (n^2 - 1) \right].$$

Тут

$$\theta_* = \frac{12}{\theta} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \left( \frac{R}{l} \right)^2, \quad n_x = \frac{1}{D} N_x R^2 \left( \frac{R}{l} \right)^2, \quad n_s = \frac{1}{D} N_s R^2,$$

$$\omega_*^2 = \frac{1}{D} \rho_0 R^4 \omega^2, \quad p_* = \frac{1}{D} \chi \rho_0 R^3 M \frac{R}{l}, \quad k = \frac{h^2}{\beta_0 R^2};$$

$\theta$  — безрозмірний параметр, який не залежить від жорсткості наповнювача на зсув [103];  $M = v/a_0$  — число Маха незбуреного потоку ( $v$  і  $a_0$  — швидкості потоку та звуку відповідно);  $D$ ,  $R$ ,  $l$ ,  $h$  — циліндрична жорсткість, радіус, довжина і товщина оболонки;  $D_0$ ,  $\beta_0$  — параметри, які характеризують відповідно жорсткість на згин тримких шарів і жорсткість наповнювача на зсув;  $N_x$ ,  $N_s$  — подовжинні зусилля в поздовжному ( $x$ ) і коловому ( $s$ ) напрямках;  $\rho_0$  — питома густина тришарового пакета.

Краї оболонки вважаємо пружно зашкеленими так, що справджуються граничні умови (15.11) (у випадку  $\psi_0 = \psi_1 = 0$  ця задача досліджувалась в [65, 103]).

Коефіцієнти характеристичного ряду, відповідного цій задачі, також визначаються за формулами (15.12). Отже, в даному випадку дійдемо тих самих викладених раніше висновків а), б), в). Зокрема, критична швидкість флатера не залежить від зусилля  $N_s$  (що діє в коловому напрямі) та жорсткості  $\beta_0$  наповнювача на зсув.

**3° Пружно зашкелена консольна смуга** завдовжки  $l$  і завтовшки  $h$  обтікається з обох боків надзвуковим потоком, спрямованим від зашкеленого краю до вільного (або ж навпаки). В цій задачі [55, 94]

$$\beta = 0, \quad \gamma = \mp \frac{2l^3 \rho u^2}{D \sqrt{M^2 - 1}}, \quad \delta = \frac{l^4 \rho_0 h}{D} \omega^2.$$

Крім цього, в граничних умовах (15.9)  $\chi_0 = \infty$ ;  $\chi_1 = \psi_1 = 0$ ,  $0 \leq \psi_0 < \infty$ .

З формул (15.5) для коефіцієнтів характеристичного ряду, відповідного цій задачі, одержуємо такі співвідношення:

$$B_{2k} = 2^{2k} \sum_{m=0}^{\infty} (-\gamma)^m \frac{1}{(3m + 2k)!} [1 + (3m + 4k)\psi_0] \alpha_m,$$

де

$$\alpha_m = \begin{cases} C_{k+m/2}^k \frac{k+m}{2k+m}, & m = 2s; \\ C_{k+(m-1)/2}^k, & m = 2s+1. \end{cases}$$

Звідси бачимо, що для  $\gamma < 0$  (потік напрямлено від защемленого краю до вільного) та довільних значеннях параметра  $\psi_0$  пружного защекнення всі коефіцієнти  $B_{2k}$  є додатними. Отже, дивергенція є неможливою; для  $\psi_0 = 0$  (жорстке защекнення) це було встановлено раніше чисельним способом [55, 94].

**4° Прямокутна ортотропна пластинка** з порожнинами, наповненими ідеальною нестисливою рідиною, яка протікає в додатному (від'ємному) напрямку осі  $x$ , виконує малі коливання біля пласкої форми рівноваги. Краї пластинки, перпендикулярні до потоку, є шарнірно закріпленими, а два інші пружно защекненими, так що виконуються граничні умови (15.9). Тоді [48, 129]

$$\beta = -v^2 + 2d_1 n_1^2, \quad \gamma = \mp 2v\Omega\sqrt{\xi},$$

$$\delta = \delta_1 - q, \quad \delta_1 = -\Omega^2, \quad q = d_2 n_1^4,$$

$$n_1 = n\pi \frac{a}{b}, \quad v = ua\sqrt{\frac{\rho_2}{D_1}}, \quad d_2 = \frac{D_2}{D_1}, \quad d_1 = \frac{D_3}{D_1},$$

$$\Omega = \lambda a^2 \sqrt{\frac{1}{D_1}(\rho_1 + \rho_2)}, \quad \xi = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Тут  $D_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — жорсткості ортотропної пластинки;  $\rho_1, \rho_2$  — маси пластинки і рідини на одиницю площі;  $u$  — швидкість рідини відносно пластинки;  $\lambda$  — характеристичний показник. Характеристичне рівняння цієї задачі має вигляд

$$[F_4 + (\psi_1 + \psi_2)F_4' + \psi_1\psi_2F_4'']|_{x=1} = 0.$$

Як і раніше, переконуємося, що функція  $F_4$  є парною функцією параметра  $\gamma$ . Ту саму властивість мають, очевидно, також і її похідні за змінною  $x$ . Тому тут справедливі висновки 1), 2) з прикладу 1<sup>0</sup>, а в деяких окремих випадках (коли  $\xi = 0$  або  $\lambda = 0$ ) також і висновок 3).

Розгляньмо тепер деякі задачі, характеристичний ряд яких має вигляд (11.1).



**5° Прямолінійний пружний стержень-трубопровід**, по якому в додатному напрямку осі  $x$  перетікає потік рідини, здійснює малі коливання в околі прямолінійної форми рівноваги. Лівий кінець стержня пружно зашкелений, правий — вільний. В цьому випадку [102]

$$\beta = -u^2, \quad \gamma = -2u\Omega, \quad \delta = -(1 + \chi)\Omega^2,$$

$$u^2 = \frac{\rho l^4}{EI} \frac{v^2}{l^2}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho l^4}{EI}} \lambda, \quad \chi = \frac{m}{\rho}.$$

Тут  $v$  — швидкість потоку рідини;  $\rho$  — густина рідини на одиницю довжини стержня;  $EI$ ,  $l$ ,  $m$  — відповідно жорсткість, довжина та маса стержня;  $\lambda$  — характеристичний показник. Параметр пружності зашкелення позначаємо через  $\psi$ .

Характеристичне рівняння задачі одержуємо у такому вигляді:

$$(F_0 + \psi F'_0)|_{x=1} = 0.$$

Коефіцієнти відповідного характеристичного ряду можна знайти на підставі першої з формул (15.5). Зокрема,

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 2u(\varphi_{0,3} + \psi \varphi_{0,2}), \quad (15.15)$$

де

$$\varphi_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+i}^n \frac{\beta^n}{(2n+j)!}.$$

Оскільки  $A_0 > 1$ , то втрата стійкості шляхом дивергенції не може настати (для жорсткого зашкелення цей висновок збігається з відомим результатом [55, 102], з'ясованим чисельними засобами). Разом з тим, формула (15.15) для  $A_1$  дозволяє зробити висновок, що коли рідина тече від вільного кінця до закріпленого, то прямолінійна форма рівноваги є нестійкою для довільної (навіть малої) швидкості  $v$ , оскільки в цьому випадку  $A_1 < 0$ . Очевидно, що “вносячи” тертя, можна усунути зазначене явище втрати стійкості (для належно малих швидкостей).

**6° Консольний стержень** стиснутий (розтягнутий) стежною силою  $H$ , дія якої запізнюється в часі на деякий проміжок  $\Delta$ , виконує малі коливання біля прямолінійної форми рівноваги. В даному випадку коефіцієнти задачі (15.8) — (15.9) є такими [104]:

$$\beta = -\frac{Hl^2}{EI}, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -\frac{ml^4}{EI} \lambda^2, \quad \chi_0 = \psi_0 = \infty, \quad \psi_1 = 0, \quad \chi_1 = \beta(1 - e^{\lambda\Delta}).$$

Діючи так само, як у попередньому прикладі, одержуємо:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 2\Delta\beta\varphi_{1,2}(\beta).$$

Отже, дивергентна втрата стійкості тут неможлива. Знак коефіцієнта  $A_1$ , як бачимо, визначається у випадку малих значень  $H$  знаком добутку  $\Delta\beta$ . Тому у випадку  $\Delta > 0$  (дія стискувальної сили — запізнюється) рівновага стержня є нестійкою за будь-якого малого значення сили; такого самого висновку дійдемо і у випадку розтягувальної сили ( $\beta > 0$ ), яка стежить за переміщенням вільного кінця стержня з деяким випередженням у часі ( $\Delta < 0$ ). Очевидно, і тут “внесення” тертя усуває нестійкість. За наявності пружного зашкелення одержимо аналогічні висновки.

### 15.3 Стійкість прямокутної пластинки за дії на неї стежного навантаження

Розглянемо задачу про стійкість пласкої форми рівноваги пружно зашкеленої вздовж одного з країв прямокутної пружної пластинки, звантаженої на протилежному краю стежним навантаженням з інтенсивністю  $H$ ; два інші краї — шарнірно закріплені [81]. Характеристичний визначник цієї задачі та відповідний характеристичний ряд неважко одержати, діючи так само, як і в попередньому підрозділі.

Досліджуючи вплив параметра навантаження ( $p$ ), жорсткості зашкелення ( $\psi$ ) та відношення сторін пластинки ( $\alpha$ ) на нижчі (першу та другу) частоти її коливань, побудуємо рис. 70. В одному випадку (рис. 70, а) йдеться про квадратну пластинку ( $\alpha = 1$ ), а в другому (рис. 70, б) — про видовжену прямокутну ( $\alpha = 4$ ); для багатьох інших значень  $\alpha$  ( $0,5 \leq \alpha < \infty$ ) характер залежності частот від  $\psi$  є приблизно таким самим.

Наведені графічні залежності дозволяють зробити такі в багатьох відношеннях нетривіальні висновки:

а) зі зменшенням жорсткості зашкелення краю пластинки при певному значенні  $\psi = \psi_1$  змінюється характер втрати стійкості (флатерна втрата стійкості змінюється на дивергентну);

б) зі збільшенням відношення  $\alpha$  сторін пластинки перша та друга частоти  $\omega$  її коливань, а також критичні значення параметра навантаження  $p$  зменшуються (для кожного фіксованого значення параметра жорсткості зашкелення  $\psi$ );

в) у випадку розтягувального стежного навантаження відбувається, як правило, дивергентна втрата стійкості.

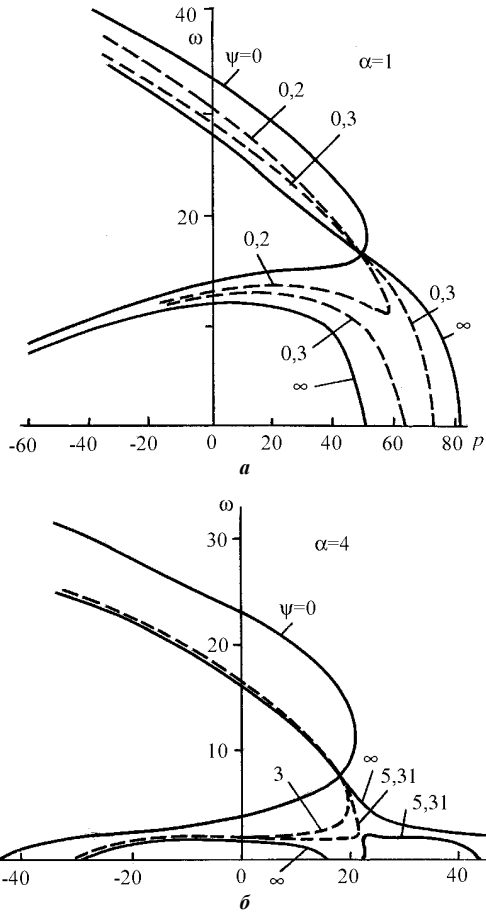


Рисунок 70 Залежність першої та другої частот коливань квадратної (а) та прямокутної (б) пластинок від параметра навантаження за різних значень параметра податності зашкелення.

На рис. 71 для випадку  $\alpha = 4$  зображено залежність критичних сил від жорсткості закріплення пластинки. Прямі лінії ( $p_0 = 16$  і  $p_0 = -28$ ) відповідають дивергентним критичним значенням для шарнірного закріплення ( $\psi = \infty$ ). З цього рисунка видно, що у випадку стиску для  $\psi \leq \psi_1 \approx 5,31$  система втрачає стійкість шляхом автоколивань, а для  $\psi > \psi_1$  — дивергенції (для  $0,5 \leq \alpha < \infty$  якісний характер впливу  $\psi$  на критичні сили залишається таким самим, але точка  $\psi_1$  із збільшенням  $\alpha$  зміщується праворуч, так що для  $\alpha \rightarrow \infty$  пластинка втрачає стійкість шляхом коливань при всіх  $\psi < \infty$ ).

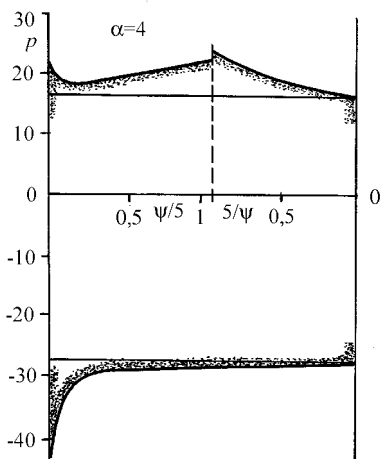


Рисунок 71 Залежність критичних сил і характеру втрати стійкості пластинкою від параметра податності зашкелення.

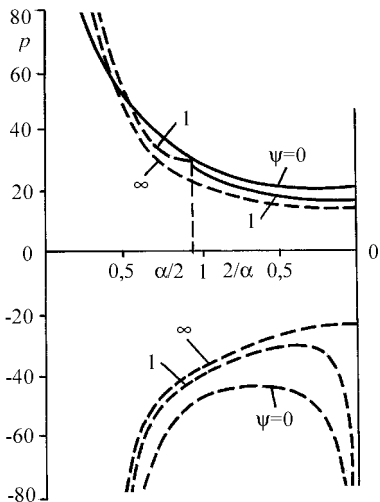


Рисунок 72 Залежність критичних сил і характеру втрати стійкості пластинкою від співвідношення її сторін за різних значень параметра податності зашкелення.

У випадку стиску ( $H < 0$ ) спостерігається дивергентна втрата стійкості. При цьому існує таке характерне значення параметра податності зашкелення  $\psi$ , починаючи з якого критичні значення сили можна замінити на значення, що відповідають шарнірному закріпленню; така заміна спричиняє запас стійкості. У першому випадку ( $H > 0$ ) характерним значенням параметра податності зашкелення можна вважати  $\psi \approx 50$ , а у другому ( $H < 0$ ) —  $\psi \approx 5$ .

Зі збільшенням  $\psi$  дивергентні значення критичних сил монотонно зменшуються. Залежність критичних сил при флатері від  $\psi$  є немонотонною і має мінімум при  $\psi \approx 0,6$ .

Вплив відношення  $\alpha$  сторін пластинки для різних значень  $\psi$  на критичні навантаження і характер втрати стійкості проілюстровано на рис. 72 (суцільні лінії відповідають флатеру, пунктирні — дивергенції). Для стиску, починаючи від значення  $\alpha \approx 4$ , критичні сили при кожному  $\psi$  щораз менше відрізняються від відповідних величин, одержаних для випадку  $\alpha \rightarrow \infty$ ; зі зменшенням  $\alpha$  (починаючи від  $\alpha \approx 0,5$ ) критичні значення сил різко зростають. У випадку розтягу таке зростання спостерігається не тільки для  $\alpha < 0,5$ , а ще й для  $\alpha > 10$ .

Кожному фіксованому значенню параметра  $\psi$  відповідає певна величина  $\alpha_1$  (вона зміщується праворуч зі збільшенням  $\psi$ ) така, що для  $\alpha \leq \alpha_1$  втрата стійкості має дивергентний характер, а для  $\alpha > \alpha_1$  — автоколивний. Зазначимо також, що для  $\psi = \infty$

$$p_0|_{\alpha \rightarrow \infty} \approx 14, \quad p_0|_{\alpha = \infty} \approx 20.$$

Отже, розглядаючи при належно великих значеннях  $\alpha$  замість вихідної задачі про стійкість відповідну задачу для випадку циліндричного згину, можна зробити істотну помилку при визначенні критичної сили.

### 15.4 Задача про пружні панелі з присьднаними елементами в надзвуковому газовому потоці

Розглядається плоска панель, яка обтікається з одного боку надзвуковим газовим потоком, а з протилежного має зосереджені пружно прикріплені маси (осцилятори). Координатна вісь  $Ox$  спрямована вздовж потоку; розмір панелі в перпендикулярному до  $Ox$  напрямі  $Oy$  вважається досить великим у порівнянні з її прогоном  $a$ .

Дослідження малих коливань і стійкості пласкої форми рівноваги панелі змінної товщини  $h = h(x)$  з пружно закріпленими краями приводять до такої задачі на власні значення [96]:

$$(Dw''')'' - \gamma w' - dw = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta(x - x_i) w_i; \quad (15.16)$$

$$w(0) = 0, \quad Dw''(0) - \psi_0 w'(0) = 0,$$

$$w(a) = 0, \quad Dw''(a) + \psi_1 w'(a) = 0 \quad (0 \leq x \leq a). \quad (15.17)$$

Тут

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \gamma = -\gamma_0 u \quad (\gamma_0 > 0),$$

$$-d = \rho h \lambda^2 + (\epsilon \rho h + \gamma_0) \lambda + r,$$

$$w_i = w(x_i), \quad -\alpha_i = \frac{M_i \lambda^2 (\epsilon_i \lambda + c_i)}{M_i \lambda^2 + \epsilon_i \lambda + c_i} + m_i \lambda^2 + \epsilon_i \lambda + k_i;$$

$u$  — швидкість потоку,  $\varepsilon$  — коефіцієнт зовнішнього тертя;  $M_i$ ,  $E_i$ ,  $c_i$  — маса, коефіцієнт тертя та коефіцієнт жорсткості осцилятора;  $m_i$ ,  $\varepsilon_i$  та  $k_i$  — подібні характеристики скупченої маси;  $r$  жорсткість пружної основи.

Як і раніше, спочатку будуюмо характеристичне рівняння задачі для випадку  $\alpha_i = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ):

$$(\psi_0 \psi_1 F + D_a \psi_0 F' - D_0 \psi_1 \dot{F} - D_0 D_a \dot{F}') \Big|_{\alpha=0}^{x=a} = 0, \quad (15.18)$$

де

$$F \equiv K\dot{K}' - \dot{K}K', \quad D_0 = D(0), \quad D_a = D(a); \quad (15.19)$$

$K = K(x, \alpha)$  — функція Коші рівняння (15.16) для випадку, коли  $\alpha_i = 0$ .

Якщо  $\alpha_i \neq 0$ , то згідно з 13.4 замість  $K(x, \alpha)$  потрібно підставити в (15.18) — (15.19) функцію  $Q_q(x, \alpha)$ , визначену за формулами (2.62) або (13.4) — (13.7).

## 15.5 Динамічна поведінка панелей з одним осцилятором

Нехай  $n = 1$ . Тоді

$$Q(x, \alpha) = K(x, \alpha) + \alpha_1 K(x_1, \alpha) \Phi(x, x_1).$$

Використовуючи це співвідношення, а також тотожність (2.39) і формули для нормальних фундаментальних функцій, можна побудувати характеристичне рівняння задачі. Його можна одержати із (15.18), якщо в лівій частині цього рівняння замість  $F$  написати функцію

$$\Delta(x, \alpha) \equiv F(x, \alpha) - \alpha_1 [F'(x_1, \alpha) F(x, x_1) - F(x_1, \alpha) \dot{F}(x, x_1)].$$

Як і в 13.4, в основних випадках закріплення маємо:

$$\Delta(a, 0) = 0, \quad \Delta'(a, 0) = 0, \quad \dot{\Delta}(a, 0) = 0, \quad \dot{\Delta}'(a, 0) = 0. \quad (15.20)$$

Перше з цих рівнянь відповідає жорсткому защекненню країв панелі, друге — жорсткому та шарнірному, третє — навпаки, четверте — панелі з шарнірно закріпленими краями.

Розглянемо тепер панель сталої товщини ( $h = \text{const}$ ) за відсутності пружної основи ( $r(x) \equiv 0$ ). В такому випадку  $K(x, \alpha) \equiv K(x - \alpha)$  і, наприклад, третє з рівнянь (15.20) можна записати так:

$$D^{-1} F'(a) - \alpha_1 [F'(x_1) F'(a - x_1) + F''(x_1) F(a - x_1)] = 0.$$

Враховуючи формули (15.5) — (15.6), маємо:

$$F(x, \gamma, d) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_k(x, \gamma) d^k, \quad g_k(x, \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2k+1} \frac{\gamma^{2m} x^{6m+4k+4}}{(6m+4k+4)!}.$$

Як бачимо, параметр швидкості потоку  $\gamma$  фігурує тут у парних степенях. Тому дві однакові панелі, які обтікаються потоком вздовж осі  $Ox$  у протилежних напрямках, поведуться цілком однаково з огляду на коливання і стійкість. Це узгоджується з відомим фактом [50] (який в окремому випадку встановлено шляхом чисельного аналізу) про те, що вказана зміна напрямку потоку не впливає на критичну швидкість. Даний висновок впливає цілком так само для умов пружного закріплення (15.17). Для випадку  $\alpha_1 = 0$  це з'ясовано в 15.2.

Нехай розподілена маса є значно меншою від зосередженої. Тоді  $F(x, \gamma, 0) \equiv g_0(x, \gamma)$ ; ліва частина характеристичного рівняння стає многочленом четвертого степеня, що відповідає системі з двома ступенями вільності. Він же є і многочленом Гурвіца для будь-яких значень параметрів [96] (також у випадку пружного закріплення). Це є наслідком нерівностей  $F > 0$ ,  $F' > 0$  і  $F'' > 0$ . Отже, безмасова панель з приєднаним осцилятором і зосередженою пружно прикріпленою масою є завжди стійкою асимптотично в надзвуковому потоці.

Застосовуючи метод характеристичних рядів, можна досліджувати вплив різних параметрів (мас, коефіцієнтів тертя, власної частоти осцилятора, розташування осцилятора тощо) на нижчі частоти та критичну швидкість. Зокрема, на підставі останнього з рівнянь (15.20) можна одержати такі висновки.

Втрата стійкості панелі зумовлена злиттям першої та другої частот. Графіки залежностей нижчих частот  $\sigma^2$  від параметра швидкості потоку  $\gamma$  за різних відношень мас  $\mu = m_1/(\rho ha) \leq 1$  для двох випадків розміщення осцилятора ( $\xi_1 = x_1/a$ ;  $x_1$  — зміщення маси  $m_1$  осцилятора від лівої опори) наведено на рис. 73.

Квазікритичне значення  $\gamma^*$  швидкості потоку газу зі збільшенням  $\mu$  необмежено зростає. При цьому залежність  $\gamma^*(\mu)$  може бути монотонною ( $\xi_1 = 0,4$ ) або немонотонною ( $\xi_1 = 0,2$ ).

На рис. 74 зображено залежності нижчих частот від параметра  $\gamma$  швидкості потоку газу для різних значень власної частоти осцилятора  $\omega_0$  у випадку, коли  $\xi_1 = 0,5$ . За досить великих значень  $\omega_0$  флатерні критичні значення  $\gamma^*$  є близькими до відповідних квазікритичних значень  $\gamma_0$  для панелі зі скупченою масою, а за малих  $\omega_0$  взаємозв'язок панелі і осцилятора стає слабким.

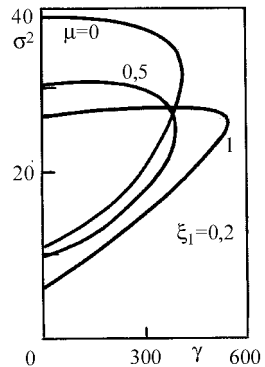
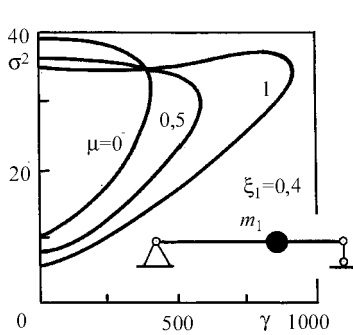


Рисунок 73 Графіки залежностей двох нижніх частот коливання пластинки від параметра швидкості потоку за різних значень параметра мас для двох варіантів розміщення осцилятора.

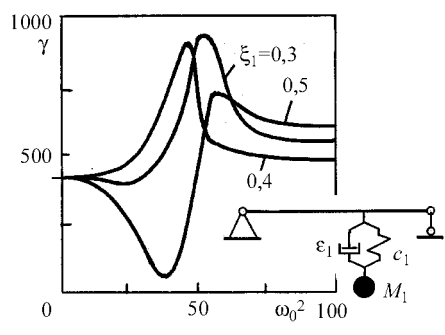
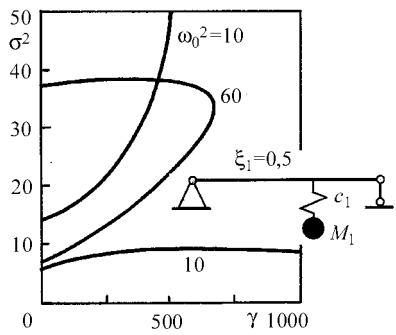


Рисунок 74 Графіки залежностей нижніх частот коливання пластинки від параметра швидкості потоку за двох різних значень власної частоти осцилятора ( $M_1$  — приєднана маса;  $c_1$  — пружність осцилятора).

Рисунок 75 Графіки залежностей критичної швидкості потоку газу від власної частоти коливання пластинки за різних розташувань осцилятора ( $M_1$  — приєднана маса;  $c_1$  і  $\epsilon_1$  позначають пружність і в'язкість осцилятора).

Функції  $\gamma = \gamma^*(\omega_0^2)$ , як впливає з рис. 75, можуть мати яскраво виражений локальний мінімум (випадок  $\xi_1 = 0,5$ ), слабо виражений локальний мінімум (випадок  $\xi_1 = 0,4$ ), або взагалі його не мати (випадок  $\xi_1 = 0,3$ ). Але в усіх перелічених випадках функції  $\gamma = \gamma^*(\omega_0^2)$  мають істотний максимум в інтервалі  $35 < \omega_0^2 < 50$ . Криві на цьому рисунку відповідають випадкові, коли  $\mu = 0,5$ ,  $\gamma_0/\gamma_1 = 0,5$ .



## 15.6 Стійкість панелі з двома зосередженими масами

Нехай розосереджена маса панелі не враховується (система з двома ступенями вільності);  $-\alpha_i = m_i \lambda^2 + \varepsilon_i \lambda$  ( $i = 1, 2$ ). У випадку шарнірного закріплення берегів, виходячи з останнього з рівнянь (15.20) і діючи аналогічно, як і в попередньому підрозділі, отримуємо характеристичне рівняння

$$p_4 \lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4 = 0, \quad (15.21)$$

де

$$p_0 = C(\gamma), \quad p_1 = \varepsilon_1 B_1(x_1, \gamma) + \varepsilon_2 B_2(x_2, \gamma),$$

$$p_2 = p_2^+ + \varepsilon_1 \varepsilon_2 A(x_1, x_2, \gamma), \quad p_2^+ = m_1 B_1(x_1, \gamma) + m_2 B_2(x_2, \gamma),$$

$$p_3 = (m_1 \varepsilon_2 + m_2 \varepsilon_1) A(x_1, x_2, \gamma), \quad p_4 = m_1 m_2 A(x_1, x_2, \gamma),$$

$$B_i(x_i, \gamma) = F'(x_i)F''(1-x_i) + F''(x_i)F'(1-x_i) > 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \gamma) = & K(x_2 - x_1)K(1-x_2) \left[ K''(x_1)K''(1) - K(x_2)K^{IV}(1) \right] + \\ & + K''(1-x_1)K(1-x_2) \left[ K(x_1)K''(x_2) - K''(x_1)K(x_2) \right] + \\ & + K(1-x_1)K''(1-x_2) \left[ K(x_2)K''(x_1) - K''(x_2)K(x_1) \right] + \\ & + K(x_2 - x_1)K''(1-x_2) \left[ K(x_1)K''(1) - K''(x_1)K(1) \right]. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Тут функція  $K(x, \alpha)$  (завдяки тому, що  $\lambda = 0$ ) визначається формулою

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{3\gamma} \left[ \exp\left(\gamma^{1/3}(x-\alpha)\right) + 2 \exp\left(-\frac{\gamma^{1/2}(x-\alpha)}{2}\right) \cos\left(3^{1/2} \frac{\gamma^{1/2}(x-\alpha)}{2}\right) \right].$$

Зазначимо, що величина  $A$  до втрати стійкості є додатною (припущення, що  $A \leq 0$  веде до протиріччя); при цьому коефіцієнти  $p_i$  ( $i = 0, 4$ ) — також додатні.

