Розв'язання Третьої Крайової Задачі для Рівняння Лапласа в Прямокутнику

Р.М. Тацій
кафедра прикладної математики і механіки
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
roman.tatsiy@gmail.com

М.Ф. Стасюк
кафедра прикладної математики і механіки
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
marta_stasiuk@yahoo.com

О.М. Трусевич
кафедра прикладної математики
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Львів, Україна

The Solution of Third Boundary Problem for Laplace's Equation Incide a Rectangle

R. Tatsiy
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
roman.tatsiy@gmail.com

M. Stasiuk
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
marta_stasiuk@yahoo.com

O. Trusevych
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine

***Анотація*—Розв'язана задача про поширення двовимірного стаціонарного температурного поля в прямокутній пластинці за умов конвективного теплообміну з навколишнім середовищем. Дослідження відповідних задач на власні значення здійснюється шляхом зведення їх до еквівалентних задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язок отримано у вигляді суми рядів.**

***Abstract*—There was solved the problem of expansion of two-dimensional stationary temperature field inside a rectangular plate under conditions of convective heat transfer with the surrounding environment. The investigation of the corresponding eigenvalue problems has been conducted by means of their reduction to the equivalent problems for systems of first order differential equations. The solution has been obtained in the form of sum of series.**

Ключові слова—крайова задача; метод Фур'є; матриця Коші

Keywords—boundary problem; Fourier method; Cauchy matrix

I. Вступ

В монографії [1] детально описаний спосіб побудови розв'язку задачі Діріхле в прямокутнику. Цей результат використано в статті [2] при описанні прямого методу розв'язання першої загальної крайової задачі для рівняння теплопровідності в прямокутнику при реалізації методу редукції.

В даній роботі розв'язана крайова задача для рівняння Лапласа в прямокутнику з умовами третього роду на його сторонах. На відміну від роботи [1], тут не вдається знайти власні значення та власні функції відповідних задач в явній формі. Натомість, для дослідження задач на власні значення, після відокремлення змінних, використовується метод зведення їх до еквівалентних задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку [3].

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РОЗВ’ЯЗАННЯ.

Необхідно розв’язати рівняння Лапласа в прямокутнику $0 < x < p, 0 < y < q$ (див. Рис.1):

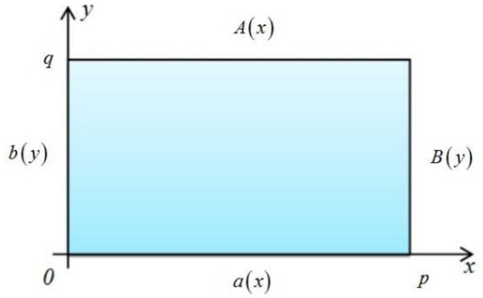

Рис. 1. Прямокутна область знаходження розв’язку крайової задачі (1),(2),(3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

з системою крайових умов третього роду:

$$\begin{cases} \alpha_0 \, u\big|_{x=0} - \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = b(y), \\ \alpha_l \, u\big|_{x=p} + \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=p} = B(y), \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \beta_0 \, u\big|_{y=0} - \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=0} = a(x), \\ \beta_l \, u\big|_{y=q} + \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=q} = A(x), \end{cases} \tag{3}$$

де $a(x), A(x)$ – задані неперервні на $[0, p]$ функції від x; $b(y), B(y)$ – задані неперервні на $[0, q]$ функції від y; $\alpha_0 > 0, \alpha_l > 0, \beta_0 > 0, \beta_l > 0, \lambda > 0$ – деякі числа.

Якщо числа $\alpha_0, \alpha_l, \beta_0, \beta_l$ інтерпретувати, як відповідні коефіцієнти теплообміну з навколишнім середовищем, а параметр λ — як коефіцієнт теплопровідності матеріалу прямокутної пластинки, то задача (1), (2), (3) має наступний фізичний зміст: вона описує процес поширення двовимірного стаціонарного температурного поля в пластинці за умов конвективного теплообміну з навколишнім середовищем.

