# Загальні Крайові Задачі для Гіперболічного Рівняння із Сумовними Коефіцієнтами та Правими Частинами


Р.М. Тацій
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна

О.О. Карабин
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
tosjakarabyn@gmail.com

О.Ю. Чмир
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
o_chmyr@yahoo.com


# The Total Boundary Value Problems for Hiperbolic Equation with Summable Coefficients and Right Parts


R.M. Tatsij
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of vital activity safety
Lviv, Ukraine

O.O. Karabyn
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of vital activity safety
Lviv, Ukraine
tosjakarabyn@gmail.com

O.Yu. Chmyr
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of vital activity safety
Lviv, Ukraine
o_chmyr@yahoo.com



***Анотація*—Вперше запропоновано та обґрунтовано нову формальну схему розв'язування загальних крайових задач для гіперболічного рівняння із сумовними коефіцієнтами та правими частинами. В основу схеми розв'язування покладено концепцію квазіпохідних, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, а також класичний метод Фур'є та метод редукції.**

***Abstract*—The main methods for solving nonstationary boundary value problems are the separation of variables method, Green's function method, method of integral transforms, approximate and numerical methods.**

**The scheme proposed in this article belongs to the direct methods for solving boundary value problems. In the basis of the solving scheme is the concept of quasi-derivatives that allows to bypass the problem of multiplication of generalized functions.**

**In this direction, a mixed problem for the heat equation with piecewise continuous coefficients by the general boundary conditions of the first kind was solved first.**

**This article examines the general boundary value problems for a hyperbolic type equation with summable coefficients and right parts. With the use of the reduction method, solving of such problems is reduced to finding a solution of the quasi-stationary inhomogeneous boundary value problem with the initial**

**boundary conditions and the mixed problem with zero boundary conditions for an inhomogeneous equation.**

**The practical implementation of this scheme depends on the structure of the coefficients of the original differential equation by the spatial variable. Thus, for example, in the case of piecewise constant coefficients there is a possibility to examine the longitudinal (torsional) oscillations of the stepwise pivots with piecewise-variable distribution of parameters.**

***Ключові слова—квазідиференціальне рівняння; крайова задача; матриця Коші; задача на власні значення; метод Фур'є та метод власних функцій.***

***Keywords—kvazidifferential equation; the boundary value problem; the Cauchy matrix; the eigenvalues problem; the method of Fourier and the method of eigenfunctions.***

## I. Вступ

Методи розв'язування нестаціонарних крайових задач можна поділити на прямі, основа яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод функції Ґріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

Запропонована в даній роботі схема належить до прямих методів розв'язування крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних [4], що дозволяє "обійти" проблему множення узагальнених функцій.

В цьому напрямку першою була розв'язана загальна мішана задача для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами за крайових умов першого роду [6].

В цій роботі досліджують загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із сумовними коефіцієнтами та правими частинами. За допомогою методу редукції розв'язування таких задач зведено до знаходження розв'язку двох задач: квазістаціонарної неоднорідної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння.

## II. Основні позначення, формулювання задачі

Нехай $[0;l]$ – відрізок дійсної осі; $m(x) \in L[0;l]$, $m(x) > 0$; $\dfrac{1}{a(x)}$ – обмежена і вимірна на $[0;l]$, $a(x) > 0$; $f(x) \in L[0;l]$.

Введемо позначення: $u^{[1]} = a u_x{}'$ – квазіпохідна.

Розглянемо загальну крайову задачу для гіперболічного рівняння

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x), \tag{1}$$

$$x \in (0;l), \ t \in (0;+\infty),$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} p_{11}u(0,t) + p_{12}u^{[1]}(0,t) + q_{11}u(l,t) + q_{12}u^{[1]}(l,t) = \psi_0(t), \\ p_{21}u(0,t) + p_{22}u^{[1]}(0,t) + q_{21}u(l,t) + q_{22}u^{[1]}(l,t) = \psi_1(t), \end{cases}$$

$$(10)\, t \in [0;+\infty)$$

та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \quad x \in [0;l], \tag{2}$$

де $\psi_0(t)$, $\psi_1(t) \in C^2(0;+\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – абсолютно - неперервні на $[0;l]$.

Метод редукції відшукання розв'язку задачі детально описаний, наприклад, в [1, 2]. Згідно з цим методом розв'язок задачі (1) – (2) шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t). \tag{3}$$

Одну з функцій, наприклад $w(x,t)$ виберемо спеціальним способом, тоді функцію $v(x,t)$ вже визначимо однозначно.