Окреслимо тепер у просторі параметрів область  $D$ , в якій рівноважний стан системи завжди стійкий (область вірогідної стійкості, див. 9.3 — 9.6). Зауважмо, що коли  $x_1 \rightarrow 0$ ,  $x_2 \rightarrow a$  або  $x_1$  та  $x_2$  досить близькі ( $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq a$ ), то дана система втрачає один ступінь вільності (це неважко уgliedити з (15.21) — (15.22)), причому флатерне критичне значення необмежено зростає.

Нехай тертя не враховується ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ). Тоді рівняння (15.21) стає біквадратним відносно  $\lambda^2$ :

$$p_4\lambda^4 + p_2^+\lambda^2 + p_4 = 0; \quad (15.23)$$

його дискримінантом є величина

$$\Delta_1 \equiv (p_2^+)^2 - 4p_0p_4 = (m_1B_1 - m_2B_2) + 4m_1m_2(B_1B_2 - AC). \quad (15.24)$$

Квадрати коренів  $\lambda_i^2$  ( $i = 1, 2$ ) рівняння (15.23) — від'ємні при  $\Delta_1 > 0$ . Порушенню цієї нерівності відповідає коливна втрата стійкості.

Позначимо найменший корінь рівняння  $V(x_1, x_2, \gamma) \equiv B_1B_2 - AC = 0$  через  $\gamma^*$ . Очевидно, що знак дискримінанта (15.24) суттєво залежить від знака функції  $V(x_1, x_2, \gamma)$ . Позначимо через  $D$  в площині параметрів  $(x_1, \gamma)$  область, що визначається співвідношеннями  $0 < x_1 < a$ ;  $0 < \gamma < \gamma^*(x_1)$  (параметр  $x_2$  фіксується). Очевидно, що в області  $D$  нерівність  $\Delta_1 > 0$  виконується за будь-яких допустимих значень  $m_1$  та  $m_2$ .

Припустимо, що справедливим є співвідношення  $m_1/m_2 = B_1/B_2|_{\gamma=\gamma^*(x_1)}$ .

Тоді у випадку  $\gamma > \gamma^*$  настає нестійкість. Покажемо тепер, що в області  $D$  система завжди стійка.

Нехай  $\varepsilon_1 \neq 0$  та  $\varepsilon_2 \neq 0$  (добутком  $\varepsilon_1\varepsilon_2$  нехтуємо). Стійкість є асимптотичною тоді, коли передостанній визначник Гурвіца  $\Delta$  многочлена (15.21) задовольняє умову  $\Delta > 0$ , яка рівнозначна нерівності

$$B_1^2 f(\mu, k, q) - AC > 0, \quad (15.25)$$

де

$$f(\mu, k, q) = \frac{(1 + \mu q)(\mu + qk^2)}{(\mu + k)^2}, \quad \mu = \varepsilon_1/\varepsilon_2, \quad k = m_2/m_1, \quad q = B_2/B_1. \quad (15.26)$$

Неважко переконатися, що при  $k = \mu$  функція  $f(\mu, k, q)$  досягає максимального значення  $f_{\max} = (1 + kq)^2/4k$ , а при  $k = q^{-1}$  — мінімального  $f_{\min} = q$ . Зазначимо, що  $f_{\max}|_{k=q^{-1}=q} = f_{\min} = q$ . Це ж мінімальне значення, як видно з (15.26), досягається при  $\mu = 0$  та  $\mu = \infty$ . Оскільки  $A > 0$  та  $C > 0$ , то з (15.25) випливає, що умова стійкості при  $f = q$  рівносильна нерівності  $V(x_1, x_2, \gamma) > 0$ . Іншими словами, у визначеній вище (без врахування тертя) області  $D$  наявна асимптотична стійкість рівноважного стану за будь-яких значень параметрів. Очевидно, що в цій області (та на її границі) довільні малі сили тертя, пропорційні швидкості, завжди тільки стабілізують систему. Тому  $D$  можна назвати областю достовірної стійкості.

## 15.7 Прямокутна панель з масою, зосередженою на прямолінійному відрізку

Нехай прямокутна панель зі сторонами  $a$ ,  $b$  закріплена шарнірно вздовж країв, паралельно до  $Ox$ , і пружно — до  $Oy$ . З боку, протилежного до потоку, панель має осцилятор на відрізку прямої лінії  $x = x_0$ .

Після відокремлення змінних матимемо замість задачі (15.16) — (15.17) таку сукупність задач на власні значення для функцій  $w_n(\xi)$  [96]:

$$w_n^{IV} - \beta w_n'' - \gamma w_n' - dw_n = \alpha_1 \delta(\xi - \xi_0) w_{n0},$$

$$w_n(0) = 0, \quad w_n(1) = 0, \quad w_n''(0) - \psi_0 w_n'(0) = 0, \quad w_n''(1) + \psi_1 w_n'(1) = 0, \quad (15.27)$$

де

$$\beta = 2\pi^2 v^2, \quad d = -(A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda + \pi^4 v^4), \quad A_1 = \rho h a^4 / D, \quad B = \varepsilon \rho h a^4 / D + \gamma_0 / D,$$

$$v = \frac{na}{b}, \quad \alpha_1 = -\frac{M_0 \lambda^2 a^3 (\varepsilon_0 \lambda + c_0)}{D(M_0 \lambda^2 + \varepsilon_0 \lambda + c_0)}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \xi_0 = \frac{x_0}{a}$$

(інші позначення такі самі, як в 15.4).

Характеристичні рівняння цих задач визначаються для кожної з функцій  $w_n(\xi)$  згідно до (15.18) — (15.19), але відповідна функція  $F$  має складніший вигляд [15], а саме:

$$F(\xi, \beta, \gamma, d) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{2k+1} f_k(\xi, \beta, \gamma) d^k,$$

$$f_k(\xi, \beta, \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{im}^{(k)} \frac{\beta^{m-i} \gamma^i \xi^{2m+4k+i+4}}{(2m+4k+i+4)!}, \quad f_{0m}^{(k)} = C_{2k+m+1}^{2k+1},$$

$$f_{mm}^{(k)} = K_m C_{k+m/2}^k, \quad f_{ij}^{(k)} = C_j^i f_{ii}^{(k)} f_{0j}^{(k)} (f_{0j}^{(k)})^{-1}, \quad K_m = \frac{1}{2} [1 + (-1)^m].$$

З останніх співвідношень випливає, що  $F$  — парна функція параметра  $\gamma$ ; а оскільки  $\beta > 0$ , то коефіцієнт  $A_0$  характеристичних рядів задач (15.27) — додатний. Отже, для будь-якого параметра  $n$  хвилетворення  $A_0 > 0$  (як і для випадку циліндричного згину).

Тому, як і в прикладі 1<sup>0</sup> з 15.2, одержуємо такі самі якісні висновки: а) дивергентна втрата стійкості тут неможлива; б) зміна напрямку обтікання на протилежний не впливає на частоти і критичні значення флатера; в) критичне значення швидкості потоку необмежено зростає, коли відношення розподіленої та зосередженої мас прямує до нуля ( $\mu \rightarrow 0$ ). Подібні висновки можна отримати для аналогічних задач про флатер циліндричних оболонок.

## 16.1 Критичне навантаження рухомого стержня

Дослідження стійкості однорідного пружного стержня, який за дії стежної сили рухається зі сталим прискоренням, зводиться до такої задачі [102]:

$$y^{IV} + pxy'' + py' - \Omega^2 y = 0,$$

$$y''(0) = y'''(0) = y''(1) = y'''(1) = 0. \quad (16.1)$$

Тут  $p$  і  $\Omega^2$  — безрозмірні параметри навантаження та частоти відповідно. Постановка цієї задачі та перший наближений її розв'язок належать К. М. Гопаку [105], який замінив стержень відповідною шестиланковою (з абсолютно жорсткими елементами, з'єднаними пружними шарнірами) моделлю і одержав критичне значення  $p^* = 90$  параметра  $p$ , що відповідає автоколивній втраті стійкості. Згодом ця задача розглядалася іншими авторами, які визначили такі значення критичної сили:

В. Д. Бабанський	(1962 р.)	—	100;
Г. Кьоніг	(1964 р.)	—	100,19;
Т. Біл	(1965 р.)	—	109,9;
В. І. Феодосьєв	(1965 р.)	—	109,69;
О. О. Горошко	(1965 р.)	—	115.

Я. Г. Пановко та І. І. Губанова [86] відзначили, що найточнішим слід вважати результат В. І. Феодосьєва, одержаний на обчислювальній машині з урахуванням 60-ти членів розгортки в степеневий ряд розв'язку диференційного рівняння.

Застосуємо до цієї задачі метод характеристичних рядів. Підставляючи загальний розв'язок рівняння (16.1) у граничні умови, одержуємо частотне рівняння

$$W_{1,0}(1,0) = \left( \ddot{K}''\ddot{K}'''' - \ddot{K}'''\ddot{K}'''' \right) \Big|_{\alpha=0}^{x=1} = 0.$$

З використанням формул (3.18) перетворимо це рівняння до такого вигляду:

$$W_{1,0}(1, 0) = \sum_{r=4}^{\infty} \frac{1}{r!} C_r(p, \Omega^2), \quad (16.2)$$

де

$$C_r = \sum_{k=2}^{r-1} (C_r^k - C_r^{k-1}) b_{k+2,2}^{(k+4)} b_{r-k+3,3}^{(r-k+6)}; \quad (16.3)$$

$$b_{s+i,i}^{(s+2i)} = -sp b_{s,i}^{(s+i)} + \Omega^2 b_{s-1,i}^{(s-1+i)},$$

$$b_{0,2}^{(2)} = 0, \quad b_{1,2}^{(3)} = 1, \quad b_{0,3}^{(3)} = -1, \quad b_{2,2}^{(4)} = b_{1,3}^{(4)} = b_{2,3}^{(5)} = 0 \quad (16.4)$$

$$(i = 2, 3, \dots; \quad s = 1, 2, \dots).$$

Формули (16.2) — (16.4) дозволяють побудувати характеристичний ряд вигляду (11.2):

$$B_0(p) - B_2(p)\Omega^2 + B_4(p)\Omega^4 - \dots \quad (16.5)$$

Його коефіцієнти визначаються за формулами

$$B_0(p) = \frac{2}{4!} - \frac{14}{7!} p + \frac{140}{10!} p^2 - \dots,$$

$$B_2(p) = \frac{8}{8!} - \frac{176}{11!} p + \frac{3640}{14!} p^2 + \dots,$$

$$B_4(p) = \frac{32}{12!} - \frac{1440}{15!} p + \frac{51040}{18!} p^2 - \dots,$$

$$B_6(p) = \frac{128}{16!} - \frac{9728}{19!} p + \frac{527616}{22!} p^2 - \dots.$$

Отже, ряди (16.5) є знакзмінними. А це дозволяє обчислювати їх з наперед заданою точністю.

Можна пересвідчитися, що  $B_0(p) > 0$  для значень  $0 \leq p \leq 140$ . Застосовуючи найпростіші оцінки  $\tilde{p}_2 < \tilde{p}_* < \tilde{p}_3^*$  (див. 11.5), одержимо:

$$108,20 < p_* < 109,68. \quad (16.6)$$

Оскільки в (16.6) нижня і верхня оцінки відрізняється одна від одної незначно, то отриманий результат можна вважати досить точним. Підкреслимо, що верхня оцінка критичного значення майже збігається з результатом В. І. Феодосєва.

## 16.2 Сійкість пласкої форми згину пружної консолі-смуги

Розглянемо задачу про визначення критичного навантаження пружно защекненої консольної двотаврової балки, яка в площині найбільшої жорсткості згинається прикладеною до вільного кінця консервативною силою  $P$ . Відповідна задача на власні значення має вигляд [42]

$$y^{IV} - \beta y'' - \kappa^2 \beta (1-x)^2 y = 0; \quad (16.7)$$

$$f y(0) = 0, \quad y'(0) - \psi y''(0) = 0, \quad y''(1) = 0, \quad \beta y'(1) - y'''(1) = 0, \quad (16.8)$$

де

$$\beta = \gamma^{-2}; \quad \kappa^2 = \frac{BC}{pl^4}; \quad \gamma^2 = \frac{Dh^2}{2Cl^2};$$

$B$  — найменша жорсткість на згин;  $C$  — жорсткість на кручення;  $l$  довжина балки;  $h$  — її висота;  $D$  — жорсткість полички при згині (в її площині);  $\psi$  — параметр жорсткості защекнення. Для випадку  $\psi = 0$  ця задача досліджувалася С. П. Тимошенком [63] методом степеневих рядів; автор зауважив, зокрема, що застосування енергетичного методу вимагало б тут вельми значних обчислень (друге наближення для малих значень параметра  $\beta$  дає істотні похибки).

Застосовуючи до побудови характеристичного визначника задачі поданий в 13.2 спосіб, доцільно покласти параметр  $\alpha$  рівним одиниці (беручи до уваги вигляд коефіцієнта біля  $y$  в рівнянні (16.7)). Тоді розв'язок рівняння (16.7), який при  $x = 1$  задовольняв би граничні умови (16.8), визначатиметься за формулою

$$y = C_2 \ddot{K}(x, 1) + C_3 [\ddot{K}(x, 1) - \beta \dot{K}(x, 1)].$$

Підставляючи цей розв'язок в інші дві умови (16.8), одержимо характеристичне рівняння задачі

$$\Delta \equiv \left\{ (F_{02} + \beta F_{22}) + \psi (F_{02} + \beta F_{22})' \right\} \Big|_{\alpha=1, x=0} = 0.$$

Тут функції  $F_{02}$  і  $F_{22}$  відповідають (13.11). Застосовуючи співвідношення (3.11), для визначення коефіцієнтів відповідних рядів (3.18), одержимо такі формули:

$$b_{4+s, m}^{(4+s+m)} = \beta b_{s+2, m}^{(s+2+m)} + s(s-1)\kappa^2 \beta b_{s-2, m}^{(s-2+m)},$$

$$b_{m, 4+s}^{(4+s+m)} = \beta b_{m, s+2}^{(s+2+m)} + s(s-1)\kappa^2 \beta b_{m, s-2}^{(m+s-2)}. \quad (16.9)$$

"Початковими значеннями" в (16.9) є елементи відповідного визначника Вронського

$$W(K)|_{x=1}^{\alpha=1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \end{vmatrix}.$$

Після обчислень характеристичний визначник задачі зобразимо як ряд за параметром  $\kappa^2$ :

$$\Delta \equiv B_0(\beta) - \kappa^2 B_2(\beta) + \kappa^4 B_4(\beta) - \dots; \quad (16.10)$$

де

$$B_{2k}(\beta) = b_{2k}(\beta, x)|_{x=1} + \Psi b'_{2k}(\beta, x)|_{x=1};$$

$$b_0(\beta, x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{2!}\beta x^2 + \frac{1}{4!}\beta^2 x^4 + \dots,$$

$$b_2(\beta, x) = \frac{4}{6!}\beta x^6 + \frac{36}{8!}\beta^2 x^8 + \frac{184}{10!}\beta^3 x^{10} + \dots,$$

$$b_4(\beta, x) = \frac{784}{12!}\beta^2 x^{12} + \frac{15824}{14!}\beta^3 x^{14} + \frac{119920}{16!}\beta^4 x^{16} + \dots$$

Тепер, виходячи з ряду (16.10), можна визначити критичні (найменші дивергентні) значення параметра навантаження з нестачею ( $\kappa_-$ ) та лишком ( $\kappa_+$ ) як функції параметрів  $\beta$  і  $\psi$ . Застосовуючи найпростіші оцінки, одержимо дані, наведені в табл. 18. Зауважимо, що значення  $\kappa_-$  для  $\psi = 0$  дещо більші від відповідних значень, одержаних С. П. Тимошенком (найбільша розбіжність, що сягає приблизно 6%, спостерігається при  $\beta = 8$ ).

Таблиця 18 Оцінки критичних значень параметра навантаження

$\beta$	$\psi = 0$		$\psi = 1$		$\psi = 10$		$\psi = \infty$	
	$\kappa_-$	$\kappa_+$	$\kappa_-$	$\kappa_+$	$\kappa_-$	$\kappa_+$	$\kappa_-$	$\kappa_+$
0,1	44,39	44,44	17,20	17,20	7,74	7,74	5,47	5,47
1	15,97	15,99	7,68	7,68	5,70	5,70	5,44	5,44
2	12,52	12,55	6,69	6,69	5,49	5,49	5,32	5,32
3	11,07	11,09	6,27	6,27	5,37	5,37	5,25	5,25
4	10,20	10,23	6,01	6,02	5,28	5,28	5,18	5,18
6	9,16	9,20	5,68	5,69	5,13	5,13	5,06	5,06
8	8,51	8,54	5,46	5,47	5,01	5,02	4,95	4,96
12	7,70	7,73	5,16	5,17	4,81	4,83	4,78	4,79
16	7,15	7,20	4,96	4,97	4,69	4,70	4,65	4,67
24	6,48	6,53	4,70	4,72	4,50	4,52	4,48	4,49
32	6,07	6,12	4,54	4,56	4,39	4,41	4,37	4,39
40	5,79	5,84	4,44	4,46	4,31	4,33	4,30	4,32

### 16.3. Задача про область вірогідної стійкості континуально-дискретних пружних систем

Розглянемо тепер задачу про визначення області вірогідної стійкості для системи з довільною (скінченною чи безмежною) кількістю ступенів вільності. Формулювання задачі та позначення є аналогічними до наведених в розділі 9. Область  $D$  вірогідної стійкості визначатимемо, виходячи з умови, що для значень  $p(\eta) \in [0, p_*(\eta))$  рівновага системи є стійкою за будь-якого малого тертя [81].

Покажемо, що область  $D$  можна визначати, застосовуючи метод характеристичних рядів. Припустимо, що малі коливання системи описуються лінійними диференційними рівняннями (звичайними або з частковими похідними) за відповідних граничних умов. Тоді можна побудувати характеристичний ряд вигляду (11.1), коефіцієнти якого визначаються відповідно до співвідношень, наведених в 11.6 (див. (11.31) і наступні рівності), так що парні коефіцієнти не залежать від параметрів малого тертя  $b_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ), а непарні є лінійними однорідними формами  $b_i$  такого вигляду:

$$A_{2s-1} = \sum_{i=1}^k Q_{2s-1}(p, \eta) b_i. \quad (16.11)$$

Оскільки при  $p = \eta = 0$  і довільних  $b_i > 0$  досліджувана форма рівноваги є стійкою, то очевидно, що область  $D$  завжди містить початок координат разом з деяким його околom. Кожна точка  $(\eta, p)$ , яка належить границі області  $D$ , характеризується тим, що її ордината  $p$  визначається як критичне (при заданому  $\eta$ ) значення  $p_*$  параметра навантаження, яке відповідає або дивергентній, або автоколивній втраті стійкості. В першому випадку значення  $p_*(\eta) \equiv p_0(\eta)$  не залежать від тертя і співпадають з найменшими коренями рівняння  $A_0(p, \eta) = 0$ . Оскільки в другому випадку  $p_*(\eta)$  — найменші значення критичних навантажень  $p_*(\eta, b_1, b_2, \dots, b_k)$ , то наближені значення  $(p_2)_0$  і  $(p'_3)_0$ , які їм відповідають, визначаємо як найменші корені рівнянь (див. 11.5)

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (16.12)$$

(тут вважається, що втрата стійкості зумовлена злиттям перших коренів відповідної дійсної пари функцій; інші варіанти можна розглянути аналогічно).



Позначимо відповідно через  $(p_2)_j$  і  $(p'_3)_j$  ( $j = \overline{1, k}$ ) найменші корені одержуваних із (16.12) рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta_1(p, \eta, b_1, 0, \dots, 0) = 0, \quad D_1(p, \eta, b_1, 0, \dots, 0) = 0; \\ \Delta_2(p, \eta, 0, b_2, 0, \dots, 0) = 0, \quad D_2(p, \eta, 0, b_2, 0, \dots, 0) = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_k(p, \eta, 0, \dots, 0, b_k) = 0, \quad D_k(p, \eta, 0, \dots, 0, b_k) = 0. \end{aligned}$$

Покажемо, що

$$(p_2)_0 = \min_j \{(p_2)_j\}, \quad (16.13)$$

$$(p'_3)_0 = \min_j \{(p'_3)_j\}. \quad (16.14)$$

З урахуванням викладеного в 11.6 і формули (16.11) перетворимо рівняння (16.12) до такого вигляду

$$\Delta(p, \eta, b_1, \dots, b_k) = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1(r \neq s)}^k (\alpha_{rr} b_r^2 + 2\alpha_{rs} b_r b_s + \alpha_{ss} b_s^2),$$

$$D(p, \eta, b_1, \dots, b_k) = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1(r \neq s)}^k (\gamma_{rr} b_r^2 + 2\gamma_{rs} b_r b_s + \gamma_{ss} b_s^2),$$

де

$$\alpha_{rs} = -Q_{1r} Q_{1s} f_{rs}(p, \eta), \quad f_{rs} = A_4 - \frac{1}{2} A_2 (z_r + z_s) + A_0 z_r z_s,$$

$$\gamma_{rs} = -Q_{1r} Q_{1s} \left[ f_{rs}(p, \eta) - \frac{1}{2} A_0 (y_r + y_s) \right], \quad z_r = Q_{3r} Q_{1r}^{-1}, \quad y_r = Q_{5r} Q_{1r}^{-1}. \quad (16.15)$$

Очевидно, що для  $p(\eta) \in [0, p_*)$  величини  $A_{2s}$  і  $Q_{2s+1, k}$  є додатними (для таких значень  $p$  система стійка за довільних  $b_i$ ), а також для  $p \leq (p_2)_0$ :

$$\Delta \geq 0, \quad \Delta_i = \alpha_{ii} \geq 0 \quad (i = \overline{1, k}). \quad (16.16)$$

Тоді із співвідношення

$$2f_{rs} - (f_{rr} + f_{ss}) = -A_0 (z_r - z_s)^2 \leq 0$$

з урахуванням (16.15) — (16.16) одержуємо нерівність  $\alpha_{rs} \geq 0$ .

Отже, для значень  $p \leq (p_2)_0$  величини  $\alpha_{rs}$  — невід’ємні за довільних  $r$  і  $s$ . Таким чином

$$\Delta(p, \eta, b_1, b_1, \dots, b_k) \geq \Delta_i(p, \eta, 0, \dots, b_i, \dots, 0),$$

що й обґрунтовує формулу (16.13). Аналогічно можна довести формулу (16.14), що й завершить розв’язання задачі.

Відзначимо, що розглянутий тут спосіб визначення області вірогідної стійкості можна застосувати для дослідження й інших можливих варіантів автоколивної втрати стійкості дискретних і континуально-дискретних пружних систем.

## 16.4 Область стійкості консолі з твердим тілом на вільному кінці

Звернемося знову до задачі про малі коливання пружної консолі з твердим тілом на вільному кінці, навантаженої консервативною  $G$  та стежною  $H$  силами (див. розділ 9.3 та рис. 13). На цей раз відмовимося від припущення, що маса консолі зникаюче мала у порівнянні з масою твердого тіла; навпаки, розглядатимемо тепер задачу про побудову області  $D$  вірогідної стійкості власне з урахуванням розподіленої маси консолі [81].

Покладаючи  $K(x, \alpha) = \varphi(x - \alpha)$  ( $\varphi = \varphi(\cdot)$  — функція, визначувана відповідно до (12.15) — (12.17), причому  $a = 0, b = 1$ ), можна побудувати характеристичне рівняння (12.35) даної системи. В розділі 3 це рівняння було побудовано іншим способом, там і наведено формули (12.36) для визначення коефіцієнтів відповідного характеристичного ряду. Для побудови області  $D$  необхідно знайти величини  $(p_2)_0, (p'_3)_0$  за формулами (16.13) — (16.14).

На рис. 76 відображено області вірогідної стійкості системи за різних значень її параметрів (випадку ідеалізованої постановки задачі, коли  $B = b_1 = b_2 = 0$ , відповідають пунктирні лінії). Легко зауважити, що малі сили тертя можуть викликати суттєвий дестабілізуючий вплив — критичне значення стежної сили більш, ніж у шість разів, може бути меншим від відомого значення  $p_* \approx 20$ .

Досліджуючи вплив на область  $D$  параметра  $q = Mr^2 / (ml^3)$ , можна засвідчити, що існує таке значення  $q \approx 0,043$ , при якому  $(p_2)_0$  досягає деякого найменшого значення  $p_q$ . То ж існує мінімальна область  $D_0$  вірогідної стійкості системи, відображена на рис. 77. Підкреслимо, що тут автоколивна втрата стійкості можлива у випадку  $\eta \in [0,46; 1/2]$  (на противагу відомому результату:  $\eta > 0,5$ ).

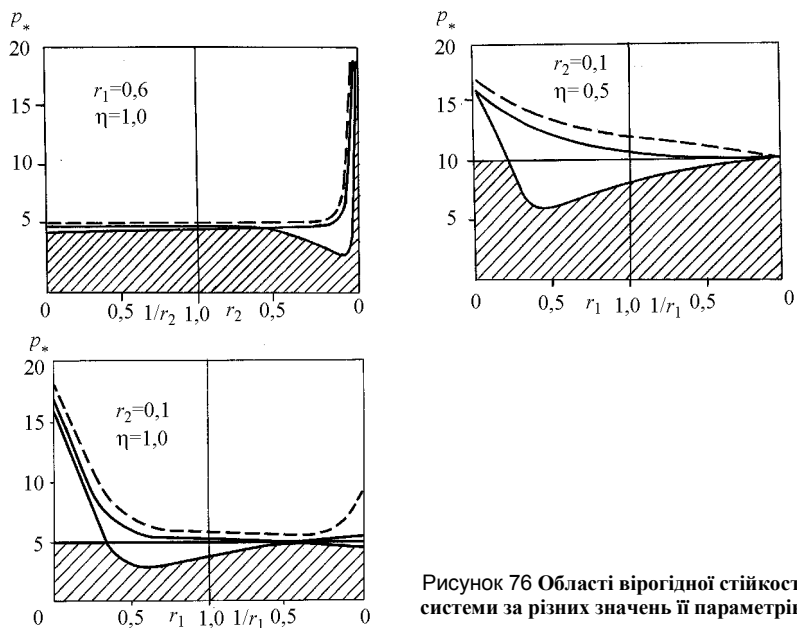


Рисунок 76 Области вірогідної стійкості системи за різних значень її параметрів.

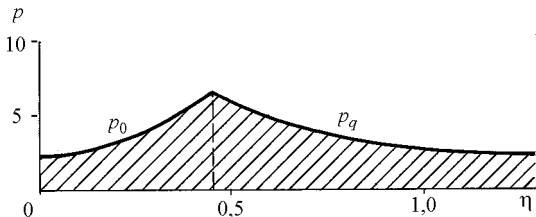


Рисунок 77 "Мінімальна" область вірогідної стійкості.

### 16.5 Про обмеження на параметри системи

Нехай властивості матеріалу деякого деформівного елемента (наприклад, прямолінійного стержня) підлягають законові

$$v_m \overset{(m)}{\sigma} + \dots + v_1 \dot{\sigma} + \sigma = E \left( \varepsilon + \mu_1 \dot{\varepsilon} + \dots + \mu_n \overset{(n)}{\varepsilon} \right) \quad (n \geq m), \quad (16.17)$$

де  $v_i, \mu_i$  — параметри моделі; індексами згори позначено тут диференціювання за змінною  $t$ . При цьому вважатимемо, що самозбудження власних коливань вказаного елемента є неможливим. Відзначимо, що при розгляді моделі лінійного стандартного тіла таке припущення було вихідним у праці [106].

Розглянемо малі поздовжні коливання стержня, які описуються рівнянням

$$v_m \frac{\partial^{m+2} u}{\partial t^{m+2}} + \dots + v_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \dots + \mu_n \frac{\partial^{n+2} u}{\partial x^2 \partial t^n} \right)$$

( $u(x, t)$  — поздовжнє переміщення,  $\rho$  — лінійна густина,  $x$  — вісна координата). Після відокремлення змінних одержуємо [81]

$$\frac{f''}{f} = \frac{\lambda^2 \rho}{E} \frac{1 + v_1 \lambda + \dots + v_m \lambda^m}{1 + \mu_1 \lambda + \dots + \mu_n \lambda^n} = \frac{\lambda^2 \rho M(\lambda)}{EN(\lambda)} = -\alpha^2.$$

Отже, характеристичне рівняння для  $\lambda$  має вигляд

$$\lambda^2 M(\lambda) + \Lambda_s N(\lambda) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots), \quad (16.18)$$

де  $\Lambda_s = E\alpha_s^2/\rho$  — квадрати частот власних коливань відповідного ідеально пружного стержня.

Застосовуючи до (16.18) критерій Гурвіца, з'ясуємо, що повинні дотримуватись нерівності

$$v_i > 0, \quad \mu_j > 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}),$$

$$F(\Lambda) = c_0 + c_1 \Lambda + \dots + c_q \Lambda^q > 0, \quad q = 0, 1, \dots,$$

де  $c_i$  — функції параметрів  $v_i$  і  $\mu_j$ .

