

**ISSN 2078-4481**

Міністерство освіти і науки України  
Херсонський національний технічний університет

***ВІСНИК***

**Херсонського національного  
технічного університету**



**Том 2**

Рекомендовано до друку Вченою радою  
Херсонського національного технічного університету  
(протокол № 11 від 06 липня 2017 року)

---

Журнал включено до Переліку наукових фахових видань України  
(Наказ Міністерства освіти і науки України № 820 від 11.07.2016 р.),  
у яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів  
доктора та кандидата технічних наук

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:  
РИНЦ (eLibrary),  
Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky)

**Херсон 2017**

## Редакційна рада

### Головний редактор

Бардачов Ю.М.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України,  
ректор Херсонського національного технічного університету

### Заступники головного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., професор

Савіна Г.Г.

д.е.н., професор

### Відповідальний секретар

Корнева А.О.

начальник навчально-наукового відділу

## Редакційна колегія

Баганов Є.О.

Букетов А.В.

Валько М.І.

Гнатушенко В.В.

Дімітрова В.Я. (Болгарія)

Коваленко М.А.

Коган О.Г. (Білорусь)

Костогриз О.П.

Кузьміна Т.О.

Лазурик В.Т.

Литвиненко В.І.

Мельник І.В.

Миколайчук Н.С.

Міщенко Г.В.

Новіков О.О.

Партицький С. (Польща)

Повстяной М.В.

Рудакова Г.В.

Сарапіна О.А.

Сарібєкова Д.Г.

Сарібєкова Ю.Г.

Семенченко Ф.Г.

Сошко О.І.

Сусоров В.Д.

Тіхосова Г.А.

Тулученко Г.Я.

Фомішина В.М.

Ходаков В.Є.

Хомченко А.Н.

Чепелюк О.В.

Чурсіна Л.А.

Шарко М.В.

к.т.н., доцент

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.н., доцент

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.ф.-м.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., доцент

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.х.н., професор

д.с.н., професор

д.х.н., професор

д.т.н., професор

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.політ.н., професор

д.т.н., професор

д.і.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.ф.-м.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.е.н., професор

**ISSN 2078-4481**

Министерство образования и науки Украины  
Херсонский национальный технический университет

# ***ВЕСТНИК***

**Херсонского национального  
технического университета**



**Том 2**

Рекомендовано к печати Ученым советом  
Херсонского национального технического университета  
(Протокол № 11 от 06 июля 2017 года)

---

Журнал включен в Перечень научных профессиональных изданий Украины  
(Приказ Министерства образования и науки Украины № 820 от 11.07.2016 г.),  
в которых могут публиковаться результаты диссертационных работ на соискание ученых  
степеней доктора и кандидата технических наук

Журнал включен в наукометрические баз, электронные библиотеки и репозитории:  
РИНЦ (eLibrary),  
Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky)

**Херсон 2017**

## Редакционный совет

### Главный редактор

Бардачев Ю.Н.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины,  
ректор Херсонского национального технического университета

### Заместители главного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., профессор

Савина Г.Г.

д.э.н., профессор

### Ответственный секретарь

Корнева А.А.

начальник учебно-научного отдела

## Редакционная коллегия

Баганов Е.А.

Букетов А.В.

Валько Н.И.

Гнатушенко В.В.

Димитрова В.Я. (Болгария)

Коваленко Н.А.

Коган А.Г. (Беларусь)

Костогрыз А.П.

Кузьмина Т.О.

Лазурик В.Т.

Литвиненко В.И.

Мельник И.В.

Миколайчук Н.С.

Мищенко А.В.

Новиков А.А.

Партицкий С. (Польша)

Повстяной М.В.

Рудакова А.В.

Сарапина О.А.

Сарибекова Д.Г.

Сарибекова Ю.Г.

Семенченко Ф.Г.

Сошко А.И.

Сусоров В.Д.

Тихосова А.А.

Тулученко Г.Я.

Фомишина В.Н.

Ходаков В.Е.

Хомченко А.Н.

Чепелюк Е.В.

Чурсина Л.А.

Шарко М.В.

к.т.н., доцент

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.н., доцент

д.э.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.ф.-м.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., доцент

д.э.н., профессор

д.т.н., профессор

д.х.н., профессор

д.с.н., профессор

д.х.н., профессор

д.т.н., профессор

д.э.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.полит.н., профессор

д.т.н., профессор

д.и.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.э.н., профессор

д.т.н., профессор

д.ф.-м.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.э.н., профессор



**ISSN 2078-4481**

Ministry of Education and Science of Ukraine  
Kherson National Technical University

**VISNYK**  
**of Kherson National**  
**Technical University**



**Part 2**

Recommended for publication by the Academic Council of Kherson National  
Technical University  
(minutes No. 11 on 6<sup>th</sup> July, 2017)

---

The journal is included to the list of scientific specialized publications  
(According to the Ministry of Education and Science of Ukraine Decree № 820 dated 11 July 2016)  
the results of the these of Doctor and Candidate of Engineering Science can be published

The journal is included in the scientometric- bases, electronic libraries and repositories: scientometric  
RSCI (eLibrary),  
Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky)

**Kherson 2017**

## Editorial Board

### Editor-in-Chief

Bardachov Yu.N.

Professor, Doctor of Engineering Science, Honored Worker  
of Science and Technology of Ukraine, Rector of Kherson National Technical University

### Deputies Editor-in-Chief

Rozov Yu.G.

Doctor of Engineering Science, Professor

Savina G.G.

Doctor of Economics, Professor

### Executive Secretary

Korneva A.A.

Head of the Academic and Scientific Department

## Members of Editorial Board

**Baganov Ye.A.**

PhD, Associate Professor

**Buketov A.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Val'ko N.I.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Hnatushenko V.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Dimitrova V. Ya. (Bulgaria)**

PhD, Associate Professor

**Kovalenko N.A.**

Doctor of Economics, Professor

**Kogan A.G. (Belarus)**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Kostogryz A.P.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Krichmar S.I.**

Doctor of Chemistry, Professor

**Kuz'mina T.O.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Lazurik V.T.**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Lytvynenko V.I.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Melnyk I.V.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor

**Mikolaychuk N.S.**

Doctor of Economics, Professor

**Mishchenko A.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Novikov A.A.**

Doctor of Chemistry, Professor

**Partirsky S. (Poland)**

Doctor of Social Sciences, Professor

**Povstyanoy M.V.**

Doctor of Chemistry, Professor

**Rudakova G.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Sarapina O.A.**

Doctor of Economics, Professor

**Saribekova D.G.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Saribekova Yu.G.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Semenchenko F.G.**

Doctor of Political Science, Professor

**Soshko A.I.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Susorov V.D.**

Doctor of Historical Sciences, Professor

**Tikhosova A.A.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Tuluchenko G.Ya.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Fomishina V.M.**

Doctor of Economics, Professor

**Khodakov V.Ye.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Khomchenko A.N.**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Chepelyuk Ye.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Chursina L.A.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Sharko M.V.**

Doctor of Economics

## ЗМІСТ

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

<b>Абрамов Г.С., Абрамов М.Г., Бардачов Ю.М.</b> Моделювання структур двофазних зон в процесі внутрішнього окислення пластин бінарних сплавів .....	11
<b>Абрамова Г.В., Магденко В.Р., Абрамов Г.С.</b> Дослідження стану та проблем розвитку державного підприємства «Адміністрація морських портів України» на основі економетричного аналізу .....	19
<b>Беглов Я.І., Беглов К.В.</b> Використання нечіткого регулятора для регулювання концентрації рідкого погливача у першому контурі АЕС .....	27
<b>Бердник М.Г.</b> Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну кусково-однорідного циліндра з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла .....	34
<b>Боков І.П., Бондаренко Н.С., Стрельнікова О.О.</b> Пружно-деформівний стан трансверсально-ізотропних пластин за дії локальних навантажень .....	42
<b>Бразалук Ю.В., Губін О.І., Євдокимов Д.В., Стояновський М.А.</b> Асимптотична математична модель абляційних теплозахисних покриттів .....	47
<b>Брунеткін О.І.</b> Інтегральні розв'язання задач динаміки теплофізичних процесів .....	55
<b>Венгрович Д.Б.</b> Прояви сейсмічності в рифтових процесах та при субдукції .....	60
<b>Воронцов О.В., Тулупова Л.О., Воронцова І.В.</b> Дискретна інтерполяція геометричних образів суперпозиціями двовимірних точкових множин функціональних залежностей .....	66
<b>Гнисько В.І., Крютченко Д.В., Науменко Ю.В., Стрельнікова О.О.</b> Моделювання вільних та вимушених коливань оболонкових конструкцій з відсіками, що містять рідину .....	71
<b>Горovenko А.П.</b> Напруження в пружному включенні в рідині під дією хвилі тиску .....	76
<b>Гуменюк Ю.О., Човнюк Ю.В.</b> Моделювання і аналіз ефективних електромагнітних біанізотропних/біізотропних параметрів капілярних систем електропровідності біооб'єктів .....	81
<b>Зимогляд А.Ю., Левченко Д.О.</b> Аналіз спектрів коронного розряду .....	90
<b>Караєв А.О., Стрельнікова О.О.</b> Метод граничних елементів в аксіально-симетричних задачах теорії пружності .....	94
<b>Книш Л.І., Гоман О.Г.</b> Комп'ютерне моделювання нестационарної течії в довгих промислових трубопроводах .....	99
<b>Ковч О.І., Стрельнікова О.О.</b> Метод скінченних елементів для моделювання розтріскування зварного шва при термосиловому навантаженні .....	104
<b>Коряшкина Л.С., Одновол Н.Н., Череватенко А.П., Міхальова О.О.</b> Моделювання зон сервісного обслуговування заданої території .....	109
<b>Кудін О.В., Спельчук О.В.</b> Розв'язання задачі статичної стійкості круглих тришарових пластин з нелінійно-пружним заповнювачем методом послідовних навантажень .....	118
<b>Лазурик В.М., Лазурик В.Т., Попов Г.Ф., Зімець З.</b> Оцінка точності визначення енергії електронного випромінювання на основі двопараметричної моделі електронного пучка .....	123
<b>Лебеденко Ю.О., Рудакова Г.В., Тоуфак Е.Р.</b> Моделювання параметрів руху елементів технологічних установок каркасної конструкції .....	128
<b>Ляшенко В.П., Кобильська О.Б., Бриль Т.С., Дем'янченко О.П.</b> Нелінійні інтегральні рівняння у математичних моделях теплообміну рухомого осесиметричного середовища .....	133
<b>Максимчук Д. М.</b> Представлення розв'язків для контакту пружного шару та співвісних пружних циліндрів з початковими (залишковими) напруженнями .....	138
<b>Мельник І.В., Гайдамака В.В.</b> Довгострокові залежності та фрактальний аналіз .....	143
<b>Меньшиков Ю.Л.</b> Деякі відкриті питання математичного моделювання .....	151
<b>Мочурад Л.І., Пукач П.Я.</b> Ефективний підхід до розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи .....	155
<b>Нагорний В.П., Денисюк І.І.</b> Математичне моделювання поля швидкостей в'язкої рідини у фільтраційних каналах нафтоносного пласта під дією гармонічних хвиль .....	166
<b>Пашенко В.О.</b> Моделювання силових характеристик нестационарного поля еліпсоподібного струмового контуру над ортотропним парамагнітним композитом з дисипативними втратами .....	171
<b>Пігнастий О.М.</b> Про критерії подібності поточних ліній .....	178
<b>Поляков В.О., Хачапуридзе М. М.</b> Математична модель процесу магнітної левітації поїзда .....	185
<b>Сметанкіна Н.В., Угримов С.В., Шупіков О.М., Долгополова Н.В.</b> Моделювання процесу нестационарного деформування шаруватого оскління при ударному навантаженні .....	190
<b>Солона А.В.</b> Побудова двовимірної математичної моделі процесу ковшового вакуумування з продувкою інертним газом .....	196
<b>Сохацький А.В., Маленко Є.В., Сохацький В.А.</b> Зв'язана задача аеродинаміки та динаміки руху високошвидкісного магнітолевітуючого транспортного засобу .....	202

Тарасов С.В., Редчиц Д.О., Тарасов А.С., Моїсєнко С.В. Аеродинаміка j-профілю в турбулентному потоці повітря при круговій продувці .....	208
Фильштинський Л.А., Сушко Т.С., Єременко Г.А. Крайова задача механіки руйнування магнітоелектропружності для кінцевої пластини .....	215
Хомченко А.Н., Астіоненко І.О. Серендипові поверхні вищих порядків: особливості формоутворення .....	221
Хомченко А.Н., Литвиненко О.І. Про серендипові поверхні, які утворюють сімпсонові тіла .....	224
Худяков І.В., Рудакова Г.В., Клевцов М.К. Моделювання впливу зовнішніх умов при аналізі динаміки судна в ходових режимах .....	229
Чопоров С.В. Згладжування сіток чотирикутних елементів з використанням локальної мінімізації функціоналу .....	234
Щербина І.В., Білова О.В., Кагадій Т.С. Застосування асимптотичного методу до розв'язання задачі про передачу навантаження для тіл скінченних розмірів .....	240
Эфендиев Г.Д., Рустамов Я.И., Талыбова Н.Г. Оценка эффективности прогностических моделей с применением формулы Байеса eif-ketpl-2-2015-1(25)-56/13/1-m-28 .....	245

## ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРИЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Адоньєв Є.О., Верещага В.М. Особливості B-ліній, B-поверхонь, визначення, переваги та можливості застосування у композиційному методі геометричного моделювання .....	249
Ванін В.В., Грубич М.В., Юрчук В.П. Геометричне моделювання гвинтових поверхонь змінного (аксіального) кроку при конструюванні вилкових копачів .....	256
Ванін В.В., Вірченко Г.А., Незенко А.Й. Особливості геометричного моделювання поверхні крила в аспекті життєвого циклу літака .....	260
Гавриленко Є.А., Холодняк Ю.В., Найдіш А.В. Дискретне моделювання одновимірного просторового обводу на основі області можливого розташування кривих із заданими геометричними характеристиками .....	264
Гумен О.М., Мартин Є.В., Сподинюк Н.А., Ляковська С.Є. Інформаційні графічні засоби подання простору температурного поля промислових будівель .....	269
Дубініна О.В., Гавриленко Є.А., Холодняк Ю.В. Контроль закономірності зміни кривини на ділянці кубічного B-сплайна .....	274
Ковальов С.М., Ботвіновська С.І., Золотова А.В., Лось С.О. Формування дискретного ряду точок складених кривих ліній під дією нормального навантаження .....	278
Куценко Л.М., Запольський Л.Л. Геометричне моделювання розгортання у невагомості багатоланкової конструкції з інерційним розкриттям .....	284
Куценко Л.М., Запольський Л.Л. Геометричне моделювання в середовищі Maple ефекту Джанібєкова з використанням кватерніону .....	292
Несвідоміна О.В. Побудова плоских ізометричних сіток за наперед заданими плоскими кривими ...	298
Пилипака С.Ф., Кремець Т.С., Клендій М.Б. Рух частинки по поверхні циліндра, який здійснює поступальні коливання у вертикальній площині .....	303
Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням .....	312
Соболь О.М., Кравців С.Я. Математична модель управління інтегральним пожежним ризиком та її особливості .....	317
Спірінцев В.В., Гоголюк А.Ю. Аналіз мамографічних знімків з використанням алгоритмів кластеризації .....	322
Спірінцев Д.В., Найдіш А.В. Представлення плоскої дискретної кривої .....	327
Стганцев Є.В., Пилипенко К.А. Обвідні спеціальних сімей кіл .....	333
Суліменко С.Ю., Анпілогова В.О., Суліменко Г.Г. Побудова площини симетрії конуса, дотичного до поверхні обертання, за ескізом лінії обрису .....	337
Тулученко Г.Я., Селуянова Т.А., Старун Н.В. Ієрархічні схеми в задачах ермітової інтерполяції ...	342
Юрчук В.П., Яблонський П.М. Визначення параметрів спряжених поверхонь при коченні без ковзання в системі "вилка-диск" .....	348

CONTENS

**MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL AND TECHNOLOGICAL PROCESSES AND TECHNICAL SYSTEMS**

<b>Abramov G.S., Abramov M.G., Bardachov Yu.N.</b> Modeling of structures of two-phase zones in the process of internal oxidation of binary alloys plates .....	11
<b>Abramova G.V., Abramov G.S.</b> The research of the state and prospects for the development of the state enterprise «ukranian sea ports authority» based on econometric modeling .....	19
<b>Beglov Ya.I., Beglov K.V.</b> Application of the fuzzy regulator for regulation of the concentration of a liquid absorption in the first nuclear pipe .....	27
<b>Berdnyk M.G.</b> Mathematical modeling of three-dimensional generalized problem of heat exchange piecewise homogeneous cylinder in view finite speed of propagation of heat .....	34
<b>Bokov I. P., Bondarenko N.S., Strelnikova E.A.</b> Stress-strain state of transversal-isotropic plates under local loads .....	42
<b>Brazaluk Iu.V., Gubin O.I., Yevdokymov D.V., Stoianovskyi M.A.</b> Asymptotic mathematical model of ablating thermal protective coatings .....	47
<b>Brunetkin A.I.</b> Integrated solutions for dynamics of thermophysical processes .....	55
<b>Vengrovich D.B.</b> Seismicity of rifting and subduction .....	60
<b>Vorontsov O.V., Tulupova L.A., Vorontsova I.V.</b> Discrete interpolation of geometric images by superpositions of two-dimensional point sets of functional dependences .....	66
<b>Gnitko V.I., Krutchenko D.V., Naumenko Y., Strelnikova E.</b> Estimation of free and forced vibrations of shell structures with fluid-filled compartment .....	71
<b>Gorovenko A.P.</b> The stresses in elastic inclusion in a liquid produced by the compressional wave .....	76
<b>Gyumenyuk Y.O., Chovnyuk Y.V.</b> Modeling and analysis of effective electromagnetic bi-anisotropic/bi-isotropic parameters of capillary systems of electrical conductivity of bioobjects .....	81
<b>Zimoglyad A.Y., Levchenko D.O.</b> Analysis of coronary discharge spectra .....	90
<b>Karaiev A.O., Strelnikova O.O.</b> Boundary element method in axisymmetric tasks theory of elasticity .....	94
<b>Knysch L.I., Goman O.G.</b> Computer simulation of the non-stationary flow in the long industrial pipelines... ..	99
<b>Kovch O.I., Strelnikova E.A.</b> Finite element method in modeling the welded seam cracking under thermal and strength loading .....	104
<b>Koriashkina L.S., Odnovol N.N., Cherevatenko A.P., Mikhalova O.O.</b> Modeling of service zones on a given area .....	109
<b>Kudin O.V., Spelchuk O.V.</b> Buckling problem of sandwich plates with nonlinear core solved by method of consecutive loading .....	118
<b>Lazurik V.M., Lazurik V.T., Popov G.F., Zimek Z.</b> Estimation of accuracy at determination of electron energy based on two parametric model of electron beam .....	123
<b>Lebedenko Y.O., Rudakoda G.V., Tchoufack E.R.</b> Modeling motion parameters of the technological frame type installations .....	128
<b>Lyashenko V., Kobilskaya E., Bryl T., Demyanchenko O.</b> Nonlinear integral equations in the mathematical models of heat transfer in a moving axial-symmetric medium .....	133
<b>Maksymchuk D.N.</b> Presentation of solutions for contact problem for cylindrical punches which interact with the layer with initial (residual) stresses .....	138
<b>Melnyk I.V., Haidamaka V.V.</b> Long-time dependences and fractal analyse .....	143
<b>Menshikov Yu.L.</b> Some open questions of mathematical modeling .....	151
<b>Mochurad L.I., Pukach P.Ya.</b> An effective approach to the calculating of the electrostatic field of a quadrupole lens .....	155
<b>Nagorny V.P., Denysyuk I.I.</b> Mathematical modeling of velocity field in the viscous fluid filtration channels of oil-bearing layer under the action of harmonic waves .....	166
<b>Pashchenko V.O.</b> The modelling of power-type characteristics of nonstationary field of elliptic contour above the ortotropic paramagnetic composite with dissipative loss .....	171
<b>Pihnastyi O.M.</b> About similarity criteria of the production lines .....	178
<b>Polyakov V.A., Khachapuridze N.M.</b> Mathematical model of train's magnetic levitation process .....	185
<b>Smetankina N.V., Ugrimov S.V., Shupikov O.M., Dolgopolova N.V.</b> Modeling of nonstationary deformation process of laminated glazing at impact loading .....	190
<b>Solona A.V.</b> Two-dimensional mathematical model of the ladle degassing process with inert gas blowing construction .....	196
<b>Sokhatsky A.V., Malenko E.V., Sokhatsky V.A.</b> Associated task of aerodynamics and dynamics of motion of high-speed maglev of transport vehicle .....	202
<b>Tarasov S.V., Redchyts D.O., Tarasov A.S., Moiseenko S.V.</b> Aerodynamics of j-airfoil in turbulent flow of air at arbitrary angle of attack .....	208

<b>Filshtinskii L.A., Sushko T.S., Yeremenko H.A.</b> The boundary-value problem of fracture mechanics of novel magnetoelastoclasticity for the finite plate .....	215
<b>Khomchenko A.N., Astionenko I.O.</b> Serendipity surfaces of higher orders: peculiarities of forming .....	221
<b>Khomchenko A.N., Litvinenko O.I.</b> On serendipity surfaces which create Simpson bodies .....	224
<b>Khudiakov I.V., Rudakoda G.V., Klevtsov M.K.</b> Modeling of the external conditions influence for the analysis of the vessel dynamics in the angle regimes .....	229
<b>Choporov S. V.</b> Smoothing of quadrilateral meshes by local functional minimization .....	234
<b>Sherbina I.V., Belova O.V., Kagadiy T.S.</b> Application of the asymptotic method to the solution of the load transfer problem for bodies of finite sizes .....	240
<b>Efendiev G.J., Rustamov Ya.I., Talybova N.G.</b> Assessment of prognostic models efficiency with the use of Bayes formula eif-ketpl-2-2015-1(25)-56/13/1-m-28 .....	245

## APPLIED GEOMETRY AND COMPUTER TECHNOLOGIES

<b>Adon'yev Y.O., Vereshyaga V.M.</b> Features of B-lines, B-surfaces, definitions, advantages and opportunities of application in the composite method of geometrical modeling .....	249
<b>Vanin V.V., Hrubich M.V., Yurchuk V.P.</b> Geometric modeling of switching surfaces of the changed step for the design of voltage copies .....	256
<b>Vanin V.V., Virchenko G.A., Nezenko A.J.</b> Peculiarities of geometric modeling of the wing surface in the aspect of aircraft life cycle .....	260
<b>Gavrilenko E.A., Kholodnyak YU.V., Naydysh A.V.</b> Discrete modeling of one-dimensional spatial contours on the basis of a possible location of curves with given geometric characteristics .....	264
<b>Gumen O.M., Martyn Ye.V., Spodyniuk N.A., Lyaskovska S.Ye.</b> Information graphic means for representation of the temperature field space of industrial buildings .....	269
<b>Dubinina O.V., Gavrilenko E.A., Kholodnyak Yu.V.</b> Checking the regularity of changing curvature on the part of the cubic B- spline .....	274
<b>Kovalev S., Botvinovska S., Zolotova A., Los S.</b> Formation of the discrete set of points of compound curves under the normal load .....	278
<b>Kutsenko L.N., Zapolsky L.L.</b> Geometrical modeling of deployment in the weightlessness of a multi-purpose construction with inertial disclosure .....	284
<b>Kutsenko L.N., Zapolsky L.L.</b> Geometrical modeling in the program Maple the effect of Janibekov with the use of the quaternion .....	292
<b>Nesvidomina A.V.</b> Building of plane isometric grid for their arbitrary plane curves .....	298
<b>Pylypaka S.F., Kremetz T.S., Klendiy M.B.</b> Particle movement on the surface of a cylinder that makes translational oscillations in a vertical plane .....	303
<b>Pylypaka S.F., Mukvich M.M.</b> Construction of minimal surfaces by the imaginary cycloid given by the complex natural equation .....	312
<b>Sobol O.M., Kravtsiv S.Ya.</b> Mathematical model of management of integral fire risk and its features .....	317
<b>Sprintsev V.V., Hoholiuk A.Yu.</b> The analysis of mammographic roentgenogram with using the clustering algorithms .....	322
<b>Sprintsev D., Naydysh A.</b> Representation of the plane discrete curve .....	327
<b>Stegantsev E.V., Pilipenko E.A.</b> The envelopes of the special families of the circumferences .....	333
<b>Sulimenko S.Y., Anpilogova V.A., Sulimenko A.G.</b> Construction of the plane of symmetry of the cone tangent to the surface of revolution according to the sketch of the outline .....	337
<b>Tuluchenko H.Ya., Seluianova T.A., Starun N.V.</b> The hierarchical schemes in the problems of hermite's interpolation .....	342
<b>Yurchuk V., Yablonskyi P.</b> Parametrs' determination for conjugate surfaces on rolling movement without sliding in "cradle-disk" system .....	348

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І  
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І  
ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ**

УДК 539.219.3

Г.С. АБРАМОВ, М.Г. АБРАМОВ, Ю.Н. БАРДАЧЁВ  
Херсонский национальный технический университет**МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР ДВУХФАЗНЫХ ЗОН В ПРОЦЕССЕ  
ВНУТРЕННЕГО ОКИСЛЕНИЯ ПЛАСТИН БИНАРНЫХ СПЛАВОВ**

*Проведено моделювання формування двухфазних зон в процесі внутрішнього окислення пластин бінарних сплавів і вивчена залежність параметрів структури (число частинок, їх середній розмір і об'єм фази) від товщини пластини і концентрації легируючого елемента. Проведено порівняння результатів моделювання з експериментальними результатами внутрішнього окислення пластин сплавів Ni-Cr, Ni-Ti і показано їх якісну відповідність.*

*Ключевые слова:* бінарні сплави, внутрішнє окислення, двухфазна зона, параметри структури.

G.S. ABRAMOV, M.G. ABRAMOV, Yu.N. BARDACHOV  
Kherson National Technical University**МОДЕЛЮВАННЯ СТРУКТУР ДВОФАЗНИХ ЗОН В ПРОЦЕСІ ВНУТРІШНЬОГО ОКИСЛЕННЯ  
ПЛАСТИН БІНАРНИХ СПЛАВІВ**

*Проведено моделювання формування двофазних зон в процесі внутрішнього окислення пластин бінарних сплавів і вивчена залежність параметрів структури (число частинок, їх середній розмір і об'єм фази) від товщини пластини і концентрації легиуючого елемента. Проведено порівняння результатів моделювання з експериментальними результатами внутрішнього окислення пластин сплавів Ni-Cr, Ni-Ti і показана їх якісна відповідність.*

*Ключові слова:* бінарні сплави, внутрішнє окислення, двофазна зона, параметри структури.

G.S. ABRAMOV, M.G. ABRAMOV, Yu.N. BARDACHOV  
Kherson National Technical University**MODELING OF STRUCTURES OF TWO-PHASE ZONES IN THE PROCESS OF INTERNAL  
OXIDATION OF BINARY ALLOYS PLATES**

*Modeling of the formation of two-phase zones in the process of internal oxidation of binary alloy plates was carried out and the dependence of the structure parameters (number of particles, their average size and phase volume) on the plate thickness and concentration of the alloying element was studied. The simulation results are compared with the experimental results of internal oxidation of Ni-Cr, Ni-Ti alloy plates and their qualitative agreement is shown.*

*Keywords:* binary alloys, internal oxidation, two-phase zone, structure parameters.

**Постановка проблеми**

В сучасному матеріалознавстві значительно розширился круг матеріалів, необхідні для службових властивостей яких забезпечуються за рахунок дисперсного упрочнення твердого розчину частинками другої фази.

При цьому при отриманні жаростійких і жаропрочних матеріалів нерідко бувають випадки, коли необхідні властивості досягаються за рахунок утворення дисперсних частинок другої фази в приповерхневих шарах матеріалів. Крім того, часто виникає і необхідність мати різні властивості в поверхневих шарах виробів і в їх об'ємі. Найбільш перспективним методом створення дисперсноупрочнених приповерхневих шарів є процес внутрішнього окислення (азотування, цементування, борировання і т.п.) [1,2].

Однак, і в теоретичному, і в експериментальному відношенні кінетика формування двухфазної зони і її еволюція в процесі внутрішнього окислення вивчені недостатньо, що в певній мірі обмежує широке практичне використання процесу внутрішнього окислення.

**Анализ публикаций и достижений**

Настоящая работа является продолжением цикла статей авторов [3–9], посвящённых проблеме моделирования процесса внутреннего окисления. В имеющихся работах [1,2], в лучшем случае, моделируется кинетика движения фронта внутреннего окисления и не рассматриваются параметры структуры двухфазной зоны (среднее число частиц, их средний размер и объём фазы) и их эволюция в процессе внутреннего окисления.

**Цель работы**

Целью настоящей работы является моделирование структур двухфазных зон в процессе внутреннего окисления пластин бинарных сплавов в условиях термодинамического равновесия на поверхности насыщения.

**Основная часть**

Для построения теоретических распределений параметров структуры двухфазной области (числа дисперсных частиц, их среднего размера и суммарного объёма) использовались численные решения замкнутой системы уравнений [6]:

- уравнений диффузии в твёрдом растворе двухфазной области ( $0 \leq x \leq y(t)$ )

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = D_{ii} \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + D_{ij} \frac{\partial^2 c_j}{\partial x^2} + D_{ii} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial c_i}{\partial x} + D_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial c_j}{\partial x} + c_i^{н.ф.} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

( $i, j = 1, 2; i \neq j$ )

с граничными условиями на свободной поверхности

$$c_i(0) = c_i \quad (i = 1, 2)$$

- уравнений диффузии в твёрдом растворе сплава ( $x \geq y(t)$ )

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = D_{ii} \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + D_{ij} \frac{\partial^2 c_j}{\partial x^2} \quad (D_{21} = 0) \quad (i = 1, 2)$$

- уравнения непрерывности для функции распределения частиц второй фазы по размерам (для каждого сечения двухфазной области)

$$\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial v_R f}{\partial R} = \mu(R, t')$$

- уравнений массового баланса на границе двухфазная область-сплав

$$I_i|_{x=y-0} = I_i|_{x=y+0} \quad (i=1, 2)$$

$$c_i(x = y - 0, t) = c_i(x = y + 0, t)$$

-уравнения линии растворимости

$$(a_{1p})^{a_1} (a_{2p})^{a_2} = \exp \frac{\Delta G}{RT}$$

Рассмотрим кинетику изменения и пространственное распределение меры пересыщения  $L(x)$  в пластине (рис.1), которые в значительной мере проясняют физику процесса формирования структуры двухфазной области.

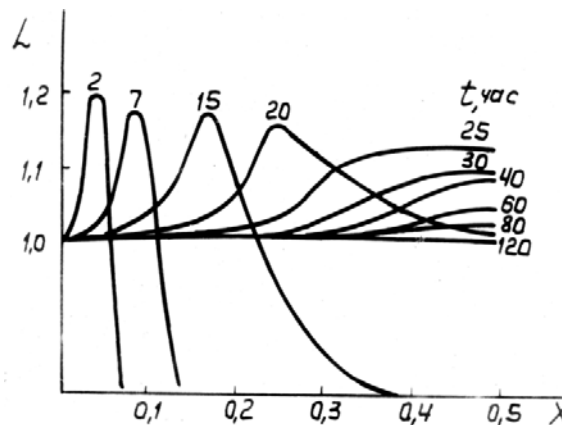


Рис. 1. Распределение функции пересыщения по глубине пластины.



В начальные моменты процесса внутреннего окисления вблизи поверхности формируется область пересыщения твёрдого раствора, причём мера пересыщения имеет острый максимум, который со временем смещается вглубь пластины. При этом пересыщение в приповерхностных слоях пластины значительно уменьшается; здесь успевает пройти заметная релаксация пересыщения твёрдого раствора как за счёт ухода вещества в образующиеся и растущие зародыши новой фазы, так и за счёт диффузионного ухода за свободную поверхность.

Следует отметить, что величина максимума меры пересыщения в более глубоких слоях пластины уменьшается, что свидетельствует об уходе вещества в новую фазу; то есть на величине  $L(x_{\max})$  в последующих сечениях сказывается уход вещества в стоки, которыми являются растущие частицы новой фазы в предыдущих сечениях пластины.

Правая ветвь меры пересыщения с приближением к центру пластины начинает двигаться ускоренно за счёт наложения диффузионных полей от противоположных поверхностей пластины. Таким образом, с приближением к центру пластины максимум размывается и при больших временах в центре пластины формируется медленно релаксирующая область с максимальным пересыщением твёрдого раствора.

Из рис. 2 видно, что кривые  $L(t)$  для различных сечений пластины имеют качественно аналогичный характер, однако в каждом последующем сечении пересыщение твёрдого раствора ( $L > I$ ) образуется в более позднее время, причём интервал запаздывания сначала увеличивается, а затем, по мере приближения к центру пластины, уменьшается, что является следствием ускорения движения фронта двухфазной зоны с приближением к центру пластины.

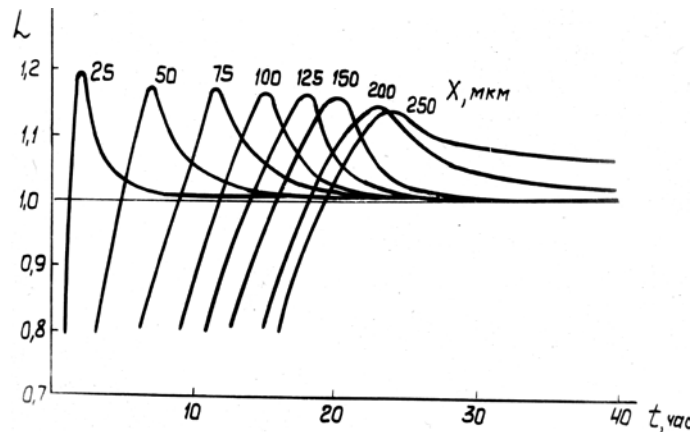


Рис. 2. Кинетика изменения функции пересыщения в различных сечениях пластины.

Процесс релаксации пересыщения в каждом сечении пластины имеет весьма продолжительную асимптотическую стадию медленного приближения к состоянию равновесия. Этой асимптотической стадии предшествует короткая стадия резкого снижения пересыщения твёрдого раствора в данном сечении, следующая непосредственно за стадией роста пересыщения и достижения им максимума. Такая стадийность процесса внутреннего окисления, различимая уже при рассмотрении кинетики изменения функции пересыщения, позволяет выделить и стадии процесса формирования структуры двухфазной области. Быстрому росту пересыщения твёрдого раствора в данном сечении пластины будет соответствовать стадия бурного зарождения и роста зародившихся частиц с преобладанием процесса зарождения; на этапе быстрого уменьшения пересыщения идёт интенсивный рост частиц, а процесс зарождения новых частиц отсутствует, т. к. пересыщение твёрдого раствора стремится к нулю, и рост частиц новой фазы за счёт вещества твёрдого раствора постепенно уступает место их росту по механизму коалесценции.

Все эти стадии (зарождение, рост, коалесценция) со сдвигом по времени последовательно реализуются в каждом сечении пластины. И если в центральном сечении пластины только начинается стадия образования частиц, то приповерхностные слои в это время могут уже находиться на поздней асимптотической стадии процесса коалесценции.

Как следует из вышеизложенного, эволюция меры пересыщения  $L(x, t)$  в пластине во многом

определяет кинетику роста двухфазной зоны. На рис. 3 в координатах  $\frac{x}{l} - \frac{t}{l^2}$  и  $\frac{x}{l} - \frac{\sqrt{t}}{l}$  представлены результаты моделирования продвижения фронта двухфазной зоны в пластине (толщиной  $l$ ). Видно, что при малых временах процесса зона растёт по закону  $\sqrt{t}$  и кривая существенно отклоняется от параболической по мере приближения фронта двухфазной зоны к центру пластины. На рис. 4 представлены аналогичные

экспериментальные результаты по кинетике продвижения фронта внутреннего окисления в образцах  $Ni-Cr$ , внутреннеокисленных при  $T = 1150^\circ C$ . Видно, что при приближении к центру пластины скорость продвижения фронта внутреннего окисления быстро возрастает.

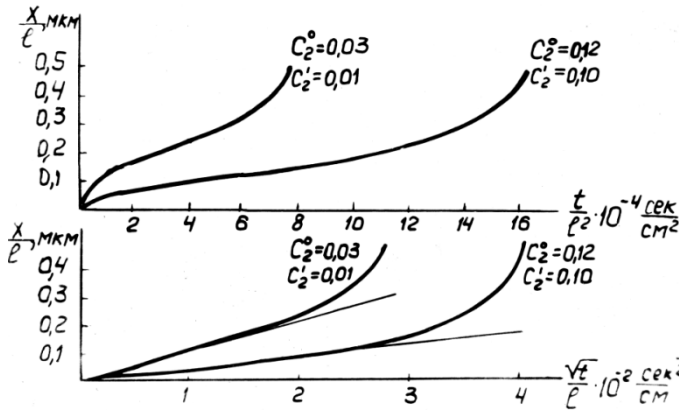


Рис. 3. Кинетика движения границы зоны внутреннего окисления.

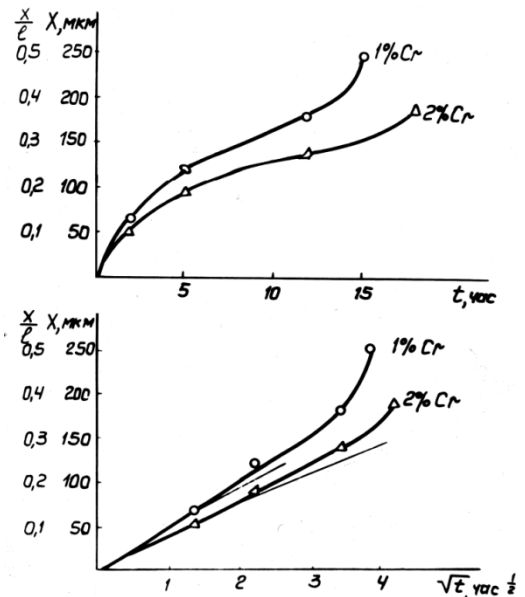


Рис. 4. Кинетика движения границы зоны внутреннего окисления в сплавах  $Ni-1\%Cr, Ni-2\%Cr$  ( $l = 500$  мкм;  $T = 1150^\circ C$ )

Экспериментальные зависимости  $x-t$  и  $x-\sqrt{t}$  находятся в хорошем качественном соответствии с результатами численного моделирования процесса внутреннего окисления пластин бинарного сплава, приведёнными на рис. 3. Хорошее соответствие наблюдается и при сравнении значений скорости роста зоны внутреннего окисления для разных сечений пластины (рис. 5). Скорость роста зоны внутреннего окисления с удалением от поверхности убывает, проходит через минимум и быстро возрастает по мере приближения фронта внутреннего окисления к центральному сечению пластины. При этом положение точки минимума зависит от кинетических и термодинамических параметров системы (от коэффициентов диффузии  $D_{11}, D_{22}$  и  $D_{12}$ , от исходной концентрации легирующего элемента  $C_2^0$  и т. д.) [6].

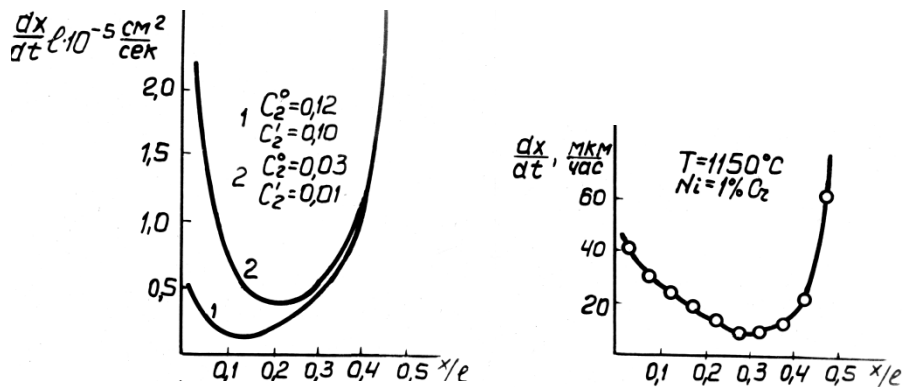


Рис. 5. График зависимости скорости роста зоны внутреннего окисления от координаты  $\frac{x}{l}$ .

Значительное влияние на кинетику продвижения фронта внутреннего окисления оказывают и дисперсные частицы окислов, являющиеся стоками для кислорода и легирующего элемента. На рис. 6 представлены экспериментальные данные по кинетике роста двухфазной зоны при внутреннем окислении сплавов  $Ni-2\%Cr$  и  $Ni-3\%Cr$ . Видно, что при внутреннем окислении пластины сплава  $Ni-2\%Cr$  по мере приближения фронта к центру образца наметившееся было ускорение движения границы зоны сменяется (вследствие интенсивного поглощения легирующего элемента стоками-частицами  $Cr_2O_3$ ) замедлением по сравнению с  $\sqrt{t}$ . В сплаве с  $3\%Cr$  объём фазы растёт ещё быстрее и его влияние на кинетику роста внутреннеокисленной зоны сказывается ещё раньше. В результате движение фронта

внутреннего окисления приостанавливается, внутреннее окисление всей пластины не реализуется и в центре пластины образуется обеднённая по легирующему элементу зона. Теоретические расчёты вариантов внутреннего окисления, приводящих к этому эффекту, в настоящей работе не делались. Это связано с тем, что данный эффект «неполного» внутреннего окисления пластины, безусловно важный на асимптотической стадии процесса для сплавов с большим содержанием легирующего элемента, практически не имел места при экспериментальном исследовании пластин сплавов  $Ni-Cr$  и  $Ni-Ti$ .

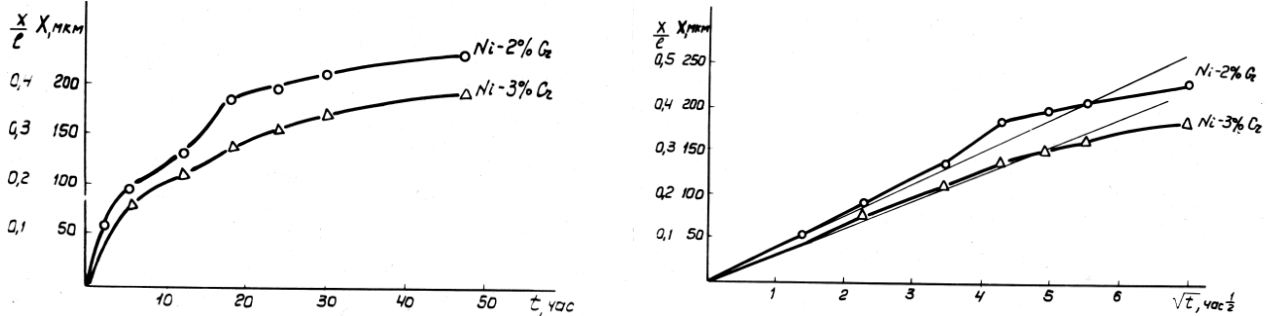


Рис. 6. Кинетика роста зоны внутреннего окисления в пластинах сплавов  $Ni-Cr$  ( $T = 1150^{\circ}C$ ).

Таким образом, при повышении концентрации легирующего элемента в пластине бинарного сплава может иметь место конкуренция между ускорением продвижения фронта двухфазной области, связанным с взаимодействием двух потоков кислорода от противоположных поверхностей пластины, и замедлением, обусловленным влиянием ухода компонентов из твёрдого раствора в растущую фазу. Эти два эффекта, накладываясь, могут быть причиной ошибок экспериментального определения кинетики процесса. Измеряют некоторую эффективную "параболическую" кинетику, но такая аппроксимация не учитывает сложной кинетики процесса: замедляющего влияния ухода вещества в фазу и ускорения при приближении внутреннеокисленной зоны к центру пластины.

На рис. 7 представлены теоретические данные по распределению числа частиц  $N$ , их среднего радиуса  $\bar{R}$  и объёма фазы  $V_{\phi}$  по толщине пластины. По оси абсцисс отложено относительное расстояние от поверхности пластины. В силу симметрии представлены распределения структуры  $N$ ,  $\bar{R}$  и  $V_{\phi}$  лишь до центра пластины. Из приведенных данных следует, что распределения числа частиц  $N$ , их среднего размера  $\bar{R}$  и относительного суммарного объёма фазы  $V_{\phi}$  по толщине пластины носят немонотонный характер. Распределения  $N(x)$ ,  $\bar{R}(x)$  и  $V_{\phi}(x)$  имеют максимум, который с течением времени смещается вглубь пластины.

На рис. 8 приведены данные по распределению  $N(x)$ ,  $\bar{R}(x)$  и  $V_{\phi}(x)$ , полученные моделированием для более толстой пластины и для более низких значений коэффициентов диффузии  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  и  $D_{22}$ .

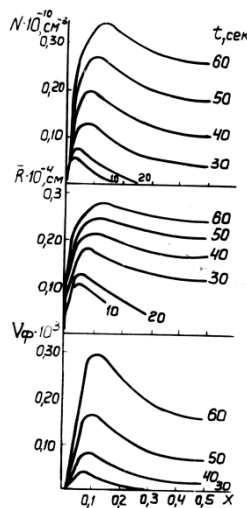


Рис. 7. Распределения  $N$ ,  $\bar{R}$  и  $V_{\phi}$  в пластине

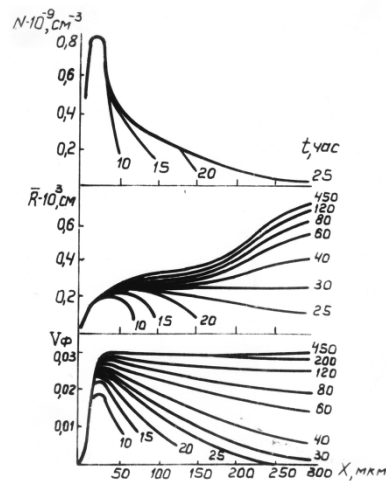


Рис. 8. Распределения  $N$ ,  $\bar{R}$  и  $V_{\phi}$  в пластине

Вид кривых на рис. 7 качественно аналогичен вышеприведенным; однако, одна из отличительных особенностей состоит в том, что для данных значений параметров максимум на кривой  $N(x)$  расположен вблизи поверхности и со временем не смещается к центру пластины. Причины такого различия, по-видимому, заключается в следующем. При понижении значений коэффициентов диффузии  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  и  $D_{22}$  скорость продвижения фронта внутреннего окисления существенно замедляются. При этом частицы второй фазы, образовавшиеся в приповерхностных сечениях пластины, успевают вырасти, и уход вещества в растущую фазу, объём которой значительно больше, чем в вышеприведенном случае, способствует релаксации пересыщения твёрдого раствора, оказывая существенное влияние на состояние твёрдого раствора в последующих, более глубоких сечениях: максимальное пересыщение твёрдого раствора здесь падает (рис. 1) и количество зарождающихся частиц уменьшается. В приведенном на рис. 7 случае объём фазы невелик и не оказывает существенного влияния на диффузию в твёрдом растворе, поэтому пересыщение достигает примерно равного максимального значения во всех сечениях. В связи с тем, что его диффузионная релаксация происходит в центральных сечениях значительно медленнее, здесь успевают зародиться и вырасти большое число частиц. По этой же причине в обоих случаях максимальные значения среднего размера частиц  $\bar{R}$  и объёма фазы  $V_\phi$  с течением времени оказываются в центре пластины: максимум пересыщения твёрдого раствора с течением времени смещается в центр пластины и релаксирует значительно дольше, чем в любом другом сечении пластины.

На рис. 9 приведены экспериментальные данные о распределении частиц окислов  $TiO_2$  в тонких ( $l = 100$  мкм) пластинах сплава  $Ni-1,78Ti$ , подвергнутых внутреннему окислению при  $T = 1150^\circ C$  различное время. Видно, что кривые  $N(x)$ ,  $\bar{R}(x)$  и  $V_\phi(x)$  имеют экстремальный характер, их вид качественно соответствует результатам моделирования, приведенным на рис. 7. На рис. 10 представлены экспериментальные данные о распределении  $N$ ,  $\bar{R}$  и  $V_\phi$  по толщине пластины ( $l = 500$  мкм) в образцах сплава  $Ni-1\%Cr$ , внутреннеокисленных при  $T = 1150^\circ C$  различное время. Видно, что если максимумы среднего размера частиц  $\bar{R}$  и объёма фазы  $V_\phi$  смещаются со временем к центру пластины, то максимум числа частиц остаётся вблизи поверхности. Эти экспериментальные наблюдения соответствуют результатам моделирования, приведенным на рис. 8.

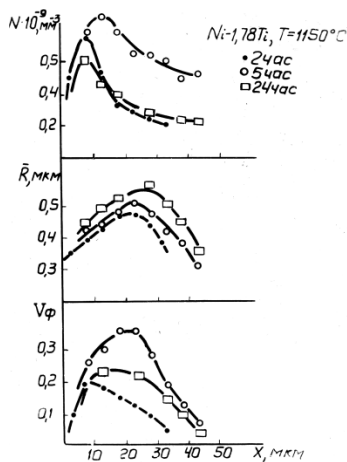


Рис. 9. Распределения  $N$ ,  $\bar{R}$  и  $V_\phi$  в пластине  $Ni-1,78\%Ti$ ,  $l=100$ мкм,  $T=1150^\circ C$

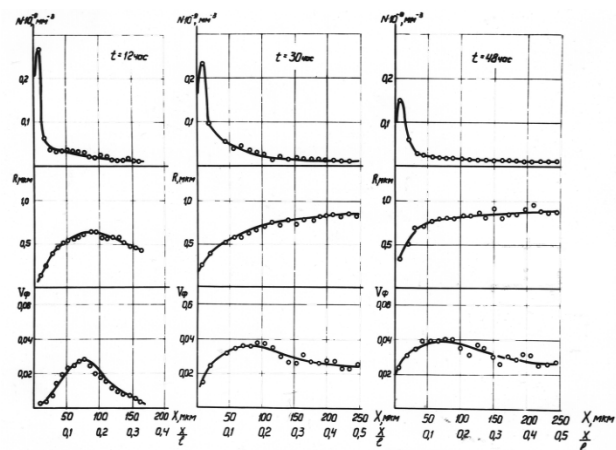


Рис. 10. Распределения  $N$ ,  $\bar{R}$  и  $V_\phi$  в пластине  $Ni-1\%Cr$ ,  $l=500$ мкм,  $T=1150^\circ C$

Сравнивая распределения  $N(x)$ ,  $\bar{R}(x)$  и  $V_\phi(x)$  для пластин разной толщины, можно видеть тенденцию к возрастанию числа частиц  $N$ , их среднего размера  $\bar{R}$  и объёма фазы  $V_\phi$  с ростом толщины пластин. Так, в среднем, ко времени полного внутреннего окисления в пластине толщиной 150 мкм число частиц  $N$  и средний размер  $\bar{R}$  на порядок, а объём фазы на несколько порядков больше, чем в пластине толщиной 10 мкм. Эти результаты могут служить теоретическим обоснованием эмпирического правила, которым пользуются технологи, применяющие метод внутреннего окисления для получения дисперсных частиц окислов: для того, чтобы получить как можно более дисперсные окисные частицы, дисперсность исходного, окисляемого порошка бинарного сплава должна быть также как можно выше, т. к. в крупных порошках бинарного сплава в процессе внутреннего окисления вырастают крупные частицы окислов, а в мелких – мелкие [10, 11].

Физическая причина влияния толщины пластины на параметры двухфазной структуры внутреннеокисленной зон достаточно ясна. При одних и тех же значениях коэффициентов диффузии время релаксации пересыщения в твёрдом растворе за счёт диффузии к свободным поверхностям в тонкой пластине значительно меньше. В толстой пластине этот процесс длительнее (диффузионные пути к свободным поверхностям гораздо протяжённее) и поэтому здесь значительно сильнее вклад в процесс релаксации пересыщения ухода вещества в фазу. Поэтому к моменту начала процесса коалесценции в центре «толстой» пластины значительно большее число частиц  $N$ , средний размер  $\bar{R}$  и объём фазы  $V_\phi$ .

В работе проведено моделирование влияния исходного содержания легирующего элемента на параметры структуры двухфазной области, образующейся в пластине бинарного сплава в процессе внутреннего окисления. В численном эксперименте исходная концентрация легирующего элемента  $C_2^0$  изменялась от 0,11 до 0,14, а равновесная концентрация  $C_2^1 = 0,10$  оставалась неизменной. Моделирование показало, что с ростом содержания легирующего элемента в пластине увеличивается и число частиц  $N$ , и их средний размер  $\bar{R}$  и, следовательно, объём фазы  $V_\phi$ . Это связано с тем, что при неизменном уровне равновесной концентрации  $C_2^1$  в пластине с более высоким содержанием легирующего элемента пересыщение твёрдого раствора выше.

Результаты численного моделирования процесса внутреннего окисления в пластинах с различным исходным содержанием легирующего компонента хорошо согласуются с экспериментальными данными по внутреннему окислению пластины сплава  $Ni-Cr$  с различным исходным содержанием хрома. Экспериментальные результаты показывают, что при равных временах процесса внутреннего окисления пластинам с большим исходным содержанием хрома соответствуют внутреннеокисленные зоны с более высокими значениями параметров структуры двухфазной области  $N$ ,  $\bar{R}$  и  $V_\phi$ .

#### Выводы и перспективы дальнейших исследований

Анализ кинетики роста зоны внутреннего окисления в условиях термодинамического равновесия компонентов на границе с насыщающей средой показал, что распределения числа частиц, их среднего размера и суммарного объёма фазы в целом повторяют зависимость степени пересыщения от координаты. В общем случае характерным для данных распределений является наличие максимума, который с течением времени смещается вглубь пластины. В каждом сечении диффузионной зоны, с момента прохождения через него границы двухфазной области, образуется пересыщенный твёрдый раствор, степень пересыщения которого вначале резко увеличивается, проходит через максимум, быстро уменьшается и затем асимптотически приближается к нулю. В соответствии с этим в каждом сечении зоны внутреннего окисления последовательно реализуются стадии зарождения, роста и коалесценции частиц.

Процесс внутреннего окисления в пластинах разной толщины следует сравнивать при равных значениях относительного времени  $t/l^2$ . При незначительном влиянии стоков (объём фазы мал) времена полного внутреннего окисления пластин различной толщины соотносятся как квадрат отношения их толщин. Скорость движения фронта внутреннего окисления с приближением к центру пластины резко возрастает, что связано с взаимодействием диффузионных потоков от противоположных поверхностей пластины. С ростом объёма второй фазы скорость продвижения границы внутреннеокисленной зоны замедляется. При этом имеет место конкурирующее влияние двух эффектов: ускорения, связанного со взаимодействием диффузионных потоков от противоположных поверхностей пластины и замедления, обусловленного уходом диффундирующего вещества в объём растущей фазы.

Структура зоны внутреннего окисления существенно зависит от величины коэффициентов диффузии компонентов, а при окислении пластин и от их толщины. Моделирование процесса внутреннего окисления в системах с низкими значениями коэффициентов диффузии компонентов показало, что максимум распределения числа частиц расположен вблизи поверхности насыщения и во времени не смещается вглубь зоны. В данном случае скорость движения границы зоны мала, в результате чего происходит интенсивный рост частиц и за относительно короткий промежуток времени их суммарный объём в приповерхностной области возрастает настолько, что заметно снижается степень пересыщения твёрдого раствора в более глубоких сечениях и соответственно частота зарождения частиц.

Формирование двухфазных областей в процессах типа внутреннего окисления (т.е. высокотемпературное насыщение малолегированных сплавов элементами внедрения – кислород, азот, углерод, бор) – во многом определяет такие важные эксплуатационные свойства материалов как износостойкость, жаропрочность, жаростойкость, радиационная стойкость, водородопроницаемость. Это обуславливает актуальность и перспективу дальнейших исследований закономерностей и особенностей формирования зоны внутреннего окисления.

Результаты работы могут быть использованы при разработке новых технологий термической и химико-термической обработок для дисперсного упрочнения материалов, как физическая основа для поиска путей обеспечения заданных распределений параметров структуры двухфазной области, необходимых для придания данному сплаву в процессе внутреннего окисления требуемого комплекса физических и механических свойств.

#### Список использованной литературы

1. Кипарисов С.С., Левинский Ю.В. Внутреннее окисление и азотирование сплавов. М., Metallurgia, 1978. – 232с.
2. Данелия Е.П., Розенберг В.М. Внутреннеокисленные сплавы. М., Metallurgia, 1978. – 232с.
3. Абрамов Г.С., Абрамов М.Г. Моделирование процесса внутреннего окисления и экспериментальные результаты. Вестник Херсонского национального технического университета. Вып.3 (39). – Херсон: ХНТУ, 2010, с.10–15.
4. Абрамов Г.С., Абрамов М.Г. Формирование зоны внутреннего окисления при малой свободной энергии формирования окислов. Вестник ХНТУ, 2011, №3 (42), с. 14-20.
5. Абрамов Г.С., Абрамов М.Г. Формирование двухфазной области при большой свободной энергии формирования окисла легирующих элементов. Вестник ХНТУ, 2012, №2 (45), с. 12-16.
6. Абрамов Г.С., Абрамов М.Г., Бардачѐв Ю.Н. Моделирование формирования двухфазных областей в процессе внутреннего окисления бинарных сплавов. Вестник ХНТУ, 2014, №3 (50), с. 192-202.
7. Абрамов Г.С., Абрамов М.Г., Бардачѐв Ю.Н. Кинетика роста дисперсных частиц окислов и структура поверхностноокисленного слоя металлов и бинарных сплавов. Часть 1. Диффузионный и нормальный механизмы роста частиц окислов на поверхности. Вестник ХНТУ, 2015, №3 (54), с.62-67
8. Абрамов Г.С., Абрамов М.Г., Бардачѐв Ю.Н. Кинетика роста дисперсных частиц окислов и структура поверхностноокисленного слоя металлов и бинарных сплавов. Часть 2. Влияние степени пересыщения на кинетику роста окисных частиц и структуру поверхностноокисленного слоя. Вестник ХНТУ, 2015, №3 (54), с.68-76.
9. Абрамов Г.С., Абрамов М.Г., Бардачѐв Ю.Н. Коалесценция частиц окислов на асимптотической стадии процесса внутреннего окисления. Вестник ХНТУ, 2016, №3 (58), с.297-303.
10. Портной К.И., Бабич Б.Н. Дисперсноупрочнённые материалы. М., Metallurgia, 1974. – 200с.
11. Денисенко Э.Т., Полушко А.П., Филатова Н.А. и др. Влияние различных факторов на свойства меди, упрочнённой дисперсными окислами. Порошковая металлургия, 1971, №10, с.49–53.

УДК 338:519.6

Г.В. АБРАМОВА, Г.С. АБРАМОВ

Херсонський національний технічний університет

В.Р. МАГДЕНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

### ДОСЛІДЖЕННЯ СТАНУ ТА ПРОБЛЕМ РОЗВИТКУ ДЕРЖАВНОГО ПІДПРИЄМСТВА «АДМІНІСТРАЦІЯ МОРСЬКИХ ПОРТІВ УКРАЇНИ» НА ОСНОВІ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО АНАЛІЗУ

*В роботі проведено економетричне дослідження діяльності державного підприємства «Адміністрація морських портів України» для визначення впливу реформи на стан морської галузі країни в цілому. На основі математичного моделювання побудовано двох- та трьохфакторні моделі для доходу. Досліджені граничні продуктивності факторів та гранична норма їх заміщення. Моделі доведені до практичного використання за рахунок візуалізації та побудови номограми, що дає можливість для дослідження, моделювання і прогнозування рівня доходу як функції капітальних витрат, заробітної плати, а також курсу долара.*

*Ключові слова: адміністрація морських портів України, дохід, математична модель, виробнича функція, граничні продуктивності, норма заміщення, номограма.*

Г.В. АБРАМОВА, Г.С. АБРАМОВ

Херсонский национальный технический университет

В.Р. МАГДЕНКО

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка

### ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И ПРОБЛЕМ РАЗВИТИЯ ГОСУДАРСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ «АДМИНИСТРАЦИЯ МОРСКИХ ПОРТОВ УКРАИНЫ» НА ОСНОВЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

*В работе проведено эконометрическое исследование деятельности государственного предприятия «Администрация морских портов Украины» для определения влияния реформы на состояние морской отрасли страны в целом. На основе математического моделирования построены двух- и трехфакторные модели для дохода. Исследованы предельные производительности факторов и предельная норма их замещения. Модели доведены до практического использования путем визуализации и построения номограммы, которая даёт возможности для исследования, моделирования и прогнозирования уровня дохода как функции капитальных затрат, заработной платы, а также курса долара.*

*Ключевые слова: администрация морских портов Украины, доход, математическая модель, производственная функция, граничные производительности, норма замещения, номограмма.*

G.V. ABRAMOVA, G.S. ABRAMOV

Kherson National Technical University

V.R. MAGDENKO

Taras Shevchenko National University of Kyiv

### THE RESEARCH OF THE STATE AND PROSPECTS FOR THE DEVELOPMENT OF THE STATE ENTERPRISE «UKRANIAN SEA PORTS AUTHORITY» BASED ON ECONOMETRIC MODELING

*The work carries out the econometric research of the state enterprise «Ukrainian sea ports authority» for a definition of the impact of reform on the state of the marine industry of the country. On the basis of mathematical modeling a multivariate models of income is built. Marginal productivities of factors and marginal rate of substitution are researched. Models brought to practical use by visualization and constructing a nomogram, which gives opportunities for research, modeling and forecasting earnings level, as a function of capital costs, wage, and dollar exchange rate, too.*

*Keywords: Ukrainian sea ports authority, income, mathematical model, production function, marginal productivities, rate of substitution, nomogram.*

#### Постановка проблеми

Державне підприємство «Адміністрація морських портів України» (ДП «АМПУ») утворене в 2013 році внаслідок реформування морської галузі країни. Дослідження впливу реформи на економічний стан

галузі є важливим етапом розвитку інфраструктури. В Україні майже відсутні дослідження на основі економіко-математичного моделювання, у той час як у міжнародній практиці цей метод дослідження широко використовується.

**Аналіз публікацій за темою дослідження**

Проблемами реформування вітчизняного морського господарського комплексу України в останні роки займається значна кількість науковців. Враховуючи те, що його основою є морські торговельні порти, саме цьому сегменту приділяється найбільша увага. Основним напрямом досліджень є перспективи підвищення конкурентоздатності портів та залучення інвестицій у портову галузь.

Разом з тим, є роботи, які присвячені безпосередньо визначенню економічних та правових механізмів державно-приватного партнерства в портовій галузі. Зокрема, ці проблеми розглядали В.П. Гурнак, С.М. Боняр, М.М. Дергаусов, А.І. Котлубай, С.В. Ігнатенко, А.В. Затулко [1-3], які внесли значний вклад у дослідження ключових питань та вирішення гострих проблем морського сектору національної економіки. Однак, з метою підвищення ефективності функціонування портового господарства України необхідно проводити подальші наукові дослідження, особливо – дослідження ефективності вже проведених реформ для визначення їх впливу на економічне становище галузі морського транспорту.

**Мета статті**

Оцінити стан підприємства, його проблеми і перспективи розвитку. Знайти механізми регулювання і оптимізації доходу підприємства за допомогою побудови багатofакторних регресійних моделей, що відображають залежність доходу від ряду суттєвих факторів.

**Основна частина**

Нові транспортні коридори між Європою та Азією призвели до значного зростання імпорتنих і експортних потоків вантажних перевезень [4]. Зміни економічних відносин зумовлюють необхідність реформування морської галузі. Тож протягом останніх 5 років, наслідуючи досвід провідних морських країн світу, Україна проводить вагомі реформи. Одним з важливих напрямків цих реформ стало розмежування адміністративних та господарських функцій морських портів, у відповідності до чого було створено нове державне підприємство «Адміністрація морських портів України». Створення підприємства регулюється Законом України від 17.05.2012 № 4709-VI «Про морські порти України», який вступив у дію 13 червня 2013 року.

Дев'яносто відсотків портів світу розвивають економіку портів з участю приватного бізнесу та за рахунок створення конкурентного середовища. Інфраструктура та земля, на якій знаходиться порт, залишаються у державній власності. Адміністрація порту управляє цією власністю та дозволяє у державних портах приватизацію портових послуг. Така модель розвитку отримала назву "landlord" або "портовласник". Отже місією ДП «АМПУ» є сприяння розвитку морської транспортної інфраструктури України та підвищенню конкурентоспроможності українських морських портів, створення умов і механізмів для залучення інвестицій [5].

Доходи ДП «АМПУ» отримує з різних джерел. На рис.1 наведені діаграми, які відображають структуру чистого доходу підприємства у 2014 та 2015 роках.

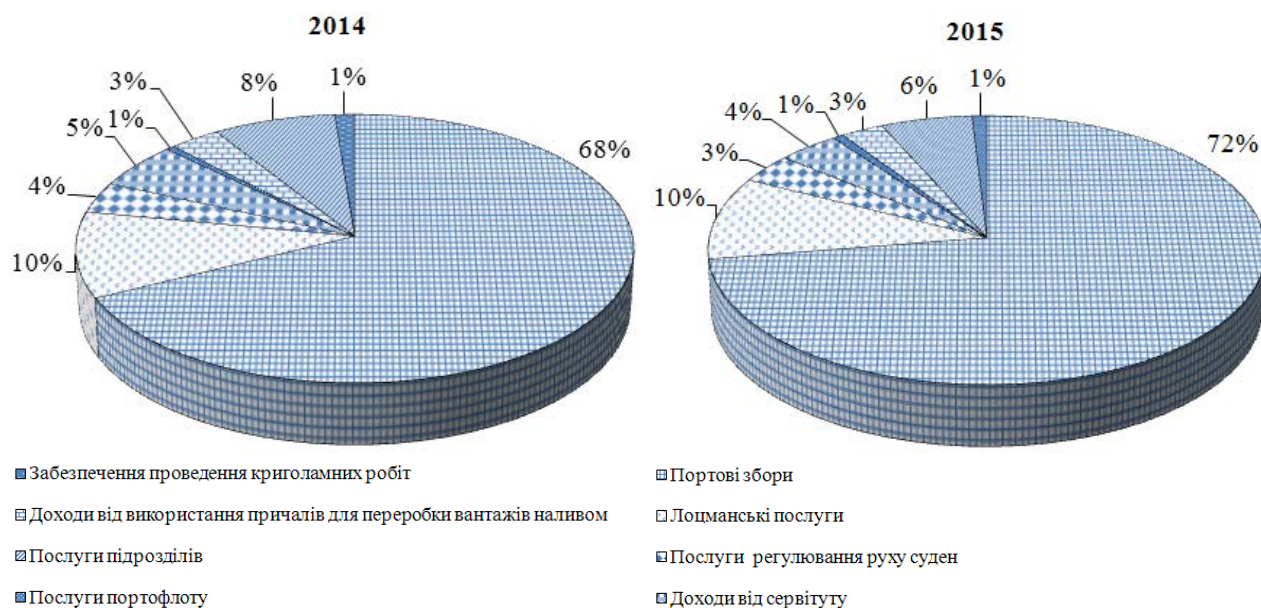


Рис. 1. Структура чистого доходу ДП «АМПУ»



Портові збори складають найбільшу частку (68-72%) в структурі чистого доходу підприємства. Саме ці стягнення є основним джерелом доходу ДП «АМПУ».

Портові збори стягуються в адміністративному порядку з вантажо- і судновласників за захід судна в акваторію порту, стоянку, завантажувально-розвантажувальні роботи тощо. Розмір ставок та порядок стягнення портових зборів встановлено наказом Міністерства інфраструктури від 27.05.2013 №316 «Про портові збори», зареєстрованого у Міністерстві юстиції України 12.06.2013 за №930/23462

У морському порту справляються такі портові збори: корабельний, причальний, якірний, каналний, маяковий, адміністративний та санітарний. Розміри ставок портових зборів для кожного морського порту встановлюються національною комісією, що здійснює державне регулювання у сфері транспорту, відповідно до затвердженої нею методики[6].

Слід зазначити, що з 2016 року 75% чистого прибутку підприємство перераховує до Державного бюджету [7]. Така ситуація безумовно не дає жодного шансу для розвитку підприємства, а отже і галузі в цілому, більш того – такий відсоток не дає можливості навіть для більш-менш нормального функціонування підприємства та виконання його основних функцій. Стоїть питання виживання галузі – підприємства не маючи можливості для розвитку безперечно будуть слабшати і це загрожує колапсом галузі. На наш погляд, на державному рівні є сенс переглянути абсурдно високу діючу ставку вилучення чистого прибутку заради того, щоб дати можливість підприємствам розвиватися, реформуватися та модернізуватися.

В роботі на підставі статистичних даних отриманих з фінансової звітності ДП «АМПУ» та Херсонської філії ДП «АМПУ» за період 2013-2016 років [5], побудовані виробничі функції для кількісного аналізу ефективності використання ресурсів підприємства. Для аналізу стану підприємства будувалися виробничі функції як адитивного, так і мультиплікативного типів. Більш інформативними є функції другого типу, тож на рис.2 наведений графік виробничої функції для ДП «АМПУ», рівняння якої має вид:

$$Y = \exp(-9,445) X_1^{0,928} X_2^{1,018} \quad (1)$$

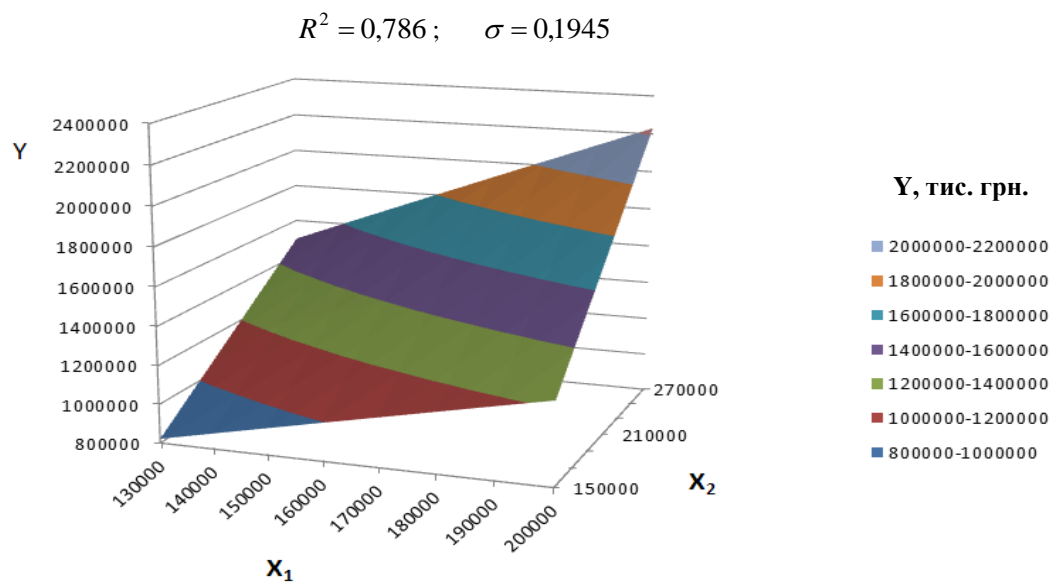


Рис. 2. Графік отриманої мультиплікативної виробничої функції (1)

Коефіцієнт детермінації  $R^2=0,768$  свідчить, що на 76,8 % зміни значення валового доходу  $Y$  обумовлюються змінами значень  $X_1$  (капітальні витрати) і  $X_2$  (витрати на оплату праці). З рівняння (1) слідує, що коефіцієнти еластичності змінних  $X_1$  та  $X_2$  дорівнюють відповідно 0,928 та 1,018. Так, при збільшенні капітальних витрат на 1% валовий дохід збільшиться на 0,928 %, а при збільшенні витрати на заробітну плату на 1% валовий дохід збільшиться на 1,018 %. Сума коефіцієнтів еластичності значно більше одиниці (1,946), що дає право стверджувати про зростаючий ефект від масштабу виробництва, так як підвищення рівня факторів на 1% дасть збільшення доходу майже на 2%. Це означає, що має сенс розширювати масштаб виробництва, причому в рівній мірі як за рахунок збільшення капітальних витрат, так і за рахунок витрат на працю.

Аналогічний аналіз був проведений і для Херсонської філії ДП «АМПУ». На рис. 3 представлений графік виробничої функції для ХФ ДП «АМПУ», рівняння якої має вид:

$$Y = \exp(6,248) X_1^{0,132} X_2^{0,359} \tag{2}$$

$$R^2 = 0,743; \quad \sigma = 0,07$$

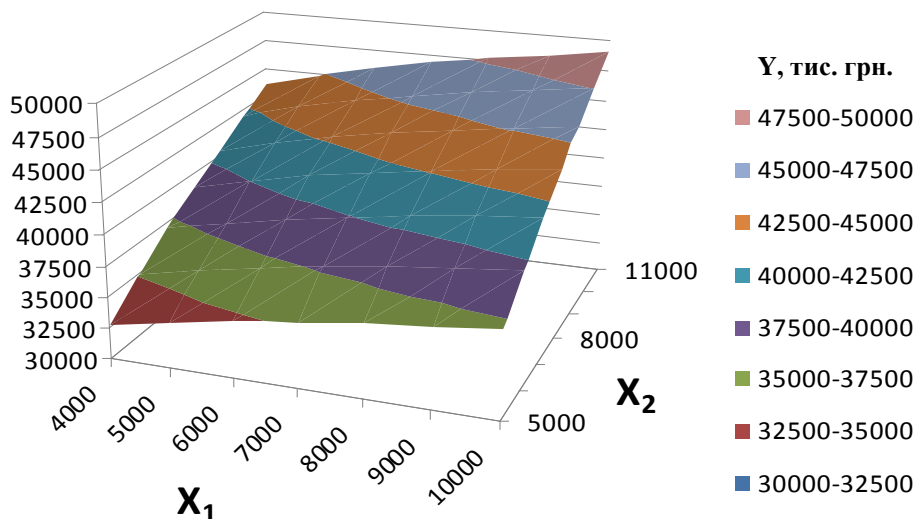


Рис. 3. Графік отриманої мультиплікативної виробничої функції (2)

Коефіцієнт детермінації  $R^2=0,743$  свідчить, що на 74,3 % зміни значення валового доходу  $Y$  обумовлюються змінами значень  $X_1$  і  $X_2$ . На відміну від виробничої функції для ДП «АМПУ» (морська галузь України в цілому) сума коефіцієнтів еластичності виробничої функції для ДП ХФ «АМПУ» значно менше одиниці (0,491). Це свідчить, що має місце спадаючий ефект від масштабу виробництва. Це означає, що виробництво необхідно скорочувати, причому за рахунок обох факторів. Для виявлення причин такого стану потрібні більш детальні дослідження: це може бути внаслідок обмеженості виробничих площ, тим самим неможливо ефективно використовувати техніку та обладнання, або має місце надлишок обладнання, яке або зовсім не використовується, або використовується неефективно. Також може мати місце надлишок робочої сили, яка через обмеженість виробничих площ і обладнання використовується не продуктивно.

Подальші дослідження має сенс, на наш погляд, спрямувати на розгляд розподілу витрат в формуванні доходу по підприємству в цілому і по його Херсонській філії. Дуже показовими є порівняння зазначеного розподілу витрат, що наведені в таблицях 1-2.

Таблиця 1

Частка витрат у доході ДП «АМПУ»

Період	Чистий дохід, тис. грн.	Витрати, тис. грн.					
		Матеріальні	% від доходу	Амортизація	% від доходу	Заробітна плата	% від доходу
III квартал 2013	807489	52974	6,56	102164	12,65	167539	20,75
IV квартал 2013	929743	75118	8,08	94102	10,12	193195	20,78
I квартал 2014	831736	69429	8,35	92604	11,13	186420	22,41
II квартал 2014	914228	45515	4,98	85502	9,35	159225	17,42
III квартал 2014	1003368	59897	5,97	87337	8,70	156084	15,56
IV квартал 2014	1252959	80080	6,39	90438	7,22	176451	14,08
I квартал 2015	1699762	98143	5,77	91357	5,37	210311	12,37
II квартал 2015	1649646	65611	3,98	87275	5,29	189355	11,48
III квартал 2015	1584795	66936	4,22	86918	5,48	183480	11,58
IV квартал 2015	1876460	90240	4,81	87618	4,67	200119	10,66
I квартал 2016	1791285	105911	5,91	88168	4,92	264528	14,77
II квартал 2016	1755912	76430	4,35	89496	5,10	228392	13,01
III квартал 2016	1805043	80171	4,44	90616	5,02	238071	13,19

Таблиця 2

Частка витрат від доходу ХФ ДП «АМПУ»

Період	Чистий дохід, тис. грн.	Витрати, тис. грн.					
		Матеріальні	% від доходу	Амортизація	% від доходу	Заробітна плата	% від доходу
I квартал 2014	102393,3	53704,3	52,45	12521,7	12,23	58584,7	57,22
II квартал 2014	329841,0	34087,2	10,33	13277,5	4,03	61380,5	18,61
III квартал 2014	245360,0	29343,2	11,96	12254,0	4,99	61289,1	24,98
IV квартал 2014	375927,0	40757,2	10,84	12451,8	3,31	57440,1	15,28
I квартал 2015	415255,5	67665,6	16,29	13643,9	3,29	69300,6	16,69
II квартал 2015	383016,1	32993,7	8,61	13411,3	3,50	80551,1	21,03
III квартал 2015	429669,8	37642,0	8,76	13374,9	3,11	78404,2	18,25
IV квартал 2015	561275,8	53928,9	9,61	13837,4	2,47	86324,2	15,38
I квартал 2016	444226,7	81026,0	18,24	13094,5	2,95	96512,2	21,73
II квартал 2016	472915,5	47042,5	9,95	14514,7	3,07	100463,6	21,24
III квартал 2016	444031,0	48655,6	10,96	13373,0	3,01	106098,9	23,89

Порівнявши данні табл. 1 та 2, бачимо, що частка матеріальних витрат та витрат на заробітну плату від доходу ХФ ДП «АМПУ» відповідно, в 2 та 1,5 рази перевищує аналогічний показник по ДП «АМПУ».

Пошук відповідей на питання про причини такого стану речей для ХФ ДП «АМПУ» може бути об'єктом подальших ціленаправлених досліджень.

В роботі проведений аналіз граничних продуктивностей факторів і граничної норми їх заміщення. Мультиплікативна степенева виробнича функція, за допомогою якої моделюється вплив капітальних витрат  $X_1$  і витрат на заробітну плату  $X_2$  на рівень доходу  $Y$ , має вид:  $Y = AX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$

Тоді граничні продуктивності факторів  $X_1$ ,  $X_2$  і граничну норму заміщення *MRS* (*marginal rate of substitution*), можна представити наступним чином:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \alpha_1 AX_1^{\alpha_1-1} X_2^{\alpha_2} - \text{гранична продуктивність капіталу } X_1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_2} = \alpha_2 AX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2-1} - \text{гранична продуктивність праці } X_2 \quad (4)$$

$$MRS = \frac{\partial Y / \partial X_1}{\partial Y / \partial X_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{X_2}{X_1} - \text{гранична норма заміщення} \quad (5)$$

Гранична норма заміщення (*MRS*) факторів - це граничне відношення заміни першого фактору другим, у ситуації, коли при постійному доході  $Y$  зміна (зменшення чи зростання) витрат першого фактора на  $\partial X_1$  компенсується відповідною зміною витрат другого фактору на  $\partial X_2$ . Це відношення, як слідує з формули (5), дорівнює відношенню частинних похідних виробничої функції, тобто граничних продуктивностей факторів [8, с.80].

В табл. 3 наведено граничні продуктивності капіталу і праці, а також граничні норми заміщення факторів  $X_1$  (капітальні витрати) та  $X_2$  (витрат на оплату праці) у відповідності до мультиплікативної виробничої функції ДП «АМПУ», які обчислені на основі даних за період з 2013 по 2016 р.

Таблиця 3

Розрахунок граничних продуктивностей та норм заміщення для виробничої функції доходу ДП «АМПУ»

Період	Вихідні дані, (тис.грн)		Гранична продуктивність капіталу	Гранична продуктивність праці	Гранична норма заміщення
	Капітальні витрати, $X_1$	Витрати на оплату праці, $X_2$	$\frac{\partial Y}{\partial X_1}$	$\frac{\partial Y}{\partial X_2}$	$MRS$
III квартал 2013	155138	167539	6,457358	6,559292	0,98446
IV квартал 2013	169220	193195	7,41877	7,128325	1,040745
I квартал 2014	162033	186420	7,176398	6,842539	1,048792
II квартал 2014	131017	159225	6,206353	5,602123	1,107857
III квартал 2014	147234	156084	6,030854	6,240629	0,966386
IV квартал 2014	170518	176451	6,761024	7,167347	0,943309
I квартал 2015	189500	210311	8,022731	7,929928	1,011703
II квартал 2015	152886	189355	7,322003	6,485159	1,12904
III квартал 2015	153854	183480	7,087582	6,519555	1,087127
IV квартал 2015	177858	200119	7,662012	7,470122	1,025688
I квартал 2016	194079	264528	10,11529	8,141135	1,242491
II квартал 2016	165926	228392	8,80927	7,020584	1,254777

Видно, що граничні продуктивності факторів і гранична норма заміщення в розглянутому періоді характеризуються відносною стабільністю (на рівні 1, що свідчить про рівнозначність факторів  $X_1$  та  $X_2$ ), але дані за 2016 рік свідчать про наявність тенденції до зростання граничної норми заміщення ( $MRS$ ) до значення 1,25, що свідчить про більш значущий вплив фактору  $X_1$ .

В табл. 4 наведено граничні продуктивності капіталу і праці, а також граничні норми заміщення факторів  $X_1$  (капітальні витрати) та  $X_2$  (витрат на оплату праці) у відповідності до мультиплікативної виробничої функції ХФ ДП «АМПУ», які обчислені на основі даних за період з 2014 по 2016 р.

Таблиця 4

Розрахунок граничних продуктивностей та норм заміщення для виробничої функції доходу ХФ ДП «АМПУ»

Період	Вихідні дані, (тис. грн)		Гранична продуктивність капіталу	Гранична продуктивність праці	Гранична норма заміщення
	Капітальні витрати, $X_1$	Витрати на оплату праці, $X_2$	$\frac{\partial Y}{\partial X_1}$	$\frac{\partial Y}{\partial X_2}$	$MRS$
I квартал 2014	6622,601	5858,473	0,741357	2,279252	0,325263
II квартал 2014	4736,464	6138,047	1,00845	2,116406	0,476492
III квартал 2014	4159,721	6 128,914	1,128155	2,082428	0,54175
IV квартал 2014	5320,899	5744,009	0,890121	2,242536	0,396926
I квартал 2015	8130,949	6930,059	0,658973	2,102774	0,313383
II квартал 2015	4640,495	8055,109	1,131743	1,773214	0,638244
III квартал 2015	5101,69	7840,418	1,032328	1,826893	0,565073
IV квартал 2015	6776,628	8632,418	0,835214	1,783197	0,46838
I квартал 2016	9412,048	9651,217	0,653662	1,733706	0,377031
II квартал 2016	6155,717	10046,355	0,958679	1,597584	0,60008
III квартал 2016	6202,86	10609,889	0,971194	1,544215	0,628924

Видно, що граничні продуктивності факторів і гранична норма заміщенням в розглянутому періоді характеризуються значною нерівномірністю (спостерігаються коливання від 0,3 до 0,63) і за абсолютним значенням вони майже вдвічі менші ніж відповідні показники для ДП «АМПУ» (це означає, що основний вклад має фактор  $X_2$ ).

Портові збори нараховуються підприємством у доларах США, тому було вирішено прослідкувати залежність доходів, що отримує підприємство, від коливань курсу долара. Він був включений до моделі доходу підприємства, як третій фактор разом із капітальними витратами та витратами на оплату праці.

За допомогою кореляційно-регресійного аналізу побудовано трьохфакторну модель доходу адитивного типу, яка зображена на рисунку 4 у вигляді номограми.

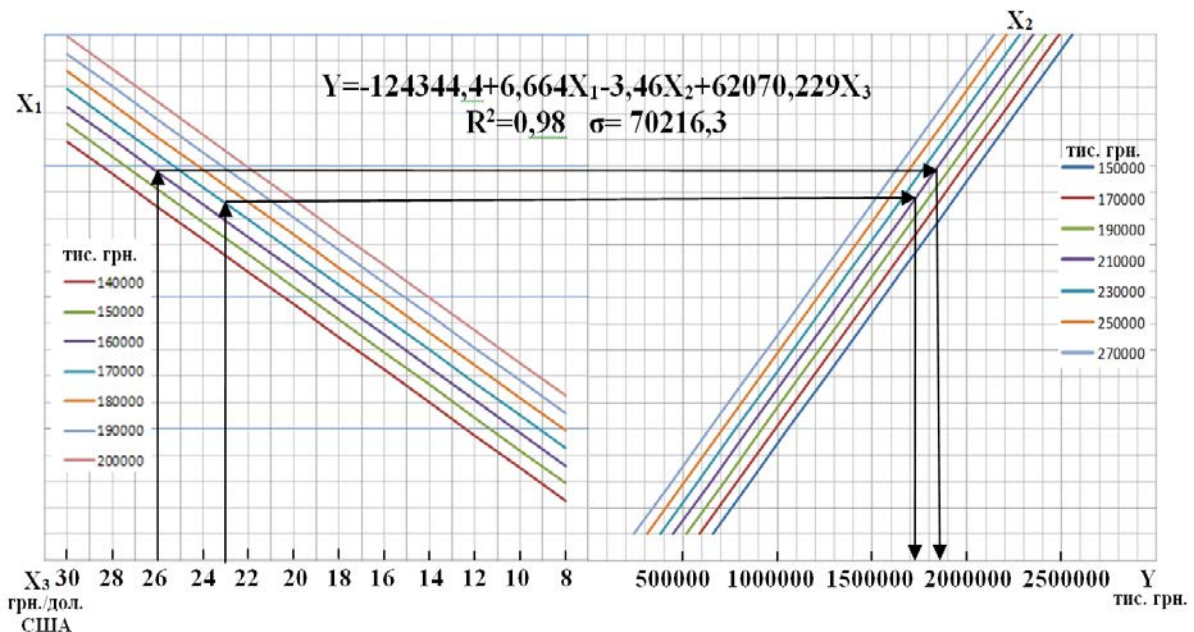


Рис. 4. Номограма трьохфакторної моделі доходу ДП «АМПУ» ( $Y$ ), як функція від  $X_1$  (капітальні витрати),  $X_2$  (витрати на оплату праці),  $X_3$  (курс долара).

Коефіцієнт детермінації  $R^2=0,98$  свідчить, що на 98 % зміни значення валового доходу  $Y$  обумовлюються змінами значень  $X_1$ ,  $X_2$  та  $X_3$  і показує високу адекватність побудованої моделі і припустиму для практичного використання стандартну похибку регресії.

З рівняння регресії видно, що найбільш впливовим фактором є  $X_3$  (курс долару), вплив якого значно більший ніж інших факторів: так, якщо курс долару збільшиться на одиницю, то дохід виросте приблизно на 62000 тис. грн., а збільшення на одиницю фактору  $X_1$  (капітальні витрати) призведуть до збільшення доходу лише приблизно на 6,7 тис. грн. і навпаки, збільшення фактору  $X_2$  (витрат на заробітну плату) на одиницю призведе до зменшення доходу на 3,5 тис. грн. Останнє твердження дає можливість оцінити негативний вплив збільшення заробітної плати на доходи підприємства.

Представлена трьохфакторна модель візуалізована шляхом побудови номограми (рис.4), яка, разом з наглядністю, відкриває декілька способів її практичного використання. Наведемо декілька прикладів використання номограми.

**Приклад 1.** Обираємо значення фактору  $X_3$  (курс долару) (на даній номограмі, наприклад, оберемо значення зазначеного фактору на рівні 23 грн./дол.), рухаємося вгору по стрілці для вибору значення фактору  $X_1$  (капітальні витрати) і обираємо значення цього фактору (наприклад, 170000 тис. грн.), рухаємося направо по стрілці для вибору значення фактору  $X_2$  (заробітна плата) – (в наведеному прикладі це 210000 тис. грн.) і, насамкінець, спускаємося по стрілці вниз на вісь  $Y$  отримуємо прогнозоване значення доходу: при даному наборі значень вхідних факторів це 1720000 тис. грн.

**Приклад 2.** Можливий і зворотній напрямок руху по номограмі, тобто вирішення оберненої задачі: задаючись бажаним значенням доходу і рухаючись по номограмі проти часової стрілки крок за кроком обираємо значення вхідних параметрів моделі, які б забезпечили даний рівень доходу. Ця задача має безліч можливих рішень і залежить від реальної можливості забезпечення того чи іншого рівня кожного з факторів, – в кінці кінців, від ступеня їх реальної досяжності.

**Приклад 3.** Використання номограми не обмежується наведеними прикладами. Можливий і зустрічний рух по наведеній діаграмі. Задаючи бажане значення доходу і відомі значення деяких факторів (наприклад курс долару, на який ми не можемо впливати), із моделі можна знайти необхідні величини інших факторів, які б забезпечили досягнення вибраного результату по доходу. При такій постановці задачі номограма дає можливість визначити існування рішення і якщо воно існує, то визначити множину можливих значень для факторів, які визначаються, а також норму їх заміщення (в деяких межах зменшення значення одного з факторів може бути компенсовано збільшенням значення іншого фактору).

**Приклад 4.** Наведена номограма також може бути використана для оцінки можливих меж значень прибутку, якщо відомі межі, в яких можуть змінюватися вхідні фактори моделі. Тобто, якщо відомі межі, в яких з деякою довірчою ймовірністю можуть знаходитися значення кожного з факторів, можна рухатися по наведеній номограмі поступово від одного до іншого фактору «полосою» значень, де кожна «полоса» відображає межі варіювання можливих значень даного фактору. В кінці такого процесу ми вийдемо і на відповідну «полосу» значень доходу, тобто будемо мати оцінки можливих відхилень від середнього прогнозного значення доходу (песимістичний і оптимістичний прогноз).

**Висновки та перспективи подальших досліджень**

З урахуванням досвіду інших країн в Україні було створено ДП «Адміністрація морських портів України», місією якого є сприяння розвитку морської транспортної інфраструктури України, підвищення конкурентоспроможності українських морських портів, створення умов і механізмів для залучення інвестицій. Однією з основних проблем розвитку підприємства є те, що 75% чистого прибутку ДП «АМПУ» перераховує до Державного бюджету [7]. Така ситуація безумовно не дає жодного шансу для розвитку підприємства, а отже і галузі в цілому.

Для ДП «АМПУ» було виявлено, що сума коефіцієнтів еластичності виробничої функції значно більше одиниці (1,946), що дає право стверджувати про зростаючий ефект від масштабу виробництва. Для ДП ХФ «АМПУ» - навпаки: сума коефіцієнтів еластичності значно менше одиниці (0,491). Це свідчить, що має місце спадаючий ефект від масштабу виробництва. Для виявлення причин такого стану необхідні більш детальні дослідження.

Побудована трьохфакторна лінійна регресія, де врахований курс долара, який виявився суттєво значимим, – його врахування суттєво підвищило адекватність моделі. Зазначена модель доходу для ДП «АМПУ» візуалізована за допомогою номограми, що дає цілу низку можливостей для її практичного використання.

Подальші дослідження має сенс, на наш погляд, спрямувати на дослідження розподілу витрат в формуванні доходу по підприємству в цілому і по його Херсонській філії. З порівняльного аналізу часток витрат від доходу ДП «АМПУ» та ХФ «АМПУ» видно, що частка матеріальних витрат та витрат на заробітну плату від доходу ХФ ДП «АМПУ» в два та півтора рази, відповідно, перевищує аналогічний показник по ДП «АМПУ». Пошук відповідей на питання щодо розвитку ДП «АМПУ» та вирішення проблем ДП ХФ «АМПУ» може бути об'єктом подальших ціленаправлених досліджень.

**Список використаної літератури**

1. Ігнатенко Є.В Територіальна організація та сучасний стан портового господарства України [Текст] / Є.В. Ігнатенко // Геополітика и екогеодинамика регионов: науч. жур. – Симферополь: КНЦ, 2014. – Вып. 2, Т. 10, – С. 553-559.
2. Боняр С.М. Аналіз роботи морських торговельних портів України [Текст] / С.М. Боняр, Я.Р. Корнійко // Водний транспорт: зб. Наук. пр. – Київ : КДАВТ, 2012. – Вип. 3 (15). – С. 109-114.
3. Затулко В.А. Проблеми та перспективи розвитку морських портів України [Текст] / А.В. Затулко // Ефективна економіка, 2010.– №3 – С. 42–45.
4. Бакаєва І.Г. Зарубіжний досвід розвитку транспортних послуг в умовах глобалізації [Текст] / Бакаєва І.Г., Онищенко Л.В. // Зб. наук. пр. ДЕТУТ. Серія "Економіка і управління". — 2013 — Вип. 23—24. — С. 7—12.
5. ДП «АМПУ» [Електронний ресурс]: офіційний веб-портал Державного підприємства «Адміністрація морських портів України» - Режим доступу - <http://www.uspa.gov.ua>.
6. «Про портові збори» Наказ Міністерства інфраструктури від 27.05.2013 №316 зареєстрований у Міністерстві юстиції України 12.06.2013 за №930/23462 зі змінами та доповненнями станом на 30.09.2016 — Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/z0930-13>.
7. «Про затвердження Порядку відрахування до державного бюджету частини чистого прибутку (доходу) державними унітарними підприємствами та їх об'єднаннями» Постанова Кабінету міністрів України від 23 лютого 2011 р. № 138 зі змінами та доповненнями станом на 26.10.2016— Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/138-2011-%D0%BF/para14#n14>.
8. Математическая экономика на персональном компьютере [Текст] : пер. с япон. / [М. Кубонива, М. Табата, С. Табата, Ю.Хасебе]; под ред. М. Кубонива. – М.: Финансы и статистика, 1991.- 304с.

УДК 681.544:621.039.562.26

Я.И. БЕГЛОВ, К.В. БЕГЛОВ

Одесский Национальный Политехнический Университет, Украина

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ  
КОНЦЕНТРАЦИИ ЖИДКОГО ПОГЛОТИТЕЛЯ В ПЕРВОМ КОНТУРЕ АЭС**

На АЭС с реакторами типа ВВЭР важным заданием является контроль некоторых параметров теплоносителя. Одним из основных контролируемых параметров есть содержание борной кислоты (БК) изотопа  $^{10}\text{B}$  в технологических растворах энергоблоков. Одним из методов регулирования есть изменение концентрации БК в теплоносителе первого контура АЭС. Статья посвящена синтезу и исследованию автоматизированной системы регулирования объекта с переменными свойствами при нанесении управляющего воздействия с разными знаками. Для автоматизации поддержания необходимой концентрации БК необходимо синтезировать регулятор. Но объект регулирования имеет разные статические и динамические характеристики при нанесении управляющего воздействия с разными знаками. Таким образом, возникает задача синтеза и исследования системы регулирования концентрации борной кислоты в теплоносителе первого контура для нелинейного объекта регулирования.

Ключевые слова: концентрация борной кислоты, автоматизированная система регулирования (АСР), регулятор.

Я.І. БЕГЛОВ, К.В. БЕГЛОВ

Одеський Національний Політехнічний Університет, Україна

**ВИКОРИСТАННЯ НЕЧІТКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ РЕГУЛЮВАННЯ  
КОНЦЕНТРАЦІЇ РІДКОГО ПОГЛИВАЧА У ПЕРШОМУ КОНТУРІ АЕС**

На АЕС з реакторами типу ВВЕР важливим завданням є контроль деяких параметрів теплоносія. Одним з основних параметрів, що контролюються є вміст борної кислоти (БК) ізотопу  $^{10}\text{B}$  в технологічних розчинах енергоблоків. Одним з методів регулювання є зміна концентрації БК в теплоносії першого контуру АЕС. Стаття присвячена синтезу та дослідженню автоматизованої системи регулювання об'єкта зі змінними властивостями при нанесенні керуючого впливу з різними знаками. Для автоматизації підтримки необхідної концентрації БК необхідно синтезувати регулятор. Але об'єкт регулювання має різні статичні і динамічні характеристики при нанесенні керуючого впливу з різними знаками. Таким чином, виникає задача синтезу і дослідження системи регулювання концентрації борної кислоти в теплоносії першого контуру для нелінійного об'єкта регулювання.

Ключові слова: концентрація борної кислоти, автоматизована система регулювання (АСР), регулятор.

Ya.I. BEGLOV, K.V. BEGLOV

Odessa National Polytechnic University, Ukraine

**APPLICATION OF THE FUZZY REGULATOR FOR REGULATION OF THE  
CONCENTRATION OF A LIQUID ABSORPTION IN THE FIRST NUCLEAR PIPE**

At NPPs with WWER-type reactors, an important task is to control certain parameters of the coolant. One of the main controlled parameters is the content of  $^{10}\text{B}$  isotope in technological solutions of power units. One of the control methods is the change in the concentration of boric acid (BA) in the coolant of the first circuit of the nuclear power plant. The article is devoted to the synthesis and research of an automated control system for an object with variable properties when applying a control action with different signs. It is necessary to synthesize the regulator for automatic control of the required concentration of the BA. But the control object has different static and dynamic characteristics when applying a control action with different signs. Thus, the problem arises of synthesizing and researching the control system of the boric acid concentration in the coolant of the first circuit for a nonlinear control object.

Key words: concentration of boric acid, automatic control system (ASC), controller.

**Постановка проблеми**

Для регулирования мощности энергоблока АЭС используется, так называемое, борное регулирование, т.е. изменение концентрации борной кислоты в теплоносителе первого контура. Однако, свойства объекта регулирования нелинейны. А именно, динамические свойства объекта регулирования могут быть описаны дифференциальным звеном первого порядка, но значения коэффициентов уравнения зависят от знака управляющего воздействия. Таким образом, ставится задача синтезировать регулятор, работающий с нелинейным объектом и с заданными показателями качества переходных процессов.



**Анализ последних исследований и публикаций**

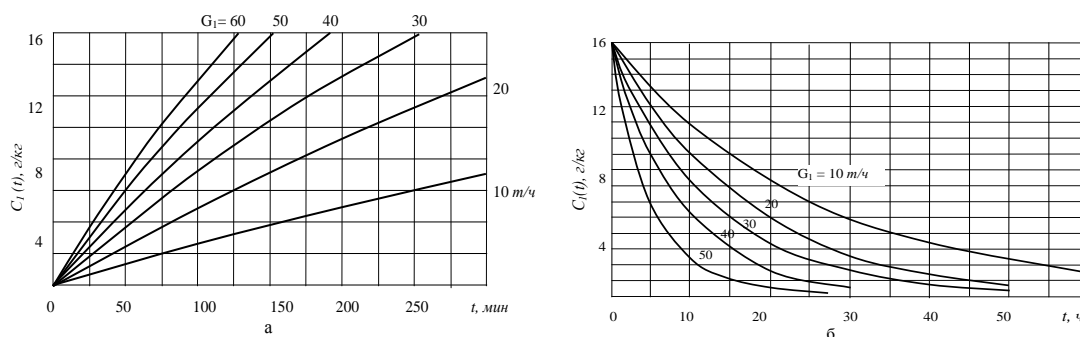
В многочисленных работах, посвященных проблеме покрытия переменной части графиков нагрузок [1–3], указывается, что повышение доли АЭС в общей установленной мощности требует повышенной маневренности энергооборудования АЭС, то есть работы энергоблоков АЭС в переменном режиме.

Одним из способов изменения нагрузки энергоблока является изменение энерговыделения в реакторной установке путем изменения концентрации жидкого поглотителя. Для реакторов типа ВВЭР в качестве жидкого поглотителя используется борная кислота ( $H_3BO_3$ ).

Процесс изменения концентрации борной кислоты в теплоносителе первого контура называется борным регулированием (БР). Для уменьшения мощности реактора в коллектор питательного насоса подается раствор из бака с концентрированной борной кислотой, для увеличения мощности подается чистый конденсат [4]. Одновременно с этим, борная кислота выводится из теплоносителя.

В настоящее время борное регулирование состоит в дискретном вводе определённого количества  $H_3BO_3$  или чистого конденсата в ручном режиме до получения требуемого результата. Одним из недостатков такого режима борного регулирования является большое количество жидких радиоактивных отходов (ЖРО). Как показано в [5], количество ЖРО можно существенно уменьшить, применив автоматизированную систему регулирования.

В работе [3] рассмотрена зависимость концентрации в активной зоне (АЗ) при введении БК и при введении чистого конденсата в теплоноситель первого контура. Кривые разгона по указанным каналам представлены на рис. 1.



**Рис. 1. Изменение концентрации борной кислоты в теплоносителе в случае подпитки концентрированной борной кислотой (а) и чистым конденсатом (б)**

Для моделирования данные зависимости были идентифицированы и описаны следующими дифференциальными уравнениями:

при введении раствора борной кислоты:

$$T_1 \cdot \frac{dC_{bor}}{d\tau} + \Delta C_{bor} = k_1 \cdot \Delta G_{bor} \tag{1}$$

при введении чистого конденсата:

$$T_2 \cdot \frac{dC_{bor}}{d\tau} + \Delta C_{bor} = k_2 \cdot \Delta G_{H_2O}, \tag{2}$$

где  $C_{bor}$  – концентрация борной кислоты, г/кг;

$k_1, k_2$  – коэффициенты передачи,  $\frac{g/kg}{m^3/h}$ ;

$T_1, T_2$  – постоянные времени, с;

$\Delta G_{bor}$  – изменение расхода раствора борной кислоты, т/ч;

$\Delta G_{H_2O}$  – изменение расхода чистого конденсата, т/ч;

В рамках исследования было принято, что номинальный расход борной кислоты  $\Delta G_{bor} = 40 \text{ м}^3/\text{ч}$ , номинальный расход чистого конденсата  $\Delta G_{H_2O} = 40 \text{ м}^3/\text{ч}$  [3].

Для такого расхода:

Коэффициенты передачи:



$$k_1 = 40^{2/\text{кг}}/\text{м/ч}, \quad k_2 = 16^{2/\text{кг}}/\text{м/ч};$$

постоянные времени:

$$T_1 = 22318 \text{ с}, \quad T_2 = 47715 \text{ с}.$$

Для процессов ввода и вывода бора из теплоносителя коэффициенты передачи отличаются в 2,5 раза, а постоянной времени – в 2 раза.

Для автоматизации поддержания необходимой концентрации БК необходимо синтезировать регулятор. Но объект регулирования имеет разные статические и динамические характеристики при нанесении управляющего воздействия с разными знаками.

Таким образом возникает задача синтеза и исследования системы регулирования концентрации борной кислоты в теплоносителе первого контура для нелинейного объекта регулирования.

Ранее в [6] рассматривался синтез и проводился анализ ПИ-регулятора. Основная сложность при настройке регулятора заключается в нелинейных свойствах объекта регулирования. А именно разными значениями коэффициента передачи и постоянными времени при нанесении управляющего воздействия разного знака.

Оптимальными были приняты настройки ПИ-регулятора для процесса с минимальным интегральным показателем качества и объектом, имеющим меньший коэффициент передачи и большую постоянную времени.

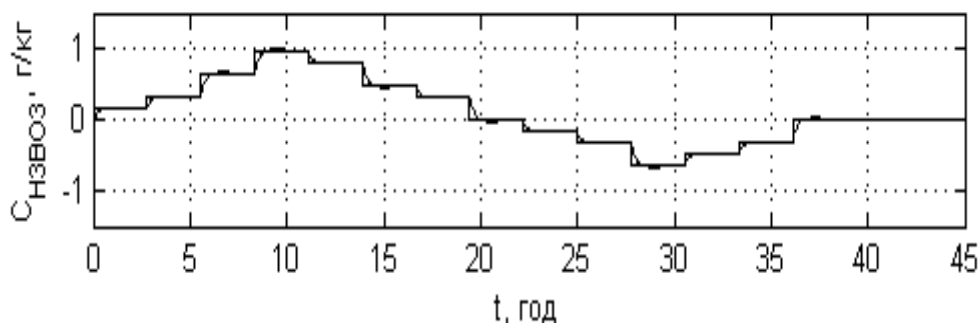


Рис. 2. График переходного процесса регулирования концентрации борной кислоты с ПИ-регулятором

Из приведенного графика видно, что даже при оптимальных настройках в системе наблюдаются колебания регулируемой величины. Поэтому была поставлена задача исследовать автоматизированную систему регулирования концентрации борной кислоты с нечетким ПИ-регулятором.

#### Цель исследования

Синтезировать нечеткий регулятор для улучшения качества регулирования концентрации жидкого поглотителя в теплоносителе 1-ого контура энергоблока АЭС с реактором типа ВВЭР-1000.

#### Изложение основного материала исследования

В работе рассматривается синтез регулятора, формирующего управляющее воздействие на основе ПИ-закона регулирования. Однако расчет коэффициентов регулятора выполняется по правилам нечеткой логики.

Для сравнения регуляторов была составлена схема для проведения имитационного моделирования в среде Simulink пакета Matlab, показанная на рис. 3.

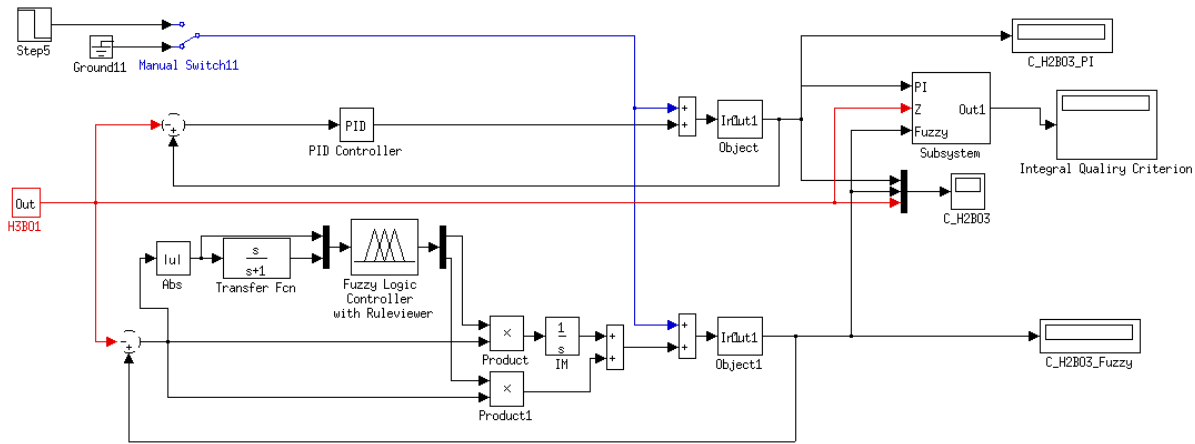


Рис. 3. Схема моделювання АСР

Блоки Subsystem и Integral Quality Criterion служат для расчета и отображения значений интегрального критерия качества переходных процессов в сравниваемых системах регулирования.