## III. Побудова функції $w(x,t)$

Визначимо функцію $w(x,t)$ як розв'язок крайової задачі

$$(a(x)w_x{}')_x{}' = -f(x), \tag{4}$$

$$\begin{cases} p_{11}w(0) + p_{12}w^{[1]}(0) + q_{11}w(l) + q_{12}w^{[1]}(l) = \psi_0(t), \\ p_{21}w(0) + p_{22}w^{[1]}(0) + q_{21}w(l) + q_{22}w^{[1]}(l) = \psi_1(t), \end{cases} \tag{5}$$

$$t \in [0;+\infty).$$

Зауважимо, що змінна $t$ тут вважається параметром.

В основі методу розв'язування задачі (4), (5) лежить концепція квазіпохідних [3].

Введемо вектори $\overline{W} = \begin{pmatrix} w \\ w^{[1]} \end{pmatrix}$, де $w^{[1]} = a w_x{}'$, $\overline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}$.

За таких позначень квазідиференціальне рівняння (4) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{W}_x{}' = A \cdot \overline{W} + \overline{F}, \tag{6}$$

де $A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{a(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Під розв'язком системи (6) розуміємо вектор-функцію $\overline{W}(x,t)$, що за змінною $x$ є абсолютно-неперервна та справджує систему (6) майже всюди (див. [3]).

Крайові умови (5) теж запишемо у векторній формі

$$P\cdot\overline{W}(0,t)+Q\cdot\overline{W}(l,t)=\overline{\Gamma}(t), \quad (7)$$

де $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}$, причому $rang(P\,|\,Q)=2$, $\overline{\Gamma}(t)=\begin{pmatrix}\psi_0(t)\\ \psi_1(t)\end{pmatrix}$.

Матриця Коші $B(x,s)$ такої системи має вигляд $B(x,s)=\begin{pmatrix} 1 & K(x,s) \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, де $K(x,s)=\int\limits_s^x \frac{1}{a(z)}dz$ (див. [7]).

Розв'язок системи (6) має вигляд

$$\overline{W}(x,t)=B(x,0)\cdot\overline{W}_0(t)+\int\limits_0^x B(x,s)\cdot\overline{F}(s)\,ds\,, \quad (8)$$

де $\overline{W}_0(t)$ – початковий (невідомий) вектор [6].

Для знаходження $\overline{W}_0(t)$ використовуємо крайові умови (7), в яких покладемо $\overline{W}(0,t)\overset{def}{=}\overline{W}_0(t)$. Тоді $[P+Q\cdot B(l,0)]\overline{W}_0(t)+Q\int\limits_0^l B(l,s)\cdot\overline{F}(s)\,ds=\overline{\Gamma}(t)$, звідки одержуємо

$$\overline{W}_0(t)=[P+Q\cdot B(l,0)]^{-1}\cdot\left(\overline{\Gamma}(t)-Q\int\limits_0^l B(l,s)\cdot\overline{F}(s)\,ds\right). \quad (9)$$

Підставляючи (9) в (8), отримаємо зображення вектор - функції $\overline{W}(x,t)$

$$\overline{W}(x,t)=B(x,0)\cdot[P+Q\cdot B(l,0)]^{-1}\times$$
$$\times\left(\overline{\Gamma}(t)-Q\int\limits_0^l B(l,s)\cdot\overline{F}(s)\,ds\right)+\int\limits_0^x B(x,s)\cdot\overline{F}(s)\,ds\,. \quad (10)$$

Перша координата вектора $\overline{W}(x,t)$ в (10) і є шуканою функцією $w(x,t)$.

## IV. Побудова функції $v(x,t)$

Запишемо мішану задачу для функції $v(x,t)$. Підставляючи (3) в (1) та враховуючи, що функція $w(x,t)$ задовольняє (4), одержуємо неоднорідне рівняння

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$
$$x\in(0;l)\,,\ t\in(0;+\infty)\,. \quad (11)$$

Підставимо (3) в початкові умови (4). Одержимо для функції $v(x,t)$ початкові умови

$$\begin{cases} v(x,0)=\Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=\Phi_1(x), \end{cases} x\in[0;l]\,, \quad (12)$$

де $\Phi_0(x)\overset{def}{=}\varphi_0(x)-w(x,0)$, $\Phi_1(x)\overset{def}{=}\varphi_1(x)-\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)$.

Оскільки функція $w(x,t)$ справджує крайові умови (5), то із (3) випливають крайові умови для функції $v(x,t)$

$$\begin{cases} p_{11}v(0)+p_{12}v^{[1]}(0)+q_{11}v(l)+q_{12}v^{[1]}(l)=0, \\ p_{21}v(0)+p_{22}v^{[1]}(0)+q_{21}v(l)+q_{22}v^{[1]}(l)=0, \end{cases} \quad (13)$$
$$t\in[0;+\infty)\,.$$

Отже, за умови, що розв'язок $w(x,t)$ задачі (4), (5) є відомим, функція $v(x,t)$ є розв'язком мішаної задачі (11) – (13).