Вимагаючи, щоб виконувалися нерівності  $F > 0$ , одержуємо обмеження на параметри моделі  $v_i$ ,  $\mu_j$ , за яких забезпечується відсутність самозбудження системи.

Розглянемо деякі окремі випадки:

а) Стандартне тіло ( $m = n = 1$ ;  $v_1 = \tau$  — час релаксації;  $\mu_1 = \tau H / E$ ,  $H$  — миттєвий модуль). Застосовуючи вказаний підхід, приходимо до добре відомих нерівностей

$$H/E > 1; \quad v_1 > 0, \quad \mu_1 > 0;$$

б) П'ятипараметрична модель ( $m = n = 2$ ). Тут одержимо нерівності

$$\frac{\mu_2}{v_2} > \frac{\mu_1}{v_1} > 1; \quad \mu_j > 0 \quad (j = 1, 2);$$

в) Шестипараметрична модель ( $m = 2, n = 3$ ). Справедливими є нерівності

$$c_0 > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0$$

або

$$c_0 > 0, \quad c_1 < 0, \quad c_2 > 0, \quad c_1^2 - 4c_0c_2 < 0,$$

де

$$c_0 = v_1^2 \left( \frac{\mu_1}{v_1} - 1 \right), \quad c_2 = \mu_3 (\mu_1 \mu_2 - \mu_3),$$

$$c_1 = \mu_1 v_1 v_2 \left( \frac{\mu_2}{v_2} - \frac{\mu_1}{v_1} \right) + \mu_3 v_1 \left( \frac{\mu_1}{v_1} - 2 \right).$$

Зазначимо, що при розгляді інших типів коливань (наприклад, крутильних, поперечних тощо) описаний підхід веде, природно, до тих самих обмежень (16.17) на параметри моделі.

## 16.6. Способи наближеного знаходження критичних ознак флатера

Розгляньмо задачу про автоколивну втрату стійкості деякої форми рівноваги пружно-в'язкої системи з розподіленими параметрами, матеріал якої підлягає закону вигляду (16.17). Параметри  $v_i, \mu_j$  вважаємо далі достатньо малими.

Відокремлюючи змінні в задачі, що описує малі коливання системи біля досліджуваної форми рівноваги, одержимо відповідну узагальнену задачу на власні значення відносно характеристичного показника  $\lambda$ .

Неважко переконатися, що до цієї задачі можна прийти, якщо в задачі на власні коливання, яка відповідає аналогічній системі з ідеально пружного матеріалу, параметри навантаження  $p$  та частоти  $\omega^2$  відповідно замінити на величини [81]

$$p \frac{\mu(\lambda)}{N(\lambda)}, \quad -\lambda^2 \frac{\mu(\lambda)}{N(\lambda)} \quad (16.19)$$

(заради простоти розглядатимемо випадок двопараметричної задачі на власні значення).

Ця обставина відкриває можливості для наближеного визначення критичного флатерного навантаження для даної системи шляхом відповідної апроксимації гілок власних значень аналогічної ідеально пружної системи,

або ж шляхом одержання із характеристичного ряду ідеально пружної системи апроксимівного виразу для характеристичного рівняння пружно-в'язкої системи, що розглядається.

Припустимо, що автоколивна втрата стійкості відповідної пружної системи зумовлена злиттям при  $p = p^*$  першої та другої частот (див. рис. 37, б).

Апроксимуємо криву  $p(\omega^2)$  найпростішим многочленом

$$p = -c(\omega^4 - a_1\omega^2 + a_2), \quad (16.20)$$

де  $c = 4p^*(\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-2}$ ;  $a_1 = \omega_1^2 + \omega_2^2$ ;  $a_2 = \omega_1^2\omega_2^2$ ;  $\omega_i^2$  ( $i=1, 2$ ) — квадрати частот власних коливань відповідної незавантаженої ідеально пружної системи. Підставляючи вирази (16.19) у співвідношення (16.20), одержуємо рівняння

$$M^2(\lambda)\lambda^4 + (a_1\lambda^2 + pc^{-1})M(\lambda)N(\lambda) + a_2N^2(\lambda) = 0. \quad (16.21)$$

Нехай  $\tilde{p}_*$  — значення параметра навантаження, при якому многочлен (16.21) перестає бути многочленом Гурвіца. Це значення можна розглядати як наближений розв'язок задачі про автоколивну втрату стійкості даної пружно-в'язкої системи. Очевидно, що точність одержаного таким чином результату залежить від якості апроксимації залежності вигляду (16.20). При цьому знаходити значення  $\tilde{p}_*$ , як і досліджувати вплив на нього різних параметрів, можна за допомогою тих самих способів, що стосувалися пружних систем.

Для прикладу розглянемо так звану модель Кельвіна:  $\mu(\lambda) \equiv 1$ ,  $N(\lambda) \equiv 1 + \mu_1\lambda$ . На підставі (16.21) матимемо:

$$\lambda^4 + a_1\mu_1\lambda^3 + a_1\lambda^2 + \mu_1(2a_2 + pc^{-1})\lambda + a_2 + pc^{-1} = 0.$$

Застосовуючи критерій Гурвіца, знаходимо:

$$\tilde{p}_* = \frac{4p^*\omega_1\omega_2}{(\omega_1 + \omega_2)}.$$

З використанням останньої формули без особливих зусиль можна визначити значення величини  $\tilde{p}_*$ , наприклад, у випадку задачі про стійкість прямолінійної форми рівноваги консольного стержня з абсолютно твердим тілом на вільному кінці за дії стежної та консервативної сил, рис. 78 (параметри  $r_1$ ,  $r_2$  і  $\eta$  мають той самий зміст, що і в задачі (12.32) — (12.34)).

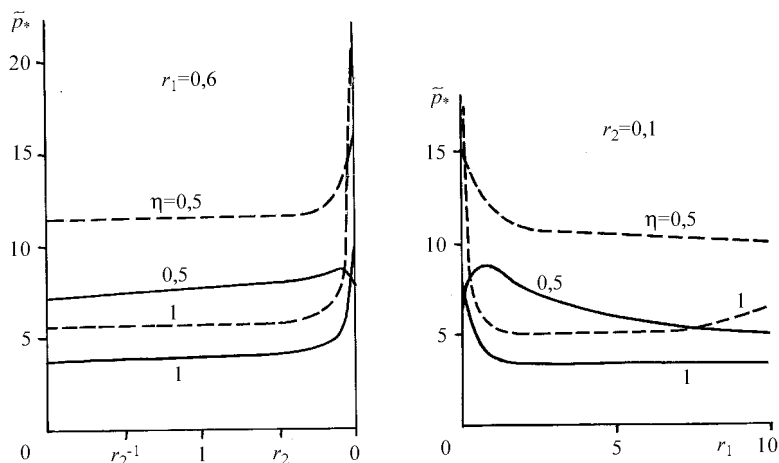


Рисунок 78 Графіки залежностей флатерних критичних значень навантаження від параметрів системи.

Порівнюючи отримані значення  $\tilde{p}_*$  з відповідними критичними значеннями навантаження для ідеально пружної системи (пунктирні лінії), приходимо до висновку, що в'язкість ( $\mu_1$ ) матеріалу стержня позначається на властивостях системи істотним дестабілізуючим впливом. Цілком подібно можна досліджувати і складніші випадки.

## 16.7 Мембрани і пластинки довільної форми в плані

Розглянемо контурно вздовж краю  $\Gamma$  закріплену рівномірно завантажену зусиллями  $P$  (в серединній площині) пластинку довільної форми в плані. Дослідження її малих коливань біля плоскої форми рівноваги зводиться, як відомо, до такої задачі на власні значення

$$\Delta^2 \tilde{u} + p \Delta \tilde{u} - \delta \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}|_{\Gamma} = 0, \quad \Delta \tilde{u}|_{\Gamma} = 0.$$

Тут

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad p = \frac{P}{D}; \quad \delta = \frac{m\omega^2}{D};$$

$p$ ,  $\delta$  — параметри навантаження і частоти відповідно,  $D$  — циліндрична жорсткість пластинки,  $m$  — її маса на одиницю площі,  $\Gamma$  — межа області  $G$ , яка відповідає формі пластинки.

Цій задачі можна поставити у відповідність задачу про коливання мембрани такої самої форми [107], що описується рівняннями

$$\Delta \tilde{u} + \mu^2 \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}|_{\Gamma} = 0. \quad (16.22)$$

При цьому виконується співвідношення

$$\delta = \mu^2(\mu^2 - p).$$

Нехай аналітична в одиничному крузі  $K$  комплексної площини  $z$  функція

$$w = f(z) \quad (w(0) = 0, \quad w'(0) > 0)$$

відображає конформно цей круг на область  $G$  площини  $W$  ( $G$  вважається однозв'язною). Тоді замість (16.22) матимемо таку задачу [24]:

$$\Delta u + \mu^2 |w'|^2 u = 0, \quad u|_{\rho=1} = 0 \quad (\rho = |z|).$$

Її розв'язок шукається у вигляді ряду

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \mu^{2k}.$$

Для визначення невідомих функцій  $u_k$  одержуємо систему рекурентних рівнянь

$$\Delta u_0 = 0, \quad \Delta u_k = -|w'|^2 u_{k-1}.$$

Розв'язок першого рівняння цієї системи запишемо так:

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \rho^n \cos n\varphi + b_n \rho^n \sin n\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n + \bar{z}^n) + \frac{1}{i} (z^n - \bar{z}^n) b_n,$$

де  $a_n, b_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) — довільні сталі. Наступні рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u_k(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{1}{4} |w'|^2 u_{k-1}(z, \bar{z}).$$

Звідси знаходимо

$$u_k(z, \bar{z}) = -\frac{1}{4} \int_0^z \int_0^{\bar{z}} |w'|^2 u_{k-1} dz d\bar{z} + g_k(z, \bar{z}),$$

де  $g_k(z, \bar{z})$  — деякі дійсні гармонічні функції.



Ці функції вибиратимемо для кожного  $k$  так, щоб вирази біля коефіцієнтів  $a_n$  і  $b_n$ , які мають відповідно  $\cos m\varphi$  і  $\sin m\varphi$ , перетворювалися на нуль для значень  $m > n$  на межі круга  $K$  ( $\rho = 1$ ). Такий вибір, як побачимо, дозволить одержати характеристичний визначник трикутного вигляду.

Задовольняючи після цього граничну умову при  $\rho = 1$  і повертаючись до дійсних змінних, одержуємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k C_{ink} \mu^{2k} \cos i\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k S_{ink} \mu^{2k} \sin i\varphi \right\} = 0, \quad (16.23)$$

де  $C_{ink}$  і  $S_{ink}$  — деякі числові коефіцієнти.

Позначивши

$$c_{in} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k C_{ink} \mu^{2k}, \quad s_{in} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k S_{ink} \mu^{2k},$$

із (16.23) матимемо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \cos i\varphi \sum_{n=i}^{\infty} a_n c_{in}(\mu^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \sin i\varphi \sum_{n=i}^{\infty} b_n s_{in}(\mu^2) = 0.$$

Звідси одержуємо такі системи рівнянь:

$$Aa = 0, \quad Bb = 0, \quad (16.24)$$

де

$$A = \{a_{in}\}_{i,n=0}^{\infty}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{для } i > n, \\ c_{in} & \text{для } i \leq n, \end{cases}$$

$$B = \{b_{in}\}_{i,n=0}^{\infty}, \quad b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{для } i > n, \\ s_{in} & \text{для } i \leq n, \end{cases}$$

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_m, \dots), \quad b = (b_0, b_1, \dots, b_m, \dots).$$

Кожна із систем (16.24) має нетривіальні розв'язки, якщо нуль належить спектрів операторів  $A$  або  $B$  відповідно. Тому, враховуючи трикутний вигляд матриць цих операторів, маємо такі рівняння:

$$c_{nn}(\mu^2) = 0, \quad s_{nn}(\mu^2) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Їх ліві частини є характеристичними рядами вигляду (11.2) і зображують у сукупності “характеристичний визначник” задачі (16.22).

Зауважмо, що у випадку  $w = Rz$  (задача для круглої пластинки або мембрани), застосувавши дану схему викладок, одержимо

$$C_n(\mu^2) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_{kn} \mu^{2k} = 0, \quad (16.25)$$

де

$$c_{kn} = \frac{1}{4^k k!(n+1)(n+2)\dots(n+k)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad \mu^2 = \frac{1}{a^2} \omega^2 R^2;$$

де  $i$  і  $a$  — параметри колової частоти та хвильової швидкості відповідно;  $R$  — радіус мембрани. Неважко переконатися, що

$$c_{nn}(\mu^2) = s_{nn}(\mu^2) = \frac{2^n n!}{\mu^n} J_n(\mu) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

де  $J_n(\mu)$  — функції Бесселя першого роду порядку  $n$ , що співпадає з відомим результатом.

Використовуючи найпростіші оцінки, для  $n = 0$  знаходимо:

$$2,3784 < \mu_{01} < 2,8284 < \mu_{02} < 4,3507.$$

Точніші значення можна визначити, застосувавши оцінки (12.3). Результати обчислення цих оцінок для значень  $n = 0, 1, \dots, 10$  наведені в табл. 19.

Розглянемо тепер пружну пластину, для якої

$$w = \tilde{R}z(1 + \beta z); \quad \tilde{R} > 0, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}.$$

У цьому випадку область  $G$  обмежена кривою, яку називають слимаком Паскаля. Застосовуючи наведену вище схему викладок, одержуємо для параметра  $v^2 = \mu^2 \tilde{R}^2$ :

$$C_0(v^2) = 1 - \frac{1}{4}(1 + \beta^2)v^2 + \frac{1}{4^2} \left( \frac{1}{4} + \frac{\beta^4}{4} \right) - \frac{1}{4^3} \left( \frac{1}{36} - \frac{1}{12}\beta^2 + \frac{1}{36}\beta^6 \right) v^6 + \\ + \frac{1}{4^4} \left( \frac{1}{576} - \frac{1}{72}\beta^2 + \frac{5}{72}\beta^4 + \frac{13}{36}\beta^6 + \frac{17}{99}\beta^8 \right) v^8 + \dots,$$

Таблиця 19 Оцінки критичних значень  
частотно-хвильового параметра

$n$	$\mu_{01}$		$\mu_{02}$	
Друге наближення				
0	2,4044	2,4050	5,2060	5,7838
1	3,8277	3,8354	6,4245	7,1904
2	5,1223	5,1541	7,4823	8,4552
3	6,3509	6,4404	8,4088	9,6231
4	7,5363	7,7547	9,1909	10,7176
5	8,6898	9,4752	9,4774	11,7528
Третє наближення				
0	2,4048	2,4048	5,4477	5,8310
1	3,8315	3,8318	6,8615	7,3538
2	5,1345	5,1361	8,1564	8,7578
3	6,3768	6,3821	9,3701	10,0837
4	7,5812	7,5937	10,5214	11,3520
5	8,7587	8,7837	11,6208	12,5749
6	9,9156	9,9603	12,6746	13,7604
7	11,0559	11,1302	13,6858	14,9143
8	12,1826	12,3002	14,6551	16,0405
9	13,2974	13,4780	15,5798	17,1423
10	14,4021	14,6764	16,4514	18,2222
11	15,4978	15,9230	17,2458	19,2822
12	16,5852	17,3568	17,8266	20,3239

$$C_1(v^2) = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \beta^2 \right) v^2 + \frac{1}{4^2} \left( \frac{1}{12} + \frac{v}{18} \beta^2 + \frac{2}{15} \beta^4 \right) v^4 - \\ - \frac{1}{4^3} \left( \frac{1}{144} + \frac{97}{2160} \beta^2 + \frac{11}{180} \beta^4 + \frac{4}{315} \beta^6 \right) v^6 + \\ + \frac{1}{4^4} \left( \frac{1}{2880} + \frac{23}{6480} \beta^2 - \frac{587}{453600} \beta^4 + \frac{3241}{529200} \beta^6 + \frac{2}{2835} \beta^8 \right) v^8 + \dots,$$

$$S_1(v^2) = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \beta^2 \right) v^2 + \frac{1}{4^2} \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{9} \beta^2 + \frac{2}{15} \beta^4 \right) v^4 - \\ - \frac{1}{4^3} \left( \frac{1}{144} + \frac{7}{2160} \beta^2 + \frac{1}{90} \beta^4 + \frac{4}{315} \beta^6 \right) v^6 + \\ + \frac{1}{4^4} \left( \frac{1}{2880} - \frac{1}{1620} \beta^2 + \frac{1859}{30240} \beta^4 - \frac{401}{75600} \beta^6 + \frac{2}{2835} \beta^8 \right) v^8 + \dots$$

(коли  $\beta = 0$ , то ці рівняння збігаються з (16.25)). Основні частоти визначалися за тими самими двобічними оцінками. Результати обчислень наведено в таблиці 20; найменші нулі функцій  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $S_1$ , позначено відповідно через  $v_{01}$ ,  $v_{11}$  і  $\tilde{v}_{11}$ .

Таблиця 20 Оцінки критичних значень частотного параметра

$\beta$	$v_{01}$		$v_{11}$		$\tilde{v}_{11}$	
0	5,7812	5,7843	14,6513	14,7102	14,6513	14,7102
0,1	5,6689	5,6719	14,5162	14,5687	13,8752	13,9016
0,2	5,3663	5,3693	14,0840	14,1170	12,2880	12,2934
0,3	4,9504	4,9535	13,3189	13,3280	10,7129	10,7177
0,4	4,4946	4,4979	12,2623	12,2625	9,3536	9,3639
0,5	4,0473	4,0507	11,0473	11,0593	8,1949	8,2160

Можна з'ясувати, що критичні значення параметра навантаження пластинки зменшуються (у порівнянні з їх значеннями у випадку  $\beta = 0$ ) до 30 %, а основні частоти вільних коливань за “радіальною”, “симетричною” та “антисиметричною” формами — до 30, 25 та 44 % відповідно [39].

## 16.8 Радіальні коливання пружних куль і довгих циліндрів

**Вихідні співвідношення.** Розглянемо ізотропну кулю радіуса  $R$  при вільних радіальних коливаннях. Вважаючи напруження, деформації і переміщення залежними тільки від радіальної змінної  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ ) і часу  $t$ , можна записати рівняння динамічної рівноваги та закон Гука так [108]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (16.26)$$

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) - 4\mu \frac{u}{r}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r}. \quad (16.27)$$

Тут використовуються позначення:  $\lambda = \lambda(r)$  і  $\mu = \mu(r)$  — параметри Ляме;  $\rho = \rho(r)$  — питома маса;  $u = u(r, t)$  — радіальне переміщення.

Використавши заміну

$$V(r, t) = r^2 u(r, t), \quad (16.28)$$

одержимо такі формули:

$$\sigma_r = f(r)V' - 4\mu r^{-3}V, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \lambda r^{-2}V' + 2\mu r^{-3}V; \quad (16.29)$$

$$f(r) = (\lambda + 2\mu)r^{-2}, \quad V' = \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (16.30)$$

Беручи до уваги (16.27) — (16.30), із (16.26) знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial r}(f(r)V') - 4\mu'Vr^{-3} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(Vr^{-2}). \quad (16.31)$$

Це рівняння описує вільні радіальні коливання неоднорідної кулі, параметри якої залежать тільки від змінної  $r$ . Воно доповнюється відповідними граничними умовами:

а) для суцільної кулі

$$u(0, t) < \infty; \quad \sigma_r(R, t) = 0; \quad (16.32)$$

б) для кульового шару

$$\sigma_r(a, t) = 0; \quad \sigma_r(R, t) = 0, \quad (16.33)$$

де  $a$  — внутрішній радіус ( $0 < a < R$ ).

Розглянемо тепер безмежно довгий циліндр радіуса  $R$  у випадку вільних осесиметричних коливань. Замість (16.26 — 16.27) матимемо [108]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \sigma_r &= (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - 2\mu \frac{u}{r}, \quad \sigma_\theta = (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned}$$

Звідси цілком подібно, застосувавши заміну  $V(r, t) = ru(r, t)$ , одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= f(r) - 2\mu Vr^{-2}, \quad \sigma_\theta = \lambda V'r^{-1} + 2\mu Vr^{-2}, \quad f(r) = (\lambda + 2\mu)r^{-1}, \\ V' &= \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial r}(f(r)V') - 2\mu'Vr^{-2} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(Vr^{-1}). \end{aligned} \quad (16.34)$$

Тут параметри  $\lambda$ ,  $\mu$  і  $\rho$  також можуть залежати тільки від змінної  $r$ . Граничні умови для рівняння (16.34) записуються як (16.32) (суцільний циліндр) та (16.33) (циліндричний шар).

**Побудова частотних рівнянь.** Відокремивши змінні в рівнянні (16.31) і умовах (16.32) за допомогою підстановки  $V = y(r)\exp\sqrt{-1}\omega t$ , дійдемо до такої задачі:

$$(f'y')' + v(r)y = 0, \quad (16.35)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} y(r)r^{-2} < \infty; \quad (f'y' + ey)|_{r=R} = 0. \quad (16.36)$$

Тут  $v(r) = \omega^2 \rho(r)r^{-2} - 4\mu'(r)r^{-3}$ ,  $e = -4\mu(R)R^{-3}$ .

Розглянемо випадок, коли параметри Ляме є сталими ( $\lambda = \lambda_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ), при цьому  $\rho = \rho_0 g(r)$ . Для побудови обмеженого розв'язку рівняння (16.35) у вигляді ряду

$$y = y_0 - A^2 y_1 + A^4 y_2 - \dots, \quad A^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{\lambda_0 + 2\mu_0}$$

маємо, відповідно до (5.55) — (5.57), такі формули:

$$y_k = \int_0^r K_0(r, t) \frac{g(t)}{t^2} y_{k-1}(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$K_0(r, \alpha) = \frac{1}{3} (r^3 - \alpha^3), \quad y_0 = \frac{1}{3} r^3. \quad (16.37)$$

Застосувавши їх для однорідної кулі ( $g(t) \equiv 1$ ), одержимо:

$$y = \frac{1}{3} r^3 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j A^{2j} r^{2j} c_j \quad (c_0 = 1, \quad c_j = \frac{c_{j-1}}{2j(2j+3)}, \quad j = 1, 2, \dots). \quad (16.38)$$

Сума ряду (16.38) визначається за формулою

$$y = A^{-3} (\sin Ar - Ar \cos Ar).$$

Неважко переконатися, що цей розв'язок задовольняє першу умову (16.36).

Враховуючи відомі залежності

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+v)},$$

знаходимо

$$\lambda + 2\mu = E\varphi(v), \quad \varphi(v) = \frac{1-v}{(1+v)(1-2v)}.$$

Підставивши ряд (16.38) в другу умову (16.36), одержимо частотне рівняння задачі

$$a_0 - a_1 \Omega^2 + a_2 \Omega^4 - \dots = 0, \quad (16.39)$$

де

$$a_i = \frac{i+1}{(2i+3)!} [2i+1 - v(2i-1)] \quad (i = 0, 1, 2, \dots); \quad (16.40)$$

$$\Omega^2 = \frac{\rho \omega^2 R^2}{E} (1+v) q(v), \quad q(v) = \frac{1-2v}{1-v}. \quad (16.41)$$

Виходячи із (16.34), цілком подібно будуюмо частотне рівняння вигляду (16.39) для однорідного циліндра. Коефіцієнти цього рівняння визначаються за формулами

$$a_i = c_i(2i + 1 - 2iv); c_i = c_{i-1} \frac{1}{4i(i+1)} \quad c_0 = 1; i = 1, 2, 3, \dots (16.42)$$

Кожному розв'язкові  $\Omega_j^2(v)$  рівняння (16.39) відповідає власна частота

$$\omega_j^2 = \frac{\Omega_j^2(v)}{(1+v)q(v)} \frac{E}{\rho R^2} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (16.43)$$

Як бачимо, власні частоти однорідних куль і довгих циліндрів суттєво залежать від коефіцієнта Пуасона  $\nu$  (очевидно, і від параметрів  $E$ ,  $\rho$  та  $R$ ). Із співвідношень (16.43) і (16.41) випливає, зокрема, що всі частоти необмежено збільшуються, коли  $\nu \rightarrow 0,5$ .

**Обчислення нижчих частот.** Для визначення основної частоти  $\omega_1^2$  досить застосувати формулу (16.43) і найпростішу нижню оцінку (12.7) (вона відрізняється від точних значень, як засвідчують обчислення, приблизно на 2...2,5 %). Результати підрахунків наведені в табл. 21, а. Зауважимо, що у випадку кулі найпростішої верхньої оцінки не існує, якщо  $\nu > 0,246$  (оскільки  $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$ ). Застосувавши оцінки (12.3), знайдемо більш точні значення (табл. 21, б). Вони узгоджуються з відомими [109, 110], знайденими з такого рівняння:

$$z^{-1} \operatorname{tg} z = \left( 1 - \frac{1}{4} z^2 \left( 2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \right)^{-1} \quad (z = \Omega^2)$$

$$(\Omega_1^2 = (0,816\pi)^2 = 6,5717 \text{ і } \Omega_1^2 = (2,788)^2 = 7,7729).$$

Маючи співвідношення (16.40) — (16.43), можна застосовувати формули (12.3) і оцінювати й наступні частоти (їх можна визначати також, обчислюючи на ЕОМ корені відповідного рівняння (16.39)).

Очевидно, цілком подібно можна будувати частотні рівняння та знаходити частоти в складніших випадках. Якщо, наприклад, густина змінюється за законом Роша

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \chi \frac{r^2}{R^2} \right),$$

або складнішими законами Гельмерта, Лежандра тощо [109], то відповідні характеристичні ряди можна одержати, використавши ті самі формули (16.37).

Таблиця 21 Оцінки основної частоти

а

v	q(v)	Куля				Циліндр			
		$\Omega_-^2$	$\Omega_+^2$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$	$\Omega_-^2$	$\Omega_+^2$	$\omega_-^2$	$\omega_+^2$
0	1	4,29	4,58	4,29	4,58	3,36	3,53	3,36	3,53
1/4	2/3	6,44	—	7,73	—	4,23	4,63	5,08	5,56
0,353	0,454	7,57	—	12,32	—	4,72	5,36	7,68	8,73
0,49	0,039	9,34	—	160,73	—	5,58	7,32	96,02	125,97

б

Куля		
v	$\Omega_-^2$	$\Omega_+^2$
0,25	6,57	6,57
0,353	7,75	7,76

Оцінки власних частот для кулі, визначені вище, можна застосовувати також до задачі про радіальні коливання, коли враховується потенціал сил ньютонівського притягання. В цьому випадку, як відомо [109], функцію  $v(r)$  у рівнянні (16.35) потрібно замінити на

$$\tilde{v}(r) = v(r) + 4 \frac{\rho(r)}{r^3} g_0(r).$$

Тут  $g_0(r)$  — прискорення сили тяжіння в незбуреній Землі. Воно визначається з рівняння

$$\frac{dg_0}{dr} + \frac{2}{r} g_0 = 4\pi \tilde{f} \rho(r),$$

де  $\tilde{f}$  — гравітаційна стала. То ж при  $\rho = \text{const}$  матимемо:  $g_0 = \frac{4}{3} \pi f \rho r$ .

Тому частоти  $\tilde{\omega}_j^2$  однорідної кулі визначаються тут за формулою

$$\tilde{\omega}_j^2 = \omega_j^2 - \frac{16}{3} \pi \tilde{f} \rho \quad (j=1, 2, \dots).$$

Звідси впливає умова стійкості

$$\omega_1^2 > \frac{16}{3} \pi \tilde{f} \rho, \quad (16.44)$$

де  $\omega_1^2$  визначене співвідношенням (16.43).



Викладений тут спосіб визначення частотних параметрів і виведення нерівностей-ознак стійкості вигляду (16.44) неважко поширити на відповідні задачі, що стосуються неоднорідних куль і циліндрів зі східчасто-змінними параметрами.

**Одна задача для ортотропних моделей пружних куль і довгих циліндрів.** Вважаючи пружні характеристики  $c_{ij}$  матеріалу пружних куль і довгих циліндрів залежними від радіальної змінної  $r$  ( $c_{ij} = c_{ij}(r)$ ), і діючи відповідно до окресленого на початку цього підрозділу (див. **Вихідні співвідношення.**), отримаємо таке рівняння:

$$\left( r^{-k} c_{11}(r) y' \right)' + v_k(r) y = 0, \quad (16.45)$$

де

$$v_k = r^{-k} \left\{ \rho \omega^2 - k(c_{11} - c_{12})' \frac{1}{r} + [c_{11} - c_{12} + (k-1)(c_{12} - c_{23})] \frac{1}{r^2} \right\}.$$

Тут  $k=1$  відповідає циліндрові, а  $k=2$  — кулі. Крім цього, для кулі вимагається виконання тотожностей [111]

$$c_{12}(r) \equiv c_{13}(r), \quad c_{22}(r) \equiv c_{23}(r).$$

Зазначимо, що амплітудне значення, наприклад, величини  $\sigma_r$  визначається за формулою

$$\tilde{\sigma}_r = c_{11} \left( y r^{-k} \right)' + [c_{12} + (k-1) c_{13}] y r^{-(k+1)}. \quad (16.46)$$

Подібні формули неважко записати також і для інших компонент тензорів напружень та деформацій. Завдяки цьому можна застосовувати метод характеристичних рядів до задач вигляду (16.31) — (16.33) про динамічну поведінку ортотропних пружних куль і довгих циліндрів та визначати їх напружено-деформований стан (для будь-яких допустимих функцій  $c_{ij} = c_{ij}(r)$  та  $\rho = \rho(r)$ , і зокрема, тоді, коли вони є сталими в деякому околі точки  $r=0$ ).

