

Прямий Метод Дослідження Температурного Поля в Багатошаровому Трубопроводі за Умов Пожежі

Роман Тацій

кафедра прикладної математики і механіки
Львівський державний університет безпеки
життєдіяльності
Львів, Україна
roman.tatsiy@gmail.com

Олеся Власій

кафедра інформатики
Прикарпатський національний університет імені Василя
Стефаника
Івано-Франківськ, Україна
olesia.vlasii@pu.if.ua

Марта Стасюк

кафедра прикладної математики і механіки
Львівський державний університет безпеки
життєдіяльності
Львів, Україна
marta_stasiuk@yahoo.com

Олег Пазен

кафедра наглядово-профілактичної діяльності
Львівський державний університет безпеки
життєдіяльності
Львів, Україна
opazen@gmail.com

Direct Method of Research Temperature Field in a Multilayer Conduit for Fire Conditions

Roman Tatsiy

Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine

Olesia Vlasii

Department of Computer Science
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
Ivano-Frankivsk, Ukraine
olesia.vlasii@pu.if.ua

Marta Stasiuk

Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
marta_stasiuk@yahoo.com

Oleg Pazen

Department of Monitoring and Fire Prevention
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
opazen@gmail.com

Анотація—Запропоновано та обґрунтовано конструктивну схему дослідження розподілу нестационарного температурного поля по товщині багатошарового трубопроводу за умов пожежі. В основі даної схеми покладено прямий метод дослідження крайових задач теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами та стаціонарною неоднорідністю.

Abstract—A constructive and reasonable scheme of study unsteady temperature field distribution in thickness multilayer pipe for fire conditions. At the heart of the scheme put direct method of research boundary value problems of heat conduction

with piecewise continuous coefficients and stationary heterogeneity.

Ключові слова—теплопровідність; прямий метод; багатошаровий трубопровід

Keywords—thermal conductivity; direct method; multilayer conduit

I. ВСТУП

У запропонованій роботі розглянуто конструктивну схему побудови розв'язку мішаної задачі для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами, що

виникає при дослідженні нестационарного температурного поля у багатопаровому трубопроводі. В основу схеми покладено метод редукції, концепцію квазіпохідних, модифікований метод Фур'є та метод власних функцій. В якості числового прикладу розглянуто модельну задачу про поширення температурного поля за товщиною чотирипарового трубопроводу в умовах пожежі.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Розглядається мішана задача для рівняння теплопровідності [1]

$$c\rho \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad (1)$$

з системою крайових умов третього роду:

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0 t(r_0, \tau) - t^{[1]}(r_0, \tau) = \alpha_0 r_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n r_n t(r_n, \tau) + t^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha_n r_n \psi_n(\tau), \end{cases} \quad (2)$$

і початковою умовою:

$$t(r, 0) = \varphi(r) \quad (3)$$

Тут $r_0 < r_1 < \dots < r_n$ довільне розбиття проміжку $[r_0, r_n]$ дійсної осі OR на n частин, θ_i - характеристична функція відрізка $[r_i, r_{i+1}]$, $t^{[1]} = r\lambda t'$ - квазіпохідна [2]. Покладемо, що $\lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i$, $c(r)\rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \theta_i$.

Розв'язування задачі (1), (2), (3) проводитимемо за наступною схемою [3]:

1. Розв'язок $t(r, \tau)$ шукається методом редукції у вигляді

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau) \quad (4)$$

2. Для однієї з функцій (наприклад для $u(r, \tau)$) розв'язується квазістационарна крайова задача

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r\lambda \frac{du(r, \tau)}{dr} \right) = 0, \quad (5)$$

з крайовими умовами (2) для функції $u(r, \tau)$, тобто

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0 u(r_0, \tau) - u^{[1]}(r_0, \tau) = \alpha_0 r_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n r_n u(r_n, \tau) + u^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha_n r_n \psi_n(\tau), \end{cases} \quad (6)$$

2.1. Розв'язування крайової задачі (5), (6).