АСР с нечетким регулятором состоит из блоков расчета коэффициентов регулятора и блоков формирования ПИ-закона регулирования.

Значения коэффициентов нечеткого регулятора рассчитываются по правилам нечеткой логики на основании анализа сигнала рассогласования. На блок Fuzzy Logic Controller подается абсолютное значение сигнала рассогласования и скорость его изменения. Выходом блока являются значения настройки  $K_p$  и  $K_i$ .

Были приняты следующие диапазоны изменения входных сигналов и функции принадлежности (показанные на рис. 4 и 5)

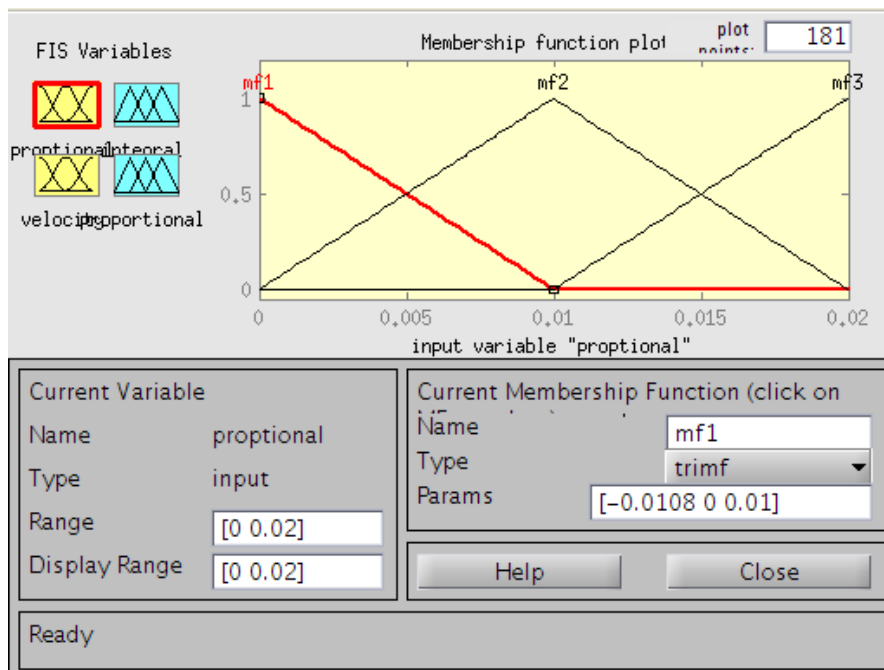


Рис. 4. Функции принадлежности для величины сигнала рассогласования

На основании исследований ПИ-регулятора [6] было принято, что сигнал рассогласования меняется в диапазоне от 0 до 0.02. Скорость изменения сигнала рассогласования также меняется в диапазоне от 0 до 0.02. Причем приняты следующие термы: "малый сигнал" от 0 до 0.01, "средний сигнал" от 0 до 0.02 с максимумом при 0.01, "большой сигнал" от 0.01 до 0.02. Такие термы были приняты и для абсолютного значения сигнала рассогласования и скорости его изменения.

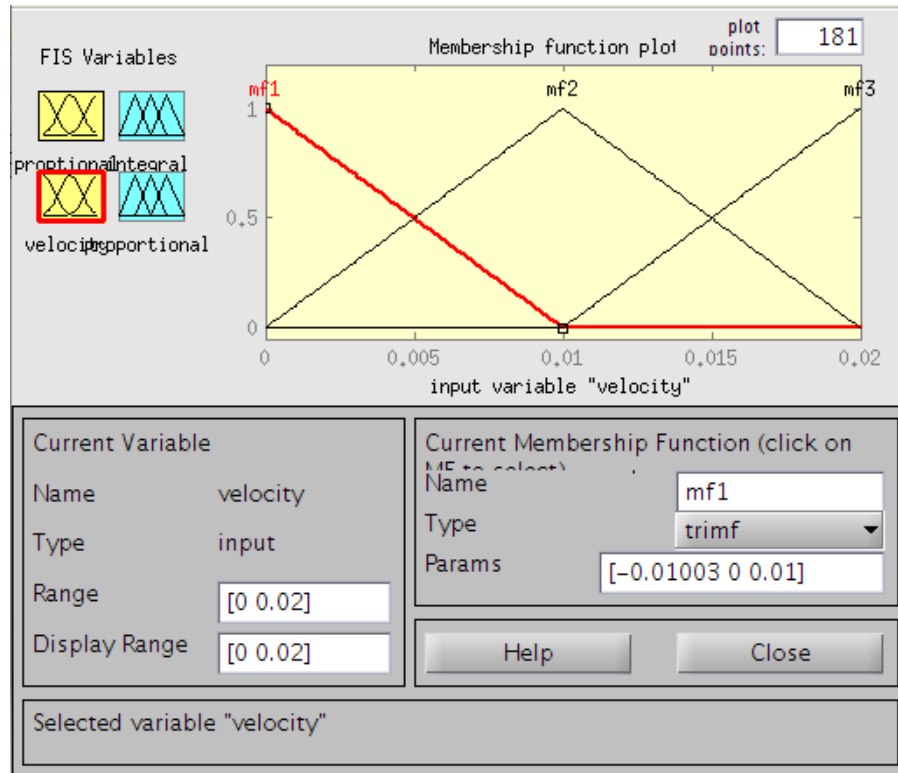


Рис. 5. Функции принадлежности скорости изменения сигнала рассогласования

Функции принадлежности для выходных сигналов показаны на рис. 6 и 7

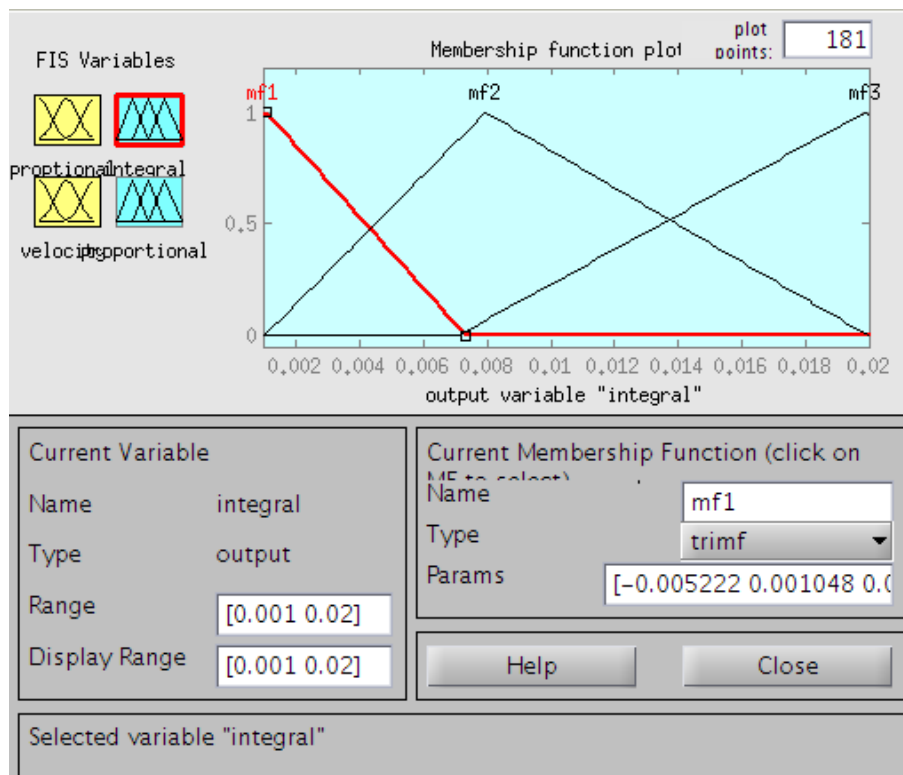


Рис. 6. Функции принадлежности для фазификации  $K_i$

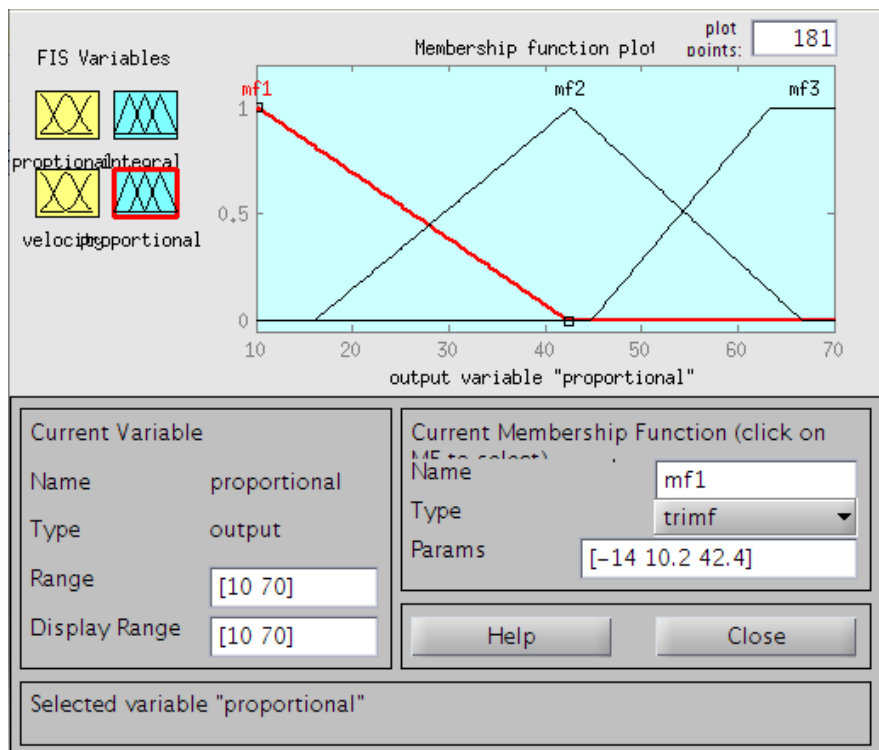


Рис. 7. Функции принадлежности для фазификации  $K_p$

Диапазон изменения коэффициентов регулятора  $K_p$  и  $K_i$  также был принят на основании работы [6]. Коэффициент  $K_p$  ( $I$ -составляющая) изменяется в диапазоне от 10 до 70. Коэффициент  $K_i$  ( $I$ -составляющая) изменяется в диапазоне от 0 до 0,01.

Принято, что для больших значений сигнала рассогласования и скорости его изменения принимаются большие значения коэффициентов регулятора. Для малых значений сигнала рассогласования и скорости его изменения соответственно малые значения коэффициентов.

В процессе моделирования были получен график переходного процесса регулирования, который показан на рис. 8.

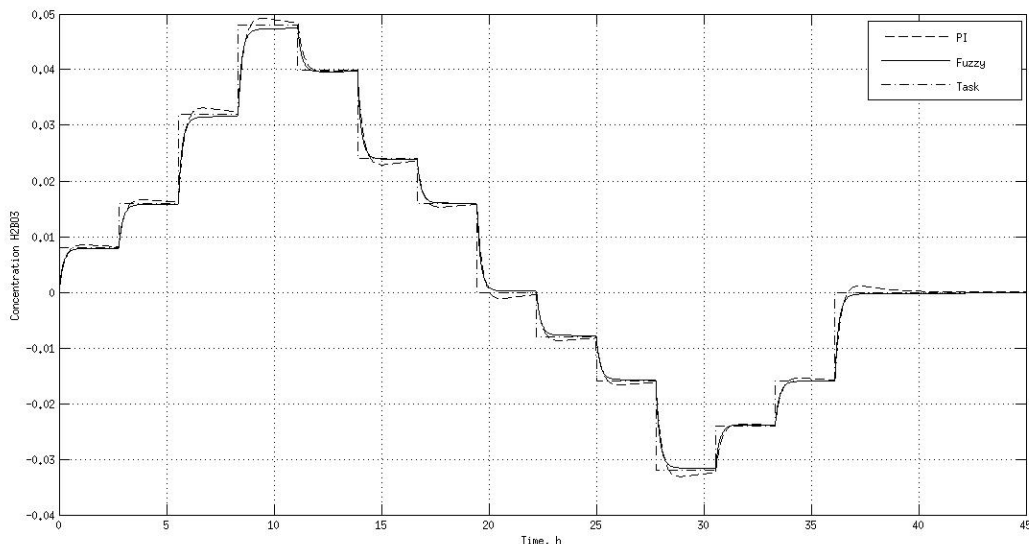


Рис. 8. График переходного процесса регулирования при изменении задания

На рис. 8 показано изменение сигнала задания (Task), отклонение регулируемой величины с применением ПИ-регулятора (PI) и отклонение регулируемой величины с применением fuzzy-регулятора (Fuzzy).

Как можно увидеть из графика fuzzy-регулятор обрабатывает сигнал задания с меньшей погрешностью. Также отсутствует перерегулирование, что является одним из требований к системе регулирования. Кроме того интегральный критерий качества переходного процесса меньше для fuzzy-регулятора ( $I_{III}=0.5169$ ,  $I_{fuzzy}=0.4108$ ).

#### Выводы

Применение ПИ fuzzy-регулятора по сравнению с линейным ПИ-регулятором для нелинейного объекта дает улучшение качества переходного процесса. А именно, отсутствуют колебания при том же времени регулирования и меньшее значение интегрального критерия качества.

#### Список использованной литературы

1. Беркович В.М. О возможности регулирования мощности энергосистемы с помощью атомных электростанций / В.М. Беркович, В.Ф. Горохов, В.П. Татарников // Теплоэнергетика. – 1974. – № 6. – С. 16-19.
2. Воронин Л.М. Особенности эксплуатации и ремонта АЭС / Л.М. Воронин. – М.: Энергоиздат, 1981. – 166 с.
3. Игнатенко Е.И. Маневренность реакторов типа ВВЭР / Е.И. Игнатенко, Ю.Н. Пыткин. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 83с
4. Максимов М.В. Модель реактора ВВЕР-1000 як об'єкта управління: монографія / М.В. Максимов, К.В. Беглов, Т.О. Цисельська // Сучасні технології управління. – Одеса : Вид-во Купрієнко С.В., 2012. – С. 108-122.
5. Медведев Р.Б. Оптимальное керування процесом зміни концентрації борної кислоти в теплоносії першого контуру АЕС з ВВЕР-1000 / Р.Б. Медведев, О.В. Сангінова // Наукові вісті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". – 2002. – № 2 (22). – С. 22-28.
6. Беглов К.В. Дослідження регулятора концентрації рідкого поглинача енергоблоку АЕС / К.В. Беглов, О.О. Волошкіна, О.А. Плахотнюк // Автоматизация технологических и бизнес-процессов. – 2015. – №4. – С. 18-24;

УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК

Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет"

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРИВИМІРНОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ  
ТЕПЛООБМІНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА З УРАХУВАННЯМ  
КІНЦЕВОЇ ШВИДКОСТІ ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА**

У даній роботі розроблена тривимірна математична модель розподілу температурних полів у порожнистому кусково-однорідному циліндрі, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі  $OZ$ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі Неймана математичної фізики для рівняння теплопровідності. За допомогою розробленого інтегрального перетворення для кусково-однорідного простору, знайдено температурне поле порожнистого кусково-однорідного циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі  $OZ$ , скінченної довжини  $L$  у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є.

Ключові слова: комплексний ряд Фур'є, інтегральні перетворення Лапласа, Фур'є, час релаксації, трансцендентне рівняння.

М.Г. БЕРДНИК

Государственное высшее учебное заведение "Национальный горный университет"

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ  
ТЕПЛООБМЕНА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА**

В данной работе разработана трехмерная математическая модель распределения температурных полей в полой кусочно-однородном цилиндре, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $OZ$ , с учетом конечной скорости распространения тепла в виде краевой задачи Неймана математической физики для уравнения теплопроводности. С помощью разработанного интегрального преобразования для кусочно-однородного пространства, найдено температурное поле полого кусочно-однородного цилиндра, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $OZ$ , конечной длины  $L$  в виде сходящихся ортогональных рядов по функциям Бесселя и Фурье.

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, интегральные преобразования Лапласа, Фурье, время релаксации, трансцендентное уравнение.

M.G.BERDNYK

State Higher Education Institution "National Mining University"

**MATHEMATICAL MODELING OF THREE-DIMENSIONAL GENERALIZED PROBLEM OF HEAT  
EXCHANGE PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDER IN VIEW FINITE SPEED OF PROPAGATION  
OF HEAT**

In this paper, we developed a three-dimensional mathematical model for the distribution of temperature fields in a hollow piecewise homogeneous cylinder that rotates at a constant angular velocity around the  $OZ$  axis, taking into account the finite velocity of heat propagation in the form of the Neumann boundary value problem of mathematical physics for the heat equation. Using the developed integral transformation for a piecewise homogeneous space, a temperature field of a hollow piecewise homogeneous cylinder is found that rotates with a constant angular velocity about the axis  $OZ$  of finite length  $L$  in the form of convergent orthogonal series in the Bessel and Fourier functions

Keywords: complex Fourier series, Laplace integral transforms, Fourier time, relaxation time, transcendental equation.

**Постановка проблеми**

У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою [1,2]. Питання про можливість узагальнення рівняння переносу енергії на тривимірний простір у випадку узагальненого закону теплопровідності Фур'є розглянуто у [1].

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Однак при високих інтенсивних нестационарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання використання цього припущення приводить до помилок, тому необхідно враховувати, що розповсюдження теплоти проходить з кінцевою швидкістю.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Як показує огляд літератури теплообмін в циліндрах, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо [3, 4]. В [1] показано, що чисельні методи дослідження нестационарних неосесиметричних задач теплообміну циліндра, якій обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання.

В [1] доводиться, що умови стійкості обчислень в методах кінцевих елементів і кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестационарних неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1 - 2 \frac{\Delta F_o}{\Delta \varphi^2} \geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta \varphi} - \frac{Pd}{2} \geq 0,$$

де  $F_o$  – критерій Фур'є;  $Pd$  – критерій Предводітелева.

Якщо  $Pd = 10^5$ , що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра  $\omega = 1,671 \text{ сек}^{-1}$  радіусом 100 мм, змінні  $\Delta \varphi$  і  $\Delta F_o$  повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta \varphi \leq 2 \cdot 10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_o \leq 2 \cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови  $Bi = 5$  ( $Bi$  – критерій Біо), час необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює  $Fo \approx 0.025$ . Це означає, що потрібно принаймні здійснити  $1.3 \cdot 10^8$  операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більш того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити  $3.14 \cdot 10^5$  операцій, так як внутрішній стан у кільці характеризується  $3.14 \cdot 10^5$  точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому, для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестационарних процесів теплообміну в циліндрах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

**Мета статті**

Розробити тривимірну математичну модель розподілу температурних полів у порожньому кусково-однорідному циліндрі, який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $OZ$ , скінченної довжини  $L$  з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності, та знайти рішення отриманої крайової задачі, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

**Основная часть**

Розглянемо розрахунок нестационарного температурного поля порожнього кругового циліндра зовнішнього радіуса  $R$  в циліндричній системи координат  $(r, \varphi, z)$ , кусково-однорідного в напрямку полярного радіуса  $r$ , який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $OZ$ , скінченної довжини  $L$  з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Теплофізичні властивості в кожному шарі не залежать від температури за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна  $G_0$ , а на зовнішній і внутрішній поверхні циліндра відомі теплові потоки  $G(\varphi, z)$  і  $G_1(\varphi, z)$  відповідно.

Відносну температуру циліндра  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  можна представити у вигляді:

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \begin{cases} \theta_1(\rho, \varphi, z, t) & \text{якщо } \rho \in (\rho_0, \rho_1) \\ \theta_2(\rho, \varphi, z, t) & \text{якщо } \rho \in (\rho_1, \rho_2) \end{cases} \quad (1)$$

Відносні температури  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t)$   $s$ -го шара циліндра обчислюються по формулам:

$$\theta_s(\rho, \varphi, z, t) = \frac{T_s(\rho, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0},$$

де  $T_s(\rho, \varphi, z, t)$  - температури  $s$ -го шара циліндра;  $T_{\max}$  - максимальна температура циліндра;  $\rho = \frac{r}{R}$ ;  $s=1,2$ .

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [1] узагальнене

рівняння балансу енергії твердого тіла, який обертається, з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні приймає вигляд:

$$\gamma c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \tau_r \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial t} \right] \right\} = \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad (2)$$

де  $\gamma$  – щільність середовища;  $c$ -питома теплоємність;  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності;  $T(\rho, \varphi, z, t)$  – температура середовища;  $t$  – час;  $\tau_r$  - час релаксації.

Математично задача визначення відносної температури циліндра  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  складається в інтегруванні гіперболічних диференціальних рівнянь теплопровідності (2) в області  $D_s = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (\rho_{s-1}, \rho_s), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, 1), t \in (0, \infty)\}$ , що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \omega \frac{\partial \theta_s}{\partial \varphi} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial t^2} + \tau_r \omega \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \varphi \partial t} = \alpha_s^2 \left[ \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_s}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \varphi^2} + \chi \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial z^2} \right] \quad (3)$$

с початковими умовами

$$\theta_s(\rho, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_s(\rho, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

граничними умовами

$$\int_0^t \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} e^{\tau_r \zeta} d\zeta = W(\varphi, z), \quad \int_0^t \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_2} e^{\tau_r \zeta} d\zeta = V(\varphi, z), \quad (5)$$

$$\theta_s(\rho, \varphi, 0, t) = 0, \quad \theta_s(\rho, \varphi, 1, t) = 0, \quad (6)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_1(\rho_1, \varphi, z, t) = \theta_2(\rho_1, \varphi, z, t) \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(\rho_1, \varphi, z, t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_2(\rho_1, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \quad (7)$$

де  $\rho_1 = \frac{R_1}{R}$ ;  $\rho_0 = \frac{R_0}{R}$ ;  $\rho_2 = 1$ ;  $R_0$  - внутрішній радіус циліндра;  $R_1$  - радіус межі шарів;  $\lambda_s$  - коефіцієнт

теплопровідності,  $\gamma_s$  – щільність,  $c_s$  -питома теплоємність,  $a_s = \frac{\lambda_s}{c_s \gamma_s}$  - коефіцієнт

температуропровідності  $s$  –го шара циліндра ;  $\alpha_s^2 = \frac{a_s}{R^2}$ ;  $s=1,2$ ;  $z = \frac{z}{L}$ ;  $\chi = \left(\frac{R}{L}\right)^2$  ;

$$W(\varphi, z) = \frac{G_1(\varphi, z) \tau_r}{\lambda_1 (T_{\max} - G_0)}; \quad V(\varphi, z) = \frac{G(\varphi, z) \tau_r}{\lambda_2 (T_{\max} - G_0)}; \quad G_1(\varphi, z), G(\varphi, z) \in C(0, 2\pi).$$

Тоді рішення крайової задачі (3)-(7)  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t)$  є двічі неперервно диференційованим по  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $t$  в області  $D$  і неперервним на  $\bar{D}$  [5], тобто  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ , а функції  $W(\varphi, z)$ ,  $V(\varphi, z)$ ,  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t)$ , можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [5]:

$$\left\{ \begin{matrix} \theta_s(\rho, \varphi, z, t) \\ W(\varphi, z) \\ V(\varphi, z) \end{matrix} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} \theta_{s,n}(\rho, z, t) \\ W_n(z) \\ V_n(z) \end{matrix} \right\} \cdot \exp(in\varphi), \quad (8)$$

де



$$\begin{Bmatrix} \theta_{s,n}(\rho, z, t) \\ W_n(z) \\ V_n(z) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \theta_s(\rho, \varphi, z, t) \\ W(\varphi, z) \\ V(\varphi, z) \end{Bmatrix} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi;$$

$$\theta_{s,n}(\rho, z, t) = \theta_{s,n}^{(1)}(\rho, z, t) + I \theta_{s,n}^{(2)}(\rho, z, t); V_n(z) = V_n^{(1)}(z) + I V_n^{(2)}(z); W_n = W_n^{(1)}(z) + I W_n^{(2)}(z);$$

I-уявна одиниця.

З огляду на те, що  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t)$  функції дійсні, обмежимося надалі розглядом  $\theta_{s,n}(\rho, z, t)$  для  $n=0,1,2,\dots$ , тому що  $\theta_{s,n}(\rho, z, t)$  і  $\theta_{s,-n}(\rho, z, t)$  будуть комплексно спряженими [5]. Підставляючи значення функцій з (8) у (3)-(7) одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t} + g_n^{(i)} \theta_{s,n}^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r g_n^{(i)} \frac{\partial \theta_{s,n}^{(m_i)}}{\partial t} = \alpha_s^2 \left[ \frac{\partial^2 \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \theta_{s,n}^{(i)} + \chi \cdot \theta_{s,n}^{(i)} \right] \quad (9)$$

с початковими умовами

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}(\rho, z, 0)}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

з граничними умовами

$$\int_0^t \frac{\partial \theta_{1,n}^{(i)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}} d\zeta = W_n^{(i)}(z), \quad \int_0^t \frac{\partial \theta_{2,n}^{(i)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_2} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}} d\zeta = V_n^{(i)}(z), \quad (11)$$

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho, 0, t) = 0, \quad \theta_{s,n}^{(i)}(\rho, 1, t) = 0, \quad (14)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1, z, t) = \theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1, z, t), \quad (12)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1, z, t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1, z, t)}{\partial \rho}, \quad (13)$$

де  $g_n^{(1)} = -\omega n$ ;  $g_n^{(2)} = \omega n$ ;  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ; ;  $i,s=1,2$ .

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (9) з умовами (10)-(13) інтегральне перетворення Лапласа[6]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

В результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$s \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)} + g_n^{(i)} \left( \tilde{\theta}_{s,n}^{(m_i)} + \tau_r s \tilde{\theta}_{s,n}^{(m_i)} \right) + \tau_r s^2 \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)} = \alpha_s^2 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial z^2} \right] \quad (14)$$

граничними умовами

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = \tilde{W}_n^{(i)}(z), \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_2} = \tilde{V}_n^{(i)}(z), \quad (15)$$

$$\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}(\rho, 0, t) = 0, \quad \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}(\rho, 1, t) = 0, \quad (16)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1, t) = \tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1, t), \tag{17}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1, t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1, t)}{\partial \rho}, \tag{18}$$

де  $\tilde{W}_n^{(i)}(z) = W_n^{(i)}(z) \left( 1 + \frac{1}{s\tau_r} \right)$ ;  $\tilde{V}_n^{(i)}(z) = V_n^{(i)}(z) \left( 1 + \frac{1}{s\tau_r} \right)$  (i,s=1,2).

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (14) інтегральне перетворення Фур'є:

$$\bar{f}(\lambda_m) = \int_0^1 f(x) \sin(\pi \cdot m \cdot x) dx,$$

де  $\lambda_m = \pi \cdot m$ ;  $m=1,2,\dots$ , а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(x) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi \cdot m \cdot x) \cdot \bar{f}(\lambda_m). \tag{19}$$

В результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$s \bar{\theta}_{s,n}^{(i)} + g_n^{(i)} \left( \bar{\theta}_{s,n}^{(m_i)} + \tau_r s \bar{\theta}_n^{(m_i)} \right) + \tau_r s^2 \bar{\theta}_{s,n}^{(i)} = \alpha_s^2 \left[ \frac{d^2 \bar{\theta}_{s,n}^{(i)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d \bar{\theta}_{s,n}^{(i)}}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \bar{\theta}_{s,n}^{(i)} - \chi \lambda_m^2 \bar{\theta}_{s,n}^{(i)} \right] \tag{20}$$

з граничною умовою

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}_{1,n}^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \bar{W}_n^{(i)}, \quad \left. \frac{\partial \bar{\theta}_{2,n}^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_2} = \bar{V}_n^{(i)}, \tag{21}$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\bar{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1, t) = \bar{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1, t), \tag{22}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \bar{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1, t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \bar{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1, t)}{\partial \rho}. \tag{23}$$

Для розв'язання крайової задачі (20)-(23) побудуємо інтегральне перетворення:

$$\tilde{f}(\mu_{n,k}) = \int_{\rho_0}^{\rho_2} \frac{Q_0(\mu_{n,k} \rho)}{\alpha(\rho)} \rho f(\rho) d\rho = \sum_{s=1}^2 \int_{\rho_{s-1}}^{\rho_s} \frac{Q_s(\mu_{n,k} \rho)}{\alpha_s^2} \rho f(\rho) d\rho, \tag{24}$$

де  $Q_0(\mu_{n,k} \rho), \alpha(\rho) = \begin{cases} Q_1 \left( \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho \right), & \alpha_1^2 \quad \text{якщо } \rho \in (\rho_0, \rho_1) \\ Q_2 \left( \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho \right), & \alpha_2^2 \quad \text{якщо } \rho \in (\rho_1, \rho_2) \end{cases}$ .

Власні функції  $Q_0(\mu_{n,k} \rho)$  мають вигляд:

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho\right) = \frac{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)}, \quad Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) = \frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)}, \quad (25)$$

де  $\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) = \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \left[ Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_0\right) J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho\right) - J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_0\right) Y_m\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho\right) \right];$   
 $\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) = \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \left[ Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right) J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) - J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right) Y_m\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) \right];$   $J_n(x), Y_n(x)$  – функції

Бесселя 1<sup>20</sup> і 2<sup>20</sup> роду  $n^{20}$  порядку відповідно[5].

Власні значення  $\mu_{n,k}$  знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння:

$$\frac{\mu_{n,k} J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)}{\alpha_1 J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)} = \sigma \frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)}, \quad (26)$$

де  $H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) = \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \left[ Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right) J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) - J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right) Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) \right];$   $\sigma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ .

Формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_0(\mu_{n,k} \rho)}{\|Q_0(\mu_{n,k} \rho)\|^2} \hat{f}(\mu_{n,k}), \quad (27)$$

де

$$\|Q_0(\mu_{n,k} \rho)\|^2 = \frac{\rho_1^2}{2\alpha_1^2} \left\{ \left( 1 - \frac{n^2 \alpha_1^2}{\mu_{n,k}^2 \rho_1^2} \right) + \left[ \frac{\mu_{n,k} J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)}{\alpha_1 J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)} \right]^2 \right\} + \frac{\rho_2^2}{2\alpha_2^2} \left( 1 - \frac{n^2 \alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2 \rho_2^2} \right) \left[ \frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)} \right]^2 -$$

$$- \frac{\rho_1^2}{2\alpha_2^2} \left\{ \left( 1 - \frac{n^2 \alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2 \rho_1^2} \right) + \left[ \frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)} \right]^2 \right\}.$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (20) з умовами (21)-(23) інтегральне перетворення (24), де власні функції  $Q_s(\mu_{n,k} \rho)$  визначаються по формулам (25), а власні значення  $\mu_{n,k}$  знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння (26) і враховуючи позначення (1), в результаті одержуємо систему звичайних алгебраїчних рівнянь відносно  $\hat{\theta}_n^{(i)}$ :

$$s \widehat{\theta}_n^{(i)} + g_n^{(i)} \left( \widehat{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \widehat{\theta}_n^{(m_i)} \right) + \tau_r s^2 \widehat{\theta}_n^{(i)} = q_{n,k} \left( \frac{\mu_{n,k} \widehat{\Omega}_{n,k}^{(i)}}{q_{n,k}} - \widehat{\theta}_n^{(i)} \right), \quad (28)$$

де  $q_{n,k} = \mu_{n,k}^2 + \chi \lambda_m^2$ ;  $\Omega_{n,k}^{(i)} = \rho_0 Q_1 \left( \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_0 \right) \widetilde{W}_n^{(i)} + Q_2 \left( \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \right) \widetilde{V}_n^{(i)}$ ,  $i=1,2$ .

Розв'язавши систему рівнянь (28) одержуємо:

$$\widehat{\theta}_n^{(i)} = \frac{\Omega_{n,k}^{(i)} (\tau_r s^2 + s + q_{n,k}) + (-1)^{i+1} \omega n \Omega_{n,k}^{(m_i)} (1 + s \tau_r)}{(\tau_r s^2 + s + q_{n,k})^2 + \omega^2 n^2 (1 + s \tau_r)^2}. \quad (29)$$

Застосовуючи до зображення функцій (29) формули оберненого перетворення Лапласа одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \Omega_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n I] + \Omega_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1) I] \right\} \cdot \\ &\left( e^{s_j t} - 1 \right) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \Omega_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n I] + \Omega_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1) I] \right\} \\ &\cdot \left( e^{s_j t} - 1 \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \Omega_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n I] - \Omega_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1) I] \right\} \cdot \\ &\left( e^{s_j t} - 1 \right) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \Omega_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n I] - \Omega_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1) I] \right\} \\ &\left( e^{s_j t} - 1 \right), \end{aligned} \quad (31)$$

де  $\zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0.5 s_j^{-1}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2}$ , а значення  $s_j$  для  $j=1,2,3,4$  визначаються за формулами

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}, \quad s_{3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином з урахуванням формул обернених перетворень (8),(19) і (27) одержуємо температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \widehat{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) + I \cdot \widehat{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) \right] \sin(\pi m z) \right\rangle \cdot \frac{Q_0(\mu_{n,k} \rho)}{\|Q_0(\mu_{n,k} \rho)\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi),$$

де значення  $\widehat{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t)$  і  $\widehat{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t)$  визначаються по формулам (30),(31).

### Висновки

У статті знайдено температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, прокатних валках, турбінах і т.і.).

**Список використаної літератури**

1. Бердник М. Г. Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну суцільного циліндра, який обертається / Бердник М. Г. // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Дніпропетровськ. -2014.– С. 26-35.
2. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. // Львів. - 2011. - 48 с.
3. Голицына Е. В. Математическое моделирование температурного поля в полом вращающемся цилиндре при нелинейных граничных условиях / Е.В. Голицына //Теплофизика высоких температур. – 2008. – Т. 46. -№ 6. – С. 905 – 910.
4. Громик А. П. Нестационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових Середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. // Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ. - 2009. - 120 с.
5. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики / Маркович Б. М. – Львів: Львівська політехніка. - 2010. - 384 с.
6. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування /Г.П. Лопушанська, А.О., Лопушанський, О.М. М"яус // Львів: ЛНУ ім. Івана Франка. - 2014. - 152 с.

УДК 539.3

И.П. БОКОВ, Н.С. БОНДАРЕНКО, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА  
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК**

Рассмотрена задача о действии на трансверсально-изотропную пластину локальной нагрузки, которая распределена равномерно и действует в нормальном к срединной плоскости пластины направлении. Используются выражения для внутренних силовых факторов, полученные на базе обобщенной теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации. Данная теория учитывает все компоненты тензора напряжений, включая поперечные сдвиговые и нормальные напряжения. Проведены численные исследования, демонстрирующие поведение внутренних силовых факторов для трансверсально-изотропных пластин в зависимости от упругих постоянных трансверсально-изотропного материала.

Ключевые слова: теория  $\{m,n\}$ -аппроксимации, напряженно-деформированное состояние, трансверсально-изотропные пластины, локальные нагрузки, изгибающие моменты.

I. P. BOKOV, N. S. BONDARENKO, O. O. STRELNIKOVA  
Институт проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ**ПРУЖНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН  
ЗА ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

Розглянуто задачу про дію на трансверсально-ізоотропну пластину локального навантаження, яке розподілене рівномірно і діє в нормальному до серединної площини напрямку. Використано вирази для внутрішніх силових факторів, отримані на базі узагальненої теорії у варіанті  $\{1,0\}$ -апроксимації. Ця теорія враховує всі компоненти тензора напружень, включаючи поперечні зсувні і нормальні напруження. Проведено чисельні дослідження, що демонструють поведінку внутрішніх силових факторів для трансверсально-ізоотропних пластин у залежності від пружних констант трансверсально-ізоотропного матеріалу.

Ключові слова: теорія  $\{m,n\}$ -апроксимації, пружно-деформований стан, трансверсально-ізоотропні пластины, локальні навантаження, згинальні моменти.

I. P. BOKOV, N. S. BONDARENKO, E. A. STRELNIKOVA  
A. N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine**STRESS-STRAIN STATE OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATES UNDER LOCAL LOADS**

A transversal isotropic plate under local load distributed uniformly and acted normally to the middle plane of this plate is considered. Expressions for the internal force factors based on the generalized theory in the variant of  $\{1,0\}$ -approximation are used. This theory takes into account all components of the stress tensor, including shear and normal stresses. Numerical studies have been performed demonstrating the behavior of the internal force factors for transversely isotropic plates as a function of the elastic constants of a transversally isotropic material.

Key words: theory of  $\{m,n\}$ -approximation, stress-strain state, transversely isotropic plates, local loads, bending moments.

**Постановка проблеми**

Широкое применение в современной технике композитных материалов, обладающих резкой анизотропией упругих свойств, приводит к необходимости учитывать физико-механические характеристики этих материалов при проведении прочностных расчётов. При расчётах тонкостенных элементов конструкций из таких материалов целесообразным является использование уточнённых теорий пластин и оболочек. Теория  $\{m,n\}$ -аппроксимации, основанная на методе И. Н. Векуа разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра [1], позволяет учесть сдвиговую податливость, характерную для большинства композитных материалов. Силовые воздействия относятся к одному из основных видов нагрузки, которым подвергаются объекты и изделия современной промышленности. Эти воздействия могут носить сосредоточенный или локальный характер. Поэтому исследование напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных пластин при действии локальных силовых нагрузок является актуальным и важным научно-техническим заданием.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Об актуальности рассматриваемой проблемы свидетельствуют её аналитические и численные исследования, проведенные в публикациях [2–5]. В работе [4] рассмотрена задача о действии на тонкую ортотропную пластину локальной динамической нагрузки, распределенной по произвольной области. Численно исследовано поведение прогиба пластины при действии внезапно приложенной динамической нагрузки степенного вида, распределенной по круговой площадке. Задача о построении фундаментальных решений системы динамических уравнений теории тонких изотропных оболочек с учетом линейного демпфирования, решена в работе [5]. На основании полученных решений исследована задача о действии на оболочку локальной нагрузки, распределенной по круговой области.

В публикациях [6–8] рассмотрены задачи термоупругости, в которых источники тепла распределены равномерно по локальной области. Работа [6] посвящена исследованию термоупругого состояния локально нагретой ортотропной цилиндрической оболочки, находящейся в условиях теплового контакта с окружающей средой. В [7] решена задача термоупругости для ортотропных сферических оболочек, нагреваемых источником тепла в виде линии и исследовано влияние условий теплообмена на поведение внутренних силовых факторов. В статье [8] предполагается линейное распределение тепла по толщине оболочки и конвективный теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. В случае симметричного теплообмена с окружающей средой исследовано поведение внутренних силовых факторов для различных типов оболочек и для пластины.

**Цель исследования**

Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщиной  $2h$ , которая находится под действием локальной силовой нагрузки. Отнесём пластину к ортогональной системе безразмерных координат  $x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ), определенных с точностью до полутолщины пластины  $h$ . Будем считать, что граничный контур пластины существенно удален от начала координат. Локальная сила распределена равномерно и действует в нормальном к срединной плоскости пластины направлении. Размеры локальной области намного меньше характерного размера пластины.

Цель данной работы состоит в исследовании поведения внутренних силовых факторов для трансверсально-изотропной пластины, которые получены на базе уточненной теории в варианте {1,0}-аппроксимации, в зависимости от упругих постоянных.

Локальный характер нагрузки позволяет использовать для решения поставленной задачи формулу свертки [9]

$$P(\vec{r}) = \iint_{\Omega} E(\vec{r} - \vec{t}) W(\vec{t}) d\Omega, \tag{1}$$

где  $P$  – внутренние силовые факторы;  $E$  – силовые компоненты фундаментального решения для трансверсально-изотропной пластины, полученные на базе уточненной теории в варианте {1,0}-аппроксимации;  $\Omega$  – область локального нагружения;  $\vec{r}$  и  $\vec{t}$  – вектора текущей точки и точки интегрирования соответственно.

**Изложение основного материала исследования**

В статье [10] было получено фундаментальное решение уравнений статики для трансверсально-изотропных пластин на базе обобщенной теории в варианте {1,0}-аппроксимации. Переводя внутренние силовые факторы в полярную систему координат и полагая  $q_1^* = m_1^* = q_2^* = m_2^* = 0$ ;  $q_3^* = 1$ , получим выражения для радиальных и окружных моментов и перерезывающих сил

$$M_r = -\frac{1}{8\pi} \left[ 2(1+\nu) \ln \frac{\gamma r}{2} + 1 - \nu \right]; \quad M_\varphi = -\frac{1}{8\pi} \left[ 2(1+\nu) \ln \frac{\gamma r}{2} - 1 + \nu \right];$$

$$H_{r\varphi} = 0; \quad Q_r = -\frac{1}{2\pi r}; \quad Q_\varphi = 0,$$

где  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ;  $C = \ln \gamma = 0,5772\dots$  – константа Эйлера.

Запишем формулу свёртки (1) для таких областей:

1) область  $\Omega_1$  – отрезок длины  $2a$ , расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат:

$$P(\vec{r}) = \int_{-a}^a E(x_1 - t_1, x_2) W(t_1) dt_1;$$

2) область  $\Omega_2$  – круг радиуса  $r_0$  с центром в начале координат:

$$P(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \rho E(x_1 - \rho \cos \theta, x_2 - \rho \sin \theta) W(\rho, \theta) d\rho;$$

3) область  $\Omega_3$  – эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  с центром в начале координат:

$$P(\vec{r}) = ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho E(x_1 - \rho \cos \theta, x_2 - \rho \sin \theta) W(\rho, \theta) d\rho.$$

В качестве примера рассмотрим действие силы, равномерно распределенной ( $W \equiv 1$ ) в областях  $\Omega_1$  ( $a = 3$ ),  $\Omega_2$  ( $r_0 = 1$ ) и  $\Omega_3$  ( $a = 1, b = 2$ ). Для данных областей рассчитаны значения внутренних силовых факторов вдоль оси ординат. Численные расчеты проведены для трёх материалов:  $M_1$  – кварц ( $\nu = 0,087$ ),  $M_2$  – алевролит ( $\nu = 0,22$ ) и  $M_3$  – песчаник ( $\nu = 0,3484$ ).

Результаты расчетов в случае силовой нагрузки, распределенной по областям  $\Omega_1 - \Omega_3$ , представлены на рис. 1–3 соответственно. Кривые 1–3 на всех рисунках отвечают материалам  $M_1 - M_3$ .

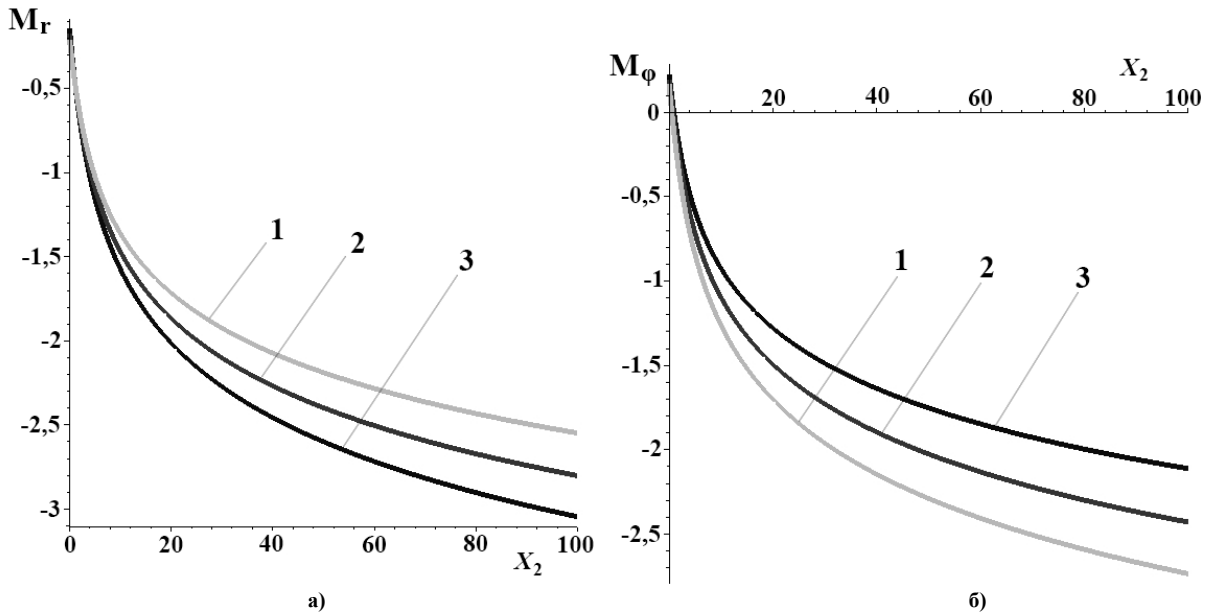


Рис. 1. Область действия нагрузки – отрезок. Внутренние силовые факторы:  
а) изгибающий момент  $M_r$   
б) изгибающий момент  $M_\phi$

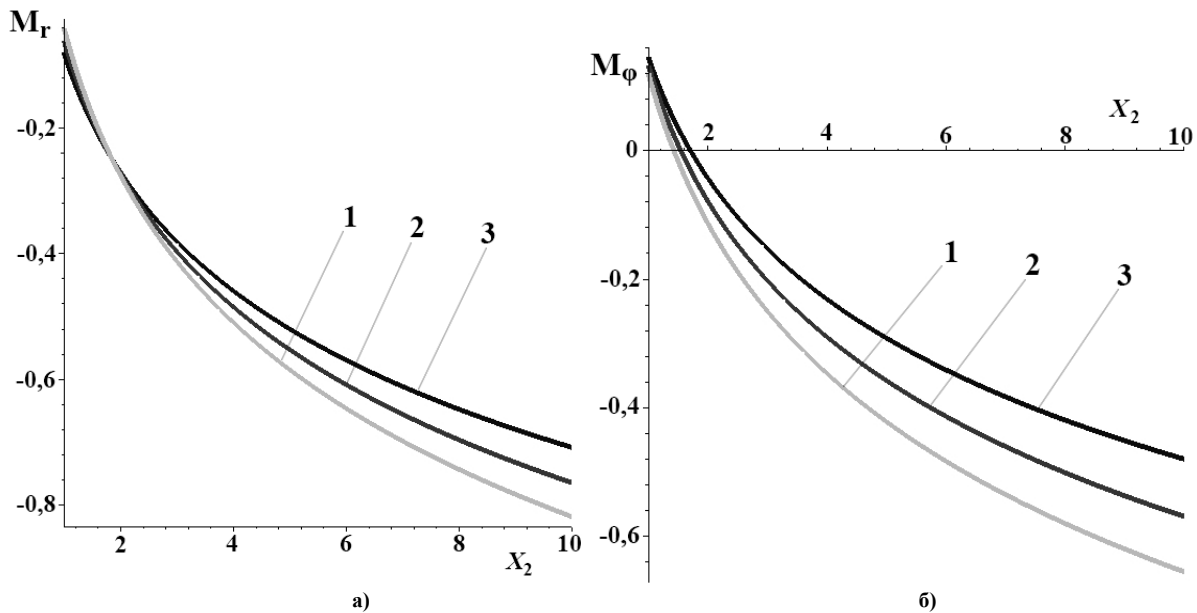


Рис. 2. Область действия нагрузки – круг. Внутренние силовые факторы:  
а) изгибающий момент  $M_r$



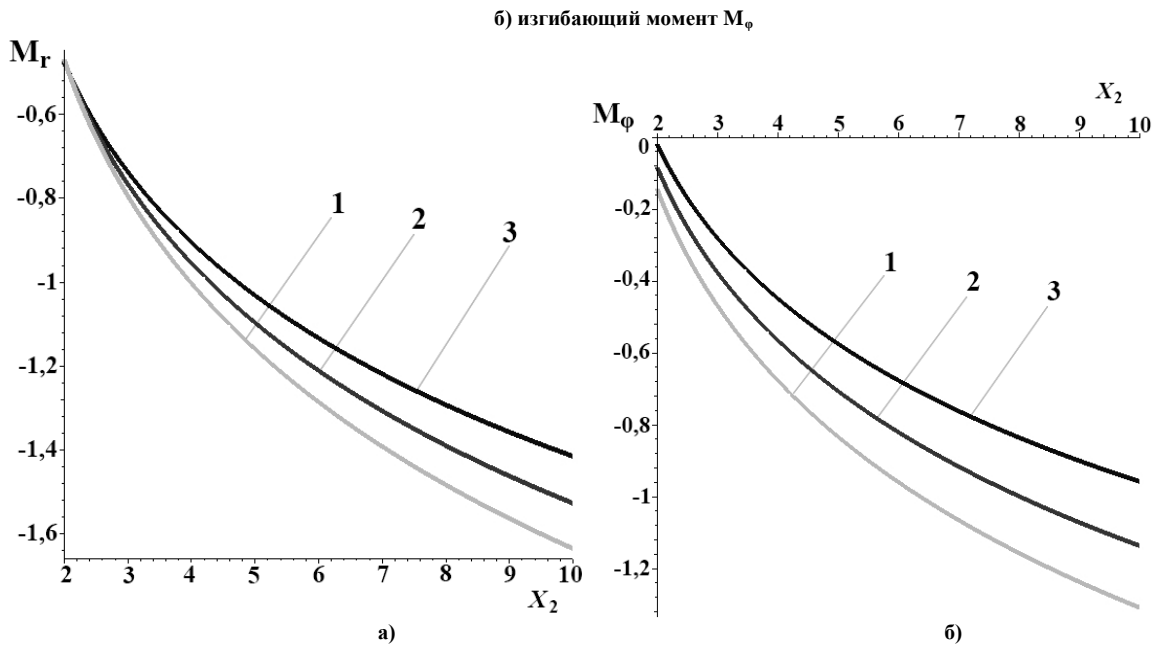


Рис. 3. Область действия нагрузки – эллипс. Внутренние силовые факторы:  
а) изгибающий момент  $M_r$   
б) изгибающий момент  $M_\phi$

Численные исследования показали, что при действии нагрузки по области  $\Omega_1$  увеличение коэффициента Пуассона приводит к уменьшению значения радиального момента  $M_r$ . В случае действия нагрузки по областям  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  наблюдается обратная зависимость. В то время как значения окружного момента  $M_\phi$  увеличиваются с ростом значения  $\nu$ . Упругие постоянные трансверсально-изотропного материала не оказывают влияния на перерезывающие силы  $Q_{r,\phi}$ .

#### Выводы

Рассмотрена задача о действии на трансверсально-изотропную пластину локальной силовой нагрузки. Для решения данной задачи использован метод фундаментальных решений и формула свертки. Проанализировано влияние упругих постоянных трансверсально-изотропного материала и геометрии области локального нагружения на внутренние силовые факторы. Проведенные численные исследования показали, что в общем случае с ростом коэффициента Пуассона значения радиальных и окружных моментов увеличиваются. Таким образом, можно заключить, что при расчете локального напряженно-деформированного состояния тонкостенных пластин существенно важным является учет упругих свойств трансверсально-изотропных материалов.

В перспективе описанная в работе методика может быть использована при рассмотрении локальных силовых нагрузок, действующих по произвольному закону внутри произвольной области. Также возможно изучение напряженно-деформированного состояния пластин на базе обобщенной теории  $\{m,n\}$ -аппроксимации для случая удержания большего количества членов рядов разложений искомых функций в направлениях, нормальных к плоскости изотропии.

#### Список использованной литературы

1. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – К. : Наук. думка, 1982. – 296 с.
2. Горшков А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, А. Г. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
3. Khov N. An accurate solution method for the static and dynamic deflections of orthotropic plates with general boundary conditions / N. Khov, W. L. Li, R. F. Gibson // Composite Structures. – 2009. – V. 90, № 4. – P. 474-481.
4. Шевченко В. П. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок / В. П. Шевченко, О. С. Ветров // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – ISSN 1683-4720. – С. 207–215.
5. Ветров О. С. Динамика тонких оболочек с учетом демпфирования под действием локальных нагрузок / О. С. Ветров, В. П. Шевченко, В. Ф. Русаков // Вестник Запорожского национального университета. – 2015. – № 2. – С. 28–36.

6. Гольцев А. С. Задачи термоупругости для ортотропных цилиндрических оболочек при локальном температурном воздействии / А. С. Гольцев // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 139–144.
7. Гольцев А. С. Исследование влияния условий теплообмена для локально нагретых ортотропных сферических оболочек / А. С. Гольцев // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 76-82.
8. Шевченко В. П. Термоупругость локально нагретых ортотропных оболочек / В. П. Шевченко, А. С. Гольцев // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2001. – Вип. 4, Т. 1. – С. 208-213.
9. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек / В. П. Шевченко; под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского // Механика композитов. – Киев, 1998. – Т. 7: Концентрация напряжений. – С. 159–196.
10. Bokov I. Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates / I. Bokov, N. Bondarenko, E. Strelnikova // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – 2/7 (86). – P. 4–12.

УДК 536.24

Ю.В. БРАЗЛУК, А.И. ГУБИН, Д.В. ЕВДОКИМОВ, М.А. СТОЯНОВСКИЙ  
Днепропетровский национальный университет имени Олеса Гончара**АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АБЛИРУЮЩИХ  
ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ**

Аблирующие покрытия являются основой систем тепловой защиты спускаемых аппаратов в ракетно-космической технике, а также ряда других устройств, применяемых в экстремальных температурных условиях. Расчет подобных покрытий представляет собой значительную трудность из-за сложности процессов, протекающих в аблирующем покрытии. С целью создания эффективных методов расчета рассматриваемых объектов была предложена асимптотическая математическая модель процессов теплообмена в теплозащитных покрытиях. На модельных задачах была разработана и протестирована расчетная схема для анализа и проектирования аблирующих теплозащитных покрытий.

Ключевые слова: теплозащитное покрытие, абляция, асимптотический подход, метод малого параметра, краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения, задача Коши.

Ю.В. БРАЗЛУК, О.І. ГУБІН, Д.В. ЄВДОКИМОВ, М.А. СТОЯНОВСЬКИЙ  
Дніпровський національний університет імені Олеса Гончара**АСИМПТОТИЧНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АБЛЯЦІЙНИХ ТЕПЛОЗАХИСНИХ ПОКРИТТІВ**

Аблюючі покриття є основою систем теплового захисту апаратів, що повертаються, у ракетно-космічній техніці, а також ряду інших пристроїв, які застосовуються в екстремальних температурних умовах. Розрахунок подібних покриттів являє собою значні труднощі через складність процесів, що протікають в аблюючому покритті. З метою створення ефективних методів розрахунку розглянутих об'єктів була запропонована асимптотична математична модель процесів теплообміну в теплозахисних покриттях. На модельних задачах була розроблена і протестована розрахункова схема для аналізу і проектування аблюючих теплозахисних покриттів.

Ключові слова: теплозахисне покриття, абляція, асимптотичний підхід, метод малого параметра, крайова задача для звичайного диференціального рівняння, задача Коші.

IU.V. BRAZALUK, O.I. GUBIN, D.V. YEVDOKYMOV, M.A. STOIANOVSKYI  
Oles Honchar Dnipro National University**ASYMPTOTIC MATHEMATICAL MODEL OF ABLATING THERMAL PROTECTIVE COATINGS**

The ablating coatings are the basis of the thermal protection systems of the re-entry space vehicles in missile and space technologies, as well as in a number of other devices used in extreme thermal conditions. Calculations of such coatings present significant difficulties because of the complex processes occurring in the ablating thermal protection coating. In order to create effective methods for calculation of the objects under consideration, an asymptotic mathematical model of heat and mass transfer processes in thermal protection coatings was proposed. A computational scheme was developed and tested on model problems for the analysis and design of ablating thermal protection coatings.

Key words: thermal protection coating, ablation, asymptotic approach, small parameter method, boundary value problem for an ordinary differential condition, Cauchy problem.

**Постановка проблеми**

Трудно представить современный мир без разнообразных систем теплоизоляции и терморегулирования – они согревают нас в холода и не дают перегреться в жару, благодаря им сохраняется тепло, что помогает бороться с энергетическим кризисом. Однако есть один класс систем теплозащиты, где от эффективности такой системы зависят не просто комфортные условия функционирования или эффективность оборудования, а выживаемость изделий в целом. Речь идет о неотъемлемой части современной ракетно-космической техники – спускаемых аппаратах космических кораблей, которые при движении через атмосферу с большими сверхзвуковыми скоростями подвергаются столь интенсивному аэродинамическому нагреву, что нуждаются в исключительно высокоэффективных системах тепловой защиты. Учитывая, что без подобной тепловой защиты спускаемый аппарат просто разрушился бы, можно сделать вывод об актуальности тематики настоящей статьи, посвященной расчету именно таких систем тепловой защиты. В отличие от традиционных теплозащитных покрытий, призванных, в первую очередь, уменьшать тепловой поток к защищаемому аппарату на протяжении длительного промежутка времени, их

аналогам, установленим на спускаемых аппаратах, надлежит в течение относительно короткого промежутка времени локализовать чрезвычайно большое количество теплоты, подвергаясь одним из самых высоких используемых в технике тепловых потоков. Вследствие указанного обстоятельства традиционные схемы тепловой защиты оказываются малоэффективными для спускаемых аппаратов. Среди альтернативных подходов наиболее эффективными и перспективными считаются аблирующие теплозащитные покрытия. Поскольку возможности исследования теплозащитных покрытий путем лабораторного или полетного экспериментов существенно ограничены из-за технических трудностей осуществления и неприемлемо высокой стоимости, особенно для полетного эксперимента, преимущественным способом изучения принципов функционирования аблирующих покрытий является математическое и численное моделирование. Однако, совершенно ясно, что физико-химические процессы, происходящие при высокотемпературной абляции, столь сложны и многоплановы, что не приходится надеяться на удачное математическое и численное моделирование рассматриваемого явления при помощи одних лишь традиционных методов вычислительного теплообмена. На протяжении всей истории развития в ракетно-космической технике действует жесткое требование минимального веса всех конструкций и систем летательного аппарата, а это означает, что теплозащитное покрытие должно быть максимально тонким. Последнее обстоятельство порождает многомасштабность, которая проявляется в значительном различии (на несколько порядков) характерных размеров теплозащитного покрытия в перпендикулярном и продольном направлениях. В результате, тепловые потоки в перпендикулярном и продольном относительно слоя направлениях могут существенно различаться (на несколько порядков), что весьма непохоже на традиционные задачи теории теплопроводности. Все специфические вычислительные проблемы, связанные с многомасштабными задачами, в полной мере имеют место и в рассматриваемом случае. Как правило, для преодоления подобных трудностей расчета используются асимптотические подходы, что и будет сделано в настоящей работе. Указанные выше соображения наглядно демонстрируют не только актуальность выбранного направления научных исследований, о чем уже говорилось выше, но и безусловную актуальность развиваемого здесь подхода, основанного на асимптотическом анализе неасимптотически тонких теплозащитных покрытий.

Следует отметить, что асимптотический подход, в том числе в задачах теории теплопроводности и теории тепломассообмена, весьма популярен на протяжении уже достаточно долгого времени. Особенно велика была его популярность в пятидесятые – шестидесятые годы минувшего века. Но, уже начиная с семидесятых, асимптотические методы, как и все аналитические подходы, постепенно вытеснялись численными алгоритмами, которые были универсальнее и производительнее. Современный взгляд на асимптотические алгоритмы существенно отличен: если в середине прошлого века асимптотический подход считался мощным приближенным методом, то в настоящее время он чаще трактуется как специфический прием, упрощающий дальнейшую численную реализацию. В целом, авторы настоящей статьи придерживаются второй точки зрения.

#### **Анализ последних исследований и публикаций**

Задача об аблирующем теплозащитном покрытии, равно как и другие задачи о теплозащитных покрытиях спускаемых аппаратов, отнюдь не нова – она возникла на заре космонавтики, то есть, в пятидесятые – шестидесятые годы прошлого века. Учитывая высокую актуальность рассматриваемых систем тепловой защиты для самых разнообразных областей техники и технологий и, в первую очередь, ракетно-космической техники, не приходится удивляться тому, что за прошедший весьма длительный период времени накоплена значительная литература, посвященная данной проблематике. К счастью, наличие трех глубоких и обширных монографий Ю.В. Полежаева [1 – 3], содержащих достаточно полные обзоры по упомянутой проблематике, избавляет от необходимости приводить здесь полный обзор соответствующих работ и сравнительный анализ различных типов покрытий. Отметим только популярность аблирующих теплозащитных покрытий в практике проектирования спускаемых аппаратов, обширный накопленный экспериментальный (в том числе и результаты полетных экспериментов) и наблюдательный материал, но в то же время некоторую скудость расчетных средств теоретического анализа.

Хотя мысль о совместном применении асимптотических и численных методов высказывалась неоднократно на протяжении длительного промежутка времени, в том числе и в специализированных монографиях [4, 5], касающихся решения краевых задач теории тепломассообмена при помощи асимптотических методов, реальное применение в расчетных методиках эта идея нашла относительно недавно [6], а полностью такой подход в применении к тонкому покрытию описан лишь в работе [7]. Таким образом, не приходится говорить о сколько-нибудь широком использовании подобных расчетных схем в современной вычислительной практике, что ставит дополнительную задачу разработки соответствующих алгоритмов.

В качестве численного метода, дополняющего аналитический подход, в настоящей работе использовался метод граничных элементов. Это хорошо известный метод [8, 9], его достоинства и недостатки подробно проанализированы в работах [10, 11]. Среди достоинств данного численного подхода высокая точность, эффективность при решении задач в областях сложной геометрической формы,

эффективность при решении линейных краевых задач эллиптического типа, а к его недостаткам относятся существенные трудности, возникающие при решении нелинейных и неоднородных задач.

**Формулирование целей исследования**

В силу изложенных выше фактов и описанных обстоятельств, становится очевидной основная цель настоящей работы – построение адекватной и, по возможности, эффективной расчетной схемы для теоретического и прикладного количественного анализа процессов функционирования аблирующих теплозащитных покрытий. Разрабатываемая расчетная схема должна соответствовать ряду требований, проистекающих, в первую очередь, из технических и технологических особенностей исследуемого класса теплофизических систем, а именно: корректный учет тонкости теплозащитного покрытия, то есть, преодоление проблем, связанных с многомасштабностью задачи, надлежащим образом; возможность включения в рассмотрение широкого спектра физических, механических и физико-химических явлений без кардинального изменения структуры применяемых математических моделей и расчетной схемы в целом; минимальное необходимое время расчета и возможность проведения грубых оценочных расчетов с невысокой точностью, но качественно адекватными результатами для сокращения времени проектирования, поскольку расчет систем тепловой защиты спускаемых аппаратов входит составной частью в разработку конструктивно-компоновочных схем изделий ракетно-космической техники, которая требует многократных, многовариантных расчетов системы в целом; потенциальная возможность оптимизации теплозащитных покрытий с учетом параметров внешнего теплового воздействия для достижения минимальной массы изделия и потенциальная возможность решения обратных задач для улучшения и углубления понимания процессов, протекающих в аблирующем покрытии, что может послужить его дальнейшему совершенствованию.

Достичь поставленных в настоящей работе целей ее авторы предполагают при помощи асимптотических подходов, для чего целесообразно решить следующие задачи:

- сформулировать модельную задачу о теплопроводности в неасимптотически тонком слое, состоящем из материала, теплофизические свойства которого существенно зависят от температуры, покрывающем массивное тело, вообще говоря, произвольной формы, подверженное высокоинтенсивному внешнему термическому воздействию, которое, в свою очередь, вызывает фазовый переход на поверхности слоя;
- применить к сформулированной модельной задаче асимптотический подход и проанализировать свойства полученной асимптотической математической модели;
- разработать методы решения полученных асимптотических краевых задач;
- применить метод граничных элементов для расчета (при необходимости) поля температур в защищаемом теле.

Следует отметить, что авторы намеренно не включили в число целей настоящей статьи и не внесли в список поставленных задач расчеты конкретных теплозащитных покрытий, дабы не отягощать предлагаемую работу техническими подробностями и чрезвычайно сложными вопросами природы, структуры и количественных характеристик внешнего термического воздействия.

**Основной материал исследования**

Поскольку применение к исходной постановке асимптотического подхода является чистой формулировкой задачи, но, в то же время, является и неотъемлемой частью процедуры решения, целесообразно изложить постановку задачи и метод решения совместно, не разрывая их в различные структурные части статьи.

Чтобы избежать путаницы с обозначениями будем здесь придерживаться системы обозначений и терминологии, принятых в статье [7], с учетом необходимых дополнений, связанных со спецификой рассматриваемой задачи. Итак, поле температур в неасимптотически тонком слое описывается уравнением теплопроводности

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \lambda(T) \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \lambda(T) \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \lambda(T) \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial \xi_3} \right) \right], \tag{1}$$

где  $T$  – температура в данной точке слоя;  $c(T)$  – теплоемкость материала слоя;  $\rho(T)$  – плотность материала слоя;  $\lambda(T)$  – теплопроводность материала слоя;  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  – координаты, отсчитываемые в некоторой криволинейной ортогональной системе (как правило, и для дальнейшего анализа это будет наиболее удобным вариантом, локальную систему координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  связывают с поверхностью исследуемого тела, в данном случае целесообразно, чтобы поверхность защищаемого массивного тела, она же внутренняя поверхность теплозащитного слоя, соответствовала уравнению  $\xi_1 = 0$ , а ось  $O\xi_1$  была направлена по нормали к этой поверхности, направления  $O\xi_2$  и  $O\xi_3$  касательны к поверхности  $\xi_1 = 0$  и

взаимно ортогональны);  $H_1, H_2, H_3$  – соответствующие коэффициенты Ляме [13];  $\tau$  – время. Уравнение (1) должно быть дополнено начальными и граничными условиями. В начальный момент времени

$$T(\tau = 0) = T_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (2)$$

на внешней границе:

$$T|_{\Gamma_{out}} = T_{p.t.}, \quad (3)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{out}} = q_{out}, \quad (4)$$

где  $T_{p.t.}$  – температура фазового перехода,  $q_{out}$  – некоторый внешний тепловой поток на внешней границе  $\Gamma_{out}$ . Пусть в системе координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  поверхность  $\Gamma_{out}$  задана уравнением

$$\xi_1 = \delta(\tau, \xi_2, \xi_3), \quad (5)$$

где  $\delta$  – текущая толщина теплозащитного слоя. Пусть

$$\delta^* = \max \delta(\tau = 0), \quad (6)$$

тогда величину  $\delta^*$  можно считать поперечным линейным масштабом теплозащитного слоя. Линейный масштаб теплозащитного слоя в тангенциальном направлении совпадает с характерным линейным размером защищаемого тела, обозначим его через  $L$ . Очевидно, что

$$\delta^* \ll L, \quad (7)$$

в силу требования минимального веса. Рассмотрим граничные условия на внутренней поверхности теплозащитного слоя. Такие граничные условия должны быть поставлены в зависимости от физической природы защищаемого тела. Поскольку геометрия и свойства защищаемых объектов могут варьироваться в весьма широких пределах, произвести исчерпывающую систематизацию этих свойств представляется весьма затруднительным, поэтому ограничимся анализом двух предельных случаев.

1. *Интегральная теплоемкость.* Предполагается, что внутри спускаемого аппарата находится жидкая или газообразная среда, подверженная интенсивной циркуляции, благодаря чему с достаточной степенью точности можно считать, что температура внутри защищаемого пространства везде одинакова и равна  $T_g(\tau)$ . Тогда изменение количества теплоты внутри защищаемого объема

$$\frac{dQ}{d\tau} = \int_{\Gamma_{in}} q_{in} dS. \quad (8)$$

Учитывая, что

$$dQ = c_g dT_g, \quad (9)$$

из (8) получаем:

$$\frac{dT_g}{d\tau} = \frac{1}{c_g} \int_{\Gamma_{in}} q_{in} dS, \quad (10)$$

$$T_g(\tau = 0) = T_{g0}, \quad (11)$$

где  $c_g$  – теплоемкость защищаемого объема, которую можно принять постоянной.

Задача Коши (10), (11) легко решается аналитически или численно, но, учитывая, что решение этой задачи войдет неотъемлемой составной частью в более общий процесс решения, то предпочтительнее использовать численную процедуру. Для температуры теплозащитного слоя на его внутренней поверхности можно поставить граничное условие

$$T|_{\Gamma_{in}} = T_g(\tau), \quad (12)$$

а  $q_{in}$  искать из решения краевой задачи для уравнения (1).

2. *Твердое тело.* Случай, когда аблирующее покрытие защищает теплопроводное твердое тело, является традиционным в теории теплопроводности. Если теплозащита работает надлежащим образом, то перепады температур таковы, что поле температур внутри защищаемого тела можно описать линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T_g}{\partial \tau} = a_g \operatorname{div}(\operatorname{grad} T_g), \quad (13)$$

при этом уравнение (13) вполне можно записывать в декартовой ортогональной системе координат, а не в системе  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

В данном случае на внутренней поверхности теплозащитного слоя следует поставить граничные условия четвертого рода (условия идеального теплового контакта):

$$T|_{\Gamma_{in}} = T_{\epsilon}|_{\Gamma_{in}}, \quad (14)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{in}} = \lambda_{\epsilon} \frac{\partial T_{\epsilon}}{\partial n}|_{\Gamma_{in}}, \quad (15)$$

где  $\lambda_{\epsilon}$  – теплопроводность защищаемого твердого тела.

Постановку задачи следует завершить условием Стефана, которое является естественным следствием уравнения теплового баланса на границе  $\Gamma_{out}$ :

$$q_{ext} - q_{out} = q_{p.t.}, \quad (16)$$

где  $q_{ext}$  – тепловое воздействие окружающей среды (с учетом, разумеется, теплового излучения в окружающую среду) на поверхность теплозащитного покрытия; величина  $q_{out}$ , определенная формулой (4), – тепловой поток, уходящий внутрь слоя;  $q_{p.t.}$  – тепловой эффект фазового перехода, определенный как

$$q_{p.t.} = -\rho\chi \frac{\partial \delta}{\partial \tau}; \quad (17)$$

$\chi$  – скрытая теплота фазового перехода. Тогда условие Стефана:

$$q_{ext} - \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{out}} = -\rho\chi \frac{\partial \delta}{\partial \tau}. \quad (18)$$

Дальнейшее изложение способа решения описанной задачи предварим предположением о достаточной гладкости границ  $\Gamma_{out}$ ,  $\Gamma_{in}$  и об ограниченности коэффициентов Ляме  $H_1, H_2, H_3$ .

Обезразмерим уравнение (1) и соответствующие условия однозначности. При этом характерным размером в направлении оси  $\xi_1$  естественно выбрать величину  $\delta^*$  (6), а вдоль осей  $O\xi_2, O\xi_3$  характерный размер тела  $L$ . Обезразмеривание температуры проведем традиционным способом

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_{p.t.} - T_0}, \quad (19)$$

безразмерные координаты:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{\delta^*}; \quad \bar{\xi}_2 = \frac{\xi_2}{L}; \quad \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_3}{L}. \quad (20)$$

Теплопроводность  $\lambda$  обезразмерим некоторой величиной  $\lambda_0$ , имеющей соответствующую размерность, теплоемкость  $c$  величиной  $c_0$ , а плотность  $\rho$  величиной  $\rho_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{c}\bar{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{1}{\bar{H}_1\bar{H}_2\bar{H}_3} \left[ \frac{L^2}{\delta^{*2}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left( \bar{\lambda} \frac{\bar{H}_2\bar{H}_3}{\bar{H}_1} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\xi}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2} \left( \bar{\lambda} \frac{\bar{H}_1\bar{H}_3}{\bar{H}_2} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\xi}_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_3} \left( \bar{\lambda} \frac{\bar{H}_1\bar{H}_2}{\bar{H}_3} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\xi}_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где, как обычно, число Фурье

$$Fo = \frac{a_0 \tau}{L^2}; \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0 \rho_0}. \quad (22)$$

Вообще говоря, коэффициенты Ляме могут быть метрическими величинами и при обезразмеривании существенно изменяться, но здесь и далее полагаем, что обезразмеренные коэффициенты Ляме  $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$  просто останутся конечными, и для каждой конкретной системы координат вопрос об обезразмеривании коэффициентов Ляме следует рассматривать отдельно.

Отметим, что в уравнении (21) можно выделить малый параметр (в силу (7))

$$\varepsilon = \frac{\delta^{*2}}{L^2}, \quad (23)$$

откуда

$$\begin{aligned} \varepsilon \bar{c} \bar{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = & \frac{1}{\bar{H}_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \bar{\lambda}(\theta) \frac{\bar{H}_2 \bar{H}_3}{\bar{H}_1} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \right) + \\ & + \frac{\varepsilon}{\bar{H}_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \bar{\lambda}(\theta) \frac{\bar{H}_1 \bar{H}_3}{\bar{H}_2} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \bar{\lambda}(\theta) \frac{\bar{H}_1 \bar{H}_2}{\bar{H}_3} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_3} \right) \right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Начальные и граничные условия обезразмериваются следующим образом:

$$\theta(Fo = 0) = 0, \tag{25}$$

$$\theta|_{\Gamma_{in}} = \theta_{in}, \tag{26}$$

$$\theta|_{\Gamma_{out}} = \theta_{out} \tag{27}$$

и так далее.

Поскольку уравнение (24) содержит разные по порядку величины (по степеням  $\varepsilon$ ), то естественно отыскивать решение задачи в виде

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots + \varepsilon^n \theta_n + \dots \tag{28}$$

Подставляя разложение (28) в уравнение (24) и приравнявая 0 сумму членов при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \bar{\lambda}(\theta_0) \frac{\bar{H}_2 \bar{H}_3}{\bar{H}_1} \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_1} \right) = 0, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{H}_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \bar{\lambda}(\theta_0) \frac{\bar{H}_2 \bar{H}_3}{\bar{H}_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi_1} \right) = & \bar{c}(\theta_0) \bar{\rho}(\theta_0) \frac{\partial \theta_0}{\partial Fo} - \\ - \frac{1}{\bar{H}_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \bar{\lambda}(\theta_0) \frac{\bar{H}_1 \bar{H}_3}{\bar{H}_2} \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \bar{\lambda}(\theta_0) \frac{\bar{H}_1 \bar{H}_2}{\bar{H}_3} \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_3} \right) \right], \end{aligned} \tag{30}$$

Вообще говоря, начиная с первого приближения, в правой части могут появиться члены, порожденные зависимостями  $c, \rho, \lambda$  от  $\theta$ , но в практически важных задачах они не играют существенной роли. Очевидно, что решение уравнения (29) не зависит от начальных условий. Физически это означает, что тонкий слой быстро прогревается до равновесной температуры. Подстановка разложения (28) в граничные условия выполняется элементарно, например

$$\theta_0|_{\Gamma_{in}} = \theta_{in}, \tag{31}$$

$$\theta_1|_{\Gamma_{in}} = 0, \tag{32}$$

.....

$$\theta_0|_{\Gamma_{out}} = \theta_{out}, \tag{33}$$

$$\theta_1|_{\Gamma_{out}} = 0, \tag{34}$$

.....

и так далее.

Заметим, что уравнение (29) элементарным интегрированием сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, и, будучи дополнено условиями (31), (33), образует краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, которое может быть проинтегрировано в квадратурах. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающие в последующих приближениях, в принципе, тоже могут быть проинтегрированы в квадратурах, однако вычисление производных по времени и по тангенциальным координатам, входящих в правые части последующих приближений, от сечения к сечению чрезмерно громоздко. В то же время применение численного подхода устраняет многие вычислительные трудности.

Различным членам разложения (28) можно поставить в соответствие различные положения границы  $\Gamma_{out}$ , если ее обезразмеренную координату  $\bar{\delta} = \delta / \delta^*$  представить в виде

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_0 + \varepsilon \bar{\delta}_1 + \varepsilon^2 \bar{\delta}_2 + \dots + \varepsilon^n \bar{\delta}_n + \dots \tag{35}$$

Подставив разложение (35) в обезразмеренное условие Стефана (18)



$$\bar{q}_{ext} - f_{\lambda} \bar{\lambda}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} = - \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \tau_{St}}, \tag{36}$$

где  $\bar{q}_{ext}$  – тепловой поток, обезразмеренный характерным тепловым потоком  $q^*$ ;

$$f_{\lambda} = \frac{\lambda_0(T_{p.t.} - T_0)}{q^* \delta^*};$$

$$\tau_{St} = \frac{\tau q^*}{\rho \chi \delta^*},$$

получим:

$$\bar{q}_{ext} - f_{\lambda} \bar{\lambda}(\theta_0) \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{n}} = - \frac{\partial \bar{\delta}_0}{\partial \tau_{St}}, \tag{37}$$

$$f_{\lambda} \bar{\lambda}(\theta_0) \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial \bar{\delta}_1}{\partial \tau_{St}}, \tag{38}$$

.....

Дополнив уравнения (37), (38), ... начальными условиями, получим задачу Коши, описывающую процесс абляции.

Расчет системы тепловой защиты в зависимости от вида защищаемого тела, указанного выше, сводится к пошаговому процессу, в котором внутренняя температура либо определяется из решения уравнения (8), либо требует включения в расчет краевой задачи для уравнения (13), которая также может быть решена пошаговым по времени методом. При обезразмеривании в задаче возникают разные масштабы времени  $\tau$ ,  $Fo$ ,  $\tau_{St}$ , поэтому вопрос о выборе шага по времени представляется достаточно нетривиальным и должен решаться с учетом соотношений указанных масштабов.

Понятно, что при численной реализации границы  $\Gamma_{out}$  и, соответственно,  $\Gamma_{in}$  следует разбить на части, подобные граничным элементам, и на каждой из этих частей проводить процедуру асимптотического решения. Этим и обусловлено стремление решать задачу теплопроводности для защищаемого тела методом граничных элементов [8, 9]. Кроме того, метод граничных элементов обеспечивает высокую точность численного решения поставленной задачи и удобство при работе с областями сложной геометрической формы. Для рассматриваемого класса расчетов можно применить традиционный вариант метода граничных элементов. При использовании аналитических решений асимптотических краевых задач учет наличия теплозащитного слоя в первом приближении сводится к модификации граничных условий в методе граничных элементов.

### Выводы

Предложенная асимптотическая математическая модель, безусловно, является более полной и точной, чем традиционно применяемые схемы инженерного расчета аблирующих теплозащитных покрытий. Возможность использовать предложенный асимптотический подход вместе с методом граничных элементов позволяет надеяться на создание общего вычислительного алгоритма более высокой точности и эффективности по сравнению с другими численными методами, например, методом конечных разностей или методом конечных элементов. Разумеется, используемые на практике покрытия имеют более сложную структуру, нежели предполагалась в вышеописанной модели, например, большая часть современных теплозащитных покрытий выполняются из композитных материалов, однако, если рассматривать предложенный здесь подход в качестве части общей расчетной схемы по определению тепловых режимов головных частей ракет и спускаемых аппаратов, то его эффективность вполне оправдывает подобные упрощения.

Перспективы дальнейших исследований в данном случае совершенно очевидны и состоят в следующем: усложнение модели материала теплозащитного покрытия, поскольку предложенный асимптотический подход, вообще говоря, распространяется и на более сложные модели теплопроводности в жертвенном слое; разработка прикладного программного обеспечения для использования в практических расчетах; с математической точки зрения, было бы желательно исследовать сходимость получаемых в процессе решения асимптотических последовательностей краевых задач, особенно вблизи угловых точек, если таковые имеются.

Полученные результаты могут быть использованы не только в ракетно-космической технике, но и в металлургии, энергетике и других отраслях, где применяются высокотемпературные процессы.

## Список использованной литературы

1. Полежаев Ю.В. Тепловая защита / Ю.В. Полежаев, Ф.Б. Юревич. – М.: «Энергия», 1976. – 392 с.
2. Панкратов Б.М. Взаимодействие материалов с газовыми потоками / Б.М. Панкратов, Ю.В. Полежаев, А.К. Рудько. – М.: Машиностроение, 1975. – 224 с.
3. Полежаев Ю.В. Тепловое разрушение материалов / Ю.В. Полежаев, Г.А. Фролов. – К.: Изд-во ИПМ НАНУ, 2005. – 288 с.
4. Зино И.Е. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости / И.Е. Зино, Э.А. Тропп. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
5. Федоткин И.М. Асимптотические методы в задачах тепломассопереноса: / И.М. Федоткин, А.М. Айзен. – К.: Наукова думка, 1975. – 252 с.
6. Евдокимов Д.В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое / Д.В. Евдокимов, Д.Н. Ивасишина, А.А. Кочубей, Н.В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – С. 141-156.
7. Бразалук Ю.В. Об одной задаче теории теплоизоляции / Ю.В. Бразалук, А.И. Губин, Д.В. Евдокимов, О.А. Коваленко // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С. 45-56.
8. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
9. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
10. Поляков Н.В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. / Часть 1. Линейные задачи / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка. – 2006. – №2/1. – С. 7-25.
11. Поляков Н.В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. / Часть 2. Нелинейные задачи / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка. – 2006. – №2/1. – С. 25-42.
12. Беляев Н.М. Методы теории теплопроводности / Н.М. Беляев, А.А. Рядно. – М.: “Высшая школа”, 1982. – т. 1. – 327 с., т. 2. – 304 с.
13. Борисенко А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов. – Х.: Вища школа, 1986. – 216 с.

УДК 532.51:536.24

А.И. БРУНЕТКИН

Одесский национальный политехнический университет

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Вместо упрощения дифференциальной, и соответственно сложной, математической модели до уровня возможности ее решения, рассматривается описание исследуемого процесса с помощью общих интегральных (наиболее простых) балансовых соотношений законов сохранения с последующей их детализацией (усложнением) до уровня необходимой точности получаемого решения. Возможности такого подхода проиллюстрированы на примерах: решения задач определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью; решения задачи прогрева тел различной формы (бесконечная пластина, бесконечный цилиндр, шар).*

*Ключевые слова: интегральный подход, динамика жидкости, нестационарные задачи нагрева тел, критерии подобия, числа подобия.*

О.І. БРУНЕТКІН

Одеський національний політехнічний університет

## ИНТЕГРАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

*Замість спрощення диференціальної, і відповідно складної, математичної моделі до рівня можливості її рішення, розглядається опис досліджуваного процесу за допомогою загальних інтегральних (найбільш простих) балансових співвідношень законів збереження з подальшою їх деталізацією (ускладненням) до рівня необхідної точності одержуваного рішення. Можливості такого підходу проілюстровані на прикладах: рішення задач визначення власної частоти коливань рідини з вільною поверхнею; рішення задачі прогріву тіл різної форми (нескінченна пластина, нескінченний циліндр, куля).*

*Ключові слова: інтегральний підхід, динаміка рідини, нестационарні задачі нагріву тіл, критерії подібності, числа подоби.*

A.I. BRUNETKIN

Odessa National Polytechnic University

## INTEGRATED SOLUTIONS FOR DYNAMICS OF THERMOPHYSICAL PROCESSES

*Instead of simplifying the differential, and correspondingly complex, mathematical model to the level of the possibility of solving it, we consider the description of the process under investigation with the help of general integral (simplest) balance relationships of conservation laws with their subsequent specification (complication) to the level of necessary accuracy of the solution obtained. The possibilities of this approach are illustrated by examples: solving problems of determining the natural oscillation frequency of a fluid with a free surface; Solution of the problem of heating bodies of various shapes (an infinite plate, an infinite cylinder, a ball).*

*Keywords: Integrated approach - fluid dynamics - dependent problems of heating bodies - similarity criteria - the number of similarities.*

### Постановка проблеми

Изменение исследуемых параметров во времени и в пространстве рассматривается исследователями как необходимость записи исходной математической модели в дифференциальной форме. Назовем такой подход «дифференциальным». В дальнейшем усилия сосредотачиваются на упрощении модели с сохранением определенной степени адекватности описания исследуемого процесса. Проводятся минимально возможные упрощения, позволяющие получить решения тем или иным способом. Развитость математического аппарата и компьютерной техники позволяют получать решения, во всяком случае численные, сложных моделей. Это ведет к учету тонких явлений. В ряде случаев это необходимо, более того, является целью исследования. Но зачастую их учет не оказывает существенного влияния на величину параметров основного исследуемого процесса, в то же время являясь основным источником сложностей решения и затрат ресурсов. Более того, учет малозначимых факторов маскирует проявление основных явлений и затрудняет возможность прогноза их развития в широком диапазоне изменения исходных данных.

Во многих случаях практические задачи требуют упрощения решения для обеспечения управления технологическими процессами в режиме реального времени. Проблема состоит в малом спектре методов,

обеспечивающих баланс между простотой решения и адекватностью их результатов параметрам рассматриваемых процессов.

Примером могут служить задачи определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях различных форм или определение температуры внутри тел в процессе их прогрева (охлаждения).

#### Анализ основных исследований и публикаций

Начало решения задач определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью было положено еще в XIX веке и продолжалось на протяжении всего XX. Не потеряла практической значимости эта задача и в настоящее время. Колеблющаяся жидкость может оказывать влияние (чаще всего негативное) на цистерны железнодорожного и автомобильного транспорта (большинство ж/д аварий происходит с цистернами), танкеры, емкости хранения жидкого топлива на нефтебазах, бассейны выдержки ядерного топлива и др. В последних двух случаях колебание жидкости может происходить из-за сейсмического воздействия [1]. Решение чаще всего искали с помощью вариационных или экспериментальных [2] методов. Решения принципиально получены, но они либо относятся к частным случаям [2], либо дают сложный инструмент решения задачи, который нужно еще уметь использовать, а применение его, опять же, дает частный результат. Это не позволяет на основе полученных решений сделать обобщающие выводы для различных форм емкостей или различной степени их заполнения.

Аналогичная ситуация складывается и при решении задач определения температуры в заданных точках внутри тела в процессе его нагрева (охлаждения). Существуют аналитические решения задач определения температуры в характерных точках внутри простых тел (пластина, цилиндр, шар) [3-4] при их нагреве (охлаждении). Но они относятся к частным случаям симметричного температурного воздействия. «Частность» следует понимать в смысле невозможности применения используемого метода к решению чаще всего возникающих задач теплопередачи, или иными словами, несимметричного температурного воздействия на тела. Как и в случае с определением собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью имеются многочисленные численные решения [5-6], но они также не позволяют получить обобщающие решения.

#### Цель исследования

Проиллюстрировать возможности и результаты применения упрощенного «интегрального» подхода на примере решения задач:

- определения собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях различных форм;
- определения времени переходного процесса при нагреве тел (пластина, цилиндр, шар).

**Результаты исследования.** Во многих случаях существует альтернатива «дифференциальному» подходу. Назовем его «интегральным». В основе его лежит запись балансовых уравнений сохранения (количества движения, вещества, энергии) в самом общем, интегральном виде или, иными словами, в сосредоточенной постановке. В дальнейшем происходит усложнение (а не упрощение как в «дифференциальном» подходе) элементов математической модели. Детализация проводится до уровня минимально необходимой точности получаемого решения. Часто решения для таких моделей существенно проще, чем для «дифференциального» подхода и, кроме того, на всех этапах преобразования модели сохраняются интегральные балансы исследуемых величин. Их распределенность с точностью до небольшого числа коэффициентов может быть описана с помощью несложных априорных зависимостей. Характер зависимостей может быть определен из простых модельных экспериментов или из полученных ранее частных (зачастую сложных) решений. Коэффициенты определяются из малого числа такого же рода экспериментов. Такой подход приводит к появлению некоторых приближений и, соответственно, погрешностей. Но следует учитывать, что при решении прикладных задач замеры исследуемых величин происходят также с погрешностью. Поэтому некоторая неточность вычислений допустима, хотя ее величина должна быть оценена. В результате можно получить простые зависимости для расчета искомых величин, поддающиеся широкому обобщению.

Для определения параметров, связанных с колебанием жидкости необходимо выявить характер распределения скоростей ее движения по мере увеличения глубины. Это можно сделать с помощью визуализации движения жидкости, пример которой приведен на рис. 1. Исследовалось движение жидкости в прозрачной плоской (прямоугольной) емкости. Радиус отмеченной полуокружности соответствует половине ширины емкости. Из приведенных фотографий видно, что движение жидкости практически не распространяется на глубины большие, чем половина ширины емкости. Назовем эту глубину эффективной. Пренебрегая диссипацией энергии при колебании жидкости, можно получить верхнюю оценку частоты колебаний. Для этого закон сохранения энергии для колебаний можно запишем в виде:

$$\Delta K = \Delta U, \quad (1)$$

где  $\Delta K$  – изменение кинетической энергии;  $\Delta U$  – изменение потенциальной энергии.

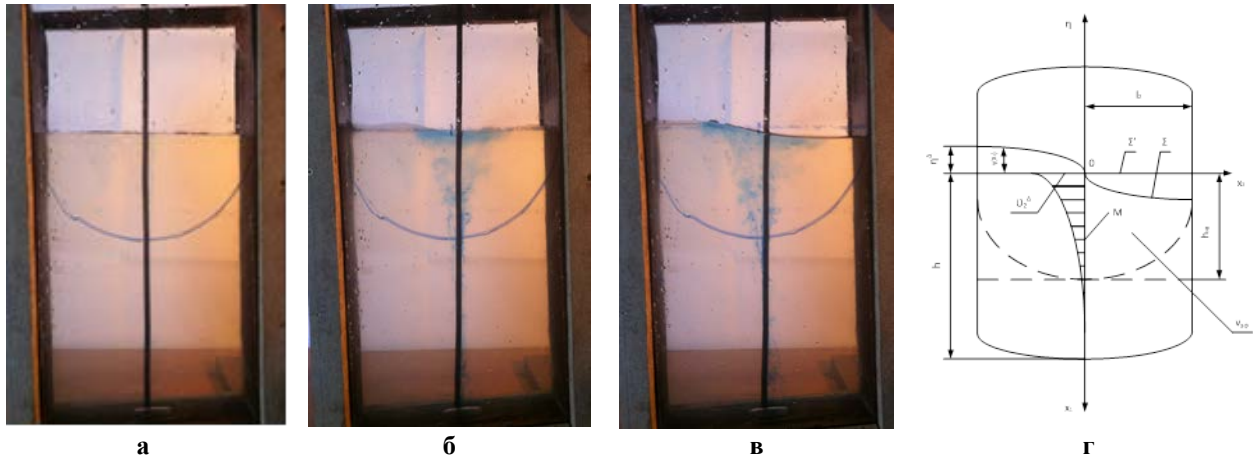


Рис. 1. Визуалізація руху рідини (а-в) і прийнята розрахункова схема (г).

Полагаая, что минимум потенциальной энергии при  $\eta=0$ , а минимум кинетической энергии при  $v=0$ , получим:

$$\Delta K = \rho \cdot \int_V \frac{v^2}{2} dV; \quad \Delta U = \rho n g \iint_{S_\Sigma} \frac{\eta^2}{2} dx_2 dx_3 \quad (2)$$

Выполнив соответствующие преобразования в конечном итоге было получено решение в виде:

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{R}} \cdot \sqrt{\bar{h}_{эф}} \cdot k_\omega, \quad \bar{h}_{эф} = \begin{cases} 1 - e^{-k_\phi \bar{h}}, & \text{при } \bar{h} < 1; \\ 1, & \text{при } \bar{h} > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь:  $\omega$  - собственная (круговая) частота колебаний свободной поверхности жидкости;  $n$  - перегрузка (при нормальных условиях на поверхности земли  $n=1$ );  $g$  - ускорение свободного падения;  $\bar{h}_{эф}$  - относительная эффективная глубина заполнения емкости (глубина, на которой сказывается колебание свободной поверхности);  $\bar{h} = h/R$  - относительная глубина заполнения емкости;  $h$  - глубина заполнения емкости;  $R$  - характерный размер емкости (для цилиндрической – радиус; для прямоугольной – половина ширины). Такой подход может быть применен для емкостей различных форм. Коэффициенты  $k_\omega$  и  $k_\phi$  – коэффициент формы могут быть определены из немногочисленных экспериментов путем обработки их результатов с помощью выражений (3). Результаты для емкостей различных форм и направлений возмущающих воздействий приведены в табл.1.

Таблица 1

Коэффициенты для расчета собственных частот колебаний

№	Форма емкости, положение и направление воздействий	$k_\phi$	$k_\omega$	Закон распределения нормированного отклонения расчетных результатов от экспериментальных
1	Прямоугольный прямой параллелепипед, боковые грани вертикальны, вдоль боковой грани, $\bar{h} \geq 0.3$	3,68	1,27	(0,011; 0,00042)
2	Круговой цилиндр, ось вертикальна, поперек оси, $\bar{h} \geq 0.4$	4,3	1,37	(0; 0,00064)
3	Круговой цилиндр, ось горизонтальна, вдоль оси, $0.2 \leq \bar{h} \leq 3$	3,51	1,61	(0; 0,0028)
4	Круговой цилиндр, ось горизонтальна, поперек оси, $0.2 \leq \bar{h} \leq 1,8$	2,44	1,3	(0; 0,00037)
5	Конус усеченный, ось вертикальна, угол раствора $20^\circ$ , поперек оси	5	1,22	(0; 0,000676)
6	Конус усеченный, ось вертикальна, угол раствора $50^\circ$ , поперек оси	7,58	0,915	(0; 0,000525)
7	Коаксиальные круговые цилиндры, ось вертикальна, поперек оси, $\bar{h} \geq 0.4$	4,31	1,4	(0,02; 0,001)

Для расчета собственной частоты колебаний жидкости между коаксиальными цилиндрами (7 позиция в табл. 1) в выражении (3) вместо  $R$  необходимо подставить  $R+r$ . Здесь  $r$  – радиус центрального тела (внутреннего цилиндра);  $R$  – радиус наружного цилиндра.

Сложность решения задач нагрева тел определяется распределенностью процесса и, как следствие, использованием для его описания математических моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных. Одним из путей упрощения решения задачи может быть замена во времени и пространстве нагреваемого тела переменной температуры ее специальным образом определенной среднеинтегральной величиной, изменяющейся только во времени. Это даст возможность перейти от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Из результатов аналитических, численных решений, экспериментальных исследований известно, что характер изменения температуры при нагреве (охлаждении) тел носит экспоненциальный характер. Положим, что температура, например, для бесконечной пластины в центральной точке тела может быть определена из соотношения

$$\vartheta_x = \vartheta_y + (\vartheta_n - \vartheta_y) \cdot \exp(-l/x). \tag{4}$$

Здесь  $\vartheta_n, \vartheta_y, \vartheta_x$  – температуры на поверхности, в центре и в текущей точке тела соответственно. Точнее речь идет об отклонениях от начальной температуры окружающей среды  $t_0$  и определяются из соотношений:

$$\vartheta_n = t_n - t_0; \quad \vartheta_y = t_y - t_0; \quad \vartheta_{срд} = t_{срд} - t_0 = const,$$

где  $t_{срд}$  – температура окружающей среды в процессе нагрева тела.

Выполнив осреднение в соответствии с

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{V_T} \int_0^l \vartheta_x S_x dx, \tag{5}$$

подставим его в модель, описывающую нагрев тела в сосредоточенных параметрах:

$$c \cdot \rho \cdot V_T \frac{d\bar{\vartheta}}{d\tau} = S_{бок} \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_n - \bar{\vartheta}) \tag{6}$$

$$\frac{\lambda}{\delta} S_{бок} (\vartheta_n - \bar{\vartheta}) = \alpha \cdot S_{бок} (\vartheta_{срд} - \vartheta_n). \tag{7}$$

Здесь  $c, \rho, \lambda$  – теплоемкость, плотность, теплопроводность нагреваемого тела соответственно;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от окружающей среды к нагреваемому телу;  $V_T$  – объем тела;  $S_{бок}$  – площадь боковой поверхности тела. Уравнение (6) выражает закон сохранения энергии. В правой части определяется энергия, передаваемая от границы (поверхности тела) внутрь за счет разности (напора) потенциала термодинамической силы (разности температур). В левой – энергия, накапливаемая за счет емкости (теплоемкости) тела. Уравнением (7) описано граничное условие III рода и так же выражает баланс энергий. В правой части описана энергия, передаваемая от окружающей среды к телу. В левой, как и в предыдущем уравнении, энергия, отводимая от поверхности внутрь тела.

Разрешив с учетом (4) уравнения (6-7) можно получить выражение для определения температуры в центре пластины

$$\bar{\vartheta}_y = 1 - \exp(-\hat{Ho}); \quad \hat{Ho} = Fo \frac{S_{бок} \cdot \delta}{V_T} \cdot \frac{Bi}{1 + k \cdot Bi}, \tag{8}$$

где  $Fo, Bi$  – число Фурье, критерий Био, соответственно;  $k$  – коэффициент, определяемый из известных аналитических расчетов или экспериментальных исследований. Величина  $\hat{Ho}$  – модифицированное число гомохронности – является единственным параметром, определяющим температуру в центре тела (в рассматриваемом случае в центре пластины).

Выражения, аналогичные (8), можно получить и для других тел, например для бесконечного цилиндра и шара. Различия проявятся только в величине комплекса  $(S_{бок} \cdot \delta)/V_T$  и коэффициента  $k$ . Соответствующие величины приведены в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты формы		
	$(S_{бок} \cdot \delta)/V_T$	$k$
Пластина	1	0,42
Цилиндр	2	0,39
Шар	3	0,36

Сравнение результатов расчетов на основании выражений (8) и точных аналитических расчетов [3] показывает хорошее их совпадение. Результаты сравнения приведены в табл. 3. Производилось сравнение чисел Фурье из [3] и полученных из (8). Определялась относительная погрешность  $\varepsilon$ , вычисляемая в %.

Таблица 3

Сравнение точного и приближенного значений времени окончания процесса нагрева

Bi	Пластина $k = 0.42$			Цилиндр $k = 0.39$			Шар $k = 0.36$		
	$Fo_2$ , [3]	$Fo_1$ , расчет (8)	$\varepsilon$ , %	$ Fo_2$ , [3]	$Fo_1$ , расчет (8)	$\varepsilon$ , %	$ Fo_2$ , [3]	$Fo_1$ , расчет (8)	$\varepsilon$ , %
<b>0,005</b>	600,34	601,26	<b>0,15</b>	300,06	300,6	<b>0,18</b>	200,1	200,4	<b>0,15</b>
<b>0,01</b>	300,9	301,3	<b>0,1</b>	150,4	150,6	<b>0,15</b>	100,20	100,36	<b>0,17</b>
<b>0,1</b>	31,12	31,26	<b>0,5</b>	15,48	15,59	<b>0,7</b>	10,29	10,36	<b>0,7</b>
<b>1,0</b>	4,200	4,26	<b>1,4</b>	2,02	2,085	<b>3,3</b>	1,31	1,36	<b>3,7</b>
<b>10</b>	1,58	1,56	<b>1,3</b>	0,725	0,735	<b>1,3</b>	0,45	0,46	<b>1,4</b>
<b>100</b>	1,34	1,29	<b>3,6</b>	0,612	0,6	<b>1,9</b>	0,38	0,37	<b>3,0</b>
<b>1000</b>	1,32	1,26	<b>3,9</b>	0,601	0,587	<b>2,36</b>	0,37	0,36	<b>3,4</b>

### Выводы

Единое решение в виде (3) для задач определения собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью или (8) для задач прогрева тел удалось получить в следствие перехода к модели в сосредоточенной постановке и использования априорного описания профилей исследуемых параметров:

— при решении задачи определения собственной частоты колебаний жидкости, полученной из визуализации исследуемого процесса;

— при решении задачи прогрева тел из ранее полученных решений подобных задач.

Полученные решения просты, единообразны для рассматриваемого круга задач, их погрешности не превосходят допустимой точности инженерных расчетов.

### Список использованной литературы

1. Гнитько, В.И. Численное моделирование плесканий жидкости в упругой цилиндрической оболочке / В.И. Гнитько, В.В. Науменко // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». — 2012. — Вип. 19. — С. 66—72.
2. Богомаз, Г.И. Колебания жидкости в баках: методы и результаты экспериментальных исследований : сборник научных трудов / Г.И. Богомаз, С.А. Сирота ; Нац. акад. наук Украины, Нац. косм. агентство Украины, Ин-т техн. механики. — Днепропетровск : Ин-т техн. механики, 2002. — 305 с.
3. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. — М. : Высшая школа, 1967. — 600 с.
4. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел. [Текст] / Г. Карслоу, Д. Егер // Пер. с англ., под ред. Померанцева А.А. - М.: Наука, 1964.- 488 с.
5. Seem, J. E. Transfer Functions for Efficient Calculation of Multidimensional Transient Heat Transfer [Text]/ [J. E. Seem](#), [S. A. Klein](#), [W. A. Beckman](#), [J. W. Mitchell](#)// *J. Heat Transfer* 111(1), 2009
6. [Mahapatra](#), T. Dual Solutions in Magnetohydrodynamic Stagnation-Point Flow and Heat Transfer Over a Shrinking Surface With Partial Slip [Text]/ [T. R. Mahapatra](#), [S. K. Nandy](#), [I. Pop](#)// *J. Heat Transfer* 136(10), (Jul 02, 2014) (6 pages) doi: 10.1115/1.4024592

УДК 550.831

D.B. VENGROVICH  
Institute of Geophysics NAS of Ukraine**SEISMICITY OF RIFTING AND SUBDUCTION**

*Seismic waves accompanying the subduction process are predicted as catastrophic released energy from pre-stressed mega block in such structured medium. They will be investigated in future on a seismic time scale taking into account the peculiarities of lithospheric internal structure, dynamical processes occurring on the level of structural elements and the exchange of energy between different degrees of freedom. A new idea of earthquake source model is proposed.*

*Keywords: seismicity, subduction, earthquake source, model*

Д.Б. ВЕНГРОВИЧ  
Інститут геофізики НАН України**ПРОЯВИ СЕЙСМІЧНОСТІ В РИФТОВИХ ПРОЦЕСАХ ТА ПРИ СУБДУКЦІЇ**

*Чисельне моделювання показало, що при тектонічному стисненні і деформуванні в зонах субдукції виникають перенапружені мегаблоки. Передбачено катастрофічне вивільнення енергії з таких локалізованих областей структурованого середовища. Ці явища в майбутньому будуть більш детально промодельовані вже на сейсмічній шкалі часу з застосуванням динамічних рівнянь руху та рівнянь стану речовини літосфери, що враховують її структурованість. Таким чином запропонована нова модель джерела землетрусу.*

*Ключові слова: сейсмічність, субдукція, джерело землетрусу, моделювання.*

Д.Б. ВЕНГРОВИЧ  
Інститут геофізики НАН України**ПРОЯВЛЕНИЯ СЕЙСМИЧНОСТИ В РИФТОВЫХ ПРОЦЕССАХ И ПРИ СУБДУКЦИИ**

*Численное моделирование показало, что при тектоническом сжатии и деформации в зоне субдукции возникают перенапряженные мегаблоки с катастрофическим высвобождением энергии из таких локализованных областей структурированной среды. Эти явления будут более детально промоделированы уже на сейсмической шкале времени с использованием динамических уравнений движения и уравнений состояния вещества литосферы с учётом её структурированности. Предложена новая модель источника землетрясения.*

*Ключевые слова: сейсмичность, субдукция, источник землетрясения, моделирование.*

**Introduction.**

A lot of achievements of self-organization theory in geophysics are based on the existence of basic structured media models. The structure plays a key role in Earth's crust dynamic that is important for tectonic stress origin and localization as well as for next stress-relieved processes. We have developed and tested (Starostenko et al. 1999) a new fully dynamic theory of continental rifting based on a model of the lithosphere, incorporating both dynamic and thermal processes, by solving a coupled system of differential equations governing stress and temperature in a 2D block-structured geophysical medium. We will apply our theory for investigations of tension and compression processes in Earth's crust such as rifting, subduction and seismic related events.

The lithosphere as open system exchanges matter and energy with the environment mainly with matter from deep areas. Such a process can be considered as a self-organization process, for this reason the fully dynamic model of open medium that is characterised by the presence of internal block structure has been applied. In that case the blocked lithosphere can be separated or crushed by external load. Thus, the oceanic plate for example is a brittle-elastic medium that some authors frequently use on physical simulation of tectonics.

**Method and Theory.**

This report describes and applies such a method of numerical modelling of the dynamics of the lithosphere including faulting, based on the theory of generalised functions. Specifically, it allows explicit consideration of processes occurring in a non-homogeneously structured, thermally perturbed lithosphere during rifting and post-rift sedimentary basin formation as well as during the subduction of tectonic plates. Using the kinetic energy of block  $k$  in functional form (Danilenko, 1992):



$$T_k = \frac{m_k}{2} \left\{ \bar{v}_{k-1}^2 + 2\beta(\bar{r}_{ok-1} - \bar{r}_{k-1})\bar{v}_{k-1} \frac{\partial \bar{v}_{k-1}}{\partial \bar{r}_{ok-1}} + \beta^2(\bar{r}_{ok} - \bar{r}_{k-1})^2 \left( \frac{\partial \bar{v}_{k-1}}{\partial \bar{r}_{ok-1}} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2}(1+b_k)^2 (\bar{\omega}_{k-1} \times \bar{\omega}_{k-1}) I_{k-1}^{l,j} +$$

$$I_{k-1}^{l,j} \left\{ \frac{\beta^2}{2} (\text{div} \bar{v}_{k-1})^2 + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}_{k-1}}{\partial \bar{r}_{ok-1}} \text{div} \bar{v}_{k-1} \right\} + (1+b_k) [\bar{\omega}_{k-1} \bar{v}_{k-1}] m_k \bar{r}_{ok-1} + \frac{1}{2} \beta \bar{v}_{k-1} \cdot \text{div} \bar{v}_{k-1} m_k \bar{r}_{ok-1}$$
(1)

the system of partial differential equations describing the movement of structural elements of a geophysical medium may be written as follows:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial T_k}{\partial \dot{q}} \right] + \frac{\partial T_k}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U_k}{\partial \dot{q}} = \bar{F}_k' + \bar{F}_k'' + \bar{F}_{ok}'' + \bar{F}_{ky} + \bar{F}_{kn} + \bar{F}_o, \quad k=1,2,\dots,n$$
(2)

Blocks within the model interact with each other with a force (excluding non-mechanical forces) that can be divided into internal and external forces. The internal interaction forces inside the block  $\bar{F}_k' + \bar{F}_{ok}''$  are assumed to be central. The external forces ( $\bar{F}_k' + \bar{F}_{ky} + \bar{F}_o$ ) are assumed to be partially central and potential. It is assumed that the surface (contact, external) forces are partially potential. The system of partial differential equations (2) describes the block movement of hierarchically structured geophysical medium with taking into account the wave processes and can be reduced in two-dimensional case to a system of ordinary differential equations and solved digitally.