Знайдемо спочатку розв’язки [1] рівняння (1), що мають вигляд

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \tag{4}$$

і справджують нульові крайові умови (2) при $b(y) = 0, B(y) = 0.$ Підставляючи (4) в (1), дістанемо умову відокремлення змінних

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\omega, \tag{5}$$

де λ — параметр. Для визначення функції $X(x)$ отримуємо задачу ні власні значення

$$X'' + \omega X = 0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 X(0) - \lambda X'(0) = 0, \\ \alpha_p X(p) + \lambda X'(p) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Для дослідження цієї задачі зведемо рівняння (6) до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку [3]

$$\bar{X}' = A \cdot \bar{X}, \tag{8}$$

де $\bar{X} = (x, x')^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$

Крайові умови (7) також запишемо у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_p & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(p) \\ x'(p) \end{pmatrix} = \bar{0}. \tag{9}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що матриця Коші $B(x, \mathrm{s})$ системи (8) має вигляд

$$B(x, s) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\omega}(x - s) & \dfrac{\sin\sqrt{\omega}(x - s)}{\sqrt{\omega}} \\ -\sqrt{\omega}\sin\sqrt{\omega}(x - s) & \cos\sqrt{\omega}(x - s) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Розв’язок задачі (8),(9) будемо шукати у вигляді [3]

$$\bar{X}(x, \omega) = B(x, 0, \omega) \cdot \bar{C}, \tag{11}$$

де $\bar{C}$ – деякий нетривіальний вектор. Для його визначення підставимо зображення (11) в крайові умови (9) і, після елементарних спрощень, отримаємо рівність

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha_0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_p & \lambda \end{pmatrix} \cdot B(p, 0, \omega) \right] \cdot \bar{C} = \bar{0}. \tag{12}$$

Ця рівність — рівняння для визначення нетривіального вектора $\bar{C} = (c_1, c_2)^T$. Для існування вектора $\bar{C}$ необхідно і досить виконання умови

$$Det\left[\begin{pmatrix}\alpha_0 & -\lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha_p & \lambda\end{pmatrix}\cdot B(p,0,\omega)\right]=$$

$$\begin{vmatrix}\alpha_0 & -\lambda\\ \left(\alpha_p\cos\sqrt{\omega}p-\lambda\sqrt{\omega}\sin\sqrt{\omega}p\right) & \left(\alpha_p\dfrac{\sin\sqrt{\omega}p}{\sqrt{\omega}}+\lambda\cos\sqrt{\omega}p\right)\end{vmatrix}=$$

$$\left(\alpha_0\lambda+\alpha_p\lambda\right)\cos\sqrt{\omega}p+\left(\frac{\alpha_0\alpha_p}{\sqrt{\omega}}-\lambda\sqrt{\omega}\right)\sin\sqrt{\omega}p=0. \quad (13)$$

Відомо [1], що корені ω_k, $k=1,2,...$ характерристичного рівняння (13), як власні значення задачі (11), (12) або еквівалентної до неї задачі на власні значення (6), (7) – додатні та різні. Підставивши ці корені в (12), прийдемо до однорідної системи лінійних рівнянь для визначення невідомих координат c_1, c_2 вектора $\bar{C}$:

$$\begin{cases}\alpha_0\cdot c_1-\lambda c_2=0,\\ \left(\alpha_p\cos\sqrt{\omega_k}p-\lambda\sqrt{\omega_k}\sin\sqrt{\omega_k}p\right)\cdot c_1+,\end{cases}$$

$$+\left(\alpha_p\frac{\sin\sqrt{\omega_k}p}{\sqrt{\omega_k}}+\lambda\cos\sqrt{\omega_k}p\right)\cdot c_2=0, \quad (14)$$

звідки отримуємо $c_2=1,\quad c_1=\dfrac{\lambda}{\alpha_0}.$

Отже,

$$\bar{C}=\left(\frac{\lambda}{\alpha_0},1\right)^T. \quad (15)$$

На основі зображення (11), з точністю до сталого множника, отримуємо вираз для власного вектора $\bar{X}_k(x,\omega_k)$:

$$\bar{X}_k(x,\omega_k)=B(x,0,\omega_k)\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda}{\alpha_0}\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\omega_k}x & \dfrac{\sin\sqrt{\omega_k}x}{\sqrt{\omega_k}}\\ -\sqrt{\omega_k}\sin\sqrt{\omega_k}x & \cos\sqrt{\omega_k}x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda}{\alpha_0}\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\sin\sqrt{\omega_k}x}{\sqrt{\omega_k}}+\dfrac{\lambda}{\alpha_0}\cos\sqrt{\omega_k}x\\ -\dfrac{\lambda\sqrt{\omega_k}}{\alpha_0}+\cos\sqrt{\omega_k}x\end{pmatrix}. \quad (16)$$