Для ізотропних матеріалів, як відомо,

$$c_{11} = c_{22} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} = \lambda;$$

тоді із (16.45) і (16.46), чого і слід було сподіватись, одержуємо відповідні співвідношення, отримані на початку цього підрозділу (див. **Вихідні співвідношення.**).

### 17.1 Еквівалентні перетворення задач

Йдеться про деяку пружну систему, що знаходиться під впливом заданих навантажень  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Ці навантаження можуть мати консервативні й неконсервативні складові, що змінюються монотонно в деякій області можливих станів системи. Система вважається такою, що має в цій області певний стан рівноваги (незбурену форму) при  $p_i = 0$  ( $i = \overline{1, k}$ ).

Нехай дослідження слабо збурених форм руху системи (малих її коливань) в околі незбуреної форми (стану рівноваги) можна звести до аналізу розв'язків змішаної задачі [22, 112]:

$$L[u(x, t)] + g(x) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F \left( t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} \right),$$

$$V_{i0}[u(x, t)]|_{x=0} = 0, \quad V_{i1}[u(x, t)]|_{x=1} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (17.1)$$

де  $L$  — лінійний диференційний вираз порядку  $2n$  за змінною  $x$ ;  $u(x, t)$  — відхилення системи від рівноважного стану (в стані рівноваги  $u \equiv 0$ );  $g(x) > 0$  — функція розподілу маси в системі;  $b \geq 0$  — сталий коефіцієнт тертя;  $F(\cdot)$  — деяка неперервна функція, що нелінійно залежить від своїх аргументів і стає нулем при  $u \equiv 0$ ;  $V_{i0}, V_{i1}$  — лінійні однорідні форми щодо функції  $u = u(x, t)$  та її похідних за  $x$  до порядку  $2n - 1$  включно;  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  — деякі задані функції. Коефіцієнти диференційного виразу і лінійних форм, що фігурують в задачі (17.1), вважаються в загальному випадку неперервно залежними від змінної  $x$  і параметрів  $p_i$  прикладеного до системи навантаження.

Збурення  $u(x, t)$  вважаються належними множині  $U$  дійсних неперервних за сукупністю своїх аргументів функцій з нормою

$$\|u\| = \left( \int_0^1 g(x) |u(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

таких що задовольняють крайові умови задачі (17.1) і мають неперервні похідні до порядку  $2n$  за змінною  $x$  (координатою) та до другого порядку за змінною  $t$  (часом,  $t \in [0, T]$ ). Характеристиками близькості збуреного  $u = u(x, t)$  і незбуреного  $u(x, t) \equiv 0$  (для якого  $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ ) розв'язків пересічно вважають норму функції  $u(x, t)$  і норму її похідної за змінною  $t$ .

Задачі (17.1) поставимо у відповідність задачу на власні значення

$$\begin{aligned} L[y(x)] - \omega^2 g(x)y(x) &= 0, \\ V_{i0}[y(x)]|_{x=0} &= 0, \quad V_{i1}[y(x)]|_{x=1} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (17.2)$$

В загальному випадку вона належить до багатопараметричних несамоспряжених задач, теорія яких опрацьована далеко не вичерпно. Проте в однопараметричному випадку (параметри  $p_i$  відсутні) відома низка загальних положень щодо існування власних значень, їх дійсності, кратності, розподілу, щодо структури множини власних векторів тощо. Зокрема послідовності власних функцій  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  і  $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  цієї і спряженої до неї задач утворюють біортогональну систему функцій з вагою  $g(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), а кожна з послідовностей окремо — базис Рісса в просторі  $L_g^2(0, 1)$ . Під базисом Рісса в  $L^2(0, 1)$  розуміють, як відомо [113], повну в цьому просторі послідовність функцій  $y_1(x), y_2(x), \dots$  таку, що для кожної функції  $f \in L^2(0, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f(x) \overline{y_n(x)} dx \right|^2 < \infty,$$

і для кожної послідовності чисел  $c_1, c_2, \dots$ , для якої

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2 + \dots < \infty,$$

існує така  $f \in L^2(0, 1)$ , що

$$\int_0^1 f(x) \overline{y_n(x)} dx = c_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Якщо деяка послідовність  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  — базис Рісса, то існує послідовність  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ , що утворює разом з першою біортогональну систему функцій і також є базисом Рісса. При цьому для кожної  $f \in L^2(0, 1)$  можливе розгортання

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x), \quad f_n = (f, \psi_n),$$

а також двобічна оцінка (узагальнення відомої нерівності Парсеваля)

$$m \int_0^1 |f|^2 dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \leq M \int_0^1 |f|^2 dx, \quad (17.3)$$

де  $m, M$  — абсолютні константи.

Зауважимо, що при кожному фіксованому значенні  $t \in [0, T]$  для множини  $U$  (що виокремлює клас розглядуваних збурень) справджується включення  $U \subset L_g^2(0, 1)$ . Наведені загальні теоретичні положення будуть використані в подальшому з урахуванням, звичайно, особливостей досліджуваних пружних систем.

Нехай  $\Delta(\omega^2, p)$  ( $p = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ ) — характеристичний визначник задачі (17.2). Зауважимо, що у випадку  $p_i = 0$  ( $i = \overline{1, k}$ ) всі корені рівняння  $\Delta(\omega^2, p) = 0$  (частоти  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2, \dots$  власних коливань відповідної незавантаженої пружної системи) є додатними з єдиною точкою скупчення на нескінченності; вважатимемо їх простими. Зазначені властивості коренів унаслідок аналітичної залежності їх від параметрів зберігатимуться і для  $p \neq 0$ , аж доки  $p$  не досягнуть деяких критичних значень  $p^*$ . Отже існує деяка мінімальна область  $Q$ , яка містить точку  $p = 0$  і в рамках якої всі власні значення задачі (17.2) — додатні і прості. Далі без зменшення загальності вважатимемо, що визначальним для системи є лише один параметр навантаження  $p \geq 0$ . Тоді існує півінтервал  $I = [0, p^*)$ , такий що для  $p \in I$  справджуються нерівності

$$0 < \omega_1^2(p) < \omega_2^2(p) < \dots < \omega_n^2(p) < \dots \quad (17.4)$$

При  $p = p^* + \nu$ , де  $\nu$  — належно мале додатне число, ситуація змінюється істотно таким чином:  $1^0$  Які-небудь два сусідні корені (найчастіше  $\omega_1^2(p)$  і  $\omega_2^2(p)$ ) характеристичного визначника задачі (17.2), що збігаються при  $p = p^*$  (на границі  $I = [0, p^*)$ ), стають при  $p = p^* + \nu$  (недалеко поза  $I$ )

комплексно-спряженими (визначуваними як  $\alpha^2(p) \pm i\beta(p)$ ) — автоколивна втрата стійкості;  $2^0$  Перший корінь  $\omega_1^2(p)$ , що перетворюється на нуль при  $p = p^*$  ( $\omega_1^2(p^*) = 0$ ), стає від'ємним при  $p = p^* + \nu$  — втрата стійкості за Ойлером.

Доведення теорем про існування та єдиність розв'язку, як і теорем про стійкість-нестійкість за першим наближенням нульового розв'язку задачі (17.1), ґрунтується на зведенні цієї задачі до деякої еквівалентної задачі Коші для зліченної системи нелінійних диференціальних рівнянь з використанням нерівностей (17.4) і урахуванням можливих видів їх порушення ( $1^0$  чи  $2^0$ ).

Розглянемо спочатку випадок, коли  $p \in I$ . Очевидно, що при кожному фіксованому  $t \in [0, T]$ , де  $T$  — довільне додатне число, розв'язок  $u(x, t)$  задачі (17.1) задовольняє граничні умови задачі (17.2).

Відомим є таке твердження [113]. Нехай  $L$  — породжений регулярними крайовими умовами диференціальний оператор, всі власні значення якого — прості нулі відповідного характеристичного визначника. Тоді кожна функція  $f$  з області визначення цього оператора розгортається у рівномірно збіжний ряд за його (оператора) власними функціями:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x),$$

де

$$f_n = \int_0^1 g(x) f(x) \overline{z_n(x)} dx;$$

$y_n(x)$  і  $z_n(x)$  — власні функції основного  $L$  і спряженого до нього операторів, які відповідають власним числам  $\lambda_n$  і  $\bar{\lambda}_n$ .

Отже за цією теоремою, розв'язок  $u(x, t)$  задачі (17.1) можна подати у вигляді рівномірно збіжного ряду за власними функціями задачі (17.2):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) y_n(x), \quad (17.5)$$

де  $x_n(t)$  — функції, що підлягають визначенню.

Діючи поки що формально, підставимо ряд (17.5) в рівняння (17.1). Беручи до уваги те, що власним функціям задачі (17.2) відповідають власні числа (17.4), матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d^2 x_n}{dt^2} + 2b \frac{dx_n}{dt} + \omega_n^2 x_n \right] g(x) y_n(x) = F.$$

Перемножуючи останню рівність кожен раз на деяку власну функцію  $z_j(x)$  спряженої до (17.2) задачі і далі інтегруючи результат за  $x$  від 0 до 1 з урахуванням властивості біортогональності відповідних власних функцій та умов їх нормування

$$\int_0^1 g(x) y_n(x) z_n(x) dx = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17.6)$$

прийдемо загалом до такої зліченної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} + 2b \frac{dx_j}{dt} + \omega_j^2 x_j = \int_0^1 F z_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (17.7)$$

Побудуємо для цієї системи відповідні початкові умови. Функція (17.5) формально задовольняє рівняння і крайові умови (17.1). Оскільки  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x) \in L_q^2(0, 1)$ , то для них можливими є розгортки (до того ж єдині) за власними функціями задачі (17.2) у рівномірно збіжні ряди. Враховуючи зазначене і те, що

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \psi(x),$$

знайдемо відповідні початкові умови:

$$x_j(0) = \varphi_j, \quad \frac{dx_j}{dt}(0) = \psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (17.8)$$

де  $\varphi_j$  і  $\psi_j$  — коефіцієнти рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n y_n(x) = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n y_n(x) = \psi(x). \quad (17.9)$$

Таким чином, при  $p \in I$  розв'язування задачі (17.1) зводиться до розв'язування задачі (17.7) — (17.8).

Нехай тепер  $p = p^* + v \notin I$  і справджується відзначений раніше випадок 1<sup>0</sup>. Вважатимемо спочатку, що  $\omega_1^2(p^*) = \omega_2^2(p^*)$ , а при  $p = p^* + v$

$$\omega_1^2(p^*) = \alpha^2(p) + i\beta(p), \quad \omega_2^2(p) = \overline{\omega_1^2(p)}.$$

Тоді відповідні власні функції пов'язані рівністю  $y_2(x) = \overline{y_1(x)}$  і тому (17.5) можна подати у вигляді:

$$u(x, t) = x_1(t) y_1(x) + \overline{x_1(t) y_1(x)} + \sum_{n=3}^{\infty} x_n(t) y_n(x). \quad (17.10)$$

Діючи аналогічно, як при  $p \in I$ , замість (17.7) отримаємо систему

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2b \frac{dx_1}{dt} + (\alpha^2 + i\beta)x_1 &= \int_0^1 F \overline{z_1(x)} dx, \\ \frac{d^2 x_j}{dt^2} + 2b \frac{dx_j}{dt} + \omega_j^2 x_j &= \int_0^1 F z_j(x) dx, \quad j = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (17.11)$$

Позначаючи

$$x_1 = x_{11} + ix_{12}, \quad y_1 = y_{11} + iy_{12}, \quad z_1 = z_{11} + iz_{12},$$

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + i\varphi_{12}, \quad \psi_1 = \psi_{11} + i\psi_{12},$$

і відокремлюючи дійсну та уявну частини в першому з рівнянь (17.11) і в перших умовах (17.8), прийдемо до такої задачі зі зліченною системою диференціальних рівнянь (на дійсні функції):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_{11}}{dt^2} + 2b \frac{dx_{11}}{dt} + \alpha^2 x_{11} - \beta x_{12} &= \int_0^1 F z_{11}(x) dx, \\ \frac{d^2 x_{12}}{dt^2} + 2b \frac{dx_{12}}{dt} + \beta x_{11} + \alpha^2 x_{12} &= -\int_0^1 F z_{12}(x) dx, \\ \frac{d^2 x_j}{dt^2} + 2b \frac{dx_j}{dt} + \omega_j^2 x_j &= \int_0^1 F z_j(x) dx, \quad j = 3, 4, \dots \\ x_{11}(0) = \varphi_{11}, \quad x_{12}(0) = \varphi_{12}, \quad \left. \frac{dx_{11}}{dt} \right|_{t=0} &= \psi_{11}, \quad \left. \frac{dx_{12}}{dt} \right|_{t=0} = \psi_{12}, \\ x_j(0) = \varphi_j, \quad \left. \frac{dx_j}{dt} \right|_{t=0} &= \psi_j, \quad j = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (17.12)$$

То ж в даному випадку розв'язування задачі (17.1) зводиться до розв'язування задачі (17.12). Незавжно зауважити, що подібне зведення можливе і тоді, коли  $\omega_k^2(p^*) = \omega_{k+1}^2(p^*)$ , ( $k = 2, 3, \dots$ ). Якщо ж  $p = p^* + v$  і справджується випадок  $2^0$  (ойлерова втрата стійкості), то в рівняннях (17.12) слід вважати, що  $\alpha^2(p) < 0$ ,  $\beta(p) = 0$ .

Таким чином дослідження окресленої системи з розосередженими параметрами при  $p \in I$  або  $p = p^* + v$  зводиться до дослідження системи зі зліченною кількістю ступенів вільності.

## 17.2 Теорема про існування та єдиність розв'язку

Припустимо, що  $p \in I$ ,  $t \in [0, T]$  (нагадаємо,  $T$  — довільне додатне число). Тоді, відповідно до викладеного раніше, змішана задача (17.1) еквівалентна задачі (17.7) — (17.8), що безпосередньо зводиться до системи інтегральних рівнянь

$$x_j(t) = q_j(t) + \int_0^t e^{-b(t-\theta)} \frac{\sin \beta_j(t-\theta)}{\beta_j} \left\{ \int_0^1 F z_j(x) dx \right\} d\theta, \quad (17.13)$$

де

$$q_j(t) = e^{-bt} \left[ \varphi_j \cos \beta_j t + \frac{1}{\beta_j} (\psi_j + b\varphi_j) \sin \beta_j t \right], \quad \beta_j = \sqrt{\omega_j^2 - b_j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тут вважається, що дотримується нерівність  $b \leq \omega_1^2(p)$ . Проте, як буде видно з подальшого, це не суттєво; якщо зазначена нерівність не справджується, то в рівняннях (17.13) слід замінити відповідні ( $j = 1, 2, \dots, k$  при  $\omega_{k-1}^2 \leq b \leq \omega_k^2$ ) тригонометричні функції на гіперболічні.

Позначимо через  $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots\}$  множину неперервних у проміжку  $[0, T]$  вектор-функцій, значеннями яких є вектори з простору  $l_2$ , причому

$$\|X(t)\|^* = (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t) + \dots)^{1/2}.$$

Тоді систему рівнянь (17.13) можна записати у більш компактному вигляді

$$X(t) = Q(t) + \int_0^t S(t, \theta) \left\{ \int_0^1 F[\theta, Y(x)X(\theta), \dots] Z(x) dx \right\} d\theta. \quad (17.14)$$

Тут  $X(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $Z(x)$  — вектор-стовпці, складені з функцій  $x_j(t)$ ,  $q_j(t)$ ,  $z_j(t)$ ;  $Y(x)$  — вектор-рядок з функцій  $y_j(x)$ ;

$$S(t, \theta) = \exp[-b(t-\theta)] A(t, \theta),$$

$$A(t, \theta) = \begin{bmatrix} \beta_1^{-1} \sin \beta_1(t-\theta) & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \beta_2^{-1} \sin \beta_2(t-\theta) & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_n^{-1} \sin \beta_n(t-\theta) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$



Надалі вважатимемо, що нелінійна функція  $F$  та початкові функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  задачі (17.1) задовольняють умови:

а)

$$\|F_1 - F_2\| \leq G(t) \|u_1 - u_2\|^{1+q} \quad \forall u_1, u_2 \in U,$$

де  $F_i = F(u_i)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $G(t)$  — деяка неперервна додатна функція, характеристичне число якої задовольняє умову  $\gamma^* \leq -b$ ;  $q > 0$  — деяка стала;

б) функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  можна розгорнути за власними функціями  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  задачі (17.2) у регулярно збіжні ряди (беручи до уваги рівномірну збіжність рядів (17.9), достатно вимагати їх абсолютної збіжності); коефіцієнти цих рядів належні до деякої компактної множини простору  $l_2$ ; регулярно збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \varphi_n y_n(x) \quad (\varphi_n = (\varphi, z_n)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \psi_n y_n(x) \quad (\psi_n = (\psi, z_n)),$$

де  $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — послідовність власних функцій спряженої до (17.1) задачі.

Задля стислості множину початкових функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$ , що задовольняють всі висловлювання умови б), позначатимемо надалі через  $\Phi$ . Зауважимо, що за відомим критерієм компактності [114] виконання перших двох висловлювань умови б) забезпечує належність початкових збурень  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  до деякої компактної множини  $\tilde{\Phi}$  простору  $L_q^2(0, 1)$ .

Для доведення існування і єдиності розв'язку рівняння (17.14) вдамося до принципу стиснутих відображень (див., наприклад, [115]). Умови його застосовності виявляються дотриманими завдяки нерівностям виду (17.3), а також умовам а) і б).

Виконання нерівностей (17.3) тісно пов'язане з такою теоремою [116, 117]: якщо оператор  $L$ , породжений регулярними крайовими умовами, причому у випадку парного їх порядку крайові умови посилено регулярні, то власні і приєднані функції цього оператора утворюють базис Рісса у просторі  $L^2(0, 1)$ .

Оскільки в задачі (17.2) крайовими є умови типу Штурма, а порядок відповідного диференційного оператора — парний, то вимоги посиленої регулярності виконуються напевне [113]. При  $g(x) \neq 1$  і  $g(x) > 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) для власних значень та власних функцій задачі (17.2) існують асимптотичні формули [113], необхідні для поширення на цей випадок попередньої теореми, так що відповідне її узагальнення не викликає принципових труднощів. При цьому приходимо до таких нерівностей виду (17.3):

$$m \int_0^1 g(x) |f|^2 dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \leq M \int_0^1 g(x) |f|^2 dx.$$

Звідси для коефіцієнтів  $x_n(t)$  рядів (17.5) і (17.10) маємо двобічну оцінку

$$m \|u\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|^2 \leq M \|u\|^2. \quad (17.15)$$

Позначимо тепер через  $C_T$  множину неперервних вектор-функцій  $X(t)$  на проміжку  $[0, T]$  зі значеннями в деякій компактній множині простору  $l_2$  [118]. Існує число  $R > 0$  таке, що  $\|X(t)\|^* < R$  і для будь-якого  $\varepsilon > 0$  можна вказати ціле число  $n_\varepsilon > 0$  таке, щоб для всіх  $X(t) \in C_T$  і  $t \in [0, T]$

дотримувалась нерівність  $\left[ \sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} |x_i(t)|^2 \right] \leq \varepsilon$ . У цій множині функцій визна-

чимо оператор  $K$  правою частиною рівняння (17.14). Покажемо спочатку, що при виконанні умови а) на нелінійність  $F$  і перших двох висловлювань умови б) на початкові збудження  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  існує включення  $KC_T \subset C_T$ , а відтак, що оператор  $K$  є оператором стискування.

З (17.14) маємо:

$$\|KX(t)\|^* \leq \|Q(t)\|^* + \int_0^t \|S(t, \theta)\|^* \left\| \int_0^1 F Z(x) dx \right\|^* d\theta. \quad (17.16)$$

Оцінимо згори кожену норму в правій частині цієї нерівності. З (17.13) знаходимо, що

$$|q_j(t)|^2 \leq 2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{\beta_j} \right)^2 |\varphi_j|^2 + \frac{b^2}{\beta_j^2} |\psi_j|^2 \right] \leq 2c^2 (|\varphi_j|^2 + |\psi_j|^2), \quad (17.17)$$

де

$$c^2 = \max \left\{ \left( 1 + \frac{1}{\beta_1} \right)^2, \frac{b^2}{\beta_1^2} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тому

$$\|Q\|^* \leq \sqrt{2} cN, \quad (17.18)$$

причому

$$N = \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (|\varphi_j|^2 + |\psi_j|^2) \right]^{1/2}.$$

Далі отримуємо:

$$\|S(t, \theta)\|^* = e^{-b(t-\theta)} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_j(t-\theta)}{\beta_j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_j^2} \right)^{\frac{1}{2}} = k. \quad (17.19)$$

Враховуючи умову а) та застосовуючи оцінку (17.15), матимемо:

$$\left| \int_0^1 F[\theta, Y(x)X(\theta), Y'(x)X(\theta), \dots] z_j(x) dx \right|^2 \leq k_1^2 G^2(\theta) \|X(\theta)\|^{*2(1+q)} \int_0^1 g(x) z_j^2(x) dx, \quad (17.20)$$

де

$$k_1^2 = \left( m^{1+q} \min_{0 \leq x \leq 1} g(x) \right)^{-1}.$$

Власні функції  $\{y_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$  і  $\{z_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$  визначаються, як відомо, з точністю до довільних сталих:  $y_j(x) = d_j \xi_j(x)$ ,  $z_j(x) = c_j r_j(x)$ . Вибираючи ці сталі так, щоби дотримувалась умова нормування (17.6), матимемо:

$$c_j = \left[ d_j \int_0^1 g(x) r_j(x) \xi_j(x) dx \right]^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тоді

$$\int_0^1 g(x) z_j^2(x) dx = c_j^2 \int_0^1 g(x) r_j^2(x) dx = \int_0^1 g(x) r_j^2(x) dx \left( d_j \int_0^1 g(x) r_j(x) \xi_j(x) dx \right)^{-2}.$$

Виберемо сталу  $d_j^2$  такою:

$$d_j^2 = \frac{\int_0^1 g(x) r_j^2(x) dx}{2c^2 \left[ |\varphi_j|^2 + |\psi_j|^2 \right] \left( \int_0^1 g(x) r_j(x) \xi_j(x) dx \right)^2}.$$

В такому разі

$$\int_0^1 g(x) z_j^2(x) dx = 2c^2 \left( |\varphi_j|^2 + |\psi_j|^2 \right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (17.21)$$

Це дозволяє замість (17.20) записати нерівність

$$\left| \int_0^1 F[\theta, Y(x)X(\theta), Y'(x)X(\theta), \dots] z_j(x) dx \right|^2 \leq \\ \leq 2k_1^2 c^2 G^2(\theta) \|X(\theta)\|^{*2(1+q)} \left( |\varphi_j|^2 + |\psi_j|^2 \right).$$

Звідси отримуємо:

$$\left\| \int_0^1 F[\theta, Y(x)X(\theta), Y'(x)X(\theta), \dots] Z(x) dx \right\|^{*} \leq \sqrt{2} k_1 c G(\theta) N \|X(\theta)\|^{*1+q}. \quad (17.22)$$

На підставі оцінок (17.18), (17.19) і (17.22) замість (17.16) знайдемо:

$$\|KX(t)\|^{*} \leq \sqrt{2} c N \left[ 1 + k k_1 \int_0^t G(\theta) \|X(\theta)\|^{*1+q} d\theta \right].$$

З цієї нерівності для всіх  $t \in [0, T]$ ,  $X(t) \in C_T$  матимемо:

$$\|KX(t)\|^{*} \leq \sqrt{2} c \left( 1 + BR^{1+q} \right) N, \quad (17.23)$$

де  $B = k k_1 k_2 T$ ;  $k_2 = \max_{0 \leq \theta \leq T} G(\theta)$ .

Вимагатимемо дотримання нерівності

$$N = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \left( |\varphi_j|^2 + |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \frac{R}{\sqrt{2} c \left( 1 + BR^{1+q} \right)}. \quad (17.24)$$

При цьому з (17.23) випливає, що

$$\|KX(t)\|^{*} \leq R \quad (17.25)$$

З (17.17) видно, що  $c > 0$ ; то ж із (17.24) випливає нерівність

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} \left( |\varphi_j|^2 + |\psi_j|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} < R. \quad (17.26)$$

Якщо, до того ж, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує таке ціле число  $n_\varepsilon > 0$ , що

$$\left( \sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} \left( |\varphi_j|^2 + |\psi_j|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \quad (17.27)$$

то на підставі (17.23) і оцінки (17.25) отримаємо включення  $K C_T \subset C_T$  (для фіксованих початкових функцій, що задовольняють (17.26), нерівність (17.27), очевидно, завжди справджується; проте тут йдеться про множину початкових умов, що задовольняють нерівності (17.26) — (17.27)). Зауважимо, що дотримання нерівностей (17.26) — (17.27) впливає з перших двох висловлювань б).

Розгляд простору  $C_\tau$  ( $0 \leq \tau \leq T$ ) з нормою  $\|X\|_\tau = \max_{0 \leq t \leq \tau} \|X(t)\|$  дозволяє з'ясувати, що в ньому  $K$  є оператором стискування. Схема доведення є аналогічною до відомих (див., наприклад, [115]). Справді, якщо вектор-функції  $X(t)$  і  $\tilde{X}(t)$  належні до простору  $C_\tau$ , то

$$\|KX(t) - K\tilde{X}(t)\|_\tau \leq \int_0^\tau \|S(\tau, \theta)\|_\tau \left\| \int_0^1 [F_1 - F_2] Z(x) dx \right\| d\theta \quad (17.28)$$

де  $F_1 = F[\theta, Y(x)X(\theta), Y'(x)X(\theta), \dots]$ ,  $F_2 = F[\theta, Y(x)\tilde{X}(\theta), Y'(x)\tilde{X}(\theta), \dots]$ .

Діючи аналогічно, як при побудові оцінки (17.22), знаходимо:

$$\left\| \int_0^1 [F_1 - F_2] Z(x) dx \right\|_\tau \leq \sqrt{2} c k_1 k_2 (2R)^q N \|X - \tilde{X}\|_\tau.$$

Тепер, враховуючи (17.19) і (17.26), з (17.28) отримаємо:

$$\|KX(t) - K\tilde{X}(t)\|_\tau \leq k_0 \tau \|X(t) - \tilde{X}(t)\|_\tau,$$

де  $k_0 = 2^{q+1/2} c k_1 k_2 R^{1+q}$ . Таким чином, при  $k_0 \tau < 1$  оператор  $K$  є стискувальним і, отже, рівняння (17.14) має єдиний розв'язок  $X(t) \in C_\tau$ , де  $\tau < 1/k_0$ .

Неважко з'ясувати, що фактично розв'язок існує на всьому проміжку  $[0, T]$ . Для цього, як звичайно, можна знову використати теорему про нерухому точку, вводячи в  $C_T$  спеціальну норму  $\|X\|_* = \max_{0 \leq t \leq T} e^{-k_* t} \|X(t)\|$ ;  $X(t) \in C_T$ ,

$k_* > 0$ . Очевидно, що  $e^{-k_* T} \|X\|_T \leq \|X\|_* \leq \|X\|_T$  ( $X(t) \in C_T$ ), тобто норми  $\|X\|_*$  і  $\|X\|_T$  є еквівалентними [115]. При цьому

$$\|KX - K\tilde{X}\|_* \leq \frac{k_0}{k_*} (1 - e^{-k_* T}) \|X - \tilde{X}\|_*.$$

Покладаючи тут  $k_* = k_0$ , переконуємося, що  $K$  є оператором стискування зі сталою  $1 - e^{-k_0 T} < 1$ , так що існування та єдиність розв'язку на всьому проміжку є з'ясованою.