Введемо вектор $\mathbf{u} = (u, u^{[1]})^T$ та матрицю

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r\lambda(r) & 0 \end{pmatrix}.$$

Диференціальне рівняння (5) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u} \quad (7)$$

Крайові умови (6) запишемо у векторній формі [2]

$$P \cdot \mathbf{u}(r_0) + Q \cdot \mathbf{u}(r_n) = \Gamma(\tau), \quad (8)$$

де P , Q и $\Gamma(\tau)$ мають вигляд

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 r_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n r_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(\tau) = \begin{pmatrix} \alpha_0 r_0 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n r_n \psi_n(\tau) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

На кожному з проміжків система (7) має вигляд

$$\mathbf{u}'_i = A_i \mathbf{u}_i, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r\lambda_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матриця Коші $B_i(r, s)$ системи (10) зображується наступним чином

$$B_i(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln r - \ln s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Для довільного $k \geq i$ позначимо

$$B(r_k, r_i) \stackrel{df}{=} B_{k-1}(r_k, r_{k-1}) \cdot B_{k-2}(r_{k-1}, r_{k-2}) \cdots B_i(r_{i+1}, r_i). \quad (12)$$

Структура (11) матриці $B_i(r, s)$ дає можливість встановити структура матриці (12), а саме

$$B(r_k, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} \frac{\ln r_{m+1} - \ln r_m}{\lambda_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

На кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ розв'язок задачі (5), (6) має вигляд

$$\mathbf{u}_i(r, \tau) = B_i(r, r_i) \cdot B(r_i, r_0) \cdot \mathbf{P}_0(\tau), \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0(\tau) &= (P + Q \cdot B(r_n, r_0))^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\tau) = \\ &= \left[\begin{pmatrix} \alpha_0 r_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n r_n & 1 \end{pmatrix} \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\ln r_{i+1} - \ln r_i}{\lambda_i} \right) \right]^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 r_0 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n r_n \psi_n(\tau) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(\alpha_n r_n \sigma_n + 1) \alpha_0 r_0 \psi_0(\tau) + \alpha_n r_n \psi_n(\tau)}{\alpha_n r_n + 1 + \alpha_0 r_0 (\alpha_n r_n \sigma_n + 1)} \\ \frac{\alpha_0 \alpha_n r_0 r_n (\psi_n(\tau) - \psi_0(\tau))}{\alpha_n r_n + 1 + \alpha_0 r_0 (\alpha_n r_n \sigma_n + 1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Вираз (14) дозволяє записати розв'язок $\mathbf{u}(r, \tau)$ на проміжку $[r_0, r_n]$ за допомогою характеристичних функцій

θ_i у вигляді

$$\mathbf{u}(r, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{u}_i(r, \tau) \theta_i. \quad (15)$$

3. Для функції $v(r, \tau)$ отримуємо мішану неоднорідну задачу

$$c\rho \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r} \right) - c\rho \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau}. \quad (16)$$

з нульовими крайовими умовами для функції $v(r, \tau)$,

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0 v(r_0, \tau) - v^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n r_n v(r_n, \tau) + v^{[1]}(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

і початковою умовою

$$v(r, 0) = f(r) = \varphi(r) - u(r, 0). \quad (18)$$

3.1. Відокремлення змінних та задача на власні значення.

Розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r} \right) \quad (19)$$

шукатимемо у вигляді

$$v(r, \tau) = e^{-\omega\tau} \cdot R(r), \quad (20)$$

де ω – параметр, а $R(r)$ – невідома функція.

Підставляючи (20) у (19), отримаємо (квазі)диференціальне рівняння

$$(r\lambda R')' + \omega c\rho r R = 0, \quad (21)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0 R(r_0) - R^{[1]}(r_0) = 0, \\ \alpha_n r_n R(r_n) + R^{[1]}(r_n) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Задача (21), (22) – класична задача на власні значення.

