

ВЕРТИКАЛЬНІ СТРУМЕНІ ПРИ ДОВІЛЬНІЙ ЗАЛЕЖНОСТІ СИЛИ ОПОРУ ВІД ШВИДКОСТІ ТА СИЛИ ЇХ ВЗАЄМОДІЇ

Для спрощення процесу розглянемо частковий випадок, коли кут нахилу струменя до горизонту $\Theta=90^\circ$, тобто струмені є вертикальними (рис. 1).

Вертикальні струмені досліджують емпіричними формулами Люгера та Фрімана, які побудовані на основі експериментальних досліджень та дозволяють знайти втрати напору. Задаємося не виразами втрат напору, а силою опору рухові, як функцією швидкості потоків. Швидкість визначиться розв'язком диференціального рівняння Бернуллі, що співпадає з рівнянням руху кинutoї вертикально вгору матеріальної точки. Розглянемо для початку загальний випадок, коли сили опору повітря перешкоджають переміщенню трьох струменів ($F_{оп0}$, $F_{оп1}$, $F_{оп2}$) та сила взаємодії струменів між собою ($F_{вс1}$, $F_{вс2}$) є деякою неперервною функцією швидкості v , тобто:

$$\begin{aligned} F_{оп0} &= F_{оп0}(v_0), \text{ причому } F_{оп0}(0) = 0; F_{оп1} = F_{оп1}(v_1), \text{ причому } F_{оп1}(0) = 0; \\ F_{оп2} &= F_{оп2}(v_2), \text{ причому } F_{оп2}(0) = 0; F_{вс1} = F_{вс}(v_1-v_0), \text{ причому } F_{вс1}(0) = 0; \\ F_{вс2} &= F_{вс}(v_2-v_0), \text{ причому } F_{вс2}(0) = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо конкретні випадки цих залежностей. Щоби скласти диференціальне рівняння руху, розглянемо (рис. 1) динамічну рівновагу елементів струменя різної кратності довжиною dy в напрямку вертикальної осі OY . Вона виражається рівняннями:

$$\begin{aligned} \left(p_0 + \frac{\partial p_0}{\partial y} dy \right) \omega_0 + F_{он0} + F_{i0} + G_0 + F_{вс1} + F_{вс2} - p_0 \omega_0 &= 0, \\ \left(p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial y} dy \right) \omega_1 + F_{он1} + F_{i1} + G_1 + F_{вс1} - p_1 \omega_1 &= 0, \\ \left(p_2 + \frac{\partial p_2}{\partial y} dy \right) \omega_2 + F_{он2} + F_{i2} + G_2 + F_{вс2} - p_2 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Індекси 1 та 2 стосуються для позначення параметрів першого та другого струменів піни низької кратності, індекси 0 – для позначення параметрів струменів піни середньої кратності; D і ω – діаметр і площа поперечного січення струменя; p – тиск; v – вертикальна швидкість руху центра виділеного елемента; ρ – питома густина рідини; g – прискорення вільного падіння; G – сила ваги; F_i – сила інерції; $F_{оп}$ – сила опору повітря, що діє на виділений елемент; $K_{оп} = K_{оп}(y)$ – коефіцієнт тертя струменя з повітрям; $f(v)$ – деяка неперервна функція швидкості; $F_{вс}$ – сила взаємодії струменів між собою; $K_{вс} = K_{вс}(y)$ – приведений коефіцієнт тертя струменя з струменем.

Оскільки в подальшому буде розглядатися тільки стаціонарний рух струменів, то для нього $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, а часткові похідні переходять в звичайні.