## V. Метод Фур'є та задача на власні значення

Для рівняння (11) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right). \quad (14)$$

Знайдемо його нетривіальні розв'язки у вигляді

$$v(x,t)=\sin(\omega t+\varepsilon)\cdot X(x)\,, \quad (15)$$

де $\omega$ – параметр, $\varepsilon$ – константа, $X(x)$ – поки що невідома функція [1], що справджує крайові умови (13).

Підставимо (15) в рівняння (14). Одержимо квазідиференціальне рівняння

$$\left(a(x)X'(x)\right)'+\omega^2 m(x)X(x)=0\,. \quad (16)$$

Підставивши (15) в умови (13), одержимо крайові умови

$$\begin{cases} p_{11}X(0)+p_{12}X^{[1]}(0)+q_{11}X(l)+q_{12}X^{[1]}(l)=0, \\ p_{21}X(0)+p_{22}X^{[1]}(0)+q_{21}X(l)+q_{22}X^{[1]}(l)=0. \end{cases} \quad (17)$$

Як і вище, під розв'язком рівняння (16) розуміємо абсолютно-неперервну на $[0;l]$ функцію $X(x)$, що справджує його майже всюди.

Ввівши квазіпохідну $X^{[1]} \overset{def}{=} aX'$, вектор $\overline{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^{[1]} \end{pmatrix}$ та матрицю $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ -m\,\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, запишемо задачу (16), (17) в матричному вигляді

$$\overline{X}' = A \cdot \overline{X}, \tag{18}$$

$$P\overline{X}(0) + Q\overline{X}(0) = \overline{0}. \tag{19}$$

Щоб отримати характеристичне рівняння задачі (18), (19), шукатимемо нетривіальний розв'язок $\overline{X}(x,\omega)$ системи (18) у вигляді $\overline{X}(x,\omega) = B(x,0,\omega) \cdot \overline{C}$, де $\overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – деякий ненульовий вектор, $B(x,0,\omega)$ – матриця Коші системи (18).

Вектор - функція $\overline{X}(x,\omega)$ має задовольняти крайові умови (19), тобто

$$\left( P \cdot B(0,0,\omega) + Q \cdot B(l,0,\omega) \right) \cdot \overline{C} = \overline{0},$$

врахувавши, що  прийдемо до рівності

$$\left( P + Q \cdot B(l,0,\omega) \right) \cdot \overline{C} = \overline{0}. \tag{20}$$

Для існування ненульового вектора $\overline{C}$ в (20) необхідно і досить виконання умови

$$\det\left( P + Q \cdot B(l,0,\omega) \right) = 0. \tag{21}$$

Власні значення задачі (18), (19) не завжди дійсні. Вкажемо достатні умови дійсності коренів характеристичного рівняння (21).

Перепишемо систему (18) у вигляді

$$\overline{X}' = (B_0 + \omega^2 \cdot A_0) \cdot \overline{X},$$

де $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -m & 0 \end{pmatrix}$.

Введемо косоермітову матрицю $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, яка володіє такими властивостями: $J^T = -J$, $J \cdot J^T = J^T \cdot J = E$, $J^2 = -E$.

Відомо [9], що, коли виконуються умови

$$\begin{aligned} &1.\ B_0{}^T = JB_0J;\ A_0{}^T = JA_0J; \\ &2.\ rang(P \mid Q) = 2; \\ &3.\ PJP^T = QJQ^T, \end{aligned} \tag{22}$$

то всі власні значення задачі (18), (19) дійсні. В даній роботі умови (22) будемо вважати виконаними.

Позначимо $\overline{X}_k(x,\omega_k)$ – нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню $\omega_k$.

VI. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ $v(x,t)$ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ (11) – (13)

Для розв'язання задачі (11) – (13) застосуємо метод власних функцій [2], який полягає в тому, що розв'язок задачі (11) – (13) шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k), \tag{23}$$

де $T_k(t)$ – невідомі функції, які визначимо далі.