Ввівши квазіпохідну $R^{[1]} = r\lambda R'$, вектор $\mathbf{R} = (R, R^{[1]})^T$

і матрицю $\mathbf{A}(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda(r)} \\ -\omega c\rho r & 0 \end{pmatrix}$, зведемо

(квазі)диференціальне рівняння (21) до еквівалентної системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}. \quad (23)$$

На кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ система (23) матиме вигляд

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{A}_i(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda_i} \\ -\omega c_i \rho_i r & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Матриця Коші $\mathbf{B}_i(r, s, \omega)$ системи (24) має наступний вигляд

$$\mathbf{B}_i(r, s, \omega) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

де, $\beta_{11} = \frac{\pi \lambda_i \alpha_i s (J_1(\alpha_i s) \cdot N_0(\alpha_i r) - J_0(\alpha_i r) \cdot N_1(\alpha_i s))}{2\lambda_i}$

$\beta_{12} = \frac{\pi (J_0(\alpha_i s) \cdot N_0(\alpha_i r) - J_0(\alpha_i r) \cdot N_0(\alpha_i s))}{2\lambda_i}$

$\beta_{21} = \frac{\pi \lambda_i^2 \alpha_i^2 r s (J_1(\alpha_i r) \cdot N_1(\alpha_i s) - J_1(\alpha_i s) \cdot N_1(\alpha_i r))}{2\lambda_i}$

$\beta_{22} = \frac{\pi \lambda_i \alpha_i s (J_1(\alpha_i r) \cdot N_0(\alpha_i s) - J_0(\alpha_i s) \cdot N_1(\alpha_i r))}{2\lambda_i}$

Тут J_0 , J_1 и N_0 , N_1 – функції Бесселя і Неймана нульового та першого роду відповідно.

Позначимо:

$$\mathbf{B}(r_i, r_0, \omega) \stackrel{df}{=} \prod_{j=0}^i \mathbf{B}_{i-j}(r_{i-j+1}, r_{i-j}, \omega), \quad (26)$$

$$\mathbf{B}(r, r_0, \omega) \stackrel{df}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}_i(r, r_i, \omega) \cdot \mathbf{B}(r_i, r_0, \omega) \cdot \theta_i, \quad (27)$$

$$\left[P + Q \cdot \mathbf{B}(r_n, r_0, \omega) \right] \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Розв'язок системи (23) шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{R}(r, \omega) = \mathbf{B}(r, r_0, \omega) \cdot \mathbf{C}, \quad (29)$$

де, $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$ – деякий ненульовий вектор.

Застосувавши до рівності (29) крайові умови (22) та після перетворень отримаємо

$$\left[P + Q \cdot \mathbf{B}(r_n, r_0, \omega) \right] \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (30)$$

Для існування вектора \mathbf{C} в (30) необхідно и достатньо виконання умови

$$\det \left[P + Q \cdot \mathbf{B}(r_n, r_0, \omega) \right] = 0. \quad (31)$$

Характеристичне рівняння задачі на власні значення (21), (22) має вигляд (31).

Виходячи з умови (30), ненульовий вектор \mathbf{C} має вигляд

$$C = \left(\frac{1}{\alpha_0 r_0}, 1 \right)^T. \quad (32)$$

Власні вектори системи диференціальних рівнянь (23) з крайовими умовами (22) мають наступну структуру

$$R_k(r, \omega_k) = \tilde{B}(r, r_0, \omega) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_0 r_0}, 1 \right)^T, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Власні функції $R_k(r, \omega_k)$, як перші координати власних векторів $R_k(r, \omega_k)$, можна зобразити наступним чином

$$R_k(r, \omega_k) = (1, 0) \cdot \tilde{B}(r, r_0, \omega_k) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_0 r_0}, 1 \right)^T, \quad (34)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Оскільки $R_k(r, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} R_{ki}(r, \omega_k) \theta_i$, то із (34) випливає, що

$$R_{ki}(r, \omega_k) = (1, 0) \cdot \tilde{B}_i(r, r_i, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_i, r_0, \omega_k) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_0 r_0}, 1 \right)^T. \quad (35)$$

3.2. Метод власних функцій.

Розв'язок мішаної задачі (16)-(18) будемо шукати у вигляді

$$v(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k), \quad (36)$$

де $T_k(\tau)$ – невідомі функції.