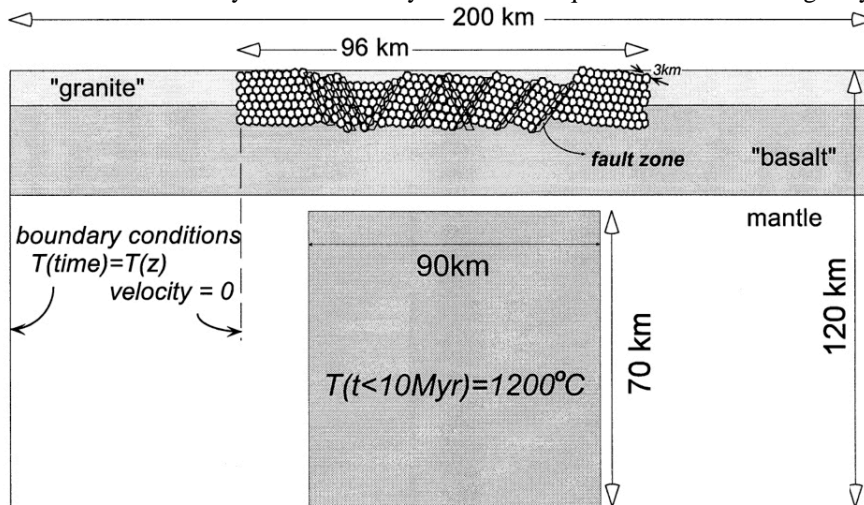


Figure 1. Schematic set-up of the numerical model with the upper crust as a block-structured medium and with an asthenosphere protrusion.

The method (see fig.1) has been applied to the formation and evolution of the Dnieper–Donets Basin (DDB) along set of regional profiles controlled by seismic and other geophysical and subsurface data. The results are compared with those published earlier for the same profiles using different methods of modelling the rift and early post-rift development of the region. The final basement geometry at the end of the rifting stage predicted by the new model satisfactorily corresponds with geological data and is qualitatively similar to that predicted by the previously published models. Fig.2 shows the numerical model with specific application to the typical profile crossing the north-western or central part of the Dnieper–Donets Basin (Ukraine). The model is 200 km in length and 120 km deep and comprises three layers - ‘granite’, ‘basalt’, and mantle with real thermo-physical parameters, the total amount of syn-rift extension along profile line is about 12%. The model has been applied (Vengrovich et al. 2010), integrating the available geophysical and stratigraphic data along seven geological profile crossing the Dnieper–Donets Basin and two profiles along Crimea region.

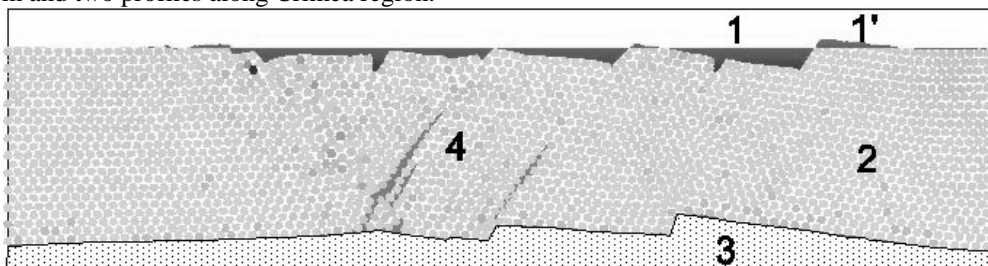


Figure 2. The resulting block-structured state of the lithosphere within the rift, according to modeling: 1' – erosion, 1 – sediment, 2 - granite and basalt block-structured geophysical medium (color of blocks represents the stress), 3 – mantle, 4 – faults

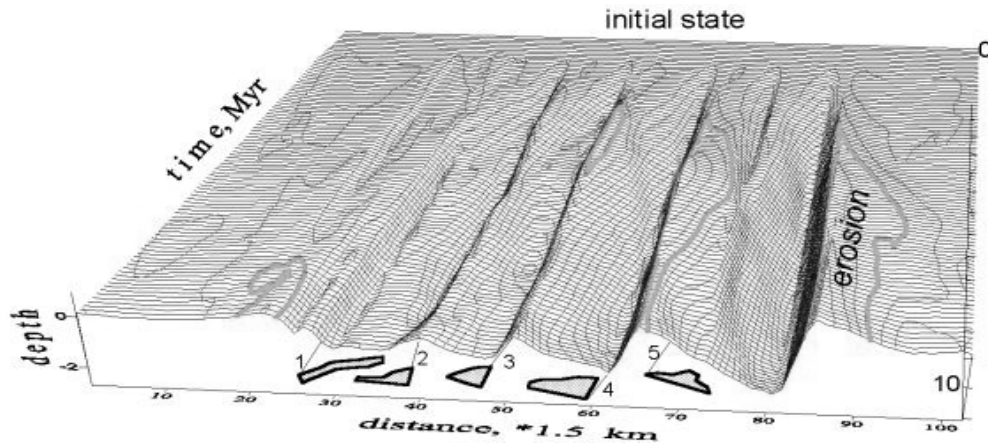


Figure 3. The resulting history of the block-structured lithosphere within the rift, according to modeling: 1-5 – real sedimentary deposits in DDB were formed in the shallow sea (at the left) and they are absent in the deep sea (at the right)

The key stages of the rifting and basin evolution, including the structural architecture of the rift as well as the overlying thermal sag basin, can be satisfactorily predicted with the described method as is shown in Fig. 2. The results are comparable to those of previously published methods. However, they not only characterise the cross-sectional character of basin subsidence through time but also the thermal evolution of the sedimentary succession, of crucial importance for the determination of hydrocarbon maturation. The results imply realistic that the asthenosphere was at a depth of as little as 40–50 km during the rifting period. All of this establishes the theory of structured geophysical media and method of its mathematical modelling.

Fig. 4a and b, referring to distinct events during the rift subsidence evolution, illustrates the pressure behaviour in the upper layer for moments  $t_1$  and  $t_2$ , respectively. The radiation of the pressure impulse is interpreted as the result of a force equilibrium disturbance within the restricted volume of the model with unstable blocks being the sources of the radiated pressure impulse. The pressure distribution seen in Fig. 4 is similar to the pressure distribution of a non-linear, soliton-like wave propagating in a dispersive medium. They have been further investigated, and provisionally identified, with Eq. 1, but using a time step ( $\Delta t_i$  of  $\sim 0.1$  s) reduced in comparison with the calculations made for the rifting process (Vengrovitch, 1995). The model consisted of an unstressed half-space, constructed from hexagonal elements with parameters as above, with the boundary layer of elements ( $y = 0$ ) moved in the  $x$  direction with a constant velocity of 0.01. Pressure impulse type perturbations, with soliton-like character, were observed. Fig. 5 shows the amplitude  $V_y$  of the mass velocity of the longitudinal perturbation along a one-dimensional chain in direction  $x$  and the amplitude  $V_x$  of the mass velocity of the transverse perturbation. The ratio  $V_y/V_x$  is 1.6, close to that of seismic waves, which is 1.7 for the continental 'granitic' layer of the Earth's crust. Eq. 1, therefore, predicts wave propagation processes which accompany rift formation and lead to seismic events observed in actively extending depressions (Anan'in, 1980) with the waves generated during the rifting process shown in Fig. 4 being seismic non-linear soliton-like waves.

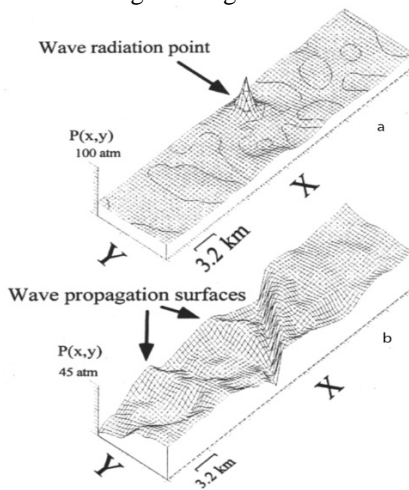


Figure 4. Pressure distribution within the upper brittle-elastic layer for half-graben model: (a) when one of the blocks in the vicinity of the fault has become unstable ( $Y = \text{depth}$ ,  $X = \text{horizontal distance}$ ) and (b) after the impulse caused by an unstable block in the vicinity of fault.

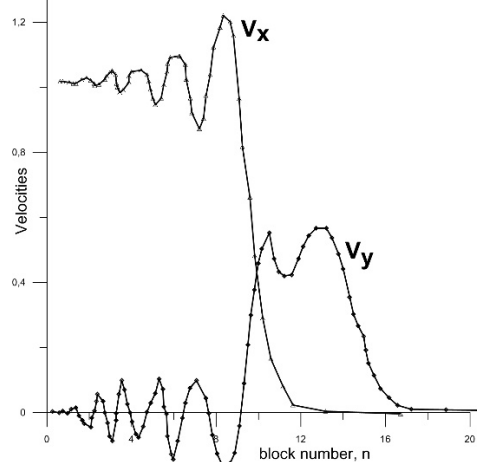


Figure 5. Absolute values of the velocities of P and S oscillations along the one-dimensional chain of blocks. Time  $t = 12.8$  s from start, hence the wave velocity  $V_f = 7$  km/s.

Now we will apply our theory for investigations of compression processes in lithosphere using subduction model:

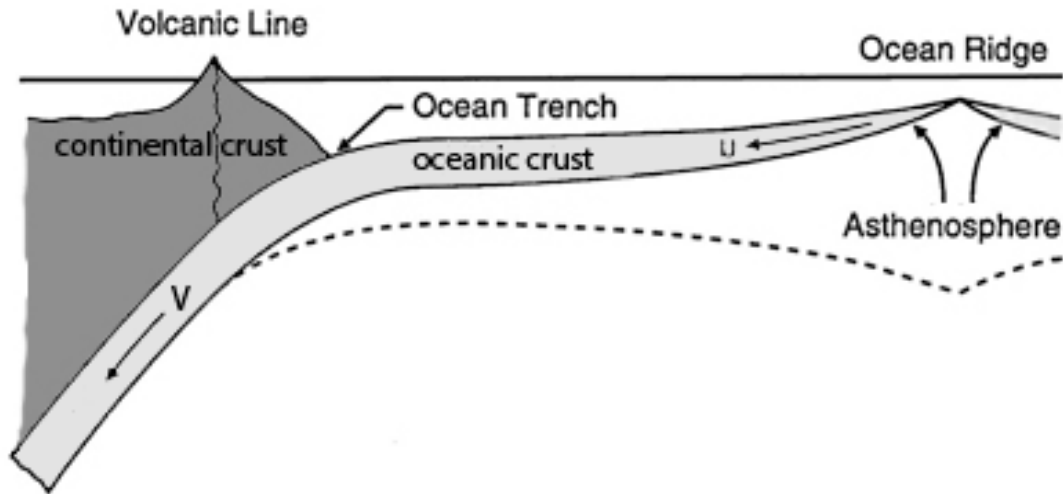


Figure 6 (Donald L. Turcotte, 2001) Accretion of a lithospheric plate at an ocean ridge (accretional plate margin) and its subduction at an ocean trench (subduction zone). The plate migrates away from the ridge crest at the seafloor spreading velocity  $V$ .

Now that we have a clear model of structured geophysical media behaviour and we will digitally simulate the tectonic process of subduction sketched in Figure 6 in the framework of our theory concentrating our attention on the dynamic of the region near the "oceanic trench". «oceanic crust» thus stated is presented in 2D model in Figure 7 as a set of hexagonal blocks (Vengrovitch D.B., 2010) and we equate the dynamics of block media by solving (3), the last is immediate from (1)-(2):

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ij}, \quad I_i \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} = \sum_j \vec{M}_{ij}, \quad (3)$$

where  $m_k$  is mass of block  $k$  (density  $\rho_k$ );  $I_k$  is moment of inertia of block  $k$ ;  $x, \omega$  are co-ordinate and angular velocity; forces are presented as summarized frictional force, forces owing to energy dissipation, elastic interaction force (with neglecting of gravity force in simplified version of model) (Poliakov et al., 1996):

$$\vec{F}_{i,j} = F \vec{n}_{ij} = R(\varepsilon_{i,j}) \vec{n}_{ij} \quad (4)$$

For example, in case of blocks interactions by law of Hertz, forces are defined as following:

$$\vec{F} = \frac{2\theta}{3} \sqrt{\frac{r}{2}} \varepsilon^{3/2}, \quad \theta = \frac{E}{1-\nu}, \quad \varepsilon_{ij}^{compression} = \pm 2r - \left( \sum_{k=1,2} (x_i - x_j)^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

where  $E$  is Young's module,  $\nu$  is the Poisson ratio. In case of a set of hexagonal blocks interactions forces are defined as following:

$$\vec{F}_{i,j} = -[k_1 \vec{P}_{ij} + k_2 \vec{\varpi}_{i,j} + k_3 \frac{\vec{\varpi}_{i,j}^2}{|\vec{\varpi}_{i,j}|}], \quad \vec{P}_{i,j} \cdot (\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j}) = \vec{U}_{ij}$$

$$\vec{U}^{[i,j]} = \vec{U}^{[i,j]}(\nu_i) = A \nu_i^{-2/3} \exp[B(1 - \nu_i^{-1/3}) - C \nu_i^{-4/3}], \quad \nu_i = \frac{1}{\rho_i} \quad (6)$$

The rheological properties of the model are determined by the material constants of the compression potential of granite  $A, B, C$ , by coefficients of friction  $k_1, k_2, k_3$  and by density  $\rho_i$ . The results in the report are given for the case (6).

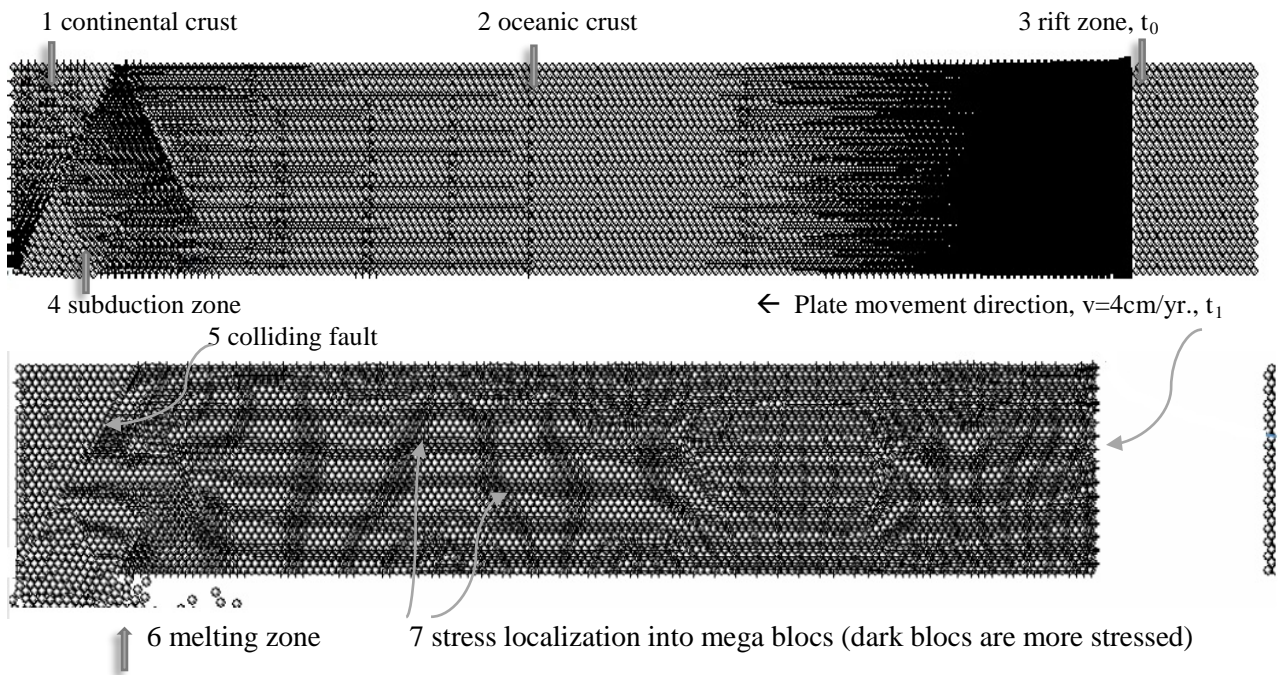


Figure 7. The model of subduction. (oceanic plate thickness averages 15 km; continental crust is fixed,  $t_0 \sim 0$ ,  $t_1 \sim 3\text{Myr}$ )

Thus a model of subduction is illustrated schematically by Fig.7. It shows without taking into account gravity and isostatic forces the stress-strained state of the oceanic crust during the collision of block structured plates (Fig. 7 demonstrates a model with slip of the upper and lower blocks of the oceanic plate).

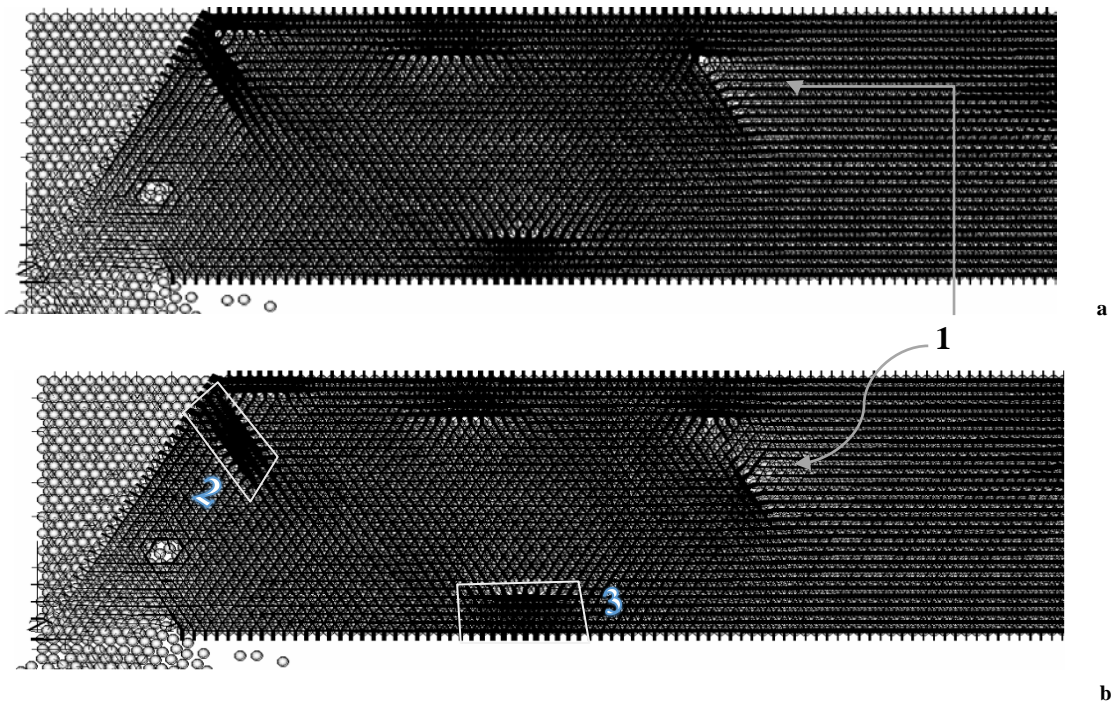
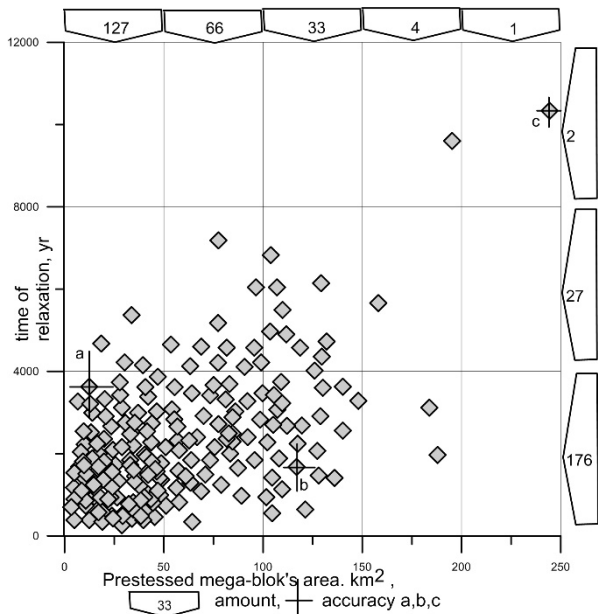
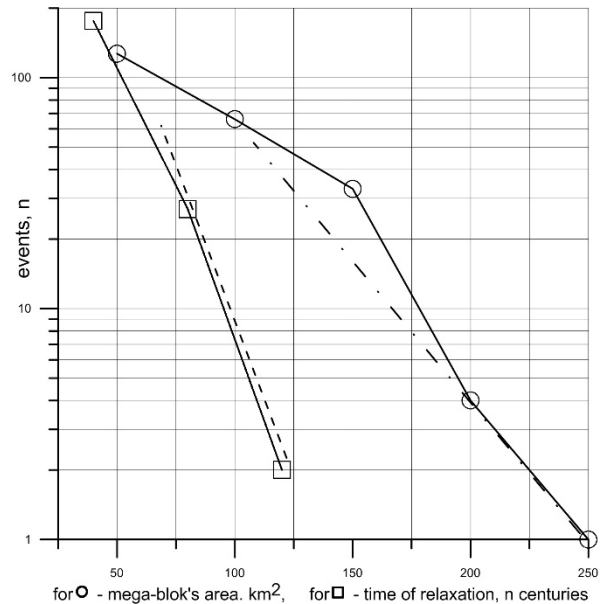


Figure 8. The idea of a new model of earthquake source in blocked oceanic crust near subduction zone. a, b - consecutively presented stress-strained states of the oceanic crust during the subduction, 1 - stress-relieved processes (at a depth of 7 km) observed over a 2,000 year, 2,3 – measured area of stressed zones – mega blocks.

During the block plates collision, there is regularly forming process of strained zones at different depths (see fig.8 - 1). During the simulation, we recorded 205 events of occurrence and relaxation of zones and determined their areas and times of existence (for example, see fig.8 – 2,3). An analysis of these observations is shown in Figures 9,10.



**Figure 9. Time of relaxation and area of stressed mega blocks during the modelling of subduction, for example, 33-amount: here number 33 represents the number of events in a strip - observed mega blocks with arias 100-150km<sup>2</sup>  
27-amount: these mega blocks existed for 4-8 thousand years**



**Figure 10. Functional connection of the number of events on the size of the mega block and on the time of its existence**

We can assume that detailed modeling of such stress-relaxing zones will present the sources of seismic activity in subduction zones. This will be the subject of further study.

### Conclusions

Seismic waves accompanying the subduction process are predicted as catastrophic released energy from pre-stressed mega block in such structured medium (see Fig.8 – zone 1). They will be investigated in future on a seismic time scale taking into account the peculiarities of lithospheric internal structure, dynamical processes occurring on the level of structural elements and the exchange of energy between different degrees of freedom.

### References

Danilenko, V.A. [1992]. On the theory of movement of hierarchical block geophysical media. // Dokl. Akad. Nauk Ukr., 2: pp. 87-90 (in Russian).

Starostenko V.I., Danylenko V.A., Vengrovich D.B., Kutas R.I., Stephenson R.A., Stovba J.N., O.M. Kharitonov [1999]. A new geodynamical–thermal model of rift evolution, with application to the Dnieper–Donets Basin, Ukraine. // Tectonophysics 313, pp. 29–40

Vengrovich D.B., Starostenko V.I., Danylenko V.A., [2010]. Modeling of the Evolution of Sedimentary Basins Including the Structure of the Natural Medium and self-organization processes. Геофизический журнал.–Т.32.–№4.–С.200-2002.

Donald L. Turcotte [2001]. Solid earth geophysics. Tectonophysics, Cornell University, p.502

Vengrovitch, D.B., 1995. Seismic waves in blocked media. Acoust. Inhomogeneous Media, pp. 110:65-72 (in Russian).

Anan'in, I.V., 1980. Russian Plain and the Urals. In: Seismic regional division of USSR territory. Methodical grounds and regional description of the map of 1978. Nauka, Moscow, pp. 109-114 (in Russian).

Vengrovitch, D.B., 2010. Simulation of salt diapirism in Dnieper-Donets Basin for hydrocarbon exploration. Geoinformatics 2010 - 9th International Conference on Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects, p.65

Poliakov A., Podladchikov Yu., Dawson E., Talbot C. 1996. Salt diapirism with simultaneous brittle faulting and viscous flow Salt Tectonics, Geolog. Soc. Spec. Publ. 100, pp. 291—302



УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ, Л.О. ТУЛУПОВА

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

І.В. ВОРОНЦОВА

Полтавський коледж нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

**ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ  
ДВОВИМІРНИХ ТОЧКОВИХ МНОЖИН ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ**

У статті проведено дослідження визначення полінома двох змінних  $n$ -го степеня довільними дискретними значеннями. Виведено формули обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин, що дозволяють визначити аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних геометричних образів у загальному вигляді.

Ключові слова: дискретна інтерполяція, геометричний апарат суперпозицій, коефіцієнти суперпозицій, двовимірні точкові множини, числові послідовності.

О. В. ВОРОНЦОВ, Л.А. ТУЛУПОВА

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

И.В. ВОРОНЦОВА

Полтавский колледж нефти и газа Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка

**ДИСКРЕТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ  
ДВУМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ**

В статье проведено исследование определения полинома двух переменных  $n$ -й степени произвольными дискретными значениями. Выведены формулы вычисления коэффициентов суперпозиций двумерных точечных множеств, позволяющие определять аналитические выражения дискретных аналогов двумерных геометрических образов в общем виде.

Ключевые слова: дискретная интерполяция, геометрический аппарат суперпозиций, коэффициенты суперпозиции, двумерные точечные множества, числовые последовательности.

O.V. VORONTSOV, L.A. TULUPOVA

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

I.V. VORONTSOVA

Poltava Petroleum Geological College of Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

**DISCRETE INTERPOLATION OF GEOMETRIC IMAGES BY SUPERPOSITIONS OF TWO-  
DIMENSIONAL POINT SETS OF FUNCTIONAL DEPENDENCES**

In the article, the definition of a polynomial of two variables of the  $n$ th power was studied by arbitrary discrete values. Formulae for calculating superposition coefficients of two-dimensional point sets were found. These formulae define an analytic form of discrete analogues of two-dimensional geometric images in the general case.

Keywords: discrete interpolation, geometric apparatus of superpositions, superposition coefficients, two-dimensional point sets, numerical sequences.

**Постановка проблеми**

Управління формою дискретних моделей геометричних образів (поверхонь, явищ, процесів) вимагає чіткого уявлення про зміст процесу формування, параметри форми моделей, можливості оперативного змінення ходу розрахунків модельованої поверхні. Крім того формування дискретних моделей геометричних образів (ГО) передбачає залучення методів, що вимагають використання значних обчислювальних ресурсів. Тому необхідно проводити дослідження нових методів формування ГО, які дозволяють забезпечити мінімальні витрати на отримання результату.

Ефективність методик формування ГО у великій мірі залежить від ефективності алгоритмів переходу від неперервної форми представлення геометричних образів до їх дискретних аналогів і навпаки.

Вищеназвані алгоритми розроблені у [1] за допомогою математичного апарату числових послідовностей. Координати вузлів модельованих дискретних аналогів кривих визначаються за відомими координатами суміжних вузлів. Дискретно представлені криві (ДПК) подаються координатами вузлів із рівномірним кроком по осі. Геометричний апарат суперпозицій дозволяє підвищити ефективність даних алгоритмів за рахунок економії обчислювальних ресурсів при формуванні ДПК вузлами із довільними кроками по осі за даними координатами довільних вузлів.

Дослідження геометричного апарату суперпозицій у поєднанні із класичним методом скінчених різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей сприятиме подальшому розвитку і удосконаленню математичних моделей у процесі конструювання.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Питанням досліджень дискретного моделювання ГО суперпозиціями одновимірних числових послідовностей присвячені роботи [2, 3, 4] авторів даної статті.

**Формулювання мети дослідження**

Метою даної роботи є дослідження питань дискретної інтерполяції ГО двовимірними числовими послідовностями за координатами вузлових точок взятих із довільними кроками по координатних осях, а саме – визначення полінома двох змінних  $n$ -го степеня довільними дискретними значеннями; зокрема – виведення формул обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин, що дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних геометричних образів у загальному вигляді.

**Виклад основного матеріалу дослідження**

В основі класичного методу скінчених різниць, на який спираються найпростіші способи дискретної інтерполяції, лежить або поліном однієї змінної  $n$ -го степеня :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_kx^k + \dots + a_nx^n ,$$

що може бути дискретно визначений нескінченною одновимірною числовою послідовністю

$$y = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + \dots + a_ki^k + \dots + a_ni^n .$$

Або поліном двох змінних  $n$ -го степеня

$$z = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{n0}x^n + a_{kn-k}x^k y^{n-k} + a_{0n}y^n , \tag{1}$$

що може бути дискретно визначений нескінченною двовимірною числовою послідовністю

$$z_{ij} = a_{00} + a_{10}i + a_{01}j + a_{20}i^2 + a_{11}ij + a_{02}j^2 + \dots + a_{n0}i^n + a_{kn-k}i^k j^{n-k} + a_{0n}j^n . \tag{2}$$

Враховуючи результати досліджень роботи [2], виведемо формули обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин що дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних ГО у загальному вигляді. Ці формули також можуть бути використані для дискретного моделювання двовимірних ГО числовими послідовностями вищеназваних аналітичних залежностей без складання і розв’язання систем лінійних рівнянь.

Координати будь-якої точки двовимірного ГО можуть бути визначені як суперпозиції координат чотирьох заданих довільних точок даного образу за формулою [3]:

$$u_0 = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + (1 - k_1 - k_2 - k_3)u_4 ,$$

де  $u_i (i = \overline{0,4})$  – узагальнене позначення відповідної координати.

Замкнена форма числової послідовності, довільний член якої обчислюється за формулою (2), визначає двовимірну числову послідовність  $n$ -го степеня (1).

При  $n=1$  послідовність (2) має вигляд:

$$z_{ij} = a_{00} + a_{10}i + a_{01}j \tag{3}$$

Таку послідовність, у свою чергу, можна визначити рекурентною залежністю [5]

$$4z_{ij} = z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1}, \tag{4}$$

що буде дискретним представленням поліному двох змінних 1-го степеня.

Рекурентна формула (4) одержується додаванням двох рекурентних формул (5) і (6)

$$2z_i = z_{i-1} + z_{i+1}, \tag{5}$$

$$2z_j = z_{j-1} + z_{j+1}, \tag{6}$$

які дискретно представляють дві числові послідовності

$$z_i = a_0 + a_1i, \tag{7}$$

$$z_j = b_0 + b_1j. \tag{8}$$

Рекурентні формули, що зв’язують значення кінцевого ряду довільних членів послідовностей (7) і (8) матимуть вигляд [4]:

$$z_{i+p} = k_1z_{i+p_1} + k_2z_{i+p_2}, \tag{9}$$

$$z_{j+m} = k_1z_{j+m_1} + k_2z_{j+m_2}, \tag{10}$$

Додаванням (9) і (10) одержимо рекурентні залежності, що зв’язують значення кінцевого ряду довільних членів послідовності (3):

$$2z_{i+p,j+m} = k_1z_{i+p_1,j+m} + k_2z_{i+p_2,j+m} + k_1z_{i+p,j+m_1} + k_2z_{i+p,j+m_2}, \tag{11}$$

де  $k_1 + k_2 = 1$ , або:

$$z_{i+p,j+m} = k_1z_{i+p_1,j+m} + k_2z_{i+p_2,j+m} + k_1z_{i+p,j+m_1} + k_2z_{i+p,j+m_2}, \tag{12}$$

де  $k_1 + k_2 = 0,5$ .

Підставляючи (3) у (12) одержимо рівняння, розчіплюючи яке за змінними  $i$  та  $j$ , зможемо скласти систему визначальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 k_i = \frac{1}{2} \\ k_1[a_{10}(p_1 + p) + a_{01}(m_1 + m)] + k_2[a_{10}(p_{21} + p) + a_{01}(m_2 + m)] = a_{10}p + a_{01}m \end{cases} \quad (13)$$

Розв'язуючи (13) за методом Крамера, знайдемо визначники  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ , у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{10}(p_2 - p_1) + a_{01}(m_2 - m_1); \\ \Delta_1 &= \frac{1}{2}a_{10}(p_2 - p) + \frac{1}{2}a_{01}(m_2 - m); \\ \Delta_2 &= \frac{1}{2}a_{10}(p - p_1) + \frac{1}{2}a_{01}(m - m_1). \end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{10}(p_2-p)+a_{01}(m_2-m)}{a_{10}(p_2-p_1)+a_{01}(m_2-m_1)}; \\ k_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{10}(p-p_1)+a_{01}(m-m_1)}{a_{10}(p_2-p_1)+a_{01}(m_2-m_1)}. \end{aligned}$$

Крім того, оскільки числова послідовність (3) розпадається на суму двох (7) і (8) [6], то рекурентна формула, що зв'язує значення кінцевого ряду її довільних членів може бути представлена у вигляді:

$$z_{i+p,j+m} = k_1^i z_{i+p_1,j+m} + k_2^i z_{i+p_2,j+m} + k_1^j z_{i+p,j+m_1} + k_2^j z_{i+p,j+m_2}, \quad (14)$$

де  $k_1^i + k_2^i = 1$ ,  $k_1^j + k_2^j = 1$ .

Враховуючи результати роботи [4], зможемо записати:

$$z_{i+p,j+m} = \frac{p_2-p}{p_2-p_1} z_{i+p_1,j+m} + \frac{p-p_1}{p_2-p_1} z_{i+p_2,j+m} + \frac{m_2-m}{m_2-m_1} z_{i+p,j+m_1} + \frac{m-m_1}{m_2-m_1} z_{i+p,j+m_2}, \quad (15)$$

При  $n=2$  послідовність (2) має вигляд:

$$z_{ij} = a_{00} + a_{10}i + a_{01}j + a_{20}i^2 + a_{11}ij + a_{02}j^2 \quad (16)$$

Рекурентна формула, що зв'язує значення кінцевого ряду довільних членів послідовності (16) може бути записана у вигляді:

$$z_{i+p,j+m} = k_1 z_{i+p_1,j+m} + k_2 z_{i+p_2,j+m} + k_3 z_{i+p,j+m_1} + k_4 z_{i+p,j+m_2}. \quad (17)$$

Підставляючи (16) у (17), одержимо рівняння, розчіплюючи яке за змінними  $i$  та  $j$  у різних степенях, зможемо скласти систему визначальних рівнянь (18):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 k_i = 1 \\ a_{11}(k_2 p_2 + k_1 p_1 + k_4 p + k_3 p - p) + 2a_{02}(k_4 m_2 + k_3 m_1 + k_2 m + k_1 m - m) = 0 \\ 2a_{20}(k_2 p_2 + k_1 p_1 + k_4 p + k_3 p - p) + a_{11}(k_4 m_2 + k_3 m_1 + k_2 m + k_1 m - m) = 0 \\ a_{20}(k_2 p_2^2 + k_1 p_1^2 + k_4 p^2 + k_3 p^2 - p^2) + a_{11}(k_2 m p_2 + k_1 m p_1 + k_4 m_2 p + k_3 m_1 p - m p) + \\ a_{10}(k_2 p_2 + k_1 p_1 + k_4 p + k_3 p - p) + a_{02}(k_4 m_2^2 + k_3 m_1^2 + k_2 m^2 + k_1 m^2 - m^2) + \\ + a_{01}(k_4 m_2 + k_2 m + k_1 m + k_3 m_1 - m) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Розв'язуючи дану систему за методом Крамера, знаходимо визначники  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ ,  $\Delta_4$  у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta &= (m_1 - m_2)(p_2 - p_1)\{a_{20}(p - p_1)(p - p_2) + a_{02}(m - m_1)(m_2 - m)\}; \\ \Delta_1 &= a_{02}(m_1 - m)(m_2 - m)(m_2 - m_1)(p_2 - p); \\ \Delta_2 &= -a_{02}(m_1 - m)(m_2 - m)(m_2 - m_1)(p_1 - p); \\ \Delta_3 &= -a_{20}(m_2 - m)(p_1 - p)(p_2 - p)(p_2 - p_1); \\ \Delta_4 &= a_{20}(m_1 - m)(p_1 - p)(p_2 - p)(p_2 - p_1). \end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{a_{02}(m-m_1)(m_2-m)(p_2-p)}{(p_2-p_1)\{a_{20}(p-p_1)(p-p_2)+a_{02}(m-m_1)(m_2-m)\}}; \\ k_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{02}(m_1-m)(m_2-m)(p_1-p)}{(p_2-p_1)\{a_{20}(p-p_1)(p-p_2)+a_{02}(m-m_1)(m_2-m)\}}; \\ k_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{a_{20}(m_2-m)(p-p_1)(p_2-p)}{(m_1-m_2)\{a_{20}(p-p_1)(p-p_2)+a_{02}(m-m_1)(m_2-m)\}}; \\ k_4 &= \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{a_{20}(m_1-m)(p_1-p)(p_2-p)}{(m_1-m_2)\{a_{20}(p-p_1)(p-p_2)+a_{02}(m-m_1)(m_2-m)\}}. \end{aligned}$$

У самому загальному випадку рекурентна формула, що зв'язує значення кінцевого ряду довільних членів послідовності (16) матиме вигляд:

$$z_{i+p,j+m} = k_1 z_{i+p_1,j+m_1} + k_2 z_{i+p_2,j+m_2} + k_3 z_{i+p_3,j+m_3} + k_4 z_{i+p_4,j+m_4}. \quad (19)$$

Підставляючи (16) у (19) одержимо рівняння, розчіплюючи яке за змінними  $i$  та  $j$  у різних степенях, зможемо скласти систему визначальних рівнянь (20):



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 k_i = 1 \\ a_{20} \sum_{i=1}^4 k_i p_i^2 + a_{10} \sum_{i=1}^4 k_i p_i + a_{02} \sum_{i=1}^4 k_i m_i^2 + a_{01} \sum_{i=1}^4 k_i m_i + a_{00} \sum_{i=1}^4 k_i + \\ + a_{11} \sum_{i=1}^4 k_i m_i p_i = a_{20} p^2 + a_{10} p + a_{02} m^2 + a_{01} m + a_{00} + a_{11} m p \\ 2a_{20} \sum_{i=1}^4 k_i p_i + a_{10} \sum_{i=1}^4 k_i + a_{11} \sum_{i=1}^4 k_i m_i = \\ = 2a_{20} p + a_{10} + a_{11} m \\ 2a_{20} \sum_{i=1}^4 k_i p_i + a_{10} \sum_{i=1}^4 k_i + a_{11} \sum_{i=1}^4 k_i m_i = \\ = 2a_{02} m + a_{01} + a_{11} p \end{array} \right. \quad (20)$$

Переписуючи її у вигляді (21)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 k_i = 1 \\ \sum_{i=1}^4 k_i = (a_{20} p_i^2 + a_{10} p_i + a_{02} m_i^2 + a_{01} m_i + a_{00} + a_{11} m_i p_i) = \\ = a_{20} p^2 + a_{10} p + a_{02} m^2 + a_{01} m + a_{00} + a_{11} m p \\ \sum_{i=1}^4 k_i (2a_{20} p_i + a_{10} + a_{11} m_i) = \\ = 2a_{20} p + a_{10} + a_{11} m \\ \sum_{i=1}^4 k_i (2a_{02} m_i + a_{01} + a_{11} p_i) = \\ = 2a_{02} m + a_{01} + a_{11} p \end{array} \right. , \quad (21)$$

і розв'язуючи за методом Крамера, знаходимо вирази для обчислення визначників  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ ,  $\Delta_4$  :

$$\begin{aligned} \Delta &= -4(a_{02} a_{20} - a_{11}^2) \cdot \{A_4(M_{21} p_1 + M_{13} p_2 + M_{32} p_1) + \\ &+ A_3(M_{12} p_4 + M_{41} p_2 + M_{24} p_1) + A_2(M_{31} p_4 + M_{14} p_3 + M_{43} p_1) + \\ &+ A_1(M_{23} p_4 + M_{42} p_3 + M_{34} p_2) + a_{11}(M_{21} m_4 + M_{12} m_3)(p_3 p_4 + p_1 p_2) + \\ &+ a_{11}(M_{13} m_4 + M_{31} m_2)(p_2 p_4 + p_1 p_3) + a_{11}(M_{32} m_4 + M_{23} m_1)(p_1 p_4 + p_2 p_3)\} ; \\ \Delta_1 &= -4(a_{02} a_{20} - a_{11}^2) \cdot \{A_4(M_{20} p_3 + M_{03} p_2 + M_{32} p) + \\ &+ A_3(M_{02} p_4 + M_{40} p_2 + M_{24} p) + A_2(M_{30} p_4 + M_{04} p_3 + M_{43} p) + \\ &+ A_0(M_{23} p_4 + M_{42} p_3 + M_{34} p_2) + a_{11}(M_{20} m_4 + M_{02} m_3)(p_3 p_4 + p p_2) + \\ &+ a_{11}(M_{03} m_4 + M_{30} m_2)(p_2 p_4 + p p_3) + a_{11}(M_{32} m_4 + M_{23} m)(p_2 p_3 + p p_4)\} ; \\ \Delta_2 &= 4(a_{02} a_{20} - a_{11}^2) \cdot \{A_4(M_{10} p_3 + M_{03} p_1 + M_{31} p) + \\ &+ A_3(M_{02} p_4 + M_{40} p_1 + M_{14} p) + A_1(M_{30} p_4 + M_{04} p_3 + M_{43} p) + \\ &+ A_0(M_{13} p_4 + M_{41} p_3 + M_{34} p_1) + a_{11}(M_{10} m_4 + M_{01} m_3)(p_3 p_4 + p p_1) + \\ &+ a_{11}(M_{03} m_4 + M_{30} m_1)(p_1 p_4 + p p_3) + a_{11}(M_{31} m_4 + M_{13} m)(p p_4 + p_1 p_3)\} ; \\ \Delta_3 &= -4(a_{02} a_{20} - a_{11}^2) \cdot \{A_4(M_{10} p_2 + M_{02} p_1 + M_{21} p) + \\ &+ A_2(M_{01} p_4 + M_{40} p_1 + M_{14} p) + A_1(M_{20} p_4 + M_{04} p_2 + M_{42} p) + \\ &+ A_0(M_{12} p_4 + M_{41} p_2 + M_{24} p_1) + a_{11}(M_{10} m_4 + M_{01} m_2)(p_2 p_4 + p p_1) + \\ &+ a_{11}(M_{02} m_4 + M_{20} m_1)(p_1 p_4 + p p_2) + a_{11}(M_{21} m_4 + M_{12} m)(p p_4 + p_1 p_2)\} ; \\ \Delta_4 &= 4(a_{02} a_{20} - a_{11}^2) \cdot \{A_3(M_{10} p_2 + M_{02} p_1 + M_{21} p) + \\ &+ A_2(M_{01} p_3 + M_{30} p_1 + M_{13} p) + A_1(M_{20} p_3 + M_{03} p_3 + M_{32} p) + \\ &+ A_0(M_{12} p_3 + M_{31} p_2 + M_{23} p_1) + a_{11}(M_{10} m_3 + M_{01} m_2)(p_2 p_3 + p p_1) + \\ &+ a_{11}(M_{02} m_3 + M_{20} m_1)(p_1 p_3 + p p_2) + a_{11}(M_{21} m_3 + M_{12} m)(p p_3 + p_1 p_2)\} . \end{aligned}$$

де  $A_i = a_{20} p_i^2 + a_{02} m_i^2$ ,  $M_{ij} = m_i - m_j$ , а вирази для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції  $k_1, k_2, k_3, k_4$  будуть одержані в результаті розв'язання системи рівнянь (21) за формулами :

$$k_s = \frac{\Delta_s}{\Delta}, \quad s = \overline{1,4} .$$

Для перевірки справедливості виведених формул визначення координат будь-якої точки двовимірного ГО, що заданий формулою (16) як суперпозиції координат чотирьох заданих довільних точок даного образу, розглянемо два приклади із конкретними вихідними даними.

Приклад 1 (рис. 1).

$a_{00}=5$ ;  $a_{01}=-3$ ;  $a_{10}=1$ ;  $a_{11}=2$ ;  $a_{02}=4$ ;  $a_{20}=-1$ ;  $p=-2$ ;  $p_1=1$ ;  $p_2=2$ ;  $p_3=-1$ ;  $p_4=4$ ;  $m=1$ ;  $m_1=0$ ;  $m_2=-1$ ;  $m_3=5$ ;  $m_4=3$ ;  $i=2$ ;  $j=1$ .

Рекурентна формула (19) матиме вигляд

$$z_{02} = k_1 z_{31} + k_2 z_{40} + k_3 z_{16} + k_4 z_{64} .$$

Звідси:

$$z_{02}=15; \quad z_{31}=6; \quad z_{40}=-7; \quad z_{16}=143; \quad z_{64}=-75;$$

$$k_1=166/57; \quad k_2=-31/19; \quad k_3=2/19; \quad k_4=-22/57;$$

$$15 = \frac{166}{57} \cdot 6 - \frac{31}{19} \cdot (-7) + \frac{2}{19} \cdot 143 - \frac{22}{57} \cdot 75 = 15 .$$

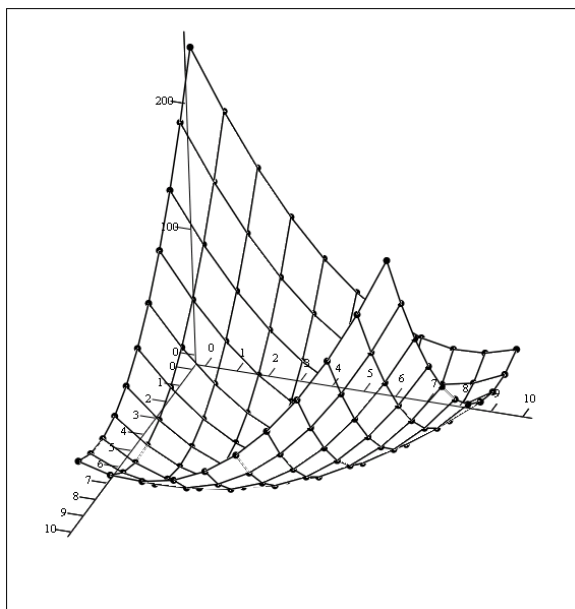


Рис. 1. Дискретний каркас двовимірної числової послідовності

$$z_{ij} = 5 + i - 3j - i^2 + 2ij + 4j^2 .$$

Приклад 2 (рис. 1).

$a_{00}=5; a_{01}=-3; a_{10}=1; a_{11}=2; a_{02}=4; a_{20}=-1; p_3; p_1=5; p_2=0; p_3=-2; p_4=-1; m=5; m_1=-1; m_2=3; m_3=2; m_4=-4; i=4; j=5.$

Рекурентна формула (19) матиме вигляд

$$z_{7,10} = k_1 z_{94} + k_2 z_{48} + k_3 z_{27} + k_4 z_{31} .$$

Звідси:

$$z_{7,10}=473; z_{94}=57; z_{48}=289; z_{27}=206; z_{31}=6;$$

$$k_1=-266/1287; k_2=1355/429; k_3=-893/429; k_4=167/1287;$$

$$473 = -\frac{266}{1287} \cdot 57 + \frac{1355}{429} \cdot 289 - \frac{893}{429} \cdot 206 + \frac{167}{1287} \cdot 6 = 473 .$$

### Висновки

Для дискретного моделювання ГО можуть бути застосовані дані дослідження визначення поліномів двох змінних  $n$ -го степеня за довільними дискретними значеннями. Одержані в даній статті формули обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних ГО у загальному вигляді.

### Список використаної літератури

1. Пустюльга С. І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями : дис. докт. техн. наук : 05.01.01 / Пустюльга Сергій Іванович – КНУБА, 2006. – 316 с.
2. Воронцов О. В. Дискретна інтерполяція геометричних образів об'єктів будівництва однодимірними числовими послідовностями із нерівномірним кроком / Олег Вікторович Воронцов // Збірник наукових праць "Будівництво та техногенна безпека". Сімферополь. Національна академія природоохоронного та курортного будівництва. – 2013. – №48. – С. 43–49.
3. Воронцов О. В. Властивості суперпозицій точкових множин. / Олег Вікторович Воронцов. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА.. – 2010. – №86. – С. 345–349.
4. Воронцов О. В. Моделювання об'єктів будівництва та машинобудування довільними дискретними значеннями числових послідовностей / Олег Вікторович Воронцов. // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полтав. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. – Полтава: ПолтНТУ. – 2013. – №4. – С. 25–35.
5. Инженерная геометрия с элементами теории параметризации / В. Е. Михайленко, С. Н. Ковалев, Н. И. Седлецкая, В. А. Анпилогова. – Киев: УМК ВО, 1989. – 84 с.
6. Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. — Луцьк.: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. — С. 118-176.

УДК 539.3

В.І. ГНИТЬКО, Д.В.КРЮТЧЕНКО<sup>1)</sup>, Ю.В. НАУМЕНКО, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА<sup>1),2)</sup><sup>1)</sup>Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н.Подгорного НАНУ, Україна,<sup>2)</sup>Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна**МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОТСЕКАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ  
ЖИДКОСТЬ**

*В работе исследованы задачи о свободных и вынужденных колебаниях оболочечных конструкций с отсеками, частично заполненными идеальной несжимаемой жидкостью. Движение жидкости предполагается потенциальным. Рассмотрены импульсные воздействия на оболочки. Для гашения колебаний жидкости предлагается устанавливать внутренние перегородки. Для исследования колебаний применен метод интегральных уравнений. Его численная реализация осуществлена с использованием граничных элементов и суперэлементов. Получены частоты и формы колебаний жидкости в резервуарах с перегородками. Рассмотрены вынужденные колебания под действием гармонических и импульсных нагрузок.*

*Ключевые слова: оболочка вращения, идеальная несжимаемая жидкость, перегородки, сингулярные интегральные уравнения, импульсные воздействия*

В.І. ГНИТЬКО, Д.В.КРЮТЧЕНКО<sup>1)</sup>, Ю.В. НАУМЕНКО, О.О. СТРЕЛЬНИКОВА<sup>1),2)</sup><sup>1)</sup>Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАНУ, Україна,<sup>2)</sup>Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна**МОДЕЛЮВАННЯ ВІЛЬНИХ ТА ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З  
ВІДСІКАМИ, ЩО МІСТЯТЬ РІДИНУ**

*Досліджено задачі вільних та вимушених коливань оболонкових конструкцій з відсіками, що частково заповнені ідеальною нестисливою рідиною. Рух рідини вважається потенційним. Розглянуто імпульсні впливи на оболонки. Для гасіння коливань рідини запропоновано встановлювати внутрішні перегородки. Для дослідження коливань застосовано метод інтегральних рівнянь. Його числову реалізацію здійснено з використанням граничних елементів і суперелементів. Отримано частоти і форми коливань рідини в резервуарах з перегородками. Досліджені вимушені коливання під дією гармонічних та імпульсних навантажень.*

*Ключові слова: оболонка обертання, ідеальна нестислива рідина, перегородки, сингулярні інтегральні рівняння, імпульсні впливи*

V.I. GNITKO, D.V. KRUTCHENKO<sup>1)</sup>, Y.NAUMENKO, E. STRELNIKOVA<sup>1),2)</sup><sup>1)</sup>A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine<sup>2)</sup>V.N.Karazin Kharkov National University**ESTIMATION OF FREE AND FORCED VIBRATIONS OF SHELL STRUCTURES WITH FLUID-  
FILLED COMPARTMENT**

*In this paper we consider free and forced vibrations of shell structures with fluid-filled compartments. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one and its flow introduced by the vibrations of a shell is irrotational. The impulse loads are considered. For slosh damping it is proposed to install inner baffles. The problem of the fluid-structure interaction was solved using the single-domain and multi-domain reduced boundary element methods. The numerical values of frequencies are obtained. The forced vibrations are considered under harmonic and impulse loading.*

*Keywords: shell of revolution, ideal incompressible liquid, baffles, singular integral equations, impulse loading*

**Анализ последних публикаций по теме исследования и постановка задачи**

Контейнеры и резервуары для хранения нефти, легковоспламеняющихся и ядовитых жидкостей широко используются в различных областях инженерной практики, таких как авиастроение, химическая и нефтегазовая промышленность, энергетическое машиностроение, транспорт. Эти резервуары функционируют в условиях повышенных технологических нагрузок и заполнены нефтью, легковоспламеняющимися или ядовитыми веществами. В результате внезапного действия нагрузок, вызванных землетрясениями, другими форс-мажорными обстоятельствами жидкость, хранящаяся в резервуарах начинает испытывать интенсивные плескания.

Плескания – это феномен, наблюдающийся в ряде промышленных объектов: в контейнерах для хранения сжиженного газа, нефти, топливных баках, в резервуарах грузовых танкеров. Известно, что именно частично заполненные резервуары подвергаются действию особо интенсивных плесканий. Это может привести к высокому давлению на стенки резервуара, разрушению конструкции или к потере устойчивости и вызвать утечку опасного содержимого, что в свою очередь, может привести к серьезным экологическим последствиям. Интенсивное движение жидкости в резервуарах является предметом научных исследований в течение нескольких последних десятилетий. Интерес к проблеме вызван чрезвычайной важностью контроля плесканий в топливных баках ракетносителей. Близость частот колебаний жидкости к частотам регулирующих механизмов неоднократно приводила к потере устойчивости, сходу с орбиты, разрушению летательных аппаратов [1].

Анализ исследований, посвященных проблемам плескания жидкости в резервуарах, дан в работах Р.А. Ибрагима [2,3]. Отметим также работы, посвященные плесканием жидкости в цилиндрических резервуарах под действием сейсмических нагрузок [5]. Свободные колебания жидкости в конических и цилиндрических резервуарах рассмотрены в работе [6].

**Цель исследования**

Целью данного исследования является анализ свободных и вынужденных колебаний оболочек вращения с произвольным меридианом и внутренними перегородками, установленными для гашения плесканий.

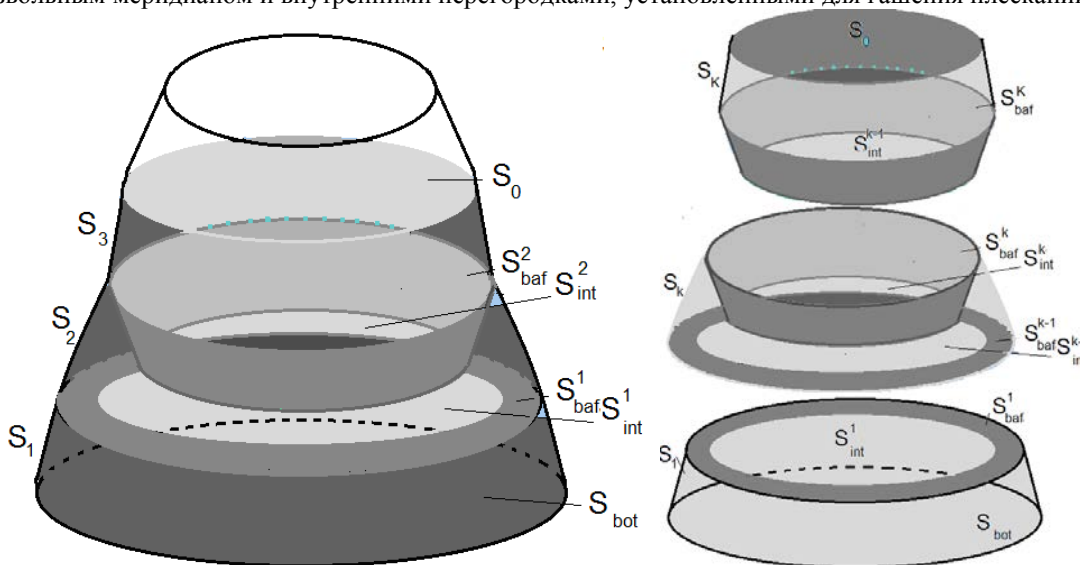


Рис.1.Оболочка с внутренними перегородками и схема с суперэлементами

Обозначим смоченную поверхность оболочки через  $S_1$ , а свободную поверхность -  $S_0$ . Пусть также  $S_{baf}$  – поверхность перегородки,  $S_{int}$  – поверхность интерфейса. Отметим, что перегородок, а , следовательно, и поверхностей интерфейса может быть несколько.

Считаем, что декартова система координат  $Oxyz$  связана с оболочкой, свободная поверхность жидкости  $S_0$  совпадает с плоскостью  $xOy$  в состоянии покоя. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, начавшееся из состояния покоя, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей жидкости  $\Phi$

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

удовлетворяющий уравнению Лапласа.

Величину давления  $p$  на стенки оболочки определяем из линеаризованного интеграла Коши-Лагранжа по формуле

$$p = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) + p_0 + a_s(t)x,$$

в которой  $\Phi$  – потенциал скоростей,  $g$  – ускорение свободного падения,  $z$  – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении,  $\rho_l$  – плотность жидкости,  $p_0$  – атмосферное давление,  $a_s(t)x$  - функция, характеризующая внешнее воздействие (горизонтальная сейсмическая нагрузка или импульс).

На свободной поверхности жидкости должны быть выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0,$$

где функция  $\zeta$  описывает форму и положение свободной поверхности.

Таким образом, для потенциала скоростей имеем следующую краевую задачу

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + a_s(t)x \Big|_{S_0} = 0.$$

Определив потенциал скоростей  $\Phi$  и функцию  $\zeta$ , установим высоту подъема свободной поверхности и определим давление жидкости на стенки оболочки.

**Изложение основного материала исследования**

Представим потенциал  $\Phi$  в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^M d_k \varphi_k. \tag{1}$$

Для функций  $\varphi_k$  рассмотрим следующие краевые задачи:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \tag{3}$$

Продифференцируем второе соотношение в (3) по  $t$  и подставим в полученное равенство  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  из первого соотношения. Далее представим функции  $\varphi_k$  в виде  $\varphi_k(t, x, y, z) = e^{i\chi_k t} \varphi_k(x, y, z)$ . Приходим к проблеме собственных значений, при этом на свободной поверхности будет выполнено равенство

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k. \tag{4}$$

Для уравнения свободной поверхности получим выражение

$$\zeta = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}. \tag{5}$$

В цилиндрической системе координат имеем выражения для искомых функций

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha \theta \tag{6}$$

Здесь  $\alpha$  – номер гармоники. Таким образом, отдельно рассматриваются частоты и формы свободных колебаний для различных  $\alpha$ .

Представим  $\Phi$  в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя [5]

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \Phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS. \tag{7}$$

Здесь  $S = S_1 \cup S_0$ ; точки  $P$  и  $P_0$  принадлежат поверхности  $S$ .

Величина  $|P - P_0|$  - декартово расстояние между точками  $P$  и  $P_0$ .

Удовлетворив граничным условиям (2),(3), приходим к системе интегральных уравнений в виде [5]. Для решения этой системы сингулярных интегральных уравнений применим метод граничных элементов. Для расчета колебаний бака при наличии перегородки используем метод подобластей (граничных суперэлементов). Для этого вводим «искусственную» поверхность интерфейса  $S_{int}$  [6], разбиваем область, заполненную жидкостью, на части  $\Sigma_1; \Sigma_2, \dots$  ограниченные соответственно поверхностями  $S_w, S_{baf}, S_{int}$  и  $S_w, S_{baf}, S_{int}, S_0$ . На поверхности интерфейса ставятся такие граничные условия:

$$\Phi \Big|_{S_{int} \cap \partial \Sigma_1} = \Phi \Big|_{S_{int} \cap \partial \Sigma_2}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{int} \cap \partial \Sigma_1} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{int} \cap \partial \Sigma_2} \tag{9}$$

Краевая задача с дополнительными граничными условиями (9) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений вида [5]

$$\begin{aligned} A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_{1i} &= B_{12}q_1; & P_0 \in S_1; \\ A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_{1i} &= B_{22}q_1; & P_0 \in S_{int}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{32}\varphi_{1i} + A_{33}\varphi_2 + A_{34}\varphi_0 - \omega^2 B_{34}\varphi_0 &= -B_{32}q_1; & P_0 \in S_2; \\ A_{22}\varphi_{1i} + A_{23}\varphi_2 + A_{24}\varphi_0 - \omega^2 B_{24}\varphi_0 &= -B_{22}q_1; & P_0 \in S_{int}; \\ A_{42}\varphi_{1i} + A_{43}\varphi_2 + A_{44}\varphi_0 - \omega^2 B_{44}\varphi_0 &= -B_{42}q_1; & P_0 \in S_0. \end{aligned}$$

Определив базисные функции  $\varphi_k$ , подставим их в выражения для потенциала скоростей (1) и формы свободной поверхности (5). Полученные ряды подставляем в краевое условие на свободной поверхности

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + a_s(t)x \right|_{S_0} = 0.$$

Поскольку в цилиндрической системе координат  $x = r \cos \theta$ , то нас будет интересовать только первая гармоника, т.е. в формуле (6) полагаем  $\alpha=1$ . Приходим к следующему соотношению, выполненному на поверхности  $S_0$

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_k + g \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} + a_s(t)r = 0.$$

Но на поверхности  $S_0$  выполнено соотношение (4), тогда приведенное выше равенство примет вид

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_k + \sum_{k=1}^M \chi_k^2 d_k \varphi_k + a_s(t)r = 0. \tag{9}$$

Умножая равенство (9) скалярно на  $\varphi_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ) и воспользовавшись ортогональностью собственных форм, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{d}_k + \chi_k^2 d_k + a_s(t)F_k = 0; \quad F_k = \frac{(r, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}; \quad k = \overline{1, M}. \tag{10}$$

Считаем, что до приложения горизонтального импульса резервуар находился в состоянии покоя. Тогда (10) решаем при нулевых начальных условиях. Для решения системы (10) в работе применен операционный метод.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с плоским дном, частично заполненную жидкостью. Параметры резервуара следующие: радиус  $R = 1\text{м}$ , толщина  $h = 0.01\text{м}$ , длина  $L = 2\text{м}$ . Уровень заполнения оболочки  $H=0.8\text{м}$ . В качестве функции  $a_s(t)$  принималась ступенька Хевисайда. Для проведения расчетов принимали разное количество базисных функций  $M=1, 2, 5$ . Дальнейшее увеличение числа базисных функций не приводило к существенному изменению результатов. На рис 2 показана форма колебаний свободной поверхности в точке  $r = 0.5\text{м}$  в зависимости от времени при числе базисных функций  $M=5$ .

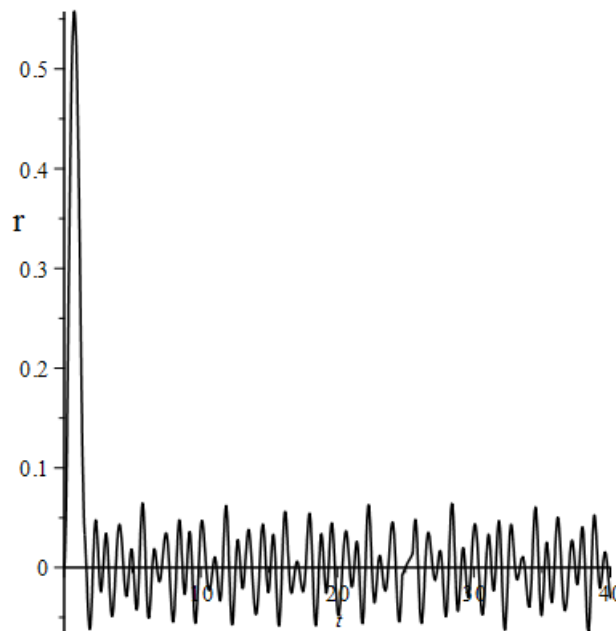


Рис.2 Поведение свободной поверхности при импульсной нагрузке.

На рис. 3 показано изменение уровня подъема в цилиндрической оболочке в точках  $r = 0.8$  и  $r = 0.5$  под действием гармонической нагрузки  $a_x(t) = \cos 3t$ . Серые линии отвечают амплитудам колебаний для оболочки без перегородки, черные - с перегородкой. Перегородка установлена на высоте  $H_1 = 0.6$  м, радиус отверстия в перегородке  $R_1 = 0.5$  м.

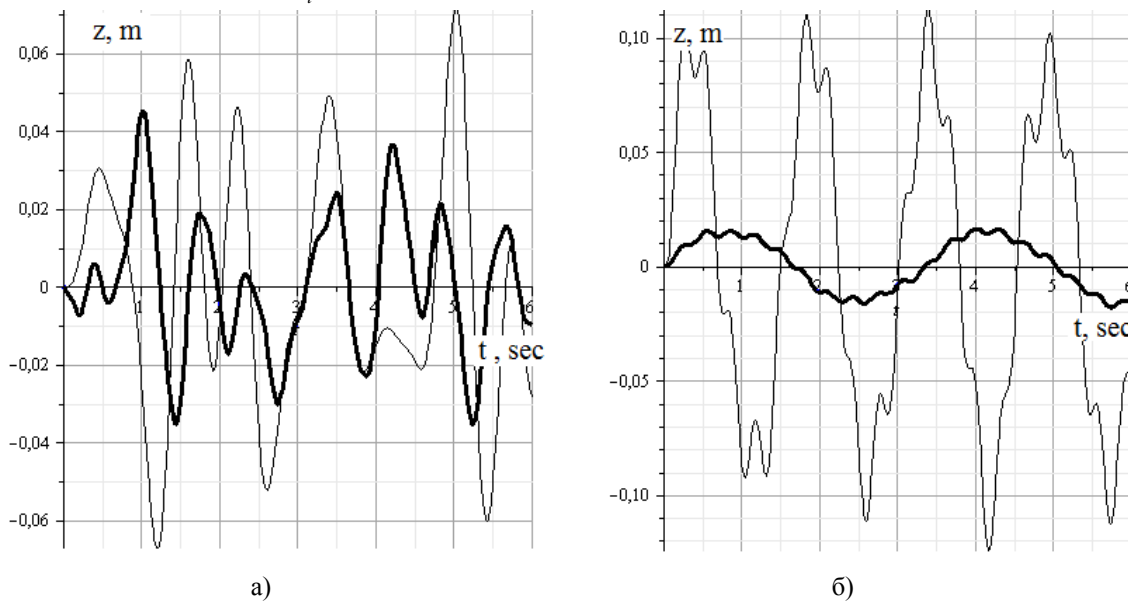


Рис.3 Амплитуда колебания жидкости в цилиндрической оболочке

#### Выводы

Разработанный метод позволяет оценить уровень подъема свободной поверхности при действии внезапно приложенной нагрузке, что позволит дать рекомендации по установке защитных перегородок.

#### Список использованной литературы

1. Space Exploration Technologies Corp. Demo Flight 2 Flight Review Update, June 15, 2007.
2. R.A. Ibrahim. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics. / R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, T. Ikeda //Applied Mechanics Reviews, Vol. 54, No. 2, PP. 133-199, 2001.
3. R.A. Ibrahim. Liquid Sloshing Dynamics. Cambridge University Press, New York, 2005
4. Шувалова Ю.С., Крютченко Д.В., Стрельникова Е.А. Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах. Вестник Херсонского национального технического университета, 58, №3, 2016, с. с.455-459.
5. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., Strelnikova, E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, **17(1)**, pp.75-87, 2016.
6. Gnitko, V., Degtyariv, K., Naumenko, V., Strelnikova, E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, **5(3)**, pp. 317-328, 2017

УДК 532.593

А.П. ГОРОВЕНКО  
Інститут геофізики НАН У**НАПРУЖЕННЯ В ПРУЖНОМУ ВКЛЮЧЕННІ В РІДИНІ ПІД ДІЄЮ ХВИЛІ  
ТИСКУ**

Отримано рішення задачі дифракції хвилі тиску на включенні в рідині в вигляді рядів по сферичним функціям. Розраховані величини напружень у включенні для різних пружних матеріалів включення.

Ключові слова: дифракція хвилі, ряди по сферичним функціям, напруження.

А.П. ГОРОВЕНКО.  
Інститут геофізики НАН У**НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОМ ВКЛЮЧЕНИИ В ЖИДКОСТИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ  
ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ**

Получено решение задачи дифракции волны давления на включении в жидкости в виде рядов по сферическим функциям. Рассчитаны величины напряжений во включении для различных упругих материалов включения.

Ключевые слова: дифракция волны, ряды по сферическим функциям, напряжения.

А.П. ГОРОВЕНКО  
Institute geophysical Acad. Science of Ukraine**THE STRESSES IN ELASTIC INCLUSION IN A LIQUID PRODUCED BY THE COMPRESSIONAL  
WAVE**

The solution of the problem of pressure wave diffraction as rows of spherical functions is obtained. Value of stresses in inclusion for differences elastic materials of inclusion are calculated.

Keywords: wave diffraction, rows of spherical functions, stresses.

**Постановка проблеми**

Дифракція хвилі тиску на пружному включенні в рідині має важливе наукове та прикладне значення, зокрема для ряду задач геофізики та акустики.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Дослідженню явища дифракції хвилі на включенні присвячено ряд робіт, зокрема, [1]-[3]; отримані результати відносяться, як правило, до далекої зони, для оцінки хвиль в ближній зоні та у включенні необхідні подальші дослідження.

**Формулювання цілі дослідження**

Виконати комп'ютерні розрахунки напружень у включенні в залежності від частоти хвилі. Дослідження провести в широкому діапазоні значень густин та швидкостей хвиль для різних пружних середовищ включення.

**Виклад основного матеріалу дослідження**

Більш детальний виклад досліджень наведений в роботі [4], далі розглянемо основні тези.

Отже нехай на пружну сферу радіусом  $a$ , розташовану в рідині набігає плоска акустична хвиля тиску  $\tilde{p}_1 = p \exp(ik_1 r \cos \theta + \omega t)$ , де  $r, \theta$  – координати точки, відраховані від центра сфери. Напруження та зміщення залежать від скалярних потенціалів  $\phi$  та  $\psi$  пов'язаних з хвилями тиску та зсуву, відповідно, [4]. Далі використаємо постійні розповсюдження  $k_p = \omega/V_p$ ,  $K_S = \omega/V_S$ , це хвильові числа для хвиль тиску та зсуву, відповідно;  $\omega$  – кругова частота,  $V_p$  – швидкість хвилі тиску,  $V_s$  – швидкість хвилі зсуву. Швидкості розповсюдження хвиль дорівнюють  $V_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ ,  $V_s^2 = \mu/\rho$ , де  $\lambda, \mu$  – параметри Ляме,  $\rho$  – густина.

Введемо позначення:  $i$  – падаюча хвиля,  $S$  – розсіяна хвиля,  $f$  – хвиля у включенні,  $1$  – матриця,  $2$  – включення. Зовнішня хвиля тиску, яка падає на включення, може бути записана в сферичній системі координат у вигляді



$$\begin{aligned} \Phi_i &= \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) j_m(k_1 r) Y_m(\cos \theta), \\ \Psi_i &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де  $j_m(x)$  - сферична функція Бесселя,  $Y_m(\cos \theta)$  – поліноми Лежандра.

В загальному вигляді в матриці будуть  $p$  та  $S$  хвилі з потенціалами

$$\begin{pmatrix} \Phi_s \\ \Psi_s \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} A_m h_m(k_1 r) \\ B_m h_m(K_1 r) \end{pmatrix} Y_m(\cos \theta), \tag{2}$$

де  $h_m^{(2)}(x)$  - сферична функція Ганкеля другого роду;  $A_m, B_m$  - коефіцієнти розкладу в ряди.

$$h_m^{(2)}(x) = j_m(x) - i N_m(x), \tag{3}$$

де  $j_m(x)$  - сферична функція Бесселя,  $N_m(x)$  – сферична функція Неймана.

Коли матриця рідина потенціал  $\Psi_s = 0$ , тобто  $B_m = 0$ .

У включенні хвиля тиску має потенціал

$$\Phi_f = \sum_{m=0}^{\infty} C_m j_m(k_2 r) Y_m(\cos \theta). \tag{4}$$

В пружному включенні також буде хвиля зсуву з потенціалом  $\Psi_f$

$$\Psi_f = \sum_{m=0}^{\infty} D_m j_m(K_2 r) Y_m(\cos \theta). \tag{5}$$

Коефіцієнти розкладу в ряди  $A_m, C_m, D_m$  визначаються з граничних умов на поверхні включення ( $r = a$ ). Наведемо граничні умови для  $r = a$

1. Неперервність зміщень

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \text{ тобто } u_{ri} + u_{rs} = u_{rf}, \tag{6}$$

2. Неперервність компонент тензора напружень

$$\tau_r^{(1)} = \tau_r^{(2)}, \text{ тобто } \tau_{ri} + \tau_{rs} = \tau_{rf}, \tag{7}$$

$$\tau_{\theta}^{(1)} = \tau_{\theta}^{(2)}, \text{ тобто } \tau_{\theta i} + \tau_{\theta s} = \tau_{\theta f}. \tag{8}$$

Використовуючи рівняння теорії пружності та рівняння (1)-(8) знайдемо зміщення та компоненти тензора напруження, підставимо ці величини в граничні умови і визначимо коефіцієнти розкладу в ряди  $A_m, C_m, D_m$  [4].

Аргументом досліджуваних функцій була величина  $ka$ , де  $k$  - хвильове число,  $a$  - радіус включення. Величина  $k$  дорівнює  $2\pi\nu/V_p$ , де  $\nu$  – частота в Гц,  $V_p$  – швидкість хвилі тиску в середовищі. Далі будуть наведені результати комп'ютерних розрахунків величин зміщення  $u_{rf}$ , нормованої компоненти  $\tau_{rf}^* = \tau_{rf}/(\rho_2 \omega^2)$  та нормованої компоненти  $\tau_{\theta f}^* = \tau_{\theta f}/(2\rho_2 \omega^2/K_2^2)$  тензора напруження у включенні на

відстані  $r$  від центра включення; також будуть наведені діаграми напрямку цих величин. Розрахунки були виконані для випадку матриця вода, включення вапняк,  $a=0,01$ .

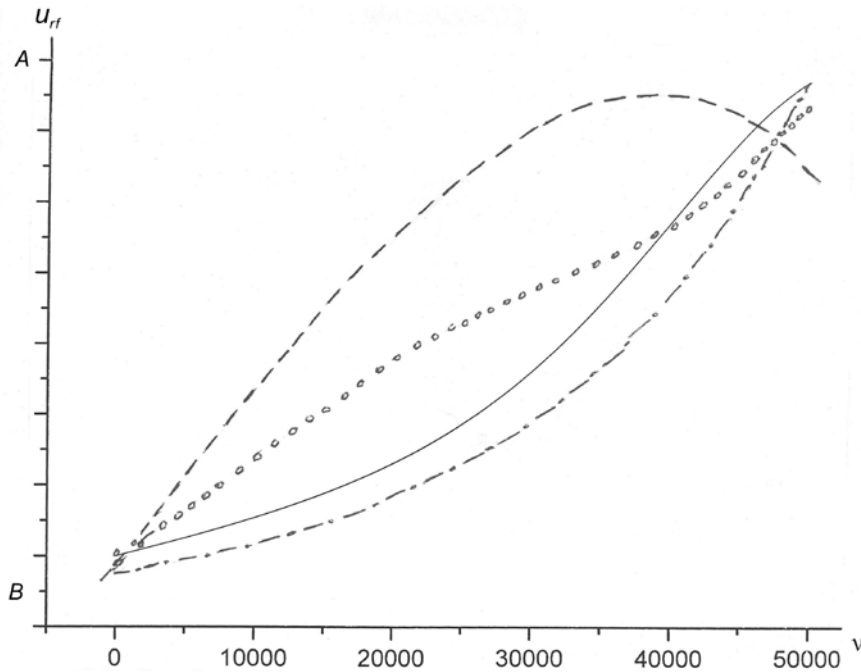


Рис.1. Залежність зміщення  $u_{rf}$  від частоти,  $\theta$  та  $g$ -параметри.

—  $AB=0-0,07$      $r=0,99a$      $\theta=180$ , ...  $AB=0-0,00023$      $r=0,1a$      $\theta=180$ ,  
 ---  $AB=0-0,00016$      $r=0,1a$      $\theta=0$ , -.-  $AB=0-0,1$      $r=0,99a$      $\theta=0$ .

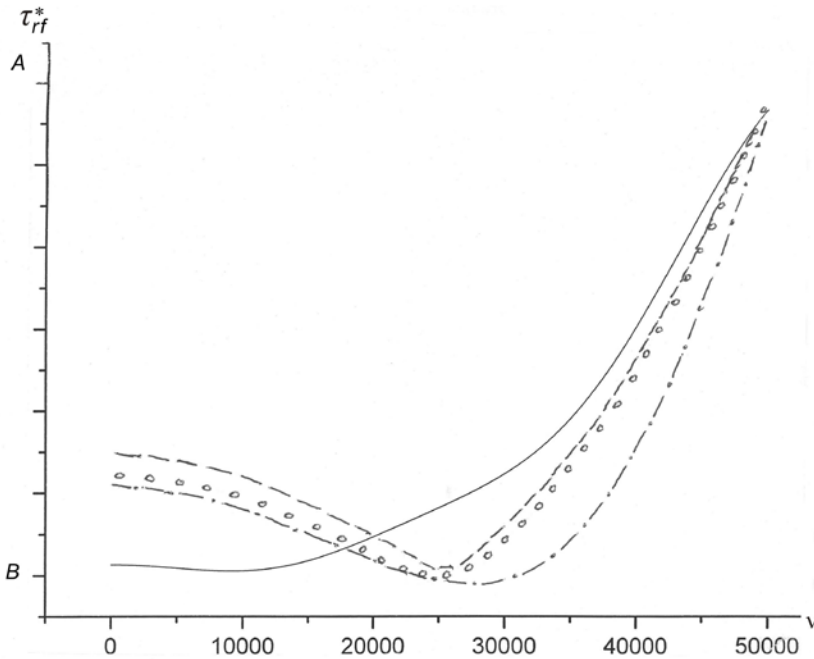


Рис.2. Залежність компоненти  $\tau_{rf}^*$  тензора напруження від частоти,  $\theta$  та  $g$ -параметри.

—  $AB=0,4-1,0$      $r=0,99a$      $\theta=180$ , ...  $AB=0,1-1,5$      $r=0,1a$      $\theta=180$ ,  
 ---  $AB=0,005-1,6$      $r=0,1a$      $\theta=0$ , -.-  $AB=0,35-0,8$      $r=0,99a$      $\theta=0$ .

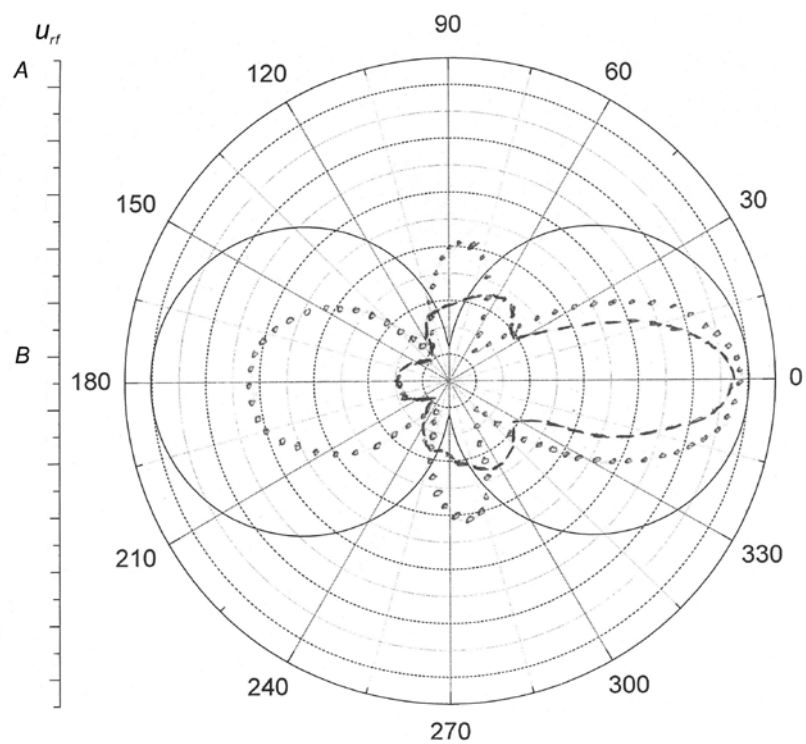


Рис.3. Діаграма напрямку зміщення  $u_{rf}$  для різних частот хвилі тиску,  $r=0,99a$ .  
 —  $AB=0-0,0005$   $V=1$  КГц, ...  $AB=0,02-0,1$   $V=50$  КГц, ---  $AB=0,05-0,35$   $V=100$  КГц.

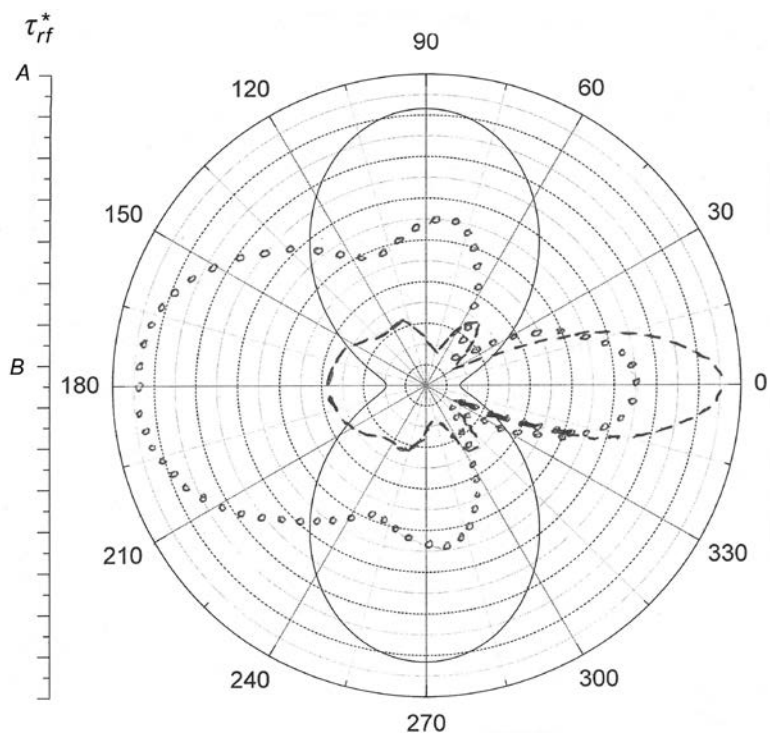


Рис.4. Діаграма напрямку компоненти  $\tau_{rf}^*$  для різних частот хвилі тиску,  $r=0,99a$ .  
 —  $AB=0,41302-0,41309$   $V=1$  КГц, ...  $AB=0,2-1,0$   $V=50$  КГц, ---  $AB=0,4-2,0$   $V=100$  КГц.

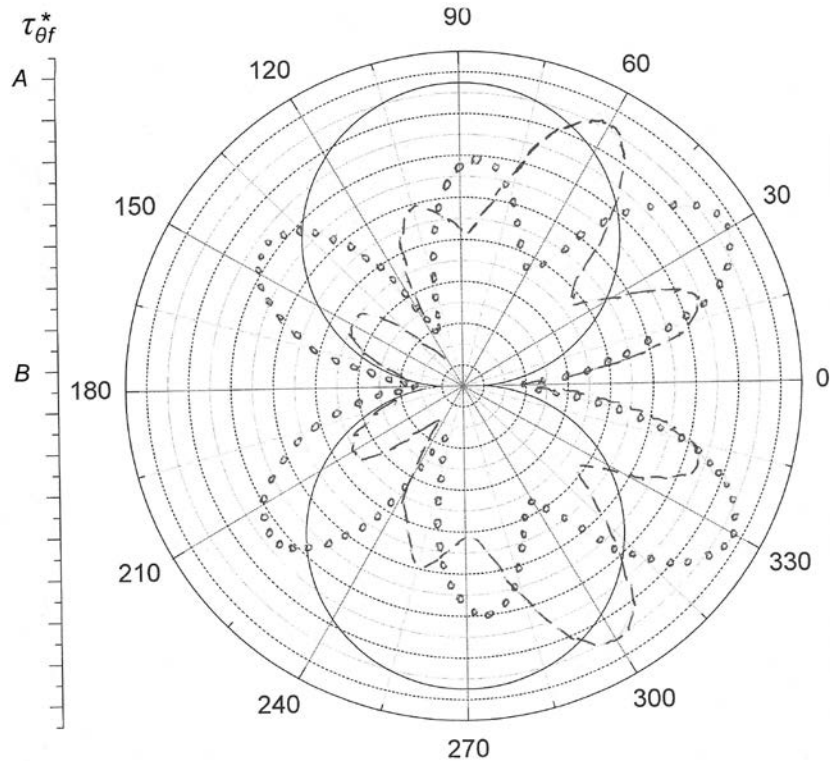


Рис.5. Діаграма напрямку компоненти  $\tau_{\theta f}^*$  для різних частот хвилі тиску,  $\gamma=0,99a$ .  
 —  $AV=0-0,0014$   $\nu=1$  КГц, ...  $AV=0-0,03$   $\nu=50$  КГц, ---  $AV=0-0,08$   $\nu=100$  КГц.

Для  $\gamma=0,99a$  компонента  $\tau_{rf}^*$  майже однакова для частот до 10 КГц, а потім повільно росте до величини 1,0 для  $\nu=50$  КГц та 2,0 для  $\nu=100$  КГц; компонента  $\tau_{\theta f}^*$  на два порядки менша за величиною в порівнянні з  $\tau_{rf}^*$  для частот до 10 КГц, а потім росте, так для  $\nu=50$  КГц вона зростає в 15 раз.

Для  $\gamma=0,1a$  зміщення менші за величиною чим для  $\gamma=0,99a$ , поведінка  $\tau_{rf}^*$  приблизно така ж, як і для  $\gamma=0,99a$ , а кутова компонента  $\tau_{\theta f}^*$  більша по величині в порівнянні з радіальною компонентою  $\tau_{rf}^*$ .

#### Висновки

1. Розглянуто точний розв'язок задачі дифракції хвилі тиску пружним включенням в рідині. Розв'язок представлений рядами по сферичним функціям Бесселя, Неймана, Ганкеля, поліномам та приєднаним функціям Лежандра. Розроблений алгоритм та створена програма для комп'ютерних розрахунків амплітуди дифрагованої хвилі, зміщень та компонент тензора напружень.
2. Нормовані компоненти тензора напружень  $\tau_{rf}^*$  та  $\tau_{\theta f}^*$  майже не залежать від частоти для  $\nu$  до 10 КГц, а потім ростуть за величиною. Близько до поверхні включення ( $\gamma=0,99a$ ) радіальна компонента значно більша кутової компоненти, в той час як близько до центра включення ( $\gamma=0,1a$ ) навпаки, кутова компонента більша радіальної.

#### Список використаної літератури.

1. Mc.Mechan G.A. Resonant scattering by fluid-filled cavities. // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1982. 72.- №4.- P.1143-1153.
2. Gaunard G.C., Uberall H. Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media. // JASA. – 1978. 63.- p.1699-1712.
3. Brill D.G., Gaunard G.C., Uberall H. The response surface in elastic wave scattering. // J. Appl.Phys. – 1981. 52.- p.3205-3214.
4. Горovenko А.П. Дифракція хвилі тиску на сферичному пружному включенні в рідині. -Препринт. ІГФ НАНУ. Київ.2015.-23с.

УДК 550.837; 621.391

Ю.О. ГУМЕНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Ю.В. ЧОВНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины  
Киевский национальный университет строительства и архитектуры**МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ  
БИАНИЗОТРОПНЫХ/БИИЗОТРОПНЫХ ПАРАМЕТРОВ КАПИЛЛЯРНЫХ  
СИСТЕМ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ БИООБЪЕКТОВ**

*Приведены модели капиллярных систем электропроводности биообъектов, обладающие эффектом бианизотропии в диапазоне миллиметровых электромагнитных волн. Анализ эффективных электромагнитных бианизотропных/биизотропных параметров указанных объектов проведен для коэффициентов отражения и прохождения, позволяющий оценивать их состояние и реакцию на поляризованное электромагнитное излучение.*

*Ключевые слова: моделирование, анализ, электромагнитные волны, миллиметровый диапазон, бианизотропность, бианизотропность, параметры, капиллярные системы, электропроводность, биообъект.*

Ю.О. ГУМЕНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України  
Київський національний університет будівництва і архітектури**МОДЕЛЮВАННЯ І АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ  
БІАНІЗОТРОПНИХ/БІІЗОТРОПНИХ ПАРАМЕТРІВ КАПІЛЯРНИХ СИСТЕМ  
ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ БІООБ'ЄКТІВ**

*Наведені моделі капілярних систем електропровідності біооб'єктів, котрі мають ефект біанізотропії у діапазоні міліметрових електромагнітних хвиль. Аналіз ефективних електромагнітних біанізотропних/біізоотропних параметрів вказаних об'єктів проведений для коефіцієнтів відбиття та проникнення, що дозволяє оцінювати їх стан та реакцію на поляризоване електромагнітне випромінювання.*

*Ключові слова: моделювання, аналіз, електромагнітні хвилі, міліметровий діапазон, біізоотропність, біанізотропність, параметри, капілярні системи, електропровідність, біооб'єкт.*

Y.O. GYUMENYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

Y.V. CHOVNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine  
Kyiv National University of Construction and Architecture**MODELING AND ANALYSIS OF EFFECTIVE ELECTROMAGNETIC  
BI-ANISOTROPIC/BI-ISOTROPIC PARAMETERS OF CAPILLARY SYSTEMS OF ELECTRICAL  
CONDUCTIVITY OF BIOOBJECTS**

*The models of capillary systems of electrical conductivity of bioobjects with the effect of bi-anisotropic at the millimeter range of electromagnetic waves is proposed. The analysis of the electromagnetic effective bi-anisotropic/bi-isotropic parameters of mentioned objects is made for the coefficients of reflection and transmission. It gives the possibility to know the state and reaction of these objects on polarized electromagnetic emission.*

*Key words: modeling, analysis, electromagnetic waves, millimeter range, bi-isotropic, bi-anisotropic, parameters, capillary systems, electrical conductivity, bioobjects.*

**Постановка проблеми**

Электропроводность биообъектов живой природы определяется в основном электропроводностью флюида, находящегося в поровом пространстве. Одним из типов порового пространства является капиллярная система (т.н. открытая пористость), обеспечивающая не только электропроводность, но и гидромеханическую проницаемость биообъекта. Вычисление эффективных электромагнитных параметров такой системы представляет актуальную задачу физики живого, решение которой сопряжено с проблемой осреднения уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \vec{J}^{cm}, \\ \text{rot}\vec{E} = -i\omega\vec{B}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{J}$  - плотность электрического тока;  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля;  $\vec{E}, \vec{H}$  – напряжённости соответственно электрического и магнитного полей;  $\vec{J}^{cm}$  – плотность стороннего электрического тока неэлектромагнитного происхождения;  $\omega$  – частота;  $i$  – символ мнимой единицы.

Как будет показано ниже, осреднение капиллярной системы электропроводности биообъектов со сложной геометрией капилляров приводит к материальным уравнениям вида:

$$\begin{cases} \vec{J}(\vec{E}, \vec{H}) = \mathcal{E} \vec{E} + \mathcal{E} \vec{H}, \\ \vec{B}(\vec{E}, \vec{H}) = \mathcal{H} \vec{H} + \mathcal{E} \vec{E}, \end{cases} \quad (2)$$

где в общем случае  $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{E}, \mathcal{E}$  – матрицы  $\dim[3 \times 3]$ . Параметры  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  (соответственно удельная электропроводность и магнитная проницаемость среды) широко используются в электромагнитобиологии, в диагностике живой материи. Параметры  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}$  не получившие пока строго определённых названий, являются новыми в теории и практике диагностики/исследования живой материи. В совокупности с  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  они определяют наиболее общие линейные материальные уравнения. Такие (био-)среды, получившие название бианизотропных [1,2], описывают наиболее общие линейные электромагнитные свойства веществ.

Эффективные параметры  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}$  необходимы для адекватного описания электромагнитных свойств живой материи со сложной системой токопроводящих путей в миллиметровом диапазоне электромагнитных волн. Их введение является следствием извилистости поровых каналов, заполненных проводящим флюидом (вода, ионы). Их физический смысл заключается в возникновении электрического тока за счёт электродвижущей силы индукции (параметр  $\mathcal{E}$ ) и появлении магнитных диполей (параметр  $\mathcal{E}$ ) при наличии в биосреде замкнутых проводников. Такие замкнутые проводники (или замкнутые токи) формируются при разделении сложной геометрии капиллярной системы биообъекта на более простые геометрические объекты. Если рассматривать объём биообъекта, в котором отсутствуют непротяжённые (ограниченной длины) капилляры (т.н. закрытая пористость), и считать, что электропроводность биосреды обеспечивается исключительно электропроводностью флюида, находящегося в тонких протяжённых капиллярах, то каждый отдельный капилляр живого можно представить, например, в виде прямой линии тока, гальванически связанного с петлеобразной, имеющей форму греческой буквы  $\Omega$  [2]. Вмещающая биосреда полагается изолятором, магнитная проницаемость везде одинакова и равна магнитной проницаемости вакуума (т.н.  $\Omega$  – структура).

Задача осреднения уравнений Максвелла состоит в вычислении эффективных параметров для такой модели электропроводности биообъекта. Для этого прежде всего необходимо преобразовать некоторым образом сложную систему электрических токов  $\vec{J}$  с целью получения системы токов более простой конфигурации. После этого можно детально исследовать различные физические эффекты, в частности, изменение ориентации плоскости поляризации при прохождении/отражении от биообъекта электромагнитных волн миллиметрового диапазона нетепловой интенсивности.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Электродинамике сложных (искусственно созданных) сред, обладающих биизотропными, бианизотропными, киральными свойствами посвящена работа [2]. Бианизотропные/биизотропные параметры объектов исследования несут дополнительную информацию об их строении/структуре. Их изучение может быть полезным при диагностике живого, анализе и интерпретации данных электромагнитного зондирования биообъекта (коэффициентов отражения/прохождения). Например, важным следствием бианизотропных свойств биосреды является то обстоятельство, что распространение электромагнитного поля [3] в таких средах приводит к новым эффектам (в частности, к нарушению принципа взаимности [4]). Киральные среды и такие явления, как оптическая активность и круговой дихроизм, были известны с начала прошлого столетия, и оптические свойства гиротропных сред хорошо исследованы [1,5]. Гармонические во времени электромагнитные поля в киральных и биизотропных средах изучены в [6,7], а в бианизотропных – в [8,9]. В живой материи подобные явления и эффекты не изучались.

Следует отметить, что в данном исследовании частично использованы результаты работ [2,6-9].

#### Цель исследования

Обоснование электродинамических моделей в физике живого для биосред, имеющих киральные, биизотропные и бианизотропные свойства, является целью данного исследования. На основании указанных моделей проведен анализ электродинамических эффектов/явлений, возникающих в подобных биосредах и, в частности, получены аналитические зависимости для коэффициентов отражения/прохождения при облучении живой материи электромагнитными волнами нетепловой интенсивности миллиметрового диапазона.

## Изложение основного материала исследования

## 1. Общие линейные соотношения для киральных биосред.

Общие линейные соотношения, связывающие векторы электромагнитного поля в произвольной (линейной) биосреде можно записать в виде (2). (В данном исследовании используются диадные обозначения. Диадные функции обозначены двумя чертами сверху символа. Диадное произведение векторов обозначается как  $\vec{a}\vec{b}$ , скалярное произведение -  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , и векторное произведение  $\vec{a} \times \vec{b}$ ). При этом материальные параметры  $\varepsilon, \mu, \xi, \zeta$  – диадные функции частоты. Запись (2) предполагает гармоническую зависимость полей от времени (записываем её в виде  $\exp(j\omega t)$ ,  $j^2 = -1$ ,  $t$  – время). Как было указано выше, такие линейные биосреды общего вида называются бианизотропными. Соотношения (2) описывают линейные анизотропные биосреды и учитывают эффекты пространственной дисперсии первого порядка по волновому вектору плоских волн [1]. В изотропных биосредах материальные параметры – скаляры или псевдоскаляры. В этом случае материальные соотношения удобно записывать в виде:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} + (\chi - j\kappa) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{H}, \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} + (\chi + j\kappa) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{E}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\varepsilon, \mu, \chi, \kappa$  – безразмерные комплексные параметры (они становятся вещественными для биосред без потерь),  $\varepsilon_0, \mu_0$  – абсолютная диэлектрическая или магнитная проницаемость вакуума, соответственно. Биосреды, описываемые соотношениями (3), называются биизотропными. В соответствии с обобщённой теоремой взаимности [10] во взаимных биосредах выполняются соотношения:

$$\varepsilon = \varepsilon^T, \mu = \mu^T, \zeta = -\xi^T, \quad (4)$$

где индекс  $T$  означает операцию транспонирования диадной функции (или матрицы, при матричной форме записи). Следовательно, во взаимных биизотропных средах коэффициент  $\chi$  равен нулю, поэтому его называют параметром невзаимности. Другое название параметра  $\chi$  – параметр Теллегена, т.к. модель искусственной невзаимной среды с отличным от нуля параметром  $\chi$  была предложена Теллегеном [2].

Таким образом, наиболее общая изотропная взаимная линейная биосреда характеризуется тремя комплексными материальными параметрами  $\varepsilon, \mu, \kappa$ . Параметр связи электрического и магнитного полей  $\kappa$  называется параметром киральности, а сама биосреда – киральной. Термин «киральный» происходит от греческого слова «рука» (типичный зеркально-асимметричный объект). Такие среды хорошо исследованы в оптике, включая кристаллооптику [1], где они называются оптически активными или гиротропными. Параметр  $\kappa$  может быть отличен от нуля только в биосредах, содержащих элементы, не обладающие зеркальной симметрией. Действительно, при инверсии пространственных координат аксиальный вектор напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  изменяет знак, а полярные векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  не изменяются. Следовательно, параметр  $\kappa$  должен изменять свой знак. Если сама биосреда не изменяется при таком преобразовании координат, параметр киральности должен быть нулём.

Итак, в изотропных киральных биосредах при взаимодействии с электромагнитным излучением (ЭМИ) мм-диапазона в качестве зеркально-асимметричных элементов чаще всего могут выступать небольшие спиралевидные структуры (нити). Частные случаи бианизотропных биосред (2) могут быть реализованы, если они включают в себя структурные элементы (частицы) сложной формы (например, частицы в форме греческой буквы  $\Omega$ ). Бианизотропные или одноосные биосреды с такими включениями (последние могут возникать при взаимодействии близлежащих клеток, при их межклеточном взаимодействии – в т.н. межщелевых контактах (мостиковых структурах), либо при функционировании мембран клеток) обладают новыми интересными электродинамическими свойствами и являются базовыми элементами для функционирования в живой материи взаимных фазовращателей, электрически управляемых ответвителей, сканирующих внутренних антенн живого, могут служить основой для существования в биосреде тонких неотражающих ЭМИ (мм-диапазона) покрытий (как и укрытий для антенн живого организма (биологически активных точек – БАТ), функционирующих в указанном диапазоне электромагнитных волн, совпадающим с рядом характерных частот  $H_2O$ , которой насыщен любой биообъект) и, наконец, способом передачи информации между кластерами клеток живого.

## 2. Электромагнитные волны мм-диапазоа в биизотропных биосредах.

Рассмотрим основные электродинамические свойства биизотропных биосред, описывающихся материальными соотношениями вида (3). По-видимому, наиболее рациональный способ анализа электромагнитных полей в биизотропных биосредах основан на введении новых векторов поля, для которых уравнения Максвелла распадаются на две независимых (для случая однородной биосреды) системы дифференциальных уравнений первого порядка. Этот подход основан на факторизации векторного волнового уравнения.

Ограничиваясь случаем гармонической зависимости полей от времени, запишем уравнения Максвелла в виде:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -jk_0\eta_0\mu\vec{H} + k_0(\kappa - j\chi)\vec{E}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = j\frac{k_0}{\eta_0}\varepsilon\vec{E} + k_0(\kappa + j\chi)\vec{H}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ . Исключая вектор магнитного поля  $\vec{H}$ , приходим к векторному уравнению Гельмгольца:

$$H \cdot \vec{E} = 0, \quad (6)$$

где оператор  $H$  представляется в следующем виде:

$$H = [\nabla \times I - k_0(\kappa + j\chi)I] \cdot [\nabla \times I - k_0(\kappa - j\chi)I] - k_0^2\varepsilon\mu I, \quad (7)$$

$I$  – единичная диада. Оператор  $H$  (7) может быть представлен в виде произведения двух операторов первого порядка:

$$H = H_+ \cdot H_- = (\nabla \times I - k_+ \cdot I) \cdot (\nabla \times I + k_- \cdot I), \quad (8)$$

где

$$k_{\pm} = k_0 \left( \sqrt{n^2 - \chi^2} \pm \kappa \right), \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (9)$$

Операторы  $H_+$  и  $H_-$ , как легко проверить, коммутируют.

Пусть теперь две векторные функции  $E_+$  и  $E_-$  удовлетворяют уравнениям первого порядка:

$$H_+ \cdot \vec{E}_+ = 0, \quad H_- \cdot \vec{E}_- = 0, \quad (10)$$

т.е.

$$\nabla \times \vec{E}_+ = k_+ \cdot \vec{E}_+, \quad \nabla \times \vec{E}_- = -k_- \cdot \vec{E}_-. \quad (11)$$

Новые переменные  $\vec{E}_{\pm}$  можно назвать волновыми полями. Очевидно, любая линейная комбинация функций  $\vec{E}_+, \vec{E}_-$  удовлетворяет исходному уравнению Гельмгольца (6). Поэтому будем искать решение исходного уравнения для электрического поля  $\vec{E}$  в виде суммы:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-. \quad (12)$$

Выражение для магнитного поля через новые переменные получается из уравнения Максвелла:

$$\vec{H} = \frac{j}{k_0\eta_0\mu} \cdot [\nabla \times I - k_0(\kappa - j\chi)I] \cdot (\vec{E}_+ + \vec{E}_-) = \frac{j}{\eta} \cdot [\exp(j\varphi) \cdot \vec{E}_+ - \exp(-j\varphi) \cdot \vec{E}_-], \quad (13)$$

где  $\sin\varphi = \chi/n$  – нормированный параметр невзаимности и  $\eta = \eta_0 \cdot \sqrt{\mu/\varepsilon}$ . Для взаимных биосред параметр  $\chi$  равен нулю и уравнение (13) упрощается:

$$\vec{H} = \frac{j}{\eta} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-). \quad (14)$$

Таким образом, задача для однородной биизотропной биосреды сводится к решению двух несвязных задач для двух обычных изотропных биосред. Действительно, уравнения (11) имеют такой же вид, как соответствующие волновые уравнения для изотропных биосред. Более того, вводя ещё два новых вектора  $\vec{H}_+$  и  $\vec{H}_-$  и обозначая:

$$\varepsilon_+ = \varepsilon_0\varepsilon \cdot (\cos\varphi + \kappa) \cdot \exp(j\varphi), \quad \varepsilon_- = \varepsilon_0\varepsilon \cdot (\cos\varphi - \kappa) \cdot \exp(-j\varphi), \quad (15)$$

$$\mu_+ = \mu_0\mu \cdot (\cos\varphi + \kappa) \cdot \exp(-j\varphi), \quad \mu_- = \mu_0\mu \cdot (\cos\varphi - \kappa) \cdot \exp(j\varphi), \quad (16)$$

уравнениям для новых переменных можно придать форму обычных уравнений Максвелла для двух эквивалентных изотропных биосред с параметрами  $\varepsilon_{\pm}, \mu_{\pm}$ :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\pm} + j\omega\mu_{\pm} \cdot \vec{H}_{\pm} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}_{\pm} - j\omega\varepsilon_{\pm} \cdot \vec{E}_{\pm} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Векторы сторонних электрических и магнитных токов также могут быть разбиты на соответствующие волновые составляющие.



Итак, собственные волны в безграничных однородных биизотропных биосредах оказываются циркулярно поляризованными плоскими волнами с постоянными распространения (9). Две собственные волны в невзаимных биосредах также имеют различные волновые сопротивления.

Разумеется, в неоднородных биосредах волновые поля  $\vec{E}_{\pm}$  оказываются связанными. Граничные условия на поверхности, разделяющей две разные биосреды, требуют непрерывности касательных составляющих полных полей  $\vec{E}, \vec{H}$ , а на волновых полях – в отдельности.

Для решения задач отражения и прохождения волн через слоистые биизотропные биосреды можно воспользоваться методами векторных цепей и векторных линий передачи [11-14]. Эти методы обобщают известный подход эквивалентных линий передачи, широко применяющийся при решении задач о слоистых структурах из изотропных слоёв.

Рассмотрим плоский слой биизотропного материала (элемент биосреды) толщиной  $d$ . Единичный вектор нормали к слою обозначим посредством  $\vec{n}$ . Преобразуем уравнения для полей в слое по Фурье. Двумерное преобразование Фурье выполняется по касательным координатам (в плоскости слоя). Двумерную переменную Фурье обозначим посредством вектора  $\vec{k}_t$ . Обозначая преобразованные по Фурье касательные компоненты электрического и магнитного полей на нижней границе слоя через  $\vec{E}_{t-}, \vec{H}_{t-}$  и соответствующие компоненты на верхней границе через  $\vec{E}_{t+}, \vec{H}_{t+}$ , введём т.н. матрицу передачи, связывающую эти граничные значения касательных компонент:

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_{t+} \\ \vec{n} \times \vec{H}_{t+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{E}_{t-} \\ \vec{n} \times \vec{H}_{t-} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Элементы матрицы представляют собой диадные функции, т.к. они связывают между собой двумерные векторы касательных полей. Найти матрицу передачи можно, разложив поля на волновые компоненты (12) и решив соответствующие граничные задачи для уравнений первого порядка (11). Волновые компоненты полей на двух границах раздела связаны посредством диадных функций  $D_{\pm}$  [11,13]:

$$D_{\pm} = \cos(\beta_{\pm}d) \cdot I_t \mp \sin(\beta_{\pm}d) \cdot \left\{ \frac{k_{\pm}}{\beta_{\pm}} \cdot \frac{[\vec{n} \times \vec{k}_t \vec{k}_t]}{k_t^2} + \frac{\beta_{\pm}}{k_{\pm}} \cdot \frac{[\vec{k}_t \vec{k}_t \times \vec{n}]}{k_t^2} \right\}, \quad (19)$$

где  $\beta_{\pm} = \sqrt{k_{\pm}^2 - k_t^2}$ , и  $I_t$  – двумерная единичная диада. Элементы матрицы  $a_{lm}$ ,  $(l, m) = (\overline{1, 2})$ , легко выражаются через диады  $D_{\pm}$  [11]:

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{2} \cdot [D_+ + D_- - j \cdot \text{tg} \varphi \cdot (D_+ - D_-)], & a_{12} = \frac{j\eta}{2 \cos \varphi} \cdot [(D_+ - D_-) \times \vec{n}], \\ a_{21} = \frac{j}{2\eta \cos \varphi} \cdot [\vec{n} \times (D_+ - D_-)], & a_{22} = -\frac{1}{2} \cdot [\vec{n} \times [D_+ + D_- + j \cdot \text{tg} \varphi \cdot (D_+ - D_-)] \times \vec{n}] \end{cases} \quad (20)$$

Матрица передачи многослойной биоструктуры находится как произведение матриц передачи отдельных биослоёв.