З наведених міркувань випливає висновок: якщо дотримується умова а) і  $\varphi(x), \psi(x) \in \Phi$ , то існує єдиний розв'язок  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots\}$  задачі (17.7) — (17.8), такий що задовольняє умови

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq R, \quad \left( \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |x_n(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (17.29)$$

Тепер, щоби довести існування і єдиність розв'язку вихідної задачі (17.1) у вигляді (17.5) для  $p \in I$  і  $t \in [0, T]$  залишилось засвідчити, що ряд (17.5) можна диференціювати необхідну кількість разів за змінними  $x$  і  $t$ . Для цього з'ясуємо спочатку деякі оцінки для  $|x_j(t)|$ ,  $|\dot{x}_j(t)|$ ,  $|\ddot{x}_j(t)|$ ,  $j=1, 2, \dots$

На підставі (17.13), враховуючи (17.20), а також (17.29), з'ясуємо, що

$$\begin{aligned} |x_j(t)| &\leq \left( 1 + \frac{b}{\beta_j} \right) |\varphi_j| + \frac{1}{\beta_j} |\psi_j| + k_1 k_2 TR^{1+q} \frac{1}{\beta_j} \left( \int_0^1 g(x) z_j^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\dot{x}_j(t)| &\leq \frac{\omega_j^2 + 2b\beta_j}{\beta_j} |\varphi_j| + \frac{b + \beta_j}{\beta_j} |\psi_j| + \frac{b + \beta_j}{\beta_j} k_1 k_2 TR^{1+q} \left( \int_0^1 g(x) z_j^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\ddot{x}_j(t)| &\leq \beta_j^{-1} (\omega_j^2 + 2b\beta_j) (b + \beta_j) |\varphi_j| + \beta_j^{-1} (\omega_j^2 + 2b\beta_j) |\psi_j| + \\ &\quad + \left( 1 + \frac{\omega_j^2 + 2b\beta_j}{\beta_j} \right) k_1 k_2 TR^{1+q} \left( \int_0^1 g(x) z_j^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (17.30)$$

На підставі рівнянь (17.21) отримуємо:

$$\left( \int_0^1 g(x) z_j^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2c} \left( |\varphi_j|^2 + |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2c} (|\varphi_j| + |\psi_j|).$$

Звідси замість (17.30) матимемо оцінки

$$\begin{aligned} |x_j(t)| &\leq \left( 1 + \frac{b + \mu}{\beta_j} \right) |\varphi_j| + \frac{1 + \mu}{\beta_j} |\psi_j|, \\ |\dot{x}_j(t)| &\leq \frac{\omega_j^2 + 2b\beta_j + \mu(b + \beta_j)}{\beta_j} |\varphi_j| + \frac{(b + \beta_j)(1 + \mu)}{\beta_j} |\psi_j|, \\ |\ddot{x}_j(t)| &\leq \beta_j^{-1} \left[ (\omega_j^2 + 2b\beta_j)(b + \beta_j) + \mu(\omega_j^2 + (2b + 1)\beta_j) \right] |\varphi_j| + \end{aligned}$$

$$+ \beta_j^{-1} \left[ (b + \beta_j) (\omega_j^2 + 2b\beta_j) + \mu (\omega_j^2 + \beta_j(2b + 1)) \right] |\psi_j| \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (17.31)$$

де

$$\mu = \sqrt{2c} k_1 k_2 T R^{1+q} = \frac{\sqrt{2c} T R^{1+q} \max_{0 \leq \theta \leq T} G(\theta)}{\left( m^{1+q} \min_{0 \leq x \leq 1} g(x) \right)^{1/2}}.$$

Звернемося до третьої з умов б), що накладені на початкові функції, тобто до припущення про регулярну (рівномірну та абсолютну) збіжність рядів

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 \varphi_j y_j(x), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 \psi_j y_j(x)$$

(за відсутності навантажень  $p = 0$  ця умова виконується напевне, див., наприклад, [118], і отже, при обґрунтуванні методу малих коливань у таких випадках немає необхідності вводити її у вимоги б)). Тоді, враховуючи оцінки (17.31), робимо висновок, що ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j(t) y_j(x), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \dot{x}_j(t) y_j(x), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{x}_j(t) y_j(x)$$

також збігаються регулярно при  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq T$ , а отже, й рівномірно. Тому ряд (17.5) можна двічі диференціювати за  $t$ . Аналогічно переконаємося у регулярній збіжності ряду

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 x_j(t) y_j(x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T]. \quad (17.32)$$

З'ясуємо рівномірну збіжність рядів, отримуваних з (17.32) при  $2n$ -кратному диференціюванні за змінною  $x$ .

Нехай  $G(x, \xi)$  — функція Гріна диференційного оператора, породжена диференційним виразом  $L[y(x)]$  і крайовими умовами (17.2). Тоді задача (17.2) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$y(x) = \lambda \int_0^1 g(\xi) G(x, \xi) y(\xi) d\xi.$$

Враховуючи, що власним функціям  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$  відповідають власні значення  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2, \dots$ , отримуємо рівняння

$$x_n(t) y'_n(x) = \omega_n^2 \int_0^1 x_n(t) g(\xi) \frac{\partial G}{\partial x} y_n(\xi) d\xi. \quad (17.33)$$

Беручи до уваги рівномірну відносно  $x$  збіжність ряду (17.32) в проміжку  $[0, 1]$  для всіх  $t \in [0, T]$ , переконуємося, що ряд

$$g(\xi) \frac{\partial G}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 x_n(t) y_n(\xi)$$

рівномірно збігається в цьому ж проміжку, звідки на підставі (17.33) впливає властивість рівномірної збіжності також ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) y_n'(x)$$

Ця ж властивість доводиться аналогічно для рядів

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_m(t) y_m''(x), \dots, \sum_{m=1}^{\infty} x_m(t) y_m^{(2n)}(x)$$

(причому кожен раз використовуються відповідні властивості диференційовності функції  $G(x, \xi)$ ).

Таким чином, отримано результат, який можна висловити у формі твердження.

Теорема 1 Нехай нелінійна функція  $F$  задовольняє умову а) і початкові збурення  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  задачі (17.1) належать компактній множині  $\tilde{\Phi} \in L_g^2(0, 1)$ .

Тоді при кожному  $t \in [0, T]$  існує єдиний розв'язок  $u(x, t) \in \tilde{\Phi}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \in \tilde{\Phi}$  цієї задачі, такий що його можна подати у вигляді ряду (17.5); при цьому для  $u(x, t)$  і  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  справджуються оцінки вигляду (17.15).

Покажемо тепер, що дана теорема справедлива і для значень параметра  $p$ , які дещо перевищують значення  $p^*$ . Отже, розглянемо випадок, коли  $p = p^* + \nu$ . Замість задачі (17.7) — (17.8), що відповідає випадку  $p \in I$ , розглядатимемо задачу (17.12). Щоб її замінити інтегральним рівнянням вигляду (17.14), перетворимо перше з рівнянь (17.11) так, що

$$x_1(t) = c_1 \tilde{\varphi}_1(t) + c_2 \tilde{\varphi}_2(t) + \int_0^t \frac{1}{W(\xi)} P(\xi, t) \int_0^1 F \bar{z}_1 dx d\xi, \quad (17.34)$$

де

$$\tilde{\varphi}_1(t) = e^{(\alpha_1 - b)t} (\cos \beta_1 t + i \sin \beta_1 t), \quad \tilde{\varphi}_2(t) = e^{-(\alpha_1 + b)t} (\cos \beta_1 t - i \sin \beta_1 t),$$

$$P(\xi, t) = [\tilde{\varphi}_1(\xi) \tilde{\varphi}_2(t) - \tilde{\varphi}_1(t) \tilde{\varphi}_2(\xi)], \quad \alpha_1 + i\beta_1 = \sqrt{b^2 - \alpha^2 - i\beta},$$

$$c_1 = c_{11} + ic_{12}, \quad c_2 = c_{21} + ic_{22};$$

$c_1, c_2$  — довільні сталі (комплексні);  $W(\xi)$  — вронскіян функцій  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ .



На підставі безпосередньої перевірки переконаємося, що

$$P(\xi, t) = P_1(\xi, t) + iP_2(\xi, t) = \\ = \frac{(\alpha_1 - i\beta_1)\text{sh}\alpha_1(t - \xi)}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} e^{-b(t-\xi)} \{ \cos[\beta_1(t + \xi)] + i \sin[\beta_1(t + \xi)] \},$$

причому

$$P_1(\xi, t) = e^{-b(t-\xi)} \frac{\text{sh}\alpha_1(t - \xi)}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \{ \alpha_1 \cos \beta_1(t + \xi) + \beta_1 \sin \beta_1(t + \xi) \}, \\ P_2(\xi, t) = e^{-b(t-\xi)} \frac{\text{sh}\alpha_1(t - \xi)}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \{ \alpha_1 \sin \beta_1(t + \xi) - \beta_1 \cos \beta_1(t + \xi) \}.$$

Передбачаючи необхідність дотримання умов

$$x_1(0) = \varphi_{11} + i\varphi_{12}, \quad \dot{x}_1(0) = \psi_{11} + i\psi_{12},$$

для визначення сталих отримаємо систему рівнянь

$$c_{11} = \frac{1}{2\alpha_1} [\psi_{11} + (b + \alpha_1)\varphi_{11} + \beta_1\varphi_{12}], \\ c_{12} = \frac{1}{2\alpha_1} [\psi_{12} - \beta_1\varphi_{11} + (b + \alpha_1)\varphi_{12}], \\ c_{21} = \frac{1}{2\alpha_1} [-\psi_{11} + (\alpha_1 - b)\varphi_{11} - \beta_1\varphi_{12}], \\ c_{22} = \frac{1}{2\alpha_1} [-\psi_{12} + \beta_1\varphi_{11} + (\alpha_1 - b)\varphi_{12}].$$

Виділяючи дійсну і уявну частини в (17.34) з врахуванням останніх формул, матимемо:

$$x_{11}(t) = q_{11}(t) + \int_0^t \left\{ P_1(\theta, t) \int_0^1 F z_{11} dx + P_2(\theta, t) \int_0^1 F z_{12} dx \right\} d\theta, \\ x_{12}(t) = q_{12}(t) + \int_0^t \left\{ P_2(\theta, t) \int_0^1 F z_{11} dx - P_1(\theta, t) \int_0^1 F z_{12} dx \right\} d\theta,$$

де

$$q_{11}(t) = e^{-bt} [\tilde{q}_1(t) \cos \beta_1 t - \tilde{q}_2(t) \sin \beta_1 t], \\ q_{12}(t) = e^{-bt} [\tilde{q}_2(t) \cos \beta_1 t + \tilde{q}_1(t) \sin \beta_1 t]; \\ \tilde{q}_1(t) = \varphi_{11} \text{ch}\alpha_1 t + \frac{1}{\alpha_1} (b\varphi_{11} + \beta_1\varphi_{12} + \psi_{11}) \text{sh}\alpha_1 t, \\ \tilde{q}_2(t) = \varphi_{12} \text{ch}\alpha_1 t + \frac{1}{\alpha_1} (-\beta_1\varphi_{11} + b\varphi_{12} + \psi_{12}) \text{sh}\alpha_1 t.$$

Таким чином, в даному випадку приходимо до такого інтегрального рівняння

$$X(t) = Q(t) + \int_0^t S(t, \theta) \left\{ \int_0^1 F[\theta, Y(x)X(\theta), \dots, Y^{2n}(x)X(\theta)] Z(x) dx \right\} d\theta, \quad (17.35)$$

де

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad Y^*(x) = \begin{bmatrix} 2y_{11} \\ -2y_{12} \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad Z(x) = \begin{bmatrix} z_{11} \\ -z_{12} \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ \vdots \end{bmatrix};$$

$$S(t, \theta) = e^{-b(t-\theta)A(\theta, t)},$$

$$A(\theta, t) =$$

$$= \begin{bmatrix} P_1(\theta, t)e^{b(t-\theta)} & P_2(\theta, t)e^{b(t-\theta)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ P_2(\theta, t)e^{b(t-\theta)} & P_1(\theta, t)e^{b(t-\theta)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_3^{-1} \sin \beta_3(t-\theta) & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_n^{-1} \sin \beta_n(t-\theta) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Тепер неважко переконатись, що доведення факту існування та єдиності розв'язку рівняння (17.35) і задачі (17.1) ведеться так само, як і у випадку рівняння (17.14), коли  $p \in I$ ; тільки (17.19) слід замінити на таку оцінку:

$$\|S(t, \theta)\|^* < \left( \frac{e^{2\alpha_1 T}}{2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \right)^{1/2}. \quad (17.36)$$

Тому теорема 1 справджується для значень параметра навантаження  $p = p^* + \nu \notin I$ , де  $\nu > 0$  — належно мале число.

Зауважимо, що дане доведення є справедливим також і для випадків, коли при  $p = p^*$  у характеристичного визначника відповідної крайової задачі з'являється скінченна кількість кратних коренів. При цьому в матриці  $S(t, \theta)$  відповідного інтегрального рівняння виду (17.35) буде з'являтися скінченна кількість двовимірних клітинок по головній діагоналі, що призведе лише до зміни оцінки типу (17.36).

У випадку  $1^0$  далі заради спрощення вважатимемо, що  $\omega_1^2(p^*) = \omega_2^2(p^*)$ . Умови а) і б) припускатимемо дотриманими. Зауважимо також, що вибір величини  $T$  залишається поки що за нами.

### 17.3 Стійкість-нестійкість за першим наближенням

За характеристику близькості збурених розв'язків  $u(x, t)$  до незбуреного  $u \equiv 0$  (для якого  $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$ ) можна прийняти, як і у випадку систем зі скінченною кількістю ступенів вільності, норму  $u(x, t)$  і її похідної за  $t$ .

Керуватимемося таким означенням: нульовий розв'язок задачі (17.1) називається стійким за Ляпуновим у підмножині  $\tilde{\Phi} \in L_g^2(0, 1)$ , якщо для будь-яких  $\varepsilon_j > 0$  ( $j = 1, 2$ ), якими б малими вони не були, існують відповідні  $\delta_j > 0$ , такі що для всіх збурених рухів, які в початкову мить  $t_0 = 0$  задовольняють нерівності  $\|\varphi\| \leq \delta_1$ ,  $\|\psi\| \leq \delta_2$ , при всіх  $t > 0$  задовольнятимуться нерівності

$$\|u\| < \varepsilon_1, \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| < \varepsilon_2.$$

В іншому випадку воно називається нестійким. Якщо розв'язок є стійким і, до того ж, при  $t \rightarrow \infty$

$$\|u\| \rightarrow 0, \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \rightarrow 0,$$

то його називають асимптотично стійким.

Підкреслимо істотність припущення про належність початкових збурень компактній множині  $\tilde{\Phi}$  простору  $L_g^2(0, 1)$ . Власне для такого класу збурень і відповідних їм розв'язків різні метрики [114, 119], що характеризують близькість збурених і незбуреного рухів розглядуваних континуальних систем, виявляються еквівалентними. В означенні стійкості систем зі скінченною кількістю ступенів вільності таке припущення відсутнє, оскільки для них множина початкових збурень  $\tilde{\Phi}$  (залишаючись обмеженою) завжди компактна [114] і, отже, будь-які метрики є еквівалентними.

## 17.4 Теорема про асимптотичну стійкість

Властивості стійкості-нестійкості за першим наближенням нульового розв'язку задачі (17.1) будемо досліджувати з застосуванням прямого методу Ляпунова до еквівалентних задач для відповідних злічених систем звичайних диференціальних рівнянь. Для цього проведемо необхідні перетворення і з'ясуємо деякі нерівності.

Розглянемо спочатку випадок, коли  $p \in I$ . Первісна задача (17.1) в цьому випадку зводиться до задачі (17.7) — (17.8), яку запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'_j &= -2b\tilde{x}_j - \omega_j x_j + \frac{1}{\omega_j} \int_0^1 F z_j(x) dx, \quad \tilde{x}'_j = \omega_j \tilde{x}_j, \\ x_j(0) &= \varphi_j, \quad \tilde{x}_j(0) = \omega_j^{-1} \psi_j, \quad j=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17.37)$$

Звідси при  $F \equiv 0$  впливає система першого наближення.

Введемо заміну  $\tilde{z}_j = b_{1j} \tilde{x}_j + b_{2j} x_j$  так, щоби система першого наближення набула простого вигляду

$$\frac{d\tilde{z}_j}{dt} = \lambda \tilde{z}_j \quad (j=1, 2, \dots).$$

Для цього сталі  $b_{1j}, b_{2j}$  повинні задовольняти однорідні рівняння

$$(2b + \lambda)b_{1j} - \omega_j b_{2j} = 0, \quad \omega_j b_{1j} - \lambda b_{2j} = 0.$$

Останні рівняння сукупно матимуть нетривіальні розв'язки  $b_{1j}, b_{2j}$ , коли

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_j^2 = 0,$$

а отже  $\lambda_{1j} = -b + i\beta_j$ ,  $\lambda_{2j} = \bar{\lambda}_{1j}$ .

Покладаючи тепер  $b_{1j} = -\lambda_{1j}/\omega_j$ ,  $b_{2j} = 1$ , матимемо

$$\tilde{z}_j(t) = \tilde{\xi}_j(t) + i\tilde{\eta}_j(t),$$

де

$$\tilde{\xi}_j(t) = \frac{b}{\omega_j} \tilde{x}_j + x_j, \quad \tilde{\eta}_j(t) = -\frac{\beta_j}{\omega_j} \tilde{x}_j.$$

При такій заміні шуканих функцій  $\tilde{x}_j, x_j$  з (17.37) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\xi}_j}{dt} &= -b\tilde{\xi}_j - \beta_j \tilde{\eta}_j + \frac{b}{\omega_j^2} \int_0^1 F z_j(x) dx, \\ \frac{d\tilde{\eta}_j}{dt} &= \beta_j \tilde{\xi}_j - b\tilde{\eta}_j - \frac{\beta_j}{\omega_j^2} \int_0^1 F z_j(x) dx, \end{aligned}$$

$$\tilde{\xi}_j(0) = \varphi_j + \frac{b}{\omega_j^2} \psi_j, \quad \tilde{\eta}_j(0) = -\frac{\beta_j}{\omega_j^2} \psi_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (17.38)$$

Тут в  $F$  замість  $u(x, t)$  слід підставити ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \tilde{\xi}_n + \frac{b}{\beta_n} \tilde{\eta}_n \right) y_n(x).$$

Корисною виявляється також заміна

$$\tilde{\xi}_j(t) = e^{-\gamma t} \xi_j(t), \quad \tilde{\eta}_j(t) = e^{-\gamma t} \eta_j(t)$$

( $\gamma$  — деякий параметр), за якої із (17.38) матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_j}{dt} &= (\gamma - b)\xi_j - \beta_j \eta_j + \frac{be^{\gamma t}}{\omega_j^2} \int_0^1 F z_j(x) dx, \\ \frac{d\eta_j}{dt} &= \beta_j \xi_j + (\gamma - b)\eta_j - \frac{\beta_j e^{\gamma t}}{\omega_j^2} \int_0^1 F z_j(x) dx, \\ \tilde{\xi}_j(0) &= \xi_j(0), \quad \tilde{\eta}_j(0) = \eta_j(0), \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (17.39)$$

причому

$$u(x, t) = e^{-\gamma t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \xi_n(t) + \frac{b}{\beta_n} \eta_n(t) \right] y_n(x). \quad (17.40)$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися у справедливості нерівностей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < 2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + \frac{b}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{x}_n^2 \right] e^{-\gamma t}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2 < \frac{\beta_1^2}{\omega_1^4} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{x}_n^2 e^{-\gamma t}. \quad (17.41)$$

Зі збіжності рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \dot{x}_n^2$$

впливає рівномірна збіжність рядів у лівих частинах нерівностей (17.41).

За функцію Ляпунова для системи (17.39) візьмемо функцію

$$V = V_1 + V_2,$$

в якій

$$V_1 = \frac{b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2, \quad V_2 = \frac{b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2. \quad (17.42)$$

Її похідна має в даному випадку вигляд

$$\frac{dV}{dt} = 2(\gamma - b)V + be^{\gamma t} \int_0^1 F W(x, t) dx,$$

де

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} (b\xi_n - \beta_n \eta_n) z_n(x). \quad (17.43)$$

Звідси матимемо таку нерівність:

$$\frac{dV}{dt} \leq 2(\gamma - b)V + be^{\gamma t} \int_0^1 |F| \cdot |W(x, t)| dx. \quad (17.44)$$

Оскільки ряд, складений з суми квадратів коефіцієнтів розгортання (17.43), є збіжним (в цьому легко переконатись, вдаючись до оцінок (17.41)), а система власних функцій  $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  утворює в просторі  $L_g^2(0, 1)$  базис Рісса, то функція  $W(x, t)$  відповідно до викладеного раніше належить цьому простору при кожному фіксованому значенні  $t \in [0, T]$  і для оцінки її норми можна застосувати нерівність (17.15). Враховуючи це, послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) |W(x, t)|^2 dx &= \|W(x, t)\|^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} (b\xi_n - \beta_n \eta_n)^2 \leq \\ &\leq \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} (b^2 \xi_n^2 + \beta_n^2 \eta_n^2) \leq \frac{2b^2}{m\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 + \frac{2\beta_1^2}{m\omega_1^4} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \leq \\ &\leq \frac{2}{m} \left[ \frac{2b}{\omega_1^4} V_1 + \frac{2\beta_1^2}{b\omega_1^4} V_2 \right] \leq \frac{4}{mb\omega_1^2} V. \end{aligned}$$

Отже

$$\|W(x, t)\| \leq \frac{2}{\sqrt{mb\omega_1}} V^{\frac{1}{2}}. \quad (17.45)$$

Відтак, беручи до уваги умову а) щодо нелінійної функції  $F$  та оцінку (17.45), отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} \int_0^1 |F| \cdot |W(x, t)| dx &\leq \frac{1}{\min_{0 \leq x \leq 1} g(x)} \int_0^1 g(x) |F| \cdot |W(x, t)| dx \leq \\ &\leq \frac{G(t)}{\min_{0 \leq x \leq 1} g(x)} \|u\|^{1+q} \cdot \|W\| < \frac{G(t)}{\min_{0 \leq x \leq 1} g(x)} \frac{2}{\sqrt{mb\omega_1}} V^{\frac{1}{2}} \cdot \|u\|^{1+q}. \quad (17.46) \end{aligned}$$

Застосовуючи тепер нерівність (17.15) до функції (17.40), знаходимо:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq \frac{e^{-2\gamma t}}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n + \frac{b}{\beta_n} \eta_n \right)^2 \leq \frac{2e^{-\gamma t}}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n^2 + \frac{b^2}{\beta_n^2} \eta_n^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{4e^{-2\gamma t}}{mb} \left( V_1 + \frac{b^2}{\beta_1^2} V_2 \right) \leq \frac{4\omega_1^2}{mb\beta_1^2} V e^{-2\gamma t}, \end{aligned}$$

тобто

$$\|u\| \leq \frac{2\omega_1}{\sqrt{mb\beta_1}} V^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma t}. \quad (17.47)$$

Повертаючись до нерівності (17.44), на підставі (17.45) — (17.47) щодо функції Ляпунова  $V$  матимемо:

$$\frac{dV}{dt} < 2 \left( -b + \gamma + AG(t) e^{-q\gamma t} V^{\frac{q}{2}} \right) V, \quad (17.48)$$

де

$$A = \frac{2^{1+q} \omega_1^{1+q}}{\min_{0 \leq x \leq 1} g(x) \beta_1^{1+q} (mb)^{1+q/2}}.$$

Покажемо, що з отриманих оцінок і деяких властивостей функцій  $V$ ,  $\frac{dV}{dt}$  випливають висновки щодо асимптотичної стійкості нульового розв'язку задачі, що тут розглядається.

Хай, починаючи з деякої миті  $t = t_0$ , функція  $G(t) e^{-q\gamma t}$  не зростає (для цього вважатимемо, що  $g\gamma < \gamma^*$ ;  $\gamma^*$  — характеристичне число функції  $G(t)$ ). За довільно заданими  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$  окреслимо область

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\xi_n^2(t) + \eta_n^2(t)] \leq \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$$

(це цілком можливо, оскільки функція  $V$  має нескінченно малу верхню межу [120]). Тоді для  $t > t_0$  справджується нерівність

$$G(t) e^{-q\gamma t} V^{\frac{q}{2}}(t) < \eta \quad (\eta > 0).$$

Беручи  $\eta$  і  $\gamma$  належно малими, матимемо:  $-b + \gamma + A\eta < 0$ ; тоді з нерівності (17.48) випливає, що

$$\frac{dV}{dt} < 0.$$

Таким чином, для системи рівнянь (17.39) існує додатно визначена функція Ляпунова  $V$ , похідна  $\frac{dV}{dt}$  якої — від'ємно визначена, і отже нульовий розв'язок цієї системи є асимптотично стійким (відповідно до викладеного в [120] узагальнення теорема Ляпунова).

Тепер неважко переконалися, що асимптотично стійким є також незбудований рух в рамках первісної задачі (17.1), причому можна окреслити область початкових значень, для яких цей факт справджується. Якщо початкові умови  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  задовольняють вимоги теорема 1, то в околі нульового розв'язку, як випливає з цієї теорема, для інтервалу  $[0, T]$  існує єдиний розв'язок рівнянь (17.39). Вибираючи  $T$  так, щоб дотримувалась умова  $0 \leq t_0 \leq T$ , встановимо існування області початкових значень

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\xi_n^2(0) + \eta_n^2(0)] < R_1 \quad (17.49)$$

такої, що будь-який із зазначених розв'язків, полишаючи її, потрапляє в область

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\xi_n^2(t_0) + \eta_n^2(t_0)] \leq \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2. \quad (17.50)$$

Справді, з нерівностей (17.41) матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2(0) < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 + \frac{2b}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2(0) < \frac{\beta_1^2}{\omega_1^4} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2.$$

З іншого боку, застосовуючи оцінки (17.15), матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \leq M \|\varphi\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 \leq M \|\psi\|^2.$$

Отже справджується нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\xi_n^2(0) + \eta_n^2(0)] < 2M \|\varphi\|^2 + \frac{M}{\omega_1^2} \left( 2b^2 + \frac{\beta_1^2}{\omega_1^2} \right) \|\psi\|^2.$$

Звідси видно, що при  $\|\varphi\| < \delta_1$ ,  $\|\psi\| < \delta_2$  за число  $R_1$ , яке фігурує в (17.49), можна взяти величину

$$R_1 = 2M \delta_1^2 + \frac{M}{\omega_1^2} \left( 2b^2 + \frac{\beta_1^2}{\omega_1^2} \right) \delta_2^2.$$



Область (17.49) міститиметься в області (17.50), якщо за заданими  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  вибрати  $\delta_1, \delta_2$  так, щоби дотримувались нерівності

$$\delta_1 < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2M}}, \quad \delta_2 < \frac{\varepsilon_2 \omega_1^2}{\sqrt{(2b \omega_1^2 + \beta_1^2)M}}.$$

Повертаючись до оцінки (17.47) і враховуючи формули (17.42), а також рівномірну збіжність рядів в лівих частинах нерівностей (17.41), висновуємо, що  $\|u\|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . Аналогічного висновку дійдемо і щодо  $\|\partial u / \partial t\|$ .

Справді. Застосовуючи оцінку (17.15), послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| &\leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} x_n'^2 = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \tilde{x}_n^2 = \frac{1}{m} e^{-2\gamma t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{\beta_n^2} \eta_n^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{m} e^{-2\gamma t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \eta_n^2 + \frac{\omega_1^2 b^2}{\beta_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2 \right\}. \end{aligned} \quad (17.51)$$

Вздовж розв'язків системи (17.39)  $V \rightarrow 0$ ; тому  $\eta_n(t) \rightarrow 0$  для всіх значень  $n$ .

Оскільки, до того ж, ряди останньої з нерівностей (17.51) збігаються рівномірно, то  $\|\partial u / \partial t\|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ .

Таким чином, щодо задачі (17.1) справедлива така теорема про стійкість за першим наближенням.

**Теорема А** Якщо параметр навантаження  $p \in I$ , коефіцієнт тертя  $b > 0$ , нелінійна функція  $F$  та початкові збурення  $\varphi(x), \psi(x)$  задовольняють умови теореми 1, то нульовий розв'язок задачі (17.1) є асимптотично стійким.

## 17.5 Теорема про нестійкість

Розглянемо випадок, коли  $p = p^* + \nu \notin I$ . Задача (17.1) зводиться в цьому випадку до відповідної задачі (17.12).