Власні функції $\bar{X}_k(x,\omega_k)$ задачі (6), (7) – це перші координати власних векторів $\bar{X}_k(x,\omega_k)$:

$$\bar{X}_k(x,\omega_k)=\frac{\sin\sqrt{\omega_k}x}{\sqrt{\omega_k}}+\frac{\lambda}{\alpha_0}\cos\sqrt{\omega_k}x. \quad (17)$$

Підставивши ω_k в рівність (5) замість ω, для визначення $Y_k(y)$, $k=1,2,\ldots$, отримаємо диференціальні рівняння:

$$Y_k''-\omega_k Y_k=0,\quad k=1,2,... \quad (18)$$

Загальний розв'язок рівняння (18) має вигляд

$$Y_k(y)=\alpha_k ch\sqrt{\omega_k}y+\beta_k sh\sqrt{\omega_k}y,\quad k=1,2,..., \quad (19)$$

де α_k, β_k – деякі сталі.

Підставляючи функції X_k, Y_k $k=1,2,...$ в (4) та сумуючи всі розв'язки такого вигляду, дістанемо розв'язок рівняння (1), що справджує нульові крайові умови при $x=0$ і $x=p$:

$$U_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k ch\sqrt{\omega_k}y+\beta_k sh\sqrt{\omega_k}y\right)\cdot X_k(x,\omega_k). \quad (20)$$

Доберемо тепер коефіцієнти α_k, β_k в (20) так, щоб цей розв'язок справджував умови (2). Для цього припустимо, що функції $a(x)$ і $A(x)$ розвиваються в рівномірно збіжні ряди Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$:

$$a(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k X_k(x,\omega_k),\quad A(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k X_k(x,\omega_k). \quad (21)$$

Покладаючи в рівності (20) $y=0$ та використовуючи умову (3) і розвинення в ряд Фур'є $a(x)$ з (21), послідовно отримуємо:

$$U_1(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k X_k(x,\omega_k);$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k ch\sqrt{\omega_k}y+\beta_k sh\sqrt{\omega_k}y\right)X_k(x,\omega_k);$$

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|_{y=0}=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sqrt{\omega_k}\cdot X_k(x,\omega_k);$$

$$\left(\beta_0 U_1 - \lambda\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0} = \beta_0\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k X_k\left(x,\omega_k\right) -$$

$$-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sqrt{\omega_k}X_k\left(x,\omega_k\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_0\alpha_k - \lambda\beta_k\omega_k\right)X_k\left(x,\omega_k\right) = a\left(x\right). \qquad (22)$$

З (22) отримуємо

$$\beta_0\alpha_k - \lambda\beta_k\omega_k = a_k. \qquad (22')$$

Аналогічно, покладаючи в (20) $y = q$ та використовуючи другу з умов (3) і рівняння для $A\left(x\right)$, з (21) маємо:

$$U_1\left(x,q\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k ch\sqrt{\omega_k}q + \beta_k sh\sqrt{\omega_k}q\right)X_k\left(x,\omega_k\right);$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y}\Bigg|_{y=q} = \sum_{k}^{\infty}\left(\alpha_k\sqrt{\omega_k}sh\sqrt{\omega_k}q + \beta_k\sqrt{\omega_k}ch\sqrt{\omega_k}q\right)X_k\left(x,\omega_k\right);$$

$$\left(\beta_q U_1 + \lambda\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=q} = A\left(x\right),$$