Таким образом, плоский биизотропный слой можно моделировать эквивалентным четырёхполюсником с известной матрицей передачи. Касательные компоненты электрического и магнитного полей на границах слоя играют роль эквивалентных векторных напряжений и токов соответственно.

Коэффициенты отражения и прохождения плоских волн через многослойные биоструктуры выражаются через элементы матрицы передачи. Пусть с одной из сторон биоструктуры на границе раздела выполняются импедансные граничные условия, связывающие Фурье-компоненты касательных полей:

$$\vec{E}_{t-} = z'_c \cdot [\vec{n} \times \vec{H}_{t-}] \quad (21)$$

где  $z'_c$  – импеданс «нагрузки». Такая модель описывает как поверхности биосред с заданным импедансом, в том числе анизотропным, так и границы с изотропным полупространством. Обозначим посредством  $z_c$  диадный волновой импеданс [11,13] изотропной биосреды, в которой находится источник плоской волны, возбуждающей биизотропную биоструктуру. Входное сопротивление четырёхполюсника, моделирующего биоструктуру, с учётом импеданса «нагрузки»  $z'_c$  находится через элементы матрицы передачи  $\|a\|$  [11]:

$$\vec{E}_{t+} = z_{eq} \cdot [\vec{n} \times \vec{H}_{t+}], \quad z_{eq} = (a_{11} \cdot z'_c + a_{12}) \cdot (a_{21} \cdot z'_c + a_{22})^{-1}. \quad (22)$$

Тогда диадный коэффициент отражения, связывающий касательные компоненты падающей и отражённой волны, находится по формуле:

$$R = (z_{eq} - z_c) \cdot (z_{eq} + z_c)^{-1}. \quad (23)$$

Соответствующий коэффициент прохождения:

$$T = [a_{11} + a_{12} \cdot (z_c')^{-1}]^{-1} \cdot (I_t + R). \quad (24)$$

Следует отметить, что невзаимный характер преобразования поляризации при прохождении плоских волн через биизотропный биослой приведен в [11]. Так, для значений параметров:  $k_0d = 10$  (нормированная толщина слоя);  $\varepsilon = 5$ ;  $\mu = 1$ ;  $\chi = 0,3$ ;  $k = 0,01$  – поляризованная волна после отражения от биослоя оказывается поляризованной в ортогональном направлении.

3. Электромагнитные волны мм-диапазона в бианизотропных («омега»-подобных) биосредах.

Поскольку собственными волнами в изотропных киральных биосредах являются циркулярно поляризованные волны, взаимодействие этих биосред с линейно поляризованными электромагнитными волнами оказывается, вообще говоря, менее эффективным, чем с волнами круговой поляризации. Если в биосреде преобладают не спиралевидные структуры, а структуры в форме греческой буквы  $\Omega$ , то располагаясь (в биосреде) так, чтобы электрическое поле плоской волны было направлено вдоль прямых отрезков провода («омега-частицы»), а магнитное поле перпендикулярно петлям, эффективность дополнительного магнито-электрического взаимодействия существенно возрастает. Материальные соотношения, описывающие такую биосреду, будут бианизотропными. Их удобно записывать в виде [15]:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} + j \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot K_{em} \cdot \vec{H}, \\ \vec{B} = \mu \vec{H} - j \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot K_{me} \cdot \vec{E}. \end{cases} \quad (25)$$

Во взаимных биосредах выполняются соотношения (4). В частности, если прямые отрезки расположить вдоль оси  $X$ , а петли – в плоскости  $(X - Z)$ , то диадные коэффициенты будут иметь вид:

$$K_{em} = K \bar{x}_0 \bar{y}_0, \quad K_{me} = K \bar{y}_0 \bar{x}_0, \quad (26)$$

где  $K$  – безразмерный коэффициент связи, а  $\bar{x}_0, \bar{y}_0$  – орты соответствующих осей.

Если в биосреде обеспечивается эффективное взаимодействие с линейно поляризованными волнами независимо от направления поляризации или с неполяризованными волнами, то это, в частности, может быть вызвано существованием двух ортогональных решёток (или каркасов) из «омега-частиц». Такая биосреда обладает единственным физически выделенным направлением (ортогональным плоскости, в которой лежат прямые отрезки проводников). Материальные соотношения принимают вид:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} + j \cdot K \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot J \cdot \vec{H}, \\ \vec{B} = \mu \vec{H} - j \cdot K \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot J \cdot \vec{E}, \end{cases} \quad (27)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  – одноосные диады:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_t I_t + \varepsilon_n \cdot \bar{z}_0 \bar{z}_0), \quad \mu = \mu_0 \cdot (\mu_t I_t + \mu_n \cdot \bar{z}_0 \bar{z}_0). \quad (28)$$

Здесь:  $I_t = (\bar{x}_0 \bar{x}_0 + \bar{y}_0 \bar{y}_0)$  – двумерная единичная диада,  $J = \bar{z}_0 \times I_t = (\bar{y}_0 \bar{x}_0 - \bar{x}_0 \bar{y}_0)$  – оператор поворота двумерного вектора в плоскости  $(X - Y)$  на  $90^\circ$ .

Одноосная «омега-биосреда» оказывается таковой, содержащей участки в виде неотражающих покрытий (поглощающих энергию, в частности, в мм-диапазоне либо прозрачных в широком диапазоне частот и углов падения).

Для анализа электромагнитных свойств в биосредах с одноосной симметрией удобно разбить векторы поля на продольные и поперечные компоненты по отношению к единичному вектору оси  $Z$ :

$$\vec{E} = E_n \cdot \bar{z}_0 + \vec{E}_t, \quad \vec{H} = H_n \cdot \bar{z}_0 + \vec{H}_t. \quad (29)$$

После исключения продольных компонент уравнения Максвелла позволяют получить волновое уравнение для преобразованной по Фурье в плоскости  $(X - Y)$  поперечной компоненты электрического поля:

$$\frac{d^2 \vec{E}_t}{dz^2} + \left( \beta_{TM}^2 \cdot \frac{\bar{k}_t \bar{k}_t}{k_t^2} + \beta_{TE}^2 \cdot \frac{[\bar{z}_0 \times \bar{k}_t \bar{z}_0 \times \bar{k}_t]}{k_t^2} \right) \cdot \vec{E}_t = 0, \quad (30)$$

где  $\bar{k}_t$  – двумерная переменная Фурье,

$$\begin{cases} \beta_{TM}^2 = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_n} \cdot (k_0^2 \cdot \varepsilon_n \cdot \mu_t - k_t^2) - k_0^2 \cdot K^2, \\ \beta_{TE}^2 = \frac{\mu_t}{\mu_n} \cdot (k_0^2 \cdot \varepsilon_t \cdot \mu_n - k_t^2) - k_0^2 \cdot K^2 \end{cases} \quad (31)$$

- квадраты  $Z$  – компонент постоянных распространения двух собственных волн в биосреде. Собственные волны представляют собой линейно поляризованные ТМ- и ТЕ- волны. Соответствующими индексами отмечены собственные числа [11].

Интересно отметить, что хотя биосреда взаимна, волновые сопротивления для волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси  $Z$ , различны. Электрическое и магнитное поля распространяющихся волн связаны соотношением:

$$\vec{E}_t = \mp z_{\pm} \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{H}_t] \quad (32)$$

где диадная функция импеданса диагональна:

$$z_{\pm} = z_{\pm}^{TM} \cdot \frac{\vec{k}_t \vec{k}_t}{k_t^2} + z_{\pm}^{TE} \cdot \frac{[\vec{z}_0 \times \vec{k}_t \vec{z}_0 \times \vec{k}_t]}{k_t^2}, \quad (33)$$

а индексы  $\pm$  относятся к волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях оси  $Z$ , соответственно. Скалярные коэффициенты соответствуют линейно поляризованным ТМ- и ТЕ- волнам и их вычисление даёт [9]:

$$\begin{cases} z_{\pm}^{TM} = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_t}{\varepsilon_t}} \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{k_t^2}{k_0^2 \varepsilon_n \mu_t}} - K_r^2 \pm j \cdot K_r \right), \\ z_{\pm}^{TE} = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_t}{\varepsilon_t}} \cdot \frac{k_0^2 \varepsilon_t \mu_n}{(k_0^2 \varepsilon_t \mu_n - k_t^2)} \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{k_t^2}{k_0^2 \varepsilon_t \mu_n}} - K_r^2 \pm j \cdot K_r \right), \end{cases} \quad (34)$$

где нормированный коэффициент связи:

$$K_r = K / \sqrt{\varepsilon_t \mu_t}. \quad (35)$$

Свойства «омега-биосред» существенно отличаются от свойств биизотропных (невзаимных с параметром киральности  $\kappa = 0$ ). В «омега-биосредах» физически выделена не только ось  $Z$ , но и направление вдоль оси, однако теорема взаимности выполняется и, кроме того, существенную роль играет одноосная симметрия структуры биосреды. (По-видимому, в высоко организованной живой материи эти выделенные направления позволяют безотражательно, т.е. без существенных потерь на отражение, распространяться электромагнитным сигналам/волнам, в т.ч. мм-диапазона. Такие пути распространения электромагнитных волн можно отождествить с т.н. «китайскими» меридианами в теле человека, животного).

В связи с этим представляет интерес исследование свойств коэффициентов отражения и пропускания плоских линейно поляризованных электромагнитных волн мм-диапазона через плоский слой «омега-биосреды». Так как плоские ТЕ- и ТМ- волны являются собственными волнами биосреды, можно построить простую скалярную теорию, рассматривая эти две собственные поляризации отдельно. Простое обобщение теории длинных линий на случай, когда волны в противоположных направлениях имеют разные волновые импедансы, позволяет найти коэффициент отражения от биослоя толщиной  $d$  [9]:

$$R = - \frac{(z_1 - z_+)(z_2 + z_-) - (z_1 + z_-)(z_2 - z_+) \cdot \exp(-2j\beta d)}{(z_1 + z_+)(z_2 + z_-) - (z_1 - z_-)(z_2 - z_+) \cdot \exp(-2j\beta d)}. \quad (36)$$

Здесь  $z_1$  – волновое сопротивление биосреды с той стороны, с которой на слой падает плоская волна (мм-диапазона),  $z_2$  – волновое сопротивление биосреды с обратной стороны биослоя и  $z_{\pm}$  – волновые сопротивления для волн в биослое [13]. В зависимости от поляризации в (36) следует подставить значения  $z_{\pm}^{TM}$  или  $z_{\pm}^{TE}$ . Волновые сопротивления изотропных биосред  $z_{1,2}$  могут быть получены как частные случаи формулы, представленной в [13].

Коэффициент прохождения  $T$  дается формулой:

$$T = \frac{2 \cdot (z_- + z_+) \cdot z_2 \cdot \exp(-j\beta d)}{(z_1 + z_+) \cdot (z_2 - z_1) - (z_1 - z_-) \cdot (z_2 - z_+) \cdot \exp(-2j\beta d)}. \quad (37)$$

Наибольший интерес представляет исследование условий, при которых коэффициент отражения  $R$  в биосреде обращается в нуль. Как видно из (36), для случая биослоя в воздухе ( $z_1 = z_2$ ) отражение отсутствует

при любой толщине слоя, если  $z_+ = z_1 = z_2$ . В терминах материальных параметров,  $R = 0$  для ТМ-поляризованных волн при выполнении соотношения:

$$K = \frac{j}{2 \cos \varphi} \cdot \left( \mu_t - \varepsilon_t \cdot \cos^2 \varphi - \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \sin^2 \varphi \right) \quad (38)$$

и для ТЕ-поляризации волн (мм-диапазона) – при:

$$K = \frac{j}{2 \cos \varphi} \cdot \left( \mu_t \cdot \cos^2 \varphi - \varepsilon_t + \frac{1}{\mu_n} \cdot \sin^2 \varphi \right), \quad (39)$$

где  $\varphi$  – угол падения. При нормальном падении на биосреду плоской волны (мм-диапазона) оба условия (38) и (39), конечно, совпадают и записываются в очень простом виде:

$$K = \frac{j}{2} (\mu_t - \varepsilon_t). \quad (40)$$

В предельном случае обычного диэлектрического слоя  $K = 0$  условие (40) сводится к тривиальному требованию равенства относительных диэлектрических и магнитных проницаемостей [2].

4. Алгоритм анализа данных КВЧ- рефлектометрии при использовании волноводов с биизотропным/киральным заполнением.

При анализе данных рефлектометрии биосред в крайне высокочастотном диапазоне (КВЧ) с несущей частотой  $f \approx 60 ГГц$  обычно используются волноводы, внутрь которых помещена конкретная биосреда (или биообъект). Предположим, что этот биообъект обладает биизотропными/киральными свойствами. По-видимому, наиболее эффективный подход к анализу киральных и биизотропных волноводов основан на введении волновых полей и разбиении их на продольные и поперечные компоненты. Постоянные распространения волн в плоских волноводах могут быть определены с помощью метода векторных цепей [11,13].

Для произвольного цилиндрического волновода, заполненного однородной биизотропной биосредой, запишем волновые компоненты полей (12) в виде волн вдоль оси волновода:

$$\vec{E}_{\pm}(r) = [\vec{E}_{t\pm}(\rho) + \vec{z}_0 \cdot E_{z\pm}(\rho)] \cdot \exp(-j\beta d), \quad (41)$$

где индексами  $t$  и  $z$  помечены поперечные и продольные компоненты волновых полей, соответственно;  $\rho$  – радиус-вектор в поперечной плоскости. Исключая поперечные компоненты из уравнений (11), можно получить два уравнения Гельмгольца для продольных волновых полей:

$$(\nabla_t^2 + k_{c\pm}^2) \cdot E_{z\pm} = 0, \quad (42)$$

где  $\nabla_t$  – двумерный оператор градиента в поперечной плоскости и  $k_{c\pm}^2 = k_{\pm}^2 - \beta^2$ .

Поперечные компоненты могут быть выражены через продольные [2]:

$$\vec{E}_{t\pm} = \frac{1}{k_{c\pm}} \cdot (-j \cdot \beta \cdot I_t \mp k_{\pm} \cdot \vec{z}_0 \times I_t) \cdot \nabla_t E_{z\pm}. \quad (43)$$

Далее, граничные условия на стенках волновода с помощью (43) выражаются через продольные компоненты волновых полей. В простейшем случае идеально проводящих стенок граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} E_{z+} + E_{z-} = 0, \\ \left( \frac{\beta}{k_{c+}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} + j \cdot \frac{k_+}{k_{c+}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \right) \cdot E_{z+} + \left( \frac{\beta}{k_{c-}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} - j \cdot \frac{k_-}{k_{c-}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \right) \cdot E_{z-} = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Здесь ось  $\vec{n}$  направлена по нормали к стенке волновода, а ось  $\tau$  – по касательной к ней. Подстановка соответствующих решений уравнений Гельмгольца (43) в граничные условия приводит к дисперсионным уравнениям для постоянных распространения собственных волн.

Следует отметить, что все волны, распространяющиеся в волноводах, заполненных киральными биосредами, являются гибридными. Характерной особенностью их является т.н. бифуркация мод – обычное для изотропных волноводов вырождение снимается.

### Выводы

1. Обоснована физико-математическая модель, используемая для адекватного описания эффективных электромагнитных биизотропных/бианизотропных параметров капиллярных систем электропроводности биообъектов.
2. Для практической реализации в КВЧ-рефлектометрии полученных результатов нужно уметь рассчитывать значения материальных параметров по размерам отдельных включений (спиралей или омега-частиц, «омега – биоструктур»). Эта задача требует отдельного дополнительного исследования, которое будет проведено в ближайшем будущем.

3. Для решения проблемы измерения материальных параметров указанных выше биообъектов/биосред предложены способы нахождения материальных констант по результатам измерений коэффициентов отражения и прохождения плоской волны определённой поляризации через плоский слой в волноводе/свободном пространстве (в миллиметровом диапазоне электромагнитных волн).

4. Полученные в работе результаты могут служить в дальнейшем для обоснования физических механизмов функционирования в высоко организованных формах живой материи т.н. «китайских» меридианов, позволяющих распространяться электромагнитным волнам (в частности, мм-диапазона) безотражательно (т.е. без потерь) вдоль таких волноведущих путей. По мнению авторов данного исследования, основной причиной, позволяющей выделять эти меридианы в отдельные специфические структуры биосреды, является киральность/бианизотропия последней. Кроме того, возникает реальная возможность физически обосновать эффекты воздействий на биообъект поляризованных электромагнитных волн мм-диапазона нетепловой интенсивности (как, впрочем, и последствий таких взаимодействий).

#### Список использованной литературы

1. Фёдоров Ф.И. Теория гиротропии/Ф.И. Фёдоров. – Минск: Наука и техника, 1976. – 456с.
2. Третьяков С.А. Электродинамика сложных сред: киральные, биизотропные и некоторые бианизотропные материалы/С.А. Третьяков//Радиотехника и электроника. – 1994. – Т. 39. – Вып. 10. – С. 1457-1470.
3. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн/В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука, 1989. – 544с.
4. Шимони К. Теоретическая электротехника/К. Шимони. – М.: Мир, 1964. – 774с.
5. Lowry T.M. Optical rotatory power/T.M. Lowry. – N.Y.: Dover, 1964. – 400p.
6. Lakhtakia A. Time-harmonic electromagnetic fields in chiral media/A.Lakhtakia, V.K. Varadan, V.V. Varadan. – Berlin: Springer – Verlag, 1989. – 420p.
7. Lindell I.V. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media/I.V. Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen. – London: Artech House, 1994. – 360p.
8. Proceedings of “Bianisotropics’93”/Eds. A. Sihvola, S. Tretyakov, I. Semchenko. Electromagnetics Lab., Helsinki University of Technology. – Report 159. – December 1993. – 210p.
9. Tretyakov S.A. Novel uniaxial bianisotropic materials: Reflection and transmission in planar structures/S.A. Tretyakov, A.A. Sochava//Special Issue of “Progress in Electromagnetics Research on bi-isotropic media and applications/Ed. A. Priou. – Elsevier, 1994. – 200p.
10. Kong A.J. Electromagnetic waves theory/A.J. Kong. – N.Y.: Wiley, 1986. – 350p.
11. Tretyakov S.A., Oksanen M.I.//J. Electromagnetic Waves and Applications. – 1992. – V. 6, No. 10. – P. 1393.
12. Lindell I.V., Tretyakov S.A., Oksanen M.I. //J. Electromagnetic Waves and Applications. – 1993. – V. 7, No. 1. – P. 147.
13. Oksanen M.I., Tretyakov S.A., Lindell I.V.//J. Electromagnetic Waves and Applications. – 1990. – V. 4, No. 7. – P. 613.
14. Lindell I.V. Methods for electromagnetic field analysis/I.V. Lindell. – Oxford: Clarendon Press, 1993. – 370p.
15. Tretyakov S.A.// Microwave and Optical Technol. Letters. – 1993. – V. 6, No. 2. – P. 112.

УДК 004.681.2.08

А.Ю. ЗИМОГЛЯД, Д.О. ЛЕВЧЕНКО  
Національна Металургійна Академія України**АНАЛІЗ СПЕКТРІВ КОРОННОГО РОЗРЯДУ**

*Розглянуто стенд для дослідження коронного розряду, а також розглянуто спектр і осцилограми при позитивному і коронному розряді, на даному стенді.*

*Ключові слова: Коронний розряд, висока напруга*

А.Ю. ЗИМОГЛЯД, Д.А. ЛЕВЧЕНКО  
Национальная Металлургическая Академия Украины**АНАЛИЗ СПЕКТРОВ КОРОННОГО РАЗРЯДА**

*Рассмотрен стенд для исследования коронного разряда, а также рассмотрен спектр и осциллограммы при положительном и коронном разряде, на данном стенде.*

*Ключевые слова: Коронный разряд, высокое напряжение*

A. Y. ZIMOGLYAD, D.O. LEVCHENKO  
National Metallurgical Academy of Ukraine**ANALYSIS OF CORONARY DISCHARGE SPECTRA**

*The stand for the investigation of the corona discharge is considered, the spectrum and oscillograms for a positive and corona discharge, at this stand too.*

*Key words: Corona discharge, high voltage*

**Постановка проблеми**

Коронний розряд знайшов своє застосування в різних галузях науки і техніки. Коронний розряд застосовується для поверхневого легування металів і напівпровідників, для очищення газів від пилу в складі електростатичних фільтрів, для діагностики станів конструкцій. Широке застосування коронного розряду в різних галузях, призводить до необхідності його моделювання.

Струм, що проходить через електроди анода і катода, при коронному розряді має імпульсний характер, і цей характер проявляється аж до іскрового пробою проміжку. Імпульсний струм, що виникає при позитивній та негативній короні, суттєво відрізняється.

Слід зауважити, що при позитивному коронному розряді, проявляється ефект так званої спалахової корони, а при негативному коронному розряді проявляються імпульси Трічеля. Причиною різної поведінки імпульсного струму в позитивній та негативній короні імовірно служать різні іонізаційні процеси, і так само різний розподіл просторового заряду між електродами.

Моделі, що використовуються для опису поведінки коронного розряду, мають або емпіричний характер, або використовують фізичні закони, але накладаються досить суворі обмеження на граничні умови [1, 3]. Таким чином, для реалізації можливості оперативного управління коронним розрядом, а також ідентифікації його параметрів необхідно створення нових моделей. У той же час, синтез нових моделей потребує вирішення питання адекватності, тобто необхідно мати можливість отримати інформацію з реального фізичного експерименту у заданих умовах. У випадку високовольтного розряду проведення експерименту ускладнюється необхідністю уникати пошкодження лабораторного обладнання, водночас з отриманням достовірних даних [5].

**Мета дослідження**

Виходячи з вищевикладеного, створення лабораторного обладнання для аналізу адекватності моделей коронного розряду, яке би дозволило отримати інформацію, необхідну для такого аналізу, є актуальною задачею. Також, для перевірки працездатності розробленого стенду потрібно провести деяку кількість експериментів, які б показали можливість отримання даних у відомих режимах розряду.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Безпосереднє вимірювання струму в умовах високовольтного розряду викликає певні труднощі, у першу чергу пов'язані з можливістю ушкодження обладнання. З іншого боку, для отримання частотних характеристик немає потреби безпосереднього контакту – доцільно використовувати електромагнітний зв'язок з розрядом. Тому, у цьому експерименті поруч з коронним розрядом, на відстані 15 см встановлювалася антена, підключена до осцилографа. Антенною слугує мідний дріт в гумовій ізоляції діаметром 1 мм, довжиною 10 см (рис. 1). За допомогою цифрового осцилографа з можливістю запису

значень відліків на USB-носії знімаються дані при позитивній та негативній короні. Далі отримані дані обробляються на комп'ютері. Осцилограф захоплює діапазон частот від 0 — 50 МГц, з частотою вибірки даних в  $10^8$  Sa/s (відліків на секунду).

Для реалізації можливості керувати умовами експерименту був зібраний розрядний термінал (рис. 2). Матеріалом для збірки в основному був текстоліт і фторопласт, так як ці два матеріали є якісними діелектриками. На підставці з фторопласту кріпляться клеми для подачі високої напруги, там же кріпиться один електрод у формі циліндра 25 мм зі сталі, і стійка під регульований електрод. Даний розрядний термінал дозволяє регулювати відстань між електродами. Також існує можливість закріплювати різні електроди.

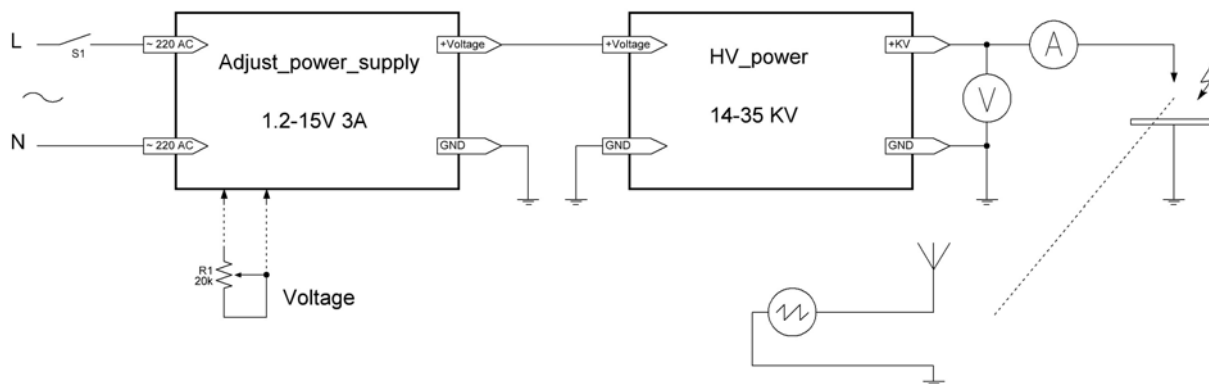


Рис. 1. Структурна схема проведення дослідів

Можливість закріплювати електроди різного діаметру знадобиться в подальших дослідів, оскільки площа електродів безпосередньо впливає на коронний розряд.

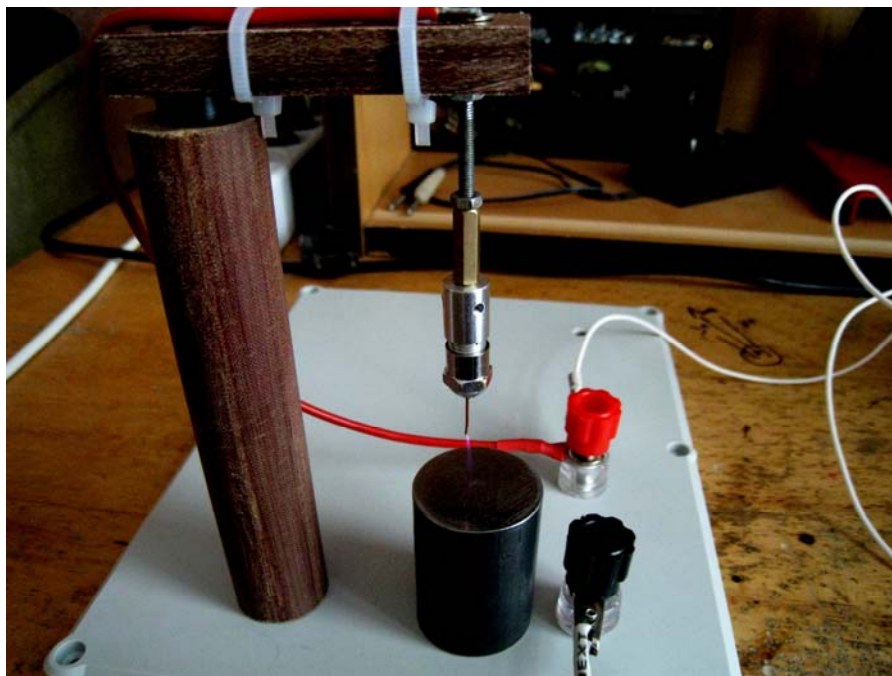


Рис. 2. Розрядний термінал

Отримані осцилограми сигналів, що наводилися на антену при позитивній та негативній короні показані на рис. 3, 4. Осцилограма наведення на антену при негативній короні, дуже близька за формою до відомої форми імпульсів Трічеля. При цьому проявляється їх регулярний характер, який пояснюється тим, що при зростанні лавин від вістря катода близько самого вістря розташовується позитивний просторовий заряд, а трохи віддалік – негативний. Якщо це електрони, то вони притягуються до анода. Щільність негативного заряду вістря дуже низька, через це екрануюча дія на поле вістря не відбувається. Просторовий

заряд негативних іонів слабшає, поле вістря, розмноження лавин і струм загасає, далі зовнішнє поле відновлюється, і створюються умови для нового імпульсу.

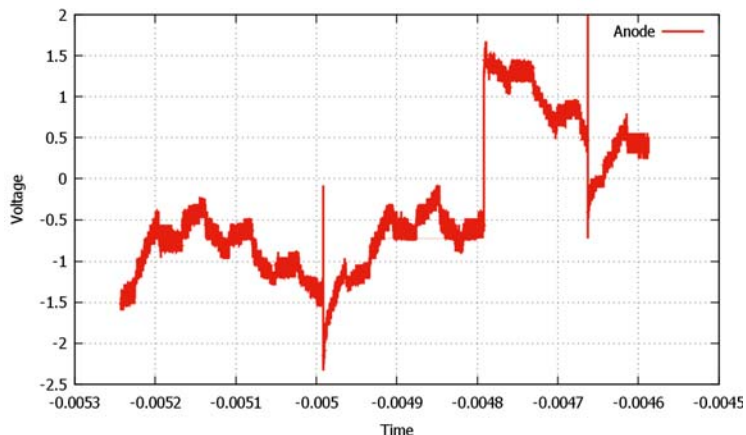


Рис. 3. Осцилограма наведень на антену при позитивній короні

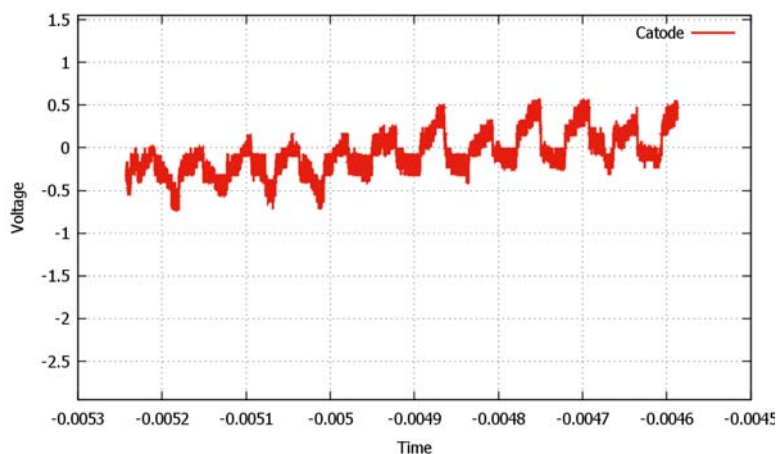


Рис. 4. Осцилограма наведень на антену при негативній короні

Осцилограма наведення на антену при позитивній короні виглядає куди більш складно, але в ній теж помітна деяка періодичність. Для визначення цієї періодичності, а так само виділення області частот в яких лежить сигнал, на основі даних заміряних осцилографом були побудовані спектри для позитивної та негативної корони (рис. 5, 6). Як видно з отриманих спектрів, як у негативній, так і у позитивній короні є певний періодичний сигнал в області 17 кГц, причому в негативній короні він має більше значення за амплітудою. Так само з отриманого спектра позитивної корони можна явно побачити велику кількість гармонік, які розташовані на частотах до 10 кГц, з кроком в 0.23 кГц.

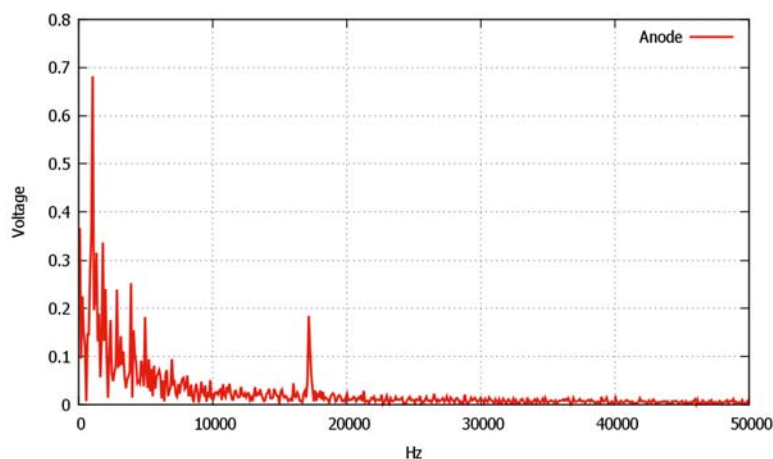


Рис. 5. Спектр наведення на антену при позитивній короні



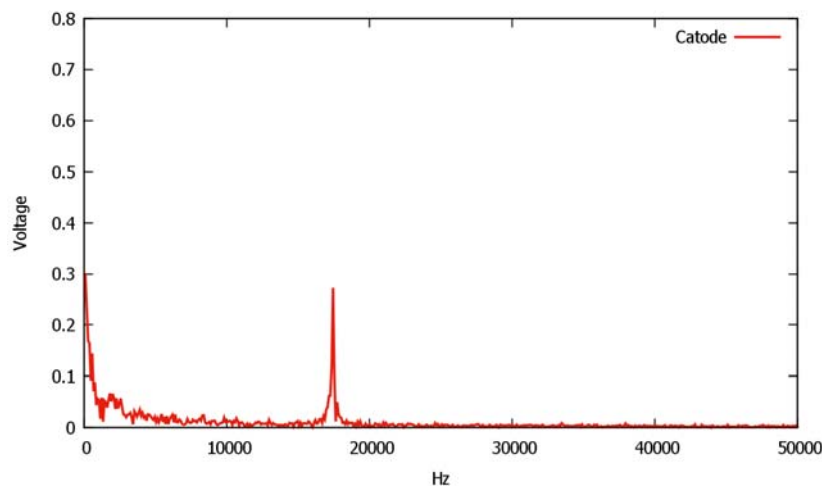


Рис. 6. Спектр наведення на антену при негативній короні

Попереднє вимірювання показало деякий періодичний сигнал в області 17 кГц, який більш виражений при негативній короні, так само в спектрі позитивної корони можна явно побачити гармоніки, які розташовані на частотах до 10 кГц, з кроком в 0.23 кГц. Ці отримані дані вказують на можливість подальших вимірювань і вивчення цих гармонік.

#### Висновки

Створене лабораторне обладнання дозволило отримати інформацію, необхідну для подальших досліджень. Які в свою чергу можуть бути використані, для аналізу адекватності моделей коронного розряду. Була зроблена перевірка працездатності розробленого стенду на низці експериментів, які показали можливість отримання даних у відомих режимах розряду.

Також, після проведеного попереднього дослідження, а так само спостереження на форму сигналу наведення і її спектр, можна сказати про явну відміну між позитивною і негативною короною. Що, в свою чергу, дозволяє зайнятися подальшими вимірами в даній області.

#### Список використаної літератури

1. Райзер Ю.П. Физика газового разряда / Ю.П Райзер – М.: Наука, 1992. – 434 с.
2. Хоровиц П. Искусство схемотехники. Часть 2 / П. Хоровиц, У. Хилл. – М.: Мир, 1995. – 590 с.
3. Фейнман Р.П. Фейнмановские лекции по физике / Р.П. Фейнман, Р.Б. Лейтон. – Ч.5 – М.: Мир, 1977. – 300 с.
4. Новиков О.Я. Устойчивость горения электрической дуги / О.Я. Новиков, В.Н. Ярыгин. – М.: Наука, 1992. – 197 с.
5. Кузнецов Э.И. Методы диагностики высокотемпературной плазмы / Э.И. Кузнецов, Д.А. Щеглов – М.: Москва, 1980. – 198 с.

УДК 539.377:539.381

А.О. КАРАЄВ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України

**МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ В АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ  
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ**

*У роботі ілюструється використання методу граничних елементів для розв'язання задач статичної теорії пружності, зокрема для систем з нерівномірним розподілом температури по об'єму. Отримано рівняння, що описують рівновагу твердих тіл у випадку аксіальної симетрії. Математична модель була реалізована на мові програмування C++.*

*Ключові слова: метод граничних елементів, теорія пружності, еліптичні інтеграли.*

А.А. КАРАЕВ

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

**МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ**

*В работе иллюстрируется применение метода граничных элементов для решения задач статичной теории упругости, в частности для систем с неравномерным распределением температуры по объему. Получены уравнения, которые описывают равновесие твердых тел в случае осевой симметрии. Математическая модель была реализована на языке программирования C++.*

*Ключевые слова: метод граничных элементов, теория упругости, эллиптические интегралы.*

А.О. КАРАИЕВ

V. N. Karazin Kharkiv National University

О.О. STRELNIKOVA

V. N. Karazin Kharkiv National University

The A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

**BOUNDARY ELEMENT METHOD IN AXISYMMETRIC TASKS THEORY OF ELASTICITY**

*Current article illustrates the application of boundary element method in static tasks of theory of elasticity, particularly to systems with not-uniform temperature distribution. Equations that describe the equilibrium of an axisymmetric solid body are obtained. Mathematical model was implemented on programming language C++.*

*Keywords: boundary element method, theory of elasticity, elliptic integrals.*

**Постановка проблеми**

В сучасних теоретичних і прикладних дослідженнях актуально стоїть питання побудови математичного і програмного апарату для розв'язання задач механіки наноматеріалів. Наночастинки у такому підході вважаються елементами, що утворюють кусково-однорідне середовище з власними значеннями фізичних та механічних характеристик. У кожному окремому об'єкті можна застосовувати принцип континуалізації, тобто вважати кожен однорідний об'єкт суцільним середовищем. Взаємодія між цими об'єктами виражається за допомогою граничних умов, які формулюються, оцінюючи характер механічної взаємодії. Для того, щоб зрозуміти фізичні властивості кожного з елементів, що складають суцільну систему, необхідно провести аналіз процесів, використовуючи принципи молекулярної структурної механіки з застосуванням різноманітних потенціалів, що описують міжатомну взаємодію. В результаті такого підходу можна отримати значення модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона та інших величин, характерних для механіки суцільних середовищ. Результати таких досліджень вже відомі науці [5, с.27].

Щоб визначити границю використання даного підходу, необхідно визначити для себе характерні геометричні параметри, що характеризують наноматеріали. Введемо три параметри -  $h$ ,  $h^*$  та  $L$ . Параметр  $h$  характеризує внутрішню структуру матеріалу. Величина  $h^*$  виражає середню відстань між центрами частинок у внутрішній структурі матеріалів. Параметр  $L$  характеризує механічні процеси, що

розглядаються, тобто характеризує зміну механічних полів по відношенню до просторових координат[5,с.28]. Тоді границі застосування вищезазначеного методу можна сформулювати наступним чином:

$$h \approx 1,5 \text{ \AA}, h^* \approx 1 \text{ нм} \Rightarrow L \geq 10 \text{ нм} \quad (1)$$

Ефективно в початкових наближеннях вважати наноеlementи аксіально-симетричними циліндричними поверхнями.

Метод граничних елементів є одним з найпопулярніших методів чисельного моделювання різних задач механіки та фізики. Величезним досягненням, що приваблює вчених з усього світу, є можливість розглядати не сам регіон, у якому необхідно розв'язати задачу, а його границю. Цей факт і використовується авторами у публікації у контексті використання даного методу для теорії пружності.

Існує широкий клас задач, коли деформації супроводжуються змінами температури [1,с.28]. Зміна температури може виникати як в результаті самої деформації, так і через сторонні причини. Інтегральні рівняння при наявності температурного члена у законі Гука будуть описуватися рівняннями з наявністю члена, що інтегрується за об'ємом. Однак цей факт не приносить у задачу жодних обчислювальних труднощів, так як у стаціонарному випадку рівняння для температури не залежить від вектора переміщення. Температура виступає відомою функцією координат після розв'язання рівняння Лапласа.

**Математична модель**

Закон Гука виражає зв'язок між тензором напружень та тензором деформації. У випадку, коли тіло нагріто нерівномірно, закон Гука має наступний вигляд:

$$\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik} + \lambda u_{ii} \delta_{ik} - K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} \quad (2)$$

де  $\sigma_{ik}$  - тензор напружень,  $u_{ik}$  - тензор деформацій,  $\mu, \lambda$  - коефіцієнти Ламе,  $K$  - ізотермічний модуль всестороннього стиснення,  $\alpha$  - коефіцієнт теплового розширення,  $T_0$  - температура ненагрітого тіла.

Основне рівняння, яке необхідно розв'язати – рівняння рівноваги твердого тіла:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \text{div} \vec{u} = K\alpha \nabla(T - T_0) \quad (3)$$

Для температури, в свою чергу, має виконуватися рівняння Лапласа:

$$\Delta(T - T_0) = 0 \quad (4)$$

Гранична умова для вектору переміщення:

$$2\mu \nabla(\vec{u}, \vec{n}) + \lambda \vec{n} \text{div} \vec{u} = \vec{p} + K\alpha(T - T_0)\vec{n} \quad (5)$$

Дана система рівнянь є справедливою у стаціонарному випадку. Як помітно, температура виступає відомою функцією координат після розв'язання рівняння Лапласа.

**Інтегральне рівняння**

Для використання методу граничних елементів, необхідно отримати інтегральний вигляд рівняння рівноваги твердого тіла. Необхідно побудувати фундаментальне рішення:

$$\mu \Delta \vec{u}^* + (\lambda + \mu) \nabla \text{div} \vec{u}^* = -\delta(\vec{r} - \vec{\xi}) \vec{e} \quad (6)$$

Фундаментальне рішення – це рішення наведеного рівняння при умові, що права частина описується сингулярною функцією – дельта-функцією.

Інтегрування рівняння рівноваги з фундаментальним рішенням після використання формули Остроградського-Гаусса дозволяє уникнути інтегралів за об'ємом та залишити лише інтеграли за контуром:

$$\mu \int_{\Omega} \vec{u}^* \Delta \vec{u} d\Omega + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \vec{u}^* \nabla \text{div} \vec{u} d\Omega = 0 \quad (7)$$

$$e_i(\xi) u_i(\xi) + \oint_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \oint_{\Gamma} u_i^* p_i d\Gamma \quad (8)$$

Зручно перейти від вектору рішення до матриці фундаментального рішення:

$$u_i^* = u_{ij}^* e_j \quad (9)$$

$$p_i^* = p_{ij}^* e_j$$

Тоді інтегральне рівняння трансформується у наступне:

$$u_i + \oint_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \oint_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (10)$$

Фундаментальне рішення у загальному випадку має вигляд:

$$u_{ij}^* = \frac{(\lambda + \mu)r}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \left( 3 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (11)$$

де  $r_i = x_i - \xi_i$  - відстань від точки спостереження до точки, у якій дельта-функція набуває значення нескінченності.

**Аксіально-симетричний випадок**

Для побудови фундаментального розв'язку у циліндричній системі відліку скористаємося матрицею переходу із декартової системи у циліндричну:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Записуючи елемент поверхні у циліндричній системі координат можна помітити, що скориставшись аксіальною симетрією можна одразу проінтегрувати фундаментальний тензор рішень за кутом [3,с.46]. Тензор фундаментального рішення у циліндричній системі координат матиме вигляд:

$$u_{ij}^* = A(x_i - \xi_i)K(k) + B(x_i - \xi_i)E(k) \tag{13}$$

Еліптичні інтеграли першого та другого роду:

$$K(k) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \tag{14}$$

$$E(k) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Аргумент еліптичного інтегралу задається співвідношенням:

$$k = 2 \sqrt{\frac{\rho(\xi_i)\rho(x_i)}{(\rho(\xi_i) + \rho(x_i))^2 + (z(\xi_i) - z(x_i))^2}} \tag{15}$$

Як помітно, повний еліптичний інтеграл першого роду має особливість у одиниці. Аргумент у нашій задачі ніколи одиницею не стане, але може неперервно до неї наближатися. Тому для цього інтеграла необхідно використовувати методи обчислення, що дають достатню точність. Для еліптичного інтеграла другого роду у дослідженні використовувалась стандартна шестивузлова формула Гаусса.

Для обчислення повного еліптичного інтеграла першого роду у роботі використовувалися властивості середнього арифметико-геометричного. Середнє арифметико-геометричне завжди обмежене своїми початковими членами, тому ця послідовність досить швидко сходиться з будь-якою заданою точністю:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \tag{13}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{4} \frac{2\sqrt{k}}{k-1} \frac{1}{\operatorname{agm}\left(1, \frac{2\sqrt{k}-k-1}{k+1}\right)} \tag{14}$$

**Система рівнянь**

Першим кроком для чисельного розв'язання рівняння є дискретизація. Необхідно розбити поверхню на граничні елементи та провести чисельне інтегрування [3,с.50]. Нехай точка P - фіксована точка простору, точка Q - точка, за якою проводиться сума:

$$u_i(P) + 2\pi \sum_{l=1}^N \int_{\Gamma_l} p_{ij}^*(P, Q) u_j(Q) \rho(Q) d\Gamma_l = 2\pi \sum_{l=1}^N \int_{\Gamma_l} u_{ij}^*(P, Q) p_j(Q) \rho(Q) d\Gamma_l \tag{15}$$

Використовуючи відомі граничні умови можна скласти систему лінійних алгебраїчних елементів розміром  $2N \times 2N$ , де N - кількість елементів, на які було розбиту границю. Фундаментальна матриця рішень не є неперервною функцією у випадку, якщо фіксована точка P входить у проміжок інтегрування. Однак ця точка є точкою розриву першого роду, тому складнощів при інтегруванні не виникає – можна розбити проміжок інтегрування на два і на кожному використати вузлову формулу Гаусса, що і використовувалося у моделюванні.

Для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь у дослідженні використовувався метод Гаусса з вибором ведучого елемента по матриці.

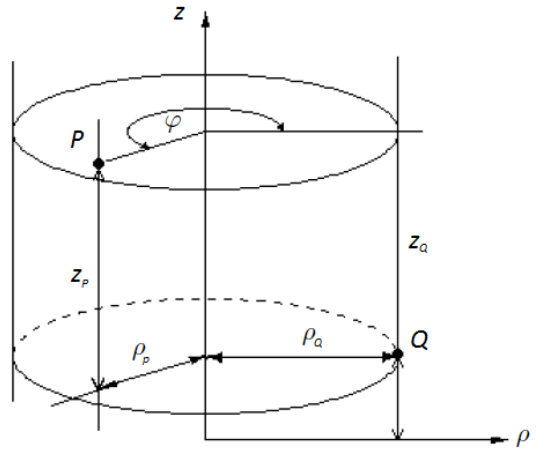


Рис. 1. Дискретизація у циліндричних координатах

**Програмна реалізація**

Для розв'язання аксіально-симетричних задач теорії пружності було розроблено систему, використовуючи мову програмування C++.

Головний елемент програми – клас boundary, що описує характеристики границі циліндричної поверхні:

```
class boundary
{
    double R; // радіус циліндра
    double H; // висота циліндра
    node *nodes; // вказівник на вузол
    unsigned m; // кількість вузлів на першому елементі границі
    unsigned N; // загальна кількість вузлів
    double sigma;
    double mu;

public:
    boundary(double r, double h, unsigned m1, unsigned n, cylinder_point
*ub, cylinder_point *pb, double s, double mm); // конструктор
    node node_i(unsigned i); // доступ до певного вузла
    unsigned n() {return N;}
    ~boundary(); // деструктор
};
```

Допоміжний клас node описує стан кожного вузла: його координати та тип заданих граничних умов на ньому. Після проведення розрахунків він містить і розраховані значення невідомих.

У якості тесту була розв'язана задача розтягнення циліндру з постійним напруженням на верхній основі та фіксації нижньої основи циліндру.

На рисунках наведено графіки радіальної компоненти вектору переміщень на боковій поверхні циліндру та верхній основі.

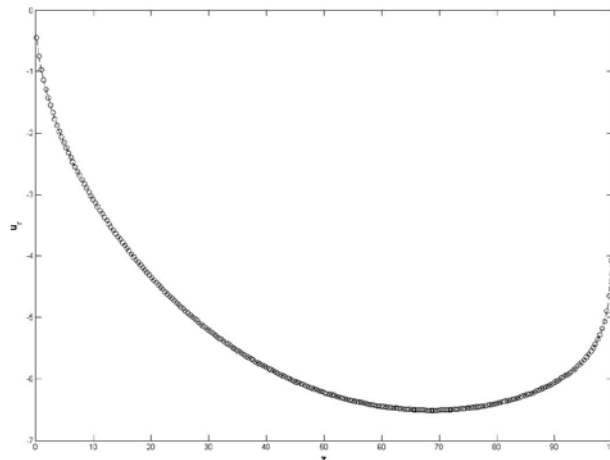


Рис. 2. Графік залежності радіальної компоненти вектору переміщень на границі від висоти

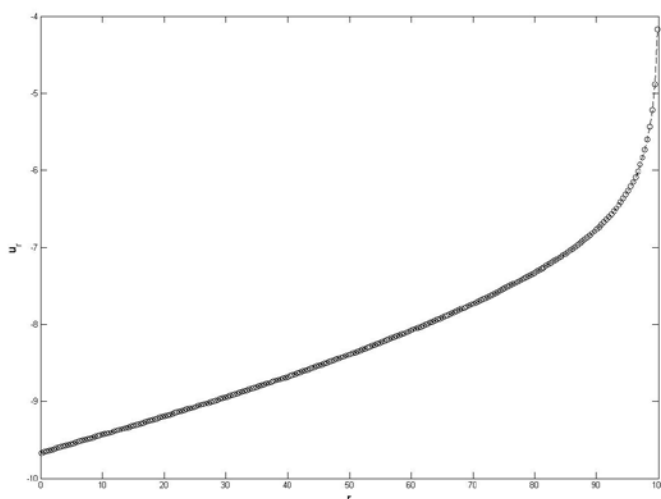


Рис. 3. Графік залежності радіальної компоненти вектору переміщень на границі від радіального напрямку

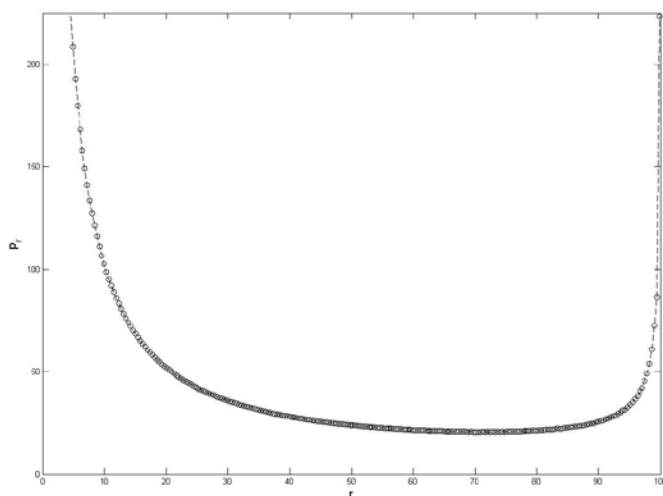


Рис. 4. Графік залежності радіальної компоненти вектору напружень на границі від радіального напрямку

На рисунку 4 помітно, що при наближенні координати до нуля радіальна компонента вектора напруження наближається до нескінченності. Це відповідає зауваженню, наданому у [2, с.98], що потребує подальшого дослідження.

#### Висновки

Отриманий математичний апарат разом із створеним програмним комплексом дозволяє розв'язувати будь-які аксіально-симетричні задачі теорії пружності у межах використання методу.

#### Список використаних джерел

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Физматлит. — 2007. — 264 с.
2. Brebbia C. A. Boundary Element Techniques. — Springer. — 1984. — 466 с.
3. Stikan P. R. Tensores fundamentais da formulação dos problemas elásticos axissimétricos pelo método dos elementos de contorno. — Vitória. — 2006. — 113 p.
4. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка — М.: Наука. — 1966. — 260 с.
5. Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я. О построении основ механики нанокompозитов (обзор). — Киев: Прикладная механіка. — 2011, т. 47, №1, с. 4-61

УДК 629.7.01

Л.І. КНЫШ, О.Г. ГОМАН

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В  
ДЛИННЫХ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТРУБОПРОВОДАХ**

*Предлагается методика расчёта возможного гидравлического удара при эксплуатации наземных или подземных трубопроводных систем большой протяжённости. В предложенной математической модели учитывались географические особенности места эксплуатации трубопровода и общие проектные показатели системы. Результаты компьютерного моделирования нестационарных параметров трубопровода являются основой для выбора методов предотвращения гидроудара и способов его компенсации.*

*Ключевые слова: гидравлический удар, математическая модель, гидравлический уклон, численный алгоритм, компьютерное моделирование*

Л.І. КНЫШ, О.Г. ГОМАН

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕЧІЇ В ДОВГИХ ПРОМИСЛОВИХ  
ТРУБОПРОВОДАХ**

*Запропоновано методику розрахунку можливого гідравлічного удару під час експлуатації наземних або підземних трубопровідних систем великої протяжності. У запропонованій математичній моделі враховувались географічні особливості місцевості функціонування трубопроводу та загальні проектні показники системи. Результати комп'ютерного моделювання нестационарних параметрів трубопроводу є основою для вибору методів запобігання гідроудару та способів його компенсації.*

*Ключові слова: гідравлічний удар, математична модель, гідравлічний ухил, чисельний алгоритм, комп'ютерне моделювання.*

L.I. KNYSH, O.G. GOMAN

Oles Honchar Dnipro National University

**COMPUTER SIMULATION OF THE NON-STATIONARY FLOW IN THE LONG INDUSTRIAL  
PIPELINES**

*The procedure for the analysis of the water hammer, which may occur during operation of the overground and underground long length pipeline systems, is proposed. In the mathematical model geographic features of the location where pipeline is operated and the general design parameters were taken into account. The results of computer simulation of the pipeline non-stationary characteristics become the basis for choice of the hammer water prevention and compensation methods..*

*Keywords: water hammer, mathematical model, inclined water, numerical algorithm, computer simulation.*

**Постановка проблеми**

Проблема гидравлического удара является чрезвычайно актуальной во всех областях деятельности, связанной с транспортировкой и использованием капельной жидкости. Течение жидкости по трубопроводам в штатном режиме, как правило, носит стационарный характер. Однако, при возникновении внештатных ситуаций, связанных с различными технологическими или аварийными моментами, режим течения переходит в нестационарный, что приводит к серьёзным проблемам, а часто и к полному разрушению трубопровода. Поэтому важно проводить детальный расчёт трубопроводных систем на предмет предотвращения гидроудара и его компенсации в случае возможного возникновения. Многообразие технических решений трубопроводных систем предопределяет различные подходы к проектированию компенсационных устройств. Проектирование таких устройств базируется на специальных исследованиях, которые могут быть проведены на различном уровне детализации. В работе предлагается методика расчёта гидравлического удара в модельном наземном или подземном трубопроводе значительной протяжённости (свыше 60 км), в которой учитываются общие гидромеханические характеристики системы и географические особенности местности его эксплуатации.

**Анализ последних исследований и публикаций. Формулирование цели исследования**

Классическим подходом, используемым для расчёта ударного воздействия на трубопроводы, является инженерный метод, предложенный Н.Е. Жуковским [1]. Метод может быть использован лишь для простых, хорошо изученных трубопроводных систем, поведение которых при внестатных режимах предсказуемо. Исследование сложных трубопроводных систем с большим количеством разветвлений, с трубами переменного сечения и множеством регулирующих систем представляет собой комплексную задачу, далеко выходящую за рамки инженерных гидравлических расчётов. Некоторые результаты, ставшие уже классическими, представлены в работах [2,3]. Однако анализ показывает, что многообразие конструктивных решений трубопроводных систем, напрямую связанное с особенностями их функционирования, делает каждый раз уникальным расчёт нестационарного течения в них. Так, научные данные, полученные для нестационарного течения в пневмогидравлических системах жидкостных ракетных двигателей невозможно адаптировать на другие типы трубопроводных систем [4]. Отдельного анализа требуют исследования, базирующиеся на решениях, которые носят сопряжённый характер. Такого рода задача была решена в работе [5], где рассматривалось нестационарное течение в коаксиальных трубах. Гидродинамическая задача для жидкости в канале решалась совместно с прочностной задачей для стенок канала, которые могли обладать как изотропными, так и анизотропными свойствами. Подобные исследования носят обобщающий характер, позволяют сделать выводы о возможностях использования при проектировании сложных трубопроводных систем новых композиционных материалов.

Частая необходимость решать практические задачи, связанные с возможным возникновением и предотвращением гидроудара, привела к тому, что множество научных экспериментальных и численных результатов было обобщено в специализированных расчётных пакетах коммерческого характера. В программном продукте AFT Applied Flow Technology [6] существует специальный раздел AFT Impulse, в котором размещён подраздел Waterhammer & Surge Analysis Software – специализированное программное средство, созданное для расчёта перепада давлений, вызванного гидроударом. Программа моделирует нестационарное течение воды, нефтепродуктов, криогенных жидкостей, жидкостей с особыми химическими и реологическими свойствами. Это позволяет выяснить предельные значения давлений, не приводящие к разрушению трубопровода, провести калибровку и определить место размещения оборудования для компенсации гидроудара, выявить несбалансированные силы в трубопроводе и обозначить место установления опор, мониторить возможные аварии, приводящие к возникновению гидроудара, рассчитать параметры выбранного оборудования с точки зрения возможности возникновения кавитации и пр. Множество практических задач позволяет решить программный продукт PIPE2016 [7], который содержит модуль SURGE 2016 для расчёта гидроударов. Главный недостаток таких программы – их цена, которая является неприемлемой даже для относительно крупных промышленных и коммунальных компаний. Кроме того, адаптация программ под решение конкретных задач сопряжена с определёнными трудностями.

Исходя из этого становится очевидным, что для многих практических задач, возникающих при проектировании конкретных трубопроводов, важно иметь удобную и относительно недорогую методику расчёта гидроударов и определения приемлемого метода его компенсации.

**Изложение основного материала исследования**

Проблема гидроударов особо остро стоит при проектировании и эксплуатации трубопроводов для перекачки жидкости большой протяжённости. Даже при относительно простой геометрии такие системы нельзя рассчитать, используя демонстрационные версии вышеназванных программ, в которых существуют ограничения по длине трубопровода в 10 км.

В качестве объекта исследований была выбрана типичная модель длинного (свыше 60 км) трубопровода для перекачки воды. Предполагается, что такой трубопровод является частью технологической системы, предназначенной для фильтрации и очистки песчано-водяной смеси с последующей подачей потребителю. Значительная протяжённость трубопровода и географические особенности местности эксплуатации предполагают учёт гидравлического уклона, что делает необходимым введение дополнительного слагаемого в уравнение количества движения системы уравнений гидравлического удара, которые имеют вид [3]:

$$v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + 0 \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 0 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} + \sin \alpha + \frac{\lambda v |v|}{2gd} = 0, \quad (2)$$



где  $h = \frac{P}{\gamma} + z$  – потенциальный напор, м;  $z$  – высота осевой линии трубы над уровнем начала отсчёта, м;  $P$  – давление в трубопроводе, Па;  $\gamma = \rho g$  – удельный вес жидкости, кг/м<sup>2</sup>с<sup>2</sup>;  $v$  – скорость жидкости в трубопроводе м/с;  $x$  – продольная координата вдоль основного трубопровода (от насоса до конца трубопровода);  $\alpha$  – локальный угол наклона по отношению к горизонтальной плоскости;  $g$  и  $\rho$  – ускорение свободного падения и плотность, соответственно, м/с<sup>2</sup> и кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda$  – коэффициент сопротивления трения;  $d$  – диаметр трубопровода, м;  $c$  – скорость волны, м/с.

Система уравнений (1) – (2) может быть решена аналитически, если пренебречь нелинейными членами и членами, характеризующими трение и гидравлический уклон. В случаи длинных трубопроводов, когда трение существенно влияет на характер течения, такой подход не может быть использован. По этой же причине не представляется возможным использовать методы, основанные на решении так называемых цепных уравнений. Графические методы, в которых с допустимой точностью учитывается трение и особенности геометрии трубопровода, являются слишком громоздкими и сложными для анализа. Поэтому наиболее приемлемым методом решения системы уравнений (1) – (2) является численный метод, который был использован в данной работе.

Непосредственное интегрирование исходной системы гиперболических уравнений конечно-разностными методами при маршевой схеме счёта может привести к неустойчивым решениям [8]. Одним из способов предотвращения такого рода проблем является предварительное приведение уравнений в частных производных к характеристической форме.

Для перехода от системы квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных (1) – (2) к системе характеристических уравнений был использован усовершенствованный метод Листера, подробно описанный в [3]. После проведенных преобразований система уравнений (1) – (2) сводится к виду:

$$(3) \quad \text{I семейство кривых:} \quad dx = (v + c)dt, \quad dP + \rho c dv = -F dt,$$

$$(4) \quad \text{II семейство кривых:} \quad dx = (v - c)dt, \quad dP - \rho c dv = F dt,$$

$$\text{где} \quad F = \rho c \left( g \sin \alpha + \frac{\lambda v |v|}{2d} \right).$$

Граничные условия данной задачи определяются из конкретной внештатной ситуации, которая может привести к возникновению гидроудара. На концах трубопровода могут возникать возмущения, связанные с быстрым закрытием клапана в конце трубопровода, с мгновенным отключением насоса в начале трубопровода после получения информации о закрытии клапана в конце основного трубопровода, аварийные остановки насоса с закрытым клапаном, быстрое включение насоса в полностью заполненной неподвижной жидкостью трубопроводе и пр.

Моделирование проводилось для случая, когда закрытие клапана в конце трубопровода привело к полной аварийной остановке насоса в начале трубопровода, т.е. граничные условия имели вид:

$$v|_{x=L} = 0, \quad v|_{x=0} = 0. \quad (5)$$

Начальные условия выбирались в предположении, что абсолютное давление жидкости в начальный момент времени при напорном течении жидкости вдоль трубы распределяется так:

$$P(x)_{t=0} = P_{H_N} + P_A - P_J(x) - P_F(x), \quad (6)$$

где  $P_{H_N} = H_N \rho g$  – значение давления, которое соответствует величине полного напора в рабочей точке сети  $H_N$ , и включающие общие потери в сети и полный геометрический напор;  $P_A$  – атмосферное давление;  $P_J(x) = \rho g J x$  – потери давления, связанные с влиянием гидравлического уклона трубы  $J$ ;

$P_F(x) = \rho g k x$  – потери давления, связанные с трением;  $k = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{v^2}{2}$  – коэффициент, полученный из уравнения Дарси – Вейсбаха при среднерасходной скорости потока.

Скорость течения в трубе в начальный момент времени вычислялась на основании уравнения Бернулли, в котором величина  $H_g$  определялась как геометрический напор:

$$v_{t=0} = \sqrt{\frac{2(H_N - H_g)gd}{\lambda l}} \tag{7}$$

Величины, используемые в начальных условиях, определяются на основании общего гидромеханического расчёта всей модельной трубопроводной системы и представляют собой отдельную инженерную задачу.

Система характеристических уравнений (3), (4) с граничными и начальными условиями (5) – (7) была решена конечно-разностным методом с использованием нерегулярной криволинейной и регулярной прямолинейной сетки. Криволинейная сетка рассматривалась как некоторая численная интерпретация графического метода, при котором генерируется погрешность расчёта за счёт нерегулярности на границах. Прямолинейная сетка лишена этих недостатков, но создание такого алгоритма потребовало организации дополнительной интерполяции. Так как в качестве модельной жидкости использовалась вода, текущая по трубопроводу со скоростью, значительно меньшей скорости звука, то два предлагаемых алгоритма дали практически одинаковый результат.

На рис. 1. представлен типичный график распределения давления в начале трубопровода.

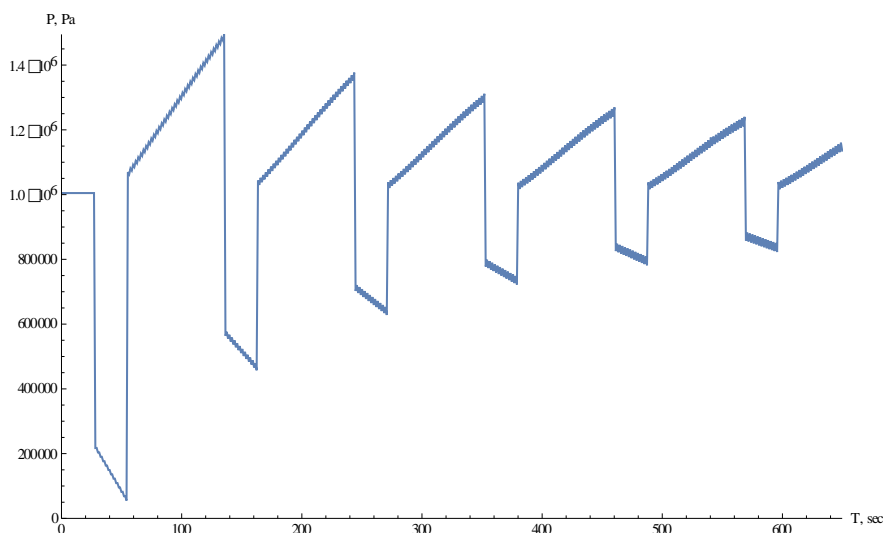


Рис. 1. Изменение давления в начале трубопровода

Как видно из графика, максимальное значение давления соответствует первой фазе прохождения ударной волны, период которой для модельного трубопровода был равен  $T_0 = 108,3s$ . Подобный качественный вид имеют графики распределения давления и в различных сечениях трубопровода. Их анализ даёт возможность сделать выводы по выбору места расположения компенсационных устройств и технологических опор в случае наземного трубопровода, а также методов компенсации для подземных систем.

Характер изменения скорости жидкости при возникновении гидроудара в середине трубопровода представлен на рис. 2. Именно в середине трубопровода наблюдаются наибольшие колебания скорости.

Представленные результаты являются основой для дальнейших исследований по определению наиболее рациональных гидромеханических параметров трубопроводной системы с точки зрения предотвращения гидроударов, для выбора метода его компенсации и расчёта характеристик компенсационного устройства. Например, при использовании в качестве компенсационного устройства мембранного гидроаккумулятора, его объём может быть рассчитан на основе решения дифференциального уравнения, в которое входят вычисленные величины [2].

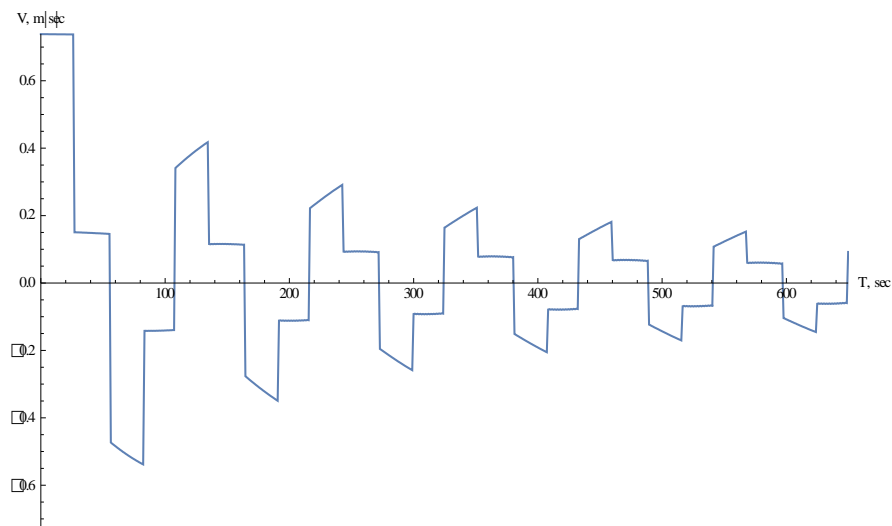


Рис. 2. Изменение скорости в середине трубопровода

Следует отметить, что представленный подход может быть использован в случае, когда скорость ударной волны значительно превосходит скорость течения жидкости и жидкость является однородной. Если это условие не выполняется, то использование нерегулярной сетки приведёт к ошибочным результатам. Особые приёмы нужно применять и в случае использования жидкостей со специфическими реологическими свойствами или жидкостей, имеющих в своём составе пузырьки газа.

#### Выводы

В работе представлена методика расчёта параметров трубопроводной системы большой протяжённости в случае возникновения в ней гидравлического удара. В математической модели проведён учёт влияния географических особенностей местности и гидромеханических параметров трубопровода. Численный алгоритм позволяет определить максимальные значения давления и скорости в системе, ориентируясь на которые становится возможным провести подбор характеристик компенсационного устройства и место его установки. Методика позволяет установить время затухания ударного воздействия, которое необходимо знать для запуска системы в штатном режиме.

#### Список используемой литературы

1. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах / Н.Е. Жуковский. – М.-Л., Гостехиздат, 1949. – 103 с.
2. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / И.А. Чарный. – М., Надра, 1975. – 294 с.
3. Фокс Д.А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах / Д.А. Фокс. – М., Энергоиздат, 1981. – 248 с.
4. Тимошенко В.И. Неустановившиеся течение жидкости в сложных разветвлённых трубопроводных системах / В.И. Тимошенко, Ю.В. Кнышенко // Авиационно-космическая техника и технология, 2012, №5 (92). – С. 47-57.
5. Pierluigi Cesana, Neal Bitter Modeling and analysis of water-hammer in coaxial pipes. / California Institute of Technology, USA, 2015 – Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/1501.07463v1>
6. <http://www.aft.com>
7. <http://kypipe.com>
8. Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М., Наука, 1992. – 424 с.

УДК 531.2

О.И. КОВЧ

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное»

Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины  
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
РАСТРЕСКИВАНИЯ СВАРНОГО ШВА ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ**

*На основании метода конечных элементов разработана методика определения напряженно-деформированного состояния в сварных швах пластинчатых конструкций, имеющих дефектах типа «пора» и «включение». Задача рассматривается в связанной термоупругой постановке. Предполагается возможность анализа нестационарных температурных и силовых воздействий. Численно определены максимальные напряжения в сварном шве в зоне пор с использованием конечных элементов разных типов.*

*Ключевые слова:* включение, пора, сварной шов, конечные элементы, температурное нагружение.

О.І. КОВЧ

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне»

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Институт проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України  
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна**МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗТРИСКУВАННЯ ЗВАРНОГО  
ШВА ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

*На підставі метода скінченних елементів розроблена методика визначення навантажено-деформаційного стану у зварних швах пластинчатих конструкцій, які мають дефекти типу «пора» та «включення». Задача розглядається у зв'язній термопружній постановці. Пропонується можливість аналізу нестационарних температур та силових впливів. Численно визначені максимальні напруження у зварному шві в зоні пор з використанням кінцевих елементів різних типів.*

*Ключові слова:* включення, пора, зварний шов, скінченні елементи, температурне навантаження.

O.I. KOVCH

YUZHNOYE design office

E.A. STRELNIKOVA

A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine  
Kharkiv National University named after V.N. Karazin**FINITE ELEMENT METHOD IN MODELING THE WELDED SEAM CRACKING UNDER THERMAL  
AND STRENGTH LOADING**

*An approach based on the finite element method for determining a stress-strained state in the weld with pores and an inclusion is developed. The method makes it possible to estimate mutual influence of the inclusion on the origin and crack opening in the pore. This method will make it also possible to made recommendation on increasing the period of operation of the welded seams. The special feature of the studies is in creating different loads by time, by the depth of the plates, by the length of the plates and welded seams. Different temperatures are considered. The different types of finite elements are used for modeling the zone of pores. There are solid finite element and two types of isoparametric finite elements, with linear and quadratic approximations of unknown quantities inside elements.*

*The maximum stresses are calculated in the welded seam with pores and inclusion. The comparison of results is accomplished. The maximal stresses in inclusion are slightly influenced and are independent of the finite elements choice. But the maximal stresses near pores are different for different type of elements. Although the difference is not drastic it is testified about necessarily of additional research concern with the choice of the appropriate finite element for welded seam cracking analysis. The classical solid element requires essentially more computational efforts.*

*The maximal stress value correspond to pores and equals 3310 kgs/sm<sup>2</sup> will not lead to crack opening near the pores whereas the maximal stress value correspond to the inclusion and equals 3780 kgs/sm<sup>2</sup> will lead to the crack opening near the inclusion.*

*Key words:* inclusion, pore, welded seam, finite elements, thermal loading

**Состояние вопроса и анализ публикаций по теме исследования**

Развитие современной техники требует создания новых конструкций, работа которых происходит под действием многократных, несимметричных силовых и температурных факторов. Наиболее нагруженными в таких конструкциях являются зоны максимальных остаточных деформаций, которые зачастую находятся между порами и включениями в сварных швах. Исследование прочности и надежности

пластин с трещинами представлены в ряде источников [1-7]. В работе [8] предложен подход, основанный на использовании метода конечных элементов для расчета термоупругого поведения конструкции, здесь рассматривается связанная постановка задачи термоупругости. Среди работ, посвященных решению связанных задач термоупругости, отметим исследования [9-10].

Вместе с тем, анализу взаимного влияния дефектов различной формы в сварных швах конструкций в литературе уделяется недостаточно внимания.

В данной статье рассмотрен пример расчета зон растрескивания в цепочке пор и включений в сварном шве конструкции в условиях действия нестационарных температурных и силовых воздействий. Задача решается в связанной термоупругой постановке.

#### Постановка задачи

В данной работе рассмотрена пластинчатая конструкция, представляющая собой короб (корпус), состоящий из пластин, шарнирно-опертых по нижней пластине (рис. 1а).

Целью данного исследования является разработка методики определения напряжений в сварных швах, ослабленных микродефектами (порами), в пластинчатых конструкциях, подверженных одновременному действию температурных и силовых нагрузок.

Сформулируем постановку задачи.

Предположим, что процесс деформирования не является адиабатическим или изотермическим, тогда следует принимать во внимание приращение температуры

$$\Delta T = T - T_0,$$

где  $T = T(\mathbf{x}, t)$  - температура тела в точке  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$  в рассматриваемый момент времени  $t$ ;

$T_0$  - температура тела в той же точке в исходном недеформированном состоянии в начальный момент времени.

При изменении температуры на величину  $\Delta T$  в некоторой точке  $\mathbf{x}$  конструкции объем малой области, окружающей эту точку, изменится пропорционально  $\Delta T$ ; при этом возникнут тепловые деформации, вычисляемые по формуле

$$\varepsilon'_{ij} = \alpha_{ij}(T - T_0), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

или, в матричной записи

$$\{\varepsilon'\} = \{\mathbf{a}\}(T - T_0), \quad (2)$$

где  $\{\mathbf{a}\} = \{\alpha_{ij}\}$  - матрица коэффициентов теплового расширения (1/град).

Для случая изотропного тела расширение во всех направлениях происходит одинаково и, следовательно, можем записать

$$\{\mathbf{a}\} = \alpha * \delta_{ij},$$

где  $\alpha$  - коэффициент теплового расширения;

$\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Для ортотропного тела коэффициенты теплового расширения могут быть различными по осям упругой симметрии, т.е. имеет место равенство

$$\{\mathbf{a}\} = \alpha_i * \delta_{ij}.$$

Полная деформация  $\{\varepsilon\}$  в рассматриваемой точке равна сумме упругой деформации,  $\{\varepsilon'\}$  обусловленной внешними нагрузками, и тепловой деформации  $\{\varepsilon^t\}$ , т.е.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon'\} + \{\varepsilon^t\}.$$

Отсюда определяем величину упругой деформации

$$\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}.$$

Тогда напряжения в линейно-упругом теле можно определить по закону Гука [7]

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda(\varepsilon_{kk} - \gamma T)\delta_{ij} \quad (3)$$

где  $\lambda, \mu$  - постоянные Ламе;

$\gamma$  - термомеханическая постоянная,  $(\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_i)$ ;

$\alpha_i$  - коэффициент теплового расширения/

Это известные соотношения Дюамеля-Неймана.

Компоненты тензора деформаций  $\{\varepsilon\}$  выражаются через перемещения  $u_i (i=1, 2, 3)$  соответствующих точек тела согласно соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4)$$

Используя соотношения Дюамеля-Неймана (3), соотношения Коши (4), приходим к уравнениям движения для связанной термоупругой задачи.

Таким образом, требуется определить напряженно-деформированное состояние упругой пластины в условиях температурного и силового воздействий, т.е. удовлетворить уравнениям движения

$$(\lambda + 2\mu)\Delta u_i - (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}\mathbf{u}) - \gamma\frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - F_i = 0$$

уравнению теплопроводности [2], а также начальным и граничным условиям.

Здесь  $F_i$  компоненты внешней нагрузки.

Приведенная формулировка задачи дает возможность изучить напряжения и остаточные деформации в сварном шве в зоне пор и включений в условиях нестационарных температурных и силовых воздействий.

В работе рассматривалось взаимодействие двух пор и включения.

Для решения задачи применен метод конечных элементов (МКЭ). Использовались различные типы конечных элементов (КЭ).

Включение моделировалось треугольными изопараметрическими элементами с одной криволинейной границей. Для моделирования зоны пор использовались как классические «твердотельные» конечные элементы, так и прямоугольные изопараметрические элементы с аппроксимацией неизвестных многочленами первой и второй степени.

Нестационарную задачу предлагается решать с помощью пошагового алгоритма по времени.

**Расчетная модель и исходные данные.**

В работе [11] рассматривались разные виды заделки. Здесь ограничимся случаем жесткого защемления корпуса по соответствующим местам крепления основания к фундаменту (рис 1а). На этом же рисунке представлена геометрическая модель короба. Через  $P_1, P_2$  обозначено действующее давление.

В модели корпуса рассматривались прямоугольные пластинки со следующими размерами:

- пластина 1  $a = 400$  см;  $b = 2100$  см, толщиной  $h = 4$  см,
- пластина 2  $a = 400$  см;  $b = 1100$  см, толщиной  $h = 3$  см,
- пластина 3  $a = 60$  см;  $b = 1100$  см, толщиной  $h = 4$  см.

В качестве материала пластинок рассматривалась сталь 10ХСНД. Модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны  $E = 2.1 \times 10^6$  кгс/см<sup>2</sup>;  $\nu = 0.3$ . Плотность материала пластин равна  $\rho_p = 0.0079$  кг/см<sup>3</sup>.

Поры находятся в сварном шве, соединяющем две пластины толщиной 4 см каждая.

Построена базовая конечно-элементная модель короба с использованием трехмерных элементов типа «solids».

В данной работе изучена стационарная задача.

Для расчета НДС при действии внутреннего давления и нагрева использовалась 5-слойная модель по пластинам толщиной 4 см, 4-слойная по пластинам толщиной 3 см., состоящая для рассматриваемой конструкции из 300000 элементов. На сварных швах выполнено сгущение сетки конечных элементов аналогично [11].

На рис. 1б) показана конечно - элементная модель пластин и сварного шва.

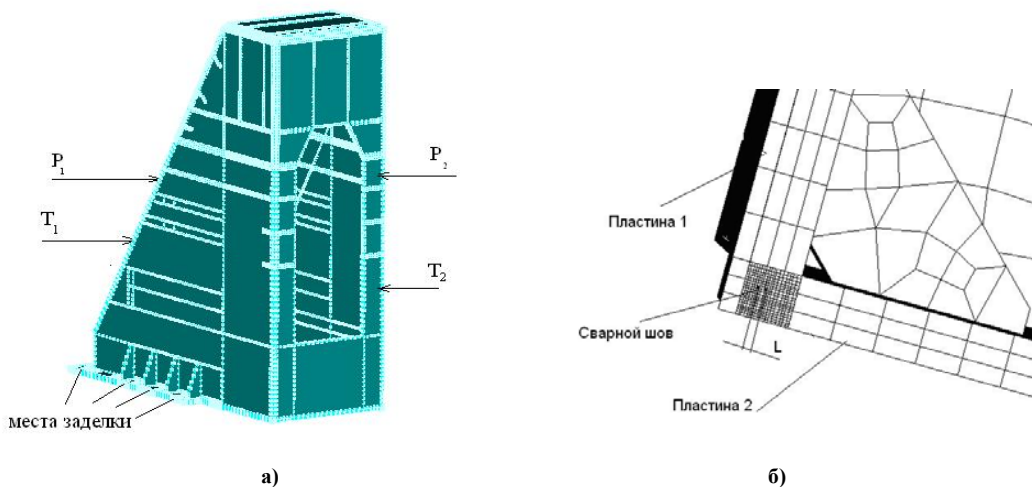


Рис. 1. Схема приложения нагрузки и конечно - элементная модель

Исследование картины растрескивания поверхностей внутри сварного шва в цепочке пор и включений проводились с использованием различных типов конечных элементов.

**Анализ результатов расчета напряжений в окрестности пор и включения**

В работе анализируется взаимное влияние двух пор и включения диаметром 3.0 мм. Поры находятся в сварном шве, соединяющем две пластины толщиной 40 мм каждая. Рассматривались различные типы конечных элементов. Проводился анализ картины растрескивания сварного шва.

Зона пор моделировалась с помощью различных конечных элементов.

В таблицах 1-3 приведены данные расчетов максимальных напряжений, возникающих в зоне дефектов.

Введены следующие обозначения:  $\sigma_{\text{эКВ}}^1$  – максимальные напряжения в том узле поры, где наблюдается максимальная температура;  $\sigma_{\text{эКВ}}^2$  – максимальные напряжения в том узле включения, где наблюдается максимальная температура;  $\sigma_{0,2l}$  – минимально допустимые напряжения в сварном шве (по пределу пропорциональности);  $L$  – расстояние между порой и включением (рис.1б).

Результаты, представленные в табл. 1, получены с использованием классического конечного элемента solid. Исходные данные (расстояние между дефектами и температура) и результаты расчета здесь отвечают порам диаметром 3.0 мм, при этом острый угол включения принимался равным 30°.

Таблица 1

Исходные данные и результаты расчета для пор диаметром 3.0 мм, КЭ solid

$L$ , мм	$T$ , °C	$\sigma_{0,2l}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\sigma_{\text{эКВ}}^1$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\sigma_{\text{эКВ}}^2$ , кгс/см <sup>2</sup>
0,875	159	3280	3530	3780
1,75	152	3300	3480	3710
2,625	148	3300	3400	3640
3,5	146	3300	3370	3530

Данные, приведенные в табл. 2, получены с использованием для моделирования пор прямоугольных изопараметрических элементов с аппроксимацией неизвестных величин полиномами первой степени. Отметим, что здесь также рассматривались поры диаметром 3.0 мм, а острый угол включения был равен 30°.

Таблица 2

Исходные данные и результаты расчета для пор диаметром 3.0 мм, линейный изопараметрический элемент

$L$ , мм	$T$ , °C	$\sigma_{0,2l}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\sigma_{\text{эКВ}}^1$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\sigma_{\text{эКВ}}^2$ , кгс/см <sup>2</sup>
0,875	159	3280	3490	3780
1,75	152	3300	3410	3710
2,625	148	3300	3375	3640
3,5	146	3300	3345	3530

В таблице 3 показаны результаты расчета максимальных напряжений, полученные с помощью прямоугольных изопараметрических элементов с аппроксимацией неизвестных полиномами второй степени. Как и в таблицах 1-2, здесь также приведены результаты для пор диаметром 3.0 мм, и острый угол включения полагался равным 30°.

Таблица 3

Исходные данные и результаты расчета для пор диаметром 3.0 мм, квадратичный изопараметрический элемент

$L$ , мм	$T$ , °C	$\sigma_{0,2l}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\sigma_{\text{эКВ}}^1$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\sigma_{\text{эКВ}}^2$ , кгс/см <sup>2</sup>
0,875	159	3280	3465	3780
1,75	152	3300	3385	3710
2,625	148	3300	3340	3640
3,5	146	3300	3310	3530

Анализ результатов показывает следующее. Максимальные напряжения в узлах включения с максимальной температурой совпадают во всех приведенных расчетах. Что касается максимальных напряжений в узлах пор с максимальной температурой, то видим расхождение результатов, полученных с использованием различных конечных элементов, в пределах 40 кгс/см<sup>2</sup>. Хотя отличие незначительное, все же необходимы дальнейшие исследования, касающиеся выбора наилучшего конечного элемента. Это связано с тем, что именно в зоне пор наблюдаются наибольшие напряжения, и рост трещин часто начинается именно из зоны пор [11]. При  $\sigma_{\text{эКВ}}^1 = 3310$  кгс/см<sup>2</sup> развития трещин, приводящего к растрескиванию сварного шва не наблюдается, однако при  $\sigma_{\text{эКВ}}^2 = 3780$  кгс/см<sup>2</sup> трещины будут образовываться в зоне, непосредственно примыкающей к включению.

Отметим также, что хорошее согласование результатов, полученных с использованием разных КЭ, позволяет применять изопараметрические элементы, что требует меньших затрат машинного времени.

## Список использованной литературы

1. Кит Г.С., Хай М.В. Определение трехмерных температурных полей и напряжений в бесконечном теле с разрезами //Изв. АН СССР. Механика твердого тела.–1982. – №5. – С. 60-67.
2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970.–307с.
3. Станюкович А. В. Хрупкость и пластичность жаропрочных материалов М., Металлургия 1967. -199 с.
4. Кит Г.С., Побережный О.В. Нестационарная задача термоупругости для пластинки с трещиной при наличии теплоотдачи с боковых поверхностей.// Физико-химическая механика материалов.– 1976.–Т. 12, № 4. – С. 73-78.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.-872 с.
6. Прочность при малоцикловом нагружении. Под. ред. С. В. Серенсена, М., Наука, 1975.-285с.
7. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1970.-256 с.
8. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов. – Казань.: Казанский государственный университет, 2004.–239 с.
9. Алтухов Е.В. Метод И.И. Воровича в трехмерной теории термодинамики пластин. //Теорет. и прикл. механика. Донецк, 2005, вып. 41. С. 3-8.
10. Бородин П.Ю. Динамическая связанная задача термоупругости в различных пространственных приближениях. Мат. моделирование.- 1998.-Т. 10, №3.-С. 61-82.
11. Стрельнікова О., Ковч О. Дослідження взаємного впливу включення на ланцюжку пор в зварному шві під впливом термосилового навантаження. Восточно-Европейский журнал передовых технологий.- 2016, Т. 3, №7 (81).-С. 9-14.



УДК 519.8 (004.9)

Л.С. КОРЯШКИНА, Н.Н. ОДНОВОЛ, А.П. ЧЕРЕВАТЕНКО

Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет»

А.А. МИХАЛЁВА

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН СЕРВИСНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ  
НА ЗАДАНОЙ ТЕРРИТОРИИ**

*Представлено математическое и программное обеспечение, разработанное для создания теоретических зон обслуживания с использованием характеристик сервисных центров и предположений о поведении клиентов. Впервые для описания процесса территориальной сегментации применены модели непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств, а при численной реализации алгоритмов их решения использовались ГИС-технологии. Представлены зоны обслуживания для подразделений МЧС, а также отделений управления труда и социальной защиты населения г. Днепра, полученные в результате вычислительных процедур.*

*Ключевые слова: зоны сервисного обслуживания, территориальная сегментация, непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств, геоинформационные системы и технологии*

Л.С. КОРЯШКИНА, М.М. ОДНОВОЛ, А.П. ЧЕРЕВАТЕНКО

Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет»

О.О. МИХАЛЬОВА

Дніпровський національний університет ім. О. Гончара

**МОДЕЛЮВАННЯ ЗОН СЕРВІСНОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗАДАНОЇ ТЕРИТОРІЇ**

*Представлено математичне і програмне забезпечення, розроблене для створення теоретичних зон обслуговування з використанням характеристик сервісних центрів і припущень про поведінку клієнтів. Вперше для опису процесу територіальної сегментації застосовані моделі неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин, а при чисельній реалізації алгоритмів їх розв'язання були використані ГІС-технології. Представлені зони обслуговування для підрозділів МЧС, а також для відділень управління праці та соціального захисту населення у м. Дніпро, які отримані у результаті обчислювальних процедур.*

*Ключові слова: зони сервісного обслуговування, територіальна сегментація, неперервні задачі оптимального мультиплексного розбиття множин, геоінформаційні системи і технології*

L.S. KORIASHKINA, N.N. ODNOVOL, A.P. CHEREVATENKO

The State Higher Educational Institution "National Mining University"

O.O. MIKHALOVA

Dnipro National University named after O. Gonchar

**MODELLING OF SERVICE ZONES ON A GIVEN AREA**

*A mathematical support and software for creating theoretical service areas using characteristics of service centers and assumptions about customers' behavior are described. For the first time, the models of continuous problems of optimal multiplex partitioning of sets were applied to describe the territorial segmentation process, and for the numerical implementation of algorithms for their solving GIS technologies are used. The article presents service areas for divisions of the Ministry of Emergency Situations, as well as for the Labor and Social Protection departments in Dnipro, received as the result of computational procedures.*

*Keywords: service areas, territorial segmentation, continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets, Geoinformation systems and technologies*

**Постановка проблеми**

Объективной закономерностью современного развития мировой цивилизации является приоритет социальных аспектов, совокупность явлений и тенденций, формирующихся в социальной сфере [1]. В течение ряда десятилетий в отечественных и зарубежных управленческих системах укрепилось мнение, что именно экономический рост и экономическое развитие являются залогом обеспечения растущих человеческих потребностей. Однако обобщение опыта достаточно большого числа стран свидетельствует о том, что быстрый экономический рост не позволяет иногда удовлетворить даже основные материальные потребности значительной части населения, создать благоприятный социально-духовный климат, решить проблемы культуры, нравственности, общественной морали и этики.

Важным показателем развития социально-экономического комплекса любой страны является

уровень развития непроизводственной сферы, отражающий всю совокупность социальных проблем, их динамику и перспективы. В непроизводственную сферу включают жилищно-коммунальное хозяйство и бытовое обслуживание населения; транспорт и связь по обслуживанию организаций населения; геологию и разведку недр (за вычетом глубокого разведочного бурения на нефть и природный газ); здравоохранение, физическую культуру и социальное обеспечение; просвещение; культуру и искусство; науку и научное обслуживание; финансово-кредитное и страховое обслуживание; управление; общественные организации. В последнее время возникли новые виды услуг, не учтенные старыми классификаторами: риэлтерская деятельность, кредитование под залог, обмен валюты и др. В ряде случаев к этому перечню отраслей присоединяют торговлю, снабжение и сбыт, заготовки, жилищное строительство, охрану общественного порядка. При этом подчеркивается теоретическая правомерность использования как инвариантов терминов «непроизводственная сфера», «сфера обслуживания населения», «сфера услуг».

Рынок услуг существует в единстве с товарным рынком и является одной из его разновидностей, развивающейся в рамках общих законов рыночной экономики и подчиняющейся этим законам. Вместе с тем он имеет ряд специфических черт, обуславливающих особый подход к предпринимательской и маркетинговой деятельности, призванной обеспечить удовлетворение спроса на услуги. К основным особенностям рынка услуг можно отнести территориальную сегментацию и высокую динамичность рыночных процессов. Формы предоставления услуг, спрос и условия функционирования сервисных предприятий зависят от характеристик территории, охваченной конкретным рынком. Поэтому территориальный (географический) критерий является в данном случае определяющим.

Имеется большое число работ ученых и практиков, в которых затрагиваются многие аспекты применения экономико-математического моделирования к решению задач территориального размещения предприятий. Однако методологические вопросы выработки научных методов для анализа и оценки мест размещения сервисных предприятий с выделением зон их влияния нуждаются в дальнейших исследованиях. Управленческие решения по размещению предприятий должны приниматься с учетом региональных особенностей, таких как плотность населения в рассматриваемом регионе; спрос на услуги; места расположения уже существующих сервисных предприятий; густота дорожной сети. Эти факторы могут стать причиной возникновения некоторых процессов и эффектов, влияние которых на развитие сферы услуг неоднозначно.

Выбор мест для размещения новых предприятий или репрофилирование имеющихся предприятий на другие виды услуг нужно осуществлять с применением соответствующего прикладного инструментария. Разработке такого инструментария, а именно, - математического и программного обеспечения территориальной сегментации рынка услуг и посвящена данная работа.

#### **Анализ последних исследований и публикаций**

Задачи оптимального разбиения множеств (ОРМ) и связанные с ними задачи оптимальной организации сервисных или производственных сетей активно изучаются как отечественными, так и зарубежными учеными [2 – 12 и др.]. В англоязычной литературе такие задачи известны как «Optimal set partitioning problem», «Facility location problem», «Continuous Location-Allocation Problem». Родственными к ним являются задачи о  $k$ -центрах и  $p$ -медианах, задачи о покрытиях [2, 3]. Основная проблема, решаемая с помощью моделей и методов ОРМ, состоит в разделении рыночного региона на несколько сервисных подрегионов, каждый из которых может быть обслужен лишь одним сервисным центром. Решение о размещении сервисных предприятий, как правило, сопровождается множеством альтернативных вариантов разбиения клиентов, которых обслуживает каждый центр. Критерием выбора оптимального разбиения может быть минимизация затрат на оказание или получение той или иной услуги.

В подавляющем большинстве моделей задач разбиения принимают, что потребители размещены дискретно, как «центры притяжения» почтовых индексов. Такое предположение, в основном, продиктовано ограниченными возможностями способности различать объекты, а также вычислительной сложностью решения задач с большой плотностью размещения клиентов. В соответствующей научной литературе показано, что и дискретная модель, и задача размещения-разбиения на плоскости являются NP-полными задачами.

Подробный обзор дискретных задач ОРМ приведен в монографии [2]. Интересным представителем таких задач является обобщение задачи о  $p$ -медиане, когда клиенты выбирают поставщиков, исходя из собственных предпочтений [3]. Для решения этой задачи в указанном источнике разработан генетический алгоритм, использующий в качестве популяции локальные оптимумы по окрестности Лина-Кернигана. Для оценки качества получаемых решений используется техника сведения исходной задачи к задачам целочисленного линейного программирования.

Проблема размещения новых объектов на древовидной сети с целью свести к минимуму максимальные взвешенные расстояния между существующими и новыми объектами и между парами новых объектов сети изучается в работе [4]. Здесь приводится алгоритм двоичного поиска, имеющий полиномиальный порядок, основанный на рациональном представлении данных, применении параметрического подхода и идеи параллелизма.

Задачи, в которых разбиваемое множество является континуальным, в научной литературе называют непрерывными задачами разбиения. Такие задачи изучаются, например, в работах [5 – 15 и др.].

В некоторых научных трудах к задаче размещения-разбиения на плоскости с непрерывно распределенным спросом применяются методы вычислительной геометрии, в частности такие ее фундаментальные объекты, как диаграммы Вороного и различные их обобщения [10 – 12]. Так, например, использование диаграмм Вороного высших порядков при моделировании зон розничной торговли продемонстрировано в [12]. При этом под моделями торговой зоны Вороного понимают основанные на геометрии процедуры создания теоретических торговых зон с использованием характеристик магазина и предположений о поведении потребителя. В [12] приведены две модели Вороного, которые учитывают предположение о том, что потребитель выбирает  $k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) ближайших наиболее привлекательных объектов. Если покупатель считает  $k$  объектов одинаково привлекательными, торговые зоны можно представить в виде мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного  $k$ -го порядка. Если же клиент отдает предпочтение более близким магазинам, торговые зоны определяются упорядоченной мультипликативно взвешенной диаграммой Вороного  $k$ -го порядка. Обе модели позволяют получить перекрытие торговых зон. Кроме того, упорядоченная мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного  $k$ -го порядка позволяет исследовать влияние различных уровней предпочтения по оценкам продаж магазина. Одной из особенностей рассматриваемых моделей является то, что полученные в результате торговые зоны не являются взаимоисключающими.

Как уже отмечалось, типичными представителями непрерывных задач ОРМ, хорошо изученных до настоящего времени, являются задачи размещения сервисных центров с одновременным разбиением региона, непрерывно заполненного клиентами, на области потребителей, каждая из которых обслуживается только одним сервисным центром [5 – 10].

Нетрадиционный подход к решению задачи об оптимальном размещении нескольких логистических объектов с одновременной сегментацией логистических зон в случае, когда потребители непрерывно распределены на всем полигоне обслуживания, представлен в работе [9]. Здесь разработана модификация оптико-геометрического подхода, основанная на построении фронтов световой волны в случае, когда начальным источником возбуждения является некоторое многообразие. Как правило, для решения этого класса задач успешно применяются дискретные методы, однако при исследовании некоторых прикладных задач при этом возникает ряд сложностей, например, невозможность полного учета специфических условий задач (ландшафт, распределение населения, наличие естественных и искусственных барьеров). Одним из способов преодоления указанных трудностей, по мнению авторов, и является рассмотрение таких задач в непрерывной постановке, а также применение для их исследования оптико-геометрического подхода.

Другим способом учета территориальных особенностей является использование для сегментации карт геопространственного интеллектуального анализа данных, как например, в работе [11].

Вообще говоря, вопросы, связанные с интеграцией современных геоинформационных технологий и методов решения задач оптимального размещения логистических или сервисных центров с одновременной сегментацией области на зоны обслуживания, являются актуальным направлением современных научных исследований. Целью настоящей работы является демонстрация возможности совместного применения моделей и методов решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств (ОРМ) [13 – 15] и ГИС-систем в качестве инструментария, применяемого для территориальной сегментации произвольной ограниченной области.

Задачи ОРМ состоят в том, чтобы разбить ограниченное множество на такие подмножества точек, каждое из которых отвечало бы (в соответствии с определенным критерием) одному и тому же набору  $k$  точек из  $N$  выделенных (или размещаемых), называемых центрами. Критерий оптимальности мультиплексного разбиения выбирается с оглядкой на специфику самих центров. Чаще всего, это или минимизация суммарного взвешенного расстояния от центров до всех точек, им соответствующих, или оптимизация наихудшего варианта, когда минимизируется максимальное расстояние от центров до самой отдаленной точки соответствующего им подмножества. Вопросам, связанным с теоретическим обоснованием методов решения непрерывных линейных задач ОРМ в различных постановках, а также исследованию свойств решений и практических приложений таких задач, посвящены работы [13 – 15].

ГИС-технологии позволяют учитывать тип расселения населения. Компактный тип характеризуется плотной сетью поселений, взаимосвязанных системой дорог, хорошо развитой инфраструктурой. Для дисперсного типа характерно существование небольших поселений, находящихся на таком расстоянии друг от друга, когда взаимодействие между ними затруднено. ГИС хранит информацию о реальном мире в виде набора тематических слоев, которые объединены на основе географического положения. Электронные карты, как правило, содержат полную информацию о протяженности дорог, их связности и условиях перемещения по ним (скоростные режимы, запрещенные съезды, наличие перевалочных пунктов и так далее).

В настоящей работе ГИС (а именно, библиотека Google Maps Distance Matrix API) используется для поиска кратчайшего пути между любыми двумя точками региона, учитывая дорожный граф.

**Математическая постановка непрерывной задачи ОМРМ с ограничениями**

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, замкнутое множество из пространства  $E_2$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in \Omega$ , для всех  $i = \overline{1, N}$ , – некоторые точки, называемые «центрами», координаты которых неизвестны заранее и подлежат определению,  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$ .

Будем использовать следующие обозначения:  $N = \{1, 2, \dots, N\}$  – набор всех индексов центров;  $M(N, k)$  – множество всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $N$ ,  $|M(N, k)| = C_N^k = L$ ;  $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ ,  $l = \overline{1, L}$ , – элементы из  $M(N, k)$ .

С каждым элементом  $\sigma_l$  множества  $M(N, k)$  будем ассоциировать подмножество  $\Omega_{\sigma_l}$  точек из  $\Omega$ , а с подмножеством  $\Omega_{\sigma_l}$  – набор центров  $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$ ,  $l = \overline{1, L}$ .

Пусть  $\Sigma_{\Omega}^{N, k}$  – класс всех возможных разбиений  $k$ -го порядка множества  $\Omega$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$ :

$$\Sigma_{\Omega}^{N, k} = \left\{ \bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} : \bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0; \sigma_i, \sigma_j \in M(N, k), i \neq j, i, j = \overline{1, L} \right\}.$$

Непрерывная линейная задача оптимального мультиплексного разбиения множества  $\Omega \subset E_2$  при ограничениях с размещением центров формулируется следующим образом [13, 14].

**Задача А- $k$ .**  $F(\bar{\omega}, \tau^N) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N, k} \\ \tau^N \in \Omega^N}}$ ,

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}. \tag{2}$$

Здесь функция  $\rho(x)$  – ограниченная, измеримая, неотрицательная на множестве  $\Omega$ ;  $b_i \geq 0, i = \overline{1, N}$ , – заданные числа. Коэффициенты  $\gamma_j^l$  в левых частях ограничений таковы, что для всех  $j = \overline{1, N}$ ,  $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ ,  $l = \overline{1, L}$  имеют место соотношения:

$$0 \leq \gamma_j^l \leq 1, \quad \gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + \dots + \gamma_{j_k^l}^l = 1. \tag{3}$$

Пара  $(\bar{\omega}^*, \tau^{N*})$ , удовлетворяющая ограничениям (1), (2), при которой достигается минимальное значение функционала  $F$ , называется **оптимальным решением задачи А- $k$** .

Если в задаче А- $k$  либо зафиксировать центры  $\tau_i, i = \overline{1, N}$ , либо отменить ограничения (1), (2), то получим частные случаи задачи ОМРМ [13] – с фиксированными центрами или без ограничений соответственно.

Для того, чтобы в задаче А- $k$  при любом наборе центров  $\tau_i, i = \overline{1, N}$ , класс допустимых разбиений  $k$ -го порядка множества  $\Omega$  был непустым, достаточно выполнения следующих условий [13]:

$$0 \leq b_i \leq S, \quad i = \overline{1, N}; \quad \sum_{i=1}^p b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^N b_i, \tag{4}$$

где  $S = \int_{\Omega} \rho(x) dx$ .

При  $k = 1$  задачи А- $k$  представляют собой непрерывные линейные задачи оптимального разбиения множеств [9].

**Замечание.** Как уже отмечалось, выбор критерия оптимальности мультиплексного разбиения определяется спецификой самих центров. Критерий качества разбиения  $F(\bar{\omega}, \tau^N) = F_1(\bar{\omega}, \tau^N)$ , где

$$F_1(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx, \quad (5)$$

состоящий в минимизации суммарного расстояния от центров до всех клиентов, ими обслуживаемых, используется в случае необходимости разбить данную область  $\Omega$  на регионы, каждый из которых охватывал бы клиентов с одними и теми же  $k$  ближайшими соседними сервисными центрами. Примерами пар «сервисный центр – клиент» в этом случае могут выступать предприятия и потребители, почтовые отделения и абоненты, станции сбора анализов и пациенты и т.п. Такие задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств полезно формулировать для изучения конкуренции между сервисными центрами, определения для каждого центра реальной сферы деятельности, учитывая его мощность, а также дополнительную информацию о возможностях конкурентов и о спросе на предоставляемую услугу в рассматриваемой области. Если центры представляют собой крайне необходимые предприятия или службы (аварийные, полицейские, медицинские учреждения и т.п.), то критерием оптимальности может служить минимизация расстояния (или времени) от центра обслуживания до самой отдаленной точки региона, то есть оптимизация наихудшего варианта, что математически может быть записано так:  $F(\bar{\omega}, \tau^N) = F_4(\bar{\omega}, \tau^N)$ , где

$$F_4(\bar{\omega}, \tau^N) = \max_{l=1, L} \sup_{x \in \Omega_{\sigma_l}} \max_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x). \quad (6)$$

Здесь  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$ ;  $c(x, \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$  – ограниченные, определенные на декартовом произведении  $\Omega \times \Omega$  функции, измеримые по аргументу  $x$  при любом фиксированном векторе  $\tau_i$ ,  $w_i > 0$ ,  $a_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – заданные числа.

И в том, и в другом случае предполагается, что клиенты каждого региона могут обслуживаться любым из  $k$  соответствующих центров, например, когда самые близкие из них по каким-то причинам не смогут предоставить услугу.

**Схема метода решения задачи А-к**

В работе [14] приведен единый подход, на котором базируются методы и алгоритмы решения задач ОМРМ. Особенностью этого подхода, например, для линейных задач ОМРМ, является тот факт, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить в явном виде. При этом в аналитическое выражение могут входить параметры, являющиеся решениями вспомогательных конечномерных задач оптимизации негладких целевых функций. Далее приведем лишь идею метода решения задачи ОМРМ с ограничениями и основные формулы.

Характеристической вектор-функцией подмножества  $\Omega_{\sigma_l}$ , входящего в разбиение  $k$ -го порядка множества  $\Omega$ , называется вектор-функция  $\lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x))$ , определенная на множестве  $\Omega$ , с координатами, которые задаются следующей формулой:  $\forall x \in \Omega_{\sigma_l}, l = \overline{1, L}$

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\sigma_l} \ \& \ i \in \sigma_l, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = \overline{1, N},$$

где  $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$  – набор индексов центров  $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$ , ассоциируемых с подмножеством  $\Omega_{\sigma_l}$ .

Исходная задача А-к записывается как задача бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными.

**Задача В-к.** Найти  $\min_{(\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma^k \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau^N)$ ,

$$\Gamma^k = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k, \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N} \right\};$$

$$\Gamma_0^k = \left\{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), \dots, \lambda_N^l(\cdot)) : \lambda_i^l(x) = 0 \vee 1 \quad \forall x \in \Omega, i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}, \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, l = \overline{1, L}, \text{ п.в. для } x \in \Omega \right\}.$$

Если функционал задачи **A-k** имеет вид (5), то функционал  $I(\lambda(\cdot), \tau^N)$  задачи **B-k** запишется так:

$$I(\lambda(\cdot), \tau^N) = I_1(\lambda(\cdot), \tau^N),$$

$$I_1(\lambda(\cdot), \tau^N) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \left( \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \lambda_i^l(x) \right) \rho(x) dx.$$

Оптимальное решение задачи **B-k** получено в следующем виде: для всех  $i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$  и почти всех  $x \in \Omega$

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j, \\ & \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве  $\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N$  выбирается оптимальное решение следующей задачи конечномерной оптимизации:

$$G(\psi) = \min_{\tau^N \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) \rightarrow \max, \tag{7}$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = \overline{p+1, N}, \tag{8}$$

где

$$G_1(\tau^N, \psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in \mathcal{M}(N, k) \\ l=1, L}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i.$$

И, таким образом, решение непрерывной задачи ОМРМ сводится к решению конечномерной задачи (7), (8) любым известным методом негладкой оптимизации.

Если же в задаче **A-k** функционал представляет собой радиус  $k$ -кратного шарового покрытия области, то есть записан в виде (6), то после введения характеристических функций подмножеств разбиения  $k$ -го порядка множества  $\Omega$  критерий качества задачи бесконечномерного программирования **B-k** запишется в следующем виде:

$$I(\lambda(\cdot), \tau^N) = I_4(\lambda(\cdot), \tau^N),$$

где

$$I_4(\lambda(\cdot), \tau^N) = \max_{l=1, L} \sup_{x \in \Omega} \max_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) \lambda_i^l(x).$$

В силу нелинейности функционала  $I_4(\lambda(\cdot), \tau^N)$  решение задачи **B-k** с таким критерием качества на порядок усложняется. Описание и обоснование метода решения такой задачи объемно и не представляется возможным в рамках данной работы.