Перетворимо перші два рівняння (17.12) до вигляду

$$\begin{aligned} x'_{11} &= \alpha \tilde{x}_{11}, \quad x'_{12} = \alpha \tilde{x}_{12}, \\ \tilde{x}'_{11} &= -2b\tilde{x}_{11} - \alpha x_{11} + \frac{b}{\alpha} x_{12} + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 F z_{11} dx, \\ x'_{12} &= -2b\tilde{x}_{12} - \frac{\beta}{\alpha} x_{11} - \alpha x_{12} - \frac{1}{\alpha} \int_0^1 F z_{12} dx. \end{aligned} \quad (17.52)$$

Як і в попередньому випадку, в системі першого наближення для (17.52) здійснимо перетворення  $\xi = b_1 x_{11} + b_2 x_{12} + b_3 \tilde{x}_{11} + b_4 \tilde{x}_{12}$  так, щоби звести систему до простого вигляду  $d\xi/dt = \lambda\xi$ . Ця вимога приводить до алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \lambda b_1 + \alpha b_3 + \frac{\beta}{\alpha} b_4 &= 0, \quad \lambda b_2 - \frac{\beta}{\alpha} b_3 + \alpha b_4 = 0, \\ \alpha b_1 - (2b + \lambda) b_3 &= 0, \quad \alpha b_2 - (2b + \lambda) b_4 = 0, \end{aligned}$$

нетривіальні розв'язки якої існують, якщо

$$(\lambda^2 + 2b\lambda)^2 + 2\alpha^2(\lambda^2 + 2b\lambda) + \alpha^4 + \beta^4 = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$\lambda_1 = \alpha_1 - b + i\beta_1, \quad \lambda_2 = -(\alpha_1 + b) - i\beta_1, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_1, \quad \lambda_4 = \bar{\lambda}_2,$$

де

$$\alpha_1 + i\beta_1 = \sqrt{b^2 - \alpha^2 - i\beta}.$$

Відразу відзначимо, що знаки дійсних частин  $\lambda_1, \lambda_2$  будуть протилежними, якщо виконується умова  $b < \frac{\beta}{2\alpha}$ .

Беручи

$$b_{4j} = \lambda_j (\lambda_j^2 + 2b\lambda_j + \alpha^2), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

отримаємо:

$$b_{1j} = -\frac{1}{\alpha} (\lambda_j^2 + 2b\lambda_j) \beta, \quad b_{2j} = \frac{1}{\alpha} (\lambda_j^2 + 2b\lambda_j) (\lambda_j^2 + 2b\lambda_j + \alpha^2), \quad b_{3j} = -\beta \lambda_j.$$

Тоді шукане перетворення матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\beta}{\alpha} \bar{\omega}_1^2 x_{11} + \frac{1}{\alpha} \bar{\omega}_1^2 (\bar{\omega}_1^2 - \alpha^2) x_{12} - \beta \lambda_1 \tilde{x}_{11} + \lambda_1 (\alpha^2 - \bar{\omega}_1^2) \tilde{x}_{12}, \\ \xi_2 &= \frac{\beta}{\alpha} \bar{\omega}_1^2 x_{11} + \frac{1}{\alpha} \bar{\omega}_1^2 (\bar{\omega}_1^2 - \alpha^2) x_{12} - \beta \lambda_2 \tilde{x}_{11} + \lambda_2 (\alpha^2 - \bar{\omega}_1^2) \tilde{x}_{12}, \\ \xi_3 &= \bar{\xi}_1, \quad \xi_4 = \bar{\xi}_2. \end{aligned}$$

Позначаючи  $\xi_1 = \zeta_1 + i\eta_1$ ,  $\xi_2 = \zeta_2 + i\eta_2$  та розділяючи дійсні і уявні частини, знайдемо:

$$\zeta_1 = \alpha\beta x_{11} - \frac{\beta^2}{\alpha} x_{12} - \beta(\alpha_1 - b) \tilde{x}_{11} - \beta\beta_1 \tilde{x}_{12},$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= -\frac{\beta^2}{\alpha} x_{11} - \alpha\beta x_{12} - \beta\beta_1 \tilde{x}_{11} + \beta(\alpha_1 - b) \tilde{x}_{12}, \\
\zeta_2 &= \alpha\beta x_{11} - \frac{\beta^2}{\alpha} x_{12} + \beta(\alpha_1 + b) \tilde{x}_{11} + \beta\beta_1 \tilde{x}_{12}, \\
\eta_2 &= -\frac{\beta^2}{\alpha} x_{11} - \alpha\beta x_{12} + \beta\beta_1 \tilde{x}_{11} - \beta(\alpha_1 + b) \tilde{x}_{12}. \quad (17.53)
\end{aligned}$$

Роблячи в рівняннях (17.52) заміну (17.53), а в решті рівнянь системи (17.12), як і раніше, — заміну

$$\zeta_j = \frac{b}{\omega_j} \tilde{x}_j + x_j, \quad \eta_j = -\frac{\beta_j}{\omega_j} \tilde{x}_j, \quad \tilde{x}_j = \frac{1}{\omega_j} x_j,$$

замість цієї системи отримуємо:

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta_1}{dt} &= (\alpha_1 - b) \zeta_1 - \beta_1 \eta_1 - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 F [(\alpha_1 - b) z_{11} - \beta_1 z_{12}] dx, \\
\frac{d\eta_1}{dt} &= \beta_1 \zeta_1 + (\alpha_1 - b) \eta_1 - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 F [\beta_1 z_{11} + (\alpha_1 - b) z_{12}] dx, \\
\frac{d\zeta_2}{dt} &= -(\alpha_1 + b) \zeta_2 + \beta_1 \eta_2 - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 F [-(\alpha_1 + b) z_{11} + \beta_1 z_{12}] dx, \\
\frac{d\eta_2}{dt} &= -\beta_1 \zeta_2 - (\alpha_1 + b) \eta_2 - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 F [-\beta_1 z_{11} - (\alpha_1 + b) z_{12}] dx, \\
\frac{d\zeta_j}{dt} &= -b \zeta_j - \beta_j \eta_j + \frac{b_j}{\omega_j^2} \int_0^1 F z_j dx, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = \beta_j \zeta_j - b \eta_j - \frac{\beta_j}{\omega_j^2} \int_0^1 F z_j dx, \\
& \quad j = 3, 4, \dots, \quad (17.54)
\end{aligned}$$

причому замість  $u(x, t)$  у  $F$  слід підставляти вираз

$$\begin{aligned}
& (a_1 \zeta_1 + a_2 \eta_1 + a_3 \zeta_2 + a_4 \eta_2) y_{11}(x) + \\
& + (\tilde{a}_1 \zeta_1 + \tilde{a}_2 \eta_1 + \tilde{a}_3 \zeta_2 + \tilde{a}_4 \eta_2) y_{12}(x) + \sum_{n=3}^{\infty} \left( \zeta_n + \frac{b}{\beta_n} \eta_n \right) y_n(x). \quad (17.55)
\end{aligned}$$

Тут  $a_i$ ,  $\tilde{a}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — коефіцієнти лінійного перетворення для величин  $-2x_{11}$  і  $-2x_{12}$ , виражених через  $\zeta_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\eta_2$  на підставі (17.53); визначник, складений з коефіцієнтів перетворення (17.53), рівний

$$4(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha^4 + \beta^4)\beta^4\alpha^{-2}.$$

За функцію Ляпунова візьмемо функцію

$$V = \frac{1}{2} \left[ -(\alpha_1 - b)(\zeta_1^2 + \eta_1^2) + (\alpha_1 + b)(\zeta_2^2 + \eta_2^2) + b \sum_{n=3}^{\infty} (\zeta_n^2 + \eta_n^2) \right].$$

Її похідна в силу системи рівнянь (17.54) має вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = -Z(\zeta_1^2, \eta_1^2, \dots, \zeta_n^2, \eta_n^2, \dots) + \int_0^1 F W(x, t) dx,$$

де

$$Z(\zeta_1^2, \eta_1^2, \dots, \zeta_n^2, \eta_n^2, \dots) = (\alpha_1 - b)^2 (\zeta_1^2 + \eta_1^2) + (\alpha_1 + b)^2 (\zeta_2^2 + \eta_2^2) + b^2 \sum_{n=3}^{\infty} (\zeta_n^2 + \eta_n^2);$$

$$W(x, t) = M_1 z_{11} + N_1 z_{12} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} (b \zeta_n - \beta_n \eta_n) z_n(x);$$

$$M_1 = \frac{\beta}{\alpha} \left[ (\alpha_1 - b)^2 \zeta_1 + \beta_1 (\alpha_1 - b) \eta_1 + (\alpha_1 + b)^2 \zeta_2 + \beta_1 (\alpha_1 + b) \eta_2 \right],$$

$$N_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \left[ \beta_1 (\alpha_1 - b) \zeta_1 - (\alpha_1 - b)^2 \eta_1 + \beta_1 (\alpha_1 + b) \zeta_2 - (\alpha_1 + b)^2 \eta_2 \right]. \quad (17.56)$$

Для оцінки норми розгортки (17.56) діємо так само, як і у випадку розгортки (17.43). Отже

$$\|W\|^2 \leq \frac{1}{m} \left\{ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^4} (b \zeta_n - \beta_n \eta_n)^2 + 4B_1 (\zeta_1^2 + \eta_1^2) + 4B_2 (\zeta_2^2 + \eta_2^2) \right\},$$

де

$$B_1 = \frac{\beta}{\alpha^2} \left[ (\alpha_1 - b)^4 + \beta_1^2 (\alpha_1 - b)^2 \right], \quad B_2 = \frac{\beta}{\alpha^2} \left[ (\alpha_1 + b)^4 + \beta_1^2 (\alpha_1 + b)^2 \right].$$

Звідси за позначення

$$B = \max \left\{ \frac{b^2}{\omega_3^4}, \frac{\beta_3^2}{\omega_3^4}, 4B_1, 4B_2 \right\}$$

матимемо:

$$\|W\| \leq \left[ \frac{B}{m} \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n^2 + \eta_n^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (17.57)$$

Беручи до уваги умову а) щодо функції  $F$  і отриману оцінку, знаходимо:

$$\frac{dV}{dt} < -Z(\zeta_1^2, \eta_1^2, \dots, \zeta_n^2, \eta_n^2, \dots) + \frac{G(t)}{\min_{0 \leq x \leq 1} g(x)} \|u\|^{1+q} \|W\|. \quad (17.58)$$

Враховуючи (17.55) і застосовуючи до  $u(x, t)$  оцінку (17.15), отримуємо співвідношення

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{m} \left\{ 2 \left( 1 + \frac{b^2}{\beta_3^2} \right) \sum_{n=3}^{\infty} (\zeta_n^2 + \eta_n^2) + \sum_{n=1}^2 A_n (\zeta_n^2 + \eta_n^2) \right\},$$

де

$$A_1 = \max \{ a_1^2 + \tilde{a}_1^2, a_2^2 + \tilde{a}_2^2 \}, \quad A_2 = \max \{ a_3^2 + \tilde{a}_3^2, a_4^2 + \tilde{a}_4^2 \}.$$

Отже

$$\|u\|^2 \leq \left[ \frac{A}{m} \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n^2 + \eta_n^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (17.59)$$

То ж на підставі (17.58) з використанням (17.57) та (17.59) приходимо до такої оцінки:

$$\frac{dV}{dt} < -Z(\zeta_1^2, \eta_1^2, \dots, \zeta_n^2, \eta_n^2, \dots) + C \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n^2 + \eta_n^2) \right]^{1+\frac{q}{2}}, \quad (17.60)$$

де

$$C = \frac{\max_{0 \leq x < \infty} G(t) B^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1+q}{2}}}{m^{1+\frac{q}{2}} \min_{0 \leq x \leq 1} g(x)}.$$

Тепер з'ясувати нестійкість нульового розв'язку системи, що розглядається, не складатиме труднощів. За заданими  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$  окреслюємо область

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\zeta_n^2(t_0) + \eta_n^2(t_0)] < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$$

так, щоб знак похідної  $dV/dt$  при  $t = t_0$  на підставі (17.60) визначався знаком виразу  $-Z(\zeta_1^2, \eta_1^2, \dots, \zeta_n^2, \eta_n^2, \dots)$ . В цій області функція  $dV/dt$  — від'ємно визначена, а функція  $V$  — знаковмінна. Тому незбурений розв'язок системи (17.54) є нестійким.

Таким чином, щодо первісної задачі (17.1) можна висловити таке твердження.

**Теорема Б** Якщо параметр навантаження  $p = p^* + v$  ( $v > 0$  — належно мале число), коефіцієнт тертя  $b > 0$ , а у випадках  $1^0$ , крім цього,  $b < \frac{1}{2}\beta\alpha^{-1}$  та дотримуються умови теореми 1 на нелінійність  $F$  і початкові збурення  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  відповідно, то нульовий розв'язок задачі (17.1) є нестійким.

## 17.6 Обґрунтування динамічного методу дослідження деяких двовимірних систем

Розглянемо задачу про коливання і стійкість прямокутної ортотропної пластинки, що обтікається з одного боку надзвуковим потоком газу (задача про панельний флатер, див. також 15.2  $1^0$ ). Два протилежні краї пластини закріплені шарнірно, а два інші — пружно защекнені. В її серединній площині виникають розосереджені стискувальні (розтягувальні) зусилля. Аеродинамічна дія потоку газу враховується засобами поршневої теорії [55]. В такому випадку доводиться мати справу зі змішаною задачею [121]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_1 a_1(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + p_2 a_2(x) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p_3 a_3(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_4 a_4(x) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p_5 a_5(x) \frac{\partial w}{\partial x} + p_6 a_6(x) w + g(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial w}{\partial t} \right) = F \left( t, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right),$$

$$V_{i0}[w(x, y, t)]_{x=0} = 0, \quad V_{i1}[w(x, y, t)]_{x=1} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$w(x, 0, t) = w''_{y,2}(x, 0, t) = w(x, 1, t) = w''_{y,2}(x, 1, t) = 0,$$

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial t} w(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (17.61)$$

де  $V_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — лінійні щодо функції  $w(x)$  та її похідних до третього порядку включно диференційні вирази за  $x$ ;  $F$  — нелінійно (в загальному випадку) залежна від своїх аргументів деяка неперервна функція, що перетворюється на нуль при  $w = 0$ , властивості якої були окреслені раніше; функції  $a_i(x)$  вважаються неперервно диференційовними необхідну кількість разів.

Відповідною (17.61) задачею на власні значення є:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + p_1 a_1(x) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + p_2 a_2(x) \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + p_3 a_3(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_4 a_4(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p_5 a_5(x) \frac{\partial u}{\partial x} + p_6 a_6(x) u - \omega^2 g(x) u = 0,$$

$$V_{i0}[u(x, t)]_{x=0} = 0, \quad V_{i1}[u(x, t)]_{x=1} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$u(x, 0) = u''_{y^2}(x, 0) = u(x, 1) = u''_{y^2}(x, 1) = 0.$$

Власні функції цієї задачі мають вигляд  $u_{nm}(x, y) = X_{nm}(x) \sin n\pi y$ , де  $X_{nm}$  — власні функції крайової задачі (зі звичайним диференціальним рівнянням)

$$X^{IV} + f_n(x) X'' + p a(x) X' + h_n(x) X - \omega_n^2 g(x) X = 0,$$

$$V_{i0}(X)_{x=0} = 0, \quad V_{i1}(X)_{x=1} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (17.62)$$

причому

$$f_n(x) = p_3 a_3(x) - \pi^2 n^2 p_1 a_1(x),$$

$$h_n(x) = p_6 a_6(x) - \pi^2 n^2 p_4 a_4(x) + \pi^4 n^4 p_2 a_2(x),$$

$$p a(x) = p_5 a_5(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Оскільки при  $p = 0$  задача (17.62) є самоспряженою, то її власні значення  $\omega_{nm}^2$  при кожному фіксованому  $n$  є додатними з єдиною точкою згущення в нескінченності. Вважатимемо, що всі ці власні значення — взаємно прості. Тоді існує послідовність максимальних півінтервалів  $[0, p_n^*]$  таких, що для  $p \in [0, p_n^*]$

$$0 < \omega_{n1}^2(p) < \omega_{n2}^2(p) < \dots < \omega_{nm}^2(p) < \dots \quad (17.63)$$

Нехай  $p^* = \inf\{p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*, \dots\}$ , причому  $p^* > 0$ . Очевидно, що для  $p \in [0, p^*]$  і всіх значень  $n$  будуть справджуватися нерівності (17.63).

Розглянемо послідовність неперервних функцій  $c_n(t, x)$ , які при кожному  $t \in [0, T]$  задовольняють граничні умови (17.62). Їх можна подати у вигляді рівномірно збіжних рядів

$$c_n(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(t) X_{nm}(x), \quad p \in [0, p^*].$$

Оскільки послідовність  $\{X_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$  утворює базис Рісса в просторі  $L_q^2(0, 1)$ , то коефіцієнти  $T_{nm}$  повинні задовольняти умову

$$m \int_0^1 g(x) c_n^2(x, t) dx \leq \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}^2(t) \leq M \int_0^1 g(x) c_n^2(x, t) dx. \quad (17.64)$$

Припустимо, що розв'язок задачі (17.61) надається до розгортання

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, t) \sin n\pi y, \quad (17.65)$$

Тоді відповідно до теореми Рісса-Фішера

$$\int_0^1 w^2(x, y, t) dy = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(t, x). \quad (17.66)$$

Якщо ряд (17.65) збігається рівномірно за  $x$  при кожному  $t \in [0, T]$ , то

$$\|w\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 g(x) w^2(x, y, t) dx dy = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n^2(x, t)\|^2.$$

На підставі умови (17.64) отримуємо:

$$2m \|w\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}^2(t) \leq 2M \|w\|^2.$$

Сукупність функцій  $v_{rs}(x, y) = Y_{rs}(x) \sin r\pi y$ , де  $Y_{rs}(x)$  ( $r, s = 1, 2, \dots$ ) — власні функції задачі, спряженої до задачі (17.62), разом з функціями  $u_{nm}(x, y)$  утворюють біортогональну систему функцій з вагою  $g(x)$  в квадраті  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ .

Таким чином, задача (17.61), якщо її розв'язок шукати у вигляді (17.65), зводиться до задачі Коші для зліченної системи рівнянь другого порядку

$$T_{rs}'' + 2bT_{rs}' + \omega_{rs}^2 T_{rs} = \int_0^1 F v_{rs}(x, y) dx dy, \quad T_{rs}(0) = \varphi_{rs}, \quad T_{rs}'(0) = \psi_{rs},$$

де  $r, s = 1, 2, \dots$ ;  $0 \leq p < p^*$ ;  $\varphi_{rs}, \psi_{rs}$  — коефіцієнти розгортання відповідно функцій  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  в ряди за власними функціями  $u_{nm}(x, y)$ .



Накладемо на коефіцієнти  $\varphi_{rs}$ ,  $\psi_{rs}$  та нелінійність функції  $F$  ті самі умови, що й в попередніх підрозділах. Тоді так само, як і в попередніх підрозділах можна довести існування та єдиність розв'язку задачі (17.61), а також теореми про стійкість-нестійкість системи за першим наближенням. Тут залишається тільки показати, що ряд (17.66) збігається рівномірно.

Завдяки завбачуваним властивостям функцій  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  ряди

$$d_r(\varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} |\varphi_{rs} X_{rs}(x)|, \quad d_r(\psi) = \sum_{s=1}^{\infty} |\psi_{rs} X_{rs}(x)|$$

збігаються рівномірно, і тому

$$m \int_0^1 g(x) d_r^2(\varphi) dx \leq \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{rs}^2 \leq M \int_0^1 g(x) d_r^2(\varphi) dx,$$

$$m \int_0^1 g(x) d_r^2(\psi) dx \leq \sum_{s=1}^{\infty} \psi_{rs}^2 \leq M \int_0^1 g(x) d_r^2(\psi) dx.$$

Припустимо, що збігаються рівномірно ряди

$$\sum_{r=1}^{\infty} d_r^2(\varphi), \quad \sum_{r=1}^{\infty} d_r^2(\psi). \quad (17.67)$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(x, t) \leq (A^2 + AB) \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(\varphi) + (AB + B^2) \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(\psi),$$

де

$$A = \sup_{r, s} \left( 1 + \frac{a + \mu}{\beta_r} \right), \quad B = \sup_{r, s} \frac{1 + \mu}{\beta_{rs}},$$

$$\mu = \sqrt{2aTR}^{1+q} \max_{0 \leq \theta \leq T} G(\theta) \left( m^{1+q} \min_{0 \leq x \leq 1} g(x) \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta_{rs} = \sqrt{\omega_{sr}^2 - b^2};$$

$a, T, R$  — деякі сталі. Таким чином, з рівномірної збіжності рядів (17.67) випливає рівномірна збіжність ряду (17.66). Збіжність рядів (17.67) випливає з нерівностей

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_0^1 g(x) d_r^2(\varphi) dx \leq \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{rs}^2, \quad \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^1 g(x) d_r^2(\psi) dx \leq \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \psi_{rs}^2.$$

---

---

## ДОДАТКИ

---

---

### А Функція Гріна і функція Коші

1<sup>0</sup> Розглянемо диференційне рівняння

$$L[y] \equiv p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = v(x) \quad (p(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]) \quad (\text{A.1})$$

разом з крайовими умовами

$$(f(x)y' - e_1 y)|_{x=a} = 0; \quad (f(x)y' + e_2 y)|_{x=b} = 0 \quad (\text{A.2})$$

(див., наприклад, (4.14) і (4.10) чи (4.12)). Задача вигляду (A.1) — (A.2) — це так звана крайова задача для звичайного диференційного рівняння. Щоб її розв'язати, потрібно підставити загальний розв'язок рівняння (A.1)

$$y = C_0 K(x, a) + C_1 \dot{K}(x, a) + \int_a^x K(x, s) v(s) ds$$
$$\left( \dot{K}(x, a) = \frac{\partial K(x, a)}{\partial a} \right) \quad (\text{A.3})$$

(див., зокрема, розділ 4 і відповідно (4.16)) в крайові умови (A.2) та визначити на підставі них значення довільних сталих  $C_0$  і  $C_1$ .

На відміну від задачі з початковими умовами (задачі Коші), крайова задача не завжди має розв'язок. Покажемо це, вважаючи задля спрощення, що  $p \equiv f'(x)$ ,  $q \equiv f''(x)$ .

Підставляючи (A.3) в (A.2), отримуємо систему (неоднорідну) алгебричних рівнянь

$$C_0 + C_1 e_1 \frac{1}{f(a)} = 0, \quad C_0 A(b, a) + C_1 \dot{A}(b, a) = B(b, a), \quad (\text{A.4})$$

де

$$A(b, a) = f(b)K'(b, a) + e_2 K(b, a), \quad \dot{A}(b, a) = \frac{\partial A(b, a)}{\partial a},$$

$$B(b, a) = -[f(b)y'_*(b, a) + e_2 y_*(b, a)], \quad y_*(x, a) = \int_a^x K(x, s) v(s) ds.$$

Легко бачити, що відповідна неоднорідній системі рівнянь (A.4) однорідна система співпадає з рівняннями (4.21) розділу 4. Тому її визначник  $\Delta$  є такий самий, як ліва частина відповідного універсального характеристичного рівняння (4.23):

$$\Delta = \left( e_1 e_2 K(x, \alpha) + e_1 f(b) K'(x, \alpha) - e_2 f(a) \dot{K}(x, \alpha) - f(a) f(b) \dot{K}'(x, \alpha) \right) \Big|_{\alpha=a}^{x=b}.$$

Отже, якщо  $\Delta = \Delta(b, a) \neq 0$ , то за формулами Крамера маємо:

$$C_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \frac{e_1}{f(a)} \\ B(b, a) & \dot{A}(b, a) \end{vmatrix}, \quad C_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ A(b, a) & B(b, a) \end{vmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

То ж у випадку  $\Delta = \Delta(b, a) \neq 0$  задача (A.1)-(A.2) має єдиний розв'язок. Коли ж виявиться, що  $\Delta(b, a) = 0$ , то, як відомо з алгебри, неоднорідна система (A.4) або не має розв'язку, або ж має їх безліч.

<sup>20</sup> Для розв'язування крайових задач часто застосовують функцію Гріна. Під функцією Гріна крайової задачі (A.1)-(A.2) розуміють таку визначену для  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq s \leq b$  функцію  $G(x, s)$ , що для будь-якого  $s$  вона як функція  $x$  наділена властивостями [122, 123]:

- 1)  $G(x, s)$  при  $x \neq s$  задовольняє однорідне рівняння  $L[y] = 0$  (відповідне неоднорідному рівнянню (A.1));
- 2)  $G(x, s)$  при  $x = a$  та  $x = b$  задовольняє задані крайові умови (зокрема (A.2));
- 3)  $G(x, s)$  при  $x = s$  неперервна за змінною  $x$ , а її похідна  $G'_x(x, s)$  за  $x$  при  $x = s$  має скінченний розрив завбільшки  $1/p(s)$ , тобто

$$G(s+0, s) - G(s-0, s) = 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=s+0} - \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}. \quad (\text{A.6})$$

Відомі такі твердження:

а) Якщо відповідна первісній задачі (A.1) — (A.2) однорідна (означувана тотожністю  $v(x) \equiv 0$ ) задача має тільки очевидний розв'язок  $y(x) \equiv 0$ , то існує одна і тільки одна функція Гріна  $G(x, s)$ , що відповідає даному оператору  $L$  (тоді, зрозуміло, в системі рівнянь (A.4)  $C_0 = C_1 = 0$ ).

б) Якщо функція  $G(x, s)$  з окресленими щойно властивостями існує, то розв'язок крайової задачі (A.1)-(A.2) зображується як

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) v(s) ds. \quad (\text{A.7})$$

Підкреслимо, що той самий розв'язок, як випливає безпосередньо з (A.3), можна подати і у вигляді

$$y(x) = \int_a^x K(x, s)v(s)ds.$$

3<sup>0</sup> Порівняємо наведене в 1<sup>0</sup> і 2<sup>0</sup>. Для цього побудуємо функцію  $G(x, s)$  задачі (A.1) — (A.2), вважаючи, як і раніше, що  $p \equiv f(x)$ ,  $q \equiv f'(x)$ .

Підставимо загальний розв'язок однорідного рівняння  $L[y] = 0$  ( $v(x) \equiv 0$ )

$$y = C_0 K(x, a) + C_1 \dot{K}(x, a) \quad (\text{A.8})$$

в крайові умови (A.2) і отримаємо відповідну неоднорідній системі (A.4) систему однорідних рівнянь (бо тут  $y_*(x, a) \equiv 0$ , а тому й  $B(b, a) \equiv 0$ ). Отже, якщо виконується умова  $\Delta = \Delta(b, a) \neq 0$ , тобто визначник відповідної однорідної задачі не дорівнює нулеві, то ця однорідна задача має тільки єдиний розв'язок  $y(x) \equiv 0$  (це видно й з формул (A.5) і (A.8), бо  $C_0 = C_1 = 0$ ). Тому в цьому випадку відповідна оператору  $L$  функція  $G(x, s)$  існує і вона єдина.

Щоб її побудувати, потрібно мати два розв'язки  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  (ненульові) рівняння  $L(y) = 0$ , що задовольняють відповідно першу і другу крайові умови (A.2). Якщо  $y_1(x)$  не задовольняє відразу обидві крайові умови, то функцію  $G(x, s)$  можна шукати у вигляді:

$$G(x, s) = \begin{cases} g_1 y_1(x) & (a \leq x \leq s) \\ g_2 y_2(x) & (s \leq x \leq b) \end{cases}.$$

Функції  $g_1$  і  $g_2$  залежать від  $s$  і визначаються на підставі вимоги, щоб  $G(x, s)$  задовольняла умови (A.6):

$$g_1 y_1(s) = g_2 y_2(s), \quad -g_1 y_1'(s) + g_2 y_2'(s) = \frac{1}{p(s)}.$$

Звідси можна отримати формулу

$$G(x, s) = \begin{cases} y_1(x)y_2(s)(p(s)W(s))^{-1}, & a \leq x \leq s; \\ y_1(s)y_2(x)(p(s)W(s))^{-1}, & s \leq x \leq b \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

( $[p(s)W(s)]^{-1} = \text{const}$ ,  $W$  — визначник Вронського).

<sup>4</sup> Доречно зробити таке зауваження.

“Функцію Гріна” означають також інакше — не пов’язуючись з крайовими умовами (див., наприклад, [19]):

$$G(x, s) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq s; \\ K(x, s), & s \leq x \leq b, \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

де  $K(x, s)$  — відповідна рівнянню (A.1) при  $p(x) \equiv 1$  функція Коші. За допомогою цієї функції формулу Коші

$$y_* = \int_a^x K(x, s) v(s) ds \quad (\text{A.11}')$$

для окремого розв’язку неоднорідного рівняння можна записати у формі (A.7):

$$y_* = \int_a^b G(x, s) v(s) ds. \quad (\text{A.11}'')$$

Отже функцію  $G(x, s)$ , визначувану співвідношенням (A.10), взагалі кажучи, безпідставно називати інакше, як фундаментальним розв’язком або функцією впливу (відповідною рівнянню (A.1)). Очевидно також, що формули (A.11') і (A.11'') — тотожні та визначають один і той самий частковий розв’язок неоднорідного рівняння (A.1), який задовольняє нульові початкові умови ( $y_*(0) = 0$ ,  $y'_*(0) = 0$ ).

<sup>5</sup> Розглянемо прості приклади. Звернемося до задач

$$L[y] \equiv y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Беручи до уваги співвідношення

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x, \quad p(s) \equiv 1, \quad W(s) = \begin{vmatrix} \sin s & \cos s \\ \cos s & -\sin s \end{vmatrix} \equiv -1,$$

відповідно до (A.9) знайдемо:

$$G(x, s) = \begin{cases} -\sin x \cos s & 0 \leq x \leq s \\ -\sin s \cos x & s \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

На підставі (A.7) запишемо:

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, s) \cdot 1 \cdot ds = -\int_0^x \sin s \cos x ds - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos s ds = 1 - \sin x - \cos x.$$

Застосуємо тепер інший спосіб.