або

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_q\alpha_k + \lambda\beta_k\sqrt{\omega_k}\right)\cdot ch\sqrt{\omega_k}q\cdot X_k\left(x,\omega_k\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_q\beta_k + \lambda\alpha_k\sqrt{\omega_k}\right)\cdot sh\sqrt{\omega_k}q`\cdot X_k\left(x,\omega_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}A_k X_k\left(x,\omega_k\right). \qquad (23)$$

Прирівнюючи в (23) коефіцієнти Фур'є, отримуємо:

$$\left(\beta_q\alpha_k + \lambda\beta_k\sqrt{\omega_k}\right)\cdot ch\sqrt{\omega_k}q +$$

$$+\left(\beta_q\beta_k + \lambda\alpha_k\sqrt{\omega_k}\right)\cdot sh\sqrt{\omega_k}q = A_k. \qquad (23')$$

Рівності $\left(22'\right)$ і $\left(23'\right)$ утворюють систему рівнянь для визначення α_k і β_k. Розв'язуючи цю систему, остаточно отримуємо, що

$$\begin{cases}\alpha_k = \dfrac{a_k + \lambda\sqrt{\omega_k}\cdot\beta_k}{\beta_0}, \\ \beta_k = \dfrac{\beta_0 A_k - a_k\left(\lambda\sqrt{\omega_k}sh\sqrt{\omega_k}q + \beta_q ch\sqrt{\omega_k}q\right)}{L},\end{cases} \qquad (24)$$

де

$$L = \lambda\sqrt{\omega_k}\left(\lambda\sqrt{\omega_k}sh\sqrt{\omega_k}q + \beta_q ch\sqrt{\omega_k}q\right) +$$

$$+\beta_0\left(sh\sqrt{\omega_k}q + \lambda\sqrt{\omega_k}ch\sqrt{\omega_k}q\right), \quad k = 1,2,...$$

Отже, $U_1\left(x,y\right)$ при $b\left(y\right) = B\left(y\right) = 0$ подається у вигляді (20), де α_k і β_k визначаються формулами (24).

Якби ми шукали розв'язок задачі (1), (2), (3) при $a\left(x\right) = A\left(x\right) = 0,$ то x і y помінялися б місцями, і в цьому випадку ми дістали б розв'язок у вигляді

$$U_2\left(x,y\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\gamma_k ch\sqrt{\nu_k}x + \delta_k sh\sqrt{\nu_k}x\right)\cdot Y_k\left(y,\nu_k\right), \qquad (25)$$

де ν_k і $Y_k\left(y,\nu_k\right)-$власні значення та власні функції відповідно задачі:

$$Y'' + \nu Y = 0, \quad \begin{cases}\left(\beta_0 Y - \lambda Y'\right)\Big|_{y=0} = 0, \\ \left(\beta_q Y + \lambda Y'\right)\Big|_{y=q} = 0,\end{cases}$$

а коефіцієнти γ_k і δ_k визначаються за формулами, що аналогічні до (24).

Той факт,що розв'язки $U_1\left(x,\mathrm{y}\right), U_2\left(x,\mathrm{y}\right)$ справджують нульові крайові умови в кутових точках прямокутника, не обмежує загальності проведених вище міркувань. Дійсно, побудуємо гармонічну функцію

$$W\left(x,\mathrm{y}\right) = A + Bx + Cy + Dxy \qquad (26)$$

і доберемо сталі A, B, C, D так, щоб виконувались певні умови узгодженості у вершинах прямокутника, як це зроблено, наприклад, у роботі [2].

III. ВИСНОВКИ

Розв'язана третя крайова задача для рівняння Лапласа в прямокутнику у вигляді розвинення в ряди Фур'є за власними функціями відповідних задач на власні значення. До дослідження таких задач вперше застосовано метод зведення відповідної задачі на власні значення для диференціального рівняння другого порядку до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Г. М. Положій. Рівняння математичної фізики. Київ: Радянська школа, 1959, 478 с.

[2] Р. М. Таций, О. М. Трусевич. "Прямий метод розв'язування першої загальної крайової задачі для рівняння теплопровідності в прямокутнику" в *Вісник ЛДУ БЖД*", 2016. №13, С. 149-154.

[3] Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. О. Власій. "Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами" в *Вісник НУ «Львівська політехніка»: Сер. «Фізико-математичні науки,* 2014, №804, С. 64–69.