Если в приведенных формулах зафиксировать вектор  $\tau^N \in \Omega^N$ , считая, что он известен заранее, то можно получить оптимальное решение задачи оптимального мультиплексного разбиения с ограничениями при фиксированных центрах.

**Особенности вычислительной технологии**

Практическая реализация описанного подхода для территориальной сегментации конкретного региона предполагает, в первую очередь, проведения подготовительного этапа обработки электронных карт с помощью любого графического редактора. При этом из рисунка карты местности исключаются реки, водоемы, части суши, не принадлежащей территории региона. Полученная допустимая область  $\Omega$  вписывается в прямоугольник  $\Pi$ , который покрывается затем прямоугольной сеткой. В каждой точке сетки определяется функция плотности:

$$\bar{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Pi \setminus \Omega \end{cases}$$

Решение задач безусловной недифференцируемой оптимизации вида (7), (8) в разработанном программном обеспечении осуществляется с помощью модификации  $\gamma$ -алгоритма Шора. Для того, чтобы не допустить размещение центра на недопустимой (запретной) территории, разработан следующий подход: на каждой итерации  $\gamma$ -алгоритма Шора проверяется принадлежность текущих координат центров допустимой области. В случае, когда какой-либо центр попадает в запретную зону, определяется его «псевдопроекция»

на разбиваемое множество. Под псевдопроекцией точки  $z \in E_2$  на замкнутое множество  $\Omega \subset E_2$  понимается точка  $v \in \Omega \cap D(z)$ , для которой выполняется условие:  $dist(z, v) = \min_{x \in \Omega \cap D(z)} dist(z, x)$ , где

$dist(z, v)$  – расстояние между точками, множество  $D(z) = \{v = z + \gamma w, \gamma \in R, w \in \{e_1, e_2\}\}$ ,  $e_1, e_2$  – орты осей координат.

Решение задачи ОМРМ с размещением центров производится в два этапа. На первом этапе решается задача, в которой в качестве функций  $c(x, \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , выступает одна из известных метрик (в рамках города, обычно, манхэттенская). На втором этапе, подключая ГИС для поиска фактического расстояния между найденными центрами и точками региона, определяется оптимальное разбиение  $k$ -го порядка заданного региона. Такой подход позволяет сократить число обращений к библиотеке Google Maps Distance Matrix API, а, следовательно, и количество задействованных вычислительных ресурсов – объема оперативной памяти и времени, требуемого на выполнение как одного запроса, так и в целом всех запросов.

**Результаты территориальной сегментации города**

Разработанный математический аппарат, а также программный продукт с интегрированной функцией обращения к ГИС применялись для решения реальных практических задач территориальной сегментации. Далее представим результаты разделения г. Днепра на зоны оптимального (оперативного) реагирования подразделений МЧС, с учетом перекрытия зон двукратно или даже трехкратно. На сегодняшний день на территории города расположено восемь самостоятельных государственных пожарных частей. Их координаты, также как и значения расстояний между любыми двумя точками на карте города, были получены при помощи Google Maps. Для решения поставленной проблемы была сформулирована задача ОМРМ с фиксированными центрами  $\tau_i$  и критерием минимизации (5) со следующими значениями параметров:  $w_i = 1, a_i = 0, i = \overline{1, N}$ . По найденному разбиению подсчитывалось значение функционала  $F_4(\bar{\omega}, \tau^N)$ . На рис. 1 приведены два варианта разбиения территории города на зоны обслуживания МЧС-частей: дуплексное и триплексное.

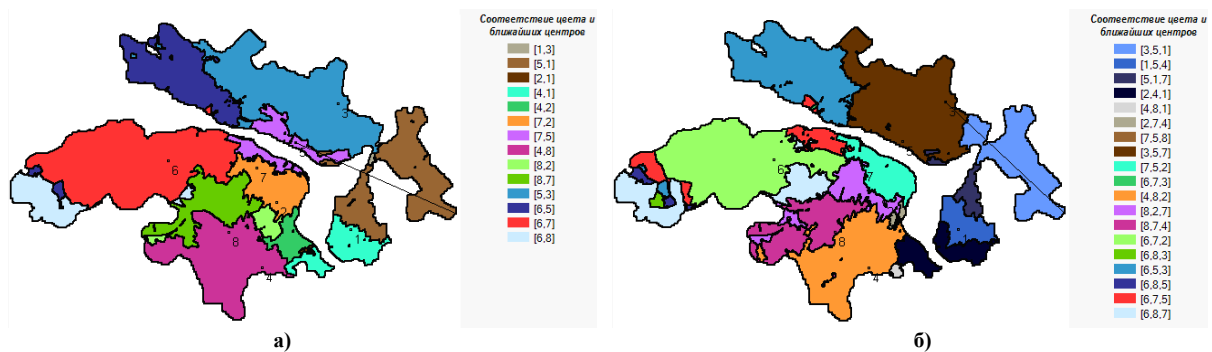


Рис. 1. Территориальная сегментация г. Днепра на зоны реагирования восьми пожарных частей с учетом перекрытия зон: а) второго, б) третьего порядка

Тонкой черной линией соединены концы соответствующих минимальных радиусов покрытия зон. Фактические расстояния, определяющие эти радиусы и полученные с помощью ГИС, приведены на рис. 2.

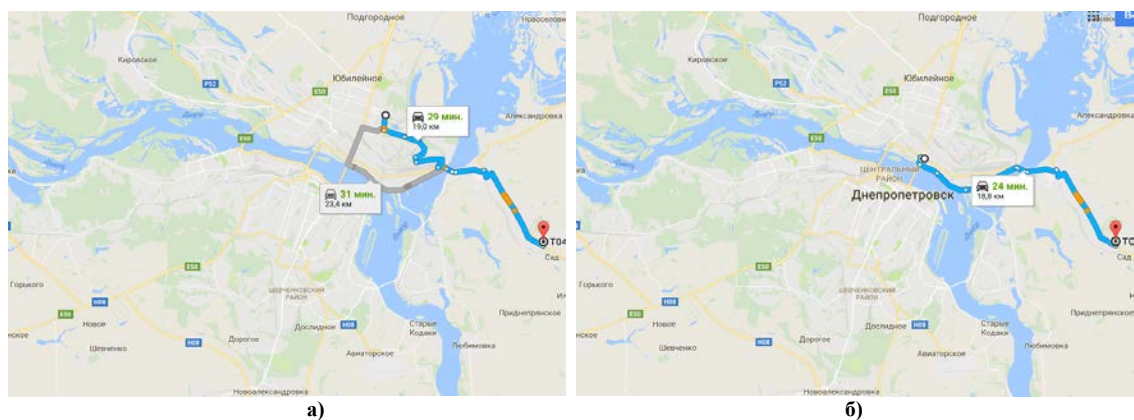


Рис. 2. Минимальный радиус покрытия для полученного разбиения г. Днепра с перекрытием зон: а) второго порядка, б) третьего порядка

Представленные в работе модели мультиплексного разбиения множеств позволяют получить перекрытие сервисных зон. Так, на рис. 3 приведены зоны обслуживания для каждого из восьми центров при разбиении 3-го порядка. И таким образом, полученные в результате зоны позволяют учитывать те ситуации, когда ближайший к клиенту центр (в данном случае пожарная часть) занят и не может ответить на вызов, и обслуживание клиента передается другому ближайшему центру.

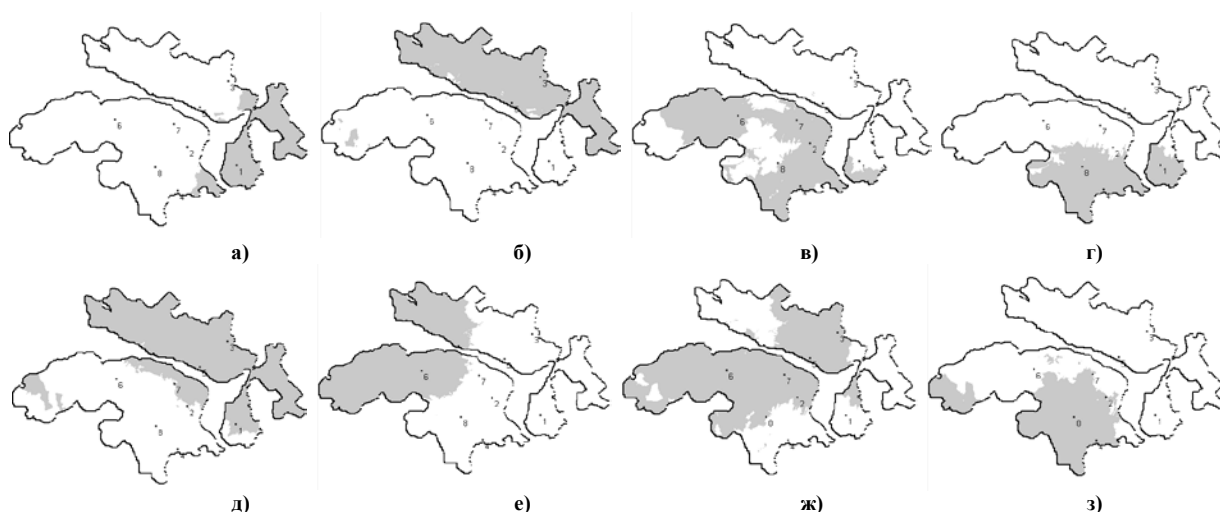


Рис. 3. Разбиение 3-го порядка. Зоны обслуживания центров МЧС: а) – первого, б) – второго, в) – третьего и т. д. з) – восьмого

Кроме того, определение с помощью представленного подхода районов обслуживания для подразделений управления МЧС, так же как и любых других типов центров социальной защиты населения, позволяет оценить и так называемые "мощности" центров. По количеству населения, охваченного выделенной территорией – зоной обслуживания конкретного центра, можно условно рассчитать те силы и средства, которые необходимы подразделению для оказания той или иной услуги своим клиентам.

Как известно, в условиях компактного рынка, особенно в случае существования крупных агломераций, взаимосвязанных с окружающими территориями, проявляет свое действие закон Рейли. Согласно этому закону, с увеличением числа жителей города увеличивается число посторонних потребителей, не проживающих в его черте. Аналогичный процесс наблюдается и внутри городских образований, когда густонаселенный район как бы «притягивает» к себе потребителей малонаселенных районов. Закон Рейли объясняет это явление как «распределение уходящей за пределы населенного пункта покупательной силы».

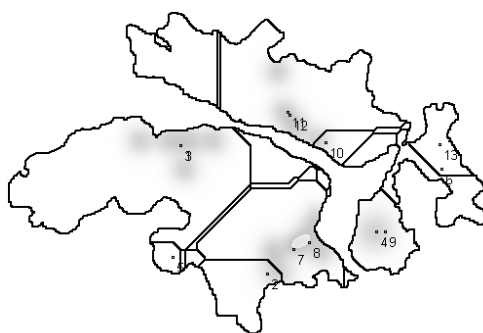


Рис. 4. Иллюстрация действия закона Рейли при размещении тринадцати центров социальной защиты населения г. Днепра

Результаты территориальной сегментации города с размещением сервисных центров с помощью описанной в статье методики также подтверждают проявление действия этого закона – предприятия услуг, как правило, размещаются в районах или населенных пунктах с большой концентрацией населения.

На рис. 4 представлены результаты размещения тринадцати (по количеству жилых массивов г. Днепра) центров социальной защиты населения. Здесь – чем темнее цвет точки региона, тем больше в ней плотность населения.



**Заключение и перспективы дальнейшего развития направления исследований**

Таким образом, представленные задачи мультиплексного разбиения множеств как модели задач территориальной сегментации позволяют получать перекрытия сервисных зон. Это означает, что сервисные зоны не являются взаимоисключающими и в большей степени соответствуют реальности, например, по сравнению с моделями, которые приводят к разбиению первого порядка и определяют зоны как пространственные монополии.

Использование ГИС позволяет при планировании размещения новых сервисных центров учитывать такие факторы как наличие коммуникаций в местах предполагаемого размещения центров, возможные дополнительные расходы на строительство собственных коммуникаций, фактические расстояния между сервисными центрами и их клиентами и т.п.

В дальнейшем при совершенствовании математических моделей задач оптимального размещения логистических или социальных центров на заданной территории с одновременным ее зонированием принцип территориальной сегментации может быть дополнен демографическим, социальным, поведенческим и другими критериями. Также остаются открытыми вопросы разработки научно-обоснованных способов работы с геоинформационными системами при решении указанных задач.

**Список использованной литературы**

1. Климович Л.К. Роль и место сферы услуг в общественном производстве / Л.К. Климович, И.А. Ткаченко // Вестник Белорусского государственного экономического университета. – 2005. – № 1. – С. 67 – 73.
2. Farahani R.Z. Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer – Verlag. / R.Z. Farahani, M. Hekmatfar (eds.). – Berlin, Heidelberg. – 2009. – 530 pp.
3. Алексеева Е.В. Генетический локальный поиск для задачи о р-медиане с предпочтениями клиентов / Е.В. Алексеева, Ю.А. Кочетов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2007. – Серия 2. – Том 14. – № 1. – С. 3 – 31.
4. Erkut E. Distance-constrained multifacility minimax location problems on tree network / E. Erkut, R.L. Francis, A. Tamir // Networks. – 1992. – V.22. – P. 37 – 54.
5. Drezner T. Replacing continuous demand with discrete demand in a competitive location model / T. Drezner, Z. Drezner // Naval Research Logistics 1997. – V. 44. – P. 81 – 95.
6. Wang C.Y. An algorithm for continuous type optimal location problem. / C.Y. Wang, C.Y. Gao, Z.J. Shi // Computational Optimization and Applications 1997. – V. 7. – P. 239 – 253.
7. Dasci A. A continuous model for production-distribution system design / A. Dasci, V. Verter // European Journal of Operational Research 2001. – V. 129. – P. 287 – 298.
8. Murat A. A Continuous Analysis Framework for the Solution of Location-Allocation Problems with Dense Demand / A. Murat, V. Verter, G. Laporte // Les Cahiers du GERAD. – 2008. – 42 pp.
9. Казаков А.Л. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Д.С. Бухаров // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 6. – С. 87 – 100.
10. Киселева Е.М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи: монография / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наукова думка, 2013. – 606 с.
11. Lee I. Map segmentation for geospatial data mining through generalized higher-order Voronoi diagrams with sequential scan algorithms / I. Lee, C. Torpelund-Bruin, K. Lee // Expert Systems with Applications. – 2012. – Vol. 39, Issue 12. – P. 11135–11148.
12. Boots B. Modeling Retail Trade Areas Using Higher-Order, Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams / B. Boots, R. South. // Journal of Retailing 73(4). – 1997. – P. 519 – 536.
13. Koriashkina L.S. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 119, N 2. – P. 15 – 32.
14. Коряшкина Л.С. Непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями / Л.С. Коряшкина, А.П. Череватенко // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. – (Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»). – 2015. – Вип. 28. – С. 77 – 91.
15. Михальова О.О. Про зв'язок задач оптимізації багатократного кульового покриття обмежених множин та їх мультиплексного розбиття / О.О. Михальова // Комп'ютерні технології. – Львів: ЛНУ, 2015. – С. 266 – 273.

УДК 539.3:517.9

О.В. КУДІН, О.В. СПЕЛЬЧУК  
Запорізький національний університет**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СТАТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ КРУГЛИХ ТРИШАРОВИХ  
ПЛАСТИН З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ МЕТОДОМ  
ПОСЛІДОВНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

Запропоновано функціонал повної енергії тришарових круглих пластин симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами і нелінійно-пружним ізотропним заповнювачем. Описано методу розв'язання задачі статичної стійкості, яка включає застосування метода Рітца та метода послідовних навантажень. В якості чисельного прикладу, розглянуто задачу визначення критичних навантажень тришарової круглої пластини в нелінійно-пружній постановці за Каудерером, виконано порівняння отриманого розв'язку з іншими дослідженнями.

Ключові слова: тришарова пластина, статична стійкість, нелінійна пружність.

А.В. КУДИН, О.В. СПЕЛЬЧУК  
Запорожский национальный университет**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГЛЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН  
С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ  
НАГРУЖЕНИЙ**

Предложен функционал полной энергии трехслойных круглых пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим изотропным заполнителем. Описана методика решения задачи статической устойчивости, которая включает применение метода Ритца и метода последовательных нагружений. В качестве численного примера, рассмотрена задача определения критических нагрузок трехслойной круглой пластины в нелинейно-упругой постановке по Каудереру, выполнено сравнение полученного решения с другими работами.

Ключевые слова: трехслойная пластина, статическая устойчивость, нелинейная упругость.

O.V. KUDIN, O.V. SPELCHUK  
Zaporizhzhya National University**BUCKLING PROBLEM OF SANDWICH PLATES WITH NONLINEAR CORE SOLVED BY  
METHOD OF CONSECUTIVE LOADING**

Full energy functional for sandwich round plates of a symmetric structure with isotropic outer layers and a nonlinearly elastic isotropic core are proposed. A technique for solving the static buckling problem is described, which includes the Ritz method and the method of consecutive loading. As a numerical example, we consider the problem of determining the critical loads of a sandwich circular plate in a nonlinearly elastic formulation by the Kauderer. The obtained solution is compared with other works.

Keywords: sandwich plates, static buckling, nonlinear elasticity.

**Постановка проблеми**

Розробка підходів до розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих елементів конструкцій є досить актуальною задачею. Це зумовлено широким застосуванням, зокрема, тришарових пластин та оболонок в авіа- та суднобудуванні, космічній промисловості, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях народного господарства. Актуальною є проблема розробки ефективних підходів до розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла з урахуванням фізичної нелінійності матеріалів шарів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

На даний момент опубліковано значну кількість досліджень з теорії тришарових пластин та оболонок. Однією з перших публікацій в області моделювання тришарових конструкцій є робота [10], яка присвячено визначенню критичних навантажень тришарових пластин.

Постановці і розв'язанню нелінійно-пружних задач присвячені монографії [3, 6, 9]. Задачі згину й стійкості тришарових пластин, виконаних з нелінійно-пружних матеріалів, досліджуються в роботах [1, 4, 7, 8].

Посилання на роботи з моделювання тришарових елементів конструкцій можна знайти в оглядах [11, 14]. Детальний аналіз класичних та уточнених моделей розрахунку тришарових і багатошарових конструкцій проводиться в статтях [12, 13].

Виходячи з аналізу проблемної області, можна зробити висновок, що порівняно невелика кількість робіт присвячена моделюванню шаруватих елементів конструкцій з урахуванням фізично-нелінійних матеріалів. Це пов'язано з необхідністю розв'язання достатньо складних систем нелінійних диференціальних рівнянь. Одним з методів розв'язання таких систем може бути метод продовження розв'язку за параметром та його варіації. Більш докладно про застосування цього методу в нелінійних задачах пластин та оболонок йдеться в роботах [2, 5, 6].

**Формулювання мети дослідження**

Метою статті є визначення критичних навантажень тришарової пластини з нелінійно-пружним заповнювачем при дії стискаючого навантаження в площині пластини. Для розв'язання задачі використовується підхід на базі методу Рітца та методу послідовних навантажень В.В. Петрова.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Розглядається задача статичної стійкості тришарової круглої пластини при дії стискаючого навантаження  $P$  в площині пластини. Будемо вважати, що  $P$  настільки мале, що плоска форма рівноваги пластини є стійкою. Визначимо критичне значення  $P_{кр}$ , при перевищенні якого початкова плоска форма рівноваги може стати нестійкою і пластина під дією малих збурень перейде до нової стійкої форми рівноваги з викривленою серединною поверхнею. Задача розглядається в вісесиметричній постановці.

Вважається, що зовнішні шари однакової товщини  $\delta$  виготовлені з ізотропного матеріалу з модулем Юнга  $E$ , коефіцієнтом Пуассона  $\mu$  та підкоряються закону Гука, приймаються гіпотези Кірхгофа. Середній шар товщини  $2h$  виготовлено з нелінійно-пружного, у формі Г. Каудерера, ізотропного матеріалу та приймається гіпотеза про лінійний закон розподілення тангенціальних напружень по товщині заповнювача.

Фізичні співвідношення для матеріалу заповнювача мають наступний вигляд [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\varepsilon_r - \varepsilon_0), \\ \sigma_\varphi &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_0), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\tau_{r\varphi} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{r\varphi}, \quad \tau_{rz} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{rz}, \quad \tau_{\varphi z} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{\varphi z},$$

де  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{K}$  – модулі зсуву та об'ємної пружності матеріалу;  $\varepsilon_0$ ,  $\psi_0$  – середнє відносне подовження і інтенсивність деформацій зсуву.

Параметр  $\gamma_2$  характеризує зміну форми елемента конструкції в нелінійно-пружній стадії деформації і визначається експериментально [3, 9]; параметр  $\chi_2$  характеризує зміну об'єму елемента, далі вважаємо  $\chi_2 = 0$ .

Основні рівняння теорії пружності для даної задачі наведено в статті [4]. Випишемо далі функціонал повної енергії в загальному вигляді відносно невідомих функцій: переміщення в площині пластини  $u(r)$  та прогину  $w(r)$ :

$$\begin{aligned} E = & \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \int_h^{h+\delta} \frac{EI1\left(\frac{1}{r} + \mu I2\right)}{2r(1-\mu^2)} + \frac{EI2\left(\frac{\mu I1}{r} + I2\right)}{2(1-\mu^2)} dz + \int_{-h-\delta}^{-h} \frac{EI3\left(\frac{1}{r} + \mu I4\right)}{2r(1-\mu^2)} + \frac{EI4\left(\frac{\mu I3}{r} + I2\right)}{2(1-\mu^2)} dz + \right. \\ & \left. + \int_{-h}^h \frac{I5}{8rh} (2\tilde{G}I12(I13\gamma_2 + 1) + 3\tilde{K}I14) + \frac{I10}{2} (2\tilde{G}I15(I16\gamma_2 + 1) + 3\tilde{K}I14) + \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{G}}{32h^2} I8^2 (I13\gamma_2 + 1) dz - P \left( \frac{dw(r)}{dr} \right)^2 \right) r dr d\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

В (2) використовуються наступні позначення:

$$\begin{aligned}
 A1 &= \frac{2}{3} \frac{9\tilde{K}^2 - 4\tilde{G}^2}{(3\tilde{K} + \tilde{G})(\tilde{K} + 2\tilde{G})}, I1 = u(r) + \frac{dw(r)}{dr} \left( z - h - \frac{\delta}{2} \right), I2 = \frac{d^2w(r)}{dr^2} \left( z - h - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{du(r)}{dr}, \\
 I3 &= -u(r) + \frac{dw(r)}{dr} \left( z + h + \frac{\delta}{2} \right), I4 = \frac{d^2w(r)}{dr^2} \left( z + h + \frac{\delta}{2} \right) - \frac{du(r)}{dr}, I5 = -2z\delta \frac{dw(r)}{dr} + 4zu(r), \\
 I6 &= \frac{z\delta}{2h} \frac{d^2w(r)}{dr^2}, I7 = \frac{du(r)}{dr} \left( 1 - \frac{h-z}{h} \right), I8 = \frac{dw(r)}{dr} (4h - 2\delta) + 4u(r), \\
 I9 &= \frac{I5}{4rh} - I6 + I7, I10 = -I6 + I7, I11 = I6 + I7, I12 = I5 + \frac{A1}{6} I9 + \frac{I11}{3}, \\
 I13 &= \frac{I5^2}{18r^2h^2} - \frac{2I11I5}{9rh} + \frac{A1}{9rh} I5I9 + \frac{4A1}{9} I9I10 + \frac{I8^2}{24h^2} + \frac{8}{9} I10^2 + \frac{2}{9} A1^2 I9^2, \\
 I14 &= \frac{I5}{12rh} - \frac{A1}{6} I9 + \frac{1}{3} I10, I15 = -\frac{I5}{12rh} + \frac{A1}{6} I9 + \frac{2}{3} I10, I16 = I13 + \frac{2}{9rh} I5(I11 - I10).
 \end{aligned} \tag{3}$$

В якості апроксимацій переміщень відповідно методу Рітца обрано наступні координатні функції. Для защемлення на контурі:

$$w(r) = H_0 + \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 \sum_{i=1}^n H_i \left( \frac{r}{R} \right)^{2i}, u(r) = L_0 + \left( 1 - \frac{r}{R} \right) \sum_{i=1}^n L_i \left( \frac{r}{R} \right)^{2i+1}. \tag{4}$$

Тут  $H_i, L_i, i = \overline{0, n}$  – параметри, які визначаються за методом Рітца.

Після підстановки (4) в функціонал (2) та диференціювання за параметрами координатних функцій, отримаємо в загальному випадку систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$f_i(H_i, L_i, P) = \frac{\partial E}{\partial H_i} = 0, g_i(H_i, L_i, P) = \frac{\partial E}{\partial L_i} = 0. (i = \overline{1, n}) \tag{5}$$

Одним з методів, що використовуються для розв'язку нелінійних задач механіки деформівного твердого тіла є метод послідовних навантажень, розроблений В.В. Петровим [5, 6]. Узагальненням цього методу є метод продовження розв'язку за параметром. Використання методу послідовних навантажень разом з наближеними аналітичними методами при розв'язанні задач нелінійної механіки описано в монографії [6].

Будемо вважати, що параметри координатних функцій залежать від навантаження  $H_i = H_i(P), L_i = L_i(P)$ . Після диференціювання системи (5) за параметром  $P$  отримаємо систему диференціальних рівнянь, лінійних відносно  $\frac{dH_i}{dP}$  і  $\frac{dL_i}{dP}$

$$\begin{aligned}
 \frac{df_i}{dH_i} \frac{dH_i}{dP} + \frac{df_i}{dL_i} \frac{dL_i}{dP} + \frac{df_i}{dP} &= 0, \\
 \frac{dg_i}{dH_i} \frac{dH_i}{dP} + \frac{dg_i}{dL_i} \frac{dL_i}{dP} + \frac{dg_i}{dP} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Початкові умови впливають з фізичного змісту задачі:  $H_i(0) = L_i(0) = 0$ .

Згідно з методом послідовних навантажень, розв'язок системи (6) визначається наступною розрахунковою схемою

$$H_{i,j+1} = H_{i,j} + \Delta \bar{H}_{i,j}, L_{i,j+1} = L_{i,j} + \Delta \bar{L}_{i,j}, P_{j+1} = P_j + \Delta P_j, \tag{7}$$

де  $\Delta P_j$  – крок навантаження, який задається, а  $\Delta \bar{H}_{i,j}$  і  $\Delta \bar{L}_{i,j}$  визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
 \frac{df_i}{dH_i} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta H_{i,j} + \frac{df_i}{dL_i} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta L_{i,j} + \frac{df_i}{dq_j} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta P_j &= 0, \\
 \frac{dg_i}{dH_i} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta H_{i,j} + \frac{dg_i}{dL_i} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta L_{i,j} + \frac{dg_i}{dq_j} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta P_j &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\frac{df_i}{dH_i} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta \bar{H}_{i,j} + \frac{df_i}{dL_i} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta \bar{L}_{i,j} + \frac{df_i}{dP_j} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta P_j = 0,$$

$$\frac{dg_i}{dH_i} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta \bar{H}_{i,j} + \frac{dg_i}{dL_i} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta \bar{L}_{i,j} + \frac{dg_i}{dP_j} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta P_j = 0.$$

Наведена розрахункова схема має порядок точності  $O(\Delta P_j^3)$  [4].

Як чисельний приклад розглянемо задачу визначення критичного стискаючого навантаження для тришарової круглої пластини з параметрами: товщина середнього шару  $2h = 16 \cdot 10^{-3}$  м, товщина зовнішніх шарів  $\delta = 1 \cdot 10^{-3}$  м, радіус пластинки  $R = 0,4$  м; модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона зовнішніх шарів –  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа та  $\mu = 0,27$  відповідно, модуль зсуву та модуль об’ємної деформації заповнювача –  $\tilde{G} = 2,77 \cdot 10^4$  МПа,  $\tilde{K} = 6 \cdot 10^4$  МПа (сплав алюмінію Д16Т). При врахуванні нелінійної пружності матеріалу Д16Т розглянутих елементів конструкцій, приймаємо наступні значення коефіцієнтів:  $\gamma_2 = -3,878 \cdot 10^5$ ,  $\chi_2 = 0$  [4]. В розрахунках розглядається тільки жорстке защемлення країв пластини.

Табл. 1 містить порівняння отриманих в статті результатів з розрахунками роботи [4].

Таблиця 1

Критичні навантаження тришарової пластини

	$P_{кр} \cdot 10^6, \text{ Н/м}$		
	1	2	3
Лінійний випадок	4,712	4,712	5,402
Нелінійний випадок	4,491	4,691	-

Математичні моделі, що використовуються при розрахунках, позначені в табл. 1 наступним чином: 1 – аналітична модель [4], 2 – метод послідовних навантажень, 3– скінченно-елементна модель [4].

Рис. 1 містить ілюстрацію кроків методу послідовних навантажень. Критерієм втрати стійкості в даному випадку є необмежене зростання прогину при досягненні критичного навантаження.

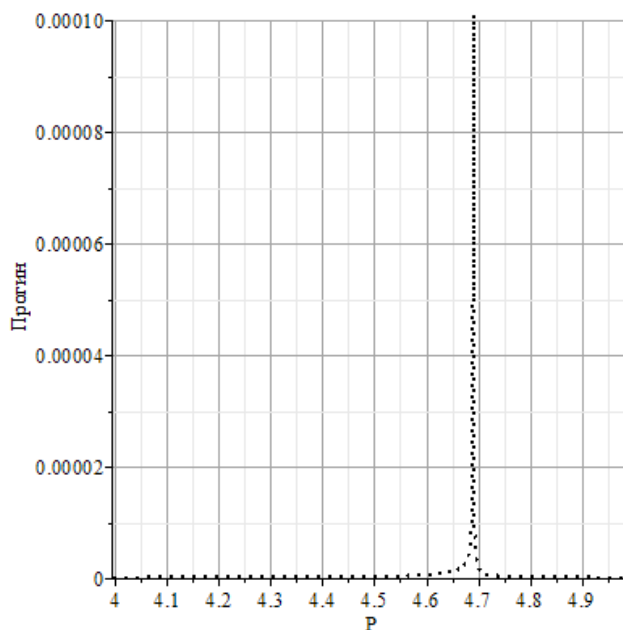


Рис. 1. Кроки методу послідовних навантажень. Нелінійний випадок.

**Висновки**

1. Наближено розв'язано задачу визначення критичних навантажень круглої тришарової пластини з нелінійно-пружним заповнювачем.
2. При порівнянні отриманих в статті результатів з іншими роботами показано, що відхилення значень критичних навантажень від інших моделей складає 4% – 12%.
3. В цілому, метод послідовних навантажень в поєднанні з методом Рітца є досить ефективним при дослідженні нелінійних задач, оскільки дозволяє звести нелінійну задачу до послідовності лінійних та легко алгоритмізується.
4. Перспективи подальших досліджень пов'язані із застосуванням метода послідовних навантажень до задач стійкості підкріплених пластин та оболонок з врахуванням геометричної та фізичної нелінійності.

**Список використаної літератури**

1. Зеленський А.Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини / А. Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія механіка. – 2012. – Т. 20, №5. – С. 60-66.
2. Ильин В.П. Численные методы решения задач строительной механики: Справ. Пособие / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников – Мн.: Выш. шк., 1990. – 349 с.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер ; пер. с нем. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
4. Кудін О.В. Статична стійкість круглих тришарових пластин з нелінійно-пружним заповнювачем / О.В. Кудін // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. — 2015. — № 3. — С. 127-135.
5. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек / В.В. Петров. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. – 119 с.
6. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В.В. Петров. М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
7. Тамуров Ю.Н. Вариант обобщённой теории трёхслойных пологих оболочек с учётом обжатия физически нелинейного заполнителя / Ю.Н. Тамуров // Прикл. механика. –1990. – Т. 26, №12. – С. 39-45.
8. Тамуров Ю.Н. Уравнения изгиба и устойчивости трехслойных оболочек с ортотропными и нелинейно-упругими свойствами материалов / Ю.Н. Тамуров // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 1990. – №20. – С. 102-112.
9. Цурпал И.А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов / И.А. Цурпал. Техника, 1976. – 176 с.
10. Hoff N.J. Buckling of sandwich-type panels / N.J. Hoff and S.E. Mautner // Journal of the Aeronautical Sciences. – 1945. – vol. 12(3). – pp. 285-297.
11. Carrera E., Brischetto S. A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates // Applied Mechanics Reviews, Vol. 62, 2009.
12. Kien T Nguyen. A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates / Kien T Nguyen, Tai H. Thai and Thuc PVo // Steel and Composite Structures. – 2015. – vol. 18(1). – pp. 91-120.
13. S.M.R. Khalili. Buckling analysis of composite sandwich plates with flexible core using improved high-order theory / S.M.R. Khalili, M.M. Kheirikhah, Fard K. Malekzadeh // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2015. – vol. 22(4).
14. Noor A.K. Computational Models for Sandwich Panels and Shells // Applied Mechanics Reviews, Vol. 49, No. 3, 1996. – pp. 155–199.

УДК: 539.12

V.M. LAZURIK, V.T. LAZURIK, G.F. POPOV

V.N. Karasin Kharkiv National University,

Z. ZIMEK

Institute of Nuclear Chemistry and Technology

**ESTIMATION OF ACCURACY AT DETERMINATION OF ELECTRON ENERGY  
BASED ON TWO PARAMETRIC MODEL OF ELECTRON BEAM**

Accuracy of computational method for determining the energy of electron radiation, which was developed on the basis of two parametric electron beam models, is estimated for case when the electron source in the radiation-technological process has an energy spread. Accuracy is estimated with numerical methods using the electron spectra measured in different operating modes of the radiation-technological line.

*Key words: parametric model of electron beam, electron spectrum, depth distribution of dose.*

В.М. ЛАЗУРИК, В.Т. ЛАЗУРИК, Г.Ф. ПОПОВ

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна,

З. ЗІМЕК

Інститут Ядерної Хімії і Технологій, Варшава, Польща

**ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ЕНЕРГІЇ ЕЛЕКТРОННОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА  
ОСНОВІ ДВОПАРАМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА**

Оцінюється похибка обчислювального методу визначення енергії електронного випромінювання, який був розроблений на основі двопараметричної моделі електронного пучка, для випадку, коли джерело електронів в радіаційно-технологічному процесі має енергетичний розкид. Похибка оцінюється чисельними методами із використанням спектрів електронів, вимірених в різних режимах роботи радіаційно-технологічної лінії.

*Ключові слова: параметрична модель електронного пучка, спектр електронів, глибинний розподіл дози.*

В.М. ЛАЗУРИК, В.Т. ЛАЗУРИК, Г.Ф. ПОПОВ

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна,

З. ЗІМЕК

Інститут Ядерної Хімії і Технологій, Варшава, Польща

**ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ  
ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА**

Оценивается погрешность вычислительного метода определения энергии электронного излучения, который был разработан на основе двухпараметрической модели электронного пучка, для случая, когда источник электронов в радиационно-технологическом процессе имеет энергетический разброс. Погрешность оценивается численными методами с использованием спектров электронов, измеренных в различных режимах работы радиационно-технологической линии.

*Ключевые слова: параметрическая модель электронного пучка, спектр электронов, глубинное распределение дозы.*

**The problem formulation**

At present, a large volume of products undergoes radiation treatment using electron beams [1]. At planning stage, the choice of optimal regime of the radiation-technological process can be performed on basis of computer modeling of the dose distribution of electron radiation in the objects undergoing processing [2,3]. At the stage of realization of the chosen mode of technological process, dosimetry methods of ionizing radiation are needed, which allow to determine with high accuracy the energy of electron radiation source in the process of radiation treatment. Certainly, today, there are methods and equipment capable of determining the characteristics of electron radiation with high accuracy. However, these methods are designed to solve scientific research problems and, as a rule, cannot be used to control the processes of irradiation in radiation technologies. Therefore, development of methods that allow with high accuracy to determine the electron beam energy of source is an actual task for realization of radiation technologies.

**Analysis of recent investigations and publications**

Influence of the energy spread of electron beam on the depth dose distribution was studied in [4]. To describe the energy spread of electrons, it was used the model of electron spectra in form of a triangular probability distribution. The depth distribution of the dose of electron radiation in an aluminum target was simulated by the Monte Carlo method in a detailed physical model using RT-Office software [5]. Obtained results of computer simulation were processed with standard computational methods of dosimetry electron radiation, which are used in processing the results of measurements of depth dose distributions performed by the dosimetric wedge or stack method [6]. The results of numerical studies show that the practical range of electrons  $R_p$  depends strongly on the energy spread of electrons and weakly correlates with the value of the most probable electron energy  $E_p$  for asymmetric electron spectra. Relatively the depths of half dose reduction  $R_{50}$ , it was shown that a correlation is observed between this value and the average electron energy in the beam  $E_{Av}$ , even for large values of the electron energy spread.

Thus, when the source of electrons has an energy spread, for dosimetry of electron radiation, along with the traditionally used value of the practical range of electrons  $R_p$ , the depth of half-reduction of the dose is important  $R_{50}$ . In this connection, the method of dosimetry of electron radiation based on two parametric electron beam models [7] is of interest, using which one can simultaneously determine  $R_p$  and  $R_{50}$  - standard characteristics of depth distributions of the electron radiation dose. It should be note that the main assumption that ensures agreement of the results obtained using this method with the results obtained on the basis of standard procedures for processing measurements, is the possibility of approximating the measurements results in a semi-empirical model of the depth distribution of the dose of monoenergetic electron radiation.

Since electron sources in radiation-technological processes can differ substantially from monoenergetic ones, it is necessary to estimates accuracy in determining the standard characteristics of the electron-beam energy obtained with method proposed in [7] for the cases when the electron sources have the energy spread.

**Formulation of research objective**

Accuracy of the computational method for determining the energy of electron radiation based on two parametric electron beam models, which was previously proposed and tested on the results of measurements, was studied. Accuracy was estimated by numerical methods using a set of electron spectra measured in various operating modes of the radiation-technological line of the Sterilization Center of the Institute of Nuclear Chemistry and Technology in Warsaw.

**The errors in the method for determining of electron radiation energy in the presence of an electrons energy spread**

The depth distribution of the electron radiation dose in case of a non-monoenergetic electron beam can be represented in the form

$$D_M(x) = \Phi_e \int_{E_{min}}^{E_{max}} D_M(x, E) \cdot S(E) dE \tag{1}$$

Here  $D_M(x)$  - depth-dose distribution of electrons radiation in the material  $M$ ,  $D_M(x, E)$  - depth-dose distribution in the material at irradiation with mono-energetic electron beam with fluency  $\Phi_e = 1$  and energy electrons  $E$ ,  $S(E)$  - electron beam spectrum,  $\Phi_e$  - electron fluency.

The main assumption of the two parametric model of the electron beam is fact that the results of measurements of the depth dose distributions of electron radiation can be well approximated by a function  $D_M^*(x, X_0, E_0)$  that depends only on the distance  $x$  to the target boundary and contains three free parameters  $(\Phi_0, X_0, E_0)$

$$D_M^*(x, X_0, E_0) \equiv \Phi_0 \cdot D_M(x + X_0, E_0) \tag{2}$$

$\Phi_0$  - scale factor,  $X_0$  - displacement and  $E_0$  - effective energy of electrons.

At that the approximating function is superimposed on the condition, that provide the law of conservation of energy  $Q_{tot}$  transferred by the electron radiation to the target material in the depth interval from  $X_{min}$  to  $X_{max}$ .

$$Q_{tot} = \int_{X_{min}}^{X_{max}} D_M^*(x, X_0, E_0) dx \tag{3}$$



The energy  $Q_{tot}$  transferred to the target material by electron radiation is determined on the basis of the dose distribution measured in the target in the depth interval from  $X_{min}$  to  $X_{max}$ .

$$Q_{tot} = \int_{X_{min}}^{X_{max}} D_M(x) dx$$

Condition (3) allows us to determine two independent parameters ( $X_0, E_0$ ) of the approximating function by the method of least squares. In this case, the scale factor can be determined from equation

$$Q_{tot} = \Phi_0 \int_{X_{min}}^{X_{max}} D_M(x + X_0, E_0) dx \tag{4}$$

Thus, the use of condition (3) makes it possible to realize a conservative computational method [8] for determining the values of three free parameters of function (2) on the basis of two parametric electron beam models. Software that implements the procedures for determining the parameters of the electron beam model from the measurement results is described in [9].

To estimate accuracy of the method for calculating the characteristics of the radiation energy, in the presence of an energy spread of electrons, the electron spectrum  $S(E)$  of the radiation source was used. Based on the electron spectrum, the depth dose distributions of electron radiation in an aluminum target are simulated by the Monte Carlo method [5]. The results of computer modeling assume as the results of measurements of deep dose distributions performed by the method of dosimetric wedge or stack, and processed with standard methods of dosimetry of electron radiation [6]. Accuracy of values were obtained as values of the deviations of the results of calculating the practical ranges of electrons  $R_p$  and the depths of the half-reduction of the dose  $R_{50}$ , calculated using standard methods [6] and a method based on two parametric electron beam models [7].

**Spectra of electrons from a radiation source**

To estimate accuracy of the method for calculating the characteristics of radiation energy, we used the electron beam spectra from the linear electron accelerator Elektronika 10/10 with electron beam energy of 10 MeV at Institute of Nuclear Chemistry and Technology, Warsaw, Poland. The spectra of electrons are shown in Fig.1.

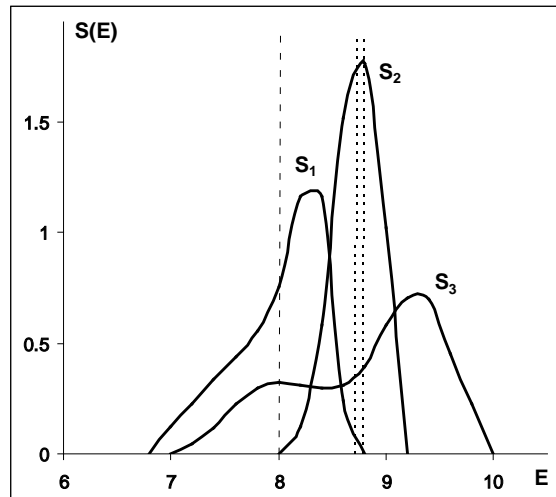


Fig. 1. Spectra of electrons  $S(E)$  for different accelerator parameters ( $S_1$  – magnetron RF source average current: 600 mA; pulse current of electron gun: 400 mA, and respectively:  $S_2$  – 700 mA; 500 mA,  $S_3$  – 550 mA; 300 mA)

Characteristics of spectra:  $E_p$  - is the maximum possible electron energy,  $E_{Av}$  - average electron energy,  $D$  - dispersion of the energy distribution of electrons,  $\sigma$  - root-mean-square deviation of electron energy (energy spread of electrons) calculated from the data presented in Figure 1 are shown in Table 1. In the figure, vertical dashed curves indicate values for each of the spectra.

As can be seen from the Fig. 1 - the spectra of electron beam 1 and 3 are asymmetric; the spectrum 2 is close to the symmetric one. The indicator of asymmetry can be the relative deviation of the average electron energy from the maximum probable electron energy.  $K_{As} = (E_p - E_{Av}) / E_{Av}$ .

Table 1

Characteristics of spectra from the source of electrons radiation

Spectrum	$E_p$ , [MeV]	$E_{Av}$ , [MeV]	$D$ , [MeV <sup>2</sup> ]	$\sigma$ , [MeV]	$\sigma / E_{Av}$ , [%]	$K_{As}$ , [%]
S <sub>3</sub>	8.30	8.01	0.17	0.41	5.14	3.62
S <sub>2</sub>	8.80	8.72	0.05	0.23	2.59	0.92
S <sub>1</sub>	9.30	8.79	0.46	0.68	7.75	5.78

As follows from the Table 1, the value of asymmetry index  $K_{As}$  for the spectrum of  $S_2$  is much smaller than the values for the spectra  $S_1$  and  $S_3$

**The depth-dose distribution of electron radiation in an aluminum target**

The depth-dose distribution of electron radiation in an aluminum target was simulated by the Monte Carlo method in a detailed physical model using RT-Office software [5]. Figure 2 shows the results of calculations for sources with different electron spectra.

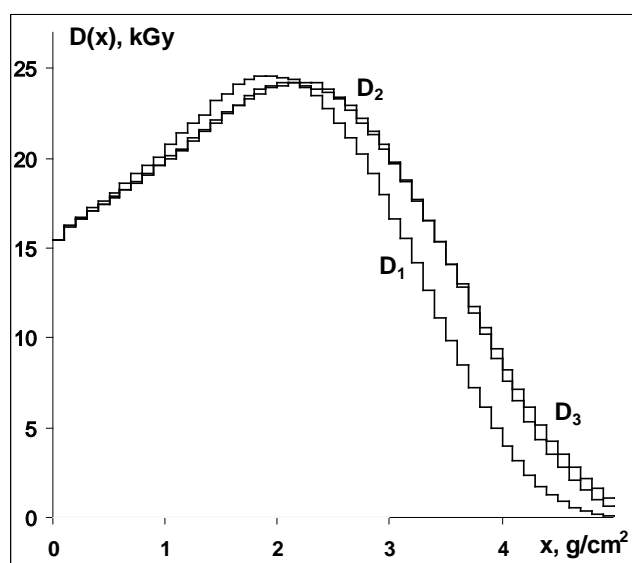


Fig. 2. Depth-dose distributions of the electron radiation in an aluminum target. Histogram  $D_1$  - calculation of the dose for the source of electrons with the spectrum  $S_1$ ,  $D_2$  - spectrum of the source  $S_2$ , and  $D_3$  - spectrum of the source  $S_3$ .

Note, that for the spectra of  $S_2$  and  $S_3$ , all characteristics given in Table 1 differ greatly except for the quantities  $E_{Av}$ . As can be seen in Fig. 2, the depth distributions of dose  $D_2$  and  $D_3$  from electron sources with these spectra differ insignificantly. Otherwise, when characteristics of the spectra differ significantly (for example, for spectra  $S_2$  and  $S_3$ ), the differences in depth distributions of the dose  $D_2$  and  $D_3$  can be significant (see  $D_2$  and  $D_3$  in Fig. 2). Furthermore, we note, that difference in characteristic values for the spectra of  $S_1$  and  $S_2$  and for the spectra of  $S_2$  and  $S_3$  is close (about 0.5 MeV). However, this difference in values of the characteristics does not lead to significant differences in depth distributions of the dose  $D_2$  and  $D_3$  (electron sources with spectra  $S_2$  and  $S_3$ ). These facts confirm the conclusions of paper [4] about more important role of the spectrum characteristic  $E_{Av}$  with respect to the characteristic  $E_p$  in estimation of depth distributions of the electron radiation dose, in presence of an electron energy spread.

**Processing results of computer modeling the depth-dose distributions**

The results of computer simulation were processed with a method that was developed on the basis of two parametric electron beam models [7] and standard computational methods for radiation dosimetry [6]. The results of processing the depth dose distribution from sources with different electron spectra are presented in Table 2.

Table 2

Characteristics of the depth dose distributions, calculated using two parametric electron beam model ( $R_p$ ,  $R_{50}$ ) and standard methods ( $R_p^*$ ,  $R_{50}^*$ ) of electron radiation dosimetry.

Dose	$E_0$	$X_0$	$R_p$	$R_{50}$	$R_p^*$	$R_{50}^*$
$D_1$	8.01	-0.006	1.61	1.26	1.60	1.25
$D_2$	8.66	0.007	1.75	1.37	1.73	1.37
$D_3$	8.97	-0.091	1.78	1.39	1.77	1.38

As follows from a comparison of the practical range of electrons and the half-dose reduction depths presented in Table 2, accuracy of computational method, which was developed on the basis of two parametric electron beam models, does not exceed 1% relative to standard methods.

#### Results and conclusions

It is shown in the paper, that use of a computational method, developed on the basis of two parametric models of an electron beam, makes it possible to determine, with a small relative error, the energy characteristics of not monoenergetic electron radiation. The proposed computational method for dosimetry of electron radiation can be successfully applied also in the case of sufficiently large (<10%) energy spread of electrons in the beam.

An important advantage of the method is the ability, in a consistent calculation scheme, to determine simultaneously two standard characteristics of electrons depth dose distributions, such as the practical range of electrons  $R_p$  and the depth at which the dose equals half of the maximum dose  $R_{50}$ . The relative error in calculating these characteristics does not exceed 1%.

In the future, it is necessary to study the possibilities of using two parametric electron beam model for processing special data samples from a set of results of measurements of deep dose distributions made using the dosimetric wedge or stack methods. Such possibilities of computational method will make it possible to eliminate errors in the results of measurements that arise due to edge effects in construction of the dosimeter wedge and nonlinear response of dosimetric film to transferred energy of the electron radiation.

#### References

1. ISO/ASTM Standard 51649, Practice for dosimetry in an e-beam facility for radiation processing at energies between 300 keV and 25 MeV. Annual Book of ASTM Standards. Vol. 2005.12.02.
2. ASTM Standard E2322-02 Standard Guide for Selection and Use of Mathematical Methods for Calculating Absorbed Dose in Radiation Processing Applications, Annual Book of ASTM Standards 12.2002.
3. "Nuclear Energy Agency, Data Base" The abstracts of the computer programs. <http://www.nea.fr/html/dbprog>.
4. Z. Zimek, V.M. Lazurik, V.T. Lazurik, G. Popov. Evaluation of electron beam energy spread variation on quality of radiation processing. //IRaP 2016, The 12<sup>th</sup> meeting of the "Ionizing radiation and polymers" symposium (September 25-30, 2016) - Peninsula of Giens, France, 2016 – P. 143.
5. V.M. Lazurik, V.T. Lazurik, G. Popov, Yu. Rogov, Z. Zimek. Book "Information System and Software for Quality Control of Radiation Processing", IAEA Collaborating Center for Radiation Processing and Industrial Dosimetry, Warsaw, Poland, 2011, 220 p
6. ICRU REPORT 35. Radiation dosimetry: electron beams with energies between 1 and 50MeV, 1984–160 p.
7. V.M. Lazurik, V.T. Lazurik, G. Popov, Z. Zimek. Two-parametric model of electron beam in computational dosimetry for radiation processing. // Radiation Physics and Chemistry, – 2016. – Vol. 124. – P. 230–234.
8. Pochynok A.V., Lazurik V.T., Sarukhanyan G.E The parametric method of the determination of electron energy on the data obtained by the method of a dosimetric wedge //Bulletin Kherson National Technical University. – 2012. – Vol. 2(45). – P.298-302.
9. Лазурик В.М., Шаптала Ю.А., Салах Саван. Программная реализация определения энергии электронов по экспериментальным данным, полученным методом дозиметрического клина // ВЕСТНИК Херсонского национального технического университета – 2016. – № 3(58). – С. 245-248.

УДК 519.7: 621.865.8

Ю.О. ЛЕБЕДЕНКО, Г.В. РУДАКОВА, Е.Р. ТОУФАК  
Херсонський національний технічний університет**МОДЕЛЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РУХУ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕХНОЛОГІЧНИХ  
УСТАНОВОК КАРКАСНОЇ КОНСТРУКЦІЇ**

*Розглянуто процедури ідентифікації параметрів руху елементів технологічних установок каркасної конструкції на прикладі випробувального зразка за допомогою методів аналітичної геометрії. Отримано залежності, що дозволяють визначати положення, швидкості та прискорення окремих елементів, що може бути в подальшому використано при синтезі систем управління установками каркасного типу.*

*Ключові слова: установка каркасного типу, багатоприводна електромеханічна система, точність, трилатерація, система управління.*

Ю.А. ЛЕБЕДЕНКО, А.В. РУДАКОВА, Э.Р. ТОУФАК  
Херсонский национальный технический университет**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
УСТАНОВОК КАРКАСНОЙ КОНСТРУКЦИИ**

*Рассмотрены процедуры идентификации параметров движения элементов технологических установок каркасной конструкции на примере испытательного образца с помощью методов аналитической геометрии. Получены зависимости, позволяющие определять положения, скорости и ускорения отдельных элементов, что может быть в дальнейшем использовано при синтезе систем управления установками каркасного типа.*

*Ключевые слова: установка каркасного типа, многоприводная электромеханическая система, точность, трилатерация, система управления.*

Y.O. LEBEDENKO, G.V. RUDAKODA, E.R. TCHOUFACK  
Kherson National Technical University**MODELING MOTION PARAMETERS OF THE TECHNOLOGICAL FRAME TYPE INSTALLATIONS**

*The procedures for identifying the motion parameters of the elements of the technological frame type installations are considered using the example of a test sample using analytical geometry methods. Dependences have been obtained that allow determining the positions, velocities and accelerations of individual elements, which can be used later in the synthesis of control systems for frame structure installations.*

*Key words: frame type installation, multi-drive electromechanical system, accuracy, trilateration, control system.*

**Постановка проблеми**

У промисловості на сьогодні, у зв'язку з підвищенням вимог до технологічності виробництва і якості продукції, всюди впроваджуються системи, що забезпечують точне позиціонування. Існує тенденція до росту застосування універсального устаткування замість вузькоспеціалізованих верстатів і роботів-автоматів, оскільки сама по собі можливість швидкої переналадки і налаштування, навіть при деякому підвищенні вартості устаткування, дає відчутні переваги. Одним з варіантів подібних систем являються установки каркасного типу. Каркасні багатоприводні установки багатофункціональні і універсальні, оскільки мають достатній потенціал для ефективного вирішення багатьох промислових завдань [1]. Ці установки складаються з каркаса, обладнаного декількома електродвигунами, приводами, суставними механізмами і робочим органом, в якості якого можна використати інструмент по обробці матеріалу (дерева, метала), маніпулятор, екструдер та ін. З метою підвищення ефективності функціонування і технологічної гнучкості таких установок необхідне застосування сучасних комп'ютеризованих системи управління (КСУ).

На траєкторію руху робочого органу впливають багато факторів, обумовлених як особливістю конструкції, так і зовнішніми збуреннями. При переміщенні робочого органу на елементи конструкції багатоприводної каркасної установки починають діяти сили та крутні моменти, що можуть спотворити траєкторію руху. Ефективне управління каркасними багатоприводними установками можливе лише за умов наявності математичного опису руху їх елементів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Технологічне устаткування каркасного компонування призначене для здійснення багатокординатних процесів механічної обробки за рахунок використання просторових шарнірно-стержневих механізмів з паралельною структурою. Випробувальний зразок технологічного устаткування такого типу, розроблений в Херсонському національному технічному університеті [2], приведений на рис. 1.



Рис. 1. Випробувальний зразок технологічного устаткування каркасного типу

Переміщення робочого органу задається верхнім рівнем управління, який може складатися з персонального комп'ютера або контролера. Кожен двигун програмується окремо через локальну систему керування, а датчики, розміщені на приводах, відстежують їх положення і відправляють дані на верхній рівень управління [3].

Вимірвальна підсистема КСУ містить ультразвукові датчики і датчики струму. Ультразвукові датчики визначають відстань до об'єкту, вимірюючи час відображення звукової хвилі від нього, що дозволяє з високою точністю визначати розташування робочого органу і його координати відносно певного центру. Датчики струму надають можливість своєчасно фіксувати перевантаження двигуна і, відповідно, уникати екстремальних режимів роботи багатоприводної каркасної установки та запобігати можливим аварійним ситуаціям.

У розробленій каркасній установці застосовуються крокові двигуни, які перетворюють електричні імпульси сигналів управління в кутові переміщення ротора (дискретні механічні переміщення) з фіксацією його в заданому положенні. Кожен кроковий двигун установки має можливість здійснювати точне позиціонування і регулювання швидкості, що добре підходить для системи, яка працює при малому прискоренні і з відносно постійним навантаженням.

Таким чином, КСУ повинна вирішувати наступні задачі:

1. На основі отриманих даних обчислювати координати необхідного і поточного положень шарнірного вузла.
2. Визначати траєкторію, виходячи з заданих критеріїв оптимальності, та формувати необхідний керуючий вплив.
3. Здійснювати моніторинг функціонування електромеханічного устаткування за допомогою різних видів діагностики зміни параметрів його функціонування.

КСУ повинна підтримувати інтерполяцію з малою дискретністю обчислень і алгоритми передперегляду, тобто можливість прораховувати траєкторію шарнірного вузла (разом з інструментом) і заздалегідь знижувати швидкість перед її різкими змінами, що найактуальніше для обробки на великих швидкостях.

Однією з важливих вимог до КСУ є можливість видаленого управління по мережі і об'єднання окремих установок в групи - у рамках технологічного ланцюжка виробництва.

Але чи не найбільшу увагу при розробці систем управління слід приділяти функціям моделювання процесу обробки, коли КСУ не лише візуалізує на екрані маршрут руху інструменту, але і представляє модель фактичного результату обробки. Це дозволить мінімізувати вплив збурюючих факторів та підвищити точність руху робочого органу.

**Формулювання мети дослідження**

Метою досліджень є розробка математичної моделі руху елементів технологічної установки, яка надає можливість визначити параметри руху робочого органу багатоприводної каркасної установки.

**Виклад основного матеріалу дослідження.**

Рух майданчика з робочим інструментом (органом) обумовлюється переміщенням окремих вузлів (кареток) уздовж направляючих штанг, яке забезпечується роботою окремих електродвигунів. Розглянемо спрощену кінематичну схему симетричної каркасної установки з чотирма направляючими штангами (рис. 2).

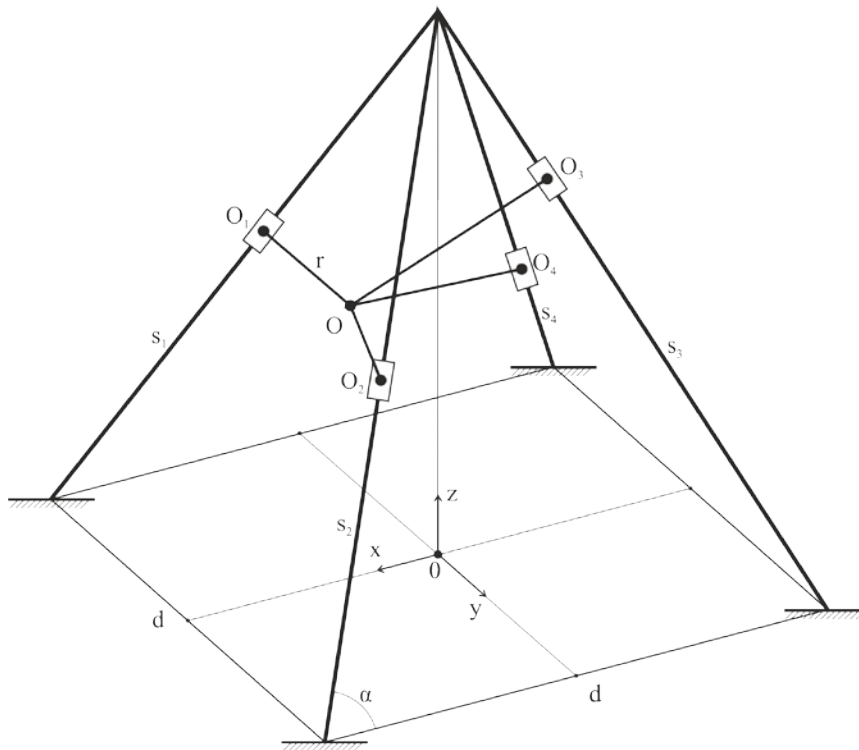


Рис. 2. Кінематична схема технологічного устаткування каркасного типу

Установка, що розглядається, симетрична, геометричні розміри її елементів задаються на стадії проектування і виготовлення:  $d$  - відстань між опорами консолей (направляючих штанг),  $r$  - довжина штанг, на кінцях яких розташовується майданчик із встановленим робочим інструментом;  $\alpha$  - кут нахилу консолей до прямої між опорами консолей. Відомими вважаються первинні положення кареток  $s_i$ .

Положення робочого майданчика, тобто координати його центру  $O(x, y, z)$  можна визначити як точку перетину сфер з радіусами  $r$  і відповідними центрами  $O_i(x_i, y_i, z_i)$ .

Координати центрів сфер відповідають положенню кареток, і можуть бути знайдені із співвідношень [4]

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -s_1 \cdot \cos \alpha + \frac{d}{2}, & y_1 &= -x_1, & z_1 &= s_1 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}, \\
 x_2 &= -s_2 \cdot \cos \alpha + \frac{d}{2}, & y_2 &= x_2, & z_2 &= s_2 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}, \\
 x_3 &= s_3 \cdot \cos \alpha - \frac{d}{2}, & y_3 &= -x_3, & z_3 &= s_3 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}, \\
 x_4 &= s_4 \cdot \cos \alpha - \frac{d}{2}, & y_4 &= x_4, & z_{41} &= s_4 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Для забезпечення механічної жорсткості конструкції достатньо трьох штанг, тому обмежимося розглядом кареток  $O_1, O_2, O_3$ , а координати каретки  $O_4$  та відповідне їй переміщення  $s_4$  будемо вважати залежними параметрами, що визначаються з умови проходження розрахункової точки  $O(x, y, z)$  сферою радіусом  $r$ , центр якої лежить на направляючій штанзі.

Координати положення точки з робочим органом можна знайти, розв'язавши систему, що складається з рівнянь сфер з радіусами  $r$  й відповідними центрами  $O_i(x_i, y_i, z_i)$ :

$$r^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2, \quad i = (1 \dots 3). \quad (2)$$

Задача знаходження точки перетину трьох сфер широко часто зустрічається в геодезії, зокрема у методі тривимірної трилатерації для знаходження координат пунктів геодезичних мереж [5]. Вирішення задачі тривимірної трилатерації може бути знайдено за допомогою розв'язку системи рівнянь (2) із застосуванням перетворення координат або без нього.

У першому випадку вважатимемо, що центри всіх трьох сфер лежать у площині  $z' = 0$ , початок координат відповідає одному з центрів, наприклад  $O_3$ , а центр  $O_2$  лежить на осі  $x'$ .

Перехід від початкової системи координат  $(x, y, z)$  до кінцевої  $(x', y', z')$  здійснюється шляхом заміни системи координат за рівнянням

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathbf{V}, \quad (3)$$

де  $\mathbf{M}$  - матриця повороту,  $\mathbf{V}$  - вектор зсуву.

В новій системі координат рівняння (2) перетворюються до вигляду

$$\begin{cases} r^2 = (x' - l)^2 + (y' - m)^2 + (z')^2, \\ r^2 = (x' - k)^2 + (y')^2 + (z')^2, \\ r^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2, \end{cases} \quad (4)$$

де  $k$  - проекція точки  $O_2$  на вісь  $x'$ ,  $l$  та  $m$  - проекції точки  $O_1$  на вісі  $x'$  та  $y'$  відповідно.

Розв'язок системи бути мати вигляд:

$$x' = \frac{k}{2}, \quad y' = \frac{l^2 + m^2 + k \cdot l}{2 \cdot m}, \quad z' = \pm \sqrt{r^2 - (x')^2 - (y')^2}. \quad (5)$$

Маємо два рішення, що відповідають положення робочого органу над площиною  $z' = 0$  та під нею.

Відповідні графіки залежностей координат  $y'$  та  $z'$  робочого органу у системі  $(x', y', z')$  від переміщення першої каретки  $s_1$  при зафіксованих у нульових початкових положеннях другої та третьої кареток  $s_1 = s_2 = 0$  наведені на рис. 3.

При розрахунках прийнято: одиничні довжина штанг  $r = 1$  та відстань між опорами консолей  $d = 1$ , кут нахилу консолей до прямої між опорами консолей  $\alpha = 60^\circ$ .

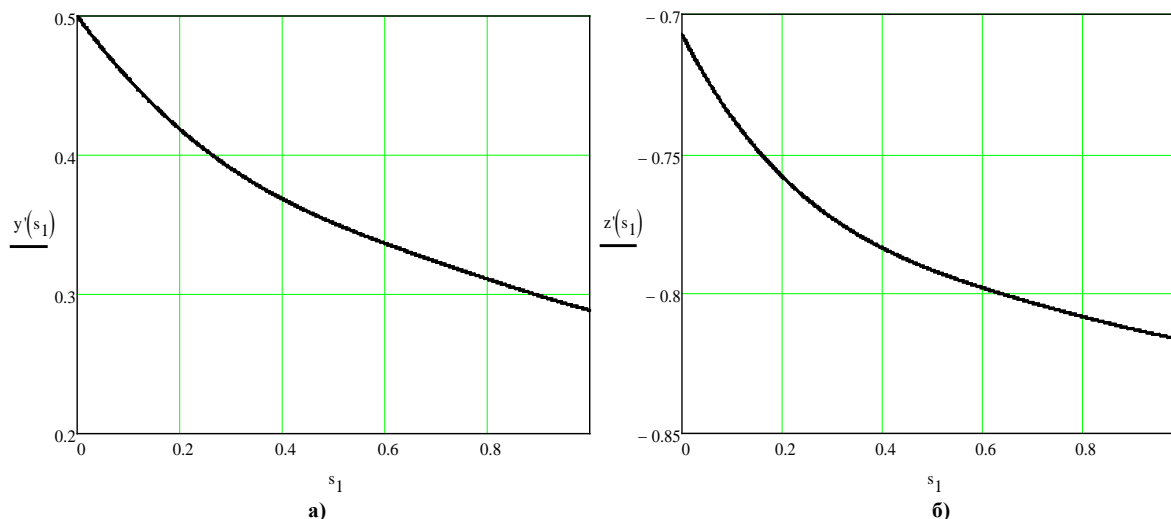


Рис. 3. Графіки залежності координат положення робочого органу при переміщенні каретки в обертовій системі координат

При русі першої каретки при нульових положеннях другої і третьої також змінюється положення нової системи координат відносно початкової, при цьому координата  $x' = 0,5$  на всьому інтервалі руху першої каретки.

Розв'язання задачі тривимірної трилатерації без застосування перетворення координат є більш громіздким, що значно обмежує використання даного методу в системі управління устаткуванням каркасного типу.

#### Висновки і перспективи подальших досліджень

Отримані залежності дозволяють визначити граничні можливості переміщення робочого органу та координати його у новій системі координат. Крім того, виконуючи диференціювання рівнянь, можна отримати співвідношення для швидкостей та прискорень, а для знаходження діапазонів зміни параметрів роботи окремих приводів (граничних швидкостей і прискорень), що необхідно для синтезу алгоритму управління багатоприводною установкою каркасного типу, необхідно вирішувати зворотну задачу кінематики. При цьому слід враховувати, що для пошуку розв'язку у початковій системі координат до розв'язку треба застосовувати зворотне перетворення. При цьому постає окрема підзадача визначення параметрів руху четвертої каретки з урахуванням умов забезпечення жорсткості каркасної конструкції та відсутності механічних переважень її елементів.

Враховуючи нелінійний характер рівнянь, а також залежність самої системи координат від положення кареток, така задача є досить складною, і потребує застосування сучасних високопродуктивних засобів мікропроцесорної техніки, що спроможні працювати в реальному часі, оброблюючи інформацію від датчиків та синтезуючи алгоритм управління, що забезпечує пересування робочого органу за заданою траєкторією з урахуванням вимог до точності та швидкодії, а також обмежень за максимальними швидкостями та прискореннями.

#### Список використаної літератури

1. Кузнецов Ю.М., Дмитрієв Д.О., Діневич Г.Ю. Компонувки верстатів з механізмами паралельної структури/ Під ред. Ю.М. Кузнецова. – Херсон: ПП Вишемирський В.С., 2009. – 456 с.
2. Ревенко С.В. Компьютеризированная система управления многоприводной каркасной установкой / С.В. Ревенко, А.В. Рудакова, А.А. Омельчук // Матеріали V Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з автоматичного управління присвяченої дню космонавтики, 12 квітня 2017 р., м. Херсон, С. 216-218.
3. Пат. 66672 Україна, МПК: B23V 39/00, B23Q 1/00. Свердильно-фрезерний верстат / Дмитрієв Д.О., Фіранський В.Б., Кузнецов Ю.М. - u201108142; заявл. 29.06.2011; опубл. 10.01.2012, Бюл. № 1, 2012 р. – 15 с.
4. Гриньов Б.В. Аналітична геометрія : підручник для вищ. техніч. навч. закладів / Б.В. Гриньов, І.К. Кириченко. - Харків : Гімназія, 2008. - 340 с.
5. Brinker, R.C. and Minnick, R. 12. Trilateration // The Surveying Handbook. – Chapman & Hall, 1995. – 967 p.



УДК 517.9:519.6

В.П. ЛЯШЕНКО, О.Б. КОБИЛЬСЬКА, Т.С. БРИЛЬ  
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
О.П. ДЕМ'ЯНЧЕНКО

Азовський морський інститут Національного університету "Одеська морська академія"

**НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ  
ТЕПЛООБМІНУ РУХОМОГО ОСЕСИМЕТРИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА**

*Розглянуто застосування інтегрального рівняння типу Гаммерштейна при моделюванні процесу теплообміну рухомої циліндричної області з навколишнім середовищем, що нагрівається внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. Побудовано функцію Гріна для спряженого диференціального оператора. Це дозволило нелінійну двовимірну крайову задачу звести до одновимірної нелінійної інтегральної рівняння. Розв'язок рівняння отримано чисельним модифікованим методом Ньютона. Проведені чисельні експерименти та побудовані графіки температурних розподілів. Отримане інтегральне рівняння може бути використане у якості математичної моделі теплового процесу під час термічної обробки рухомого дроту.*

*Ключові слова: математична модель, рівняння теплопровідності, крайова задача, інтегральне рівняння типу Гаммерштейна, функція Гріна.*

В.П. ЛЯШЕНКО, Е.Б. КОБЫЛЬСКАЯ, Т.С. БРЫЛЬ  
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
О.П. ДЕМЬЯНЧЕНКО

Азовский морской институт Национального университета "Одесская морская академия"

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ  
ТЕПЛООБМЕНА ДВИЖУЩЕЙСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СРЕДЫ**

*Рассмотрено применение интегрального уравнения типа Гаммерштейна при моделировании процесса теплообмена движущейся цилиндрической области, которая нагревается внутренними и внешними источниками тепла с окружающей средой. Построена функция Грина для сопряженного дифференциального оператора. Это позволило нелинейную двумерную краевую задачу свести к одномерному нелинейному интегральному уравнению. Решение уравнения получено модифицированным численным методом Ньютона. Проведены численные эксперименты и построены графики температурных распределений. Полученное интегральное уравнение может быть использовано в качестве математической модели теплового процесса во время термической обработки движущейся проволоки.*

*Ключевые слова: математическая модель, уравнение теплопроводности, краевая задача, интегральное уравнение типа Гаммерштейна, функция Грина.*

V. LYASHENKO, E. KOBILSKAYA, T. BRYL  
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskiy National University  
O. DEMYANCHENKO

Azov maritime institute of National university "Odessa maritime academy"

**NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS IN THE MATHEMATICAL MODELS OF HEAT TRANSFER  
IN A MOVING AXIAL-SYMMETRIC MEDIUM**

*The application of an integral equation of Hammerstein type in modeling the heat transfer process of a moving cylindrical area that is heated by internal and external heat sources with an environment is considered. The Green's function for the adjoint differential operator is constructed. This made it possible to reduce the nonlinear two-dimensional boundary value problem to a one-dimensional nonlinear integral equation. The solution of the equation was obtained by a modified numerical Newton's method. Numerical experiments have been carried out and graphs of temperature distributions have been constructed. The resulting integral equation can be used as a mathematical model of the thermal process during the heat treatment of a moving wire.*

*Key words: mathematical model, heat equation, boundary value problem, integral equation of Hammerstein type, Green's function*

**Постановка проблеми**

В основі більшості математичних моделей фізичних та технологічних процесів лежать крайові та нелокальні задачі математичної фізики. Значна їх кількість є нелінійними, а розв'язки можна знайти лише чисельними методами із застосуванням комп'ютерної математики. Зниження розмірності крайової задачі

дозволяє спростити алгоритм знаходження її розв'язку. Одним із шляхів зниження розмірності крайової задачі є зведення до інтегрального рівняння, лінійного або нелінійного, алгоритм розв'язку якого більш простий ніж алгоритм розв'язку крайової задачі.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Інтегральні рівняння знаходять широке застосування при розв'язанні задач математичної фізики та під час моделювання багатьох неперервних фізичних та технологічних процесів [1]. Зведення крайової задачі для рівняння з частинними похідними до відповідного інтегрального рівняння дозволяє у багатьох випадках спростити алгоритм її розв'язання методами комп'ютерної математики [1,2].

#### Мета дослідження

Побудувати алгоритм зведення третьої крайової задачі для рівняння теплопровідності до інтегрального рівняння та розв'язання її методами комп'ютерної математики.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо математичну модель температурного поля у рухомому осесиметричному середовищі, що розігрівається у обмеженій замкненій області  $\Omega$  внутрішніми або зовнішніми джерелами тепла, і яка є однією з проблем металургії – дослідження температурних розподілів під час пластичної деформації та термічної обробки рухомого дроту внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла [3,4].

Розглянемо фізичну та математичну модель такого процесу. Під час виробництва тугоплавкого та важкодеформованого дроту відбувається його попередній розігрів перед пластичною деформацією. Термічна обробка рухомого дроту у більшості технологічних процесів відбувається під дією постійно діючих внутрішніх або зовнішніх джерел тепла. Основна проблема, що виникає під час дослідження процесу термічної обробки є визначення температурного розподілу у зоні нагрівання, а додаткова – визначення параметрів керування температурним полем [5,6]. Математична модель процесу нагрівання дроту внутрішніми джерелами тепла приводить до дослідження крайових задач для неоднорідного рівняння теплопровідності з граничними умовами I-III роду, які відображають втрати тепла з поверхні середовища, що нагрівається. У цій моделі джерела тепла у неоднорідному рівнянні задаються у вигляді функції, що залежить від просторових координат та невідомої функції. Математичну модель процесу нагрівання рухомого осесиметричного середовища зі сталою швидкістю  $v$  внутрішніми джерелами тепла можна задати у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності в області  $\Omega: \{0 < z < l, 0 < r < r_0\}$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}, \quad (1)$$

$$T(r, 0) = u_0, \quad T(r, l) = u_l, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T(a, z)}{\partial r} = \alpha(u_c - T) + \varepsilon \sigma (u_c^4 - T^4), \quad (3)$$

де  $T(r, z)$  – температурне поле дроту,  $I$  – величина струму,  $\alpha, \lambda$  – відповідно коефіцієнти тепловіддачі, теплопровідності;  $c$  – теплоємність матеріалу;  $l$  – довжина зони нагрівання;  $r_0, \rho_n$  – відповідно радіус та щільність рухомого середовища;  $\sigma, \varepsilon$  – стала Стефана–Больцмана та ступінь чорноти середовища;  $u_0, u_l, u_c$  – початкова, кінцева та температура навколишнього середовища;  $\rho_0, \beta$  – питомий опір та температурний коефіцієнти опору [5].

Задачу (1)-(3) можна звести до нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку шляхом усереднення за радіусом [5,6].

У результаті перетворень отримаємо нелінійну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку у області  $Q: \{(z) | 0 < z < l\}$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - v \chi \frac{du}{dz} + \gamma u = +\tau u^4 - \omega_1, \quad (4)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_l,$$

$$\text{де } \chi = c \rho_n \lambda^{-1}, \quad \gamma = \left( I^2 \rho_0 \beta - 2 \pi^2 r_0^3 \alpha \right) \left( \pi^2 r_0^4 \lambda \right)^{-1},$$

$$\tau = 2 \varepsilon \sigma (r_0 \lambda)^{-1}, \quad \omega_1 = \left( I^2 \rho_0 + 2 \alpha u_c \pi^2 r_0^3 \right) \left( \pi^2 r_0^4 \lambda \right)^{-1} + \tau u_c^4.$$

При цьому враховується теплообмін поверхні рухомого середовища із навколишнім. Усереднення за радіусом дозволяє зменшити розмірність задачі та звести її до розв'язання нелінійної крайової задачі для

диференціального рівняння другого порядку. Якщо покласти у задачі (4)  $\varepsilon = 0$ , то рівняння стає лінійним, точний розв'язок якого отримано у роботах [4,5].

Зведемо нелінійну задачу (4) до інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна [1,7]. Напишемо рівняння задачі (4) в операторній формі

$$Lu = \tau u^4 - \omega_1, \tag{5}$$

де  $L = \frac{d^2}{dz^2} - \nu\chi \frac{d}{dz} + \gamma$  – лінійний диференціальний оператор.

Для знаходження розв'язку будемо функцію Гріна  $G(z, \xi)$  для спряженого до  $L = \frac{d^2}{dz^2} - \nu\chi \frac{d}{dz} + \gamma$  оператора  $L^* = \frac{d^2}{dz^2} + \nu\chi \frac{d}{dz} + \gamma$ , який є розв'язком однорідної задачі

$$L^*G(z, \xi) = \delta(z - \xi), \tag{6}$$

$$G(0, \xi) = 0, G(l, \xi) = 0, \tag{7}$$

де  $\delta(z - \xi)$  – дельта-функція Дірака.

Функція Гріна  $G(z, \xi)$  в області  $\Omega = \{z < \xi, z > \xi\}$  повинна задовольняти однорідному рівнянню та однорідним умовам. У кожній із під областей області  $\Omega = \{z < \xi, z > \xi\}$  знаходимо загальний розв'язок задачі (6)-(7) та функцію Гріна

$$\frac{d^2G}{dz^2} + \nu\chi \frac{dG}{dz} + \gamma G = 0, \quad 0 < z < \xi, \quad \xi < z < l \tag{8}$$

$$G(0, \xi) = G(l, \xi) = 0,$$

$$G(z, \xi) = \begin{cases} \{C_1(\xi)e^{k_1z} + C_2(\xi)e^{k_2z}, \forall z \leq \xi \\ \{C_3(\xi)e^{k_1z} + C_4(\xi)e^{k_2z}, \forall z \geq \xi \end{cases}, \tag{9}$$

де  $k_{1,2} = -(\nu\chi / 2) \pm \sqrt{(\nu\chi / 2)^2 - \gamma}$  – корені характеристичного рівняння для рівняння задачі (8).

Коефіцієнти  $C_1 \div C_4$ , визначаємо із розв'язку наступної системи скориставшись однорідними граничними умовами (7) та властивостями функції Гріна [1].

$$\begin{cases} C_1(\xi) + C_2(\xi) = 0 \\ C_3(\xi)e^{k_1l} + C_4(\xi)e^{k_2l} = 0 \\ C_1(\xi)e^{k_1\xi} + C_2(\xi)e^{k_2\xi} = C_3(\xi)e^{k_1\xi} + C_4(\xi)e^{k_2\xi} \\ -C_1(\xi)k_1e^{k_1\xi} - C_2(\xi)k_2e^{k_2\xi} + C_3(\xi)k_1e^{k_1\xi} + C_4(\xi)k_2e^{k_2\xi} = -1 \end{cases}. \tag{10}$$

Звідки коефіцієнти  $C_1(\xi) \div C_4(\xi)$  мають вигляд

$$C_1(\xi) = \frac{e^{k_2\xi} - e^{k_2l+k_1(\xi-l)}}{(k_1 - k_2) \left( e^{(k_1+k_2)\xi} \left( 1 - e^{(k_1+k_2)l} \right) \right)}, \quad C_2(\xi) = -\frac{e^{k_2\xi} - e^{k_2l+k_1(\xi-l)}}{(k_1 - k_2) \left( e^{(k_1+k_2)\xi} \left( 1 - e^{(k_1+k_2)l} \right) \right)},$$

$$C_3(\xi) = -\frac{-e^{(-k_1+k_2)l} \left( e^{k_1\xi} (1 - e^{k_2\xi}) \right)}{(k_1 - k_2) \left( e^{(k_1+k_2)\xi} (1 - e^{(-k_1+k_2)l}) \right)}, \quad C_4(\xi) = \frac{e^{k_1\xi} - e^{k_2\xi}}{(k_1 - k_2) \left( e^{(k_1+k_2)\xi} (1 - e^{(-k_1+k_2)l}) \right)}$$

Підставивши значення коефіцієнтів  $C_1(\xi) \div C_4(\xi)$  у (10) отримаємо функцію Гріна. Після перетворень рівняння Гаммерштейна можна записати у вигляді [7]

$$u(\xi) = u_L(\xi) - \tau \int_0^l G(z, \xi) u^4 dz, \tag{11}$$

де 
$$u_L(\xi) = u_0 G'_z(0, \xi) - u_l G'_z(l, \xi) + \omega_1 \int_0^l G(z, \xi) dz. \tag{12}$$

Рівняння (11) нелінійне. Тому для знаходження його чисельного розв'язку застосуємо модифікований метод Ньютона[7]. Напишемо (11) у вигляді

$$u(\xi) = u - \tau \bar{u} G(z; \xi) dz, \tag{13}$$

де  $\bar{u}$  – додатній корінь рівняння, середнє значення температури по координаті  $z$

$$\bar{u} = A - B\bar{u}^4, \tag{14}$$

де 
$$A = \frac{1}{l} \int_0^l u_L(\xi) d\xi, \quad B = \frac{\tau}{l} \int_0^l d\xi \int_0^l G(z; \xi) dz. \tag{15}$$

Дещо інший вигляд мають математичні моделі температурного поля зони нагрівання дроту зовнішніми джерелами тепла. У таких моделях температурне поле визначається із розв'язку крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності, де зовнішні джерела тепла висвітлюються у граничних умовах. Визначення стаціонарного температурного розподілу у зоні нагріву рухомого середовища, через поверхню, зовнішніми джерелами тепла (променевий нагрів) з врахуванням перерозподілу температури за рахунок теплопровідності приводить до розв'язання наступної задачі для рівняння теплопровідності

$$\Omega_1 : \{0 < z < l, 0 < r < r_0\}$$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \tag{16}$$

$$T(r, 0) = u_0, \quad T(r, l) = u_l, \tag{17}$$

$$\frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T(a, z)}{\partial r} = -\varepsilon \sigma (u_c^4 - T^4).$$

Після перетворень, шляхом усереднення за радіусом, задача в області  $\Omega = \{0 < z < \xi, \xi < z < l\}$  трансформується у наступну[7]

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \nu \chi \frac{du}{dz} = \tau (u^4 - u_c^4), 0 < z < l, \tag{18}$$

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_l \tag{19}$$

або в операторній формі

$$Lu = \tau u^4 - \tau u_c^4, \quad L = \frac{d^2}{dz^2} - \nu \chi \frac{d}{dz}. \tag{20}$$

Будуємо функцію Гріна в області  $\Omega = \{0 < z < \xi, \xi < z < l\}$  аналогічно(6)–(10). Корені однорідного характеристичного рівняння лінійного оператора (20) будуть

$$x^2 + \nu \chi x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -\nu \chi = k. \tag{21}$$

Тоді згідно визначення функція Гріна має вигляд

$$G(z; \xi) = \begin{cases} C_1(\xi) + C_2(\xi)e^{-kz}, & z < \xi \\ C_3(\xi) + C_4(\xi)e^{-kz}, & z > \xi \end{cases}, \quad (22)$$

$$C_1(\xi) = \frac{1 - e^{k(\xi-l)}}{k(1 - e^{-kl})}, \quad C_2(\xi) = \frac{e^{k(\xi-l)} - 1}{k(1 - e^{-kl})},$$

$$C_3(\xi) = \frac{e^{-kl} - e^{k(\xi-l)}}{k(1 - e^{-kl})}, \quad C_4(\xi) = \frac{e^{k\xi} - 1}{k(1 - e^{-kl})}. \quad (23)$$

Рівняння Гаммерштейна задачі (18),(19) буде мати вигляд, аналогічний (11)

$$u(\xi) = u_L(\xi) - \tau \int_0^l G(z; \xi) u^4 dz, \quad (24)$$

де

$$u_L(\xi) = \frac{(u_l + u_0)(e^{k(\xi-l)} - e^{-kl})}{(1 - e^{-kl})} + \tau u_c^4 \int_0^l G(z; \xi) dz. \quad (25)$$

Його розв'язок знаходимо аналогічно (13) модифікованим методом Ньютона[7].

### Висновки

Розроблено алгоритм зведення крайової задачі, що моделює процес теплообміну рухомої циліндричної області з навколишнім середовищем, до інтегрального рівняння типу Гаммерштейна. Розглянуто випадки нагрівання середовища внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. Побудовано функцію Гріна для спряженого диференціального оператора, яка використана у якості ядра рівняння типу Гаммерштейна. Це дозволило звести нелінійну двовимірну крайову задачу до одновимірного нелінійного інтегрального рівняння. Розв'язок рівняння отримано чисельним модифікованим методом Ньютона. Отримані інтегральні рівняння можуть бути використані у якості математичної моделі термічної обробки рухомого дроту.

### Список використаної літератури

1. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа /Лизоркин П.И. – М.: Наука, 1981.–381с.
2. V. Lyashenko, E. Kobilskaya Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem // AIP Conference Proceedings. – Sophia (Bulgaria), 2014. – 85(2014), P. 94–101.
3. V. Lyashenko, E. Kobilskaya. Methods for Solving of Inverse Heat Conduction Problems // Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings– 2016. – P. 040005-1–040005-7.
4. Ляшенко В.П., Бриль Т.С. Математична модель температурного поля рухомого дроту, що нагрівається зовнішніми джерелами тепла // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2012. – Вип. 1/2012 (72), – С. 50–53.
5. Ляшенко В.П., Григорова Т.А. Моделювання процесів спікання у контейнері. // ВестникХерсонскогонациональноготехническогоуниверситета. Вып. 3(39). – Херсон: ХНТУ, 2010. – С. 292 – 296.
6. Ляшенко В. П. Застосування методу Рунге до розв'язання однієї нелінійної задачі теплопровідності / В. П. Ляшенко, Н. Г. Кирилах // Вестник Херсонского государственного технического университета. – Вып. 3 (19), Херсон, 2003. – С. 235–239.
7. Верлань А.Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / Верлань А.Ф., Сизиков В.С.–К. Наукова думка 1978.–291с.

УДК 539.3

Д. М. МАКСИМЧУК  
Хмельницький національний університет**ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ КОНТАКТУ ПРУЖНОГО ШАРУ ТА  
СПІВВІСНИХ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРІВ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ)  
НАПРУЖЕННЯМИ**

*В рамках лінеаризованої теорії пружності представлена осесиметрична задача про тиск двох співвісних циліндричних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження та результати подані в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.*

*Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, перетворення Ханкеля, інтегральне рівняння типу Фредгольма, метод послідовних наближень, потенціал Бартенєва-Хазановича.*

Д. Н. МАКСИМЧУК  
Хмельницький національний університет**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КОНТАКТА УПРУГОГО ШТАМПА И СООСНЫХ  
УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ**

*В рамках лінеаризованої теорії упругості розглянута сумісна задача про тиск двох циліндричних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження виконані в загальному вигляді для теорій великих початкових деформацій та різних варіантів теорій малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.*

*Ключевые слова: лінеаризована теорія упругості, початкові (залишкові) напруження, перетворення Ханкеля, інтегральне рівняння типу Фредгольма, метод послідовних наближень, потенціал Бартенєва-Хазановича.*

D.N. MAKSYMCHUK  
Khmelnyskyi National University**PRESENTATION OF SOLUTIONS FOR CONTACT PROBLEM FOR CYLINDRICAL PUNCHES  
WHICH INTERACT WITH THE LAYER WITH INITIAL (RESIDIAL) STRESSES**

*The paper deals with the mixed type task of measuring pressure of an elastic cylinders dies upon a layer with initial (residual) stresses within the framework of linear elasticity theory. In general, the research was carried out for the theory of great initial deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.*

*Key words: the linearized elasticity theory, initial (residual) tension, Henkel integrals, the task to Fredholm equations, the method of consecutive approximations, the potential of Bartenev-Khasanovich.*

**Постановка проблеми**

Актуальною проблемою фундаментальних розробок з механіки деформівного твердого тіла є дослідження впливу початкових напружень на контактні характеристики пружних тіл, які взаємодіють між собою, що важливо для практичного використання у різних галузях промислового комплексу. Незважаючи на існуючі досягнення у теорії контактної взаємодії пружних тіл, все ще залишається недостатньо розроблений ряд моментів, серед яких – врахування залишкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх дотику, що дозволить більш ефективно враховувати зносостійкість матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності та достатньо знижувати їх матеріалоемність, зберігаючи у цілому потрібні функціональні характеристики. Тому є досить актуальним проведення нових теоретичних досліджень впливу початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружних тіл.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

На даний час проблеми, що відносяться до контактних задач пружних тіл, представлені у численних публікаціях періодичних видань. Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль у пружних півплощині та півпросторі при їх контактній взаємодії з пружними штампами досліджено у статтях [1, 2] і подано загальний метод розв'язку контактних задач для півплощини та півпростору з початковими напруженнями, що взаємодіють з пружними тілами. Детальний огляд задач контактної взаємодії пружних

тіл з початковими напруженнями представлений у роботах [3 – 5]. Вплив початкових напружень у пружному шарі при його контактній взаємодії з пружними співвісними штампами детально розглянуто у монографіях [6, 7]. Детальний огляд досліджень з контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями представлений статтями О. М. Гузя, В. Б. Рудницького, С. Ю. Бабича.

**Мета дослідження**

Метою даної роботи є розв’язок осесиметричної статичної задачі про контактну взаємодію двох співвісних пружних циліндричних штампів з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями. Розглядається випадок деформації шару під дією тиску двох співвісних кругових штампів різних радіусів і висоти без врахування сил тертя після виникнення у них початкового деформованого стану. Використовуючи співвідношення лінеаризованої теорії пружності в даній роботі представлено розв’язок змішаної осесиметричної задачі контактної взаємодії двох співвісних пружних циліндричних штампів з початковими напруженнями і пружного шару з початковими напруженнями. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Припускаємо, що початкові стани у шарі та штампах однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна :

$$y_i = \lambda_i x_i, \quad \lambda_i = const, \quad y_i = x_i + U_i^0, \quad U_i^0 = \delta_{in}(\lambda_i - 1)x_i \quad (i, n = 1, 2, 3)$$

де  $\delta_{in}$  – символ Кронекера,  $\lambda_m$  – коефіцієнт видовження вздовж координатної осі.

Також дія штампів викликає в шарі мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

Розглядатимемо пружні ізотропні тіла з довільною формою пружного потенціалу, а у випадку ортотропних тіл, вважатимемо, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформівному стані. Припускається, що пружні (скінченні) циліндричні штампи та шар виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів, які взаємодіють на площі основ штампів.

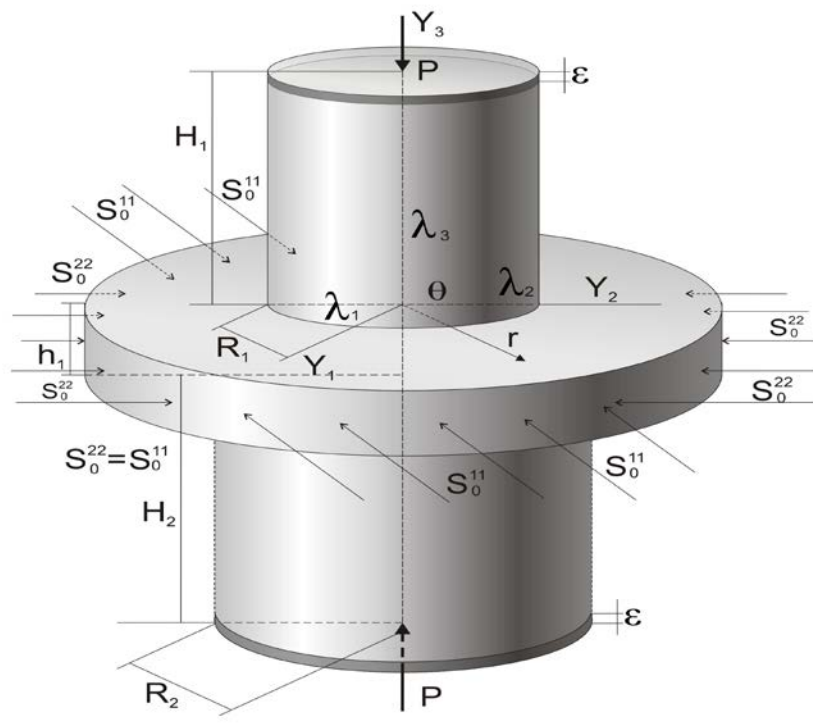


Рис. 1. Тиск двох співвісних циліндричних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями.

Пружний необмежений шар з початковими напруженнями деформується під дією тиску двох співвісних попередньо напружених циліндричних штампів (рис. 1.) різної висоти і радіусів. Товщина шару в початковому деформованому стані пов’язана з товщиною у недеформованому стані відношенням  $h_1 = \lambda_3 h_2$ . Зовнішнє навантаження  $P$  викликає переміщення вільних торців в напрямку осі симетрії  $Oy_3$ . Бокові поверхні штампів, а також поверхні шару за межею контакту вільні від зовнішніх зусиль, а в області

контакту тіл дотичними зусиллями нехтуємо. Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил.

У системі кругових циліндричних координат  $(r, \theta, z_i)$  ( $i=1,2$ ) такій постановці задачі відповідають граничні умови:

1) на торцях пружних штампів з початковими напруженнями:

$$u_z^{(1)} = -\varepsilon_+; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad \forall(r) \in [0, R_1], \quad y_3 = h + H_1, \quad (1)$$

$$u_z^{(2)} = -\varepsilon_-; \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0; \quad \forall(r) \in [0, R_2], \quad y_3 = -h - H_2, \quad (2)$$

2) на боковій поверхні пружних штампів

$$\sigma_z^{(1)} = 0; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad \forall(y_3) \in [0, H_1], \quad r = R_1, \quad (3)$$

$$\sigma_z^{(2)} = 0; \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0; \quad \forall(y_3) \in [0, H_2], \quad r = R_2, \quad (4)$$

3) на межі пружного шару в області контакту

$$u_3 = u_z^{(1)}; \quad \tilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(1)}; \quad \tilde{Q}_{3r} = \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad \forall(r) \in [0, R_1], \quad y_3 = -h_1, \quad (5)$$

$$u_3 = u_z^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{3r} = \tau_{rz}^{(2)} = 0, \quad \forall(r) \in [0, R_2], \quad y_3 = -h_2 \quad (6)$$

4) на межі пружного шару поза областю контакту

$$\tilde{Q}_{33} = \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad \forall(r) \in [r, +\infty], \quad y_3 = \pm h \quad (7)$$

Умови рівноваги приводять до співвідношення:

$$\int_0^{R_1} \rho \cdot Q_{33}(0, \rho) \Big|_{y_3=h_1} d\rho = \int_0^{R_2} \rho \cdot Q_{33}(0, \rho) \Big|_{y_3=h_2} d\rho.$$

А рівнодіюча зовнішніх сил визначаються рівністю:

$$P = -2\pi \int_0^{R_1} \rho \cdot Q_{33}(0, \rho) \Big|_{y_3=h_1} d\rho = -2\pi \int_0^{R_2} \rho \cdot Q_{33}(0, \rho) \Big|_{y_3=h_2} d\rho.$$

Крім того, у випадку осесиметричної задачі використовуємо циліндричні координати  $(r, \theta, z_i)$  ( $i=1,2$ ), де  $z_i = y_3 n_i^{-0.5}$ .

Загальний розв'язок  $\tilde{\chi}^{(i)} = \tilde{\chi}_1^{(i)} + v_1 z_1 \tilde{\chi}_2^{(i)}$  поставленої задачі для випадку рівних коренів  $n_1 = n_2$  будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{(i)} = \varepsilon_{\pm} \left\langle v_1 z_1 (1 + z_1) \left[ (m_2 - 1)^{-1} + \chi_0^{(i)} \left( (1 - m_2)^{-1} - 2E^{(i)} (3H^{(i)} \theta_2^{(i)})^{-1} (3r^2 - 2z_1^2) \right) \right] + \right. \\ \left. + R^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(i)} \left[ J_0(\alpha_k r) \mu_k^{-1} \left( \tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)} z_1) + z_1 \tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)} z_1) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + R^{(i)} (2\gamma_k)^{-1} b_{1k}^{(i)} \left( H^{(i)} \left( 1 + \frac{s_0 (1 - I_0(v_1 \gamma_k R^{(i)}))}{v_1 \gamma_k R^{(i)} I_1(v_1 \gamma_k R^{(i)})} \right) + z_1 \right) I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k z_1 v_1) \right] \right\rangle \quad (8) \end{aligned}$$

Для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{(i)} = \frac{(z_1 + z_2) E^{(i)}}{H^{(i)}} (3r^2 - 2(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2)) \chi_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ b_{2k}^{(i,k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R^{(i)})}{I_1(\gamma_k v_1 R^{(i)})} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \\ \left. + J_0(\alpha_k^{(i)} r) \left[ \tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)} z_1) + \tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)} z_2) \right] \right\} \chi_k^{(i)}, \quad (i=1, 2). \quad (9) \end{aligned}$$

Напружено - деформівний стан у пружному шарі з початковими (залишковими) напруженнями для нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$  визначимо через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля.

Враховавши граничні умови запишемо:

$$U_3 = \theta_3 \left[ \int_0^{\infty} \gamma(\xi) \xi^{-1} J_0(\xi \rho) d\xi - \int_0^{\infty} \gamma(\xi) \xi^{-1} F(\xi h^{(i)}) J_0(\xi \rho) d\xi \right] \quad (10)$$



$$Q_{33} = \theta_1 \int_0^\infty \gamma(\xi) J_0(\xi \rho) d\xi \text{ де}$$

$$\theta_1 = c_{44} l_1 (1 + m_1) \tilde{k}, h^{(i)} = \frac{h}{R^{(i)}} \theta_3 = \frac{m_1 (s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1}} \tilde{k} = \begin{cases} s_0 - s_1, & \text{для } n_1 = n_2, \\ 1 + s, & \text{для } n_1 \neq n_2. \end{cases} f(\xi) = \frac{\xi^3 B_2}{(R^{(i)})^3 (1 - F(\xi))}$$

З граничних умов визначаємо невідому функцію  $\gamma(\xi)$  із парних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty \frac{\gamma(\xi)}{\xi} J_0(\xi \rho) d\xi = g(\rho), \text{ при } \rho < R^{(i)}, (i = \overline{1,2}) \int_0^\infty \gamma(\xi) J_0(\xi \rho) d\xi = 0, \text{ при } \rho > R^{(i)}, (i = \overline{1,2})$$

де при  $n_1 = n_2$

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon^{(i)}}{\theta_3} \left[ 1 - \chi_0^{(i)} - \frac{2}{\theta_2} (m_2 - 1) (R^{(i)})^2 \chi_0^{(i)} + \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k^{(i)} J_0(\mu_k \rho) + \frac{(R^{(i)})^2}{2} (m_2 - 1) \sum_{k=1}^\infty \bar{b}_{1r}^{(k)} \chi_k^{(i)} I_0(\gamma_k^{(i)} \sqrt{n_1} \rho) \right] + \int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} F(\xi h^{(i)}) J_1(\xi \rho) d\xi,$$

$$\text{де } \theta_2 = E^{(i)} \left( \frac{8}{n_1} m_1 (1 + H^{(i)}) - \frac{4H^{(i)}}{\sqrt{n_1}} + (1 - m_2) \frac{(R^{(i)})^2}{H^{(i)}} \right), \theta_4 = \frac{1}{n_1} (\sqrt{n_1} (m_2 - 1) - m_1 s_0), (i = \overline{1,2})$$

$$\rho = \frac{r}{R^{(i)}}, 0 \leq \rho \leq 1$$

при  $n_1 \neq n_2$ :

$$g(\rho) = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\theta_3} \left[ \chi_0^{(i)} - 1 - \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k^{(i)} J_0(\mu_k \rho) + \frac{\theta_3}{\varepsilon^{(i)}} \int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} F(\xi h^{(i)}) J_1(\xi \rho) d\xi \right], (i = \overline{1,2})$$

Визначимо невідомі коефіцієнти  $A_0^{(i)}, A_k^{(i)}, C_0^{(i)}, B_k^{(i)}, E_k^{(i)}, F_k^{(i)}, N_k^{(i)}, M_k^{(i)}$  через константи  $\chi_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) для  $n_1 = n_2$ :

Тоді отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма II роду відносно функції  $f(\xi)$ :

$$\frac{\gamma(\xi)}{\xi} = -\frac{2}{\pi \theta_3} \bar{P}(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t) F(th^{(i)}) \psi_0(\xi, t)}{t} dt \quad (i = \overline{1,2}),$$

$$\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt, \text{ для } n_1 \neq n_2:$$

$$\frac{\gamma(\xi)}{\xi} = \frac{2\varepsilon^{(i)}}{\pi \theta_3} \left[ (\chi_0^{(i)} - 1) \psi_0(\xi, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k^{(i)} \psi_0(\xi, \mu_k) + \frac{\theta_3}{\varepsilon^{(i)}} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} F(th^{(i)}) \psi_0(\xi, t) dt \right], (i = \overline{1,2})$$

Пропускаючи деякі викладки, матимемо у результаті, що невідома функція, яка входить у вирази вектора переміщень і тензора напружень для попередньо напруженого шару, визначається шляхом зведення задачі до парних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду із застосуванням методу послідовних наближень при  $\lambda_1 > \lambda_{kr}$ . Враховуючи що даний метод збіжний, розв'язок представлено у вигляді рядів через нескінченну систему констант, які визначаються з системи регулярних лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\eta_k^{(i)} \chi_k^{(i)} + \sum_{n=0}^\infty \eta_{kn}^{(i)} \chi_n^{(i)} = \beta_k^{(i)}, (i = \overline{1,2}; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (11)$$

Визначивши невідомі константи  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), можна обчислити силу, переміщення і напруження у пружних штампах [6, 7] та шарі з початковими напруженнями по формулах (8-9).

При обчисленні напружень та переміщень для шару з початковими напруженнями більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються. Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаємо у ряди за степенями  $h^{-1}$ , що дозволяє обчислити коефіцієнти (8) наближено [8].

Система була розв'язана методом редукції, числові значення для потенціалів конкретної структури представлені в таблиці 1

Таблиця 1

Значення для потенціалів конкретної структури

$\lambda_1 \backslash k$	Гармонічний потенціал	Потенціал Трелоара	Потенціал Бартенєва-Хазановича
0.595	$\infty$	-	-
0.667	1.739	$\infty$	-
0.693	1.541	4.160	$\infty$
0.7	1.506	3.448	19.791
0.9	1.116	1.077	1.165
1	1	1	1

### Висновки

Вплив початкових напружень на напружено-деформований стан шару і співвісних штампів, а також рекомендації щодо застосування отриманих результатів полягають у наступному:

1) початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у циліндричних штампах, а при розтягненні – до їх збільшення (для переміщень все відбувається навпаки);

2) найбільший вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні штампів у зрізах  $0 \leq \xi \leq 1$ .

3) вплив початкових напружень для пружного шару аналогічний, причому на характер дії початкових напружень його товщина не впливає, а впливає лише на їх значення;

4) наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення при розрахунках на міцність деталей машин та конструкцій;

4) початкові напруження більш суттєво у кількісному плані, діють у високоеластичних матеріалах в порівнянні з більш жорсткими, але якісно їхній вплив буде збережено;

5) небезпечною є ситуація, коли початкові напруження наближаються до значень поверхневої нестійкості, оскільки контактні напруження і переміщення різко змінюють свої значення.

Отже, вплив початкових напружень, що виявлений при дослідженні, є суттєвим для стисливих та нестисливих тіл. Це підтверджено одержаними аналітичними, графічними та числовими результатами і дає можливість використовувати їх в інженерних розрахунках.

### Список використаної літератури

1. Гузь А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика – 2004. – 40, № 7. – С.41– 69.
2. Гузь А. Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 8. – с. 3 - 11.
3. Guz, A.N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses. Focus on Ukrainian research / A.N. Guz, S.Y. Babich, V.B. Rudnitsky // Apple Mech. Rev. Vol. 51, nos May 1998. – P. 343 – 371.
4. Александров В. М. Контактная задача для предварительно напряженного физически нелинейного упругого слоя / В. М. Александров, В. С. Порошин//Инж. журн. «Механика твердого тела».– 1984. - № 6. – с. 79 – 85.
5. Гузь А. Н. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницкий // Развитие идей Л. А. Галина в механике. – М. – Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013. – 480 с.
6. Гузь А. Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. – Хмельницкий, изд. ПП Мельник. – 2004. – 682 с.
7. Гузь А. Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. - Хмельницкий, изд. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
8. Максимчук Д. М. Розв'язання контактної задачі для попередньо напруженого шару та двох співвісних пружних штампів з початковими (залишковими) напруженнями / Д. М. Максимчук // Доповіді Національної Академії наук України : Науково-теоретичний журнал. - 2015. - № 4. - С. 49-55

УДК 681.324:516.15

І.В. МЕЛЬНИК, В.В. ГАЙДАМАКА

Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»**ДОЛГОСРОЧНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

*В статье приведен обзор методов анализа самоподобного трафика телекоммуникационных сетей путём расчёта функции корреляции и параметра Хёрста. Показана связь этих методов расчёта с методами фрактального анализа. Показано, что при определенном значении параметра Хёрста для самоподобного трафика пропускная способность телекоммуникационной системы может быть ниже, чем для классической односерверной с однородным входным информационным потоком. Указывается на значение методов фрактального анализа в современных научных исследованиях, включая анализ самоподобных свойств объектов природы и эстетических особенностей произведений искусства.*

*Ключевые слова: случайный процесс, функция корреляции, долгосрочный процесс, самоподобный процесс, параметр Хёрста, фрактальный анализ, фрактальное броуновское движение, фрактальный гауссовский шум.*

І.В. МЕЛЬНИК, В.В. ГАЙДАМАКА

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**ДОВГОСТРОКОВІ ЗАЛЕЖНОСТІ ТА ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ**

*У статті наведений огляд методів аналізу самоподібного трафіка телекомунікаційних мереж через розрахунок функції кореляції та параметра Хьорста. Показаний зв'язок цих методів розрахунку з методами фрактального аналізу. Також показано, що за певних значень параметра Хьорста для самоподібного трафіка пропускна здатність телекомунікаційної мережі може бути меншою, ніж для класичної одно серверної з однорідним вхідним інформаційним потоком. Вказується на важливе значення методів фрактального аналізу у сучасних наукових дослідженнях, а також для аналізу естетичних особливостей мистецьких творів.*

*Ключові слова: випадковий процес, функція кореляції, довгостроковий процес, самоподібний процес, параметр Хьорста, фрактальний аналіз, фрактальний броунівський рух, фактальний гаусівський шум*

I.V. MELNYK, V.V. HAIDAMAКА

National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorskiy Kyiv Politechnical Institute"**LONG-TIME DEPENDENCES AND FRACTAL ANALYSE**

*The review of methods of analyzes of self-similar traffic in the telecommunication networks through calculation the correlation function and Hurst parameter is presented in this article. Connection between this calculation method and methods of fractal analyze is shown. It is pointed out also, that for special values of Hurst parameters for the self-similar traffic the throughput of communication systems can be smaller, than for classic system with one server with homogeneous input information flux. The significance of fractal analyse methods for the modern science, including analyse of self-similar properties of natural phenomena and aesthetics particularities of art works, is also described.*

*Keywords: random process, correlation function, long-time process, self-similar process, Hurst parameter, fractal analyze, fractal Brown motion, fractal Gauss noise.*

**Введение**

Сегодня в теории телекоммуникаций и в теории компьютерных сетей большое значение приобретают методы анализа самоподобных процессов [1, 2], которые основаны на методах теории систем массового обслуживания [3] и на методах фрактального анализа [4], однако имеют свои особенности. В целом методы фрактального анализа являются достаточно универсальными и используются для анализа разных явлений природы, от астрономических исследований до биологических объектов и кристаллических наноструктур [4], поэтому математический аппарат теории фракталов заслуживает особого внимания. В связи с этим целью данной обзорной статьи является анализ особенностей использования существующих методов фрактального анализа для описания самоподобных долгосрочных временных зависимостей. В качестве примера приводится анализ самоподобного трафика компьютерной сети.