Загальний розв'язок диференційного рівняння задачі (A.12) можна подати, очевидно, так:

$$y = C_0 \sin x + C_1 \cos x + 1,$$

звідки  $y(0) = C_1 + 1$ ,  $y(\pi/2) = C_0 + 1$ . Отже, в даному випадку  $C_0 = C_1 = -1$  і розв'язок крайової задачі (A.12) має, як і слід було сподіватись, вигляд:

$$y = 1 - \sin x - \cos x.$$

Розглянемо тепер задачу штибу (A.12), в якій другу умову замінено на рівність  $y(\pi) = 0$ . Співвідношення (A.9) тут застосовувати не можна, бо функція  $y_1 = \sin x$  задовольняє відразу обидві крайові умови ( $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$ ); тому слід чекати, що задача не матиме розв'язку, або матиме їх безліч.

Дійсно, на підставі першої з цих умов, як і в попередньому випадку,  $C_1 = -1$ , а от друга умова веде до протиріччя:

$$C_0 \sin \pi - C_1 + 1 = 0 \Rightarrow 2 = 0.$$

Отже, задача

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

розв'язку не має.

Прикладом крайової задачі, що має безліч розв'язків, є така:

$$y'' + y = 2x - \pi; \quad y(0) = 0; \quad y(\pi) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Справді, підставляючи загальний розв'язок диференційного рівняння задачі (A.13)

$$y = C_0 \sin x + C_1 \cos x + 2x - \pi$$

в задані крайові умови, отримуємо:  $C_1 - \pi = 0$ ;  $C_0 \cdot 0 - C_1 + 2\pi - \pi = 0$ . З першої рівності однозначно випливає, що  $C_1 = \pi$ ; друга ж рівність задовольняється за будь-якої сталої  $C_0$ . Тож розв'язок задачі (A.13)

$$y = C_0 \sin x + \pi(\cos x - 1)$$

є неоднозначним з огляду на довільність значення сталої  $C_0$  (тобто задача має безліч розв'язків).

Очевидно, що застосування до подібних задач окресленого поняття загального розв'язку на протигагу поняттю функції Гріна є раціональнішим (доцільнішим).

## В Обчислення частот для систем з трьома та чотирма ступенями вільності

Звернемося до кубічного рівняння

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (\text{B.1})$$

з дійсними коефіцієнтами  $a \neq 0, b, c, d$ . Діленням на  $a$  і підстановкою

$$x = y - \frac{b}{3a} \quad (\text{B.2})$$

його можна звести до вигляду

$$y^3 + py + q = 0, \quad p = \frac{1}{a} \left( c - \frac{b^2}{3a} \right), \quad q = \frac{1}{a} \left( d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} \right). \quad (\text{B.3})$$

Позначимо:

$$\frac{p}{3} = A, \quad -\frac{q}{2} = B, \quad A^3 + B^2 = D, \quad \frac{B}{(\sqrt{-A})^3} = \cos \varphi.$$

Нехай (B.1) за змістом є частотним рівнянням деякої системи з трьома ступенями вільності. Тоді числа  $-x_i, i = 1, 2, 3$  (де  $x_i$  — корені (B.1)) є пропорційними “квадратам частот” системи, а отже — додатними. Це означає, що рівняння (B.1) має три від’ємні корені, а отже  $D$  — також від’ємна величина ( $D < 0$  завжди, коли всі три  $x_i$  є дійсними числами; при цьому і  $p < 0$ ).

Розв’язки рівняння (B.3) в такому разі можна визначати за формулами

$$y_1 = 2\sqrt{-A} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad y_2 = 2\sqrt{-A} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3}, \\ y_3 = 2\sqrt{-A} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}.$$

Отже, відповідно до (B.2)

$$-x_i = -y_i + \frac{b}{3a} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{B.4})$$

При цьому обов’язково  $-x_i > 0$ .

Приклад 1° (Регулярні системи, див. стор. 85 і (5.38)). Нехай кубічне рівняння має вигляд:  $x^3 + 6x^2 + 10x + 4 = 0$ . Послідовно знайдемо:  $p = -2; q = 0; b/(3a) = 2; -A = 2/3; B = 0; D < 0; \varphi = \pi/2; y_1 = -\sqrt{2}; y_2 = 0; y_3 = \sqrt{2}$ . Отже  $x_1 = -\sqrt{2} - 2 < 0, x_2 = -2 < 0, x_3 = \sqrt{2} - 2 < 0$ . (Ці ж значення коренів, див. стор. 85, впливають з формули  $\Lambda_i = 2(\cos \theta_i - 1)$ , де  $\theta_i = i\pi/4, k = 3$ ).

Приклад 2° (Консоль, для якої точних співвідношень не існує; див. (5.40) на стор. 85).  
 Задано рівняння  $x^3 + 5x^2 + 6x + 1 = 0$  з додатними коефіцієнтами, для якого

$$p = -\frac{7}{3}, \quad q = \frac{7}{27}, \quad D = \left(-\frac{1}{3} \frac{7}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2} \frac{7}{27}\right)^2 < 0, \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2\sqrt{7}}, \quad 2\sqrt{-A} = \frac{2\sqrt{7}}{3};$$

$$y_1 = 1,4686044 \quad y_2 = -1,5803129 \quad y_3 = 0,1117085$$

Відповідно до (B.4)  $x_i = y_i - \frac{5}{3}$ , звідки:  $x_1 = -0,1980623 < 0$ ;  $x_2 = -3,2469796 < 0$ ;  
 $x_3 = -1,5549582 < 0$ . За формулами Вієта, як і слід було сподіватись,

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = 5, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 6, \quad -x_1x_2x_3 = 1$$

(за належного контролю точності обчислень).

Загальний вигляд **рівняння четвертого степеня** є таким:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (\text{B.5})$$

(коефіцієнти  $a, b, c, d, e$  вважаються довільними числами, але  $a \neq 0$ ).

Розділивши (B.5) на  $a$ , зробимо підстановку

$$x = y - \frac{b}{4a} \quad (\text{B.6})$$

і прийдемо до рівняння

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \quad (\text{B.7})$$

Розв'язок цього рівняння вже недоцільно записувати формулами, а тому лише окреслимо процес, що веде до розв'язку.

Розглянемо тотожність [124]

$$\begin{aligned} y^4 + py^2 + qy + r &\equiv (y^2 + u)^2 - (Ay + B)^2 \equiv \\ &\equiv y^4 + (2u - A^2)y^2 + (-2AB)y + (u^2 - B^2). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Прирівнюючи (відповідні) коефіцієнти при однакових степенях  $y$ , знайдемо співвідношення

$$p = 2u - A^2, \quad q = -2AB, \quad r = u^2 - B^2, \quad (\text{B.9})$$

або

$$A^2 = 2u - p, \quad 2AB = -q, \quad B^2 = u^2 - r. \quad (\text{B.10})$$

Звідси:  $4A^2B^2 = (-q)^2$ ;  $A^2B^2 = (2u - p)(u^2 - r)$ . Отже,  $4(2u - p)(u^2 - r) = (-q)^2$ ,  
 або

$$8u^3 - 4pu^2 - 8ru + (4pr - q^2) = 0. \quad (\text{B.11})$$



Рівняння (В.11) третього степеня відносно  $u$  називається кубічною резольвентою первісного рівняння (В.5) (четвертого степеня). Спосіб розв'язування (В.11) вже розглядався тут.

Нехай  $u$  — один з коренів рівняння (В.11); тоді можна обчислити

$$A = \sqrt{2u - p}, \quad B = \sqrt{u^2 - r}$$

(тут  $A$  і  $B$  повинні б набирати по два значення; однак, беручи до уваги умову  $2AB = -q$ , два значення з чотирьох відхилено).

З тотожності (В.8) випливає, що розв'язки рівняння (В.7) співпадають з розв'язками таких двох квадратних рівнянь:

$$y^2 - Ay + u - B = 0, \quad y^2 + Ay + u + B = 0. \quad (\text{В.12})$$

Зауважимо, що коли коефіцієнти первісного рівняння — дійсні числа, то кубічна резольвента матиме хоча б один дійсний корінь, який зручно використовувати для поточних обчислень.

Приклад 3° Розглянемо рівняння (регулярна система; стор. 85, співвідношення (5.40))

$$\Lambda^4 + 7\Lambda^3 + 15\Lambda^2 + 10\Lambda + 1 = 0. \quad (\text{В.13})$$

Проводячи заміну  $\Lambda = y - \frac{7}{4}$  (див. (В.6)), одержуємо:

$$y^4 - \frac{27}{8}y^2 + \frac{3}{8}y + \frac{333}{256} = 0.$$

Беручи до уваги залежності (В.9) і (В.10), матимемо:

$$A^2 = 2u + \frac{27}{8}; \quad 2AB = -\frac{3}{8}; \quad B^2 = u^2 - \frac{333}{256}.$$

Отже,

$$4A^2B^2 = 4\left(2u + \frac{27}{8}\right)\left(u^2 - \frac{333}{256}\right) = \frac{9}{64}.$$

Звідси отримуємо кубічну резольвенту

$$u^3 + \frac{27}{16}u^2 - \frac{333}{256}u - \frac{9 \cdot 1007}{16 \cdot 256} = 0.$$

Підставляючи сюди

$$u = z - \frac{9}{16}, \quad (\text{В.14})$$

матимемо рівняння  $z^3 - \frac{9}{4}z - \frac{9}{8} = 0$ , для якого

$$D = \left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{9}{16}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{3^3}{2^8} < 0, \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2\left(\sqrt{-p/3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже  $\varphi = 30^\circ$ ,  $z_1 = \sqrt{3} \cos 10^\circ = 1,7057371$ . Беручи до уваги (В.14), маємо  $u_1 = 1,1432371$ .

За формулами (В.10) знаходимо:

$$A = \sqrt{2u_1 + 3,375} = 2,3793853; \quad B = -\sqrt{u_1^2 - 1,3007813} = 0,0788023.$$

Обчисливши  $u_1 - B = 1,2220394$  визначимо корені першого з рівнянь (В.12):  $y_1 = 1,6293842$ ;  $y_2 = 0,7500005$ . Аналогічно, враховуючи, що  $u_1 + B = 1,0644348$  з другого рівняння (В.12) одержуємо  $y_3 = -0,597296$ ;  $y_4 = -1,7820893$ . Відповідні розв'язки рівняння (В.13) матимемо, віднімаючи від  $y_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) число 1,75:

$$\Lambda_1 = -0,1206152; \quad \Lambda_2 = -0,9999995 \approx -1 \quad \Lambda_3 = -2,347296; \quad \Lambda_4 = -3,5320893$$

$$(\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 = 1, \quad \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4 = 7).$$

Приклад 4° Розглянемо ще одне рівняння (регулярна система; стор. 85, (5.38)):

$$\Lambda^4 + 8\Lambda^3 + 21\Lambda^2 + 20\Lambda + 5 = 0. \quad (\text{В.15})$$

Заміною

$$\Lambda = y - \frac{8}{4} = y - 2 \quad (\text{В.16})$$

з (В.15) отримуємо рівняння  $y^4 - 3y^2 + 1 = 0$ . За формулами (В.10) знаходимо:

$$A^2 = 2u + 3; \quad 2AB = 0; \quad B^2 = u^2 - 1. \quad (\text{В.17})$$

Отже, кубічна резольвента тут є такою:  $(2u + 3)(u^2 - 1) = 0$ , причому  $u_1 = 1$ .

З (В.17) випливає, що  $A = \sqrt{5}$ ,  $B = 0$ . Тому рівняння (В.12) у даному випадку мають вигляд:  $y^2 - \sqrt{5}y + 1 = 0$ ;  $y^2 + \sqrt{5}y + 1 = 0$ . Їх коренями є  $y_1 = 1,618034$ ,  $y_2 = 0,618034$ ,  $y_3 = -y_2$ ,  $y_4 = -y_1$ . Підставляючи ці корені в (В.16), знайдемо числа:

$$\Lambda_1 = -0,381966; \quad \Lambda_2 = -1,381966; \quad \Lambda_3 = -2,618034; \quad \Lambda_4 = -3,618034$$

Ті самі числа можна отримати на підставі точної формули (наведеної на стор. 85)

$$\Lambda_j = -2(1 - \cos\theta_j) \quad (\theta_j = \frac{j\pi}{5}, \quad j = \overline{1,4}).$$

## С Операції з деякими факторіальними рядами

1<sup>0</sup>. Множення “факторіальних” рядів. Розглянемо добуток

$$AB = C, \quad (C.1)$$

в якому множники є факторіальними рядами

$$A = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \dots + \frac{a_k}{k!} + \dots, \quad (C.2)$$

$$B = \frac{b_0}{0!} + \frac{b_1}{1!} + \frac{b_2}{2!} + \dots + \frac{b_k}{k!} + \dots \quad (C.3)$$

У вигляді аналогічного факторіального ряду подамо і добуток (C.1) рядів (C.2) та (C.3):

$$C = \frac{c_0}{0!} + \frac{c_1}{1!} + \frac{c_2}{2!} + \dots + \frac{c_k}{k!} + \dots, \quad (C.4)$$

де  $c_i$  — коефіцієнти, які підлягають визначенню через коефіцієнти  $a_i$  та  $b_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k, \dots$ ).

Перш за все укладемо таку “таблицю-трикутник”

$a_0b_0$								
$a_0b_1$	$a_1b_0$							
$a_0b_2$	$2a_1b_1$	$a_2b_0$						
$a_0b_3$	$3a_1b_2$	$3a_2b_1$	$a_3b_0$					
$a_0b_4$	$4a_1b_3$	$6a_2b_2$	$4a_3b_1$	$a_4b_0$				
$a_0b_5$	$5a_1b_4$	$10a_2b_3$	$10a_3b_2$	$5a_4b_1$	$a_5b_0$			
$a_0b_6$	$6a_1b_5$	$15a_2b_4$	$20a_3b_3$	$15a_4b_2$	$6a_5b_1$	$a_6b_0$		
$a_0b_7$	$7a_1b_6$	$21a_2b_5$	$35a_3b_4$	$35a_4b_3$	$21a_5b_2$	$7a_6b_1$	$a_7b_0$	
$a_0b_8$	$8a_1b_7$	$28a_2b_6$	$56a_3b_5$	$70a_4b_4$	$56a_5b_3$	$28a_6b_2$	$8a_7b_1$	$a_8b_0$
.....								

в якій, як і в арифметичному трикутнику (див. підрозділ 2.7) фігурують біноміальні коефіцієнти. Виявляється, що суми елементів кожного рядка з “таблиці-трикутника” власне і є коефіцієнтами  $c_i$  ряду (C.4):

$$a_0 b_0 = c_0,$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1,$$

$$a_0 b_2 + 2a_1 b_1 + a_2 b_0 = c_2,$$

$$a_0 b_3 + 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + a_3 b_0 = c_3,$$

.....

$$a_0 b_8 + 8a_1 b_7 + 28a_2 b_6 + 56a_3 b_5 + 70a_4 b_4 + 56a_5 b_3 + 28a_6 b_2 + 8a_7 b_1 + a_8 b_0 = c_8,$$

.....

$$\sum_{i=0}^k C_k^i a_i b_{k-i} = c_k,$$

.....

Отже, правило множення “факторіальних” рядів (С.2)-(С.3) у порівнянні з правилами множення звичайних рядів вирізняється необхідністю враховувати біноміальні коефіцієнти (які зручно визначати з арифметичного трикутника, див. 2.7). Доречним є таке зауваження: якщо в (С.2) і (С.3) деякі факторіали відсутні, то відповідні коефіцієнти вважаються нулями; при цьому анулюються відповідні елементи з наведеної “таблиці-трикутника”.

**2<sup>0</sup> Закриті формули (суми) “факторіальних” рядів.** Лінійно-незалежними розв’язками диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами як і звідних рівнянь є, зокрема, ряди вигляду (С.2), в яких величини  $a_i$  — степеневі функції аргумента  $x$  (або й деякі складніші функції, див., наприклад, (3.36) чи (3.66)). Питання про закриті формули для таких рядів, зокрема, відповідних функцій Коші, розглядалися в розділах 2-4, причому застосовувалися традиційні засоби — розв’язки вигляду  $e^{\lambda_i x}$ , де  $\lambda_i$  — корені характеристичних рівнянь. Покажемо, що є й інші засоби, основою яких служать певні тотожності.

Розглянемо функцію

$$f(x, \beta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^j x^{2j+2}}{(2j+2)!} \equiv \beta^{-1} (\operatorname{ch} \sqrt{\beta x} - 1). \quad (\text{С.5})$$

Неважко переконатися, що

$$\frac{1}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} f(x, \beta)}{\partial \beta^{2n+1}} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n+1+m}^{2n+1} \frac{\beta^m x^{2m+4n+4}}{(2m+4n+4)!}. \quad (\text{С.6})$$

В розділі 12 (див. (12.21), (12.50)) ряди (С.6) позначалися як  $f_{4,n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Суми цих рядів можна визначати в замкненому вигляді, обчислюючи відповідні похідні функції (С.5). Для цього введемо позначення:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\beta} x}{\beta} = \frac{1}{\beta} + \frac{x^2}{2!} + \frac{\beta x^4}{4!} + \frac{\beta^2 x^6}{6!} + \dots, \\ \psi_2 &= \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\beta} x}{\beta\sqrt{\beta}} = \frac{1}{\beta} + \frac{x^3}{3!} + \frac{\beta x^5}{5!} + \frac{\beta^2 x^7}{7!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.7})$$

Щоб знаходити вказані похідні, доцільно застосовувати формули (які випливають безпосередньо з (С.7)):

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} = \frac{1}{2} x \psi_2 - \beta^{-1} \psi_1, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta} = \frac{1}{2} x \beta^{-1} \psi_1 - \frac{3}{2} \beta^{-1} \psi_2$$

(подібно обчислюються й вищі похідні, а також похідні за  $x$  і змішані похідні).

Спираючись на даний спосіб, просумуємо ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{1+m}^1 \frac{\beta^m x^{2m+4}}{(2m+4)!} = \frac{x^4}{4!} + \frac{2\beta x^6}{6!} + \frac{3\beta^2 x^8}{8!} + \dots, \quad (\text{C.8})$$

що визначає функцію  $f_{4,0}$ . Запишемо (С.5) як

$$f(x, \beta) = \psi_1 - \frac{1}{\beta} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^j x^{2j+2}}{(2j+2)!}.$$

Беручи до уваги тотожність (С.6) та співвідношення (С.7), знаходимо

$$f_{4,0} = \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{2} x \psi_2 - \beta^{-1} \psi_1 + \beta^2. \quad (\text{C.9})$$

Це і є сума ряду (С.8).

Передбачаючи можливість застосування функції (С.9) до задачі про двобічну оцінку флатерного значення стежної сили (підрозділ 12.6), зауважимо, що в цьому випадку

$$\beta = -p, \quad k = \sqrt{p} > 0, \quad p = \frac{Hl^2}{EJ},$$

$$\psi_1(-p) = -\frac{1}{k^2} \cos kx, \quad \psi_2(-p) = -\frac{1}{k^3} \sin kx. \quad (\text{C.10})$$

З (С.9) і (С.10) одержуємо:

$$f_{4,0} = \frac{1}{2k^4} (2 - 2 \cos kx - kx \sin kx), \quad (\text{С.11})$$

або за позначення  $kx = z$  :

$$f_{4,0} = \frac{x^4}{2z^4} (2 - 2 \cos z - z \sin z). \quad (\text{С.12})$$

Цілком подібно можна обчислити суми рядів (С.6) для  $n=1$  та  $n=2$  (у випадку дотримання співвідношень (С.10)):

$$f_{4,1} = \frac{x^8}{2^3 3! z^8} \left( (z^3 - 33z) \sin z + (9z^2 - 48) \cos z + 48 \right); \quad (\text{С.13})$$

$$f_{4,2} = \frac{x^{12}}{2^5 5! z^{12}} \left( (-z^5 + 185z^3 - 2895z) \sin z + \right. \\ \left. + (-20z^4 + 975z^2 - 3840) \cos z + 3840 \right) \quad (\text{С.14})$$

(аналогічно визначалися суми відповідних рядів у задачі про стійкість стержня з проміжною опорою, коли досліджувалося питання про вплив її розташування на характер втрати стійкості, див 12.7).

З формул (С.12), (С.13) і (С.14) при  $z \rightarrow 0$ , обчислюючи (наприклад, за правилом Лопітала) невизначеності типу  $0/0$ , одержуємо відповідно вели-

чини  $\frac{x^4}{4!}$ ,  $\frac{x^8}{8!}$ ,  $\frac{x^{12}}{12!}$  (як і повинно бути, беручи до уваги ряди (С.6)).

Визначимо тепер з нестачею та лишком флатерне критичне навантаження  $p_{\text{фл}}$  на стержень за дії стежної стискувальної сили  $H$ . Відповідне характеристичне рівняння

$$F_0(1, \beta, \delta) \equiv 1 - \delta F_4(1, \beta, \delta) = \\ = 1 - 2f_{4,0}(1, \beta)\delta + 2^3 f_{4,1}(1, \beta)\delta^2 - 2^5 f_{4,2}(1, \beta)\delta^3 + \dots$$

розглядалося в 12.4 (див. (12.35), (12.50)). Тут застосовуються позначення (С.10) — (С.11) і співвідношення (С.12) — (С.14); причому в цьому випадку

$$\delta = \frac{ml^4}{f} \lambda^2, \quad x = 1.$$

Отже, коефіцієнти характеристичного ряду (11.2) є такими:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = 2f_{4,0}, \quad B_4 = 2^3 f_{4,1}, \quad B_6 = 2^5 f_{4,2}.$$

Згідно з (11.21), потрібно визначити найменші додатні корені рівнянь

$$D_- \equiv B_4(B_2^2 - 4B_0B_4) = 0 \quad \text{та} \quad D_- + B_0B_2B_6 = 0. \quad (\text{C.15})$$

Тоді можна буде записати співвідношення  $P_- < P_{\text{фл}} < P_+$ .

Для прикладу укладемо таблицю ( $x = 1$ ):

$k$	$B_2$	$B_4 \cdot 10^6$	$B_6 \cdot 10^8$	$\cos k$	$\sin k$
0	0,08 (3)	198,4	6,6806	1	0
$\pi/2$	0,0704992	177,6	6,2781	0	1
$\pi$	0,0410639	126,0	4,7943	-1	0
4,4361	0,0175939	77,4	3,3999	-0,2727874	-0,9620744
4,4360	0,0175954	77,4	3,4001	-0,2728831	-0,9620472

Беручи до уваги, що для останнього рядка наведеної таблиці

$$k^2 = 19,678983, \quad k^3 = 87,2979, \quad k^4 = 387,26238, \quad k^5 = 1717,93,$$

обчислюємо найменший додатний корінь першого з рівнянь (C.15) —  $k_- = 4,4361$ , при цьому

$$B_2^2 - 4B_0B_4 = -5,4683 \cdot 10^{-8};$$

для  $k_- = 4,436$  ця величина становить

$$B_2^2 - 4B_0B_4 = 4,8595 \cdot 10^{-8}.$$

Отже,  $p_- \approx 19,6785$ .

Зауважимо, що для  $k_- = 4,4361$  ліва частина другого з рівнянь (C.15) є більшою від нуля:

$$D_- + B_0B_2B_6 = -4,2325 \cdot 10^{-12} + 3,3999 \cdot 10^{-8} = 3,3995 \cdot 10^{-8} > 0.$$

Цілком подібно визначаємо величину  $p_+ \approx 20,208$ .

---

---

## ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

---

---

1. Диференціальні рівняння/ Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф.– Київ: Вища школа, 1981.– 504 с.
2. Зорій Л. Метод функцій впливу та дискретизації в задачах динаміки пружних систем// Праці наукового товариства ім. Шевченка.– 1997.– Т. І.– С. 579-587.
3. Зорій Л. М. Об одном фундаментальном свойстве функций влияния// Докл. АН УССР.– Сер. А.– 1978.– № 9.– С. 806-808.
4. Зорій Л. М. О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений// Докл. АН УССР.– Сер. А.– 1979.– № 5.– С. 351-355.
5. Зорій Л. М. Об универсальных характеристических уравнениях в задачах колебаний и устойчивости упругих систем// Известия АН УССР.– МТТ.– 1982.– № 6.– С. 155-162.
6. Зорій Л. М. К применению обобщенных функций в аналитических методах исследования сложных упругих систем// Докл. АН УССР.– Сер. А.– 1978.– № 11.– С. 991-994.
7. Зорій Л. Фундаментальные решения и методы исследования деформируемых систем// Модели в проектировании и конструировании машин.– XIII Международный коллоквиум.– Гливице, ПНР.– 1989.– С. 277-284.
8. Hashtchuk P., Zoryj I. The fundamentals of a generalized technique for dynamic analysis of mechanical systems// Vibrations in physical systems: XVIIIth Symposium.– Poznań-Błażejewko. May 27-30, 1998.– P. 139-140.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям/ Пер. с нем.– М.: Наука, 1976.– 576 с.
10. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т.– М.: Машиностроение, 1978-1981.– Т. 1: Колебания линейных систем.– 1978.– 352 с.– Т. 2: Колебания нелинейных механических систем.– 1979.– 351 с.– Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов.– 1980.– 544 с.– Т. 4: Вибрационные процессы и машины.– 1981.– 509 с.– Т. 5: Измерения и испытания.– 1981.– 496 с.– Т. 6: Защита от вибрации и ударов.– 1981.– 456 с.
11. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1981.– 512 с.
12. Шварц Л. Математические методы для физических наук/ Пер. с франц.– М.: Мир, 1965.– 412 с.
13. Челомей С. В. Об одном методе расчета собственных колебаний прямых стержней// Известия АН СССР.– МТТ.– 1977.– № 6.– С. 167-170.
14. Василенко Н. В. Теория колебаний.– Киев: Вища школа, 1992.– 429 с.
15. Зорій Л. М. Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач для систем з розподіленими параметрами// Доп. АН УРСР.– 1968.– № 12.– С. 1072-1075.
16. Балінський А. І., Зорій Л. М. Про одне зображення загальних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами// Диференціальні рівняння та їх застосування: Вісн. Львів. політехн. ін-ту.– Львів: Вид-во при ЛДУ, 1973.– С. 83-88.



17. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач.– М.: Оборонгиз, 1956.– 151 с.
18. Зорій Л. М. Развитие метода начальных параметров и динамическое поведение упругих систем// Механика неоднородных структур: Тез. докл. I Всесоюзной конф.– Киев: Наукова думка, 1983.– С. 88.
19. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.– М.: ГИТТЛ, 1953.– 468 с.
20. Микеладзе Ш. Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложения к задачам теории упругости.– М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.– 292 с.
21. Балінський А. І., Зорій Л. М. Про одне зображення загального розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами// Доп. АН УРСР.– Сер. А.– 1971.– № 3.– С. 195-197.
22. Байдак Д. А. Вопросы обоснования динамического метода и применения двусторонних оценок при исследовании малых колебаний и устойчивости равновесия упругих стержней: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.– Львов, 1973, 14 с.
23. Байдак Д. А., Зорій Л. М. Про дослідження коливаль і стійкості стержнів змінної жорсткості методом двосторонніх оцінок// Доп. АН УРСР.– Сер. А.– 1972.– № 6.– С. 548-551.
24. Тацій Р. М. Двусторонние оценки собственных значений в задачах о колебаниях и устойчивости упругих пластинок сложной формы: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.– Львов, 1978, 20 с.
25. Гайвась Б. И. Колебания и устойчивость упругих стержней с включениями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.– Киев, 1986, 21 с.
26. Трикоми Ф. Дж. Интегральные уравнения/ Пер. с англ.– М.: ИИЛ, 1960.– 299 с.
27. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1988.– 552 с.
28. Посацький С. Л. Опір матеріалів.– Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1973.– 404 с.
29. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями/ Пер. с англ.– М.: Наука, 1968.– 503 с.
30. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів.– Київ: Вища школа, 1993.– 655 с.
31. Зорій Л. М. До теорії стійкості систем з розподіленими параметрами// Доп. АН УРСР.– Сер. А.– 1968.– № 11.– С. 992-995.
32. Балинский А. И., Зорій Л. М. К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров// ФХММ.– 1971.– № 3.– С. 99-100.
33. Зорій Л. М. Об условиях отсутствия дестабилизации в системах с распределенными параметрами// Прикладная механика.– 1969.– Т. 5.– Вып. 9.– С. 98-102.
34. Зорій Л. М., Исаев Ю. И. Об устойчивости упругого стержня в среде с большим сопротивлением// ФХММ.– 1970.– № 6.– С. 106-107.
35. Зорій Л. М., Терещушко И. И. О влиянии осевых сил на поперечные колебания упругих стержней// Вестник Львов. политехн. ин-та.– 1971.– № 63.– С. 135-139.
36. Балинский А. И. Влияние конструктивных параметров на частоты колебаний тонкостенных стержней// ФХММ.– 1974.– № 6.– С. 92-94.
37. Гайвась Б. І., Зорій Л. М. Про вплив тертя на стійкість циліндричних оболонок у надзвуковому газовому потоці// Доп. АН УРСР.– Сер. А.– 1970.– № 9.– С. 807-810.
38. Бердник Я. С., Зорій Л. М. Один спосіб якісного дослідження коливаль і стійкості систем з розподіленими параметрами// Доп. АН УРСР.– Сер. А.– 1973.– № 7.– С. 621-623.
39. Зорій Л. М. Тацій Р. М. До дослідження коливаль і стійкості пружних пластинок довільної форми// Доп. АН УРСР.– 1974.– № 2.– С. 154-157.
40. Зорій Л. М. К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем// Мат. методы и физ.-мех. поля.– 1978.– Вып. 7.– С. 16-20.