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ входить у праву частину рівняння (16), розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями $R_k(r, \omega_k)$.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k) \quad (37)$$

Слід зауважити, що розвинення функції $g(r)$ в ряд Фур'є за власними функціями $R_k(r, \omega_k)$ задачі (21), (22) має вигляд

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot R_k(r, \omega_k), \quad (38)$$

де коефіцієнти Фур'є g_k знаходяться за формулою

$$g_k = \frac{1}{\|R_k\|^2} \int_{r_0}^{r_n} c \rho g(r) R_k(r, \omega_k) r dr = \frac{1}{\|R_k\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} g_i(r) R_{ki}(r, \omega_k) r dr. \quad (39)$$

Зауважимо, що $\|R_k\|^2$ – квадрат норми власних функцій R_k

$$\|R_k\|^2 = \int_{r_0}^{r_n} c \rho r R_k^2(r, \omega_k) dr = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} R_{ki}^2(r, \omega_k) r dr. \quad (40)$$

Підставляючи (36) у (16) одержуємо рівність

$$c \rho \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \cdot (r \lambda R'_k(r, \omega_k))' - c \rho \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k). \quad (41)$$

Враховуючи рівність (20), після перетворень одержимо співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T'_k(\tau) + \omega_k T_k(\tau) + u_k(\tau) \right] \cdot R_k(r, \omega_k) = 0. \quad (42)$$

Прирівнюючи коефіцієнти Фур'є ряду (42) до нуля, приходимо до нескінченної сукупності диференціальних рівнянь

$$T'_k(\tau) + \omega_k T_k(\tau) + u_k(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (43)$$

Загальний розв'язок кожного з цих рівнянь має вигляд

$$T_k(\tau) = C_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} \cdot u_k(s) ds, \quad (44)$$

де C_k – невідома стала величина. Для її знаходження використаємо розвинення функції $f(r)$ з початкової умови (18) в ряд Фур'є

$$v(r, 0) = f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k R_k(r, \omega_k). \quad (45)$$

Після порівнянь відповідних коефіцієнтів Фур'є, приходимо до висновку, що $C_k = f_k$.

Отже розв'язок мішаної задачі (16)-(18) одержуємо у вигляді ряду

$$v(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_k(r, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(r, \tau) \cdot \theta_i, \quad (46)$$

Враховуючи зображення (4) та формули (15) і (46) розв'язок мішаної задачі (1)-(3) отримаємо у вигляді

$$t(r, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} [u_i(r, \tau) + v_i(r, \tau)] \cdot \theta_i. \quad (47)$$

III. МОДЕЛЬНА ЗАДАЧА

В якості модельної задачі розглянемо чотиришаровий трубопровід, який виконаний з ізотропних матеріалів радіусами: $r_0 = 0,15 \text{ м}$, $r_1 = 0,154 \text{ м}$, $r_2 = 0,164 \text{ м}$, $r_3 = 0,214 \text{ м}$, $r_4 = 0,216 \text{ м}$. Необхідно визначити розподіл нестационарного температурного поля та густину теплового потоку по товщині трубопроводу, якщо з зовнішньої сторони відбувається пожежа, температура якої змінюється за законом $t_{\text{зов.}}(\tau) = 660(1 - 0,687e^{-0,32\tau} - 0,313e^{-3,8\tau}) + 18$, а всередині протікає рідина з температурою 18°C . В початковий момент часу температура конструкції становить 18°C . Теплотехнічні характеристики матеріалів наведено у таблиці 1.

ТАБЛИЦЯ I. ТЕПЛОФІЗИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

| Параметр | Шар 1 | Шар 2 | Шар 3 | Шар 4 |
|---|--|-------|-------|-------|
| Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{°C}}$ | 58 | 0,27 | 0,056 | 209 |
| Питома теплоємність $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{°C}}$ | 470 | 1680 | 940 | 894 |
| Густина $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ | 7800 | 1000 | 200 | 2680 |
| Коефіцієнт теплообміну $\alpha, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{°C}}$ | Всередині – $\alpha_0 = 4$, Ззовні – $\alpha_n = 25$ | | | |

Використовуючи запропонований авторами метод, та програмне забезпечення Maple 13 одержуємо розв'язок поставленої задачі про розподіл нестационарного температурного поля та густини теплового потоку у вигляді графіків (Рис. 1 і Рис. 2) та таблиць 2 і 3.