**Постановка задачі**

Задача анализа трафика долгосрочных зависимостей тесно связана с методами определения функции корреляции [3] и с фрактальным анализом самоподобных структур [4]. Определение долгосрочных временных зависимостей в теории сигналов и в теории телекоммуникационных систем непосредственно связано с классическим понятием функции корреляции [1 – 3]. Долгосрочными называются такие сигналы или потоки событий, для которых существует связь между значениями сигнала в разные, достаточно отдаленные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . Допустим, что в соответствии с классической теорией вероятности заданы отсчеты случайного сигнала или времена наступления случайного события [3]:

$$X = \{x_i : t = 0, 1, 2\}. \tag{1}$$

Корреляционную функцию и коэффициент корреляции случайного процесса определим обычным образом, через математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$  [3]:

$$R(x_i, x_{i+k}) = M(x_i - M(X)) \cdot M(x_{i+k} - M(X)) < \infty; \tag{2}$$

$$D(X) = M(x_i - M(X))^2 = \sigma^2; r(k) = \frac{R(x_i, x_{i+k})}{D(X)}.$$

Единственное отличие от классической постановки задачи состоит в том, что расчеты требуется проводить для больших значений  $k$ . Тогда долгосрочной зависимостью называется такая зависимость  $r(x)$ , для которой функция корреляции не стремится к нулю при условии, что  $X$  стремится к бесконечности [3, 4]. Проведём, в соответствии с формулами (1), (2), анализ трафика компьютерной сети Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», который был предоставлен авторам дирекцией компании «КПИ Телеком» для учебных целей. Данные по загрузке компьютерной сети снимались в течении четырёх часов и представлены на рис. 1, а – г.

**Анализ долгосрочной временной зависимости для трафика компьютерной сети с использованием методов теории вероятности и математической статистики.** На рис. 1 приведен входной и выходной трафик компьютерной сети компании «КПИ Телеком». Входной трафик показан черным, а выходной – серым цветом, значения скорости передачи информации приведены в гигабитах за секунду. Проведем расчеты для выходного трафика с использованием матрицы корреляции [3], снимая показания каждые 5 минут в течении получаса. В результате получаем 8 временных выборок, по 6 значений в каждой.

Таблица 1.

Трафик сети компании «КПИ Телеком» в соответствии с рис. 1

№ реализации	$t = 0$	$t = 5$ мин	$t = 10$ мин	$t = 15$ мин	$t = 20$ мин	$t = 25$ мин
1. 10:00 – 10:25	1,2 Гб/с	0,85 Гб/с	0,85 Гб/с	0,75 Гб/с	0,75 Гб/с	0,9 Гб/с
2. 10:30 – 10:55	0,9 Гб/с	0,85 Гб/с	0,8 Гб/с	0,9 Гб/с	0,85 Гб/с	0,8 Гб/с
3. 11:00 – 11:25	1,2 Гб/с	0,82 Гб/с	0,82 Гб/с	1,1 Гб/с	1,2 Гб/с	1,1 Гб/с
4. 11:30 – 11:55	1,0 Гб/с	1,0 Гб/с	1,25 Гб/с	1,0 Гб/с	1,0 Гб/с	1,1 Гб/с
5. 12:00 – 12:25	1,2 Гб/с	1,1 Гб/с	1,0 Гб/с	0,95 Гб/с	0,9 Гб/с	0,9 Гб/с
6. 12:30 – 12:55	0,9 Гб/с	1,0 Гб/с	1,1 Гб/с	1,2 Гб/с	1,1 Гб/с	1,0 Гб/с
7. 13:00 – 13:25	0,9 Гб/с	1,4 Гб/с	1,3 Гб/с	1,2 Гб/с	1,35 Гб/с	1,3 Гб/с
8. 13:30 – 13:55	1,25 Гб/с	1,15 Гб/с	1,35 Гб/с	1,3 Гб/с	1,2 Гб/с	1,3 Гб/с

Далее расчет коэффициента корреляции для долгосрочного, нестационарного процесса проводится по следующей методике [1, 2].

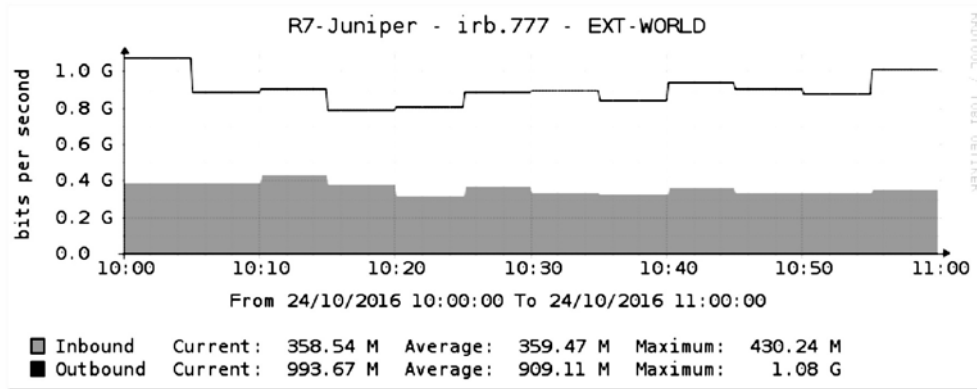
1. Формируется матрица значений трафика сети, приведенная в таблице 1.
2. Поскольку случайный процесс не является стационарным, рассчитывается значение математического ожидания и среднего квадратического отклонения по всей выборке из 48 значений [1 – 2]:

$$M_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N X_k, \quad S_N = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N (X_j - M)^2}. \tag{3}$$

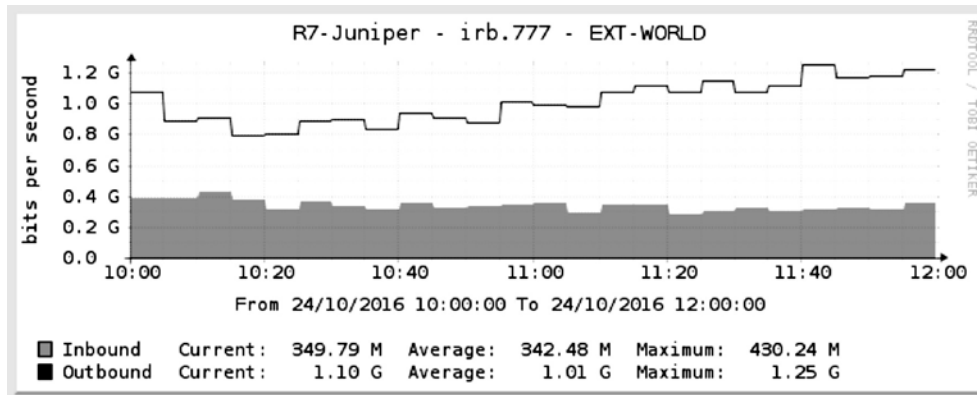
Для данных, приведенных в таблице 1,  $M_N = 1,0487$  Гб/с,  $S_N = 0,18$  Гб/с.

2. По известному значению математического ожидания определяется интегральное отклонение [1, 2]:

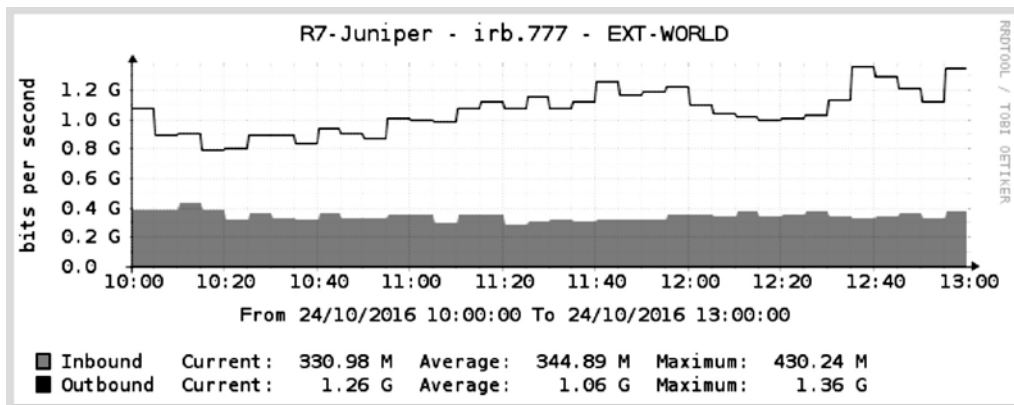
$$D_j = \sum_{k=1}^j X_k - j \cdot M, \quad j = 1 \dots N. \tag{4}$$



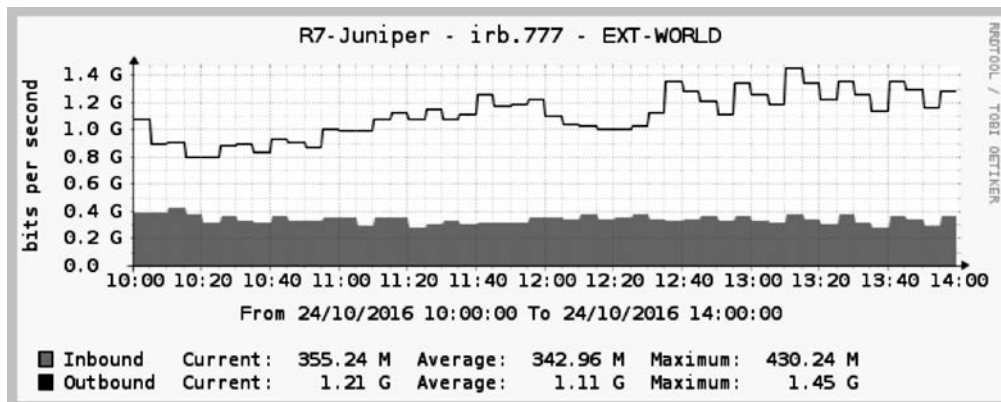
a)



б)



в)



г)

Рис. 1. Трафик сети «КПИ – Телеком» в течении четырёх часов (публикуется с разрешения руководства компании)

3. По значениям интегрального отклонения определяется параметр изменчивости случайного процесса  $R_N$ , который зависит от количества элементов в выборке  $N$  [1, 2]:

$$R_N = \max_{1 < j < N} (D_j) - \min_{1 < j < N} (D_j). \quad (5)$$

Для данных, приведенных в таблице 1,  $R_N = 3,8184$ .

В соответствии с соотношениями (3, 5) для долгосрочной зависимости определяется параметр Хёрста  $H$  [1, 2]:

$$H = \frac{\ln\left(\frac{R}{S}\right)}{\ln\left(\frac{N}{2}\right)}. \quad (6)$$

Для числовых данных, приведенных в таблице 1,  $H = 0,9596$ , что является очень высоким значением. Для временных зависимостей, которым не свойственно самоподобие, этот параметр обычно близок к значению  $H \approx 0,5$ , а для систем с самоподобными временными зависимостями он обычно лежит в диапазоне  $0,57 < H < 0,9$ . Возможный диапазон значений параметра Хёрста составляет от 0,5 до 1 [1, 2]. В следующем разделе будут рассмотрены основные свойства самоподобных временных зависимостей.

**Самоподобные временные зависимости и их основные свойства.** Принцип самоподобия временных зависимостей состоит в том, что, хотя их отдельные реализации за короткие и длительные промежутки времени не одинаковы, они являются очень похожими по форме и визуально практически совпадают [5 – 7]. Очевидно, что именно такими являются и временные зависимости, приведенные на рис. 1. Для исследования степени зависимости самоподобных процессов и их долгосрочности эффективно используется теория временных рядов [5 – 7]. В теории системного анализа и временных рядов даётся определение агрегированных случайных процессов, выборки которых  $X^{(m)}$  и математическое ожидание случайной величины в выборке  $X_k^{(m)}$  определяются на непересекающихся временных интервалах следующим образом [1, 2, 5 – 7]:

$$X^{(m)} = \{X_k^{(m)} : k = 0, 1, 2, \dots\}; \quad X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m X_{k-1}^{(m+i)}. \quad (7)$$

Агрегированные процессы, которые описываются соотношениями (7), отличаются тем, что они являются стационарными и имеют ограниченную функцию корреляции, а их дисперсия описывается степенной зависимостью [5 – 7]:

$$D(X^{(m)}) \approx a \cdot m^{-\beta}; \quad m \rightarrow \infty; 0 < \beta < 1. \quad (8)$$

Физический смысл соотношения (8) заключается в том, что вариация средних выборок, которые описываются соотношением (7), уменьшается медленнее, чем объём выборки  $m$ . С учетом соотношений (2, 7, 8) корреляционную функцию долгосрочного случайного процесса можно записать следующим образом [1, 2, 5 – 7]:

$$r(k) = k^{-\beta}; \quad \sum_k r(k) = \infty. \quad (9)$$

Сущность соотношений (9) состоит в том, что автокорреляционная функция долгосрочного самоподобного процесса гиперболически уменьшается, но этот процесс происходит настолько медленно, что функциональный ряд (9) расходится. Именно эта особенность автокорреляционной функции и является основной отличительной чертой современной теории случайных процессов [5 – 7]. Этим и отличается современная теория случайных процессов от классической теории, в которой рассматриваются только сходящиеся асимптотические функциональные ряды [3].

Тем не менее, как и в классической теории случайных процессов, в теории самоподобных процессов рассматривается связь спектра случайного процесса с его корреляционной функцией, которая записывается в виде соотношения, аналогичного преобразованию Фурье [1, 2]:

$$f(\omega) = c \cdot \omega^{-\gamma}; \quad f(\omega) = \sum_k r(k) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot k); \quad \gamma = 1 - \beta; \omega \rightarrow 0. \quad (10)$$

Очевидно, что функциональный ряд (10) является аналогом теоремы Винера – Хинчина в классической теории информации для эргодического стационарного случайного процесса [8].

Следует отметить, что параметр  $\beta$  в соотношениях (9) связан с параметром Хёрста, определяемым по выборке значений сигнала в соответствии с соотношением (6), следующим образом [1, 2]:

$$\beta = \frac{1 - H}{2}. \quad (11)$$

Особенности свойств самоподобных временных зависимостей позволяют сделать вывод о том, что функция корреляции самоподобных процессов либо совпадает с автокорреляционной функцией агрегированного потока [1, 2]:

$$r(k) = r^m(k), \tag{12}$$

либо стремится к ней при условии, что количество потоков  $m$  стремится к бесконечности [1, 2]:

$$r(k) = \lim_{m \rightarrow \infty} (r^m(k)). \tag{13}$$

Следует также отметить, что для самоподобных процессов, в соответствии с соотношением (6), зависимость  $\lg(R/S)$  от  $\lg(N)$  близка к линейной, а введенный параметр корреляционной функции  $\beta$  легко определить как тангенс угла наклона этой зависимости [1, 2]. В следующем разделе статьи будут рассмотрены особенности анализа пропускной способности телекоммуникационных систем, информационные потоки в которых описываются самоподобными временными зависимостями с высоким значением параметра Хёрста.

**Анализ эффективности работы телекоммуникационных систем с самоподобными информационными потоками.** Отдельно в теории телекоммуникационных систем рассматривается анализ пропускной способности системы с памятью в случае, если информационный поток в такой системе описывается долгосрочной временной зависимостью. Обычно при этом рассматривается не количество передаваемой информации, как во временных зависимостях, аналогичных приведенным на рис. 1, а количество передаваемых пакетов, поскольку такие математические модели чаще всего строятся на основе методов теории систем массового обслуживания [1 – 3].

В теории самоподобных случайных процессов показано, что если в телекоммуникационной системе поток входных заявок за единицу времени составляет  $\lambda$ , а количество обработанных выходных заявок –  $\mu$ , тогда число необработанных заявок, находящихся в памяти системы, можно оценить из соотношения:

$$A(t) = \lambda \cdot t + \sqrt{a \cdot \lambda} \cdot Z(t), \quad N(t) = \sup_{s \leq t} (A(t) - \mu(t - s)), \tag{14}$$

где  $Z(t)$  – нормализованный случайный процесс с параметром Хёрста  $H$ ,  $a$  – положительный нормализованный множитель. Из соотношения (14) следует, что при выполнении необходимого условия стабильной работы системы массового обслуживания:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \tag{15}$$

вероятность того, что количество необработанных системой пакетов  $N$  будет больше, чем  $x = \frac{1}{\mu}$ , связана с параметром Хёрста  $H$  и определяется соотношением [1, 2]:

$$\Pr(N > x) = \Pr\left(\sup_{t \geq 0} \left( Z(t) - \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{a \cdot \lambda}} \cdot t \right) > \frac{x}{\sqrt{a \cdot \lambda}}\right) = f\left(\left(\frac{x}{\sqrt{a \cdot \lambda}}\right)^{\frac{1-H}{H}} \cdot \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{a \cdot \lambda}}\right). \tag{16}$$

Из полученного соотношения (16), полагая, что  $\Pr(N > x) = \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная сколь угодно малая величина, можно записать [1, 2]:

$$\frac{1-\rho}{1} \cdot \mu^{\frac{H-1}{H}} \cdot \frac{1-H}{x^{\frac{1-H}{H}}} = a^{\frac{1}{2 \cdot H}} \cdot f^{-1}(\varepsilon) = \text{const}. \tag{17}$$

Следует отметить, что аналитическое соотношение (17), позволяющее оценить пропускную способность телекоммуникационных систем с самоподобными информационными потоками, является достаточно универсальным. Например, в случае  $H = 0,5$  из него легко получить классическое соотношение - закон Литтла для односерверной системы, в которой распределение входного потока заявок подчиняется закону Пуассона, а время обработки заявок – экспоненциальному закону распределения [9]:

$$x = \frac{\rho}{1 - \rho}. \tag{18}$$

С другой стороны, на основе соотношения (17) можно получить известное аналитическое соотношение для модели телекоммуникационной системы с постоянным временем обработки поступающих информационных пакетов, которые тоже распределены по закону Пуассона [9]:

$$\mu \cdot T = \frac{1 - \rho}{1 - \rho}, \tag{19}$$

где  $T$  – среднее время нахождения информационных пакетов в очереди.

Отдельный интерес в теории телекоммуникационных систем представляет анализ самоподобных информационных потоков, в которых используются модели фрактального броуновского движения и фрактального гауссовского шума. Эти модели будут рассмотрены в следующем разделе статьи.

**Модели фрактального броуновского движения и фрактального гауссовского шума.** В теории телекоммуникационных сетей нормальным фрактальным броуновским движением с параметром Хёрста  $H$  называется случайный процесс  $X(t)$ , обладающий следующими свойствами [1, 2].

1. Приращения случайной величины  $x$  являются стационарными и подчиняются нормальному закону распределения.

2. В начале случайного процесса  $X(t)$  значение величины  $x$  равно нулю, то есть  $X|_{t=0} = 0$ .

3. Средняя разность между значениями случайного процесса  $X(t)$  в разные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  не зависит от точек отсчета времени и составляет  $M\left(X|_{t=t_1} - X|_{t=t_2}\right) = 0$ .

4. Средний квадрат разности между значениями случайного процесса  $X(t)$  в разные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  не зависит от точек отсчета времени и составляет  $M\left(X|_{t=t_1} - X|_{t=t_2}\right)^2 = k \cdot |t_2 - t_1|^H$ .

5. Величина  $x$  имеет нормальное распределение в любой момент времени  $t > 0$ .

6. Из свойств 3 и 4 следует, что дисперсия фрактального броуновского движения составляет:

$$M\left(X|_{t=t_1} - X|_{t=t_2}\right)^2 = k \cdot |t_2 - t_1|^H. \quad (20)$$

Фрактальным гауссовским шумом называется шум, для которого случайная величина  $x$  подчиняется нормальному распределению

$$p(x) = \frac{m}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (21)$$

а автокорреляционная функция определяется соотношением:

$$r(k) = \frac{|k+1|^{2\cdot H} - 2 \cdot |k|^{2\cdot H} + |k-1|^{2\cdot H}}{2}. \quad (22)$$

Соотношения (20) – (22) широко используются для расчета параметров самоподобных временных зависимостей, при этом тип используемой модели определяется исходя из экспериментальных данных о пропускной способности компьютерной сети, аналогичных приведенным на рис. 1. Тут важным является коэффициент самоподобия случайного процесса  $\alpha$ , который характеризует количество выбросов в анализируемом случайном процессе или сигнале, которое сохраняется независимо от временного масштаба. Такой самоподобный случайный процесс  $y(t)$  можно описать с использованием простого аналитического соотношения, известного из теории фрактального анализа [1, 2, 4]:

$$y(t) = a^\alpha \cdot y\left(\frac{t}{\alpha}\right). \quad (23)$$

С другой стороны, если известно, что долгосрочный случайный процесс является фрактальным броуновским движением, а время обработки пакетов в телекоммуникационной системе является постоянной величиной, соотношение (17) для оценки максимальной пропускной способности телекоммуникационной системы можно переписать следующим образом:

$$\mu \cdot T = \frac{\rho^{\frac{H-1}{2}}}{\frac{H}{(1-\rho)^{1-H}}}. \quad (24)$$

Результаты расчета эффективности работы телекоммуникационных систем с использованием соотношений (18), (19), (24), а также их анализ, будут приведены в следующем разделе статьи.

#### Результаты моделирования и их анализ

Результаты расчетов пропускной способности телекоммуникационной сети с коммутацией пакетов для разных моделей сетевого трафика приведены на рис. 2.



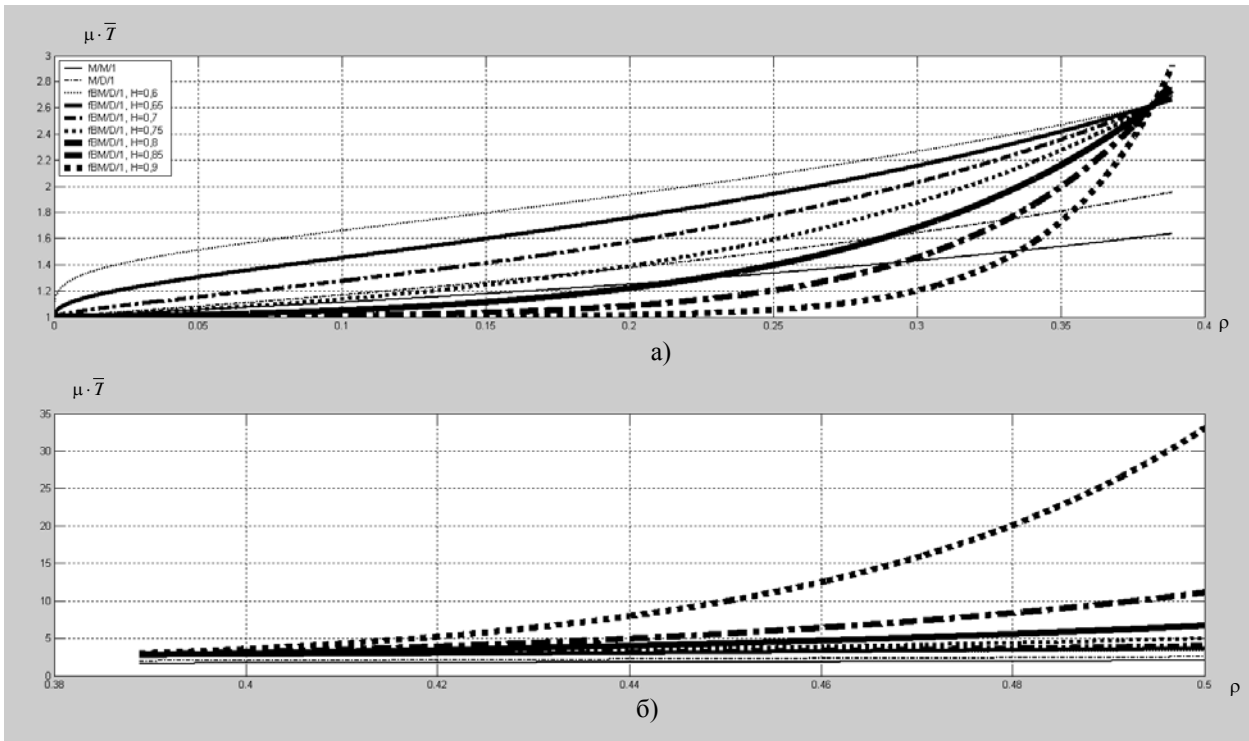


Рис. 2. Зависимости среднего времени нахождения пакетов в телекоммуникационной системе от интенсивности входного информационного потока и от производительности системы для разных классических и самоподобных моделей информационного потока: а – для относительно невысоких значений интенсивности входного потока; б – для относительно высоких значений интенсивности входного потока

На рисунке введены следующие обозначения, являющиеся стандартными в теории телекоммуникационных сетей в соответствии с классификацией по Кендаллу [6, 9].

1. M/M/1 – входной информационный поток подчиняется закону распределения Пуассона, время обработки пакетов – экспоненциальному закону распределения, 1 сервер.
2. M/D/1 – входной информационный поток подчиняется закону распределения Пуассона, время обработки пакетов – постоянное, 1 сервер.
3. fBM/D/1 – входной информационный поток является самоподобным и рассматривается как фрактальное нормальное броуновское движение, время обработки пакетов – постоянное, 1 сервер.

Из приведенных графических зависимостей можно сделать вывод, что для больших значений интенсивности входного потока пакетов, для самоподобных информационных потоков время обработки пакетов может быть значительно больше, чем для классических моделей M/M/1 и M/D/1. Этот результат впервые был получен в начале девяностых годов в работах В.Е. Лиланда для анализа систем с самоподобным трафиком [1, 2]. Работы В.Е. Лиланда и его коллег стали теоретической основой для развития технологий телекоммуникаций для всемирной компьютерной сети Интернет. Кроме простых аналитических моделей самоподобного трафика сети для более точных оценок используются также численные методы имитационного моделирования, которые основаны на использовании генератора случайных чисел и рассмотренных выше стохастических моделей фрактального броуновского движения и фрактального гауссовского шума (20 – 22) [1, 2].

**О других возможностях использования методов фрактального анализа.** Методы фрактального анализа сложных объектов природы и временных процессов начали развиваться с середины семидесятых годов XX века с публикации фундаментальной монографии Б.Мандельброта [4]. Основой фрактального анализа является соотношение (23), позволяющее определить степень зависимости между отдельными элементами анализируемой структуры или системы и понять, насколько свойства системы повторяют свойства её элементов, и какие новые свойства, не свойственные её элементам, обретает система как единое целое. Для самоподобных случайных процессов важными также являются соотношения (12, 13) для их корреляционной функции. Кроме этих обобщенных соотношений для описания корреляционных функций самоподобных процессов используют также распределение Парето [1, 2]:

$$p(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a, \quad x \leq b \tag{25}$$

и распределение Вейбулла [1, 2]:

$$p(x) = 1 - \exp(-\beta x^\alpha), \quad F(x) = \alpha \beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha). \tag{26}$$

Функции распределения Парето и Вейбулла (25, 26) отличаются от классических функций распределения тем, что функции плотности вероятности  $p(x)$  для них не всегда асимптотически стремятся к нулю, поэтому для них не всегда существуют моментные функции. Например, для функции распределения Парето (25) математическое ожидание существует только при  $\alpha > 1$ , а дисперсия – только при  $\alpha > 2$ , и рассчитываются эти параметры следующим образом [1, 2]:

$$M = \frac{ab}{a-1}, \quad D = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}. \quad (27)$$

Эти свойства корреляционных функций самоподобных процессов связаны с расходимостью функционального ряда (13).

Еще Б.Мандельброт обратил внимание на возможность использование принципов самоподобия для исследования широкого спектра физических, биологических, социальных процессов, поскольку принцип повторяемости, или фрактальности, является достаточно универсальным [4]. Он свойственен также произведениям искусства, в частности, он часто встречается в архитектуре, живописи, музыкальных произведениях, независимо от их возраста и авторства. Поиск новых случайных и закономерных свойств в системе из повторяющихся объектов составляет основу современного системного анализа [7], и поэтому сегодня методы фрактального анализа являются теоретической базой для разных областей науки. Основными областями их применения стали астрономия, термодинамика, гидродинамика, точная механика, биология и медицина, бионика, кристаллография [4]. Что касается анализа произведений искусства и их эстетических особенностей, то описанный выше метод анализа самоподобных временных зависимостей может быть использован для оценки эстетической ценности музыкальных произведений по временной зависимости звукового сигнала. В данном случае параметр Хёрста даст информацию о том, насколько музыкальное произведение является сложным и оригинальным с композиционной точки зрения и в какой степени повторяемость отдельных моментов влияет на эстетические особенности предлагаемой музыкальной композиции.

#### Выводы

Рассмотренные в работе методы анализа самоподобных случайных временных зависимостей, основанные на методах фрактального анализа, имеют большое практическое значение для формирования сигналов с заданными информационными свойствами и для оптимизации трафика загруженных телекоммуникационных сетей. Учитывая, что математический аппарат теории фракталов является достаточно универсальным и может быть использован для объектов и систем разной физической природы, возможны и другие интересные применения описанного подхода.

#### Список использованной литературы

1. Крылов В.В., Самохвалова С.С. Теория телетрафика и её приложения. – СПб.: «БХВ – Петербург», 2005. – 288 с.
2. Столлинс В. Современные компьютерные сети. – Питер, СПб., 2003. – 703 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы // Компьютинг в математике, физике, биологии. – М.: Издательство института компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
5. Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимошук О.Д. Аналіз часових рядів. Навчальний посібник. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 600 с.
6. 103. Кендалл М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. — М.: Наука, 1976. – 736 с.
7. Згуровський М.З., Понкратова Н.Д. Основи системного аналізу. – К.: Видавнича група ВНУ, 2007. – 544 с.
8. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации. – М.: Высшая школа, 1989. – 320 с.
9. Ирвин Дж., Харль Д. Передача данных в сетях: инженерный подход. – Перевод с английского. – СПб: БХВ, 2003. – 448 с.

УДК 62-50

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ

Днепропетровский национальный университет им. О.Гончара

## НЕКОТОРЫЕ ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Рассмотрены проблемные вопросы использования методов математического моделирования при изучении реальных физических процессов. Для конкретности все определения и выводы без уменьшения общности формулируются для линейных динамических систем с постоянными коэффициентами. Показано, что необходимым условием успешного применения методов математического моделирования является использование при математическом моделировании адекватных математических описаний. Рассмотрены также важные вопросы построения алгоритмов достоверного прогноза поведения динамических систем.*

*Ключевые слова: адекватные математические описания, регуляризация, прогнозирование.*

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ

Дніпровський національний університет ім. О.Гончара

## ДЕЯКІ ВІДКРИТІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

*Розглянуто проблемні питання використання методів математичного моделювання при вивченні реальних фізичних процесів. Для конкретності всі визначення і висновки без зменшення загальності формулюються для лінійних динамічних систем з постійними коефіцієнтами. Показано, що необхідною умовою успішного застосування методів математичного моделювання є використання при математичному моделюванні адекватних математичних описів. Розглянуто також важливі питання побудови алгоритмів достовірного прогнозу поведінки динамічних систем.*

*Ключові слова: адекватні математичні описи, регуляризація, прогнозування.*

Yu.L. MENSNIKOV

Dnipro National University

## SOME OPEN QUESTIONS OF MATHEMATICAL MODELING

*The problematic questions of using mathematical modeling methods in studying real physical processes are considered. For concreteness, all definitions and conclusions without loss of generality are formulated for linear dynamic systems with constant coefficients. It is shown that the necessary condition for successful application of methods of mathematical modeling is the use of adequate mathematical descriptions in mathematical modeling. Important questions of constructing algorithms for reliable predictions of the behavior of dynamical systems is studying.*

*Keywords: the adequate mathematical descriptions, regularization, forecasting.*

### Постановка проблемы

**Введение.** Методы математического моделирования находят все более широкое применение в практике изучения реальных физических процессов [1]. При этом идет процесс усложнения математических моделей и расширение областей их использования. На этом фоне стали просматриваться некоторые нерешенные проблемы, которые сдерживают использование математических методов. Настоящая работа посвящена рассмотрению ряда открытых вопросов, возникающих при использовании методов математического моделирования.

Для изложения дальнейшего материала необходимо принять некоторые определения для однозначной формулировки проблем и полученных результатов.

Будем называть *математической моделью* физического процесса совокупность уравнений, которые отражают физические законы исследуемого процесса.

*Внешними воздействиями* будем называть функции, которые присутствуют в математической модели в качестве независимых слагаемых.

Начальные и различные граничные условия для исследуемого процесса будем называть *дополнительными условиями*.

Совокупность математической модели физического процесса, внешних воздействий и дополнительных условий будем называть *математическим описанием* физического процесса [2].

Процесс компьютерного решения уравнений математической модели физического процесса с учетом внешних воздействий и дополнительных условий будем называть *математическим моделированием*.

В научной литературе возможны и иные определения.

Практическое значение результатов математического моделирования зависит от степени совпадения результатов математического моделирования для выбранного математического описания реального процесса с экспериментальными данными [2,3]. Если совпадение результатов математического моделирования с экспериментом плохое, то дальнейшее использование этих результатов является проблематичным. Важным понятием в этой связи является адекватность построенного математического описания изучаемому физическому процессу [3]. Однако, это определение адекватности является довольно общим и требует уточнений и дополнений. Кроме этого, остается открытым вопрос о возможности использования адекватных математических описаний для выполнения прогноза поведения физического процесса.

Упомянутые общие вопросы математического моделирования и являются предметом исследований в данной работе.

**Постановка задачи.** В дальнейшем будем рассматривать вопросы, связанные с использованием методов математического моделирования для изучения физических процессов, на примере динамической системы, движение которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

Пусть физический процесс характеризуется в общем случае некоторым количеством переменных (переменных состояния)  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , зависящих от бесконечного числа исходных параметров процесса  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ . Выбор характеристик физического процесса  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , которые подлежат изучению, определяются конечными целями исследований.

Будем полагать, что переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  удовлетворяют некоторой системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = F(x, z), \tag{1}$$

где  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))^T \in X$  есть вектор-функция переменных состояния ( $(\cdot)^T$  – знак транспонирования),  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t), \dots)^T \in Z$  – вектор-функция внешних воздействий. Под внешними воздействиями (нагрузками) будем понимать функции  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t), \dots$ , которые изменяются независимо от субъективных факторов или свойств и поведения исходной математической модели (1). На практике существенное влияние на физический процесс оказывает лишь конечное количество внешних воздействий  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T \in Z$ , а остальными влияниями можно пренебречь.

Зафиксируем решение  $x^0(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$  системы (1), удовлетворяющее начальным условиям:  $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_k(t_0) = x_k^0$ . В некоторой малой окрестности этого решения отклонения  $\tilde{x}(t, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0, \dots, \tilde{x}_k^0)$  от фиксированного решения  $x^0(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$  будут удовлетворять линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\tilde{x}} = A \tilde{x} + B z, \tag{2}$$

где  $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_k(t))^T \in X$  есть вектор-функция переменных состояния,  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T \in Z$  – вектор-функция внешних воздействий,  $A, B$  – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности.

Пусть  $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_n^1)^T$  есть некоторая вектор функция внешних воздействий. Если при подстановке этой функции в (2) с учетом дополнительных условий получаем вектор-функцию характеристик  $x^1(t) = (x_1^1(t), x_2^1(t), \dots, x_k^1(t))^T$ , которая отличается от измерения  $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_k(t))^T$  на величину погрешности экспериментальных измерений характеристик  $\delta$ , тогда математическое описание (уравнение (2) с вектор функцией  $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_n^1)^T$  и дополнительными условиями) будем называть *адекватным линейным математическим описанием* динамического процесса (АЛМО). Отклонение определяются в метриках функциональных пространствах  $X, Z$ .

**Уточненное определение адекватности.** На практике измерение характеристик переменных состояния ограничено лишь одной или двумя компонентами, например, только  $x_1(t), x_2(t)$ . Поэтому необходимо изменить определение адекватности математического описания: если при математическом моделировании с использованием математического описания (уравнения (2), функции  $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_n^1)^T$ , дополнительных условий) переменная  $x_1^1(t)$  отличается от измерения функции  $\tilde{x}_1(t)$  на величину, которая не превышает погрешности экспериментального измерения этой характеристики  $\delta_1$ , тогда математическое описание (уравнение (2) с вектор функцией  $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_n^1)^T$  и дополнительными условиями) будем называть *адекватным линейным математическим описанием* динамического процесса по переменной  $x_1^1(t)$  (*ALMO<sub>x<sub>1</sub></sub>*). По остальным переменным совпадение с экспериментом не обязательно [4]. Аналогично определяются адекватные математические описания в случае нескольких измерений переменных состояния. Метрика для сравнения в этом случае определяется целями конкретных исследований.

В настоящее время существует два основных подхода к проблеме построения адекватного математического описания [2,3,5,6,7].

Остается открытым вопрос о соответствии параметров математического описания реальным физическим параметрам процесса. Анализ этого вопроса приводит к выводу, что для выполнения критерия адекватности необязательно, чтобы параметры математического описания соответствовали реальным физическим параметрам. Возможны «плохие» математические модели и «хорошие» модели внешних воздействий, которые в совокупности дают адекватное математическое описание по некоторой переменной состояния, и наоборот [4,9]. Например, математическая модель в [4] не учитывает важных характеристик реального физического процесса таких, как тепловые параметры, магнитные параметры, световое излучение и т.д. Однако, параметры межпланетных расстояний описывает достаточно хорошо. И этот факт подтверждается многими экспериментальными данными.

Из определения адекватного описания ясно, что *ALMO* существует бесконечно много и эти описания могут существенно отличаться между собой. Это свойство показано в работах [2,3,9].

При этом также нет оснований полагать, что полученное таким образом математическое описание будет иметь параметры, близкие к реальным физическим параметрам. Это лишь пара (математическая модель и модель внешнего воздействия), которая обеспечивает адекватность результатов математического моделирования [2,3,9].

Кроме того, критерий адекватности существенно зависит от свойств норм функциональных пространств  $X, Z$ , которые используются. Дополнительно заметим, что существенна и величина отрезка изменения независимой переменной в оценке величины отклонения.

В последние годы в практике математического моделирования появляются задачи, в которых проверку адекватности выполнить невозможно по причине технической невозможности получить экспериментальные характеристики  $x_1^1(t), x_2^1(t), \dots, x_k^1(t)$  [5]. В этом случае проверка адекватности может ограничиться лишь проверкой непротиворечивости результатов математического моделирования физическим законам. Например, в задаче, которая рассматривается в [5], адекватность может быть обеспечена пересечением направлений на предполагаемый источник в одной точке. Будем называть адекватность такого типа *качественной*.

Другим примером может служить задача моделирования эмоций [10,11]. В этом случае характеристики состояния физического процесса не могут быть измерены в принципе и поэтому о адекватности математического описания говорить нельзя и следует ограничиться лишь субъективными оценками адекватности.

**Проблема прогнозирования поведения физического процесса.** Одной из основных целей математического моделирования является достоверное прогнозирование поведения физических процессов. Необходимым условием достоверного прогнозирования является построение адекватного математического описания изучаемого процесса.

Однако, в процессе прогнозирования возникает ряд принципиальных трудностей. Например, каким образом выполнить проверку адекватности выбранного математического описания при прогнозировании? В новых условиях проведения эксперимента, для которых выполняется прогнозирование, могут измениться параметры физического процесса и внешнего воздействия на него. И при этом отсутствуют гарантии, что в новых условиях будет выполняться условие адекватности ранее построенного математического описания, так как оно базировалось на прошлом эксперименте. Таким образом, выполнение основного требования адекватности невозможно проверить при отсутствии эксперимента в новых условиях.

Математическое моделирование, с использованием адекватного математического описания (АМО), для изучения физического процесса в новых условиях малопригодно, так как математическое описание локально и в общем случае непригодно для новых условий.

Однако, если параметры АМО являются устойчивыми к малым изменениям исходных данных, тогда близость результатов математического моделирования с использованием такого АМО с будущими экспериментами при малых изменениях исходных данных (эксперимента и параметров математической модели процесса) будет гарантирована.

Следовательно, необходимо изменять постановку задачи синтеза АМО методом подбора функции внешнего воздействия  $z_\delta$ : необходимо найти функцию  $z_\delta$ , которая обеспечивает адекватность соответствующего математического описания и является устойчивой к малым изменениям исходных данных. Для случая второго способа синтеза АМО необходимо найти параметры матриц  $A, B$ , которые обеспечивают адекватность соответствующего математического описания и являются устойчивыми к малым изменениям исходных данных.

Следует отметить, что в данных задачах нет смысла рассматривать поведение адекватного математического описания при стремлении погрешности исходных данных к нулю. В силу этого, не имеет смысла оценивать погрешность полученного математического описания. Эта погрешность может иметь произвольную величину и ее величина не имеет никакого значения для целей дальнейшего математического моделирования. Для целей дальнейшего использования адекватного математического описания более важно, чтобы параметры математического описания были устойчивы к малым изменениям исходных данных.

Примеры расчетов конкретных адекватных математических описаний представлены в работах [2,3,9].

Для построения прогноза можно использовать следующий прием: искусственно изменять параметры матриц  $A, B$  и переходить к постановкам задачи для определения внешних воздействий  $z_\delta$  для класса моделей [2,3,9]. Решение таких задач следует трактовать как функции, которые показывают лишь качественные изменения результатов математического моделирования при изменении параметров.

В ряде случаев возможна постановка обратных задач синтеза АМО с целью получения гарантированной оценки прогноза: в определенном смысле [9].

Остается пока без ответа вопрос о проверке достоверности прогноза с использованием  $ALMO_{x_1}$ , которое получено только для одной переменной состояния и в котором адекватность по остальным переменным отсутствует в общем случае.

Все рассмотренные выше вопросы остаются открытыми и для математических моделей в алгебраической форме, и в форме дифференциальных уравнений в частных производных, и в иных формах.

#### Заключение

В работе рассмотрены некоторые открытые вопросы использования методов математического моделирования в практике на примере динамических систем. Предложен ряд подходов для целей получения достоверных прогнозов поведения физических процессов.

#### Список использованной литературы

1. Введение в математическое моделирование: Учеб. Пособие / Под ред. П.В. Трусова. — М.: Университетская книга, Логос, 2007. - 440 с.
2. *Menshikov Yu.L.*, Synthesis of Adequate Mathematical Description as Solution of Special Inverse Problems // European Journal of Mathematical Sciences, –v. 2, –n. 3, –2013, –P.256-271.
3. *Меньшиков Ю.*, Об адекватности результатов математического моделирования // Труды. Международной конференции "Моделирование-2008", –К., –Украина, –2008, –С.119-124.
4. *Перехрест В.І.* Закон планетних відстаней у вихровій теорії планетарних систем // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка, вип. 15, том 1, –2011,– С.21-33.
5. *Turbal M., Turbal M., Bomba A., Radoveniuk O.* Method of Earthquake Prediction Based on the Solitone Shocks Mechanisms // Journal of Environmental Science and Engineering A1, –2012, –P.11-20.
6. *Степанко В.С.*, Метод критической дисперсии как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования // Проблемы управления и информатики, –Киев, –Украина, –2, –2008, –С.27-32.
7. *Губарев В.Ф.*, Метод итеративной идентификации многомерных систем с неточными данными, ч.1. Теоретические основы // Проблемы управления и информатики, –Киев, –Украина, –2, –2008, –С.8-26.
8. *Жуков О.А.*, Алгоритмы итеративной идентификации многомерных систем // Тр. 15 международной конференции по автоматическому управлению "Автоматика-2008", –Одесса: ІNІА, –Украина, –2008, –С.774-777.
9. *Меньшиков Ю.Л., Поляков Н.В.*, Идентификация моделей внешних воздействий. – Вид-во «Наука та Освіта», Днепропетровск, Украина, –2009, –188с.
10. *Breitenecker F., Judex F., Popper N., Breiteneker K., Mathe A., Mathe A., Wassertheurer S.* Laura and Petrarca - True Emotions vs. Modelled Emotions // Proc. 6-th Vienna Conference on Mathematical Modelling, 2009, – С.46-69, Vienna, full Papers CD Volume, Vienna Univ. of Technology, ISBN 978-3-901608-35-3.
11. *Rinaldi, S.* Laura and Petrarca: an intriguing case of cyclical love dynamics. SIAM J.App. Math. Vol. 58 (1998), No. 4, pp. 1205-1221.

УДК537.2+519.632+681.7

Л. І. МОЧУРАД

Науково-навчальний інститут підприємництва та перспективних технологій національного університету «Львівська Політехніка»

П. Я. ПУКАЧ

Національний університет «Львівська Політехніка»

### ЭФФЕКТИВНИЙ ПІДХІД ДО РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ КВАДРУПОЛЬНОЇ ЛІНЗИ

*На одному модельному прикладі розглянуто всі основні аспекти чисельного розв'язування крайових задач з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку. Такі задачі виникають при математичному моделюванні систем електронної оптики. Запропоновано ефективну методіку, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь у поєднанні з апаратом теорії груп.*

*Ключові слова: математичне моделювання; електронні оптичні системи; інтегральні рівняння; теорія потенціалу; абелева група симетрії; метод колокації.*

Л. И. МОЧУРАД

Научно-учебный институт предпринимательства и перспективных технологий национального университета «Львовская Политехника»

П. Я. ПУКАЧ

Национальный университет «Львовская Политехника»

### ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ КВАДРУПОЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

*На одном модельном примере рассмотрены все основные аспекты численного решения краевых задач с абелевой группой симметрии шестнадцатого порядке. Такие задачи возникают при математическом моделировании систем электронной оптики. Предложена эффективная методика в основе которой лежит метод интегральных уравнений в сочетании с аппаратом теории групп.*

*Ключевые слова: математическое моделирование; электронные оптические системы; интегральные уравнения; теория потенциала; абелева группа симметрии; метод коллокации.*

L. I. MOCHURAD

Scientific-educational institute of entrepreneurship and advanced technologies of Lviv Polytechnic National University

P. YA. PUKACH

Lviv Polytechnic National University

### AN EFFECTIVE APPROACH TO THE CALCULATING OF THE ELECTROSTATIC FIELD OF A QUADRUPOLE LENS

*In one model example, all the main aspects of the numerical solution of boundary value problems with the abelian symmetry group of the sixteenth order is considered. Such problems arise in the mathematical modeling of electronic optics systems. An effective method based on the method of integral equations in combination with the apparatus of group theory is proposed.*

*Keywords: mathematical modeling; electronic optical systems; integral equations; potential theory; abelian group of symmetry; collocation method.*

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Електронно-оптичні системи є основними компонентами сучасних дослідницьких комплексів, за допомогою яких вивчають складні фізичні процеси, пов'язані з рухом заряджених частинок у відповідних потенціальних полях. Наприклад, відомо [1], що такі електронно-оптичні системи як електростатичні лінзи використовують в багатьох електронних приладах. Так, лінзи і їх системи є основними частинами сучасних потужних електронних мікроскопів та прискорювачів. Останні відіграють важливу роль в ядерній фізиці. На сьогодні в більшості мікрозондів, що знаходяться в експлуатації, використовують мультиплети (системи із двох, трьох або більшої кількості) електростатичних квадрупольних лінз [2]. За допомогою системи електродів типу «квадрупольна лінза», яка дозволяє створювати просторове неоднорідне електричне поле в усьому об'ємі системи електродів, здійснюють електрофізичне очищення трансформаторного масла від забруднень різного походження. Задану продуктивність очищення у реальних установках фільтрації можна отримати використанням паралельно з'єднаних систем просторових електродів типу «квадрупольна лінза» [3].

При розгляді значної кількості таких сучасних електронно-оптичних систем помічено, що вони володіють геометричною симетрією. Дана властивість дозволяє серед крайових задач електростатики виділити класи задач з абелевими групами симетрії скінченних порядків [4]. У цій статті без зменшення загальності на одному модельному прикладі продемонстровано усі основні ідеї методики наближеного чисельного розв'язування крайових задач, які виникають в теорії оптичних систем та володіють абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку.

**Постановка проблеми**

Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи. На рис. 1 представлена одна із можливих конфігурацій квадрупольної системи, в якій потрібно знайти розподіл потенціалу.

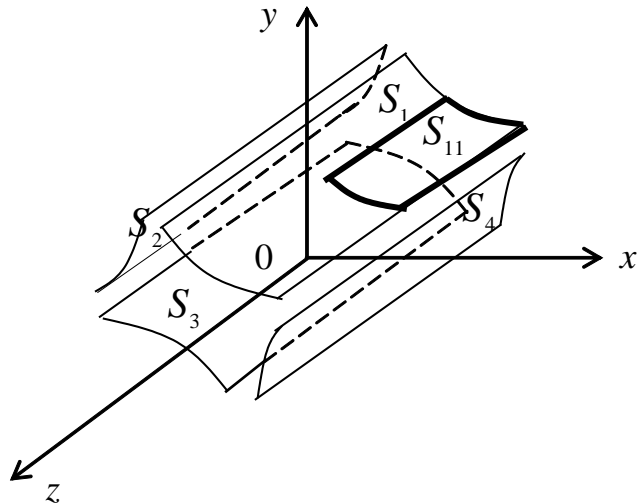


Рис. 1. Досліджувана квадрупольна система

У процесі математичного моделювання подамо відповідну систему електродів у такому вигляді:  $S := \bigcup_{i=1}^4 S_i$ , де  $S_i$  – гладкі розімкнені поверхні, що не мають спільних точок, обмежені кусково-гладкими контурами скінченної довжини. З математичної точки зору необхідно знайти функцію  $U \in H^1(\Omega_s, \Delta)$ , яка задовольняє умови

$$\Delta U = 0, \text{ в } \Omega_s := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}; \tag{1}$$

$$\delta^\pm U = f \text{ на } S; \tag{2}$$

$$\lim_{|Q| \rightarrow \infty} U(Q) = 0, \text{ точка } Q \in \Omega_s, \tag{3}$$

де  $\delta^\pm : H^1(\Omega_s) \rightarrow H^{1/2}(S)$  – оператори сліду [5],  $f \in H^{1/2}(S)$  – задане граничне значення потенціалу, а

$$H^1(\Omega_s, \Delta) := \left\{ U \mid U \in H^1(\Omega_s), \Delta U \in L_2(\Omega_s) \right\}.$$

Нехай  $P, Q$  і т.д. – точки евклідового простору  $\mathbf{R}^3$ . Тоді, як відомо[6], проблема знаходження електростатичного поля еквівалентна такому загальному інтегральному рівнянню

$$(K\sigma)(P) \equiv \iint_S \sigma(Q) \cdot K(P, Q) dS_Q = f_k(P), P \in S_k (k = \overline{1, 4}), \tag{4}$$

де  $K(P, Q) := 1/\text{dist}(P, Q)$ , а  $f_k(P)$  – граничне значення потенціалу на електроді, який змодельовано поверхнею  $S_k (f_k(P) \equiv \text{const})$ , а  $\sigma(Q)$  - шукана сукупна густина розподілу зарядів на  $S$ , тобто  $\sigma(Q) := \{ \sigma_i(Q), Q \in S_i; i = \overline{1, 4} \}$ .



**Мета дослідження**

**Особливості математичної моделі, подання еквівалентного двовимірного інтегрального рівняння та його параметризація.** З метою максимального врахування наявної симетрії у геометрії поверхні  $S$  розіб'ємо кожен її складову  $S_i$  на чотири конгруентні елементи:  $S_i := \bigcup_{j=1}^4 S_{ij}$ . У відповідності з таким поділом  $S_i$  подамо (4) у вигляді

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint \sigma_{ij}(Q) \cdot K(P, Q) dS_Q = f_{kl}(P), \quad P \in S_{kl} \quad (k, l = \overline{1, 4}), \tag{5}$$

де  $\sigma_{ij}(Q)$  і  $f_{kl}(P)$  – звуження  $\sigma_i(Q)$  і  $f_k(P)$  на  $S_{ij}$  і  $S_{kl}$ , відповідно.

Нехай у декартовій прямокутній системі координат  $Oxyz$  складові поверхні  $S$  задано за допомогою параметричних рівнянь:  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ ,  $a \leq u \leq b$ ,  $c \leq v \leq d$ . Тоді “біжучу” ( $Q$ ) і “контрольну” ( $P$ ) точки в  $\mathbf{R}^3$  можна подати у вигляді

$$Q = Q(u, v) := \{x(u, v); y(u, v); z(u, v)\}^T, \quad P = P(u_0, v_0) := \{x(u_0, v_0); y(u_0, v_0); z(u_0, v_0)\}^T,$$

де  $a \leq u_0 \leq b$ ,  $c \leq v_0 \leq d$  – деякі фіксовані значення параметрів  $u$  і  $v$ . Так, подаючи фрагмент  $S_{11}$  поверхні  $S$ , можна скористатись такими параметричними рівняннями:  $x(u, v) = \text{sh } u$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ;  $y(u, v) = \text{ch } u$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ;  $z(u, v) = v$ ,  $0 \leq v \leq A$  ( $A > 0$ ).

Зауважимо, що тоді у (5) елемент поверхні  $dS_Q$  має вигляд  $[\text{sh}^2 u + \text{ch}^2 u]^{1/2} du dv$ , а відстань  $\text{dist}(P, Q)$ , за умови, що  $P \in S_{11}$ , можна обчислити за формулою:

$$\text{dist}(P, Q) = \left\{ \frac{\text{sh}^2\left(\frac{u-u_0}{2}\right)}{\left(\frac{u-u_0}{2}\right)^2} \left[ \text{sh}^2\left(\frac{u+u_0}{2}\right) + \text{ch}^2\left(\frac{u+u_0}{2}\right) \right] (u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \right\}^{1/2}.$$

Враховуючи те, що  $\lim_{u \rightarrow u_0} \text{sh}^2\left(\frac{u-u_0}{2}\right) / \left(\frac{u-u_0}{2}\right)^2 = 1$ , легко зробити висновок про характер особливості в ядрі інтегрального рівняння (5).

Далі відповідно до попереднього поділу  $S$  подамо повний опис усіх фрагментів межі:

$$S_i = \bigcup_{j=1}^4 S_{ij} = \bigcup_{j=1}^4 \{Q_i(u, v); (u, v) \in D_j\} \quad (i = \overline{1, 4}),$$

де точки

$$Q_1(u, v) := (\text{sh } u, \text{ch } u, v)^T \in S_1, \quad Q_2(u, v) := (-\text{ch } u, \text{sh } u, v)^T \in S_2,$$

$$Q_3(u, v) := (\text{sh } u, -\text{ch } u, v)^T \in S_3, \quad Q_4(u, v) := (\text{ch } u, \text{sh } u, v)^T \in S_4,$$

$D_1 := [0, 1] \times [0, A]$ ,  $D_2 := [-1, 0] \times [0, A]$ ,  $D_3 := [0, 1] \times [-A, 0]$ ,  $D_4 := [-1, 0] \times [-A, 0]$ , причому  $A > 0$  – довільне дійсне число ( $A < +\infty$ ). Останнє дає можливість подати (5) у вигляді такої системи шістнадцяти інтегральних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint \sigma_{ij}(u, v) \cdot \hat{K}(Q_i(u, v); P) du dv = f_{kl}(P), \tag{6}$$

де  $P \in S_{kl} (k, l = \overline{1, 4})$ ,  $\hat{K}[Q_i(u, v); P] := K[Q_i(u, v); P] \cdot [\text{sh}^2 u + \text{ch}^2 u]^{1/2}$ , причому  $P := Q_k(u_0, v_0)$ ,  $(u_0, v_0) \in D_l$ ,  $\sigma_{ij}(u, v) := \sigma[Q_i(u, v)]$ ,  $(u, v) \in D_j$ .

**Викладення основного матеріалу дослідження**

**Врахування наявної геометричної симетрії у поданні сукупної граничної поверхні.** Для зменшення кількості рівнянь, які потрібно розв'язувати паралельно, до одного скористаємось такою властивістю розглядуваної проблеми.

**Лема 1.** Система інтегральних рівнянь (6) володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку, яка є прямим добутком абелевих підгруп  $\{e, \tau_x\}$ ,  $\{e, \tau_y\}$ ,  $\{e, \tau_z\}$  і циклічної групи другого порядку  $\{e, \beta\}$ , де  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_z$  — дзеркальні відображення відносно трьох попарно ортогональних площин  $yz$ ,  $xz$ ,  $xy$ , а  $\beta$  — поворот на кут  $\pi/2$ .

*Доведення.* Враховуючи запроваджену вище нумерацію фрагментів межі  $S$ , легко бачити, що  $S_{ij} = \tau_h S_{11} (i, j = \overline{1, 4}; h = 4(i-1) + j)$ , причому  $\tau_1 = e$  (тотожне перетворення),  $\tau_2 = \tau_x$ ,  $\tau_3 = \tau_z$ ,  $\tau_4 = \tau_z \circ \tau_x$ ,  $\tau_5 = \beta$ ,  $\tau_6 = \tau_y \circ \beta$ ,  $\tau_7 = \tau_z \circ \beta$ ,  $\tau_8 = \tau_y \circ \tau_z \circ \beta$ ,  $\tau_9 = \tau_y$ ,  $\tau_{10} = \tau_x \circ \tau_y$ ,  $\tau_{11} = \tau_z \circ \tau_y$ ,  $\tau_{12} = \tau_z \circ \tau_x \circ \tau_y$ ,  $\tau_{13} = \tau_x \circ \beta$ ,  $\tau_{14} = \tau_y \circ \tau_x \circ \beta$ ,  $\tau_{15} = \tau_z \circ \tau_x \circ \beta$ ,  $\tau_{16} = \tau_z \circ \tau_y \circ \tau_x \circ \beta$ . Звідси випливає, що  $S$  володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку  $GR_{16} := \{\tau_i\}_{i=1}^{16}$ . Обчислюючи прямий добуток циклічних груп  $\{e, \tau_x\}$ ,  $\{e, \tau_y\}$ ,  $\{e, \tau_z\}$ ,  $\{e, \beta\}$ , легко переконатись, що  $GR_{16}$  є їх прямим добутком. Таким чином, гранична поверхня  $S$  володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку. Оператор Лапласа інваріантний відносно групи рухів евклідового простору  $\mathbf{R}^3$ . Кожна група симетрії поверхні у  $\mathbf{R}^3$  є підгрупою заданої групи рухів, а тому аналогічною групою володіє гранична задача теорії потенціалу і отримане еквівалентне інтегральне рівняння. Отже, можна стверджувати, що (6) володіє абелевою групою симетрії  $GR_{16}$ , що і треба було показати.

*Лему доведено.*

Елементи розглядуваної групи  $\tau_i (i = \overline{1, 16})$  можна подати матрицями:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \tau_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \tau_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \tau_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далі, легко підрахувати, що

$$\begin{aligned} \tau_1^{-1} &= \tau_1, \tau_2^{-1} = \tau_2, \tau_3^{-1} = \tau_3, \tau_4^{-1} = \tau_4, \tau_5^{-1} = \tau_6, \tau_6^{-1} = \tau_5, \tau_7^{-1} = \tau_8, \tau_8^{-1} = \tau_7, \tau_9^{-1} = \tau_9, \tau_{10}^{-1} = \tau_{10}, \tau_{11}^{-1} = \tau_{11}, \tau_{12}^{-1} = \tau_{12}, \\ \tau_{13}^{-1} &= \tau_{13}, \tau_{15}^{-1} = \tau_{15}, \end{aligned}$$

$$\tau_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_7^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_{14}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{16}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для подальшого перетворення (6) стає в нагоді таке твердження.

**Лема 2.** Система інтегральних рівнянь (6) допускає зображення

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint_{D_1} \sigma'_{ij}(u, v) \cdot \hat{K}[\tau_h^{-1} \cdot Q_1(u, v); \tau_{h'}^{-1} \cdot Q_1(u_0, v_0)] dudv = f'_{kl}(u_0, v_0), \quad (7)$$

де  $(u_0, v_0) \in D_1; k, l = \overline{1, 4}$ .

*Доведення.* Для отримання (7) здійснимо в (6) перехід до нового базису:

$$\sigma'_{ij}(u, v) := \sigma[\tau_h^{-1} \cdot Q_1(u, v)], (u, v) \in D_1; i, j = \overline{1, 4}; h = 4(i-1) + j;$$

$$f'_{kl}(u_0, v_0) := f_{kl}[\tau_{h'}^{-1} \cdot Q_1(u_0, v_0)], (u_0, v_0) \in D_1; k, l = \overline{1, 4}; h' = 4(k-1) + l.$$

Запроваджена таким чином “заміна змінних” дає можливість звести (6) до еквівалентної системи (7), де інтегрування здійснюється лише по конгруентній складовій межі, тобто  $S_{11}$ .

*Лемі доведено.*

Систему (7) зручно подати в такому матрично-операторному вигляді

$$(AG)(u_0, v_0) = \Psi(u_0, v_0), (u_0, v_0) \in D_1. \quad (8)$$

Тут  $A := (A_{hh'})_{h,h'=1}^{16}$  — матриця операторів;  $G(u, v) := [G_h(u, v)]_{h=1}^{16}$ ,  $\Psi(u_0, v_0) := [\Psi_{h'}(u_0, v_0)]_{h'=1}^{16}$  — стовпчики-функції такі, що  $G_h(u, v) := \sigma'_{ij}(u, v)$ ,  $\Psi_{h'}(u_0, v_0) := f'_{kl}(u_0, v_0)$ , а кожний з операторів  $A_{hh'}$  визначаємо за формулою

$$(A_{hh'}G_h)(u_0, v_0) := \iint_{D_1} G_h(u, v) \cdot \hat{K}[\tau_h^{-1} \cdot Q_1(u, v); \tau_{h'}^{-1} \cdot Q_1(u_0, v_0)] dudv. \quad (9)$$

Відомо [7], що характери групи  $\{e, \beta\}$  можна обчислити за формулою  $\chi^h(\beta^k) = e^{2\pi i k(h-1)/n}$  ( $k = 0, 1; h = 1, 2; n = 2$ ), де  $k$  — степінь перетворення  $\beta$ ,  $h$  — номер відповідного перетворення. Звідси таблиця характерів матиме вигляд

	$e$	$\beta$
$\chi^1$	1	1
$\chi^2$	1	-1

Для груп  $\{e, \tau_x\}$ ,  $\{e, \tau_y\}$ ,  $\{e, \tau_z\}$  таблиця характерів(матриця перетворення Фур'є) має вигляд  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , а оскільки група симетрії поверхні  $S$  є прямим добутком груп  $\{e, \beta\}$ ,  $\{e, \tau_x\}$ ,  $\{e, \tau_y\}$ ,  $\{e, \tau_z\}$ , то знайшовши прямий добуток відповідних чотирьох матриць перетворень Фур'є, отримаємо матрицю перетворення Фур'є, що відповідає  $GR_{16}$ :

$$F := (F_{hl})_{h,l=1}^{16} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі, використовуючи пряме і обернене перетворення Фур’є для розглядуваної групи шістнадцятого порядку, матрицю перетворення  $A$  у (8), з врахуванням (9), можна звести до діагонального вигляду, а систему інтегральних рівнянь (7) “розщепити” на шістнадцять незалежних рівнянь. На підставі проведених міркувань сформулюємо таку теорему.

**Теорема 1.** *Нехай система інтегральних рівнянь (7) володіє абелевою групою симетрії  $GR_{16}$ . Тоді її можна подати у вигляді*

$$(B_h \bar{G}_h)(u_0, v_0) = \bar{\Psi}_h(u_0, v_0) \quad (h = \overline{1, 16}; (u_0, v_0) \in D_1), \tag{10}$$

$$\bar{G}_h(u, v) := \sum_{s=1}^{16} F_{hs} \cdot G_s(u, v) \quad ((u, v) \in D_1), \quad \bar{\Psi}_h(u_0, v_0) := \sum_{s=1}^8 F_{hs} \Psi_s(u_0, v_0), \tag{11}$$

а  $B_h$  – елементи діагональної матриці  $F \cdot A \cdot F^{-1}$  операторів.

Розв’язавши послідовно шістнадцять інтегральних рівнянь (10), наближено, з можливим використанням методу колокації [8], знайдемо  $\bar{G}_h(u, v)$ . Далі, на основі (11), визначимо  $G_h(u, v) = \sigma'_{ij}(u, v)$ , що дозволяє обчислити потенціал у будь-якій точці  $P$  простору  $\mathbf{R}^3$  за формулою:

$$U(P) := \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint \sigma'_{ij}(u, v) \cdot \hat{K}[\tau_h^{-1} \cdot Q_1(u, v); P] dudv, \quad P \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}. \tag{12}$$

**1.1. Схема наближеного розв’язування двовимірних інтегральних рівнянь.** Нарешті зосередимо увагу на деяких аспектах чисельного розв’язування інтегральних рівнянь вигляду

$$\int_0^1 \int_0^A \sigma(u, v) \cdot \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_0, v_0), \tag{13}$$

де  $(u_0, v_0) \in (0, 1) \times (0, A)$ ,  $D(u, v)$  – гладка функція, а

$$R(u, v, u_0, v_0) := \left\{ [x(u, v) - x(u_0, v_0)]^2 + [y(u, v) - y(u_0, v_0)]^2 + [z(u, v) - z(u_0, v_0)]^2 \right\}^{1/2}.$$

Застосуємо метод колокації, обмежуючись кусково-постійною апроксимацією шуканої густини  $\sigma(u, v)$ . Для цього проведемо поділ області інтегрування на елементи

$$\Delta_{ij} := \left[ u_i - \frac{h_u}{2}, u_i + \frac{h_u}{2} \right] \times \left[ v_j - \frac{h_v}{2}, v_j + \frac{h_v}{2} \right], \quad \text{де } h_u = \frac{1}{N_u}, \quad h_v = \frac{1}{N_v}, \quad \text{а } u_i = (2 \cdot i - 1) \frac{h_u}{2}, \quad i = \overline{1, N_u},$$

$$v_j = (2 \cdot j - 1) \frac{h_v}{2}, \quad j = \overline{1, N_v}.$$

У відповідності з запровадженим поділом подамо (13) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \iint_{\Delta_{ij}} \sigma(u, v) \cdot \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_0, v_0).$$

Якщо  $(u, v) \in \Delta_{ij}$ , то за умов достатньої малості  $h_u$  і  $h_v$ ,  $\sigma(u, v) \approx \sigma(u_i, v_j)$ . Використовуючи позначення  $\sigma_{ij} := \sigma(u_i, v_j)$ , отримуємо наближений аналог (13)

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \sigma_{ij} \iint_{\Delta_{ij}} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_0, v_0),$$

де в якості  $(u_0, v_0)$  обираємо точки з множини  $\{(u_k, v_l)\}_{k=1, \overline{N_u}; l=1, \overline{N_v}}$ ,  $u_k = (2 \cdot k - 1) \frac{h_u}{2}$ ,  $v_l = (2 \cdot l - 1) \frac{h_v}{2}$ . Легко бачити, що тоді для знаходження наближених значень  $\sigma_{ij}$  шуканої густини необхідно розв'язати таку систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \sigma_{ij} \iint_{\Delta_{ij}} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_k, v_l), \quad k = \overline{1, N_u}, \quad l = \overline{1, N_v}.$$

Для надання цій системі канонічного вигляду використаємо позначення:  $n := (j - 1) \cdot N_u + i$ ,  $m := (l - 1) \cdot N_v + k$ . Тоді  $\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_n$ , а  $U_{kl} := U(u_k, v_l) \rightarrow U_m$ , причому  $n = \overline{1, N_u \cdot N_v}$ ;  $m = \overline{1, N_u \cdot N_v}$ .

Таким чином отримуємо систему рівнянь для знаходження  $\sigma_{(j-1) \cdot N_u + i}$  ( $i = \overline{1, N_u}, j = \overline{1, N_v}$ ):

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \sigma_{(j-1) \cdot N_u + i} \iint_{\Delta_{ij}} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_k, v_l)} dudv = U_{(l-1) \cdot N_v + k}, \quad k = \overline{1, N_u}, \quad l = \overline{1, N_v}.$$

Остання відрізняється від попередньої тим, що шукані величини  $\sigma_n$  і праві частини  $U_m$  є елементами двох одновимірних масивів розмірності  $N_u \cdot N_v$ . Ця обставина суттєво спрощує програмну реалізацію запровадженої методики. Матриця побудованої системи рівнянь за умови  $i = k$  і  $j = l$  містить подвійні невласні інтеграли. Розглянемо алгоритм наближеного обчислення таких інтегралів.

Не зменшуючи загальності, припустимо, що  $\Delta_0 := \left[ u_0 - \frac{h_u}{2}, u_0 + \frac{h_u}{2} \right] \times \left[ v_0 - \frac{h_v}{2}, v_0 + \frac{h_v}{2} \right]$ . Тоді типовим інтегралом, що вимагає наближеного обчислення, є такий

$$\iint_{\Delta_0} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv.$$

Враховуючи вигляд  $R(u, v; u_0, v_0)$  і можливість розвинення в ряд Тейлора функцій  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  і  $z(u, v)$  в околі точки  $(u_0, v_0)$ , подамо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{D(u, v)}{R(u, v; u_0, v_0)} = F(u, v; u_0, v_0) + \frac{D(u_0, v_0)}{\left[ (\text{sh}^2 u_0 + \text{ch}^2 u_0)(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{1/2}},$$

де  $F(u, v; u_0, v_0) = \frac{D(u, v)}{R(u, v; u_0, v_0)} - \frac{D(u_0, v_0)}{\left[ (\text{sh}^2 u_0 + \text{ch}^2 u_0)(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{1/2}}$ .

Тоді  $\iint_{\Delta_0} \frac{D(u_0, v_0)}{\left[ \left( \operatorname{sh}^2 u_0 + \operatorname{ch}^2 u_0 \right) (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{1/2}} dudv$  обчислюємо аналітично, використовуючи формулу

$$\int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{d}} \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{d}} \left[ (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{-1/2} dudv = \sum_{\left(\frac{a}{b}\right)} a \ln \left( \frac{d + \sqrt{d^2 + a^2}}{-c + \sqrt{c^2 + a^2}} \right) + \sum_{\left(\frac{c}{d}\right)} c \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{-a + \sqrt{a^2 + c^2}} \right),$$

де  $b := \bar{b} - u_0$ ,  $a := u_0 - \bar{a}$ ,  $d := \bar{d} - v_0$ ,  $c := v_0 - \bar{c}$ . У свою чергу, застосовуючи одну із кубатурних формул, інтеграл  $\iint_{\Delta_0} F(u, v; u_0, v_0) dudv$  обчислюємо наближено. При цьому виникає необхідність

обчислення  $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} F(u, v; u_0, v_0)$ . Легко показати, що границя функції  $F(u, v; u_0, v_0)$  при  $u \rightarrow u_0$  і

$v \rightarrow v_0$  є обмеженою величиною, тобто  $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} F(u, v; u_0, v_0) = 0$ .

**1.2. “Плоске” наближення суттєво просторової проблеми.** Нехай згадані вище поверхні  $S_i (i = \overline{1, 4})$  нескінченно довгі циліндричні, твірні яких нескінченно тонкі рівномірно заряджені по довжині нитки, паралельні до однієї із координатних осей (як у нашому випадку). Припустимо також, що згадані поверхні в перерізі з довільною площиною, перпендикулярною до цієї осі, утворюють деяку сукупність розімкнених дуг. Тоді значення потенціалу в довільній точці простору не залежить від однієї координати. Тому для розрахунку поля достатньо обчислити потенціал у довільній точці площини, тобто в просторі  $\mathbf{R}^2$  [9]. Таким чином можна запровадити математичну модель так званого “плоского” електростатичного поля, деталі дослідження якої висвітлені у роботах [10, 11].

Провівши ряд чисельних експериментів, було помічено, що в разі переважання однієї геометричної складової поверхні (вздовж осі  $OZ$ ) над іншими значення потенціалу в центральних поперечних перерізах сукупної поверхні  $S$  мало змінюється. На рис. 2 відображено швидкість зміни відповідної похибки  $E_A$ :

$$E_A := \|u_A - u_{2A}\| = \max_{1 \leq i \leq N} |u_A(P_i) - u_{2A}(P_i)|$$

між обчисленими значеннями потенціалу задачі (1) – (3) в площині  $z = 0$  у випадку дворазового збільшення розміру  $A$ . При цьому  $E_2 = 0,0353$ ,  $E_4 = 0,0166$ ,  $E_8 = 0,0093$ .

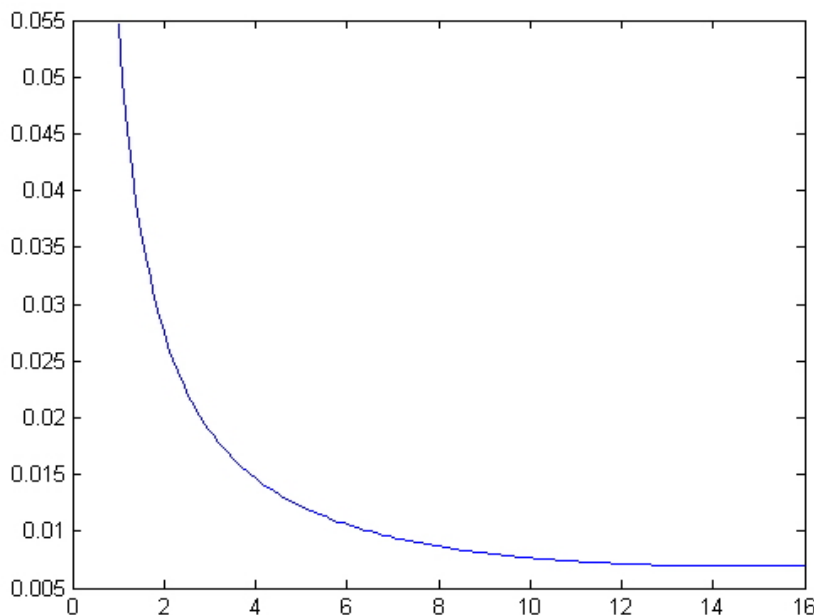


Рис. 2. Вплив збільшення розміру  $A$  на значення потенціалу в площині  $z = 0$

Отже, для з'ясування якісної картини поля в центральних поперечних перерізах квадрупольної системи, в якій явно переважає довжина над шириною у вісім і більше разів, можна обмежитись розв'язанням "плоскої" задачі. При цьому відносно проста "плоска" модель стає в нагоді для підтвердження достовірності результатів розв'язання задачі в суттєво просторовій постановці.

**1.3. Результати чисельного моделювання.** Для наочного зображення електростатичного поля розглядуваної квадрупольної системи на рис. 3 – 5 подано розрахований згідно формули (13) розподіл ліній рівного потенціалу у площині  $z=0$ , за умови  $A=1$  і відстані між поверхнями  $h=1$ . Допускаються різні значення потенціалу на електродах, а для наближеного розв'язання задачі використано кусково-постійну апроксимацію шуканої густини інтегрального рівняння при кількості  $n=100$ . Так, рис. 3 (випадок а)) відповідає таким значенням потенціалу на електродах  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$ . Аналогічно на рис. 4  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = -1$ ,  $f_3 = 1$ ,  $f_4 = -1$  – випадок б); на рис. 5  $f_1 = 10$ ,  $f_2 = 20$ ,  $f_3 = -100$ ,  $f_4 = 1$  – випадок в).

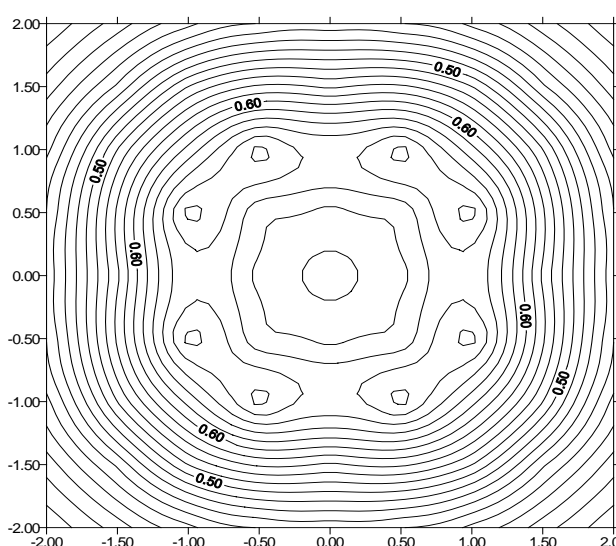


Рис. 3. Розподіл ліній рівня для випадку а)

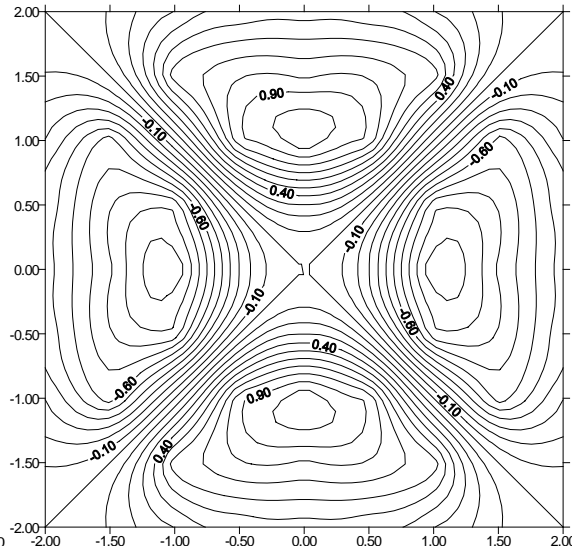


Рис. 4. Розподіл ліній рівня для випадку б)

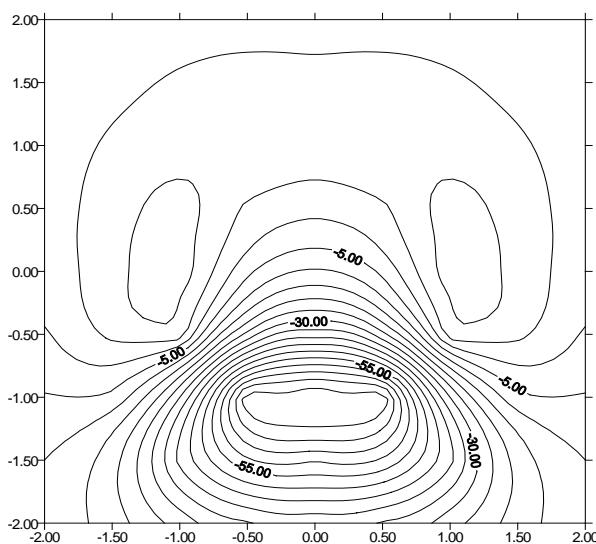


Рис. 5. Розподіл ліній рівня для випадку в)

Слід зауважити, що розподіл ліній рівного потенціалу відповідає фізиці досліджуваних електростатичних полів. Наприклад, на рис. 4, де задані антисиметричні граничні значення, фіксуємо явно виражені асимптоти, потенціал на яких рівний нулю.

Потенціал електростатичного поля (див. рис. 4) в деяких контрольних точках за умов  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = -1$ ,  $f_3 = 1$ ,  $f_4 = -1$ , при різних  $A$  і при кількості невідомих  $n=100$ , наведено в табл. 1. Для підтвердження достовірності отриманих результатів при розв'язанні задачі (1) – (3) в останньому стовпчику цієї таблиці наведені результати чисельного розв'язування відповідного плоского наближення деталі, дослідження якого висвітлені в роботі [10].

Таблиця 1

Потенціал електростатичного поля у точках площини  $z = 0$ 

$x$	$y$	$u (A = 1)$	$u (A = 2)$	$u (A = 4)$	$u (A = 8)$	“плоске” наближення
-0.500	-2.000	0.554533	0.569875	0.582992	0.585020	0.580110
-0.500	-1.500	0.793349	0.807748	0.817789	0.821019	0.819194
-0.500	-1.000	0.723583	0.739573	0.744598	0.747684	0.743894
-0.500	-0.500	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.500	0.000	-0.225466	-0.244789	-0.250436	-0.252070	-0.247042
0,000	-1,000	0.979874	0.988285	0.990054	0.990136	0.986836
0,000	-0.500	0.225466	0.244789	0.250436	0.252070	0.247042
1.000	-0.500	-0.723583	-0.739573	-0.744598	-0.747684	-0.743894
1.000	0.000	-0.979874	-0.988285	-0.990054	-0.990136	-0.986836
1.000	0.500	-0.723583	-0.739573	-0.744598	-0.747684	-0.743894
2.000	-1.500	-0.130574	-0.165877	-0.182457	-0.191768	-0.195074

Слід зауважити, що з метою значного скорочення часу розв'язання задачі в цілому ефективно використовувати автоматичне розпаралелення програми за допомогою інтерфейсу *OpenMP* на багатоядерних персональних комп'ютерах [12, 13].

#### Висновки

На прикладі однієї модельної задачі, не зменшуючи загальності, продемонстровано методику розв'язування окремих класів суттєво просторових задач електростатики з максимальним врахуванням наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь. Переваги такої методики очевидні:

- зменшення оперативної пам'яті комп'ютера при формуванні системи лінійних алгебричних рівнянь, яка апроксимує відповідне операторне рівняння, у 256 разів;
- можливість уникнення числової нестійкості, яка може виникати при непомірному збільшенні розв'язуваних систем.

Встановлено усі передумови до можливого розпаралелення процедури розв'язування задачі в цілому. Досліджено умови трактування просторової задачі як плоскої. А також показано, як запропонований підхід дозволяє враховувати сингулярну поведінку шуканої густини в околі кутових точок розімкнених поверхонь і при підході до контуру обмежуючись її контролем лише в одній особливій точці, а не в шістнадцяти. Усі переваги розглянутої методики отримали своє підтвердження шляхом чисельних експериментів.

#### Список використаної літератури

1. Швець Є.Я. Вакуумна та плазмова електроніка Частина 2. Електронно-променеві прилади. / Є.Я. Швець, А.В. Юдачов, М.М. Турба // Навчально-методичний посібник. – Запоріжжя: Видавництво ЗДІА, 2010 р. – 127 с.
2. Абрамович С.Н. Оптимизация зондоформирующей системы ядерного сканирующего микронзонда на базе электростатического перезарядного ускорителя ЭПП-10./ С.Н. Абрамович, Н.В. Завьялов, А.Г. Звенигородский, И.Г. Игнатьев, Д.В. Магилин, К.И. Мельник, А.Г. Пономарев // Журнал технической физики. – 2005. – том 75, вып. 2. – С. 6-12.
3. Гладков В.С. Дослідження експериментального зразка установки очищення трансформаторного масла. / В.С. Гладков, О.А. Гученко, О.В. Шестеріков // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 39. – С. 46-50.
4. Захаров Е.В. Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала. / Е.В. Захаров, С.И. Сафронов, Р.П. Тарасов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1992. — Т. 32, № 1. — С. 40–58.
5. Lions J.-L. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications. / J.-L. Lions, E. Magenes — Dunod. Paris. — 1968. — Vol. 1.
6. Sybil Yu.M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface. / Yu.M. Sybil // Матем. студії. — 1997. — Т. 8, № 2. — С. 79–96.
7. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. / Ж.-П. Серр. – М: РХД, 2003. – 132 с.



8. Garasym Ya.S., Ostudin B.A. On numerical approach to solve some three-dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method. // Журн. обчисл. та прикл. математики. 2003. № 1 (88). С. 17–28.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
10. Мочурад Л.І. Запровадження ефективної методики до числового розв'язування одного класу краєвих задач теорії потенціалу. / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник наукових праць "Математичне та комп'ютерне моделювання". Серія: Технічні науки. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2009. — Вип. 2. — С. 105-118.
11. Mochurad L.I. Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information. / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2011. — №2(105). — P. 98-110.
12. Мочурад Л. Розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики, які мають абелеві групи симетрії скінченних порядків. / Л. Мочурад // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2013. — Вип. 20. — С. 34-41.
13. Voss M.J. OpenMP share memory parallel programming. / M.J. Voss. — Toronto, Canada, 2003. — 270 p.

УДК 532.593

В.П. НАГОРНИЙ, І.І. ДЕНИСЮК  
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛЯ ШВИДКОСТЕЙ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ У  
ФІЛЬТРАЦІЙНИХ КАНАЛАХ НАФТОНОСНОГО ПЛАСТА ПІД ДІЄЮ  
ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ**

*Стаття присвячена пульсуючим рухам в'язкої рідини, які супроводжуються хвилями стискування–розрідження і знакозмінними фільтраційними потоками в каналах фільтрації нафтоносних пластів*

*Ключові слова: гармонічна дія, канал, пласт, рідина, частота.*

В.П. НАГОРНИЙ, И.И. ДЕНИСЮК  
Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В  
ФИЛЬТРАЦИОННЫХ КАНАЛАХ НЕФТЕНОСНОГО ПЛАСТА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ  
ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН**

*Статья посвящена пульсирующим движениям вязкой жидкости, сопровождающимся волнами сжатия–разрежения и знакопеременными фильтрационными потоками в каналах фильтрации нефтеносных пластов.*

*Ключевые слова: гармоническое воздействие, жидкость, канал, пласт, частота.*

V.P. NAGORNYI, I.I. DENYSYUK  
National Academy of Sciences of Ukraine Subbotin Institute of Geophysics**MATHEMATICAL MODELING OF VELOCITY FIELD IN THE VISCOUS FLUID FILTRATION  
CHANNELS OF OIL-BEARING LAYER UNDER THE ACTION OF HARMONIC WAVES**

*The article is devoted to the pulsing movement of viscous fluids accompanied by compression-stretching waves and alternating filtering flows in the filtering channels of the oil layers*

*Key words: channel, frequency, harmonic action, layer, liquid*

**Постановка проблеми**

Дослідження поля швидкостей в'язкої рідини у фільтраційних каналах нафтоносного пласта при обробленні його гармонічними хвилями мають важливе наукове та прикладне значення, зокрема, в нафтогазовій галузі для розробки перспективних методів підвищення продуктивності видобувних свердловин.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Акустична обробка нафтоносних пластів є одним із ефективних методів підвищення нафтовилучення із них [1–10]. При цьому значна частина досліджень [1, 2, 5–10] в цьому напрямі стосується впливу пружних коливань на зміну фільтраційних характеристик середовища продуктивних пластів. Аналіз приведених літературних джерел також показує, що при виборі частотного діапазону хвильової обробки нафтоносних пластів недостатньо уваги приділяється полю швидкостей руху флюїдів, що в значній мірі визначає швидкість просування їх до вибою видобувних свердловин.

**Мета дослідження**

З метою вибору найбільш ефективного режиму імпульсного навантаження в статті викладені результати теоретичних досліджень пульсуючого руху в'язкої рідини (флюїду) в порових каналах нафтогазоносного пласта, який виникає під дією перепаду тиску, що змінюється за гармонічним законом.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Отже, розглянемо нестационарний рух в'язкої рідини в циліндричних каналах круглого перерізу, що описується рівнянням [11]

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{\rho} f(t), \quad (1)$$

де  $v$  – швидкість руху в'язкої рідини;  $\nu$  – кінематична в'язкість рідини;  $\rho$  – густина рідини;  $r$  – змінний радіус порового каналу.

Проінтегруємо рівняння (1) за граничної умови  $v = 0$  при  $r = a$  ( $a$  – радіус порового каналу) і

початкової умови  $v = v_0(r)$  при  $t = 0$  (у випадку вісесиметричного руху).

Розглянемо усталений пульсуючий рух, що відповідає гармонічному закону зміни перепаду тиску в поровому каналі  $f(t) = \rho A \cos \omega t$ , де  $A = \Delta p / (\rho l)$  – перепад тиску на довільно вибраному проміжку порового каналу довжиною  $l$ .

Застосовуючи до рівняння (1) метод Фур'є (метод розділу змінних [12]) представимо його розв'язок, що визначає розподіл поля швидкостей в поровому каналі радіуса  $a$ , у вигляді

$$\frac{v(r,t)}{(A/\omega)} = \left(1 - \frac{k_1 + k_2}{k^2}\right) \sin \omega t + \left(\frac{k_3 - k_4}{k^2}\right) \cos \omega t, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{де } k_1 &= \text{bei}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) \text{bei}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right); \quad k_2 = \text{ber}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) \text{ber}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right); \quad k_3 = \text{bei}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) \text{ber}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right); \\ k_4 &= \text{ber}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) \text{bei}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right); \quad k^2 = \text{ber}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) + \text{bei}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right); \end{aligned} \quad (3)$$

$\text{ber}$  і  $\text{bei}$  – функції Кельвіна.

Вираз (2) представимо через одну тригонометричну функцію

$$\frac{v(r,t)}{(A/\omega)} = v_0 \sin(\omega t + \theta), \quad (4)$$

де

$$v_0 = \sqrt{p^2 + q^2}; \quad \sin \theta = \frac{q}{v_0}; \quad p = \frac{k^2 - (k_1 + k_2)}{k_2}; \quad q = \frac{k_3 - k_4}{k^2}. \quad (5)$$

Вираз  $p^2 + q^2$  представимо у вигляді

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{k^2} \left[ k^2 + \text{bei}^2\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) + \text{ber}^2\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) - 2(k_1 + k_2) \right] = \frac{1}{k^2} \left[ k^2 + k_r^2 - 2(k_1 + k_2) \right], \quad (6)$$

де

$$k_r^2 = \text{bei}^2\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) + \text{ber}^2\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right). \quad (7)$$

Таким чином, із урахуванням (6), (7) та позначень (3) поле швидкостей (4) розраховується за такими виразами

$$\frac{v(r,t)}{(A/\omega)} = v_0(r) \sin(\omega t + \theta(r)), \quad (8)$$

де

$$v_0(r) = \sqrt{\frac{k^2 + k_r^2 - 2(k_1 + k_2)}{k^2}}; \quad \sin \theta(r) = \frac{k_3 - k_4}{\sqrt{k^2(k^2 + k_r^2 - 2(k_1 + k_2))}}. \quad (9)$$

Із виразу (8) видно, що поле швидкостей визначається коефіцієнтом  $v_0(r)$ , який залежить від

параметрів  $a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ ,  $r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ . Проведемо дослідження коефіцієнта  $v_0(r)$  при заданому радіусі порового каналу радіуса  $a$  в залежності від кругової частоти  $\omega$ .

Із використанням виразів (8), (9) проведені розрахунки та побудовані криві зміни коефіцієнта  $v_0$  при  $r=0$  від частоти гармонічної дії  $f$  при різних значеннях радіуса  $a$  порового каналу (рис. 1) та коефіцієнта  $v_0(r)$  за різних відстаней від осі каналу (рис. 2).

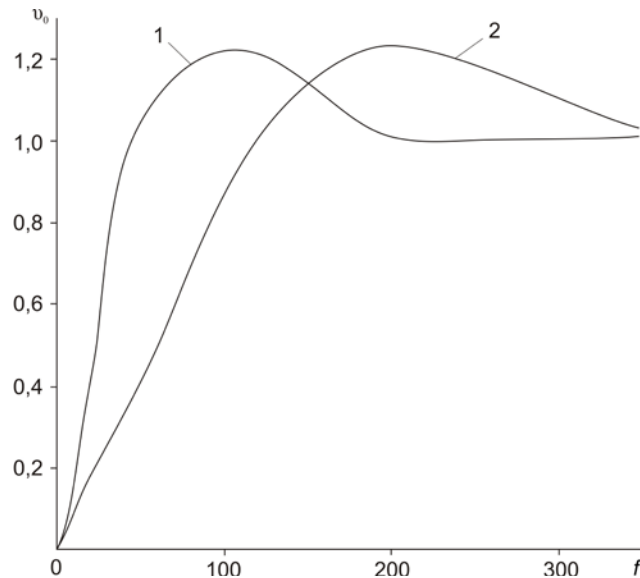


Рис. 1. Залежності коефіцієнта  $v_0$  від частоти  $f$ :  
 1 -  $a = 2,5 \cdot 10^{-4}$  м; 2 -  $a = 12,5 \cdot 10^{-5}$  м

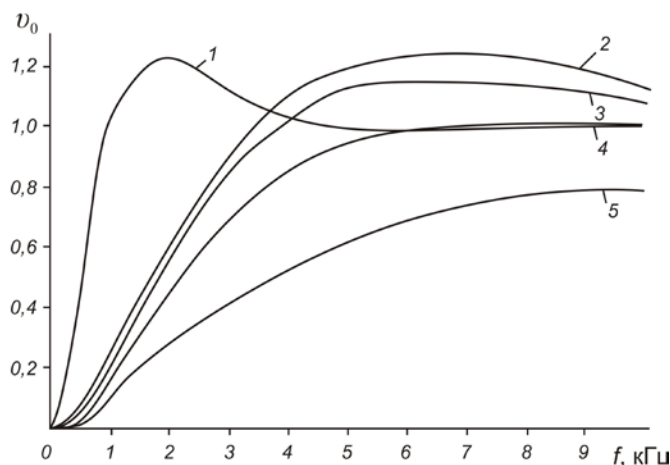


Рис. 2. Залежності коефіцієнта  $v_0(r)$  від частоти  $f$  за різних відстаней від осі порового каналу:  
 1 -  $r = 0$ ,  $a = 2,5 \cdot 10^{-5}$  м; 2 -  $r = 0$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$  м; 3 -  $r_1 = 0,25a$ ,  
 4 -  $r_2 = 0,5a$ , 5 -  $r_3 = 0,75a$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$  м

Із рис. 1 і рис. 2 видно, що радіус  $a$  порового каналу суттєво впливає на величину коефіцієнта  $v_0$  в залежності від частоти  $f$ . Для порових каналів радіуса  $2,5 \cdot 10^{-4}$  м оптимальною (з метою досягнення найбільш високих значень  $v_0$ ) є хвильова обробка в діапазоні частот 50-200 Гц; радіуса  $12,5 \cdot 10^{-5}$  м – 125-400 Гц (рис. 1); радіуса  $2,5 \cdot 10^{-5}$  м – 1 000-4 500 Гц; радіуса  $1,0 \cdot 10^{-5}$  м – 3 500-10 000 Гц (рис. 2).

Щоб мати уявлення про характер зміни поля швидкостей по перерізу порового каналу з часом, на рис.

3 представлені, розраховані за виразами (8), (9), епюри динаміки поля швидкостей по перерізу порового каналу радіуса  $a = 2,5 \cdot 10^{-4}$  м для частот  $f = 100$  Гц (рис. 3, а),  $f = 200$  Гц (рис. 3, б),  $f = 2000$  Гц (рис. 3, в),  $f = 4350$  Гц (рис. 3, г).

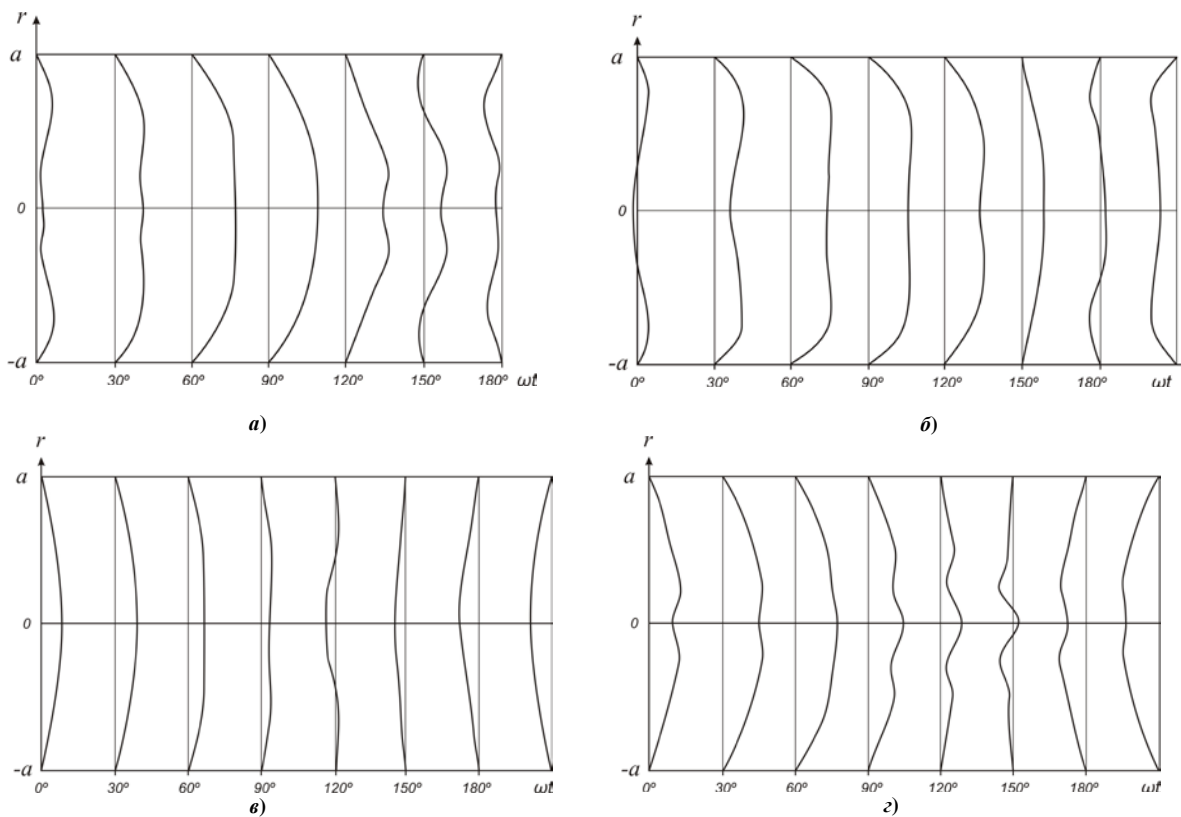


Рис. 3. Динаміка зміни безрозмірних коефіцієнтів  $\frac{v(r,t)}{(A/\omega)}$  за різних частот  $f$  для відстаней  $r_1 = 0,25a$ ;  $r_2 = 0,5a$ ;  $r_3 = 0,75a$  від осі порового каналу

З приведених епюр видно, що за гармонічної дії в перерізі порового каналу виникають обернені пульсуючі течії. Спостерігається також підвищені швидкості в пристінних областях порового каналу порівняно з областю поблизу осі каналу.

#### Висновки

При гармонічній дії на поровий канал швидкість руху в'язкої рідини в каналі досягає найбільших значень в певному діапазоні частот в залежності від радіуса порового каналу. Пульсуючий рух в'язкої рідини в порових каналах супроводжується хвилями стискування–розрідження і знакозмінними фільтраційними потоками, що може бути використано при розробці перспективних методів підвищення просування в'язкої рідини до вибою свердловини.

#### Список використаної літератури

1. Афанасенков И.И. Опыт и перспективы промышленного использования акустического воздействия в различных скважинах / И.И. Афанасенков, Е.Ф. Жуйков // Нефтяное хозяйство. – 1999. – № 12. – С. 16–19.
2. Войтенко В.С. Волновая обработка коллекторов нефти и газа / В.С. Войтенко, В.Н. Иовец, А.М. Киреев, Ю.В. Семенов // Минск: Юнипак. – 2005. – 253 с.
3. Горбачев Ю.И. Физико-химические основы ультразвуковой очистки призабойной зоны нефтяных скважин / Ю.И. Горбачев // Геоинформатика. – 1998. – №3. – С. 62–65.
4. Горбачев Ю.И. Акустическое воздействие и повышение рентабельности разработки нефтяных месторождений / Ю.И. Горбачев // Каротажник. – 1999. – Вып. 60. – С. 55–67.
5. Нагорний В.П. Динамічні процеси в геофізичних середовищах: теорія, експеримент, технології / В.П. Нагорний, С.В. Микуляк, Д.Б. Венгрович та ін. – К.: Інтерсервіс, 2016. – 244 с.
6. Нагорний В.П. Імпульсні методи інтенсифікації видобутку вуглеводнів / В.П. Нагорний, І.І. Денисюк. – К: Ессе, 2012. – 323 с.

7. Нагорний В.П. Підвищення нафтогазовіддачі пластів шляхом акустичної дії / В.П. Нагорний, І.І. Денисюк, Я.О. Юшичина // *Геоінформатика*. – 2012. – № 4. – С. 19–21.
8. Нагорний В.П. Перспективи застосування амплітудно-модульованих хвиль для підвищення дебіту видобувних свердловин / В.П. Нагорний, І.І. Денисюк, В.М. Ліхван // *Нафтогазова галузь України*. – 2014. – № 5. – С. 22–26.
9. Кучернюк А.В. Комплексні технології ударно-хвильової дії на продуктивні горизонти як інструмент підвищення ефективності експлуатації нафтових родовищ / А.В. Кучернюк // *Нафтова і газова промисловість*. – 2003. – № 5. – С. 23–27.
10. Кузнецов О.Л. Применение ультразвука в нефтяной промышленности / О.Л. Кузнецов, С.Ф. Ефимова. – М.: Недра, 1983. – 192 с.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
12. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

УДК 519.28:620.179

В.О. ПАЩЕНКО

Дніпровський національний університет

**МОДЕЛЮВАННЯ СИЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСТАЦІОНАРНОГО ПОЛЯ  
ЕЛІПСОПОДІБНОГО СТРУМОВОГО КОНТУРУ  
НАД ОРТОТРОПНИМ ПАРАМАГНІТНИМ КОМПОЗИТОМ  
З ДИСИПАТИВНИМИ ВТРАТАМИ**

*Методом граничних елементів у змішаних безрозмірних координатах промодельоване становлення нормованої електричної напруженості лінійно-зростаючого збурення в повітрі – над тріщиною в плоскій поверхні ортотропного парамагнітного композита з тепловими втратами. У разі зворотної пропорційності його провідностям як напівосей еліпсоподібного контуру, так і масштабів за осями абсцис, ординат й аплікату та часу, обґрунтована можливість ізотропного підходу до електромагнітної дефектоскопії ортотропних композитів. Як міра конструкційної загрози оцінені розміри тріщини за допомогою просторово-часового аналізу даних на перетині таких площин: симетрії тріщини та паралельної поверхні композита.*

*Ключові слова: електромагнітна дефектоскопія, ортотропні парамагнітні композити, дисипація, тріщина, безрозмірні координати, метод граничних елементів.*

В.А. ПАЩЕНКО

Дніпровський національний університет

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ  
ЕЛЛИПСОПОДОБНОГО ТОКОВОГО КОНТУРА  
НАД ОРТОТРОПНЫМ ПАРАМАГНИТНЫМ КОМПОЗИТОМ  
С ДИССИПАТИВНЫМИ ПОТЕРЯМИ**

*Методом граничных элементов в смешанных безразмерных координатах моделируется становление нормированной электрической напряженности линейно-нарастающего возбуждения в воздухе – над трещиной в плоской поверхности ортотропного парамагнитного композита с тепловыми потерями. В случае обратной пропорциональности его проводимостям как полуосей эллипсоподобного контура, так и масштабов по осям абсцис, ординат, аппликату и времени, обоснована целесообразность изотропного подхода к электромагнитной дефектоскопии ортотропных композитов. Как мера конструкционной угрозы оценены размеры трещины с помощью пространственно-временного анализа данных на пересечении таких плоскостей: симметрии трещины и параллельной поверхности композита.*

*Ключевые слова: электромагнитная дефектоскопия, ортотропные парамагнитные композиты, диссипация, трещина, безразмерные координаты, метод граничных элементов.*

V.O. PASHCHENKO

Dnipro national university

**THE MODELLING OF POWER-TYPE CHARACTERISTICS  
OF NONSTATIONARY FIELD OF ELLIPTIC CONTOUR  
ABOVE THE ORTOTROPIC PARAMAGNETIC COMPOSITE  
WITH DISSIPATIVE LOSS**

*By the boundary elements method in mixed dimensionless coordinates the becoming of reduced electrical intensity of linearly-increasing excitation has been modeled in the air – above the crack in a plane surface of the orthotropic paramagnetic composite with dissipative loss. In case of inverse proportionality to its conductivities both elliptic contour halfaxis and scales of abscissa, ordinate, applicate and time it has based an expediency of the isotropic approach to the electromagnetic defectoscopy of orthotropic composites. As a measure of the constructions danger the crack size has been estimated by the spatial-temporary analysis of data located on intersection of such planes: crack symmetry one and one that is parallel to the composite surface.*

*Keywords: electromagnetic defectoscopy, orthotropic paramagnetic composites, dissipative loss, crack, dimensionless coordinates, boundary elements method.*

**Постановка проблеми**

По відношенню до орієнтації односпрямованого армування *композити* володіють симетрією характеристик і властивостей, зокрема, електропровідності, а тому називаються *ортотропними* (ортогонально-анізотропними)[1]. Провідності вздовж і поперек (джгутів) волокнин вуглецевих композитів відрізняються не більше ніж у декілька разів[1, 2].

Основні дефекти структури ортотропних композитів – розриви (джгутів) волокнин, котрі уявляють найбільшу загрозу цілісності виробу в разі розташування на його поверхні, при досягненні критичних розмірів. Вимоги до надійності обумовлюють регулярне проведення неруйнівного контролю[3], який при зберіганні й експлуатації доцільніше здійснювати електромагнітним методом, що забезпечує простоту й локальність процедури, оперативність і реалізованість у труднодоступних місцях. Розриви волокнин погіршують уздовжню провідність, що й ідентифікує поперечну тріщину.