41. Зорий Л. М., Ли Гюн-ы. Устойчивость консольного стержня с резервуаром при действии следящей и консервативной сил// Сопrotивление материалов и теория сооружений.– 1971.– Вып. 14.– Киев: Будівельник.– С. 103-105.
42. Антолюк Я. П., Зорий Л. М., Попов Б. А. Исследование методом характеристических рядов устойчивости равновесной формы упругих систем// Мат. методы и физ.-мех. поля.– 1983.– Вып. 17.– С. 87-90.
43. Зорий Л. М., Исаев Ю. И. Об одном способе построения области достоверной устойчивости упругих систем// Вестн. Львов. политехн. ин-та.– 1987.– № 212.– С. 38-40.
44. Расчеты и испытания на прочность. Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости и малых колебаний прямолинейных стержней переменного сечения. Методические рекомендации МР 213-87.– М.: Госстандарт СССР.– Всесоюзный научно-исследоват. ин-т по нормализации в машиностроении (ВНИИНМАШ), 1987.– 43 с.
45. Jaroszewicz J., Zoryj L. Metody analizy drgań i stateczności kontynuualno-dyskretnych układów mechanicznych.– Białystok: Politechnika Białostocka, 1997.– 128 s.
46. Зорий Л. М. Метод функцій впливу та вимушені коливання стержнів// Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях: Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 70-річчю від дня народження професора П. С. Казімірського. Львів, 5-7 жовтня 1995 р.– Ч. 2.– С. 27.
47. Кожевников С. Н. Динамика нестационарных процессов в машинах.– Киев: Наукова думка, 1986.– 286 с.
48. Drganja i fale w ciałach stałych: Biblioteka mechaniki stosowanej/ Dzygadło Z., Kaliski S., Solarz L., Włodarczyk E.: Pod ogólną red. naukową S. Kaliskego. PAN. Instytut Podstaw problemów techniki.– Warszawa: PWN, 1966.– 1191 s.
49. Гащук П., Зорий Л. Характеристичні рівняння та якісне дослідження динаміки складених пружно-жорстких систем// Сучасні проблеми механіки і математики: Матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 70-річчю з дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 25-річчю заснованого ним Інституту прикладних проблем механіки і математики.– Львів: Ін-т проблем механіки і математики НАН України, 25-28 травня 1998 р.– С. 87-88.
50. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник: В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко.– М.: Машиностроение, 1968.– Т. 1.– 831 с.– Т. 2.– 463 с.– Т. 3.– 567 с.
51. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле/ Пер. с англ.– М.: Машиностроение, 1985.– 472 с.
52. Леонов М. Я. Основы механики упругого тела.– Т. 1.– Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1963.– 328 с.
53. Леонов М. Я., Зорий Л. М. Обзор развития теории устойчивости равновесия упругих стержней// Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении.– 1961.– Т. 7.– № 7.– С. 119-126.
54. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем.– М.: Гостехиздат, 1956.– 600 с.
55. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.– М.: Физматгиз, 1961.– 339 с.
56. Ден-Гартог Дж. Механические колебания/ Пер. с англ.– М.: Физматгиз, 1960.– 580 с.
57. Зорий Л. М. Метод частичной дискретизации в задачах динамики упругих систем с переменным распределением параметров // Новые подходы к решению диф. Уравнений: Тез. докл. Всесоюзн. конф.– М., 1987.– С. 49-50.
58. Зорий Л. М. О новых применениях фундаментальных решений при изучении неоднородных структур // Механика неоднородных структур: Тез. докл. II Всесоюзн. конф.– Львов, 1987.– С. 112-113.

59. Зорий Л. М. Метод частичной дискретизации в задачах устойчивости и колебаний упругих тел // *Механика: Материалы УП симпозиума по динамике конструкций.*– № 18.– 1989.– С. 77-80 (ПНР).
60. Зорий Л. М. Задачи динамики упругих систем и метод частичной дискретизации // *Гибкая автоматизация '90: Тез. докл. Международной конф.*– Братислава, 1990.– С. 146-147.
61. Лазарян В. А., Конашенко С. И. Обобщенные функции в задачах механики.– Киев: Наукова думка, 1974.– 191 с.
62. Ярошевич Е., Зорий Л. Изгибные колебания и устойчивость балок с переменными параметрами// *Прикладная механика.*– 1994.– Т. 30.– № 9.– С. 75-81.
63. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем.– М.: ГИТТЛ, 1955.– 567 с.
64. Онишвили О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек.– М.: Изд-во АН СССР, 1957.– 195 с.
65. Смирнов А. И. Собственные колебания и флаттер трехслойных цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа// *Докл. АН СССР.*– 1969.– Т. 186.– № 3.– С. 533-536.
66. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек.– Киев: Наукова думка, 1964.– 288 с.
67. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины.– М.: Физматгиз, 1959.– 294 с.
68. Репин А. А. Свободные колебания конических оболочек при различных граничных условиях// *Прикладная механика.*– 1972.– Т. 8.– № 1.– С. 35-40.
69. Зорій Л., Сорокатиї М. Радіальні коливання куль і догих циліндрів// *Сучасні проблеми механіки і математики: Матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 70-річчю з дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 25-річчю заснованого ним Інституту прикладних проблем механіки і математики.*– Львів: НАН України, Ін-т проблем механіки і математики, 25-28 травня 1998 р.– С. 95.
70. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем.– М.: Машиностроение, 1948.– 268 с.
71. Микеладзе Ш. Е. Некоторые задачи строительной механики.– М.-Л.: Гостехиздат, 1951.– 292 с.
72. Бернштейн С. А., Керопян К. К. Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции.– М.: Госстройиздат, 1960.– 281 с.
73. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем.– М.: Гостехиздат, 1955.– 476 с.
74. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций/ Пер. с англ.– М.: Мир, 1971.– 192 с.
75. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения.– М.: Наука, 1971.– 312 с.
76. Ляпунов А. М. Общая теория об устойчивости движения.– М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.– 472 с.
77. Четаев Н. Г. Устойчивость движения.– М.: Гостехиздат, 1955.– 207 с.
78. Николаи Е. Л. К вопросу об устойчивости скрученного стержня. Труды по механике, ГИТТЛ, М., 1955.– С. 388-418.
79. Кац А. М. К вопросу о критерии аperiодической устойчивости// *Прикладная математика и механика.*– 1951.– Т. 15. Вып. 1. С. 120.
80. Зорий Л. М. Динамическая устойчивость сжатых стержней: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.– Днепропетровск, 1962, 8 с.
81. Исаев Ю. И. Двухсторонние оценки критических нагрузок в неконсервативных задачах упругой устойчивости: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.– Львов, 1975, 26 с.
82. Таций Р. М. О порядке роста характеристического ряда// *Математические методы и физико-механические поля.*– 1981.– № 13.– С. 38-48.
83. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. С. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций.– М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949.– 332 с.
84. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел.– Киев: Наукова думка, 1990.– 227 с.

85. Джанелидзе Г. Ю. Об устойчивости стержня при действии следящей силы// Труды Ленинград. политехн. ин-та.– 1958.– № 192.– С. 21-27.
86. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки.– М.: Наука, 1979.– 384 с.
87. Рокар И. Неустойчивость в механике/ Пер. с франц.– М.: Изд-во иностр. лит., 1959.– 287 с.
88. Leipholtz H. Über den Einfluß eines Parameters auf die Stabilitätskriterien von nichtkonservativen Problemen der Elastomechanik// Ingr.-Arch.– 1965.– Nr 4.– S. 34-38.
89. Зорий Л. М. К устойчивости равновесия неконсервативных систем// Вопросы механики реального твердого тела.– 1964.– Вып. 3.– Киев: Наукова думка.– С. 113-119.
90. Швейко Ю. Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа// Известия АН СССР. Отд. техн. наук, Механика и машиностроение.– 1960.– № 6.– С. 74-79.
91. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.– 419 с.
92. Ананьев И. В., Тимофеев П. И. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование.– М.: Машиностроение, 1965.– 526 с.
93. Дейнеко К. С., Леонов М. Я. Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня// Прикладная математика и механика.– 1955.– Т. 19.– № 6.– С. 738-744.
94. Мовчан А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе// Прикладная математика и механика.– 1957.– Т. 21.– № 2.– С. 231-243.
95. Зорий Л. М., Чернуха Ю. А. Влияние опорных закреплений на динамическую устойчивость упругого стержня// Прикладная механика.– 1971.– Т. 7.– Вып. 2.– С. 134-136.
96. Зорий Л. М., Сорокатый Н. И. О стабилизирующем влиянии геометрических и жесткостных параметров на флаттер панелей с сосредоточенными массами в сверхзвуковом потоке// Известия Российской АН.– МТТ.– 1992.– № 1.– С. 144-152.
97. Fetlis H. E. Torsional vibration modes of tapered bars// J. Appl. Mech.– 1962.– No 19.– P. 220.
98. Cobble M. H. Finite transform solution of the general conical cantilever beams problem// Proc. 4th Techn. Meet. Soc. Eng. Sci. Raleigh.– New York, 1966.– P. 453-461.
99. Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы.– М.: Госстройиздат, 1958.– 502 с.
100. Вахитов М. Б., Селин И. С. Устойчивость и колебания стержней переменного сечения при действии следящей нагрузки// Труды Казанского авиационного ин-та, 1969.– Вып. 113.– С. 6-14.
101. Зорий Л. М. Об устойчивости стержня при неконсервативной нагрузке// Вопросы машиноведения.– 1964.– Т. 10.– Вып. 9.– С. 23-34.
102. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов.– М.: Наука, 1953.– 165 с.
103. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.– М.: Изд.-во ВИНТИ, 1973.– 272 с.
104. Су. Применение метода v-разбиений к изучению систем с запаздывающими следящими силами// Прикладная механика.– 1970.– № 2.
105. Гопак К. Н. Потеря устойчивости свободным стержнем, ускоренно движущимся под действием следящей силы// Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение.– 1960.– № 4.– С. 136-137.
106. Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации// Прикладная математика и механика.– 1940.– Т. 4.– Вып. 1.– С. 79-92.
107. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях.– М.: Мир, 1970.– 328 с.
108. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы под ред. Григолюка Э. И.– М.: Наука, 1971.– 807 с.
109. Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли.– М.: Недра, 1965. 379 с.
110. Новацкий В. Динамика сооружений.– М.: Госстройиздат, 1963.– 376 с.

111. Сеницкий Ю. З. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований.– Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985.– 175 с.
112. Байдак Д. А., Зорий Л. М. Один способ обоснования динамического метода исследования упругих систем// Математические методы и физико-механические поля.– 1975.– Вып. 1.– С. 89-98.
113. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.– М.: Наука, 1969.– 526 с.
114. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.– М.: Наука, 1965.– 519 с.
115. Приближенное решение операторных уравнений/ Красносельский М. А., Вайнико Г. М., Забейко П. П., Рutiцкий Я. Б., Стеценко В. Я.– М.: Наука, 1969.– 455 с.
116. Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов// Изв. вузов. СССР, Математика.– 1964.– № 2.– С. 82-93.
117. Михайлов В. П. О базисах Рисса в  $L_2(0, 1)$ // Докл. АН СССР.– 1962.– Т. 144.– № 5.– С. 981–984.
118. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4.– М.: Физматгиз, 1958.– 812 с.
119. Como M., Grimaldi A. On the foundation of the stability theory of elastic structures// Meccanica.– 1975.– V. 10.– N 3.– P. 171-177.
120. Персидский К. П. Об устойчивости решений бесконечной системы уравнений// Прикл. математика и механика.– 1948.– Т XII.– Вып. 5.– С. 597–612.
121. Байдак Д. А., Зорий Л. М. Обоснование динамического метода исследования некоторых двумерных систем// Математические методы и физико-механические поля.– 1977.– Вып. 5.– С. 93-96.
122. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров): Определения, теоремы, формулы/ Пер. с англ.– М.: Наука, 1977.– 832 с.
123. Математическая энциклопедия: В 5 т.– М.: Советская энциклопедия, 1977-1985.– Т. 1: А–Г.– 1977.– 1152 с.– Т. 2: Д–Коо.– 1979.– 1104 с.– Т. 3: Коо–Од.– 1982.– 1184 с.– Т. 4: Ок–Сло.– 1984.– 1216 с.– Т. 5: Слу–Я.– 1985.– 1248 с.
124. Малая математическая энциклопедия/ Э. Фрид, И. Пастор, И. Рейман, П. Ревес, И. Ружа/ Пер. с венг.– Будапешт: Изд-во Академии наук Венгрии, 1976.– 693 с.

---

---

# ЗМІСТ

---

---

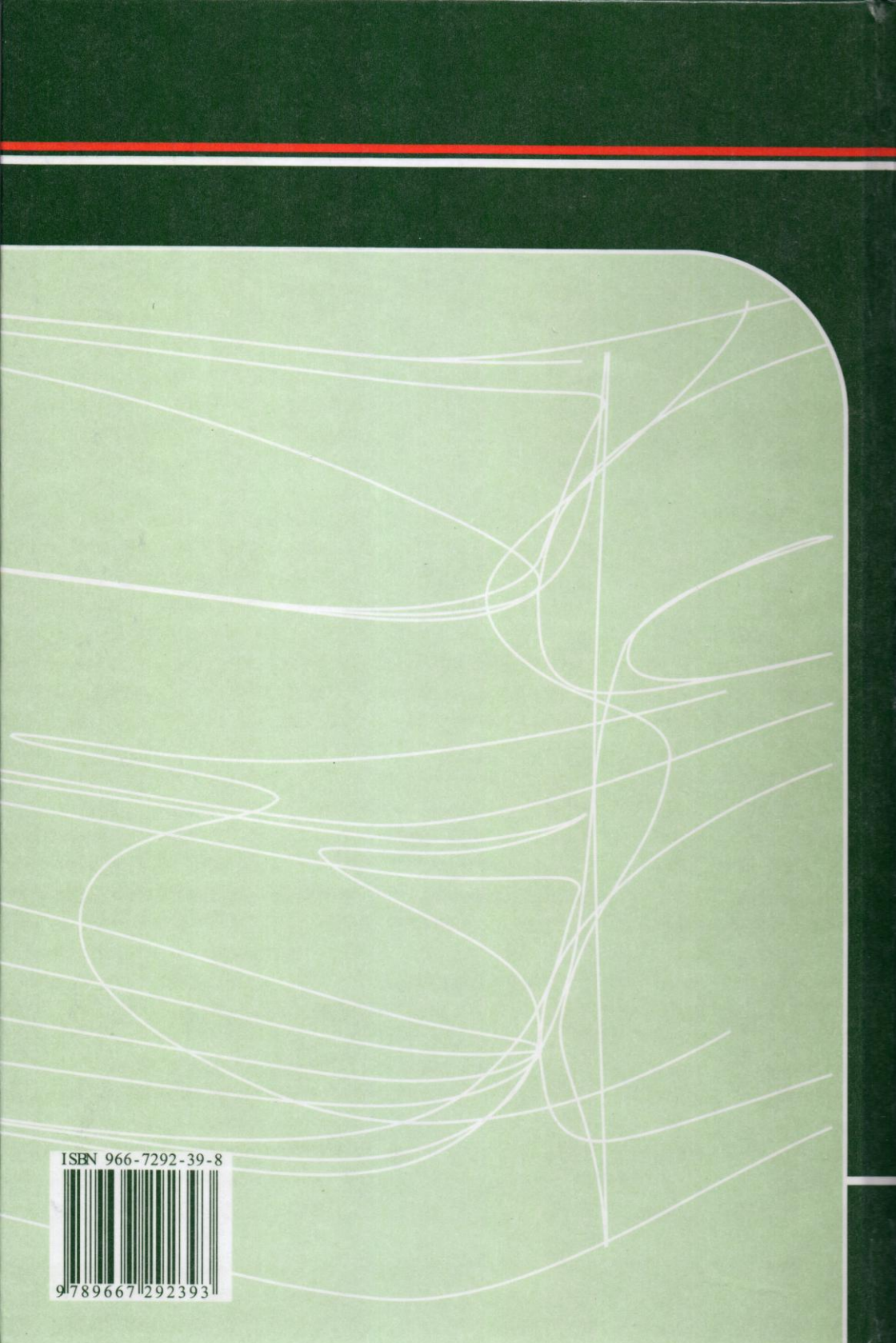
ПЕРЕДМОВА .....	3
<b>1 ФУНКЦІЯ КОШІ .....</b>	<b>5</b>
1.1 Функція Коші: означення .....	5
1.2 Головна властивість функції Коші .....	6
1.3 Функція Коші у випадку рівнянь зі сталими коефіцієнтами ..	9
1.4 Взаємозумовлені оператори .....	13
1.5 Запис та відтворення однорідних рівнянь .....	19
<b>2 КОНСТРУЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ КОШІ</b> .....	<b>27</b>
2.1 Функція впливу .....	27
2.2 Функції впливу і нормальні фундаментальні функції .....	28
2.3 Узагальнений метод початкових параметрів .....	31
2.4 Конструювання гладких розв'язків задач спряження .....	32
2.5 Конструювання негладких розв'язків та розв'язків зі скінченними розривами в задачах спряження .....	34
2.6 Застосування функцій впливу до побудови загальних розв'язків рівнянь з особливостями типу дельта-функції та її похідних в коефіцієнтах .....	35
2.7 Приклад застосування функції впливу до побудови загального розв'язку рівняння з особливостями типу дельта-функції ..	37
<b>3 ОСНОВНІ СПОСОБИ ПОБУДОВИ ФУНКЦІЇ КОШІ . . . .</b>	<b>41</b>
3.1 Побудова функцій Коші у вигляді степеневих рядів .....	41
3.2 Функції Коші як ряди за параметром .....	46
3.3 Зображення розв'язків рівнянь зі сталими коефіцієнтами ..	49
3.4 Матрична функція Коші та загальний розв'язок системи лінійних рівнянь другого порядку .....	51
3.5 Звідні рівняння та системи рівнянь .....	55
<b>4 НЕПЕРЕРВНО-ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ .....</b>	<b>61</b>
4.1 Рівняння малих коливань стержня, вала, линви .....	61
4.2 Задача про розтяг-стиск пружного стержня .....	63
4.3 Задачі про вільні коливання механічних систем .....	64
4.4 Функція Коші та загальний розв'язок рівняння другого порядку	65
4.5 Частотні рівняння континуальних систем .....	66
4.6 Один клас задач з точними розв'язками .....	69
4.7 Вимушені коливання .....	73

<b>5</b>	<b>ОКРЕМІ АСПЕКТИ ЯКІСНОГО АНАЛІЗУ ОСНОВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ НЕПЕРЕРВНО-ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ . . . . .</b>	<b>75</b>
	5.1 Універсальні частотні рівняння для стержнів з “включеннями” . . . . .	75
	5.2 Умови кратності та близькості частот . . . . .	76
	5.3 Окремі приклади якісного аналізу . . . . .	78
	5.4 Системи з малими розподіленими параметрами . . . . .	81
	5.5 Способи побудови функцій впливу . . . . .	89
	5.6 Функції впливу та метод початкових параметрів . . . . .	92
<b>6</b>	<b>МЕТОД ЧАСТКОВОЇ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ТА ПРИКЛАДИ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ . . . . .</b>	<b>95</b>
	6.1 Рівняння руху в прямій і оберненій формах . . . . .	95
	6.2 Побудова матриць впливу податностей і жорсткостей . . . . .	97
	6.3 Застосовність методу часткової дискретизації до неперервно-дискретних та неперервних систем . . . . .	99
	6.4 Малі поперечні коливання кінцевих стержнів . . . . .	100
	6.5 Приклад задачі про розгалуження форм рівноваги . . . . .	102
	6.6 Деякі задачі для пружних пластин і оболонок . . . . .	103
	6.7 Радіальні коливання куль і циліндрів . . . . .	107
<b>7</b>	<b>ЗАДАЧІ ПРО СТАТИЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНИХ СТЕРЖНІВ ЧИ БАЛОК . . . . .</b>	<b>111</b>
	7.1 Універсальне рівняння пружної лінії балки . . . . .	111
	7.2 Окремий випадок рівняння пружної лінії . . . . .	112
	7.3 Реакції пружних опор балки змінного поперечного перерізу . . . . .	113
	7.4 Балка з проміжною пружною опорою: аналіз пружної лінії . . . . .	116
	7.5 Балка з проміжною пружною опорою: критичні значення стискувальної сили . . . . .	119
	7.6 Приклади обчислення критичних значень навантажень для консолей . . . . .	121
	7.7 Приклади визначення прогинів стиснутих стержнів . . . . .	122
<b>8</b>	<b>ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ . . . . .</b>	<b>125</b>
	8.1 Класифікація сил . . . . .	125
	8.2 Поняття про стійкість механічних систем. Теореми Лагранжа-Діріхле та Ляпунова-Четаєва . . . . .	130
	8.3 Стійкість за першим наближенням . . . . .	132
	8.4 Критерій Рауса-Гурвіца. Основні різновиди втрати стійкості . . . . .	135
	8.5 Про енергетичний та статичний методи визначення критичного навантаження . . . . .	137
	8.6 Збурений рух стиснутого стержня в найпростішому випадку . . . . .	138
	8.7 Особливий випадок застосування енергетичного методу . . . . .	142
<b>9</b>	<b>ДИНАМІЧНА РІВНОВАГА СИСТЕМ ЗА ДІЇ НЕКОНСЕРВАТИВНИХ СИЛ . . . . .</b>	<b>143</b>
	9.1 Рівновага системи без тертя за дії неконсервативних навантажень . . . . .	143
	9.2 Рівновага системи з тертям за дії неконсервативних навантажень . . . . .	145
	9.3 Область стійкості лінійної системи без тертя . . . . .	147
	9.4 Приклад побудови області вірогідної стійкості механічної системи з двома ступенями вільності . . . . .	152
	9.5 Інший спосіб побудови області вірогідної стійкості . . . . .	156
	9.6 Вплив тертя на область вірогідної стійкості . . . . .	164
	9.7 Задача про стійкість консолі, стиснутої консервативною та стежною силами, як системи з одним ступенем вільності . . . . .	168

<b>10</b>	<b>ДЕФОРМАЦІЇ ПОЛОГИХ АРОК</b> .....	<b>173</b>
	10.1 Вихідні положення .....	173
	10.2 Залежність між навантаженням і розпиральним зусиллям у двошарній арці .....	175
	10.3 Найпростіша симетрична арка .....	177
	10.4 Двошарнірна арка. Застосування тригонометричних ряд .....	186
	10.5 Двошарнірна рівномірно навантажена параболічна арка .....	188
	10.6 Арка з затиснутими кінцями .....	189
	10.7 Прояв стисливості в осі арки .....	191
	10.8 Рівномірно стиснута кругова арка .....	192
<b>11</b>	<b>МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РЯДІВ</b> .....	<b>193</b>
	11.1 Характеристичні ряди і їх фундаментальна властивість .....	193
	11.2 Узагальнений критерій Рауса-Гурвіца та рівняння для визначення критичних навантажень (перший випадок зображення характеристичного ряду) .....	194
	11.3 Узагальнення критерія аперіодичної стійкості та загальні рівняння для визначення критичних навантажень (другий випадок зображення характеристичного ряду) .....	196
	11.4 Узагальнена теорема Ерміта-Білера .....	199
	11.5 Двобічні послідовності оцінок критичних значень параметра навантаження при автоколивній втраті системою стійкості .....	201
	11.6 Ефект дестабілізації та умови його відсутності .....	205
	11.7 Приклади аналізу наявності-відсутності дестабілізації з застосуванням методу характеристичних рядів .....	210
<b>12</b>	<b>ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РЯДІВ</b> .....	<b>213</b>
	12.1 Двобічні послідовності оцінок нижчих частот і ойлерових значень навантажень для багатопараметричних пружних систем .....	213
	12.2 Про побудову характеристичних визначників узагальнених крайових задач на власні значення у вигляді рядів за параметром .....	216
	12.3 Характеристичні ряди і дослідження механічних пружних систем .....	217
	12.4 Характеристичні ряди в задачах з "ускладненими" крайовими умовами .....	221
	12.5 Про форми зображення характеристичних визначників .....	223
	12.6 Задача про консоль з абсолютно твердим тілом на вільному кінці (навантажену консервативною та стежною силами) .....	225
	12.7 Задача про пружно затиснуту балку з проміжною опорою .....	232
<b>13</b>	<b>УНІВЕРСАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИЧНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ</b> .....	<b>237</b>
	13.1 Постановка проблеми та спосіб її розв'язання .....	237
	13.2 Загальне зображення характеристичного визначника задачі для диференційного рівняння четвертого порядку .....	238
	13.3 Характеристичні визначники в основних випадках граничних умов .....	240
	13.4 Побудова характеристичних рівнянь для пружних стержнів з зосередженими чинниками .....	242
	13.5 Приклади побудови загальних формул для власних частот .....	243
	13.6 Характеристичні ряди в задачах про поперечні коливання та стійкість стержнів .....	246



<b>14</b>	<b>ДИНАМІЧНА ПОВЕДІНКА ПРУЖНИХ КОНСОЛЕЙ ЗМІННОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ .....</b>	<b>251</b>
	14.1 Вплив параметрів на вільні коливання консолей зі скупченими масами . . .	251
	14.2 Основна частота коливань тонкостінного стержня .....	260
	14.3 Коливання пружно закріпленої консолі з урахуванням її власної ваги . . . . .	263
	14.4 Вільні коливання неоднорідних за матеріалом кінцевих консолей . . . . .	265
	14.5 Коливання та стійкість кінцевих консолей за дії консервативної і неконсервативної сил .....	273
<b>15</b>	<b>ПРИКЛАДИ ПАРАМЕТРИЧНОГО АНАЛІЗУ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОЛИВНИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>277</b>
	15.1 Частотні функції як ряди за параметрами для одного класу систем зі сталим розподілом параметрів .....	277
	15.2 Якісний аналіз впливу параметричних чинників на коливання та стійкість систем зі сталим розподілом параметрів .....	279
	15.3 Стійкість прямокутної пластинки за дії на неї стежного навантаження . . . . .	285
	15.4 Задача про пружні панелі з приєднаними елементами в надзвуковому газовому потоці .....	288
	15.5 Динамічна поведінка панелей з одним осцилятором .....	289
	15.6 Стійкість панелі з двома зосередженими масами .....	292
	15.7 Прямокутна панель з масою, зосередженою на прямолінійному відрізку ..	294
<b>16</b>	<b>ОКРЕМІ ЗАДАЧІ НАБЛИЖЕНОГО АНАЛІЗУ ВЛАСТИВОСТЕЙ СИСТЕМ</b>	<b>295</b>
	16.1 Критичне навантаження рухомого стержня .....	295
	16.2 Стійкість пласкої форми згину пружної консолі-смуги .....	297
	16.3. Задача про область вірогідної стійкості континуально-дискретних пружних систем .....	299
	16.4 Область стійкості консолі з твердим тілом на вільному кінці .....	301
	16.5 Про обмеження на параметри системи .....	302
	16.6. Способи наближеного знаходження критичних ознак флатера .....	304
	16.7 Мембрани і пластинки довільної форми в плані .....	306
	16.8 Радіальні коливання пружних куль і довгих циліндрів .....	311
<b>17</b>	<b>ПРО ОДИН СПОСІБ ОБГРУНТОВУВАННЯ ДИНАМІЧНОГО МЕТОДУ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРУЖНИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>317</b>
	17.1 Еквівалентні перетворення задач .....	317
	17.2 Теорема про існування та єдиність розв'язку .....	323
	17.3 Стійкість-нестійкість за першим наближенням .....	334
	17.4 Теорема про асимптотичну стійкість .....	335
	17.5 Теорема про нестійкість .....	341
	17.6 Обґрунтування динамічного методу дослідження деяких двовимірних систем	345
	<b>ДОДАТКИ .....</b>	<b>349</b>
	А Функція Гріна і функція Коші .....	349
	В Обчислення частот для систем з трьома та чотирма ступенями вільності . . . . .	354
	С Операції з деякими факторіальними рядами .....	358
	<b>ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ .....</b>	<b>363</b>



ISBN 966-7292-39-8



9 789667 129239 3