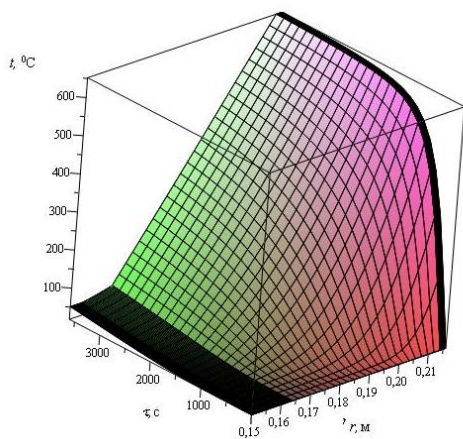


Рис. 1. Розподіл температурного поля

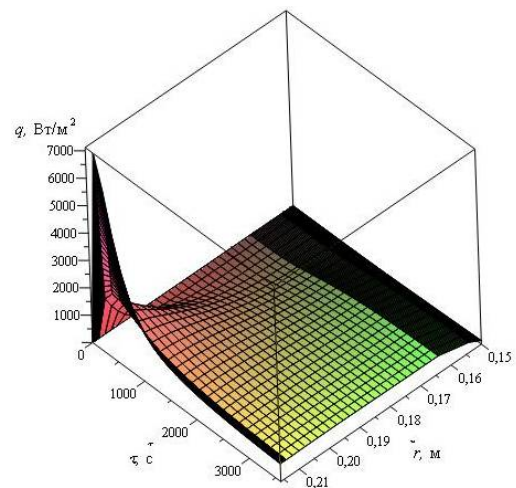


Рис. 2. Розподіл густини теплового потоку

ТАБЛИЦЯ II. РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

| час, с | Координати, м | | | | | | |
|--------|---------------|-------|-------|------|------|-------|-------|
| | 0,15 | 0,154 | 0,164 | 0,17 | 0,2 | 0,214 | 0,216 |
| 120 | 18 | 18 | 18 | 19 | 21,5 | 151 | 151 |
| 300 | 18 | 18 | 18,3 | 20,6 | 65 | 345 | 346 |
| 600 | 18 | 18,1 | 18,4 | 21,3 | 180 | 521 | 521 |
| 1200 | 19,1 | 19,2 | 24 | 47,7 | 340 | 617 | 618 |
| 1700 | 22,7 | 22,8 | 32,5 | 75,1 | 406 | 635 | 636 |
| 3600 | 51,5 | 51,5 | 70,2 | 138 | 488 | 651 | 651 |

ТАБЛИЦЯ III. РОЗПОДІЛ ГУСТИНИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКУ

| час, с | Координати, м | | | | | | |
|--------|---------------|-------|-------|------|-----|-------|-------|
| | 0,15 | 0,154 | 0,164 | 0,17 | 0,2 | 0,214 | 0,216 |
| 120 | 0 | 0 | 0 | 12 | 65 | 1467 | 7208 |
| 300 | 0 | 0 | 6 | 8.6 | 446 | 2020 | 6021 |
| 600 | 0 | 0 | 24 | 28 | 881 | 1836 | 3449 |
| 1200 | 6 | 62 | 212 | 241 | 954 | 1218 | 1484 |
| 1700 | 20 | 159 | 390 | 413 | 855 | 957 | 1049 |
| 3600 | 134 | 369 | 640 | 639 | 662 | 645 | 652 |

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] А.В. Лыков. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М: Высшая школа, 1967. – 559 с.
- [2] Р.М. Тацій. Общие краевые задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами / Р.М. Тацій, О.Ю. Пазен // Инженерно-физический журнал. — 2016. — Том 89, №2. — С. 350-362.
- [3] Р.М. Тацій. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопроводности з кусочно-неперервними коефіцієнтами та стаціонарною неоднорідністю / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, О.Ю. Пазен // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія : матер. V Міжнар. наук. конф. (27-29 травня). – Івано-Франківськ – Вінниця, 2015. – С. 201–202.