Зондувальне поле в діапазоні до 0.5 ГГц збудується еліпсоподібним контуром, напівосі якого (рис.1) зворотно-пропорційні провідностям композита вздовж і поперек напрямку армування:

$$a = k/\sigma_x, \quad b = k/\sigma_y, \quad (k - \text{константа}) \tag{1}$$

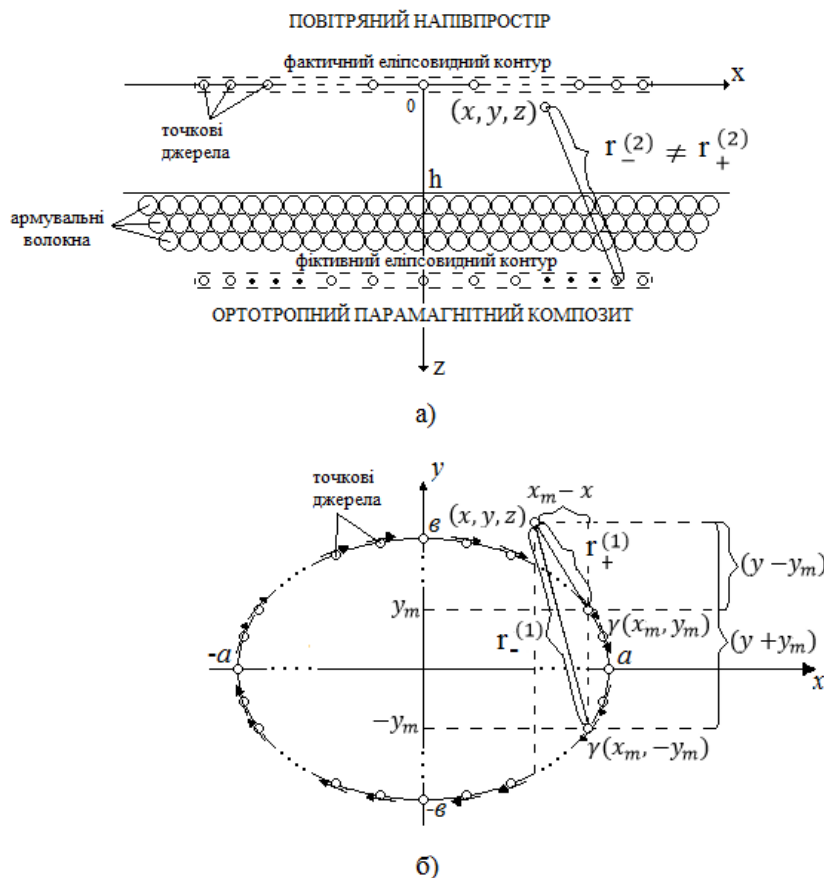


Рис. 1. Точкові джерела еліпсоподібного контуру стороннього струму над плоскою неушкодженою поверхнею ортотропного композита: а) вигляд спереду з поперечним перетином волокнин; б) вигляд зверху

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Серед підходів до математичного моделювання просторово-часових розподілень електромагнітних полів[4] чільне місце займає метод *граничних елементів* (МГЕ)[5-6], котрий використовує вимірність розв’язуваної задачі, меншу на одиницю, коли обчислення виконуються лише на частині границі, а не в усій області дослідження, зокрема, безконечній, — як у разі метода скінчених елементів[7]. Необхідна умова застосування МГЕ – перехід від змішаної крайової задачі для диференціальних рівнянь до відповідних граничних інтегральних розв’язків. Тому, на відміну від методів скінчених різниць і елементів, МГЕ використовує інтегрування замість чисельного диференціювання, що зменшує інтенсивність шуму округлення, підвищує точність і ефективність обчислень.

Непрямий варіант МГЕ використовує інтегральний вираз щодо фундаментального розв’язку відповідного диференціального рівняння[6]. Для хвильового рівняння такий інтегральний вираз є потенціалом поодинокого шару[8], котрий відмінний від нуля в області, що розширюється з часом, і задається густиною стороннього струму еліпсоподібного контуру. Фундаментальний розв’язок – це функція Гріна для необме-



женої області, тому початкові й граничні умови можна замінити системою точкових джерел[9], для яких розв'язується вихідна задача; її загальний розв'язок є суперпозицією елементарних розв'язків.

Для розширюваної з часом області присутності нестационарного електромагнітного поля в повітрі, над плоскою поверхнею ортотропного композита, отримані в [10] аналітичні просторово-часові розподілення  $x$ - і  $y$ -проекцій векторного потенціалу точкового джерела стороннього струму. Виходячи з них, в [11] знайдено аналітичний вираз для просторово-часового розподілення  $x$ -,  $y$ -проекцій електричної напруженості над плоскою поверхнею ортотропного композита.

Перехід до змішаних безрозмірних координат дозволяє приховати фізичні константи в виразах для кроків дискретизації, а тому створити умови для зведення ортотропної задачі до ізотропної, а також коректно здійснити дискретизацію процесу моделювання та співмірити подання просторово-часових даних. До того ж виникають підстави для подання еліпсоподібного контуру кругловидною множиною точкових джерел.

**Формулювання цілі дослідження.**

Вдосконалити непрямий варіант МГЕ для застосування в змішаних безрозмірних координатах ізотропного підходу до моделювання процесу оцінювання тріщини ортотропного композита за допомогою аналізу значень приведеної електричної напруженості в повітрі.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Отримаємо аналітичні вирази для тангенціальних проекцій векторного потенціалу, створеного в  $(x, y, z \leq h)$ -точці повітряного напівпростору нестационарним стороннім струмом густини  $j(t) = j_0 \cdot f(t)$ , де  $j_0$  – амплітуда, а  $f(t)$  – обвідна ( $|f(t)| \leq 1$ ), котрий тече вздовж еліпсоподібного контуру  $\sigma_x^2 x^2 + \sigma_y^2 y^2 = k^2$ . Площина контуру паралельна плоскій неушкодженій поверхні композита, від якого віддалена зазором  $h$ . Як і координатні осі абсцис і ординати, напівосі  $a$  і  $b$  еліпсоподібного контуру орієнтовані, відповідно, поперек і вздовж напрямку армування (рис 1). Кожне точкове джерело стороннього струму, яке належить верхній (чи нижній) половині еліпсоподібного контуру, маючи координати  $(x_m, y_m, 0)$  (чи  $(x_m, -y_m, 0)$ ), де  $x_m \in [-a, a]$ , а  $y_m \in [0, b]$ , створює елементарний векторний потенціал із тангенціальними проекціями

$$a_{x,y}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} F_{x,y}(x_m, \pm y_m) \left[ \frac{f\left(t - \frac{r_{\pm}^{(2)}}{c}\right)}{r_{\pm}^{(2)}} - \frac{1}{r_{\pm}^{(2)}} \int_{r_{\pm}^{(2)}/c}^t \frac{H_{x,y}^R(\tau - r_{\pm}^{(2)}/c) df(t - \tau)}{c} \right], \quad (1)$$

де  $\mu_0$  і  $c$  – магнітна проникність і швидкість розповсюдження поля в повітрі;  $t$  і  $\tau$  – поточний час і його затримка;  $m \in [-M, M]$ ;

$$F_x(x_m, \pm y_m) = \cos \gamma(x_m, \pm y_m), \quad F_y(x_m, \pm y_m) = \sin \gamma(x_m, \pm y_m), \quad (2)$$

причому

$$\gamma(x_m, \pm y_m) = \arctg \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_m} = \mp \arctg \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \frac{\sigma_x x_m / k}{\sqrt{1 - (\sigma_x x_m / k)^2}} \quad (3)$$

– кути між віссю абсцис і дотичною до еліпсоподібного контуру  $y = \sqrt{k^2 - \sigma_x^2 x_m^2} / \sigma_y$  в його  $(x_m, y_m, 0)$ - і  $(x_m, -y_m, 0)$ -точках;

$$r_{\pm}^{(1)}((x_m, \pm y_m)) = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y \mp y_m)^2 + z^2}, \quad r_{\pm}^{(2)}((x_m, \pm y_m)) = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y \mp y_m)^2 + (2h - z)^2}, \quad (4)$$

– віддаленості  $(x, y, z \leq h)$ -точки повітряного напівпростору від фактичного та фіктивного точкових джерел із координатами, відповідно:

- а)  $(x_m, y_m, 0)$  та  $(x_m, y_m, 2h)$  у разі верхньої половини еліпса;
- б)  $(x_m, -y_m, 0)$  та  $(x_m, -y_m, 2h)$  для нижньої половини еліпса.

Характеристика відбиття ортотропного парамагнітного композита з тепловими втратами задається наступними аналітичними виразами для її  $x$ -,  $y$ -проекції:

$$H_{x,y}^R\left(\tau - \frac{r_{\pm}^{(2)}}{c}\right) = \frac{2U\left(\tau - \frac{r_{\pm}^{(2)}}{c}\right)}{I_0 \sqrt{-i \frac{\sigma_{x,y}}{\pi \varepsilon_0 c} \left[ I_0^2 \int_0^{ct} I_0(d_{x,y}, \rho) d\rho - r_{\pm}^{(2)} \right]}} \quad (5)$$

де  $U(\tau)$  – симетрична ступінчаста функція:

$$U(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau > 0 \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0; \\ 0, & \text{если } \tau < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$\sigma_{x,y}$  – питома електропровідність композита вздовж  $x$ -,  $y$ -координати,  $\varepsilon_0$  – діелектрична проникність повітря, а модифікована функція Беселя 0-го порядку уявної змінної

$$I_0(\sqrt{-i} V_{x,y}) = \text{ber}(V_{x,y}) - i \cdot \text{bei}(V_{x,y}), \quad (7)$$

має в якості дійсної й уявної частин функції Кельвіна 0-го порядку:

де 
$$V_{x,y} = \sqrt{\frac{\sigma_{x,y}}{\pi \epsilon_0 c} \left[ \int_0^{ct} I_0(d_{x,y} \rho) d\rho - r_{\pm}^{(2)} \right]}, \tag{8}$$

причому 
$$\int_0^{ct} I_0(d_{x,y} \rho) d\rho \cong \tau_{x,y} \left\{ 1 + \frac{1}{12} (\Delta_{x,y}^t \cdot c \cdot d_{x,y} \cdot \tau_{x,y})^2 + \frac{1}{320} (\Delta_{x,y}^t \cdot c \cdot d_{x,y} \cdot \tau_{x,y})^4 \right\}; \tag{9}$$
  

$$\left( \Delta_{x,y}^t = \frac{4\pi \epsilon_0}{\sigma_{x,y}}; \tau_{x,y} = \frac{t}{\Delta_{x,y}^t} \right);$$

Тому дійсна й уявна складові x-, y-проекції характеристики відбиття задаються такими виразами[12]:

$$Re \left\{ H_{x,y}^R \left( t - \frac{r_{x,y}^{(2)}}{c} \right) \right\} = 1 - \frac{2berV_{x,y}}{ber^2V_{x,y} + bei^2V_{x,y}}, \tag{9}$$

$$Im \left\{ H_{x,y}^R \left( t - \frac{r_{x,y}^{(2)}}{c} \right) \right\} = - \frac{2beiV_{x,y}}{ber^2V_{x,y} + bei^2V_{x,y}}, \tag{10}$$

причому аргумент  $V_{x,y}$  визначається виразом (8).

x- й y-проекції векторного потенціалу еліпсоподібного контуру можна апроксимувати різницями відповідних проекцій елементарних вектор-потенціалів токових джерел верхньої й нижньої половин еліпса, в яких сторонній струм тече в протилежних напрямках:

$$A_x(x, y, z, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \sum_{m=-M}^M \Delta x_m \times \left\{ F_x(x_m, y_m) \left[ \frac{f(t-r_+^{(2)}/c)}{r_+^{(2)}} - \frac{1}{r_+^{(2)}} \int_{r_+^{(2)}/c}^t H_x^R(\tau - r_+^{(2)}/c) \cdot df(t-\tau) \right] - F_x(x_m, -y_m) \left[ \frac{f(t-r_-^{(2)}/c)}{r_-^{(2)}} - \frac{1}{r_-^{(2)}} \int_{r_-^{(2)}/c}^t H_x^R(\tau - r_-^{(2)}/c) \cdot df(t-\tau) \right] \right\}, \tag{11}$$

$$A_y(x, y, z, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \sum_{m=-M}^M \Delta y_m \times \left\{ F_y(x_m, y_m) \left[ \frac{f(t-r_+^{(2)}/c)}{r_+^{(2)}} - \frac{1}{r_+^{(2)}} \int_{r_+^{(2)}/c}^t H_y^R(\tau - r_+^{(2)}/c) \cdot df(t-\tau) \right] - F_y(x_m, -y_m) \left[ \frac{f(t-r_-^{(2)}/c)}{r_-^{(2)}} - \frac{1}{r_-^{(2)}} \int_{r_-^{(2)}/c}^t H_y^R(\tau - r_-^{(2)}/c) \cdot df(t-\tau) \right] \right\}. \tag{12}$$

У разі параметричного завдання еліпса:

$$x = \frac{k}{\sigma_x} \cos \gamma, \quad y = \frac{k}{\sigma_y} \sin \gamma,$$

його рівняння максимально спрощується  $\Phi : \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1$ , а кути (3) між віссю абсцис і дотичними складають  $\gamma = \mp \arctg \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \operatorname{ctg} \gamma \right)$ . Диференціали незалежних змінних x й y записуються таким чином:

$$dx_m = \frac{k}{\sigma_x} \sin \gamma \cdot d\gamma, \quad dy_m = \frac{k}{\sigma_y} \cos \gamma \cdot d\gamma. \tag{13}$$

При зміні  $\gamma$  від  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  здійснюється одночасний обхід як верхньої, так і нижньої половини еліпса, причому зліва на право. Тоді рівності (2) приймають вигляд:

$$F_x(x_m, y_m) = \cos \left[ \arctg \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \operatorname{ctg} \gamma \right) \right], \quad F_y(x_m, y_m) = \mp \sin \left[ \arctg \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \operatorname{ctg} \gamma \right) \right], \tag{14}$$

Використовуємо щодо формул (2) такі тригонометричні тотожності:

$$\cos \left[ \mp \arctg \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \operatorname{ctg} \gamma \right) \right] = \cos \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \operatorname{ctg} \gamma \right) \right] = \pm \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}}, \tag{15}$$

$$\sin \left[ \mp \arctg \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \operatorname{ctg} \gamma \right) \right] = \mp \sin \left[ \arcsin \frac{\sigma_x \operatorname{ctg} \gamma}{\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}} \right] = \mp \frac{\sigma_x \operatorname{ctg} \gamma}{\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}}. \tag{16}$$

У цьому випадку формули (4) приймають вигляд:

$$r_{\pm}^{(1)} = \sqrt{\left(x - \frac{k}{\sigma_x} \cos \gamma\right)^2 + \left(y \mp \frac{k}{\sigma_y} \sin \gamma\right)^2 + z^2}, \quad r_{\pm}^{(2)} = \sqrt{\left(x - \frac{k}{\sigma_x} \cos \gamma\right)^2 + \left(y \mp \frac{k}{\sigma_y} \sin \gamma\right)^2 + (2h - z)^2}. \tag{17}$$

Тепер можна записати x-, й y-проекції векторного потенціалу еліпсоподібного контуру при  $M \rightarrow \infty$  за допомогою криволінійних інтегралів другого типу:

$$A_x(x, y, z, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left\{ -k \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \gamma \cdot d\gamma}{\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}} \left[ \frac{f(t-r_+^{(1)}/c)}{r_+^{(1)}} - \frac{f(t-r_-^{(1)}/c)}{r_-^{(1)}} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\int_{r_+^{(2)}/c}^{r_+^{(2)}/c} H_x^E(\tau - r_+^{(2)}/c) df(t-\tau)}{r_+^{(2)}} + \frac{\int_{r_-^{(2)}/c}^{r_-^{(2)}/c} H_x^E(\tau - r_-^{(2)}/c) df(t-\tau)}{r_-^{(2)}} \right\} \quad (18)$$

$$A_y(x, y, z, t) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \left\{ k \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \gamma \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot d\gamma}{\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \gamma}} \left[ \frac{f(t - r_+^{(1)}/c)}{r_+^{(1)}} - \frac{f(t - r_-^{(1)}/c)}{r_-^{(1)}} - \frac{\int_{r_+^{(2)}/c}^{r_+^{(2)}/c} H_y^E(\tau - r_+^{(2)}/c) df(t-\tau)}{r_+^{(2)}} + \frac{\int_{r_-^{(2)}/c}^{r_-^{(2)}/c} H_y^E(\tau - r_-^{(2)}/c) df(t-\tau)}{r_-^{(2)}} \right] \right\} \quad (19)$$

У випадку довільного фізично реалізованого стороннього збурення отримані інтеграли не беруться в елементарних функціях.

Щоб виконати перехід до безрозмірних координат, просторові та часові зміни ділять на узгоджені кванти  $\Delta$  та  $\Delta^t$ , причому  $\Delta = c \cdot \Delta^t$ , де  $c$  – швидкість розповсюдження поля в повітрі. Перехід реалізується незалежно для  $x$ -, та  $y$ -проекцій електричної напруженості.

У виразах (5) та (7) істотне спрощення уявного аргументу модифікованої функції Беселя забезпечують наступні величини часових квантів[13]:

$$\Delta_x^t = \frac{4\pi \epsilon_0}{\sigma_x}, \quad \Delta_y^t = \frac{4\pi \epsilon_0}{\sigma_y} \quad (20)$$

Тоді відповідні просторові кванти визначаються виразами:

$$\Delta_x = \frac{4\pi}{\rho \sigma_x}, \quad \Delta_y = \frac{4\pi}{\rho \sigma_y} \quad (21)$$

де  $\rho = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  – хвильовий опір повітря.

З метою представлення ортотропного композита за допомогою ізотропного провідного напівпростору застосуємо змішані безрозмірні  $(X_x = x/\Delta_x, Y_y = y/\Delta_y, Z_x = z/\Delta_x, T_x = t/\Delta_x^t)$ - або  $(X_x, Y_y, Z_x = z/\Delta_y, T_x = t/\Delta_y^t)$ -координати. Тоді обидві напівосі еліпса задаються однаковими виразами:  $a/\Delta_x = b/\Delta_y = k\rho/4\pi$ , якщо справедливі рівності (1). Отже, у безрозмірній  $(X_x, Y_y, 0)$ -площині еліпсоподібний контур збуджувача представляється колом.

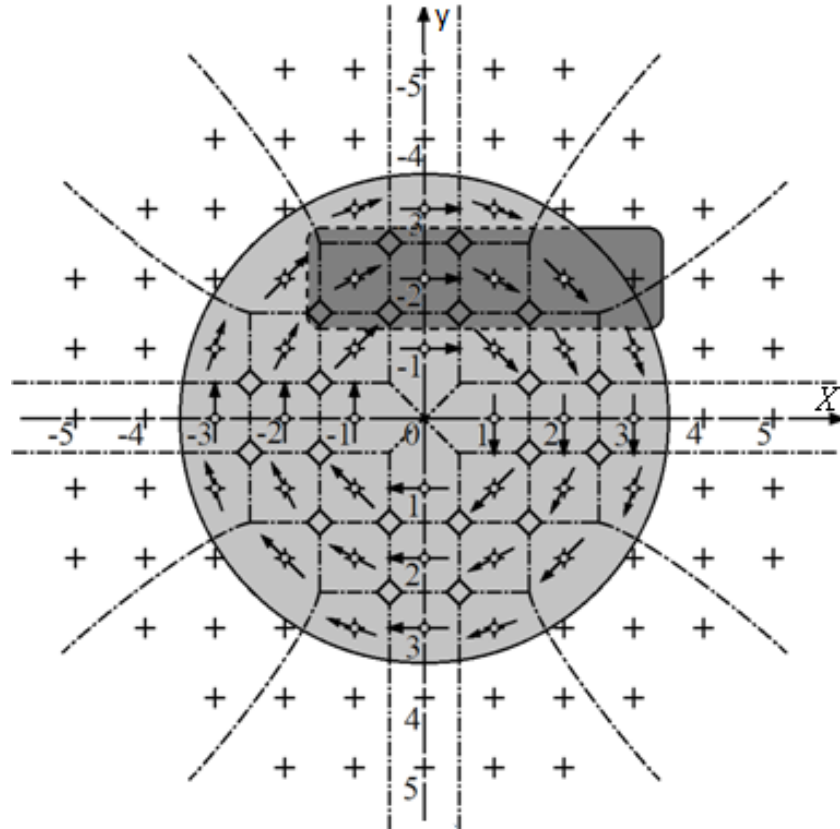


Рис. 2. У змішаних безрозмірних координатах вид зверху на точкові джерела (0) стороннього струму (→), збуджувач (затемнений), вузли дискретизації (+) та зони впливу (---) на досліджуваній площині вище поверхні композита, спотвореної тріщиною (зачорнена)

Таким чином, збуджувач еліпсоподібної форми з напівосями, зворотно пропорційними питомим електричним провідностям композита, апроксимується трьома круглими контурами, котрі об'єднують, відповідно, 8, 12, 16 точкових джерел стороннього струму (рис. 2) у змішаних безрозмірних координатах, що гарантує зведення ортотропної задачі до ізотропної.

Моделююче поле представлено суперпозицією полів 36 точкових джерел (рис.2). При цьому 20 внутрішніх точкових джерел, що належать найближчому та наступному шарам – по відношенню до центру кола, володіють 0-мірними зонами впливу на досліджуваній площині. Такі зони містять єдиний вузол дискретизації для відповідного граничного елемента, обмеженого штрих-пунктирною лінією на рис.2.

Шістнадцять крайніх точкових джерел, що належать третьому шару, володіють 1-, та 2-мірними зонами впливу на досліджуваній площині. Такі зони впливу окреслені аналогічним чином, але містять кілька вузлів дискретизації. У першому наближенні кожне крайнє точкове джерело створює поле у відповідній зоні впливу, покритій індивідуальним граничним елементом.

В результаті за допомогою ізотропного підходу виконано гранично-елементне моделювання електромагнітної дефектоскопії поверхневого шару ортотропного композиту при використанні поля еліпсоподібного перетворювача.

Таблиця 2

Значення дійсної та уявної частин нормованої електричної напруженості у горизонтальній (X, Y, Z = I)-площині при T = 8.

$\frac{Re(E \cdot \Delta x)}{Im(E \cdot \Delta x)}$	X	-5Δx	-4Δx	-3Δx	-2Δx	-Δx	0	Δx	2Δx	3Δx	4Δx	5Δx
Y	$\begin{matrix} X_x \\ Y_y \end{matrix}$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5Δy	5	-	-	-	-0.148 0.010	-0.177 0.007	-0.177 0.007	-0.177 0.07	-0.148 0.010	-	-	-
4Δy	4	-	-	-0.148 0.010	-0.286 0.007	-0.403 0.006	-0.403 0.006	-0.403 0.006	-0.286 0.007	-0.148 0.010	-	-
3Δy	3	-	-0.148 0.010	-0.286 0.007	-0.403 0.006	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.403 0.006	-0.286 0.007	-0.148 0.010	-
2Δy	2	-0.148 0.010	-0.286 0.007	-0.403 0.006	-0.682 0.007	-0.796 0.019	-0.795 0.055	-0.795 0.055	-0.795 0.055	-0.505 0.020	-0.286 0.007	-0.148 0.010
Δy	1	-0.177 0.007	-0.286 0.007	-0.403 0.006	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.403 0.006	-0.177 0.007
0	0	-0.177 0.007	-0.286 0.007	-0.403 0.006	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.403 0.006	-0.177 0.007
-Δy	-1	-0.177 0.007	-0.403 0.006	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.403 0.006	-0.177 0.007
-2Δy	-2	-0.148 0.010	-0.286 0.007	-0.403 0.006	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.403 0.006	-0.286 0.007	-0.148 0.010
-3Δy	-3	-	-0.148 0.010	-0.286 0.007	-0.403 0.006	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.682 0.007	-0.403 0.006	-0.286 0.007	-0.148 0.010	-
-4Δy	-4	-	-	-0.148 0.010	-0.286 0.007	-0.403 0.006	-0.403 0.006	-0.403 0.006	-0.286 0.007	-0.148 0.010	-	-
-5Δy	-5	-	-	-	-0.148 0.010	-0.177 0.007	-0.177 0.007	-0.177 0.007	-0.148 0.010	-	-	-

**Висновки**

Таким чином, за допомогою ізотропного підходу виконане гранично-елементне моделювання процесу електромагнітної дефектоскопії поверхневого шару ортотропного парамагнітного композиту з тепловими втратами за допомогою зондувального поля еліпсоподібного контуру. Гранично-елементне моделювання гарантує контрастне розпізнавання поверхневих тріщин за допомогою аналізу таблиці, яка містить значення дійсної й уявної частин нормованої електричної напруженості в процесі її встановлення.

1. Розглянуті теоретичні питання електромагнітного контролю ортотропного композиту з поверхневою тріщиною. Нестационарне зондувальне поле збуджується стороннім струмом. Збудник має еліпсоподібну форму з напівосями, обернено пропорційними питомим електричним провідностям композиту. Збудник моделюється 36-точковими джерелами, об'єднаними трьома замкненими контурами.

2. Наведені вирази для декартових  $x$ - та  $y$ -проекцій комплексного векторного потенціалу точкового джерела над бездефектною плоскою поверхнею ортотропного композиту. Виведені відповідні вирази для декартових  $x$ - та  $y$ -проекцій електричної напруженості результуючого поля точкового джерела в повітрі.

3. Для зменшення математичної та обчислювальної складності гранично-елементного моделювання введена пара безрозмірних просторово-часових систем  $(X_x, Y_x, Z_x, T_x)$ - та  $(X_y, Y_y, Z_y, T_y)$ - шляхом ділення змінних  $x, y, z$  та  $t$  на пари просторових та часових квантів, які обернено пропорційні величинам провідності композиту:  $\Delta_x = 4\pi/\rho\sigma_x$  та  $\Delta_x^t = 4\pi\varepsilon_0/\sigma_x$  як і  $\Delta_y = 4\pi/\rho\sigma_y$  та  $\Delta_y^t = 4\pi\varepsilon_0/\sigma_y$ , де  $\rho$  – хвильовий опір повітря. Еліпсоподібний збудник приймає круглу форму у змішаних безрозмірних  $(X_x, Y_x, Z_x, T_x)$ - або  $(X_y, Y_y, Z_y, T_y)$ - координатах, що гарантує зведення ортотропної задачі до ізотропної.

4. У змішаних безрозмірних  $(X_x, Y_x, Z_x, T_x)$ - або  $(X_y, Y_y, Z_y, T_y)$ -координатах отримано вираз для нормованої електричної напруженості результуючого поля точкового джерела над ізотропним провідячим напівпростором. Виділені дійсна та уявна частини нормованої електричної напруженості.

5. За допомогою отриманого виразу для дійсної та уявної частин в досліджуваній площині обчислена нормована електрична напруженість 36-точкового масиву, розташованого над поверхневою тріщиною, за допомогою методу граничних елементів.

6. Результати гранично-елементного моделювання гарантують контрастне розпізнавання поверхневих тріщин за допомогою аналізу вмісту таблиць значень активної й реактивної складових нормованої електричної площини при її становленні.

#### Перелік використаної літератури

1. Композиционные материалы: Справочник/ Под ред. Д. М. Карпиноса. — К.: Наукова думка, 1985. — 592с.
2. Кербер М.Л. Полимерные композиционные материалы. Структура. Свойства. Технологии.—СПб.: Профессия, 2008.— 560с.
3. Неразрушающий контроль и диагностика/ Под ред. В. В. Клюева. — М.: Машиностроение, 2003.— 656с.
4. Жданов М. С. Математическое моделирование электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах/ М. С. Жданов, В. В. Спичак. — М.: Наука, 1992.— 187с.
5. Бреббия К. Применение метода граничных элементов в технике/ К. Бреббия, С. Уокер.—М.: Мир, 1982.— 248с.
6. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках/ П. Бенерджи, П. Баттерфилд.— М.: Мир, 1984.— 498с.
7. Сильвестр П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. / П.Сильвестр, Р. Феррари.— М.: Мир, 1986.—230с.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики/ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1977.— 736с.
9. Фарлоу С. Уравнение с частными производными для научных работников и инженеров.— М.: Мир, 1985.— 384с.
10. Pashchenko V. A., Khandetskii V.S. Questions of the Theory of Electromagnetic Testing of Orthotropic Composites Using Nonstationary Fields. 1. The Elementary Vector Potential of Primary and Reflected Fields in the Air above the Flat Surface of a Composite// Russian Journal of Nondestructive Testing.— 2012.—V.48.—No.6. — PP. 357—372.
11. Pashchenko V. A. The subsurface sounding analytical description of orthotropic composite in dimensionless coordinates//Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory.— Kharkiv, Ukraine, 2012.— PP. 176—179.
12. Pashchenko V. A. Parallel tabulating method of passage and reflection characteristics of orthotropic paramagnetic composite// International Conference “Parallel and Distributed Computing Systems”, PDCS-2013.— Kharkiv, Ukraine, 2013.— PP. 236—240.
13. Пашенко В. О. Гранично-елементне моделювання становлення електричної напруженості над поверхнею ортотропного композита//Вестник ХНТУ, №3(50).— Херсон, 2014.— С. 81—87.



УДК 658.51.012

О.М. ПИГНАСТЫЙ

Национальный Технический Университет "ХПИ"

**О КРИТЕРИЯХ ПОДОБИЯ ПОТОЧНЫХ ЛИНИЙ**

*В статье анализируются режимы функционирования производственных поточных линий, приводятся общие закономерности движения предметов труда по технологическому маршруту в зависимости от интервала подачи заготовок на первую технологическую операцию. Детально рассмотрены два принципиально отличающиеся режима функционирования поточной производственной линии. Обсуждается критерий подобия для производственных поточных линий.*

*Ключевые слова: кинетическое уравнение, производственная линия, массовое производство, незавершенное производство, балансовые уравнения, квазистатический процесс, стохастический процесс.*

О.М. ПИГНАСТЫЙ

Национальный Технический Университет "ХПИ"

**ПРО КРИТЕРІЇ ПОДІБНОСТІ ПОТОЧНИХ ЛІНІЙ**

*У статті аналізуються режими функціонування виробничих поточних ліній, наводяться загальні закономірності руху предметів труда по технологічному маршруту в залежності від інтервалу подачі заготовок на першу технологічну операцію. Детально розглянуті два принципово відмінних режиму функціонування поточної виробничої лінії. Обговорюється критерій подібності для виробничих поточних ліній.*

*Ключові слова: кінетичне рівняння, виробнича лінія, масове виробництво, незавершене виробництво, балансові рівняння, квазістатичний процес, стохастичний процес.*

О.М. ПИГНАСТЫЙ

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

**ABOUT SIMILARITY CRITERIA OF THE PRODUCTION LINES**

*In the article modes of the functioning of the production flow lines are analyzed. General laws of the movement of objects of the labour along the technological route are given. Depending on the interval of supply of blanks to the first technological operation. Two principally different modes of the operation of the production flow line are considered in detail. A similarity criterion is discussed for production flow lines.*

*Keywords: kinetic equation, the production line, mass production, work in progress, balance equations, quasi-static process, stochastic process*

**Постановка проблемы и анализ последних публикаций**

Постановка экспериментов позволяет установить общие закономерности для поведения параметров поточных линий разных производственных систем [1]. Для практических исследований важно выбрать минимальное число безразмерных параметров, отражающих в наиболее удобной форме основные эффекты исследуемых технологических процессов. Постановка и обработка экспериментальных данных требует учета вопросов подобия и размерности. В начальной стадии изучения некоторых сложных явлений производственных процессов теория подобия является единственно возможным теоретическим методом, может привести к довольно существенным результатам. Особенно ценно то, что с помощью теории подобия можно получить важные результаты при рассмотрении процессов, которые зависят от большого количества параметров, но при этом так, что некоторые из этих параметров в известных случаях становятся несущественными [2, 3]. Теория подобия позволяет определить область значений параметров, допускающих аналитическое решение кинетических и балансовых уравнений [4, 5]. Кинетическое уравнение производственного процесса может быть представлено в виде [6]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f(t, S) = \lambda_{Plant} \cdot \{ \varphi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_I - \mu \cdot \chi \}. \quad (1)$$

где  $S \in [0, S_d]$  – координата технологической позиции, определяющей положение предмета труда вдоль технологического маршрута;  $\mu$  – интенсивность переноса технологических продуктов на предмет труда;  $\chi(t, S, \mu)$  – фазовая функции распределения предметов по состояниям в технологическом пространстве в момент времени  $t$ ;  $\varphi(t, S, \mu)$  – функция, характеризующая процесс взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием, расположенным вдоль технологического маршрута с плотностью  $\lambda_{Plant}$ . В большинстве практических случаях функция  $\varphi(t, S, \mu)$  не зависит от состояния предметов труда до испытания воздействия со стороны технологического оборудования;  $[\chi]_I(S, \mu)$  – темп обработки

предмета труда на технологической позиции, характеризующейся координатой  $S$ ;  $f(t, S)$  – инженерно-производственная функция [7]:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{[\chi]_{I_{\psi}}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right) + \frac{[\chi]_{I_{\psi}}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{I_{\psi}}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right) = f(t, S), \quad \mu = \frac{dS}{dt}, \quad (2)$$

определяющая технологию производства продукта [8–10]. В силу того, что произведение  $\chi(t, S, \mu) \cdot d\Omega$  представляет собой число предметов труда в ячейке  $d\Omega$  фазового пространства с координатами  $S_j \in [S, S + dS]$ ,  $\mu_j \in [\mu, \mu + d\mu]$ , то интегрирование по объему  $\Omega$  фазового пространства  $(S, \mu)$  дает, общее количество  $N$  предметов труда, находящееся в незавершенном производстве [6, 11]:

$$\int_0^{S_d} \int_0^{\infty} \chi(t, S, \mu) d\mu dS = N, \quad \Omega = \int_0^{S_d} \int_0^{\infty} d\mu dS \quad (3)$$

Решение уравнений (1) связано со значительными трудностями [4,5]. В связи с этим первый шаг анализа должен состоять в оценке порядка величин слагаемых интегро-дифференциального уравнения. При анализе производственного процесса предприятия с поточным методом организации производства выделяют три характерные величины технологического процесса:  $\Delta t_{0m}$  – основное технологическое время выполнения  $m$ -ой технологической операции [12], промежуток времени, в течение которого предмет труда находится в непосредственной обработке;  $\Delta t_{dm} = \Delta t_0 N_m$  – время обработки предмета на  $m$ -ой технологической операции с очередью деталей на обработку  $(N_m - 1)$  [12];  $T_d = \sum_{m=1}^M \Delta t_{dm}$  – производственный цикл обработки предмета труда [13];  $M$  – количество технологических операций в производственном процессе.

### Основная часть

**Режим работы технологического оборудования без ожидания предметом труда своей очереди на обработку в накопителе.** Если на первую технологическую операцию предметы труда поступают через промежуток времени  $\Delta t \geq \Delta t_{0max}$ ,  $\Delta t_{0max} = \max \{ \Delta t_{01}, \Delta t_{02}, \dots, \Delta t_{0m}, \dots, \Delta t_{0M} \}$ , то технологические траектории предметов труда не имеют участков ожидания предметом труда процесса обработки (рис.1). Технологическая траектория  $j$ -го предмета труда может быть построена путем параллельного переноса траектории  $(j-1)$ -го предмета труда по шкале времени на величину  $\Delta t$ . Время обработки каждого предмета труда по нормативной технологической траектории постоянно, а интервал поступления материала на первую технологическую операцию соответствует интервалу выхода готового продукта. Данный случай характеризуется тем, что при отсутствии ожидания предметом труда процесса обработки существует простой оборудования в ожидании поступления предмета труда на обработку в течение промежутка времени  $\Delta t_{\psi w} = (\Delta t_{0max} - \Delta t_{0m})$ . При обработке  $N$ –предметов труда это время простоя оборудования на  $m$ -ой технологической операции составит  $N \cdot \Delta t_{\psi w} = N \cdot (\Delta t_{0max} - \Delta t_{0m})$ . Простой оборудования отсутствует в случае синхронизованной обработки предметов труда, когда для каждой технологической операции выполняется соотношение  $\Delta t_{0max} = \Delta t_{0m}$  или до начала обработки в межоперационных накопителях находились предметы труда в необходимом для бесперебойной работы количестве  $N_m$ . Это количество можно определить, разделив время простоя оборудования  $N \cdot \Delta t_{\psi w}$  на время выполнения технологической операции  $\Delta t_{0m}$

$$N_m = \frac{\Delta t_{\psi w}}{\Delta t_{0m}} N \quad (4)$$

Межоперационный накопитель с межоперационным размером в нем  $N_m$  предметов труда обеспечит бесперебойную работу производственной линии на  $m$ -ой технологической операции при изготовлении партии деталей размером  $N$ . Минимальное количество предметов труда WIP (work-in-progress) [14], необходимое для обеспечения бесперебойной работы производственной линии на всех технологических операциях есть величина

$$WIP = \sum_{m=1}^M N_m = N \sum_{m=1}^M \frac{\Delta t_{\psi w}}{\Delta t_{0m}}. \tag{5}$$

При  $(\Delta t_{\psi w} / \Delta t_{0m}) \ll 1$  получает  $N_m \rightarrow 0$ . Отсюда следует вывод, что для синхронизированного режима работы поточной линии без наличия простоев минимальным достаточным количеством предметов труда является величина  $(2M - 1)$ , из которой  $M$  предметов труда находятся в процессе обработки, а  $(M - 1)$  предмет труда в процессе ожидания. Использовано выражение  $(2M - 1)$  в связи с тем, что по крайней мере для одного предмета труда справедливо соотношение  $\Delta t_{\psi w} \equiv 0$ , откуда  $N_m \equiv 0$ .

**Режим работы технологического оборудования с ожиданием предметом труда своей очереди на обработку в накопителе.** Дальнейшее уменьшение промежутка времени между поступлением предметов труда на первую технологическую операцию  $\Delta t$  приводит к искажению технологических

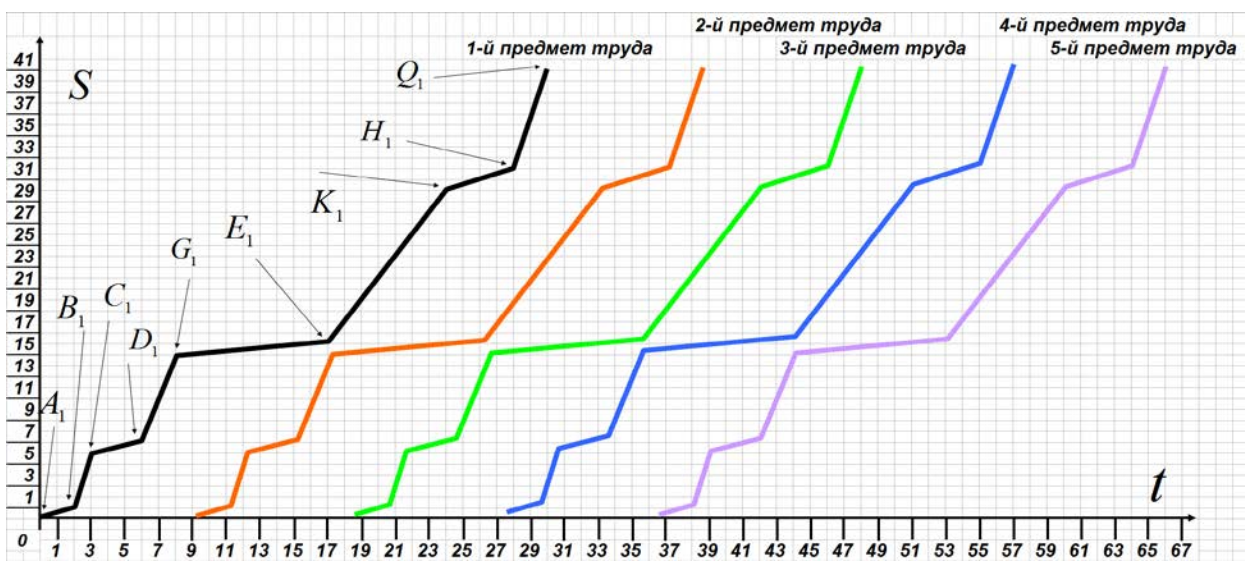


Рис. 1. Траектории партии предметов труда без ожидания входных накопителей

траекторий предметов труда (рис. 2),  $\Delta t < \Delta t_{0max}$ . Появляются технологические операции, перед которыми предмет труда находится в ожидании технологической обработки. В этих местах технологические траектории деформируются, вытягиваются по оси времени (перед 3-ей и 5-ой технологической операцией, рис.2). Технологические операции можно разделить на две группы [15,16]:

а)  $\Delta t \geq \Delta t_{0m}$ . Межоперационные заделы таких технологических операций уменьшаются с течением времени. Для бесперебойной работы на данной технологической операции размер буфера может быть определен по формуле (4);

б)  $\Delta t < \Delta t_{0m}$ . Межоперационные заделы некоторых таких технологических операций увеличиваются с течением времени. Для обеспечения бесперебойной работы для таких технологических операций требуется межоперационный накопитель такого размера, который обеспечит достаточно пространства для хранения заготовок, находящихся в процессе ожидания обработки. Операции, на которых идет увеличение количества межоперационных заделов, должны удовлетворять равенству

$$\Delta t_{0m} = \max \{ \Delta t_{01}, \Delta t_{02}, \Delta t_{03}, \dots, \Delta t_{0m-1}, \Delta t_{0m} \}. \tag{6}$$

На остальных операция, которые не удовлетворяют условию (6), но для которых  $\Delta t < \Delta t_{0m}$ , идет уменьшение размера межоперационных заделов в накопителях. В местах технологического маршрута, для которых удовлетворяется условие (6), происходит деформация технологических траекторий. Дальнейшее уменьшение приводит к последующей модификации технологических траекторий.



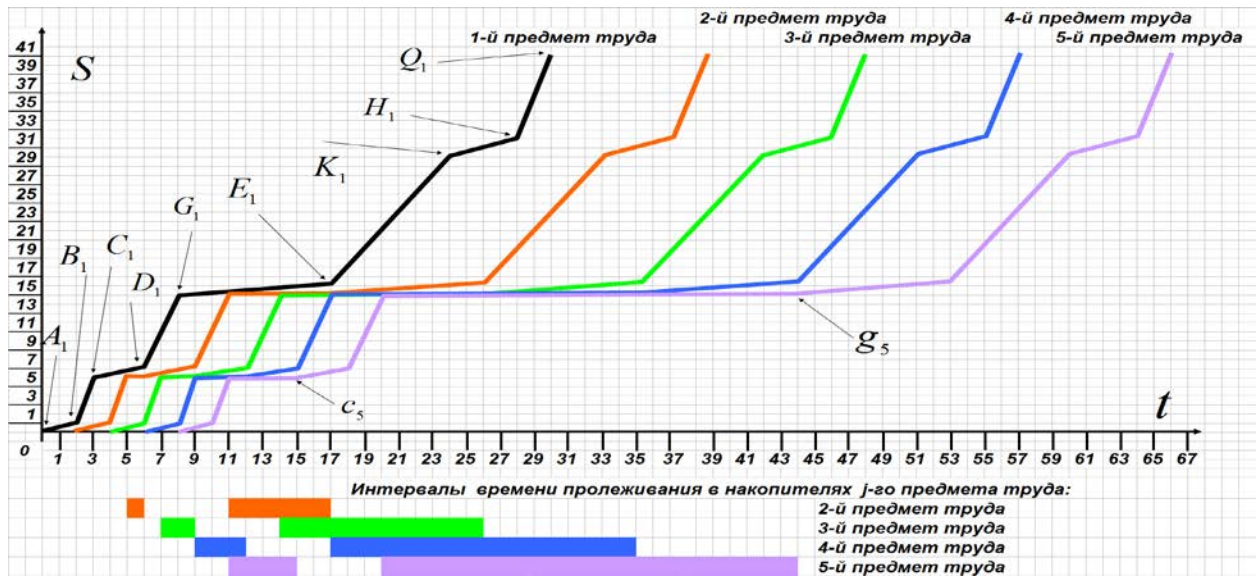


Рис. 2. Траектории партии предметов труда с ожидания во входных накопителях

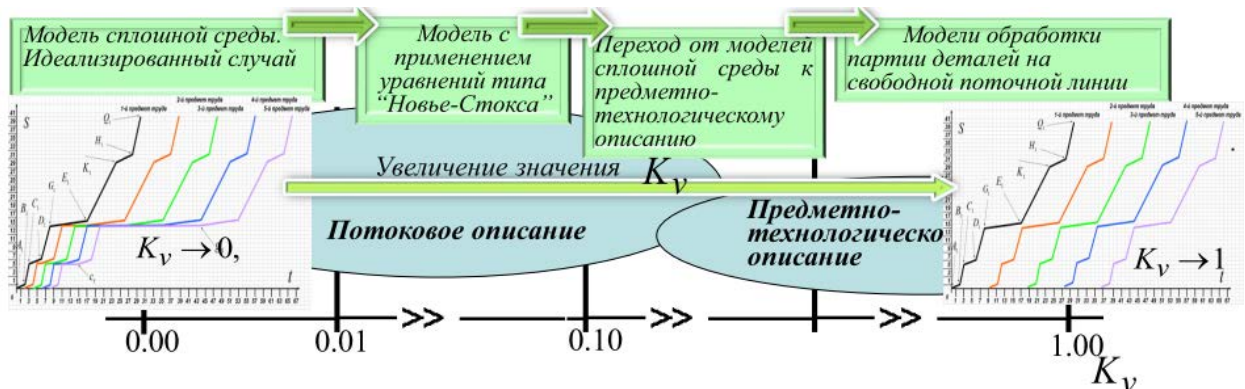


Рис. 3. Критерии использования моделей описания поточной линии

**Характерные числа для описания режимов функционирования поточных линий.** Для качественного рассмотрения производственных явлений, возникающих в результате движения предметов труда вдоль технологического маршрута выше исследовано влияние размера интервала  $\Delta t$  (интервала между подачей предметов труда на первую технологическую операцию) на вид технологических траекторий (рис.1,рис.2). Данная оценка имеет качественный характер, определяет какое производственное явление рассматривается. В состоянии статистического равновесия кинетическое уравнение (1) имеет вид [17]

$$\frac{d\chi}{dt} = 0, \tag{7}$$

в силу того, что

$$\varphi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi_0 = 0 \tag{8}$$

для равновесного случая  $\chi = \chi_0$ . Для грубой оценки уравнение (1) представим в виде

$$\frac{d\chi}{dt} = - \langle \lambda_{Plant} \rangle \cdot \langle \mu \rangle \cdot (\chi - \chi_0); \quad \chi_0 = \frac{\varphi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1}{\mu} \tag{9}$$

$$\langle \mu \rangle \approx s_0 / (\langle N_m \rangle \Delta t_0); \tag{10}$$

где -  $\langle \mu \rangle$  - средняя скорость прохождения технологической операции предметом труда;  $s_0$  - характерная протяженность технологической операции при среднем времени выполнения  $\Delta t_0$  с характерным размером межоперационного задела  $\langle N_m \rangle$ . Параметры  $\langle \mu \rangle, s_0, \Delta t_0$  отражают характеристики производственного процесса. Их можно интерпретировать как усредненные величины по операциям

технологического маршрута. Отобразив разность  $(\chi - \chi_0)$  в правой части (9), тем самым учитывается, что правая часть уравнения (1) превращается в ноль для равновесной функции распределения  $\chi = \chi_0$  [18].

Плотность  $\langle \lambda_{Plant} \rangle$  расположения технологического оборудования вдоль технологического маршрута может быть оценена следующим выражением

$$\langle \lambda_{Plant} \rangle \approx (M / S_d) = 1 / s_0. \tag{11}$$

Подставим соотношения (10),(11) в уравнение (9)

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{1}{s_0} \cdot \frac{s_0}{\langle N_m \rangle \Delta t_0} \cdot (\chi - \chi_0) = -\frac{(\chi - \chi_0)}{\langle N_m \rangle \Delta t_0} \tag{12}$$

получим грубую оценку правой части уравнения (9). Интервал времени

$$\Delta t_{0\psi} = \langle N_m \rangle \Delta t_0 \tag{13}$$

представляет время между обработкой предмета труда на двух рядом стоящих технологических операциях. Перепишем уравнение (12) используя обозначение (13)

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{(\chi - \chi_0)}{\Delta t_{0\psi}}. \tag{14}$$

Введем обозначения  $\tau, \theta$  характерные время и шаг по переменной S:

$$t = \Delta t \cdot \tau; \quad \chi = \langle \chi_0 \rangle \cdot \theta, \quad \chi_0 = \langle \chi_0 \rangle \cdot \theta_0 \tag{15}$$

и представим уравнение (14) в безразмерном виде

$$\frac{\langle \chi_0 \rangle \cdot d\theta}{\Delta t \cdot d\tau} = -\langle \chi_0 \rangle \frac{(\theta - \theta_0)}{\Delta t_{0\psi}} \tag{16}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\Delta t}{\Delta t_{0\psi}} (\theta - \theta_0)$$

где  $\langle \chi_0 \rangle$  - характерное значение для плотности предметов труда вдоль технологического маршрута. Введем число

$$K_v = \frac{\Delta t_{0\psi}}{\Delta t}, \tag{17}$$

в качестве критерия подобия производственного процесса [4,19,20,21]. Данный критерий является соотношением между характерным временем рассмотрения производственных явлений  $\Delta t$  и временем  $\Delta t_{0\psi}$ , которое необходимо на обработку предмета труда, поступившего в очередь m-технологической операции.

**Анализ полученных результатов.** Случай  $K_v \geq 1$  соответствует режиму, когда интервал времени  $\Delta t$  между запуском предметов труда в обработку больше, чем характерное время обработки  $\Delta t_{0\psi}$  предмета труда, находящегося в очереди на обработку. При  $\Delta t_{0\psi} = \Delta t_{0max}$  вид технологических траекторий представлен на рис.1, а анализ траекторий движения предметов труда вдоль технологического маршрута обсужден в разделе настоящей статьи "Режим работы технологического оборудования без ожидания предметом труда своей очереди на обработку в накопителе". Случай  $K_v \gg 1$  соответствует режиму простоя технологического оборудования. Режим при  $K_v = 10$  говорит о том, что на первую технологическую операцию запускается предмет труда тогда, когда запущенный перед ним в обработку на первой технологической операции находится уже на 10-й. При  $K_v \gg 1$  нормальным является явление, когда предмет труда запускается в обработку на первую технологическую операцию уже после того, как предыдущий предмет труда прошел все стадии обработки и превратился в готовое изделие. При  $K_v < 1$  технологические траектории начинают деформироваться на некоторых технологических операциях (рис.2). При  $K_v \rightarrow 0$  практически деформации подвергнуты узлы каждой технологической операции. Решение уравнения (1) можно представить в виде [19]

$$\chi(t, S, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} K_v^i \chi_i(t, S, \mu), \quad K_v \rightarrow 0. \quad (18)$$

Вид функции распределения  $\chi_0(t, S, \mu)$  находится из балансового равновесного уравнения (8)

$$\chi_0(t, S, \mu) = \frac{\varphi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1}{\mu}. \quad (19)$$

Вид функции следующего приближения  $\chi_1(t, S, \mu)$  определим из (1) принимая во внимание (9)-(14)

$$K_v \frac{d(\chi_0(t, S, \mu) + \chi_1(t, S, \mu))}{dt} = -\chi_1(t, S, \mu). \quad (20)$$

Так как  $\chi_0(t, S, \mu) \gg \chi_1(t, S, \mu)$ , то следует

$$\chi_1(t, S, \mu) = -K_v \frac{d\chi_0(t, S, \mu)}{dt}. \quad (21)$$

$$\chi_i(t, S, \mu) = -K_v \frac{d\chi_{i-1}(t, S, \mu)}{dt}. \quad (22)$$

### Выводы

Значение характерных чисел  $K_v$  (17), определяющие тип технологического процесса производственной системы, дают возможность обосновать выбор модели описания поточной линии [22, 23]. При построении построение ограничений перспективным является использование методов континуального линейного программирования [24]. Оценку следует воспринимать как качественную, позволяющую для каждого типа технологического процесса построить соответствующую ему адекватную модель описания. Характерное число  $K_v$  предусматривает два основных предельных случая:  $K_v \rightarrow 0$  и  $K_v \rightarrow 1$ . Класс технологических процессов производственных систем, для которых  $K_v \rightarrow 0$  соответствует технологическому процессу с высокой концентрацией технологического оборудования и плотным потоком предметов труда по технологическому маршруту от одной технологической операции к другой. Это производственные системы с массовым производством продукции. Случай  $K_v \rightarrow 1$  соответствует переходу от массового типа производства к мелкосерийном через стадии крупносерийного и серийного производства.

При  $K_v \gg 1$  мы имеем дело с единичным типом производства. Таким образом, технологический процесс производственной системы может быть классифицирован в соответствии со значениями характерных чисел. Характерные числа дают качественную оценку состояния, определяющего тип производства (массовый, серийный, единичный), которому должна соответствовать строго определенная модель описания производственной линии. Уравнения (18)-(21) позволяют с достаточной точностью описать поточную линию для производственной системы массового типа. Точность определяется количеством слагаемых в разложении (18).

Производственные поточные линии с одинаковыми значениями характерных чисел  $K_v$  (17) являются подобными, имеют общие закономерности поведения потоковых параметров производственной линии [25]. Такие поточные линии могут быть описаны одними и теми же моделями. Каждому интервалу характерных чисел  $K_v$  соответствует модель своего типа.

### Список использованной литературы

1. Armbruster D. Continuous models for production flows. In Proceedings of the 2004 American Control Conference. / D. Armbruster, C. Ringhofer, T. J. Jo. – Boston: MA, 2004. – P. 4589–4594.
2. Гухман А.А. Введение в теорию подобия / А. А. Гухман. – М.: Высш. шк., 1973. – С. 152.
3. Седов Л.И. Теория подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1954. – С. 328.
4. Пигнастый О. М. К вопросу подобия технологических процессов производственно-технических систем / Н. А. Азаренков, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. – Київ: Видавничий дім "Академпериодика". – 2011. – №2– С. 29-35. – Available at: <https://goo.gl/0N1Sgl>
5. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – К.: Наука, Гл. ред. физ. - мат. лит., 1937. – С. 310.
6. Пигнастый О. М. О выводе кинетического уравнения производственного процесса / О. М. Пигнастый // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2015. – № 3 (54). – С. 439–446. – Available at: <https://goo.gl/z5pLdE>

7. Пигнастый О. М. Инженерно-производственная функция предприятия с серийным или массовым выпуском продукции / О. М. Пигнастый // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Харьков: НАКУ, 2005. – № 42(3). – С. 111–117.
8. Заруба В.Я. Моделирование движения предмета труда по технологическому маршруту в двухкоординатном описании / В.Я. Заруба О.М. Пигнастый, В.Д. Ходусов // Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". Серія: Технічний прогрес та ефективність виробництва. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2015. – № 60 (1169). – С. 39–45.
9. Заруба В.Я. Моделирование движения предмета труда в пространстве состояний на примере технологии токарной обработки / В.Я. Заруба, О.М. Пигнастый, В.Д. Ходусов // Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". Серія: Технічний прогрес та ефективність виробництва. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2016. – № 27 (1199). – С. 33–37.
10. Пигнастый О.М. Модель производственного процесса обработки партии предметов труда / О.М. Пигнастый, В.Д. Ходусов // Автоматизированные технологии и производства. – Магнитогорск: МГТУ им. Носова. – 2016. – № 1(11). – С. 24–32.
11. Демуцкий В.П. Использование методов статистической физики для исследования экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции / В.П. Демуцкий, О.М. Пигнастый, В.Д. Ходусов // Вісник Харківського національного університету. – Харків: ХНУ, 2005. – № 710. – С. 128–134.
12. Пигнастый О.М. Сетевая модель многоресурсной поточной производственной линии / О.М. Пигнастый // Научный результат. Серия "Информационные технологии". – Белгород: БГУ, 2016. – Т.1. – №2. – С. 31–45.
13. Пигнастый О.М. Расчет производственного цикла с применением статистической теории производственно-технических систем / О.М. Пигнастый, В.Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. – К.: Видавничий дім "Академперіодика". – 2009. – №12. – С. 38–44. –Available at: <https://goo.gl/Qw6qqK>
14. Пигнастый О.М. О новом классе динамических моделей поточных линий производственных систем / О.М. Пигнастый // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – Белгород: БГУ, 2014. – № 31/1. – С. 147–157 –Available at: <https://goo.gl/9k3v1r>
15. Пигнастый О.М. Обзор моделей управляемых производственных процессов поточных линий производственных систем / О.М. Пигнастый // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Белгород: БГУ, 2015. – № 34/1. – С. 137–152. –Available at: <https://goo.gl/53P4hV>
16. Костенко Ю.Т. Прогнозирование технического состояние систем управления / Ю.Т. Костенко, Л.Г. Раскин. – Х.: Основа, 1996. – 303 с.
17. Азаренков Н.А. Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии / Н.А. Азаренков, О.М. Пигнастый, В.Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – № 12. – С. 36–43. –Available at: <https://goo.gl/M913ju>
18. Ходусов В.Д. Использование методов физической кинетики для исследования колебания параметров поточной линии / В.Д. Ходусов, О.М. Пигнастый // Восточно-европейский физический журнал. – Харьков: ХНУ. – 2014. – Vol.1. – №4. – С. 88–95. –Available at: <https://goo.gl/Sprxuh>
19. Демуцкий В.П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок / В.П. Демуцкий, В.С. Пигнастая, О.М. Пигнастый. – Харьков.: ХНУ, 2003. – 272 с.
20. Пигнастый О.М. Теория подобия технологических процессов / Н.А. Азаренков, О.М. Пигнастый, В.Д. Ходусов // "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я": тези доповідей XIX Міжнародної науково-практичної конференції (MicroCad 2011), (м. Харків, 01-03 червня 2011 р.). – Харків: НТУ "ХПІ". – 2011. – Ч. 4. – С. 360. – Available: <https://goo.gl/PRCNJn> – DOI: 10.13140/RG.2.2.25066.52163
21. Пигнастый О.М. Характерные числа в моделях описания производственных систем. / О.М. Пигнастый. // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Харьков: НАКУ "ХАИ", 2006. – Вып. 31. – С. 242 – 252.
22. Пигнастый О. М. Статистическое обоснование энтропийных закономерностей в моделях управления технологическими процессами / О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. - Харків: ХНУ. - 2012. № 1037. - С. 168-174.
23. Пигнастый О.М. Статистическое обоснование и вывод балансовых уравнений для двухуровневой модели производственной поточной линии // О.М. Пигнастый // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Харьков: НПП "Технологический центр". – 2016. – Т. 5. – № 5 (83). – С. 17–22.
24. Раскин Л.Г. Метод решения задачи континуального линейного программирования с использованием ортогональных систем функций / Л.Г. Раскин, О.М. Пигнастый // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – Харків: НАУ "ХАИ". – 2015. – № 3(73). – С. 90–95.
25. Пигнастый О.М. Современные аспекты энтропийного моделирования технологического процесса / О.М. Пигнастый // Математическое и имитационное моделирование систем МОДС 2012: Сборник докладов 7-ой международной научно-практической конференции с международным участием (25-28 июня 2012 г.). – Чернигов, 2012. – С. 159–163.

УДК 629.439

В. А. ПОЛЯКОВ, Н. М. ХАЧАПУРИДЗЕ

Институт транспортных систем и технологий  
Национальной академии наук Украины**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА  
МАГНИТНОЙ ЛЕВИТАЦИИ ПОЕЗДА**

*Объектом исследования является процесс магнитной левитации поезда. Цель исследования – получение корректного математического описания реализации этого процесса. Выявлены рациональные парадигмы исследования. Рассмотрены существующие версии искомой модели. Описаны их достоинства и недостатки. Выбраны рациональные расчётные схемы элементов левитационного узла. При исследовании принята интегративная парадигма. Для упрощения модели введены адекватные допущения. Левитационные компоненты найдены как силы Ампера. Описана электродинамика левитационного узла.*

*Ключевые слова: магнитолевитирующий поезд, математическая модель левитации, интегративная парадигма исследования.*

В. О. ПОЛЯКОВ, М. М. ХАЧАПУРИДЗЕ

Институт транспортных систем та технологій  
Національної академії наук України**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ МАГНІТНОЇ ЛЕВІТАЦІЇ ПОЇЗДА**

*Об'єктом дослідження є процес магнітної левітації поїзда. Ціль дослідження - одержання коректного математичного опису реалізації цього процесу. Виявлено раціональні парадигми дослідження. Розглянуто існуючі версії шуканої моделі. Описано їхні достоїнства й недоліки. Обрано раціональні розрахункові схеми елементів левітаційного вузла. При дослідженні прийнята інтегративна парадигма. Для спрощення моделі введено адекватні припущення. Левітаційні компоненти знайдені як сили Ампера. Описано електродинаміку левітаційного вузла.*

*Ключові слова: магнитолевітуючий поїзд, математична модель левітації, інтегративна парадигма дослідження.*

V. A. POLYAKOV, N. M. KHACHAPURIDZE

Institute of Transport Systems and Technologies  
of Ukraine's National Academy of Sciences**MATHEMATICAL MODEL OF TRAIN'S MAGNETIC LEVITATION PROCESS**

*A process of train's magnetic levitation is the research object. The research aim is – to get the correct mathematical description of this process realization. Rational paradigms of the research were revealed. Existing versions of the desired model were considered. Their advantages and demerits have been described. Rational design schemes of a levitation unit's elements were chosen. The integrative paradigm was adopted in the research. Adequate assumptions were introduced to simplify the model. Levitation components were found as Ampère forces. The levitation unit's electrostatics has been described.*

*Keywords: magnetically levitated train, levitation's mathematical model, research's integrative paradigm.*

**Исзуаемая проблема. Уровень её исследованности**

Подвешивание магнитолевитирующего поезда (МЛП) осуществляется посредством левитационного узла (ЛУ). Токи и поля его контуров – компоненты единого электромагнитного субпроцесса гиперпроцесса электромеханического преобразования энергии. Существенная сложность таких процессов перманентно побуждает исследователей к поиску путей сепаратного изучения их отдельных компонентов, ключевым из которых является электромагнитный. Его составляющие порознь с успехом могут изучаться [1] в рамках теорий электрических цепей и электромагнитного поля. Поэтому существующие версии математической модели (ММ) процесса левитации (ПЛ) МЛП построены [1 – 3] исходя из упомянутых парадигм. Анализ свойств упомянутых версий модели свидетельствует о том, что каждая из них обладает как преимуществами, так и недостатками. Их общая положительная черта – достаточная функциональность. Основной же имманентный недостаток таких версий – нестационарность дифференциальных уравнений, вызванная циклической переменностью их коэффициентов, соответствующих собственным и взаимным индуктивностям дискретных путевых контуров (ДПК) ЛУ как между собой, так и со сверхпроводящими поездными контурами (СПК), в зависимости от



положения поезда. Это существенно затрудняет решение задач описываемой динамики [4], радикально снижая практическую ценность версий модели.

**Задача исследования**

Изложенное выявляет [5 – 7] актуальность создания ММ ПЛ МЛП, ассимилирующей достоинства имеющихся версий такой модели, но свободной от их недостатков. Синтез такой модели является основной задачей настоящей работы.

**Материал и результаты исследования**

Электромеханическое энергопреобразование ЛУ МЛП осуществляется в процессе взаимодействия полей токов СПК и ДПК. Поэтому паттерном левитационной силы (ЛС) поезда является взаимодействие тока элемента СПК с полем токов ДПК. Такое взаимодействие может быть описано выражением закона Ампера [8]:

$$f_{\beta\gamma} = l_{\beta\gamma} \cdot i^{\beta\gamma} \cdot B_{\beta\gamma} \cdot \sin \alpha_{\beta\lambda}, \tag{1}$$

где  $f_{\beta\gamma}$  – сила, действующая на  $\gamma$ -тый элемент  $\beta$ -го СПК;  $l_{\beta\gamma}, i^{\beta\lambda}, B_{\beta\gamma}, \alpha_{\beta\lambda}$  – длина элемента, ток в нём, индукция поля, в котором элемент находится, а также угол между  $i^{\beta\gamma}$  и  $B_{\beta\gamma}$ .

Расчётные схемы СПК и секций ДПК приняты, соответственно, в виде наборов гальванически не связанных проводящих прямоугольных рамок, а также пар идентичных прямоугольных катушек, соединённых согласно нуль-поточной схеме [1]. Тогда ЛС поезда определима как векторная сумма величин  $\overline{f_{\lambda\chi}} \forall \lambda \in [1, N], \chi \in [1, 4]$ , каждая из которых, – это результат взаимодействия тока одного из элементов СПК с полем токов взаимодействующих с ним ДПК. В последнем выражении,  $N$  – число упомянутых СПК. Динамика электромагнитного компонента такого взаимодействия определяется уравнениями второго закона Кирхгофа [8]. Подсистема “СПК – ДПК”, как правило, вырождена [6] – ёмкостные показатели её элементов пренебрежимо низки. Потому, в инерциальной системе отсчёта  $Q\varepsilon^{\rho} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$ , модель электромагнитного компонента взаимодействия  $\beta$ -го СПК с учитываемыми (в этом взаимодействии) ДПК имеет вид [8, 9]:

$$\sigma_{\rho\beta} = L_{\rho\rho} \cdot \frac{d}{dt} i^{\rho} + L_{\rho\mu} \cdot \frac{d}{dt} i^{\mu} + r_{\rho} \cdot i^{\rho} \quad \forall \rho, \mu \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]; \tag{2}$$

$$\sigma_{\rho\beta} = \sigma_{\rho\beta}^u - \sigma_{\rho\beta}^l; \quad \sigma_{\rho\beta}^{\kappa} = -\frac{d}{dt} (M_{\rho\beta}^{\kappa} \cdot i_s^{\beta})$$

$$\forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \kappa = u \vee \kappa = l, \tag{3}$$

где  $\sigma_{\rho\beta}^{\kappa} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \kappa = u \vee \kappa = l$  – электродвижущие силы (э. д. с.), индуцируемые в катушках  $\rho$ -го ДПК при изменениях сцеплений с их подконтурными потоками тока  $i_s^{\beta}$  цепи  $\beta$ -го СПК;  $L_{\rho\rho}, L_{\rho\mu}, r_{\rho} \forall \rho, \mu \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$  – собственные и взаимные индуктивности, а также активные сопротивления ДПК;  $\chi_{\beta}$  – номер (от начала участка трассы, вдоль которого происходит движение МЛП) последнего ДПК, поперечную осевую линию которого миновала поперечная осевая линия  $\beta$ -го СПК;  $E$  – половина числа ДПК, с которыми учитывается электромагнитное взаимодействие каждого СПК;  $i^{\rho}, i^{\mu} \forall \rho, \mu \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$  – токи ДПК;  $M_{\rho\beta}^{\kappa} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \kappa = u \vee \kappa = l$  – взаимные индуктивности между  $\beta$ -ым СПК и катушками взаимодействующих с ним ДПК;  $t$  – текущее время.

Благодаря принятым конструкционным мерам [1], значения токов  $i_s^{\lambda} \forall \lambda \in [1, K]$ , изменяются достаточно медленно и, на интервалах, соизмеримых со временем наблюдения движения поезда, могут считаться равными между собой и постоянными

$$i_s^{\lambda} = i_s = const \quad \forall \lambda \in [1, K], \tag{4}$$

где  $K$  – число СПК, установленных на МЛП. Значение же  $E$  целесообразно выбирать так, чтобы по обеим сторонам от каждого  $\beta$ -го СПК в ДПК, предшествующих, а также следующих за учитываемыми, величины  $\sigma_{\rho\beta}^{\kappa} \forall \rho < \chi_{\beta} - E \vee \rho > \chi_{\beta} + E, \kappa = u \vee \kappa = l$ , даже в неравновесном состоянии ЛУ, были бы пренебрежимо малы.

Поскольку СПК движутся относительно ДПК, то величины  $L_{\rho\rho}, L_{\rho\mu}, M_{\rho\lambda}^{\kappa}$   $\forall \rho, \mu \in [(\chi_{\lambda} - E), (\chi_{\lambda} + E)], \lambda \in [1, K], \kappa = u \vee \kappa = l$  имеют циклически изменяющиеся во времени значения. Это, в свою очередь, приводит к нестационарности коэффициентов уравнений (2), (3) и, как отмечено, существенно снижает практическую ценность версии модели. С целью устранения указанного недостатка, реализацию слагающих ЛС МЛП следует рассматривать относительно координатных систем, в каждой из которых рассматриваемый СПК и учитываемые во взаимодействии с ним ДПК условно взаимно неподвижны. В таком качестве, удобнее всего принять [5] отсчётные системы  $C_{\lambda}\eta^{\mu} \forall \lambda \in [1, K], \mu \in [1, 3]$ , каждая из которых жёстко связана с  $\lambda$ -ым СПК. Инерциальными  $C_{\lambda}\eta^{\mu} \forall \lambda \in [1, K], \mu \in [1, 3]$ , в общем случае, не являются. В то же время, весьма желательно [10], чтобы уравнения, описывающие динамику электромагнитного компонента взаимодействия СПК с ДПК, имели тензорный характер. Такие уравнения могут быть получены [11], из равенств типа (2) путём замены в них локальных производных  $\frac{d}{dt}$  абсолютными  $\frac{D}{dt}$ , а также перехода в модели (2), (3) к координатам  $\eta_{\lambda}^{\mu} \forall \lambda \in [1, K], \mu \in [1, 3]$ . Соотношение между упомянутыми производными, как известно, имеет вид [11]:

$$\frac{D}{dt}\eta_{\alpha}^{\mu} = \frac{d}{dt}\eta_{\alpha}^{\mu} + e_{\mu\alpha\nu} \cdot \omega_{\alpha} \cdot \eta_{\alpha}^{\nu} \forall \mu, \nu \in [1, 3], \quad (5)$$

где  $e_{\mu\alpha\nu} \forall \mu, \nu \in [1, 3], \omega_{\alpha}$  - символ Леви-Чивита, а также вектор угловой скорости вращения  $C_{\alpha}\eta^{\mu} \forall \mu \in [1, 3]$ .

После указанной замены, соотношения, полученные из (2), приобретают тензорный характер. Поэтому, в частности, их форма становится инвариантной по отношению к координатам, в которых они записаны. Переход же к координатам  $\eta_{\alpha}^{\mu} \forall \mu \in [1, 3]$  осуществим согласно выражениям:

$$\eta_{\alpha}^{\mu} = \mathcal{G}_{\rho}^{\mu} \cdot \varepsilon^{\rho} \forall \rho \in [(\chi_{\alpha} - E), (\chi_{\alpha} + E)]; \mu \in [1, 3], \quad (6)$$

где  $\mathcal{G}_{\rho}^{\mu}$  – матрица преобразования координат:

$$\mathcal{G}_{\rho}^{\mu} = \frac{\partial \eta_{\alpha}^{\mu}}{\partial \varepsilon^{\rho}} \forall \rho \in [(\chi_{\alpha} - E), (\chi_{\alpha} + E)]; \mu \in [1, 3]. \quad (7)$$

На оси  $\eta_{\alpha}^{\mu} \forall \mu \in [1, 3]$  и  $\varepsilon^{\rho} \forall \rho \in [(\chi_{\alpha} - E), (\chi_{\alpha} + E)]$  могут проецироваться любые векторные величины, характеризующие электродинамику взаимодействия СПК и ДПК в системах отсчёта соответственно  $C_{\alpha}\eta^{\mu} \forall \mu \in [1, 3]$  и  $Q\varepsilon^{\rho} \forall \rho \in [(\chi_{\alpha} - E), (\chi_{\alpha} + E)]$ . В частности, ими могут быть векторы токов, э. д. с. и индукции полей.

Выражения для связей вида

$$\eta_{\alpha}^{\mu} = \eta_{\alpha}^{\mu}(\varepsilon^{\rho}) \forall \rho \in [(\chi_{\alpha} - E), (\chi_{\alpha} + E)]; \mu \in [1, 3] \quad (8)$$

могут быть получены исходя из того, что [5] в процессе описываемого координатного преобразования, его инвариантами являются амплитуды токов в рассматриваемых контурах, а также их э. д. с.

С помощью же матрицы

$$\mathcal{G}_{\mu}^{\rho} = \frac{\partial \varepsilon^{\rho}}{\partial \eta_{\alpha}^{\mu}} = (\mathcal{G}_{\rho}^{\mu})^T \forall \rho \in [(\chi_{\alpha} - E), (\chi_{\alpha} + E)]; \mu \in [1, 3], \quad (9)$$

осуществимо обратное преобразование

$$\varepsilon^{\rho} = \mathcal{G}_{\mu}^{\rho} \cdot \eta_{\alpha}^{\mu} \forall \rho \in [(\chi_{\alpha} - E), (\chi_{\alpha} + E)]; \mu \in [1, 3]. \quad (10)$$

В выражениях (3) для  $\sigma_{\rho\beta}^{\kappa} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$ ,  $\kappa = u \vee \kappa = l$ , значения величин  $M_{\rho\beta}^{\kappa} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$ ,  $\kappa = u \vee \kappa = l$  существенно зависят, в частности, от взаимного расположения рассматриваемого  $\beta$ -го СПК и ДПК, взаимодействие с которыми для него рассматривается. Поэтому

$$M_{\rho\beta}^{\kappa} = M_{\rho\beta}^{\kappa}(w_{\beta}) \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \kappa = u \vee \kappa = l, \quad (11)$$

где  $w_{\beta}$  – координата, определяющая текущее положение рассматриваемого  $\beta$ -го СПК относительно начала отсчёта движения МЛП вдоль оси пути. При этом, поскольку ДПК вдоль трассы движения поезда располагаются регулярно, последние зависимости имеют гармонический характер. В то же время, современные способы измерения позволяют [12] экспериментально-расчётными методами со вполне приемлемой точностью определять значения взаимных индуктивностей контуров магнитосвязанных электрических цепей при различном текущем их пространственном взаиморасположении. Это, в свою очередь, позволяет, используя упомянутые методы, поточечно строить искомые зависимости (11) на требуемой сетке  $w_{\beta}$ . Далее, с использованием методов, например, полиномиальной регрессии [13], реализация которых доступна в ряде современных систем компьютерной математики (например, Mathematica), зависимостям вида (11) может, с сохранением достаточно высокой точности содержания, быть придана форма аналитических выражений. Помимо того, с учётом равенств (4), выражения (3) могут быть преобразованы к виду

$$\sigma_{\rho\beta} = \sigma_{\rho\beta}^u - \sigma_{\rho\beta}^l; \quad \sigma_{\rho\beta}^{\kappa} = -i_s \cdot w_{\beta} \cdot \frac{d}{dw_{\beta}} M_{\rho\beta}^{\kappa} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \kappa = u \vee \kappa = l, \quad (12)$$

где  $w_{\beta}$  – скорость продольного (вдоль касательной к оси) движения рассматриваемого  $\beta$ -го СПК относительно пути. Значения  $\frac{d}{dw_{\beta}} M_{\rho\beta}^{\kappa} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$ ,  $\kappa = u \vee \kappa = l$  для подстановки в выражения (12) могут быть получены с использованием, созданных описанным путём в форме аналитических выражений, зависимостей вида (11). Таким образом, каждый из  $\beta$  векторов  $\sigma_{\rho\beta} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$  оказывается определённым в системе отсчёта  $Q\varepsilon^{\rho} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$ . Далее, с использованием соотношений вида (6) – (8), каждый такой вектор может быть определён в системе  $C_{\beta}\eta^{\mu} \forall \mu \in [1, 3]$  своими проекциями  $\sigma_{\mu\beta} \forall \mu \in [1, 3]$ .

После преобразований, уравнения, полученные из (2) и (3) путём их трансформации в триэдр  $C_{\beta}\eta^{\mu} \forall \mu \in [1, 3]$  с использованием соотношений (5) и (6), приобретают вид

$$\sigma_{\mu\beta} = L_{\mu\mu} \cdot \left( \frac{d}{dt} i^{\mu} + e_{\mu\nu} \cdot \omega_{\beta} \cdot i^{\nu} \right) + L_{\mu\tau} \cdot \left( \frac{d}{dt} i^{\tau} + e_{\tau\theta} \cdot \omega_{\beta} \cdot i^{\theta} \right) + r_{\mu} \cdot i^{\mu} \forall \mu, \nu, \tau, \theta \in [1, 3]; \quad (13)$$

$$\sigma_{\mu\beta} = g_{\rho}^{\mu} \cdot \sigma_{\rho\beta} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]; \mu \in [1, 3]$$

$$\sigma_{\rho\beta} = \sigma_{\rho\beta}^u - \sigma_{\rho\beta}^l; \quad \sigma_{\rho\beta}^{\kappa} = -i_s \cdot w_{\beta} \cdot \frac{d}{dw_{\beta}} M_{\rho\beta}^{\kappa} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \kappa = u \vee \kappa = l. \quad (14)$$

Уравнения (13) имеют постоянные коэффициенты, являются тензорными и описывают токовую динамику ЛУ МЛП в координатах  $i^{\mu} \forall \mu \in [1, 3]$ . После их (как правило – численного) разрешения относительно этих переменных, последние, с использованием соотношений (10), могут быть преобразованы в координаты  $i^{\rho} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$ , значения которых определяют реальные токи в цепях ДПК.

Магнитная цепь ЛУ предполагается ненасыщенной [1]. Поэтому она может считаться условно-линейной подсистемой и, следовательно, к ней применим принцип аддитивности. Исходя из этого, результирующее поле токов ДПК в любой точке геометрического пространства  $O\varepsilon_{\gamma} \forall \gamma \in [1, 3]$ , в котором реально движется СПК относительно ДПК, может описываться как сумма полей, создаваемых в этой точке токами отдельных модулей ДПК:



$$B_{\gamma\beta} = B_{\gamma\rho\beta} \cdot e^{\rho}; e^{\rho} = 1; \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \gamma \in [1, 3], \quad (15)$$

где  $B_{\gamma\beta}, B_{\gamma\rho\beta} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \gamma \in [1, 3]$  – пространственные компоненты индукции поля, создаваемого всеми (учитываемыми во взаимодействии с  $\beta$ -ым СПК) модулями ДПК, а также отдельными такими модулями в рассматриваемой точке этого пространства. В свою очередь, значения компонентов  $B_{\gamma\alpha\beta} \forall \gamma \in [1, 3]$  для каждого  $\alpha$ -ого модуля ДПК, определимы выражениями

$$B_{\gamma\alpha\beta}(i^{\alpha}) = B_{\gamma\alpha\beta}^u(i^{\alpha}) - B_{\gamma\alpha\beta}^l(i^{\alpha}) \forall \gamma \in [1, 3], \quad (16)$$

где  $B_{\gamma\alpha\beta}^{\kappa} \forall \gamma \in [1, 3], \kappa = u \vee \kappa = l$  – пространственные компоненты индукции поля токов катушек  $\alpha$ -го ДПК (взаимодействующего с  $\beta$ -ым СПК). Выражения для определения значений  $B_{\gamma\rho\beta}^{\kappa}(i^{\rho}) \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \gamma \in [1, 3], \kappa = u \vee \kappa = l$  получены в [14]. Далее, в соотношения вида (16) последовательно подставляются значения токов  $i^{\rho} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)]$  и, таким образом, находятся значения  $B_{\gamma\rho\beta} \forall \rho \in [(\chi_{\beta} - E), (\chi_{\beta} + E)], \gamma \in [1, 3]$ , а затем по ним, согласно (15), – и  $B_{\gamma\beta} \forall \gamma \in [1, 3]$ .

Поскольку пространство системы  $O\Xi_{\gamma} \forall \gamma \in [1, 3]$  – евклидово, то, исходя из его метрики, мгновенное значение модуля вектора полной индукции поля, создаваемого токами ДПК, взаимодействующих с  $\beta$ -ым СПК, может быть определено выражением

$$B_{\beta} = \sqrt{B_{\gamma\beta}^{(2)} \cdot e^{\gamma}}; e^{\gamma} = 1 \forall \gamma \in [1, 3]. \quad (17)$$

#### Выводы

Создана интегративная парадигма моделирования подвешивания МЛП, ассимилирующая достоинства теорий цепей и поля, но свободная от их недостатков. Построена ММ ПЛ МЛП, не имеющая дефектов предыдущих версий модели. Этим решена задача настоящей части исследования.

#### Список использованной литературы

1. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / В. А. Дзензерский, В. И. Омеляненко, С. В. Васильев, В. И. Матин, С. А. Сергеев – К.: Наук. думка, 2001. – 479 с.
2. Бочаров В. И. Транспорт на сверхпроводящих магнитах / В. И. Бочаров, И. С. Салли, В. А. Дзензерский – Ростов-на-Дону.: Изд-во РГУ, 1988 – 152 с.
3. Takahashi T. Suspension characteristics of magnetically suspended high-speed trains / Takahashi, K. Okuyama // Hitachi Review – 1972. – 21, № 8. – P. 59 – 66.
4. Takano I. Characteristics of magnetic levitation for high-speed trains / I. Takano // Proc. 4-th Int. Cryog. Eng. Conf. – Eindhoven, 1972. – P. 188 – 190.
5. Электрические машины (специальный курс) / Г. А. Сипайлов, Е. В. Кононенко, К. А. Хорьков – М.: Высш. шк., 1987. – 287 с.
6. Львович А. Ю. Электромеханические системы / А. Ю. Львович – Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. – 296 с.
7. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин / И. П. Копылов – М.: Высш. шк., 2001. – 327 с.
8. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи / Л. А. Бессонов – М.: Высш. шк., 1996. – 578 с.
9. Арменский Е. В. Единая теория электрических машин / Е. В. Арменский, И. В. Кузина – М.: Изд-во Московск. ин-та электрон. машиностроен., 1975. – 256 с.
10. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике / Г. Крон – М., Л.: Госэнергоиздат, 1955. – 275 с.
11. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский – М.: Наука, 1967. – 644 с.
12. Панфилов В. А. Электрические измерения / В. А. Панфилов – М.: Издат. дом “Академия”, 2006. – 288 с.
13. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Е. Корн – М.: Наука, 1973. – 831 с.
14. Бирюков В. А. Магнитное поле прямоугольной катушки с током / В. А. Бирюков, В. А. Данилов // Журнал технической физики. – 1961. – Т. XXXI, № 4. – С. 428 – 435.

УДК 534.1:539.3

Н.В. СМЕТАНКІНА, С.В. УГРИМОВ, О.М. ШУПІКОВ, Н.В. ДОЛГОПОЛОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НЕСТАЦІОНАРНОГО ДЕФОРМУВАННЯ  
ШАРУВАТОГО ОСКЛІННЯ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

*Запропоновано метод дослідження нестационарних коливань шаруватого оскління при ударному навантаженні. Метод ґрунтується на розвиненні шуканих функцій у тригонометричні ряди. Динамічна поведінка оскління досліджується в рамках двовимірної теорії шаруватих пластин. Модель ударної взаємодії базується на контактному законі Герца. Розглянуто коливання тришарового оскління при ударі твердим тілом. Результати розрахунку деформацій оскління добре узгоджуються з даними розрахунку на основі метода скінченних елементів та експериментальними даними.*

*Ключові слова:* шарувате оскління, ударне навантаження, нестационарні коливання.

Н.В. СМЕТАНКІНА, С.В. УГРИМОВ, А.Н. ШУПІКОВ, Н.В. ДОЛГОПОЛОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
СЛОИСТОГО ОСТЕКЛЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ**

*Предложен метод исследования нестационарных колебаний слоистого остекления при ударном нагружении. Метод основан на разложении искомым функций в тригонометрические ряды. Динамическое поведение остекления исследуется в рамках двумерной теории слоистых пластин. Модель ударного взаимодействия основана на контактном законе Герца. Рассмотрены колебания трехслойного остекления при ударе твердым телом. Результаты расчета деформаций остекления хорошо согласуются с данными расчета на основе метода конечных элементов и экспериментальными данными.*

*Ключевые слова:* слоистое остекление, ударное нагружение, нестационарные колебания.

N.V. SMETANKINA, S.V. UGRIMOV, O.M. SHUPIKOV, N.V. DOLGOPOLOVA

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine

**MODELING OF NONSTATIONARY DEFORMATION PROCESS OF LAMINATED GLAZING AT  
IMPACT LOADING**

*A method for analysis of non-stationary vibrations of laminated glazing at impact loading. The method is based on expansion of sought-for functions into trigonometrical series. Dynamical behavior of glazing is investigated within the framework of the two-dimensional theory of laminated plates. Model of impact interaction is based on the Hertzian contact law. Vibrations of a three-layer glazing are considered at impact by solid. Calculation results of strains are consistent with finite element method and experimental data.*

*Keywords:* laminated glazing, impact loading, non-stationary vibrations.

**Постановка проблеми**

Одним з основних конструктивних елементів транспортних засобів є шарувате оскління, яке може піддаватися інтенсивним динамічним навантаженням з подальшим крихким руйнуванням [1].

Найпоширенішими методами дослідження динамічної поведінки шаруватого оскління є чисельні методи, наприклад метод скінченних елементів (МСЕ) та метод граничних елементів. Теоретичні методи менш розроблені, що пов'язано зі складністю математичних моделей, які описують процес деформування таких оболонок при інтенсивних короткочасних впливах. Для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) оскління також застосовуються спрощені моделі шаруватих пластин або експериментальні дані [2]. Питання нестационарної динаміки шаруватих елементів залишаються недостатньо вивченими, що потребує подальшого розвитку та удосконалення методів розрахунку таких елементів.

**Аналіз публікацій за темою дослідження**

Через те, що теоретичне обґрунтування конструкторських рішень практично відсутнє у більшості випадків проектування шаруватого оскління транспортних засобів здійснюється на основі експериментальних даних шляхом емпіричного підбору пакету шарів [3]. Основними методами дослідження динамічного відгуку конструкції на ударні навантаження є чисельні методи, які пов'язані з дискретизацією розглядуваної системи, наприклад МСЕ [4]. Тому важливою задачею є розробка методів, які дозволяють подати розв'язок в аналітичному вигляді з урахуванням особливостей нестационарного деформування шаруватих конструкцій.

**Мета дослідження**

Метою роботи є розробка ефективного методу розрахунку нестационарних коливань шаруватого оскління при ударі твердим тілом.

**Математична модель шаруватого оскління.** Будемо розглядати скло як шарувату шарнірно оперту пластину, оскільки кріплення оскління здійснюється через гумовий ущільнювач до рамки, яка жорстко закріплюється у отворі. Шарувата пластина складається з  $I$  шарів сталі товщини  $h_i$ . Пластина віднесена до декартової системи координат, яка зв'язана із зовнішньою поверхнею першого шару. На координатній поверхні  $Ox_1x_2$  конструкція займає область  $\Omega$ , обмежену довільним контуром  $\Gamma$ . На оболонку діють нестационарні навантаження  $\mathbf{P} = \{p_j(x_1, x_2, t)\}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Припускається, що контакт між шарами виключає їхнє розшарування та взаємне проковзування.

Поведінка пластини описується рівняннями узагальненої теорії шаруватих пластин [5]

$$u_v^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_v + \sum_{k=1}^K \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{vk}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{vk}^i \right], \quad v = 1, 2,$$

$$u_3^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_3 + \sum_{\ell=1}^L \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^\ell u_{3\ell}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^\ell u_{3\ell}^i \right], \quad (1)$$

де  $h_j^k = (h_j)^k$ ;  $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$ ;  $\delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i$ ;  $i = \overline{1, I}$ ;  $u_\alpha^i$  ( $\alpha = \overline{1, 3}$ ) – переміщення точки  $i$ -го шару у на-

прямку осі  $Ox_\alpha$ ;  $u_v, u_3, u_{vk}^i, u_{3\ell}^i$  – коефіцієнти розвинення, які є функціями аргументів  $x_1, x_2, t$ ;  $K, L$  – максимальні степені поперечної координати для площинних ( $\alpha = 1, 2$ ) і поперечних ( $\alpha = 3$ ) переміщень точок  $i$ -го шару, які обираються в залежності від необхідної точності.

Прийняті кінематичні гіпотези при  $K=1, L=0$  еквівалентні гіпотезам Е.І. Григолюка та П. П. Чулкова, при  $K=1, L=1$  уточненій теорії першого порядку, при  $K=3, L=2$  – уточненій теорії вищого порядку [5].

Деформації шарів визначаються відповідно до формул Коші. Напруження і деформації у шарах пов'язані законом Гука. Рівняння руху пластини та граничні умови впливають з варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона з урахуванням гіпотез (1).

Рівняння руху в зусиллях та моментах для пластини мають вигляд [5]

$$\sum_{i=1}^I [L_\alpha^i - I_{\alpha 1}^i] + p_\alpha = 0,$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_\alpha} + N_{\alpha 2,2}^{ik_\alpha} - k_\alpha N_{\alpha 3}^{ik_\alpha-1} + h_i^{k_\alpha} \sum_{j=i}^{I-1} [L_\alpha^{j+1} - I_{\alpha 1}^{j+1}] - I_{\alpha k_\alpha+1}^i = 0, \quad (2)$$

де

$$L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}; \quad L_2^i = N_{22,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}; \quad L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0};$$

$$I_{\alpha r}^i = \frac{\rho_i h_i^r}{r} \left( u_{\alpha 0,tt} + \sum_{k=1}^{K_\alpha} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k,tt}^j + \frac{r h_i^k}{k+r} u_{\alpha k,tt}^i \right] \right); \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad k = \overline{1, K_\alpha}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Кількість рівнянь та граничних умов залежить від числа шарів і дорівнює  $(2K + L)I + 3$ .

**Математична модель ударного імпульсу при ударі твердим тілом.** При дослідженні відгуку шаруватих конструкцій на ударний вплив система рівнянь, що описує поведінку пластини, інтегрується одночасно з рівнянням руху індентора й умовою сумісності переміщень, що враховує контактне зближення індентора і пластини. Через те, що удар який наносять уламки конструкцій або каміння, можна вважати низькошвидкісним, контактне зближення можна визначати на основі розв'язку задачі Герца про вдавнення кулі в пружний півпростір [6].

Нехай пластина розташована горизонтально. Удар наноситься кульовим індентором радіуса  $R$  і масою  $M$  по зовнішній поверхні першого шару пластини. Індентор у момент зіткнення з пластиною має швидкість  $V_z$ .

Якщо індентор скидається на пластину з висоти  $H$ , швидкість зіткнення може бути визначена за формулою

$$V_z = \sqrt{2gH},$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

Рівняння руху індентора має вигляд

$$Mz_{,tt} = Mg - F, \quad z(0) = 0, \quad z_{,t}(0) = V_z, \quad (3)$$

де  $z = z(t)$  – переміщення індентора;  $F$  – сила контактної взаємодії індентора та пластини.

Умова сумісності переміщень записується як

$$w_0 + \alpha - z \geq 0,$$

де  $\alpha$  – контактне зближення індентора та пластини в центрі площі контакту  $(x_0, y_0)$ ;  $w_0 = w(x_0, y_0, t)$  – прогин пластини в точці  $(x_0, y_0)$ .

Контакт індентора та пластини відбувається при перетворенні даної нерівності на рівність

$$w_0 + \alpha - z = 0.$$

Контактне зближення  $\alpha$  урахується на основі розв'язання задачі Герца про вдавнення кулі в пружний півпростір

$$\alpha = \kappa_1 F^{2/3},$$

де  $\kappa_1 = \left[ \frac{9(\theta_1 + \theta)}{256R} \right]^{1/3}$ ;  $\theta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}$ ;  $\theta = \frac{4(1 - \nu^2)}{E}$ ;  $E, \nu$  – модуль Юнга й коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлений індентор;  $E_1, \nu_1$  – аналогічні характеристики матеріалу першого шару пластини.

Вважаємо, що контактний тиск розподіляється по круговій площадці радіусом  $a(t)$  за законом

$$p_3(x, y, t) = F_0(t) \left[ 1 - \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{a^2(t)} \right]^{1/2},$$

де  $x_0, y_0$  – координати точки дотику індентора й пластини.

Функція  $p_3(x, y, t)$  повинна задовольняти умові

$$F = \iint_S p_3 dS = \frac{2}{3} F_0 \pi a^2,$$

звідки

$$F_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2}.$$

Радіус області контакту  $a(t)$  обчислюється по формулі

$$a(t) = \left[ \frac{3}{16} F(t) R (\theta + \theta_1) \right]^{1/3}.$$

Розв'язок рівняння руху індентора одержано за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Значення контактної сили визначається з умови сумісності переміщень на кожному кроці за часом.

**Метод розв'язання.** Метод розв'язання системи рівнянь (2) для прямокутних шарнірно опертих шаруватих пластин полягає у наступному. Переміщення і зовнішні навантаження розвиваються у ряди по функціям, які задовольняють граничні умови, в результаті чого задача про коливання шаруватої пластини зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для пластин, що мають складну форму у плані, для розв'язання використовується метод занурення [7]. Згідно з цим методом замість вихідної пластини розглядається допоміжна шарнірно оперта прямокутна пластина з тією ж композицією шарів. В області  $\Omega$  допоміжна пластина навантажена так само, як і вихідна пластина. Тотожність НДС в області  $\Omega$  допоміжної пластини стану вихідної пластини забезпечується шляхом додавання компенсуючих навантажень  $q_j^{\text{comp}}(\varphi, t)$ ,  $j = \overline{1, 3I + 3}$ , які неперервно розподілені вздовж контуру  $\Gamma$ .

Система (2) інтегрується методом розвинення розв'язку у ряд Тейлора [1, 7].

Розв'язання рівняння руху індентора [3] одержуємо на основі інтегрального перетворення Лапласа у вигляді

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) + \frac{g}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{M} \int_{t_0}^t F(\tau)(t - \tau) d\tau,$$

де  $t_0$  визначає початковий момент часу;  $z = z(t)$  – переміщення індентора;  $F$  – сила контактної взаємодії індентора та пластини;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Далі ділянка інтегрування  $[0, t]$  розбивається на  $S$  відрізків так, щоб  $t = S\Delta t$ .

Введемо позначення

$$t_s = s\Delta t, \quad z(t_s) = z_s,$$

де  $s$  – номер кроку за часом.

Покладається, що контактна сила постійна  $F(\tau) = F_s$  в межах кожного відрізка  $t_s \leq \tau \leq t_{s+1}$ . Значення  $F_s$  виноситься за знак інтеграла з урахуванням того, що  $t_0 = s\Delta t$ , одержуємо остаточний вираз для переміщення індентора у вигляді рекурентних співвідношень

$$z_{s+1} = z_s + z'_s \Delta t + \frac{1}{2} \left( g - \frac{1}{M} F_{s+1} \right) \Delta t^2, \quad z'_{s+1} = z'_s + \left( g - \frac{1}{M} F_{s+1} \right) \Delta t,$$

де  $z_s = 0$ ,  $z'_s = V_z$ ,  $V_z$  – швидкість зіткнення пластини з індентором.

Контактний тиск  $p_3(x, y, t)$ , розподілений по круговій площадці, при ударі кульовим індентором по прямокутній шарнірно опертій пластині подається у вигляді розвинення в тригонометричний ряд

$$p_3(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{3mn}(t) B_{3mn}(x, y), \tag{4}$$

$$\text{де } p_{3mn} = \frac{12F(t)}{AB\rho_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x_0}{A} \sin \frac{n\pi y_0}{B} \left( \frac{\sin \rho_{mn}}{\rho_{mn}} - \cos \rho_{mn} \right); \quad \rho_{mn} = \pi a(t) \sqrt{\frac{m^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2}};$$

$$a(t) = \left[ \frac{3}{16} F(t) R (\theta + \theta_1) \right]^{1/3}; \quad \theta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}; \quad \theta = \frac{4(1 - \nu^2)}{E};$$

$E, \nu$  – модуль Юнга й коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлений індентор;  $E_1, \nu_1$  – аналогічні характеристики матеріалу першого шару пластини.

Значення контактної сили  $F_{s+1}$  визначається з умови сумісності переміщень індентора та пластини, яка є нелінійним рівнянням. З урахуванням виразів для коефіцієнтів розвинення (4) рівняння має вигляд

$$\kappa_2 F_{s+1} + \kappa_1 F_{s+1}^{2/3} + \kappa_3 = 0,$$

де

$$\kappa_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \pi_{33}^{mn} B_{3mn}(x_0, y_0) + \frac{\Delta t^2}{2M};$$

$$\kappa_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{3I+3} \Delta_{3k}^{mn} \Phi_{kmn}^s B_{3mn}(x_0, y_0) - z_s - z'_s \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2};$$

$$D_{mn} = \frac{12}{AB\rho_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x_0}{A} \sin \frac{n\pi y_0}{B} \left( \frac{\sin \rho_{mn}}{\rho_{mn}} - \cos \rho_{mn} \right).$$

**Аналіз результатів чисельних досліджень.** Для перевірки ефективності запропонованої методики розрахунку були проведені тестові розрахунки тришарового скла (305 x 305 мм) при ударі кулею  $M = 2$  г,  $R = 3,97$  мм на швидкостях 9,1 м/с, 12,2 м/с, 15,2 м/с і 18,3 м/с [8]. Зовнішні шари конструкції ( $h_1 = h_3 = 4,78$  мм), виготовлені зі скла силікатного з характеристиками  $E = 72$  ГПа,  $\nu = 0,25$ ,  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup> і з'єднані полівінілбутиралем ( $h_2 = 0,76$  мм) із  $E = 2,5714$  ГПа,  $\nu = 0,2857$ ,  $\rho = 1100$  кг/м<sup>3</sup> [8]. Характеристики кулі  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0,29$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

У табл. 1 наведені результати розрахунків максимальних значень деформацій посередині зовнішньої поверхні третього шару за допомогою запропонованого методу, а також аналогічні дані, отримані МСЕ на базі комплексу DYNA2D, а також експериментальні дані [8].

Таблиця 1

Максимальні деформації шарів тришарового скла

Швидкість, м/с	$\varepsilon_r \cdot 10^6$		
	запропонований метод	МСЕ	експериментальні дані
9,1	333	330	360±50
12,2	448	450	420±80
15,2	590	590	580±130
18,3	735	730	790±70

На рис. 1 показано зміння деформацій у часі у середній точці зовнішньої поверхні третього шару на швидкостях 18,3 м/с (цифра 1 на рисунку), 15,2 м/с (цифра 2), 12,2 м/с (цифра 3) і 9,1 м/с (цифра 4). Суцільна лінія відповідає результатам розрахунку запропонованим методом, пунктирна – МСЕ на базі комплексу DYNA2D [8]. Результати розрахунку за запропонованою методикою й результати розрахунку за допомогою DYNA добре погоджуються.

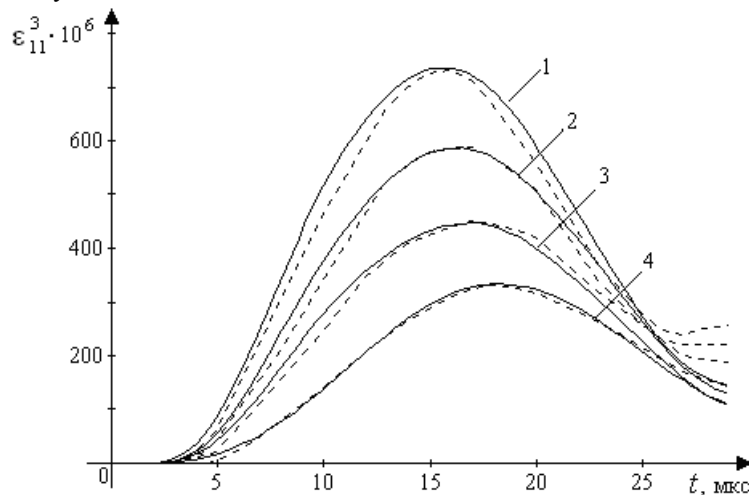


Рис. 1. Зміння деформацій у часі

Моделювання поведінки скла при низько- і високошвидкісному ударі відрізняється. У першому випадку істотне значення має спроможність скла поглинути енергію, перетворюючи її в гинні коливання конструкції, а в другому – процеси локального руйнування скла.

Однієї з важливих характеристик скла є здатність його поглинути енергію при ударі. Розглянемо двошарову композицію, що складається зі скла силікатного та полікарбонату ( $E = 2$  ГПа,  $\nu = 0,25$ ,  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>). Шари між собою не зв'язані. Розмір скла й композиція шарів показані на рис. 2, а умови закріплення скла – на рис. 3. Таке скло використовувалося при експериментальному дослідженні, результати якого наведені в роботі [9].

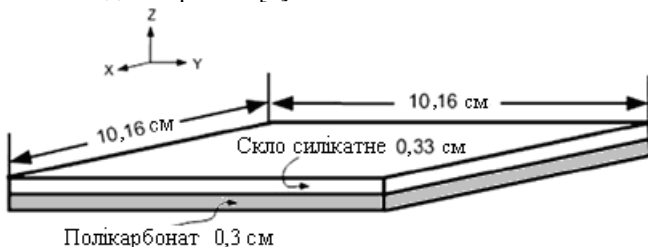


Рис. 2. Двошарова пластина

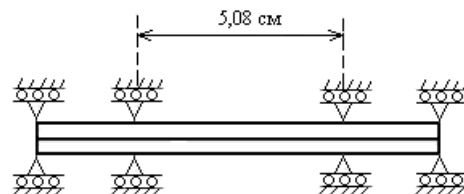


Рис. 3. Умови закріплення

Проведено розрахунок міцності скла для двох швидкостей удару 61 м/с і 100 м/с. У ході експериментальних досліджень було встановлено, що при таких ударах спостерігається розтріскування скла силікатного під точкою удару, а полікарбонат явних ушкоджень не отримав [9]. При цьому спостерігалось відкидання ударника назад, швидкість зворотного руху ударника складала 3 і 8 м/с відповідно [9]. При цьому енергія, яка поглинена склом, становить майже 99 %. Під поглиненою енергією розуміється  $MV^2/2 - MV_0^2/2$ , де  $V_0$  – швидкість відкидання.

Профіль швидкості руху ударника показаний на рис. 4. Суцільною лінією показані результати, отримані запропонованим методом, а пунктирною – з використанням «перидинамічного» формулювання [9]. Видно, що метод на стадії гальмування ударника добре узгоджується з результатами, наведеними в роботі [9]. Результати на етапі відкидання ударника дещо відрізняються. При цьому обидві розрахункові моделі дають завищене значення швидкості відкидання ударника в порівнянні з експериментальними значеннями. Це може бути наслідком як прийнятих умов кріплення зразка, які складно реалізувати в розрахунку, так і застосуванням у розрахунках спрощеної моделі руху ударника.

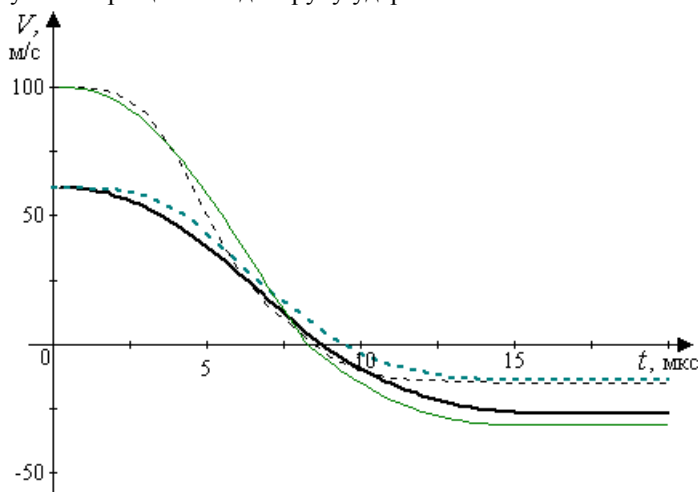


Рис. 4. Еволюція швидкості ударника

Відзначимо, що спрощений опис деформацій ударника й енергії, що йде на розтріскування скла, приводить до завищених значень швидкості відкидання й, відповідно, до занижених значень енергії, яка поглинається склом при ударі.

#### Висновки й перспективи подальших досліджень

Розроблено аналітико-чисельний метод дослідження нестационарних коливань шаруватих елементів оскління при ударному навантаженні, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді тригонометричного ряду.

Можливості методу проілюстровані на прикладі розрахунку деформацій тришарових шарнірно опертих елементів оскління при ударі кульовим індентором. Добре узгодження теоретичних і експериментальних даних підтвердило вірогідність результатів, одержаних за допомогою запропонованого методу.

Надалі метод можна застосувати до розрахунку шаруватих неплоских елементів з різною формою плану та різними граничними умовами при дослідженні коливань енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій під дією інтенсивних швидкоплинних навантажень.

Роботу виконано у рамках Цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України «Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин» («Ресурс-2»).

#### Список використаної літератури

1. Heimbs S. A numerical method for blast shock wave analysis of missile launch from aircraft / S. Heimbs, J. Ritzer, J. Markmiller // Intern. J. of Aerospace Engineering. – 2015. – Vol. 2015. – P. 1-8.
2. Juhachi O. Dynamic fracture experiment of laminated glass and its considerations / O. Juhachi, K. Sotoaki, K. Michitaka, K. Masashi, I. Makoto // Trans. JSME. Ser. A. – 1990. – Vol. 56, № 524. – P. 924-929.
3. Yang J. Experimental and FEM study of windshield subjected to high speed bird impact / J. Yang, X. Cai, C. Wu // Acta Mechanica Sinica. – 2003. – Vol. 19, № 6. – P. 543-550.
4. Tessler A. Refined zigzag theory for homogeneous, laminated composite, and sandwich beams derived from Reissner's mixed variational principle / A. Tessler // Meccanica. – 2015. – Vol. 50, № 10. – P. 2621-2648.
5. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А. Н. Шупиков, Я. П. Бузько, Н. В. Сметанкина, С. В. Угримов. – Харьков: Изд-во ХНЭУ, 2004. – 252 с.
6. Jones N. Structural impact / N. Jones. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 320 p.
7. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н. В. Сметанкина. – Харьков: Мисьдрук, 2011. – 376 с.
8. Dynamic strain in architectural laminated glass subjected to low velocity impact from small projectiles / R. A. Behr, P. A. Kremer, L. R. Dharani, F. S. Ji, N. D. Kaiser // J. of Materials Science. – 1999. – Vol. 34. – P. 5746-5756.
9. Impact damage on a thin glass plate with a thin polycarbonate backing / W. Hu, Ye. Wang, J. Yu, Ch.-F. Yen, F. Bobaru // Intern. J. of Impact Engineering. – 2013. – Vol. 62. – P. 152-165.