Оскільки $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ входить в праву частину рівняння (11), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ крайової задачі (16), (17)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k). \tag{24}$$

Підставляючи вираз (23) у (11) та враховуючи (24), отримаємо рівність

$$m(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \cdot X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \left( a(x) X_k'(x,\omega_k) \right)' -$$
$$- m(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k).$$

Враховуючи, що власні функції $X_k(x,\omega_k)$ задовольняють рівняння (16), приходимо до рівності

$$m(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \cdot X_k(x,\omega_k) = -m(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \cdot X_k(x,\omega_k) T_k(t) -$$
$$- m(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( T_k''(t) + \omega_k^2 \cdot T_k(t) + w_k(t) \right) \cdot m(x) \cdot X_k(x,\omega_k) = 0. \tag{25}$$

Помножимо ліву і праву частини (25) на $X_j(x,\omega_j)$ та проінтегруємо за змінною $x$ на проміжку $[0;l)$, врахувавши ортогональність власних функцій, приходимо до сукупності диференціальних рівнянь

$$T_k''(t) + \omega_k^2 \cdot T_k(t) = -w_k(t), \ k = 1,2,3,\ldots . \quad (26)$$

Загальний розв'язок кожного з диференціальних рівнянь (26) має вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos\omega_k t + d_k \sin\omega_k t - \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k (t-s)\cdot w_k(s)\, ds \quad ,(27)$$

де $a_k$ , $d_k$ – невідомі сталі [8].

Позначимо $I(t) = \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k (t-s)\cdot w_k(s)\, ds$ .

Зауважимо, що $I(0) = 0$ , $I'_t(0) = 0$ [5].

Для визначення сталих $a_k$ , $d_k$ розвинемо в ряди Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ праві частини початкових умов (12)

$$\Phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0\,k} \cdot X_k(x,\omega_k), \quad (28)$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1\,k} \cdot X_k(x,\omega_k), \quad (29)$$

де $\Phi_{0\,k}$ , $\Phi_{1\,k}$ – відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (27) випливає, що

$$T_k(0) = a_k , \quad (30)$$

$$T_k'(t) = -a_k\omega_k \sin\omega_k t + d_k\omega_k \cos\omega_k t - I_t'(t) ,$$

звідки

$$T_k'(0) = d_k\omega_k . \quad (31)$$

З (23), першої умови в (12), та врахувавши (28), одержуємо $\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\cdot X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0\,k} \cdot X_k(x,\omega_k)$ . Звідки, використовуючи (30),маємо

$$T_k(0) = a_k = \Phi_{0\,k} .$$

Аналогічно з (23), другої умови в (12), врахувавши (29) маємо $\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)\cdot X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1\,k} \cdot X_k(x,\omega_k)$. Звідки, використовуючи (31), знаходимо

$$T_k'(0) = d_k\omega_k = \Phi_{1\,k} \text{, або } d_k = \frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k} .$$

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (11) – (13) у вигляді ряду

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t + \frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t - \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k (t-s)\cdot w_k(s)\, ds\right)\cdot X_k(x,\omega_k) .$$

## VII. Висновки

Теорема про розвинення за власними функціями адаптована для випадку диференціальних рівнянь із сумовними (за Лебегом) коефіцієнтами.

Отримано формули для обчислення розв'язку та його квазіпохідної для замкненого інтервала дійсної осі.

Практична реалізація цієї схеми залежить від структури коефіцієнтів вихідного диференціального рівняння за просторовою змінною. Так, наприклад, у випадку кусково-сталих коефіцієнтів виникає можливість досліджувати поздовжні (крутильні) коливання ступінчатих стрижнів з кусково-змінним розподілом параметрів.

## Література References


[1] В.Я. Арсенин. Методы математической физики. - М.: Наука, 1974. - 432 с.

[2] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 735 с.

[3] Р.М. Тацій. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В. Мазуренко, О.О. Власій - Дрогобич. Коло, 2011. - 297 с.

[4] Р.М. Тацій. Дискретно-неперервні крайові задачі для найпростіших квазідиференціальних рівнянь другого порядку / Р.М. Тацій, М.Ф.Стасюк, О.О.Власій // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Серія «Фіз. - мат. науки». 2011. - №718. - С. 61 - 69.

[5] В.С. Мартыненко. Операционное исчисление: Учеб. пособие. - 4 - е изд., перераб. и доп. - К.: Выща школа, 1990. - 359 с.

[6] Р.М. Тацій. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтам / Р.М. Тацій, О.О. Власій, М.Ф. Стасюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки . - 2014. - № 804. - С. 64-69.

[7] Ю.К. Рудавський. Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. / Ю.К. Рудавський, П.І. Каленюк, Р.М. Тацій та ін. - Л. Вид. Національного університету "Львівська політехніка", 2001. - 244 с.

[8] П.І. Каленюк. Диференціальні рівняння: Навч. посібник. / П.І. Каленюк, Ю.К. Рудавський, Р.М. Тацій, І.Ф. Клюйник, В.М. Колісник, П.П. Костробій, І.Я. Олексів - Л. Видавництво Львівської політехніки, 2014. - 380 с.

[9] В.В. Мазуренко. Про звідність дискретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткінсона // Доповіді НАН України. - 2001. - № 8 - С. 19-22.