Переходимо до рівняння Бернуллі в диференціальній формі:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_0}{dy} + \frac{4K_{on}}{D_0} f(v_0) + \rho_0 g + \rho_0 v_0 \frac{dv_0}{dy} + K_{ec} \mu_{cep} f(v_1 - v_0) + K_{ec} \mu_{cep} f(v_2 - v_0) &= 0, \\
\frac{dp_1}{dy} + \frac{4K_{on}}{D_1} f(v_1) + \rho_1 g + \rho_1 v_1 \frac{dv_1}{dy} + K_{ec} \mu_{cep} f(v_1 - v_0) &= 0, \\
\frac{dp_2}{dy} + \frac{4K_{on}}{D_2} f(v_2) + \rho_2 g + \rho_2 v_2 \frac{dv_2}{dy} + K_{ec} \mu_{cep} f(v_2 - v_0) &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

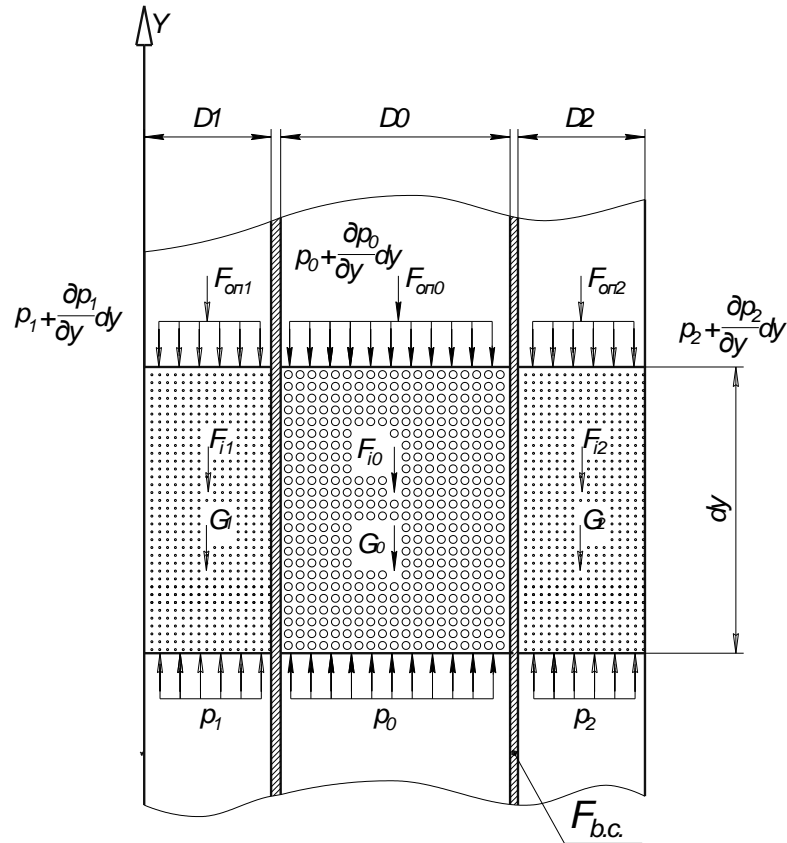


Рис. 1. Виділений елемент струменів

Для спрощення цих рівнянь, рахуватимемо тиск p в виділеному об'ємі струменя висотою dy постійним, тому $\frac{dp}{dy} = 0$. Крім того, приймаємо

$K_{on} D^{-1} = \text{const}$. В результаті замість (2), отримаємо:

$$v_0 \frac{dv_1}{dy} + \frac{4K_{on}}{\rho_0 D_0} f(v_0) + \frac{K_{ec} \mu_{cep}}{\rho_{cep}} f(v_1 - v_0) + \frac{K_{ec} \mu_{cep}}{\rho_{cep}} f(v_2 - v_0) = -g,$$

$$v_1 \frac{dv_1}{dy} + \frac{4K_{on}}{\rho_1 D_1} f(v_1) + \frac{K_{ec} \mu_{cep}}{\rho_{cep}} f(v_1 - v_0) = -g, \tag{3}$$

$$v_2 \frac{dv_2}{dy} + \frac{4K_{on}}{\rho_2 D_2} f(v_2) + \frac{K_{ec} \mu_{cep}}{\rho_{cep}} f(v_2 - v_0) = -g$$

Як показали подальші експериментальні дослідження, при сумісному русі струмені змішуються між собою і процес взаємодії носить турбулентний характер, тому, у випадку взаємодії струменів між собою внаслідок сил в'язкості, необхідно використовувати середні значення коефіцієнтів динамічної в'язкості пінних струменів та середні значення їх питомих густин.