УДК 519.711.2:532.516.5

А.В. СОЛОНА

Дніпровський державний технічний університет

**ПОБУДОВА ДВОМІРНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ КОВШОВОГО  
ВАКУУМУВАННЯ З ПРОДУВКОЮ ІНЕРТНИМ ГАЗОМ**

*В статті подано математичну модель гідродинаміки газорідного середовища в металевій ванні при ковшовому вакуумуванні. Приведена візуалізація результатів, отриманих в програмі, реалізованій за наведеною математичною моделлю на мові С#. Досліджено вплив інтенсивності продувки інертним газом на ефективність видалення газових включень.*

*Ключові слова: ковшове вакуумування, продувка газом, газорідне середовище, гідродинаміка, математичне моделювання.*

А.В. СОЛЕНАЯ

Днепровский государственный технический университет

**ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА КОВШЕВОГО  
ВАКУУМИРОВАНИЯ С ПРОДУВКОЙ ИНЕРТНЫМ ГАЗОМ**

*В статье представлена математическая модель гидродинамики газожидкостной среды в металлической ванне при ковшовом вакуумировании. Приведена визуализация результатов, полученных в программе, реализованной по приведенной математической модели на языке С#. Исследовано влияние интенсивности продувки инертным газом на эффективность удаления газовых включений.*

*Ключевые слова: ковшевое вакуумирование, продувка газом, газожидкостная среда, гидродинамика, математическое моделирование.*

A.V. SOLONA

Dnipro State Technical University

**TWO-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF THE LADLE DEGASSING PROCESS WITH  
INERT GAS BLOWING CONSTRUCTION**

*The paper presents mathematical model of gas-liquid medium hydrodynamics in a metal bath during ladle degassing. The visualization of the results obtained in the program realized with the given mathematical model in the C# language is given. The influence of the gas blowing intensity on efficiency of the gas inclusions removing is studied.*

*Key words: ladle degassing, gas blowing, gas-liquid medium, hydrodynamics, mathematical modeling.*

**Постановка проблеми**

Технологічні процеси вакуумування сталі вносять вагомий внесок в підвищення якості металопродукції, в зв'язку з чим вони набувають все більшого поширення. В даний час основним способом вакуумування сталі є спосіб камерного вакуумування, який володіє широкими технологічними можливостями рафінування сталі під вакуумом, має просту конструкцію і вимагає менших капітальних витрат.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Майже всі середовища, які використовуються при виробництві сталі і при ковшовій обробці та розливці металу є багатофазними. Загальний підхід, який пропонується до побудови математичних моделей динаміки багатофазних середовищ дозволяє створювати моделі, які можуть бути реалізовані на сучасних електронно-обчислювальних машинах. Газорідне середовище має важливу особливість — ефективну стисливість. В [5] була представлена модель нестисливого середовища на випадок несоленодальності.

**Мета дослідження**

Метою роботи є побудова математичної моделі процесів гідродинаміки газорідного середовища в металевій ванні при ковшовому вакуумуванні для дослідження впливу інтенсивності продувки інертним газом на ефективність видалення газових включень.

**Виклад основного матеріалу**

При обробці розплаву сталі вакуумом відбувається продування нейтральним газом через донні фурми (VD). Зважаючи на непрозорість, агресивність та високу температуру розплаву, багато питань щодо процесу вакуумування залишаються нез'ясованими. Зокрема, важливими є визначення раціональних режимів продувки аргоном, за яких дегазация металу буде максимально ефективною, виходячи з можливих значень від 0 до 600 л/хв. За недостатньої інтенсивності продувки не відбувається необхідне для видалення



газів та включень перемішування сталі, а при надмірній інтенсивності можливе потрапляння шлаку та газів назад в сталь, що призводить до погіршення її якості.

Необхідно узагальнити представлену в [5] модель на випадок несоленоїдальності середовища та визначити доцільність його використання у порівнянні з наближенням нестисливого середовища. Для спрощення побудови моделі розглядатимемо двовимірний випадок.

*Математична модель.*

Динаміка газорідного середовища у несоленоїдальному випадку описується рівнянням Нав'є-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla(\nu_e \nabla \cdot \vec{v}) + (1 - \alpha) \vec{g} - \vec{\nabla} p', \quad (1)$$

доповненого рівнянням, що слідує з умови нерозривності:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \Phi(\vec{v}, \alpha), \quad (2)$$

рівнянням переносу газової фази:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \Phi(\vec{v}, \alpha) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{v}) \quad (3)$$

Введена для зручності функція  $\Phi(\vec{v}, \alpha)$  має наступний вигляд:

$$\Phi(\vec{v}, \alpha) = \psi_\alpha - \alpha \frac{d_2(\ln \rho_2^0)}{dt} - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{w}). \quad (4)$$

Характерною особливістю руху газорідного середовища є його несоленоїдальність (ефективна стисливість), тобто відмінність дивергенції барицентричних швидкостей від нуля. Стисливість в (4) може проявлятися, по-перше, завдяки наявності об'ємного джерела газової фази  $\psi_\alpha$ , по-друге, через стисливість газової фази (другий доданок) і, по-третє, завдяки міжфазному руху — останній доданок, в який входить швидкість руху газової фази відносно барицентричної швидкості середовища.

Припустивши, що в розглянутих умовах густина газової фази залежить лише від тиску  $\rho_2^0 = \rho_2^0(p)$ , отримаємо:

$$\frac{d_2(\ln \rho_2^0)}{dt} = \frac{\partial(\ln \rho_2^0)}{\partial p} \cdot \frac{d_2 p}{dt} = \xi \cdot \frac{d_2 p}{dt}. \quad (5)$$

Тоді (4) приймає вигляд:

$$\Phi(\vec{v}, \alpha) = \psi_\alpha - \alpha \frac{\rho}{\kappa \rho_{cm}} \vec{g}(\vec{v} + \vec{w}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{w}). \quad (6)$$

Дифузійна швидкість газової фази, яка входить в (6), має дві складові: колективну  $\vec{w}^c = w^c \cdot \vec{g} / g = 0.5$  м/с (взято з експериментальних даних) та турбулентну, яка визначається за допомогою коефіцієнту турбулентної дифузії газової фази  $\vec{w}^t = -(1/\alpha) \cdot D_e \vec{\nabla} \alpha$ :

$$\vec{w} = \vec{w}^c + \vec{w}^t \quad (7)$$

Для вирішення системи рівнянь (1) – (3) використаємо узагальнення методу розщеплення за фізичними факторами на випадок несоленоїдального руху середовища [2]:

**I етап**

$$\vec{v} = \vec{v}^n + \tau \left[ -(\vec{v}^n \cdot \nabla) \vec{v}^n + \vec{\nabla}(\nu_e \nabla \cdot \vec{v}^n) + (1 - \alpha^n) \vec{g} \right], \quad (8)$$

**II етап**

$$\Delta \tilde{p}^{n+1,k+1} = \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \Phi(\vec{v}^{n+1,k}, \alpha^{n+1,k}) \right] / \tau, \quad (9)$$

$$\alpha^{n+1,k+1} = \alpha^n + \tau \left[ \nabla \cdot (\alpha^{n+1,k} \vec{v}^{n+1,k}) + \Phi(\vec{v}^{n+1,k}, \alpha^{n+1,k}) \right], \quad (10)$$

$$\vec{v}^{n+1,k+1} = \vec{v} - \tau \vec{\nabla} \tilde{p}^{n+1,k+1}, \quad (11)$$

На першому етапі знаходимо поле проміжних швидкостей  $\vec{v}$  без врахування тиску. На другому етапі за допомогою неявної схеми методом ітерацій знаходимо поля тиску, швидкостей та концентрації газу. Рівняння другого етапу можна розв'язувати в єдиному ітераційному циклі, що дозволяє зекономити час розрахунку.

Щоб не розв'язувати кожен раз рівняння Пуассона на другому етапі, замінимо його відповідним еволюційним аналогом:

$$\tilde{p}'^{n+1,k+1} = \tilde{p}^{n+1,k} + \omega \cdot \left( \Delta \tilde{p}^{n+1,k} - \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \Phi(\vec{v}^{n+1,k}, \alpha^{n+1,k}) \right] / \tau \right). \quad (12)$$

Задачу вирішуємо у циліндричних координатах  $(r, \varphi, z)$ . Зважаючи на циліндричну симетрію в циліндричних координатах і припускаємо що фурма знаходиться по центру ковша, зводимо задачу до двовірної.

*Граничні умови для швидкостей.* На твердій поверхні для перпендикулярних складових швидкостей обираємо умову непротікання, а для паралельних складових — умову часткового прилипання:

$$v_{\perp}|_S = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} (\varphi(\chi) \cdot v)|_S = 0, \quad (14)$$

де  $\varphi(\chi)$  – функція, що залежить від коефіцієнта прилипання  $\chi$ , така, що при  $\chi=1$  умова перетворюється на умову повного прилипання, при  $\chi=0$  — в умову вільного ковзання, а при  $\chi=1/2$  — в умову половинного прилипання.

На вільній поверхні для перпендикулярних складових — умова непротікання, для паралельних — умова вільного ковзання:

$$v_{\perp}|_S = 0, \quad (15)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} v = 0. \quad (16)$$

*Граничні умови для коефіцієнту газозміщення.* На твердих поверхнях приймається умова непротікання:

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \alpha|_S = 0, \quad (17)$$

на вільній поверхні — умова вільного виходу:

$$\alpha|_S = 0. \quad (18)$$

Розрахункова область має форму усіченого конусу — рис.1. Розіб'ємо розрахункову область шаховою сіткою на елементарні комірки прямими, які паралельні координатним прямим з постійними вздовж кожної із осей кроками. Для розстановки граничних умов обрамляємо область додатковим шаром заграничних комірок — для кожного виміру з'являються по 2 додаткові шари. Тоді кроки за простором вздовж кожної з осей:

$$\Delta r = \frac{R}{M-2}; \quad \Delta z = \frac{H}{N-2} \quad (19)$$

де  $M$  – кількість комірок по радіусу,  $N$  – по висоті,  $R = \frac{R_{\epsilon} + R_{\eta}}{2}$ .

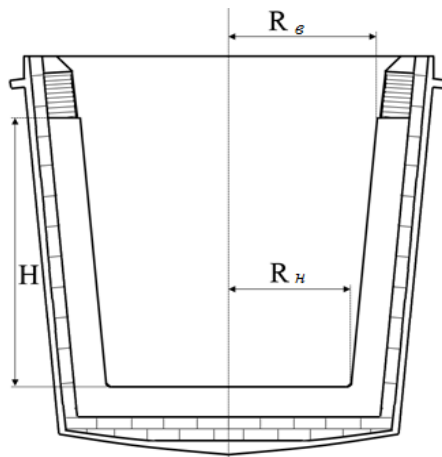


Рис. 1. Геометричні позначення

$H$  — висота,  $R_{\epsilon}$  — верхній радіус,  $R_{\eta}$  — нижній радіус

Для спрощення припускаємо що ківш має не конусну, а циліндричну форму і розбиваємо половину осьового перерізу ковша на комірки.

Безпосередньо до розрахункової області будуть відноситися комірки з номерами  $i=2, \dots, M-1$ ;  $j=2, \dots, N-1$ .

На шаховій сітці скалярні величини (в нашому випадку: тиск, коефіцієнт газовмісту, температура) задаються у центрах комірок, векторні (швидкість, в'язкість) — на їх гранях.

Рівняння першого етапу на шаховій сітці матимуть вигляд:

$$u_{i,j}^n = u_{i,j} + \Delta t * \left( \frac{1}{2} \frac{(i-2) * u_{i-1,j}^2 - i * u_{i+1,j}^2}{(i-1)\Delta r} - \frac{1}{4} \frac{(u_{i,j} + u_{i,j+1}) * (v_{i+1,j-1} + v_{i,j})}{\Delta z} + \left( \frac{\Delta z}{\text{Re}} + \Delta r * (b * |u_{i,j}| + a * |v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1} - v_{i,j} - v_{i,j-1}|) \right) * \frac{(i-0.5) * (u_{i,j} + u_{i+1,j})}{(i-1)\Delta r^2} + \left( \frac{\Delta z}{\text{Re}} + \Delta z * \left( \frac{b * |v_{i+1,j} + v_{i,j}|}{2} + \frac{a * (|u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - u_{i,j} - u_{i-1,j}| + |u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j}|)}{2} \right) \right) * \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{\Delta z^2} - \left( \frac{\Delta z}{\text{Re}} + \Delta z * \left( \frac{b * |v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}|}{2} + \frac{a * (|u_{i,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1}| + |u_{i+1,j+1} + u_{i,j} - u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}|)}{2} \right) \right) * \frac{(u_{i,j} - u_{i,j-1})}{\Delta z^2} \right) \quad (20)$$

$$v_{i,j}^n = v_{i,j} + \Delta t * \left( \frac{1}{2} \frac{v_{i,j-1}^2 - v_{i,j+1}^2}{\Delta z} - \frac{(i-1)}{4} \frac{(u_{i,j} + u_{i,j+1}) * (v_{i+1,j-1} + v_{i,j})}{(i-1.5)\Delta r} + \left( \frac{\Delta z}{\text{Re}} + \Delta z * (b * |v_{i,j}| + a * |u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - u_{i,j} - u_{i-1,j}|) \right) * \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta z^2} + \frac{1}{(i-1.5)\Delta r^2} * \left( \frac{\Delta z}{\text{Re}} + \Delta r * \left( \frac{b * |u_{i,j+1} + u_{i,j}|}{2} + \frac{a * (|v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1} - v_{i,j} - v_{i,j-1}| + |v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j} - v_{i,j+1} - v_{i,j}|)}{2} \right) \right) * (i-1) * (v_{i+1,j} - v_{i,j}) - \left( \frac{\Delta z}{\text{Re}} + \Delta r * \left( \frac{b * |u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}|}{2} + \frac{a * (|v_{i,j} + v_{i,j-1} - v_{i-1,j} - v_{i-1,j-1}| + |v_{i,j+1} + v_{i,j} - v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j}|)}{2} \right) \right) * (i-2) * (v_{i,j} - v_{i,j-1}) + f \right) \quad (21)$$

Підйомна сила  $f$  для випадку продувки інертним газом матиме вигляд:

$$f = \rho g \cdot \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{2} \quad (22)$$

Рівняння другого етапу в свою чергу можна записати наступним чином:

$$D_{i,j} = \frac{(i-1) * u_{i,j}^n - (i-2) * u_{i-1,j}^n}{(i-1.5)\Delta r} + \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta z} \quad (23)$$

$$p_{i,j} = p_{i,j} + w * \left( \frac{((i-1) * (p_{i+1,j} - p_{i,j}) - (i-2) * (p_{i,j} - p_{i-1,j}))}{(i-1.5)\Delta r^2} + \frac{(p_{i,j-1} - 2 * p_{i,j} + p_{i,j-1})}{\Delta z^2} - \frac{D_{i,j}}{\Delta t} \right) \quad (24)$$

*Обчислювальні експерименти*

Розрахунки проводитимемо для ковша ємністю 60 т з наступними параметрами: висота металу в заповненому ковші 2,21 м; середній радіус металевої ванни 1,1 м, початкова температура 1600 °С, атмосферний тиск у камері 100 Па. Дослідимо процес ковшового вакуумування з продувкою аргоном, використовуючи різні витрати газу. Будемо вимагати фізичної адекватності процесу.

На рис. 2-4 показані розподіли концентрацій аргону через 2,5 та 10 хв після початку продувки для витрат а) 60 л/хв, б) 120 л/хв, в) 480 л/хв.

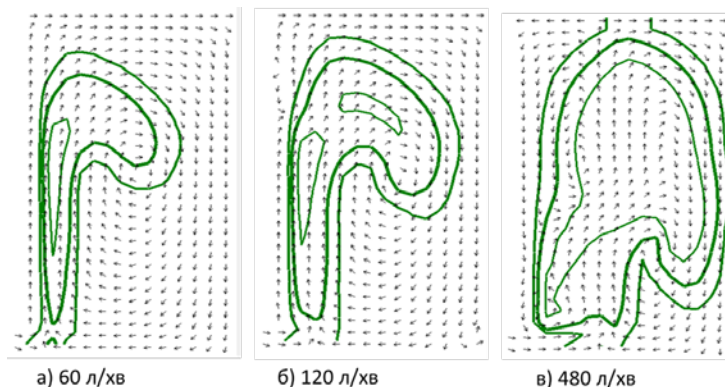


Рис. 2. Розподіл концентрацій інертного газу при різних його витратах через 2 хв після початку продувки

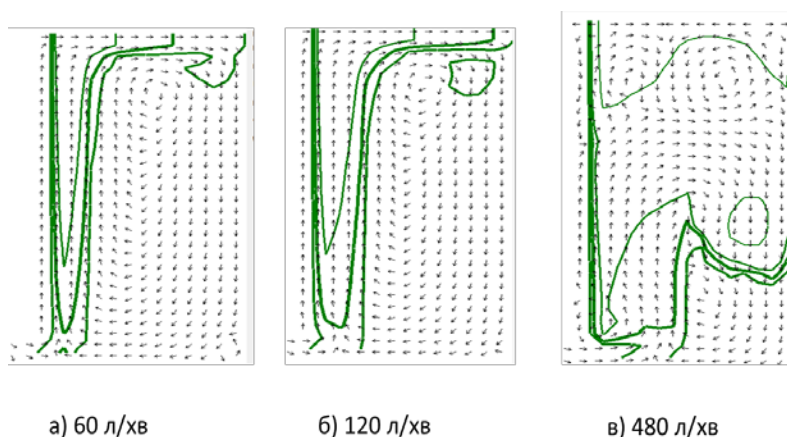


Рис. 3. Розподіл концентрацій інертного газу при різних його витратах через 5 хв після початку продувки

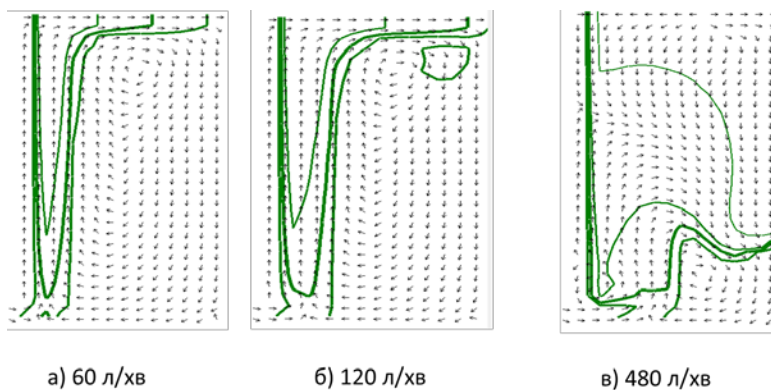


Рис. 4. Розподіл концентрацій інертного газу при різних його витратах через 10 хв після початку продувки.

**Висновки**

Як видно, при великій інтенсивності продувки інертний газ залишається у значній концентрації в середині розплаву, адже створювані доволі сильні потоки не дозволяють бульбашкам газу вільно покидати розплав. Аргон заноситься вглиб розплаву, що зменшує дегазаційний ефект вакуумування (варіант в)).

Зниження тиску в системі суттєво впливає на розвиток процесів, що протікають з утворенням газової фази, зокрема процесу окислення вуглецю. Окислення вуглецю в вакуумі відбувається в результаті його взаємодії з розчинним в сталі киснем. Рівноважна концентрація кисню визначається перебігом реакції окислення вуглецю, рівновага якої залежить від тиску. Вже при тиску 10 кПа і вмісті вуглецю, наприклад, 0,5% рівноважна концентрація кисню знижується до дуже низьких значень - 0,0005%.

Продувка нейтральним газом підвищує розкислювальну здатність вуглецю в вакуумі, полегшуючи умови виділення вуглецю введенням в метал готових газових бульбашок. Згідно з експериментальними даними продування металу аргонем дозволяє помітно знизити тиск, при якому спостерігається його вплив на ступінь розкислення, тобто збільшити розкислювальну здатність вуглецю.

**Список використаної літератури**

1. Кудрин В.А. Теория и технология производства стали. –М.: Мир. 2003г.
2. Недопекин Ф.В. Процессы переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. – Донецк: ДонГУ, 2013, – 422 с.
3. Никитенко Н.И. Теория тепломасопереноса. – К.: Наук. думка, 1983. – 352 с.
4. Огурцов А.П., Самохвалов С.С. Математичне моделювання теплофізичних процесів у багатофазних середовищах. – К.: Наук. думка, 2001. – 409 с.
5. Самохвалов С.С. Теплофізичні процеси в багатофазних середовищах: Теоретичні основи комп'ютерного моделювання. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 1994, – 172 с.
6. Сорокин Н.А., Богушевский Ю.В. Математическая модель волнообразования в сталеплавильной ванне. Сталь, 1995, № 2. 150с.

УДК 629.7

А.В. СОХАЦЬКИЙ, Є.В. МАЛЕНКО, В.А. СОХАЦЬКИЙ

Університет митної справи та фінансов  
Інститут транспортних систем та технологій НАН України**ЗВ'ЯЗАНА ЗАДАЧА АЕРОДИНАМІКИ ТА ДИНАМІКИ РУХУ  
ВИСОКОШВИДКІСНОГО МАГНІТОЛЕВІТУЮЧОГО  
ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ**

*Розглядається проблема математичного моделювання динаміки руху магнітолевітуючого транспортного засобу. Пропонується підхід, що ґрунтується на розв'язуванні зв'язаної задачі динаміки та аеродинаміки з використанням сингулярних інтегральних рівнянь.*

*Ключові слова: динаміка руху, аеродинаміка, числові методи*

А.В. СОХАЦЬКИЙ, Є.В. МАЛЕНКО, В.А. СОХАЦЬКИЙ

Університет таможенного дела и финансов  
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины**СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА АЭРОДИНАМИКИ И ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО  
МАГНИТОЛЕВИТИРУЮЩЕГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА**

*Рассматривается проблема математического моделирования динамики движения магнитолевитирующего транспортного средства. Предлагается подход, основывающийся на решении связанной задачи аэродинамики и динамики с использованием сингулярных интегральных уравнений.*

*Ключевые слова: динамика движения, аэродинамика, численные методы*

A.V. SOKHATSKY, E.V. MALENKO, V.A. SOKHATSKY

University of Customs and Finance  
Institute of Transport Systems and Technologies of Ukrainian  
National Academy of Science**ASSOCIATED TASK OF AERODYNAMICS AND DYNAMICS OF MOTION OF HIGH-SPEED  
MAGLEV OF TRANSPORT VEHICLE**

*Examined to the problems of mathematical design of dynamics of motion of maglev of transport vehicle. Offered approach, that is base on untiing of the associated task of dynamics and aerodynamics with the use of singular integral equalizations.*

*Keywords: dynamics of motion, aerodynamics, numerical methods*

**Постановка проблеми**

Сучасний високошвидкісний магнітолевітуючий транспортний засіб представляє собою сукупність пружних тіл змінної маси, що рухаються в середовищі зі змінними властивостями. Дослідження динамічних властивостей такої системи є надзвичайно складною проблемою, тому її заміняють механічною моделлю з відповідними спрощеннями. Зазвичай така модель уявляє собою кероване тверде тіло сталої маси, що має шість ступенів свободи. На нього діють аеродинамічні, гравітаційні, електромагнітні та інші сили. Під впливом цих сил транспортний засіб виконує складний рух, що описується системою диференціальних рівнянь в інерціальній системі координат.

Для дослідження його динаміки руху, необхідно розв'язати не тільки вказані диференціальні рівняння, але й знайти величини діючих аеродинамічних, гравітаційних електромагнітних та інших навантажень на елементи транспортного засобу [1–3].

Забезпечення стійкості руху магнітолевітуючого транспортного засобу має свої особливості:

- неусталений рух під впливом приземної турбулентності;
- вплив близькості землі на величини аеродинамічних характеристик;
- дія електромагнітних сил та моментів від системи магнітного підвісу;
- система тяги лінійного двигуну сприяє появи додаткових збурюючих сил та моментів;
- наявність зсуву бокового вітру в приземному шарі атмосфери;
- асиметрична дія усіх видів навантажень;
- обмеження кінематичних параметрів по величині у відповідності з конструктивними особливостями шляхової структури.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

В загальному випадку сама задача динаміки руху магнітолевітуючого транспортного засобу є надзвичайно складною і може бути досліджена найбільш повно тільки шляхом математичного моделювання з використанням високопродуктивних ЕОМ. Але і цей підхід натикається на істотні проблеми. Це обумовлено нелінійним характером досліджуваних рівнянь, неоднозначними та багатofункціональними залежностями параметрів руху, впливом передісторії руху і т.п. Дослідження динаміки руху транспортних засобів в основному проводилися для авіаційної галузі [3–5]. Для швидкісних транспортних засобів типу "Maglev" залишаються проблеми в зв'язку з тим, що дана задача розглядається відокремлено від інших.

**Мета дослідження**

Метою дослідження є математичне моделювання динаміки руху магнітолевітуючого транспортного засобу в рамках розв'язування зв'язаної задачі аеродинаміки та динаміки руху магнітолевітуючих транспортних засобів.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

**Розв'язування задачі.** Повна математична модель зв'язаної задачі аеродинаміки та динаміки руху транспортного засобу повинна включати в себе числову модель аеродинаміки, електромагнітної взаємодії, динаміки руху, дані фізичного моделювання, тестові розрахунки, аналіз та обробку результатів. Система рівнянь для розв'язування зв'язаної задачі аеродинаміки та динаміки руху транспортного засобу має вигляд

$$m \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V} \right) = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = H_q, \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \phi(\gamma, \vartheta, \psi, \dot{\gamma}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}, t), \quad (4)$$

$$\vec{F} = \vec{F}(p, k, \rho, V, h, \alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \psi, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \delta_c, P_{ps}), \quad (5)$$

$$\vec{M} = \vec{M}(p, k, \rho, V, h, \alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \psi, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \delta_c, P_{ps}), \quad (6)$$

де  $p$  – тиск,  $k$  – параметр, що характеризує турбулентний стан атмосфери,  $\rho$  – густина повітря,  $V$  – вектор швидкості руху,  $h$  – відстань до шляхової структури,  $\phi = \{\gamma, \vartheta, \psi\}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \psi, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$  – кути атаки, ковзання, крену, тангажу, ривання та їх похідні за часом,  $q = \{\rho, u, v, w, e, \vec{v}\}$   $E, F, G, \vec{\Phi}$  – сумарні конвективно-дифузійні потоки,  $H_q$  – вектор джерельних членів,  $P_{ps}$  – тяга силових установок,  $\delta_c$  – дія органів керування.

Теоретичні дослідження стійкості неусталеного руху пов'язані з труднощами, які на сьогодні вважаються такими, що не піддаються розв'язанню [3]. Основна проблема при розв'язанні цієї задачі пов'язана з необхідністю дослідження диференціальних рівнянь з змінними коефіцієнтами, загального розв'язку яких поки, що немає.

Для повного опису динаміки руху систему рівнянь (1–6) повинна містити диференціальні рівняння для визначення електромагнітних, аеродинамічних та тягових сил та моментів. Величини магнітних сил та моментів залежать від технології реалізації магнітного підвісу. На сьогодні відомо біля 50 схемних рішень систем електродинамічної левітації, яка виконує функції вертикального підвісу, бокової стабілізації та тяги [4–5].

Вважається, що найбільш ефективними, але і більш технологічно складними та високовартісними є системи підвісу з дискретними шляховими контурами [4–5]. На сьогодні найбільш ефективною вважається нуль-потоківна схема дискретних шляхових контурів з їх розміщенням в вертикальній площині паралельно один одному [4]. Секції шляхової обмотки в цих пристроях складаються з двох окремих котушок, розміщених одна над одною і з'єднаних зустрічно. Якщо надпровідний магніт рухається уздовж шляхового полотна так, що його поздовжня вісь симетрії не співпадає з поздовжньою віссю симетрії шляхових секцій, тобто є деяке вертикальне зміщення, то в шляховій обмотці починає протікати струм пропорційний зміщенню і, отже, виникає електромагнітна сила пропорційна зміщенню. Середнє та миттєве значення цієї сили визначається за формулою [4]:

$$F_L = \frac{1}{H} \int_{\frac{-H}{2}}^{\frac{H}{2}} f_L dx, \tag{7}$$

$$f_L = I_S \sum_{g=-\infty}^{g=\infty} i_g \frac{\partial M_{sg}}{\partial y}, \tag{8}$$

де  $i_g$  – величина струму в шляхових контурах,  $M_{sg}$  – коефіцієнт взаємодукції котушок.

Середня сила електродинамічного гальмування та її миттєве значення можуть бути розрахована за виразами [4]:

$$F_D = \frac{1}{H} \int_{\frac{-H}{2}}^{\frac{H}{2}} f_d dx, \tag{9}$$

$$f_d = I_S \sum_{g=-\infty}^{g=\infty} i_g \frac{\partial M_{sg}}{\partial x}. \tag{10}$$

Теплові витрати в контурах визначаються, як

$$P_g = \frac{1}{H} \sum_{g=-\infty}^{g=\infty} \int_{\frac{-H}{2}}^{\frac{H}{2}} i_g^2 R_g dx. \tag{11}$$

Величину струму  $i_g$  в шляхових контурах можна знаходити шляхом розв’язування диференціальних рівнянь через коефіцієнт взаємодукції  $M_{sg}$ :

$$R_g i_g + L_g \frac{di_g}{dt} = -I \frac{dM_{sg}}{dt}. \tag{12}$$

Для магнітозв’язаних шляхових контурів струм  $i_g$  дискретної шляхової може бути знайдений із системи рівнянь, складених згідно закону Кірхгофа [4]:

$$\begin{array}{cccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & + M_{-3-1} \frac{di_{-3}}{dt} & + M_{-2-1} \frac{di_{-2}}{dt} & + R_g i_{-1} & + L_g \frac{di_{-1}}{dt} & + & & \\ & + M_{0-1} \frac{di_0}{dt} & + M_{1-1} \frac{di_1}{dt} & + M_{2-1} \frac{di_2}{dt} & + M_{3-1} \frac{di_3}{dt} & + \dots & = e_{-1} & \\ & + M_{-3-0} \frac{di_{-3}}{dt} & + M_{-2-0} \frac{di_{-2}}{dt} & + M_{-1-0} \frac{di_{-1}}{dt} & + R_g i_0 & + & & \\ \dots & + L_g \frac{di_0}{dt} & + M_{1-0} \frac{di_1}{dt} & + M_{2-0} \frac{di_2}{dt} & + M_{3-0} \frac{di_3}{dt} & + \dots & = e_0 & \\ & + M_{-31} \frac{di_{-3}}{dt} & + M_{-21} \frac{di_{-2}}{dt} & + M_{-11} \frac{di_{-1}}{dt} & + M_{01} \frac{di_0}{dt} & & & \\ & + R_g i_1 & + L_g \frac{di_1}{dt} & + M_{21} \frac{di_2}{dt} & + M_{13} \frac{di_3}{dt} & + \dots & = e_1 & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \tag{13}$$

Індукована в  $g$ -ому контурі електрорушійна сила (ЕРС) визначається за формулою:

$$e_g = -I \frac{dM_{sg}}{dt}. \tag{14}$$

Струм в різних котушках шляхових обмоток змінюється з часом за однаковим законом зі зміщенням по фазі:



$$\dots = i_{-3} \left( t - \frac{3H}{V} \right) = i_{-2} \left( t - \frac{2H}{V} \right) = i_{-1} \left( t - \frac{H}{V} \right) = i_1 \left( t - \frac{H}{V} \right) = i_2 \left( t - \frac{2H}{V} \right) = i_3 \left( t - \frac{3H}{V} \right) = \dots \quad (15)$$

Взаємоіндуктивність рівновіддалених котушок вважається також однаковою:

$$\dots = M_{-3-1} = M_{-20} = M_{-11} = \dots \quad (16)$$

Інтегруючи систему рівнянь (19) в межах від  $-\infty$  до  $t$  з урахуванням початкових умов  $i_g(-\infty) = i_g(+\infty) = 0$  та використовуючи формулу трапецій (крок інтегрування  $\Delta t = H/V$ ), одержимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$|A||i| = |B|. \quad (17)$$

Розрахунок взаємної індуктивності контурів та їх похідних складає основу розрахунку електродинамічних зусиль, що діють на надпровідні контури. Слід відмітити, що конструктивні та геометричні параметри надпровідних контурів спричиняють значний вплив на величини електромагнітних характеристик. Залежності сил левітації та опору як функцій від швидкості транспортного засобу наводяться в роботі [4].

Фактично визначення електромагнітних зусиль, прикладених до надпровідних контурів, є надзвичайно трудомісткою задачею і вимагає окремого розрахунку. Це пов'язано з тим, що формування розрахункової моделі проводиться з урахуванням цілого ряду протиріч і залежить від конструктивної схеми. Для спрощення розрахунку при розв'язуванні зв'язаної задачі аеродинаміки та динаміки руху магнітолевітуючого транспортного засобу доцільно використовувати емпіричні співвідношення розрахунку магнітних сил кожного окремого надпровідного магніту як функцію його зміщення відносно шляхових секцій.

Проблема визначення аеродинамічних характеристик транспортних засобів, їх елементів та тіл різноманітної геометричної складності пов'язана з математичним моделюванням відривних турбулентних течій. Основна форма руху матерії – турбулентна і вона повинна описуватися законами механіки та фізики без залучення додаткових гіпотез та припущень [2]. Рівняння Больцмана одержано із рівнянь механіки та статистики. Із рівнянь Больцмана одержують рівняння Нав'є-Стокса, які описують тільки ламінарні течії. Вважається, що основний клас турбулентних рухів десь загублено [2]. На сьогодні основним інструментом для опису просторових турбулентних течій при відсутності зовнішніх сил залишаються осереднені рівняння Нав'є-Стокса [1, 2, 6, 7].

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Вектори  $\bar{\Phi}, \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  визначаються наступними виразами:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}u \\ \bar{\rho}v \\ \bar{\rho}w \\ \bar{E}_t \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}u \\ \bar{\rho}uu + \bar{p} - \bar{\tau}^s_{xx} \\ \bar{\rho}uv - \bar{\tau}^s_{xy} \\ \bar{\rho}wu - \bar{\tau}^s_{xz} \\ (\bar{E}_t + \bar{p})u - \bar{u}\bar{\tau}^s_{xx} - \bar{v}\bar{\tau}^s_{xy} - \bar{w}\bar{\tau}^s_{xz} + \bar{q}_x \end{bmatrix},$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}v \\ \bar{\rho}uv - \bar{\tau}^s_{xy} \\ \bar{\rho}vv + \bar{p} - \bar{\tau}^s_{yy} \\ \bar{\rho}vw - \bar{\tau}^s_{yz} \\ (\bar{E}_t + \bar{p})v - \bar{u}\bar{\tau}^s_{xy} - \bar{v}\bar{\tau}^s_{yy} - \bar{w}\bar{\tau}^s_{yz} + \bar{q}_y \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}w \\ \bar{\rho}uw - \bar{\tau}^s_{xz} \\ \bar{\rho}vw - \bar{\tau}^s_{yz} \\ \bar{\rho}ww + \bar{p} - \bar{\tau}^s_{zz} \\ (\bar{E}_t + \bar{p})w - \bar{u}\bar{\tau}^s_{xz} - \bar{v}\bar{\tau}^s_{yz} - \bar{w}\bar{\tau}^s_{zz} + \bar{q}_z \end{bmatrix},$$

де  $\bar{\tau}^s_{jk} = \bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho u^I_j u^I_k}$ .

Величина  $\overline{\rho u^I_j u^I_k}$  – складова тензора турбулентних напружень є додатковою невідомою. При запису осереднених рівнянь Нав'є-Стокса в декартовій системі координат є шість додаткових невідомих складових рейнольдсових напружень:  $-\overline{\rho u'^2}; -\overline{\rho v'^2}; -\overline{\rho w'^2}; -\overline{\rho u'v'} = -\overline{\rho v'u'}$ ;  $-\overline{\rho u'w'} = -\overline{\rho w'u'}$ ;  $-\overline{\rho v'w'} = -\overline{\rho w'v'}$ . Для спрощення розв'язання системи осереднених рівнянь Нав'є-Стокса часто

використовується модель турбулентної в'язкості. В даній роботі для замикання осереднених рівнянь Нав'є-Стокса використано диференціальну модель турбулентності Спаларта-Алмараса в реалізації від'єднаних вихорів. На рис. 1 показано розподіл тиску навколо корпусу транспортного засобу, одержаного шляхом чисельного розв'язування осереднених рівнянь Нав'є-Стокса.

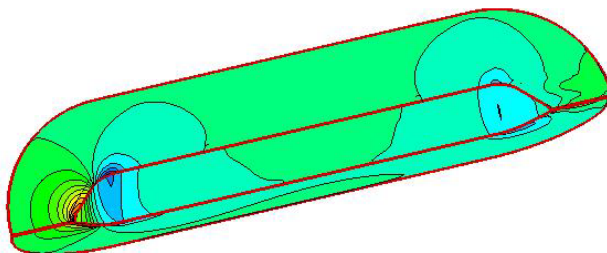


Рис. 1. Розподіл тиску навколо поверхні корпусу транспортного засобу в вертикальному і горизонтальному розрізах

Обмежені ресурси доступних ЕОМ не дозволяють розв'язати зв'язану задачу динаміки та аеродинаміки транспортного засобу з використанням осереднених рівнянь Нав'є-Стокса. У зв'язку з цим необхідні розробки моделей динаміки руху магнітолевітуючих транспортних засобів з різним рівнем складності. Наприклад, представлення газового потоку ідеальною рідиною дозволяє сформулювати її, як задачу Неймана для рівняння Лапласа. В такому випадку задача може приводитися до розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь [6–7]. Виникаюча проблема при розв'язуванні такої системи рівнянь полягає у тому, що сингулярний інтеграл – це інтеграл в звичайному значенні розбіжний і необхідні спеціальні процедури. Використання цього підходу дозволило провести розрахунок динаміки руху магнітолевітуючого транспортного засобу крилевої компоновки (рис.2).

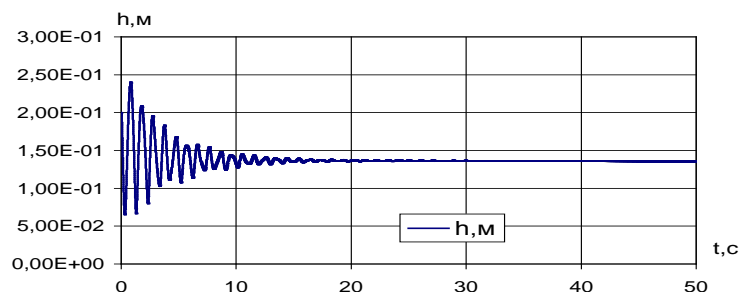


Рис. 2. Динаміка зміни відстані від транспортного засобу до шляхової структури при виникненні випадкових збурень

Таким чином проведені дослідження показують, що розв'язування зв'язаної задачі аеродинаміки та динаміки руху магнітолевітуючого транспортного засобу з метою створення раціональної аеродинамічної компоновки пропонується проводитися за наступним алгоритмом:

1. Математичне моделювання динаміки руху з використанням емпіричних та аналітичних залежностей для визначення аеродинамічних та електромагнітних сил та моментів.
2. Математичне моделювання динаміки руху з використанням сингулярних інтегральних рівнянь для визначення аеродинамічних параметрів та аналітичних залежностей для розрахунку електромагнітних навантажень.
3. Уточнення аеродинамічних та електромагнітних параметрів шляхом розв'язування окремих задач з використанням систем диференціальних рівнянь (13) та (18).
4. Моделювання динаміки руху шляхом розв'язування зв'язаної задачі аеродинаміки та динаміки руху з використанням скорегованих математичних моделей з застосуванням сингулярних інтегральних рівнянь для визначення аеродинамічних навантажень та аналітичних залежностей для розрахунку електромагнітних сил.

#### Список використаної літератури

1. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен [Текст] / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – Т.1. – 392 с. – Т.2. – 336 с.
2. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский, – М.: Изд. фирма "Физико-математическая литература", 1994. – 448 с.

3. Бюшгенс Г.С. Динамика самолета. Пространственное движение / Г.С. Бюшгенс, Р.В. Студнев. – М.: Машиностроение, 1983. – 320 с.
4. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / В.А. Дзензерский, В.И. Омеляненко, С.В. Васильев, С.А. Сергеев, – Киев: Наукова думка, 2001.– 480с.
5. Исследование колебаний стационарных режимов и устойчивости движения различных типов электродинамических транспортных систем / В.А. Дзензерский, Н.А. Радченко, Т.И. Кузнецова, Л.А. Филоненко, Н.М. Хачапуридзе // Техническая механика. – 2003. – № 1.– С.145-153.
6. Сохацький А.В. Застосування сингулярних інтегральних рівнянь для чисельного моделювання аеродинаміки несучих систем транспортних засобів // Вісник Академії митної служби України. – Дніпропетровськ: В-во АМСУ, 2006. – № 3(27). – С.81-88.
7. Сохацький А.В. Теоретичні основи створення аеродинамічних компонувань перспективних швидкісних транспортних апаратів : дис. ... доктора технічних наук : 05.07.01. / Сохацький Анатолій Валентинович. – Дніпропетровськ, 2010. – 364 с.

УДК 532.516

С.В. ТАРАСОВ, Д.А. РЕДЧИЦ, А.С. ТАРАСОВ

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины

С.В. МОЙСЕЕНКО

Херсонский национальный технический университет

**АЭРОДИНАМИКА J-ПРОФИЛЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ ВОЗДУХА  
ПРИ КРУГОВОЙ ПРОДУВКЕ**

*В работе проведено численное изучение физических особенностей турбулентного обтекания J-лопасти ротора Дарье вертикально-осевой ветроэнергетической установки для произвольного угла атаки. Численное моделирование выполнено на базе разработанного специализированного CFD пакета. Для моделирования турбулентности использовалось два подхода. Первый, основанный на моделировании на базе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (URANS), с использованием дифференциальной однопараметрической модели Spalart-Allmaras, адаптированной к тензору скоростей деформаций (SALSA), а второй – гибридный подход, основанный на моделировании отсоединенных вихрей с задержкой (DDES). Выделены этапы зарождения, развития и срыва вихрей при обтекании J-профиля лопасти ротора Дарье. Рассчитаны значения основных аэродинамических характеристик для произвольных углов атаки. Результаты вычислительных экспериментов показали, что подход, основанный на моделировании крупных вихрей с задержкой (DDES), лучше воспроизводит нестационарные физические особенности, возникающие при обтекании J-профиля.*

*Ключевые слова:* J-профиль, ротор Дарье, уравнения Навье-Стокса, модель турбулентности

С.В. ТАРАСОВ, Д.О. РЕДЧИЦЬ, А.С. ТАРАСОВ

Институт транспортних систем і технологій НАН України

С.В. МОЙСЕЄНКО

Херсонський національний технічний університет

**АЭРОДИНАМИКА J-ПРОФИЛЮ В ТУРБУЛЕНТНОМУ ПОТОЦІ ПОВІТРЯ  
ПРИ КРУГОВІЙ ПРОДУВЦІ**

*В роботі проведено чисельне вивчення фізичних особливостей турбулентного обтікання J-лопати ротора Дар'є вертикально-осьової вітроенергетичної установки для довільного кута атаки. Чисельне моделювання виконано на базі розробленого спеціалізованого CFD пакету. Для моделювання турбулентності використовувалося два підходи. Перший, заснований на моделюванні на базі усереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (URANS), з використанням диференціальної однопараметричної моделі Spalart-Allmaras, адаптованої до тензора швидкостей деформацій (SALSA), а другий - гібридний підхід, заснований на моделюванні відокремлених вихорів з затримкою (DDES). Виділено етапи зародження, розвитку і зриву вихорів при обтіканні J-профілю лопати ротора Дар'є. Розраховані значення основних аеродинамічних характеристик для довільних кутів атаки. Результати обчислювальних експериментів показали, що підхід, заснований на моделюванні великих вихорів з затримкою (DDES), краще відтворює нестационарні фізичні особливості, що виникають при обтіканні J-профілю.*

*Ключові слова:* J-профіль, ротор Дар'є, рівняння Нав'є-Стокса, модель турбулентності

S.V. TARASOV, D.O. REDCHYTS, A.S. TARASOV

Institute of Transport Systems and Technologies of Ukrainian National Academy of Science

S.V. MOISEENKO

Kherson National Technical University

**AERODYNAMICS OF J-AIRFOIL IN TURBULENT FLOW OF AIR  
AT ARBITRARY ANGLE OF ATTACK**

*The numerical study of the physical features of the turbulent flow past the J-blade of the Darrieus rotor of a vertical-axis wind turbine for an arbitrary angle of attack is carried out. The results of the experiments are presented in the form of graphs reflecting the dependence of the aerodynamic characteristics of the J-airfoil on the angle of attack. Numerical simulation was performed on the basis of the developed specialized CFD code. Two approaches were used to simulate of turbulence. The first, based on simulation based on the Reynolds averaged Navier-Stokes equations (URANS), using the differential one-equation strain-adaptive linear Spalart-Allmaras model (SALSA), and the second – a hybrid approach based on the detached eddy simulation with a delay (DDES). The stages of generation, development and stalling of vortices are described in the flow around the J-airfoil of the Darrieus rotor blade. The results of computational experiments showed that the approach based on the detached eddy simulation with a delay (DDES) better reproduces the nonstationary physical phenomena around J-airfoil.*

*Keywords:* J-airfoil, Darrieus rotor, Navier-Stokes equations, turbulence model

### Введение

За последнее десятилетие большое распространение получили вертикально-осевые (ВО) ветроэнергетические установки (ВЭУ). В их конструкциях используются хорошо известные роторы Савониуса, Дарье и их комбинации. Ротор Савониуса работает за счет силы лобового сопротивления в отличие от ротора Дарье, использующего действие подъемной силы.

Дальнейший прогресс в совершенствовании ВО ВЭУ может быть связан с внедрением аэродинамических профилей нового типа. Новая форма профиля, так называемый J-профиль, получается, если у стандартного профиля вырезать часть несущей поверхности [2]. Предполагается, что данная форма профиля позволяет работать лопасти ротора Дарье, как за счет подъемной силы, так и за счет силы лобового сопротивления. Применение J-профиля лопасти может повысить эффективность работы ВЭУ в целом, избежать возникновения «мертвых зон» и снизить минимальную скорость ветра необходимую ротору Дарье для самозапуска и работы. В сравнении с классическими, сверхкритическими и многоэлементными профилями J-профиль представляет собой новое семейство профилей, аэродинамические свойства которого фактически не изучены.

В настоящее время отсутствуют результаты численного моделирования этого класса течений на основе уравнений Навье-Стокса. Имеются отдельные разрозненные данные по применению J-профиля в качестве лопасти в экспериментальных ВО ВЭУ [10]. Однако это скорее эвристический подход, чем продуманная техническая конструкция.

### Цель работы

Целью настоящей работы является систематическое численное исследование аэродинамики J-профиля ротора Дарье на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости. Рассматривается турбулентное обтекание данного профиля для произвольного угла атаки. Кроме того необходимо выбрать адекватный подход к моделированию турбулентности, который позволит качественно и количественно передать нестационарную структуру обтекания J-профиля в широком диапазоне углов атаки при наличии массивного отрыва потока.

**1. Краткое описание натурального эксперимента.** Экспериментальные исследования модели лопасти вертикально-осевой ВЭУ, имеющей профиль с разомкнутым контуром (J-профиль) проводились в аэродинамической трубе Т-5, которая находится в лаборатории кафедры аэрогидромеханики и энергопереноса Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара. Данная аэродинамическая труба представляет собой установку замкнутого типа с открытой рабочей частью.

В натурном эксперименте длина хорды J-профиля составляет 0.185 м, толщина 0.001 м. Передняя часть профиля представляет собой часть окружности радиусом 0.03 м. В нижней части окружность сопрягалась с кривой, которая формирует закрытую часть профиля. Скорость набегающего потока составляла 30 м/с. Число Рейнольдса, рассчитанное по хорде и скорости набегающего потока, составляет  $3.7 \cdot 10^5$ . Геометрия J-профиля в безразмерных величинах приведена на рис. 1.

**2. Постановка задачи математического моделирования.** Проведено численное моделирование обтекания J-профиля с целью выявления физических особенностей процесса, изучения аэродинамических свойств в широком диапазоне углов атаки и выбора адекватной модели турбулентности при наличии массивного отрыва. Процессы аэродинамики J-профиля лопасти ротора Дарье описываются осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье-Стокса несжимаемой жидкости. Для моделирования турбулентности используется два подхода. Первый, основанный на моделировании на базе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, а второй – гибридный подход, основанный на моделировании отсоединенных вихрей с задержкой (DDES). В качестве базовых использовались многоблочные пересекающиеся структурированные сетки (типа Chimera). Такой вид сеток позволяет адекватно разрешать пограничные слои вблизи поверхности и строить сетки вокруг тел сложной геометрии. Результат генерации, согласования и оптимизации расчетных сеток приведен на рис. 2. Расчетная сетка содержала  $1.2 \cdot 10^5$  узлов. Нулевой угол атаки соответствует расположению J-профиля на рис. 1. В качестве начальных условий задавались параметры невозмущенного потока во всей расчетной области. На внешней границе применялись неотражающие граничные условия, для расчета которых использовался метод характеристик. На поверхности твердого тела ставилось условие прилипания. В модели турбулентности SALSA значение рабочей переменной на теле задавалось равным нулю, на выходной границе ставилось условие Неймана.

**3. CFD пакет и его верификация.** Для численного решения поставленной задачи использовался разработанный специализированный пакет вычислительной аэродинамики (CFD пакет) на основе уравнений Навье-Стокса, включая несколько дифференциальных моделей турбулентности, для расчета стационарных и нестационарных ламинарных и турбулентных течений.

Система исходных уравнений, записывалась относительно произвольной криволинейной системы координат. Согласование полей давления и скорости осуществлялось с помощью метода искусственной сжимаемости, модифицированного для расчета нестационарных задач [5].

Интегрирование системы исходных уравнений осуществлялось численно с использованием метода контрольного объема. Для конвективных потоков использовалась противопоточная аппроксимация Rogen-

Kwak [5], основанная на схеме Roe третьего порядка точности. В моделях турбулентности для аппроксимации конвективных слагаемых применялась схема TVD с ограничителем потоков ISNAS третьего порядка. Производные в вязких членах аппроксимировались центрально-разностной схемой второго порядка. Алгоритм решения уравнений базируется на трехслойной неявной схеме с подитерациями по псевдовремени второго порядка точности по физическому времени. Полученная блочно-матричная система линейных алгебраических уравнений решалась методом минимизации обобщенной невязки GMRES с  $ILU(k)$  предобуславливанием.

В качестве верификации разработанного CFD пакета рассмотрено обтекание неподвижного и вращающегося цилиндра; докритическое и закритическое обтекание неподвижного и колеблющегося профиля; турбулентное обтекание многоэлементного профиля; роторов ВО ВЭУ Дарье и Савониуса [1, 3, 4].

**4. Результаты и обсуждение.** Турбулентное обтекание J-профиля в широком диапазоне углов атаки носит нестационарный характер (рис. 3). На качество воспроизводства массивных вихрей и течения в целом ключевую роль играет выбор подхода к моделированию турбулентности.

Результаты вычислительных экспериментов для нулевого угла атаки (рис. 3) показали, что подход, основанный на моделировании крупных вихрей с задержкой (DDES), лучше воспроизводит нестационарные физические особенности, возникающие при обтекании J-профиля (рис. 3 в, г). Во внутренней полости J-профиля формируется каскад вихрей, которые взаимодействуют между собой и вихрями, сходящими с острой кромки. Образуется нестационарная отрывная область, из которой периодически выбрасываются вихревые структуры в область основного течения. Осредненные по времени аэродинамические характеристики (рис. 4) для данного угла атаки также отличаются, хотя и не так принципиально.

Существенные нестационарные явления наблюдаются при больших углах атаки профиля, хотя применяемые подходы дают несколько разную численную реконструкцию структуры потока (рис. 3 б, г, е). Так использование модели SALSА приводит к массивному отрыву с формированием в верхней части профиля одного крупного вихря, сопоставимого по размерам с хордой профиля. Наличие массивных вихрей в подветренной области профиля связано со слабым восстановлением давления в этой области, что дает завышенные значения осредненного коэффициента лобового сопротивления (рис. 4 а). В то же время применение DDES подхода приводит к формированию несколько меньшей зоны отрыва с серией мелких вихрей большей интенсивности (рис. 3 г). Такая картина обтекания представляется более реалистичной, обеспечивает лучшее согласование с экспериментальными данными (рис. 4). Общая тенденция такова: чем массивнее отрыв, тем больше расхождение между расчетными данными, полученными по модели SALSА и экспериментальными данными, особенно для осредненного по времени коэффициента лобового сопротивления (рис. 4 а). Детальное изучение физики процесса обтекания J-профиля и сравнение моделей турбулентности проведем при угле атаки  $90^\circ$ . Данный угол атаки соответствует расположению профиля поперек потока, открытой стороной в направлении набегающего потока. Характер обтекания носит нестационарный характер с массивными отрывными зонами и крупномасштабными вихрями в следе.

В начальный момент времени  $t = 0$  (рис. 5 а, б) в подветренной части J-профиля располагается крупномасштабный вихрь *a*. На верхней и нижней части зарождаются вихри *б* и *в*. Результаты, полученные по модели SALSА (рис. 5 а), отличаются от тех, что получены с помощью DDES (рис. 5 б), более крупными размерами и меньшей интенсивностью вихрей.

В следующий момент времени  $t = 2$  продолжается рост вихрей *б* и *в* в подветренной области профиля (рис. 5 в). Вихрь *a* перемещается вниз по потоку. В то же время вихрь *a* (рис. 5 г) смещается вверх и начинает взаимодействовать с каскадом вихрей, сошедших с верхнего края лопасти. Вихри в этой области намного меньше тех, что получены с использованием модели SALSА (рис. 5 в). Вихри *б* отличаются по своей интенсивности, хотя по размерам они очень схожи.

В момент времени  $t = 4$  (рис. 5 д, е) вихри *a* почти полностью покидают рассматриваемую область. Вихри *б* увеличиваются в размерах и сносятся вниз по потоку. Вихри *в* продолжают формироваться на острой кромке J-профиля. Для моментов времени  $t = 6$  (рис. 6 а) и  $t = 8$  (рис. 6 в) вихрь *б* сохраняет свою устойчивую форму и сносятся вниз по потоку. Вихрь *в* увеличивается в размерах и занимает половину длины хорды профиля. В те же моменты времени вихрь *б* распадается на каскад мелких вихрей, которые взаимодействуют друг с другом и основным потоком (рис. 6 б и рис. 6 г). Такое поведение вихрей более свойственно нестационарной структуре турбулентности. При  $t = 10-16$  (рис. 6, 7) в районе задней кромки профиля начинает образовываться вихрь *д*. Причем для модели SALSА этот вихрь имеет стабильную структуру, в то время как для DDES он распадается на десяток более мелких вихрей.

#### Заключение

В результате проведенных экспериментальных и численных исследований аэродинамики J-профиля ротора Дарье ВО ВЭУ получены нестационарные поля течений, а также рассчитаны значения аэродинамических характеристик в широком диапазоне углов атаки. Применение DDES подхода приводит к формированию несколько меньшей зоны отрыва с серией мелких вихрей большей интенсивности. Такая картина обтекания представляется более реалистичной, обеспечивает лучшее согласование с экспериментальными данными. Для выработки рекомендаций о применимости J-профиля в роторе Дарье ВО ВЭУ необходимо провести ряд дополнительных исследований в сравнении с классическими аэродинамическими профилями.

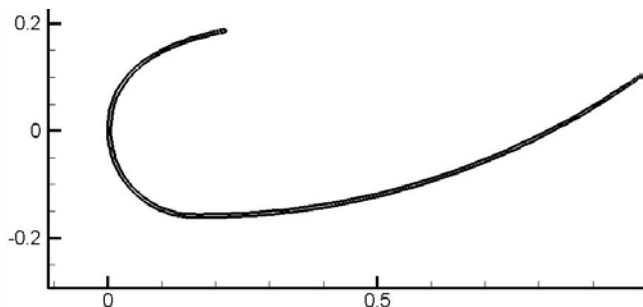


Рис. 1. Геометрия J-профиля

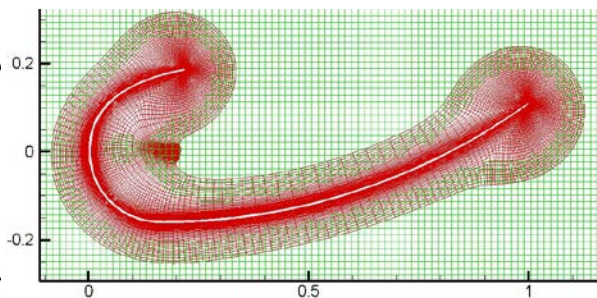
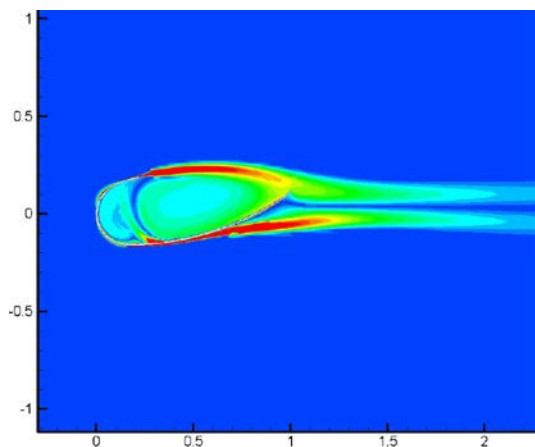
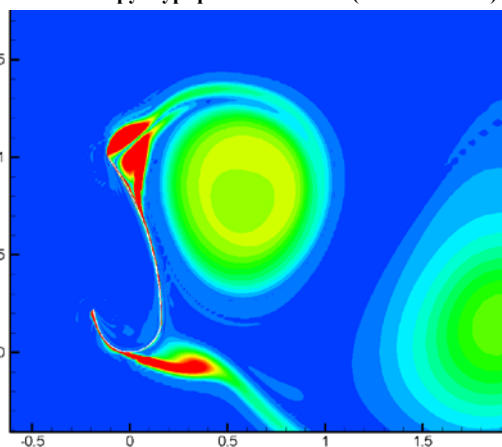


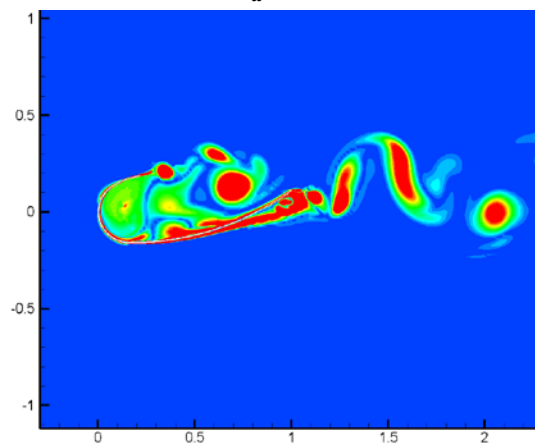
Рис. 2. Многоблочная пересекающаяся структурированная сетка (типа Chimera)



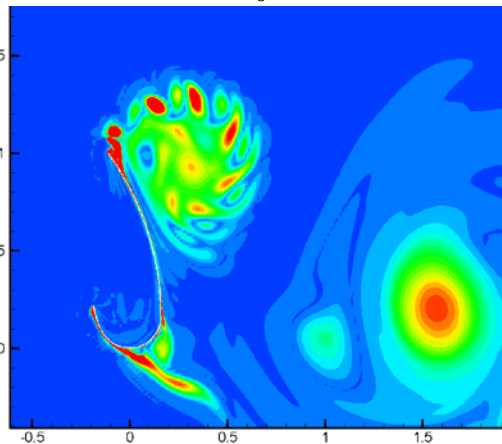
а



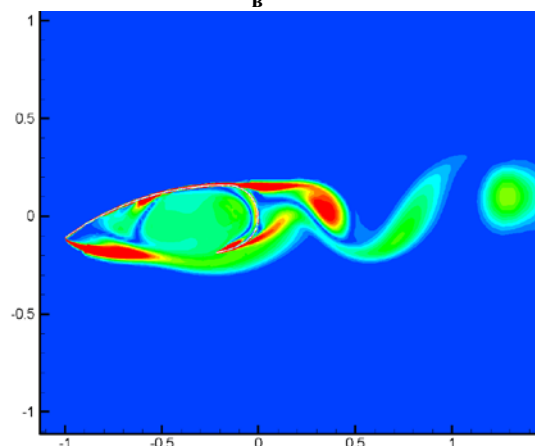
б



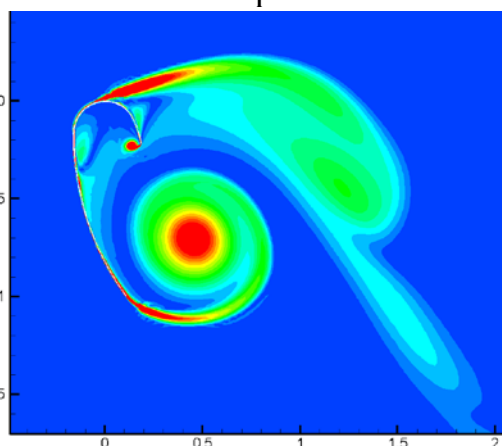
в



г



д



е

Рис. 3. Турбулентное обтекание J-профиля при углах атаки  $0^\circ$  (а),  $90^\circ$  (б, г),  $180^\circ$  (д) и  $270^\circ$  (е) моделями турбулентности SALSA (а, б, д, е) и DDES (в, г)



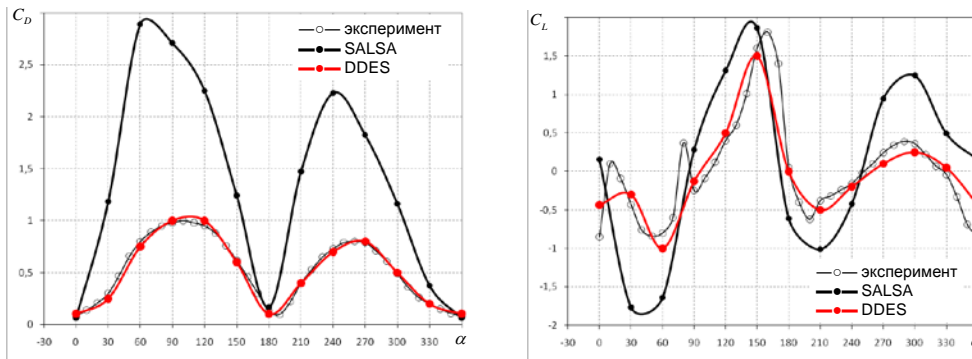


Рис. 4. Зависимость осредненных по времени коэффициентов лобового сопротивления (а) и подъемной силы (б) J-профиля от угла атаки

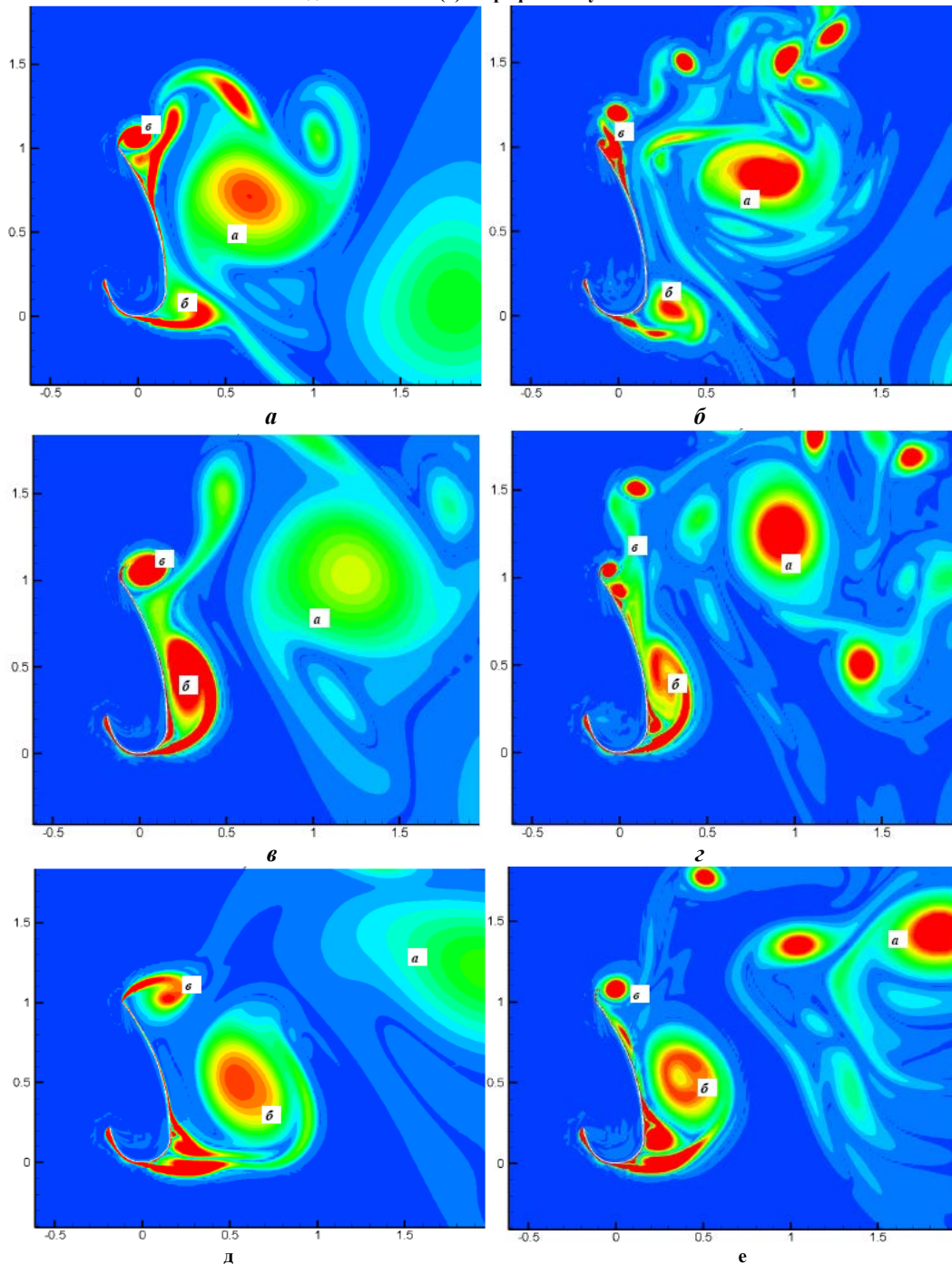


Рис. 5. Развитие течения при обтекании J-профиля (угол атаки 90°) в моменты времени 0 (а, б), 2 (в, г), 4 (д, е) моделями турбулентности SALSA (а, в, д) и DDES (б, г, е)



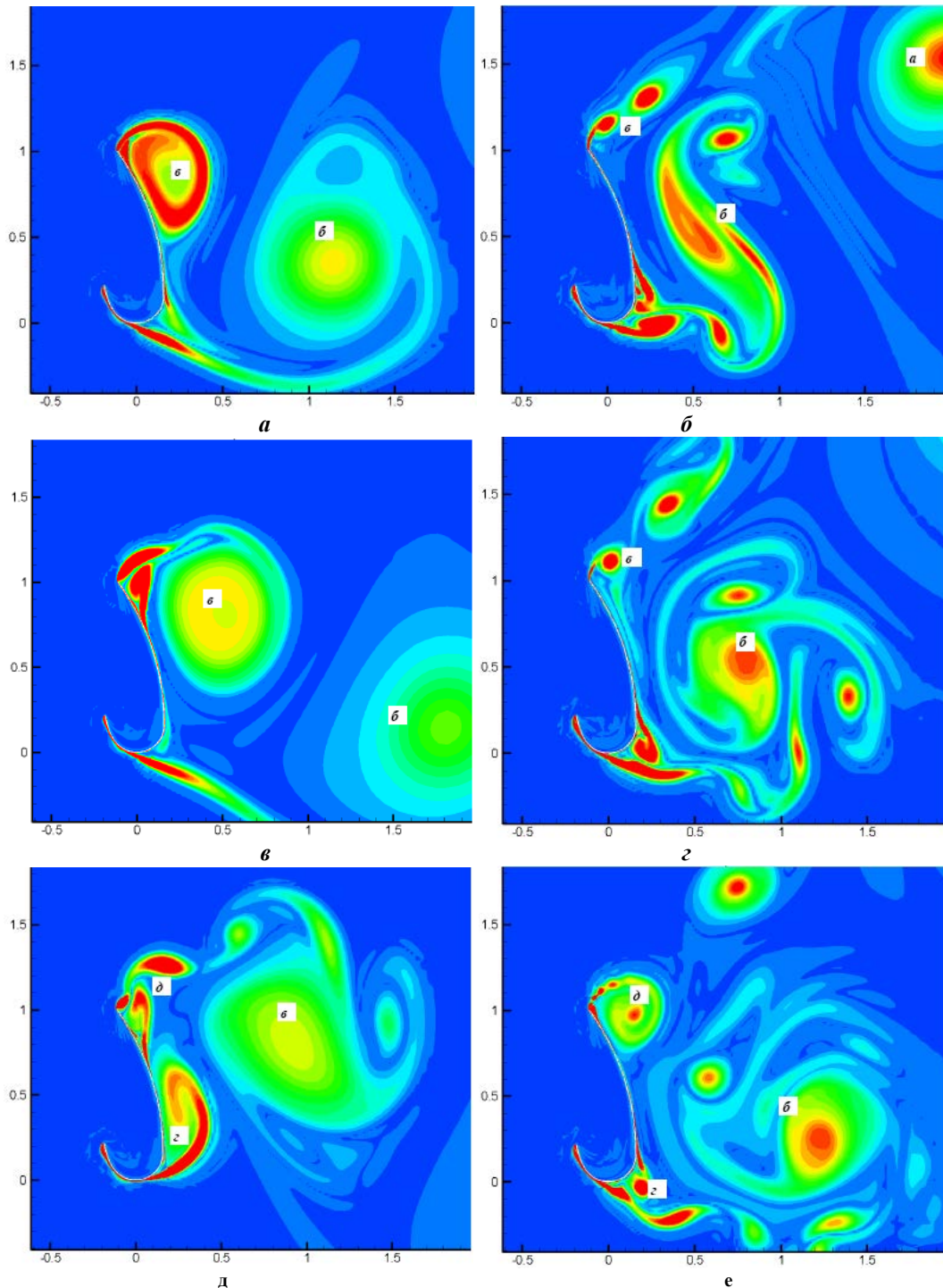


Рис. 6. Развитие течения при обтекании J-профиля (угол атаки 90°) в моменты времени 6 (а, б), 8 (в, г), 10 (д, е) моделями турбулентности SALSA (а, в, д) и DDES (б, г, е)

**Список использованной литературы**

1. Дзензерский, В. А. Математическое моделирование аэродинамики вертикально-осевой ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса [Текст] / В. А. Дзензерский, С. В. Тарасов, Д. А. Редчиц, Н. М. Хачапуридзе // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій.– 2012. – № 19. – С. 96–111.
2. Волков, Н. И. Аэродинамика ортогональных ветродвигателей (некоторые математические модели и численная реализация) [Текст] : навч. посіб. / Н. И. Волков. – Сумы: Мрія-1, 1996. – 198 с.
3. Редчиц, Д. А. Математическое моделирование отрывных течений на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса [Текст] / Д. А. Редчиц // Научные ведомости Белгород. гос. ун-та. Серия Математика Физика. – 2009. – № 13. Вып. 17. – С. 118–146.

4. Редчиц, Д. А. Математическое моделирование физических особенностей турбулентного обтекания многоэлементного профиля [Текст] / Д. А. Редчиц // Вестник Херсонского национального технического ун-та. – 2010. Вып. 3(39). – С. 398–403.
5. Rogers, S. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations [Text] / S. Rogers, D. Kwak // Journal Numerical Mathematics. – 1991. – Vol. 8. – P. 43 – 64.
6. Rung, T. Restatement of the Spalart-Allmaras eddy-viscosity model in strain-adaptive formulation [Text] / T. Rung, U. Bunge, M. Schatz, F. Thiele // AIAA Journal. – 2003. – Vol. 4, № 7. – P.1396–1399.
7. Spalart, P. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow [Text] / P. Spalart, S. Allmaras // AIAA Paper. – 1992. – № 0112. – P. 439 – 478.
8. Spalart, P. Comments on the feasibility of wings and on a hybrid RANS/LES approach [Text]/ P. Spalart, W. Jou, M. Strelets, S. Allmaras // Proc. of first AFOSR Int. Conf. on DNS/LES. – USA. – 1997. – P. 137–147.
9. Spalart, P. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities [Text] / P. Spalart, S. Deck, M. Shur, K. Squires, M. Strelets, A. Travin// Theoretical and Computational Fluid Dynamics. – 2006. – № 20. – P. 181– 195.
10. Vertical Axis Wind Turbines: Products and application [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cygnus-power.com>

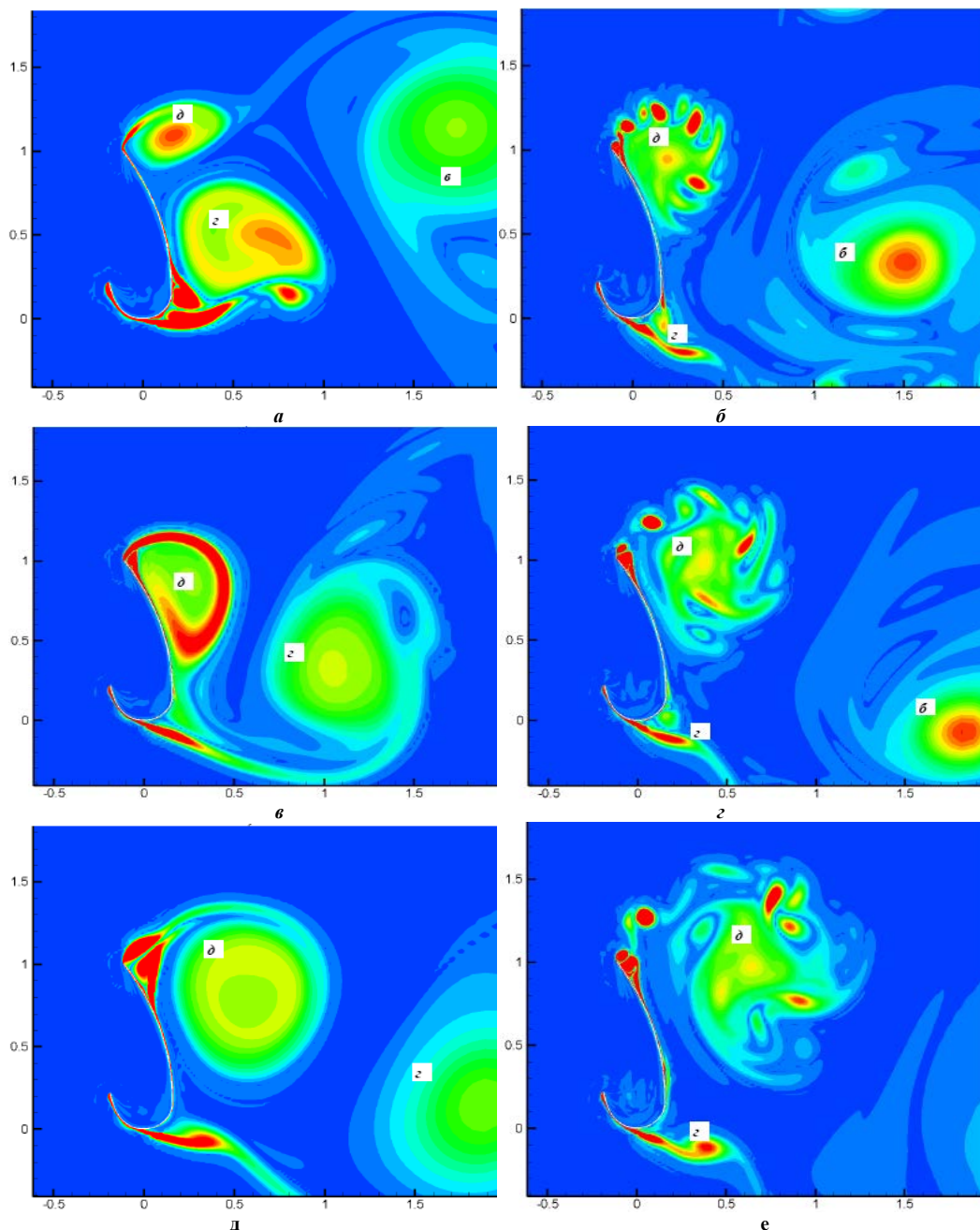


Рис. 7. Развитие течения при обтекании J-профиля (угол атаки 90°) в моменты времени 12 (а, б), 14 (в, г), 16 (д, е) моделями турбулентности SALSA (а, в, д) и DDES (б, г, е)

УДК 539.3

Л.А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, Т.С. СУШКО, А.А. ЕРЕМЕНКО  
Сумской государственной университет, Украина**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ  
МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ**

*Рассмотрена краевая задача разрушения конечной магнитоэластичной пластины, ослабленной трещинами. Задача сведена к смешанной системе алгебраических уравнений, сингулярных интегральных уравнений, дополнительным условиям и решена методом механических квадратур. Рассмотрены пластины в виде треугольника, квадрата и эллипса, и трещины в форме прямой и параболы. Получены результаты эффектов связности магнитоэластичных полей, граничные дефекты, которые возникают в окрестности границ пластины, коэффициентов интенсивности полевых величин, а также энергетический критерий разрушения.*

*Ключевые слова: магнитоэластичная среда, трещины, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности полевых величин, потоки энергии в вершинах.*

Л.А. ФИЛЬШТИНСЬКИЙ, Т.С. СУШКО, Г.А. ЄРЕМЕНКО  
Сумський державний університет, Україна**КРАЙОВА ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РУЙНУВАННЯ МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ  
КІНЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ**

*Розглянуто крайову задачу руйнування кінцевої магнитоелектропружної пластины, ослабленої тріщинами. Задача зведена до змішаної системи алгебраїчних рівнянь, сингулярних інтегральних рівнянь, додаткових умов і вирішена методом механічних квадратур. Розглянуто пластины у вигляді трикутника, квадрата і еліпса, і тріщини в формі прямої і параболі. Отримано результати ефектів зв'язності магнитоелектропружних полів, граничні дефекти, які виникають в околі границі пластины, коефіцієнтів інтенсивності польових величин, а також енергетичний критерій руйнування.*

*Ключові слова: магнитоелектропружне середовище, тріщини, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності польових величин, потоки енергії у вершинах..*

L.A. FILSHTINSKII, T.S. SUSHKO, H.A. YEREMENKO  
Sumy State University, Ukraine**THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF FRACTURE MECHANICS OF NOVEL  
MAGNETOELECTROELASTICITY FOR THE FINITE PLATE**

*The boundary value problem of the fracture mechanics of a finite magnetoelastoelectric plate weakened by cracks is considered. The problem is reduced to a mixed system of algebraic equations, singular integral equations, additional conditions, and solved by the method of mechanical quadratures. Plates in the form of a triangle, a square and an ellipse, and cracks in the form of a straight line and a parabola are considered. The results of connectivity effects of magnetoelastoelectric fields, boundary defects that arise in the vicinity of the plate boundaries, the field intensity coefficients, and the energy criterion for destruction are obtained.*

*Keywords: the magnetoelastoelectric medium, cracks, singular integral equations, intensity factors of mechanical electrical and magnetic values, energy fluxes in tips.*

**Постановка проблеми**

Детали машин и элементы конструкций в виде пластин разной конфигурации широко используются в инженерной практике. Их рабочий ресурс во многих случаях обосновывается наличием в таких элементах концентраторов напряжений типа трещин. В связи с этим большой теоретический и практический интерес представляет изучение распределения напряжений и деформаций около таких дефектов, а также формирование оценки критериев разрушения таких элементов с концентраторами напряжений при разных видах их нагрузки.

В декартовых осях  $Ox_1x_2$  рассмотрим пластину, ограниченную достаточно гладким замкнутым контуром  $\Gamma_0$ , содержащую трещины  $\Gamma_m$  ( $m = \overline{1, M}$ ). Будем считать, что трещины расположены случайным образом и их конфигурации также имеют случайный характер, тем не менее  $\Gamma_m$  – ляпуновские дуги и  $\bigcap \Gamma_j = \emptyset$ . Пусть на берегах  $\Gamma_m$  действует равномерное распирающее давление  $p_m$ . На внешнем контуре

$\Gamma_0$  зададим достаточно гладкие распределения электрического  $\varphi^E$ , магнитного  $\varphi^H$  потенциалов и компоненты вектора механического напряжения  $X_{1n}, X_{2n}$  (рис.1).

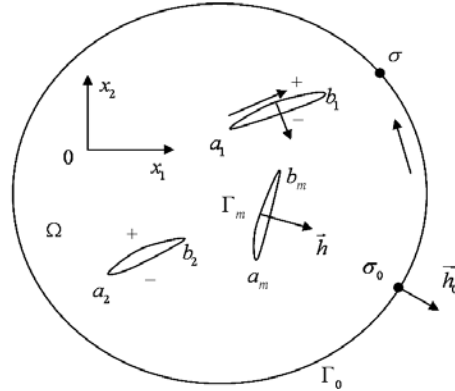


Рис. 1. Конечная пластина с трещинами под действием равномерных физических полей

Задача заключается в построении численного алгоритма позволяющего определить зависимость параметров разрушения от свойств материала и геометрии трещин и пластины.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Огромный теоретический и практический интерес представляет исследования влияния внешних границ тела, которое деформируется, на замену интенсивности напряжений около вершины острого дефекта. Основные результаты, известные до сегодняшнего времени, относятся к случаю плоского растяжения ограниченных пластин, ослабленных дефектами типа трещин. В работах [1–3] были продолжены исследования в этой области.

**Формулирование цели исследования**

**Постановка задачи и метод решения.** Математическая модель двумерной магнитоэластостатики содержит:

Материальные уравнения [4]

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ 2\sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Дифференциальные уравнения равновесия, электро и магнитоэластики [5,6]

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2)$$

$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \quad \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad \partial_1 H_2 + \partial_2 H_1 = 0 \quad (3)$$

Соотношения Коши

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad 2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 \quad (4)$$

Условие совместности деформаций

$$\partial_1^2 e_{22} + \partial_2^2 e_{11} = 2\partial_1 \partial_2 e_{12} \quad (5)$$

В (1)–(5):  $s_{ij} = s_{ij}^{DB}$  – коэффициенты деформации, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей,  $g_{kj} = g_{kj}^{DB}$  и  $p_{kj} = p_{kj}^{DB}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженности, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{kl} = \beta_{kl}^\sigma$ ,  $\chi_{kl} = \chi_{kl}^\sigma$  и  $\nu_{kl} = \nu_{kl}^\sigma$  – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях;  $u = (u_1, u_2)$  – вектор перемещения;  $\sigma_{ij}$  и  $e_{ij}$  –

тензоры напряжения и деформации;  $D_i$  и  $B_i$  – компоненты векторов электрической и магнитной индукции;  $E_i$  и  $H_i$  – электрическая и магнитная напряженности полей.

К этим соотношениям необходимо присоединить соответствующие механические, электрические и магнитные краевые условия на полной границе многосвязной области

$$\Gamma_0 + \Gamma, \Gamma = \bigcup \Gamma_m \left( m = \overline{1, M} \right), \Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset, \Gamma_j \cap \Gamma_i = \emptyset \left( i \neq j \right)$$

Механические краевые условия

$$X_{1n}|_{\Gamma_0} = f_1(\zeta), X_{2n}|_{\Gamma_0} = f_2(\zeta), X_{1n}^\pm|_{\Gamma_m} = -p_m \cos \psi, X_{2n}^\pm|_{\Gamma_m} = -p_m \sin \psi, \left( m = \overline{1, M} \right). \quad (6)$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу разреза  $\Gamma_m$  (при движении от его начала  $a_m$  к концу  $b_m$ ),  $\psi$  – угол между положительной нормалью к левому берегу и лучом  $Ox_1$ ,

Электрические и магнитные краевые условия

$$E_s|_{\Gamma_0} = f_3(\zeta), H_s|_{\Gamma_0} = f_4(\zeta), D_n^\pm|_{\Gamma_m} = 0, B_n^\pm|_{\Gamma_m} = 0 \quad (7)$$

Краевая задача сводится к задаче теории функций комплексного переменного. Комплексные представления полевых величин имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_{11}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{D_1, D_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{12}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{B_1, B_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{13}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{E_1, E_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^E \Phi_k(z_k), \{H_1, H_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^H \Phi_k(z_k), \\ \{u_1, u_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k, q_k\} \phi_k(z_k), \\ z &= x_1 + ix_2, z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Phi_k(z_k)$  – аналитические функции своих комплексных переменных,  $\mu_k$  – характеристические числа, величины  $A_{ij}(1, \mu_k)$ ,  $\alpha_k^H$  и  $\alpha_k^E$ ,  $p_k$ ,  $q_k$  – комплексные величины, зависящие от свойств материала пластинки.

Краевые условия (6)-(7) на  $\Gamma_0$  и  $\Gamma = \bigcup \Gamma_m$  представимы в единообразном виде:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 a_{0k}(\psi) \Phi_k^+(\sigma_{0k}) &= F_{0n}, \sigma_{0k} \in \Gamma_0 \left( n = \overline{1, 4} \right) \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} a_k(\psi) \Phi_k^+(\zeta_{0k}) &= F_n^\pm, \zeta_{0k} \in \Gamma = \bigcup_{m=1}^M \Gamma_m, a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi \end{aligned} \quad (9)$$

где  $R_{nk}$ ,  $R_{nk}^0$  – элементы матриц материальных коэффициентов,  $F_{0n}$ ,  $F_n^\pm$  – компоненты векторных функций, задающих граничные условия.

### Изложение основного материала исследования

Для решения краевой задачи теории функций (8)-(9) воспользуемся обобщением формализма, разработанного одним из авторов в [8]. Комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  представим в виде обобщенных интегралов типа Коши:

$$\Phi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma) d\sigma_k}{(\sigma_k - z_k) a_{0k}(\psi)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta) d\zeta_k}{(\zeta_k - z_k) a_k(\psi)}, \quad \left( k = \overline{1, 4} \right) \quad (10)$$

Подстановка предельных значений на соответствующих контурах (10) в граничные условия (9) приводит к смешанной системе алгебраических и сингулярных интегральных уравнений относительно искомых плотностей  $\omega_{0k}(\sigma)$  и  $\omega_{1k}(\zeta)$ :

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \omega_{0k}(\sigma) = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \omega_{1k}(\zeta) = 0 \quad (n=1,4) \\
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \frac{a_{0k}(\psi_0)}{2\pi} \left( \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \sigma_{0k}} ds_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \sigma_{0k}} ds \right) = F_{0n}(\sigma_0) \\
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \frac{a_k(\psi_0)}{2\pi} \left( \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \zeta_{0k}} ds_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds \right) = F_n(\zeta_0) \quad (11) \\
 & \zeta_k = \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta, \quad \omega_k(\zeta) = \left\{ \omega_k^{(m)}(\zeta), \zeta \in \Gamma_m \right\} \\
 & a_{ok}(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi, \quad \frac{d\sigma_k}{a_{ok}(\psi)} = ds_0 \\
 & z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z, \quad z = x_1 + ix_2 \in \Omega, \quad \frac{d\zeta_k}{a_{ok}(\psi)} = ds \\
 & \sigma_k = \operatorname{Re} \sigma + \mu_k \operatorname{Im} \sigma, \quad \sigma \in \Gamma_0
 \end{aligned}$$

Здесь  $ds$  и  $ds_0$  – элементы дуг  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$  в физической плоскости, соответственно.

Для замыкания решения привлечем условие однозначности перемещений, электрических и магнитных потенциалов:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 p_k^{(1)} \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 q_k^{(1)} \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad (12) \\
 & \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^E \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^H \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad (m = \overline{1, M})
 \end{aligned}$$

**Характеристики разрушения в вершинах трещин.** В механике разрушения коэффициенты интенсивности механических, электрических и магнитных величин в вершинах трещин определяются формулами [1,10]

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_n), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \tau_{ns}), \quad K_D = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} D_n), \quad K_B = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} B_n) \quad (13)$$

С учетом асимптотики интегралов типа Коши в окрестности концов линии интегрирования, коэффициенты интенсивности (13) являются функционалами решений системы (11):

$$\begin{aligned}
 & K_I = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi_c) A_{11}(1, \mu_k) \mathcal{Q}_{1k}(\pm 1), \\
 & K_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_k(\psi_c) A_{11}(1, \mu_k) \mathcal{Q}_{1k}(\pm 1), \quad b_k(\psi) = \frac{da_k(\psi)}{d\psi}, \quad (14) \\
 & K_D = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \mathcal{Q}_{1k}(\pm 1), \\
 & K_B = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \mathcal{Q}_{1k}(\pm 1).
 \end{aligned}$$

В концепции разрушения Гриффитса [10] принципиальное значение имеет величина энергостока (потока энергии) в вершину трещины при её продвижении в теле. Если трещина находится в магнитоэластичной среде, то помимо механической энергии, в поток энергии может входить электрическая и магнитная энергии, высвобождающиеся при её продвижении. Формулировка критерия разрушения зависит от вида электрических и магнитных условий на берегах трещины.

Поток энергии необходимый для продвижения трещины за вершину  $c$ , на малую величину  $cc'$  вдоль касательной определяется формулой

$$\Delta A_{\Delta l} = \frac{1}{2} \int_{cc'} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} D_j^{(0)} n_j [\varphi_i^{(E)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^{(H)}] ds \quad (15)$$



где  $\sigma_{ij}^{(0)}$ ,  $D_j^{(0)}$ ,  $B_j^{(0)}$  определены до продвижения трещины, а  $u_i^{(1)}$ ,  $\varphi_i^{(E)}$ ,  $\varphi_i^{(H)}$  – скачки соответствующих величин на отрезке  $cc'$ .

Условие распространения трещины примет вид

$$2\gamma = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_0^{\Delta l} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \int_0^{\Delta l} D_j^{(0)} n_j [\varphi_i^E] ds + \int_0^{\Delta l} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^H] ds \right\} \quad (16)$$

где  $\gamma$  – плотность поверхностной энергии.

Величина энергостока в каждую вершину есть квадратичная форма переменных  $K_j$ . Можем записать (суммирование по  $i$  и  $j$ ):

$$2\gamma = \alpha_{ij} K_i K_j \quad (i, j = \overline{1,4}), \quad (17)$$

где  $K_1 = K_I$ ,  $K_2 = K_{II}$ ,  $K_3 = K_D$ ,  $K_4 = K_B$  и  $\alpha_{ij}$  – коэффициенты, зависящие от материальных констант магнитоэлектрической керамики.

**Результаты расчетов.** Рассмотрим случай, когда граница пластины свободна от сил и граничит вакуумом, а на поверхности трещины действует распирающее давление  $p = 1$ . Для двух контуров пластины приведены графики зависимостей плотности поверхностной энергии в вершинах трещины  $\gamma$  от характеристики параметризации прямолинейной трещины  $p_2$

$$\zeta(\beta) = (p_1 \beta^2 + ip_2 \beta) e^{i\alpha} + ih, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad p_1 = 0,$$

соответствующие конфигурации нанесены на графиках, как встроенные рисунки для максимального значения  $p_2$ , которое рассмотрено в данных результатах. Результаты приводятся для трех различных материалов [6] в двух вершинах трещины, соответствующие обозначения линий приведены в легенде к графикам. Рассматриваемые пластины имеют близкие характерные размеры.

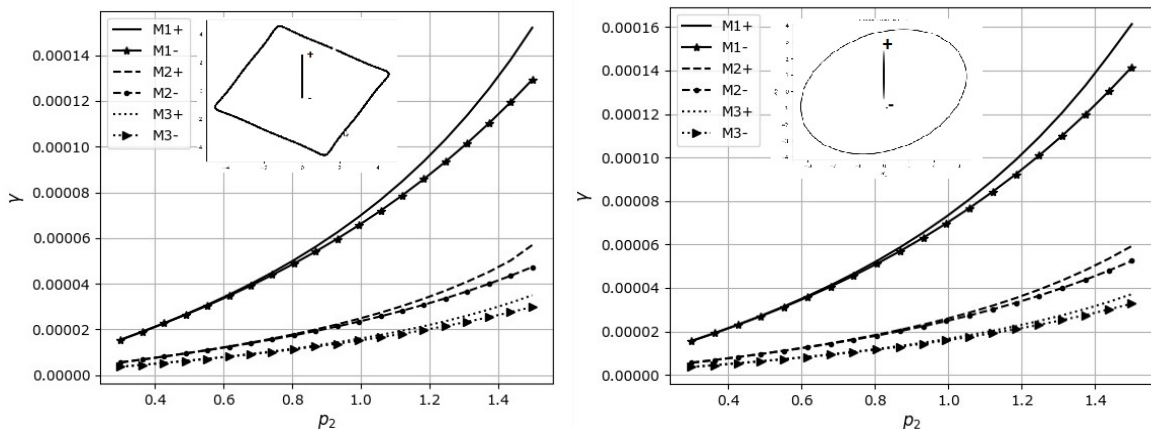


Рис. 2. Плотность поверхностной энергии  $\gamma$  в вершинах трещин в зависимости от половины длины трещины для трех различных материалов и различных контуров пластинки.

### Выводы

Из результатов следует, что коэффициенты интенсивности и, как результат, плотность поверхностной энергии в вершинах трещин существенно зависит от материала пластины, а также на характеристики разрушения влияют и геометрические параметры, в частности, расстояние от вершины трещины до контура пластины.

### Список использованной литературы

1. Bao-Lin Wang, Yiu-Wing Mai. (2007). Applicability of the crack-face electromagnetic boundary conditions for fracture of magnetoelastoelectric materials. International journal of solids and structures, 2 (44), 387-398.
2. Hua-dong Yong, You-he Zhou. (2007). Transient response of a cracked magnetoelastoelectric strip under anti-plane impact. International Journal of Solids and Structures, 2 (44), 705-717.
3. Ke-qiang Hu, Guo-qiang Li. (2005). Electro-magneto-elastic analysis of a piezoelectromagnetic strip with a finite crack under longitudinal shear. Mechanics of Materials, 9 (37), 925-934.
4. Nan CW. (1994) Magnetolectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases. Phys Rev B Condens Matter, 50(9), 6082-6088.

5. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. — М.: Наука, 1986. — 160 с.
6. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. — Донецк: Юго-Восток, 2011. — 232 с.
7. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде / Л.А. Фильштинский // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1976. — № 5. — С. 91-97.
8. Фильштинский, Л. А. Плоская задача магнитоупругости для пьезомагнитной среды с трещинами / Л.А. Фильштинский, Д.Н. Носов, А.А. Еременко // Физико-химическая механика материалов. — 2015. — Т. 51. — №2. — С. 109-115
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Физматгиз, 1962. — 599 с.
10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. — М.: Наука, 1974. — 640 с.



УДК 519.3

А. Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могилы

И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

**СЕРЕНДИПОВЫ ПОВЕРХНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ:  
ОСОБЕННОСТИ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ**

*Предложено новое определение стандартного серендипового элемента. Показано, что все «промежуточные» поверхности серендипового элемента – коноиды, а «угловая» поверхность линейно комбинируется из соответствующих коноидов и фрагмента гиперболического параболоида.*

*Впервые получен серендипов стандартный базис на элементе пятого порядка. Нематричный подход к построению базисов основан на геометрических особенностях стандартных серендиповых поверхностей.*

*Ключевые слова: серендипов конечный элемент, базисные функции, коноид, гиперболический параболоид, серендиповы поверхности.*

А. Н. ХОМЧЕНКО

Черноморський національний університет імені Петра Могили

І.О. АСТІОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

**СЕРЕНДИПОВІ ПОВЕРХНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ:  
ОСОБЛИВОСТІ ФОРМОУТВОРЕННЯ**

*Запропоновано нове означення стандартного серендипового елемента. Показано, що всі «проміжні» поверхні серендипового елемента – коноїди, а «кутова» поверхня лінійно комбінується з відповідних коноїдів і фрагмента гіперболічного параболоїда.*

*Вперше отриманий серендипів стандартний базис на елементі  $n$ 'ятого порядку. Нематричний підхід до побудови базисів оснований на геометричних особливостях стандартних серендипових поверхонь.*

*Ключові слова: серендипів скінченний елемент, базисні функції, коноїд, гіперболічний параболоїд, серендипові поверхні.*

A. N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

I.O. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

**SERENDIPITY SURFACES OF HIGHER ORDERS: PECULIARITIES OF FORMING**

*A new definition of standard serendipity element was suggested. It was shown that all “intermediate” surfaces of serendipity element are conoids, and “angle” surface linearly combines of corresponding conoids and fragment of hyperbolic paraboloid.*

*The serendipity standard basis on the element of the fifth order is received for the first time. Non-matrix approach to basises building is founded on geometric peculiarities.*

*Key words: serendipity finite element, basis functions, conoid, hyperbolic paraboloid, serendipity surfaces.*

**Введение**

Известные преимущества  $p$ -сходимости перед  $h$ -сходимостью в методе конечных элементов по-прежнему привлекают внимание специалистов к серендиповым элементам высших порядков. Одной из причин, препятствующих широкому распространению элементов высших порядков, являются нежелательные внутренние узлы («дутые» моды), которые, как правило, появляются на элементах выше третьего порядка. Наиболее интересны элементы четвертого порядка (Quartic) и пятого порядка (Quintic). Совсем недавно опубликованы первые результаты исследований элемента Quartic. Поиски какой-либо информации об элементе Quintic пока не увенчались успехом. Поэтому настоящая статья посвящается элементу пятого порядка.

**Анализ предшествующих публикаций, цель работы**

Об элементах серендипова семейства известно уже 50 лет. Напомним, что статья Эргатудиса, Айронса и Зенкевича зарегистрирована в редколлегии журнала [1] в феврале 1967 г. Тогда серендиповы элементы называли изопараметрическими. В некоторых источниках это название сохранилось до сих пор. Об элементах четвертого порядка есть информация в книге [2] и статье [3]. Заметим, что в [2] обнаружена опечатка в таблице базисных функций  $Q_{17}$ . Кстати, автору [2] понадобился 17-й узел в центре элемента,

чтобы сконструировать базис четвертого порядка. Один из ведущих современных специалистов в области конечно-элементарного анализа, автор книги [4] называет элемент Quartic так – «seventeen-noded quartic serendipity rectangle». Как видим, в теории и практике серендиповых аппроксимаций до сих пор сохраняется убеждение о необходимости внутренних узлов на элементах высших порядков. В нашей работе мы попытаемся обойтись без внутренних узлов, чтобы обеспечить безоговорочную принадлежность элемента Quintic к серендипову семейству. Напомним, что одно из определений звучит так: серендипов элемент – это лагранжев элемент без внутренних узлов.

Цель работы – сконструировать на 20-узловом квадратном элементе полиномиальный базис из 20-ти функций влияния (функций формы). Это типичная задача восстановления поверхности  $f(x,y)$  по известным 20-ти аппликатам в регулярно расположенных граничных узлах интерполяции. Понятно, что в такой постановке нужен нематричный подход, однако перспективы использования традиционного матричного подхода мы вкратце обсудим.

**Основная часть**

На рис. 1 показан элемент Quintic и соответствующая схема Паскаля.

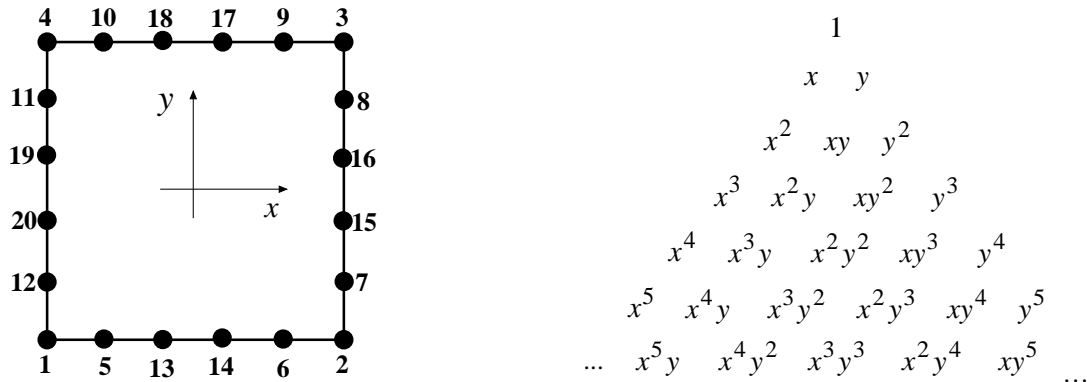


Рис. 1. Конечный элемент Quintic и схема Паскаля

Узлы интерполяции расположены равномерно на границе квадрата:  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ . Обсудим вкратце возможности решения задачи восстановления функции  $f(x,y)$  с помощью матричной алгебры. Схема Паскаля и геометрическая изотропия модели диктуют известные ограничения. Возникает необходимость включения внутренних узлов. Если выбрать один внутренний узел в центре квадрата, задача сводится к составлению и решению СЛАУ с матрицей  $21 \times 21$ . Можно выбрать пять внутренних узлов, один из которых в центре квадрата. Для остальных четырех узлов есть две схемы расположения. Узлы можно выбрать в вершинах «большого» квадрата  $x = \pm 3/5, y = \pm 3/5$  или в вершинах «малого» квадрата  $x = \pm 1/5, y = \pm 1/5$ . Теперь приходится составлять и решать СЛАУ с матрицей  $25 \times 25$ . Понятно, что такие элементы пятого порядка уже не относятся к серендипову семейству. Заинтересованный читатель, владеющий процедурой конденсации (редукции), сможет самостоятельно исключить нежелательные внутренние узлы, чтобы получить стандартный Quintic.

Наш подход скорее геометрический, нежели алгебраический. Анализ уже известных моделей серендиповых элементов [2–4] показывает, что основную часть стандартных серендиповых поверхностей составляют коноиды – линейчатые поверхности с одной осью. Эти коноиды ассоциируются с промежуточными узлами носителя. Например, базис второго порядка (Quadratic) наполовину состоит из коноидов. В базисе третьего порядка (Cubic) из 12 поверхностей уже 8 коноидов. Базис четвертого порядка, приведенный в [2,4], нельзя назвать стандартным из-за наличия 17-й поверхности. Кстати, именно внутренний узел искривляет поверхности «промежуточных» коноидов. Внутренний узел и «двух» мода элемента Quartic – побочный продукт метода обратной матрицы. У нас нет сомнений в том, что на элементе четвертого порядка существует стандартный базис из 16-ти поверхностей, из которых 12 – коноиды. По аналогии можно ожидать, что на элементе пятого порядка (рис. 1) 16 поверхностей из 20-ти – коноиды. Именно такой базис приведен ниже. Сейчас, когда появилось множество нестандартных серендиповых элементов, мы предлагаем еще одно определение стандартного серендипова элемента. Серендипов элемент будем называть стандартным, если все его «промежуточные» поверхности – коноиды, а «угловая» поверхность линейно комбинируется из соответствующих коноидов и фрагмента гиперболического параболоида (Linear element). Коэффициенты линейной комбинации подбираются с учетом требований интерполяционной гипотезы Лагранжа. В нашем случае эти требования имеют вид:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{20} N_i(x, y) = 1,$$

где  $i$  – номер функции формы элемента,  $k$  – номер узла. Чтобы составить полное представление о базисе элемента Quintic, достаточно привести уравнения поверхностей  $N_1(x,y)$ ,  $N_5(x,y)$  и  $N_{13}(x,y)$ :

$$N_1(x, y) = \frac{1}{1536}(1-x)(1-y)(384 - 125(1-x^2)(3+5x^2) - 125(1-y^2)(3+5y^2)),$$

аналогично  $N_i(x, y)$  для  $i = 2, 3, 4$ ;

$$N_5(x, y) = \frac{25}{1536}(1-x^2)(25x^2 - 1)(3-5x)(1-y),$$

аналогично  $N_i(x, y)$  для  $i = 6, 7, \dots, 12$ ;

$$N_{13}(x, y) = \frac{25}{768}(1-x^2)(9-25x^2)(1-5x)(1-y),$$

аналогично  $N_i(x, y)$  для  $i = 14, \dots, 20$ .

Визуализация поверхностей  $N_1(x,y)$ ,  $N_5(x,y)$  и  $N_{13}(x,y)$  приведена на рисунке 2.

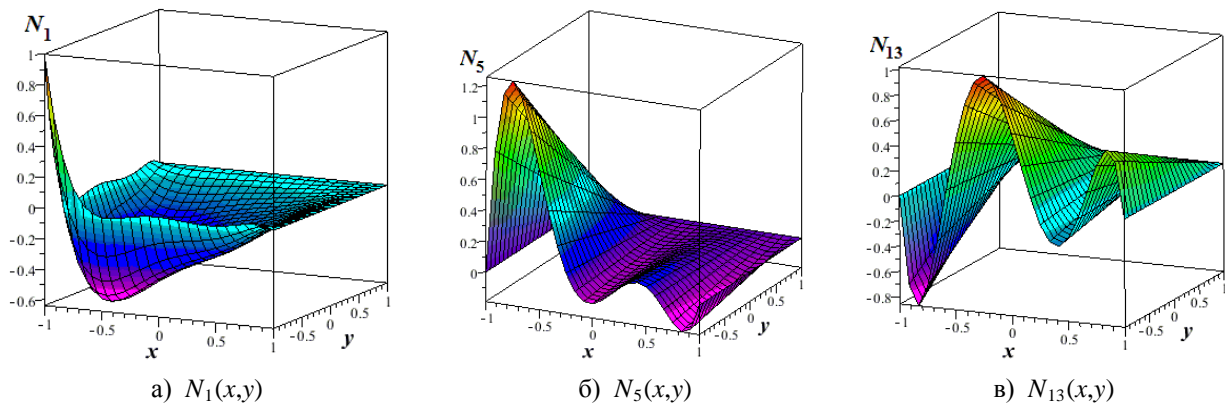


Рис. 2. Визуализация поверхностей базисных функций конечного элемента Quintic

Как и следовало ожидать, очередной стандартный серендипов элемент имеет физически неадекватный спектр узловых нагрузок от единичной массовой силы. Для «угловой» функции  $p_1 = -\frac{53}{288}$ , для «промежуточных»:  $p_5 = \frac{25}{192}$  и  $p_{13} = \frac{25}{288}$ . На эту особенность обратил внимание О. Зенкевич еще в 1971 г. [5]. Он назвал такой спектр противоестественным. Возможно, это так с точки зрения специалиста по строительной механике. А с точки зрения математики это вполне естественный спектр.

#### Выводы

Впервые получен серендипов стандартный базис на элементе пятого порядка. Нематричный подход основан на геометрических особенностях стандартных серендиповых поверхностей, которые, как было доказано, конструируются из коноидов и гиперболических параболоидов. Представляет интерес алгебраическое решение задачи восстановления функций на конечном элементе Quintic. Это позволит исследовать влияние внутренних узлов на формирование поверхностей высших порядков.

#### Список использованной литературы

1. Ergatoudis I. Curved isoparametric “quadrilateral” elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Int. J. Solids Struct. – № 4/ – 1968. – P. 31–34.
2. Akin J. E. Finite Elements Analysis with Error Estimators / J. E. Akin. – Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. – 477 p.
3. Хомченко А. Н. Чи потрібний 17-й вузол серендиповому елементу 4-го порядку? / А. Н. Хомченко, С. О. Камаєва // Вестник Херсонского нац. техн. ун-та. – № 2 (35). – Херсон : ХНТУ, 2009. – С. 455–461.
4. Oñate E. Structural Analysis with the Finite Element Method, Vol. 1 / E. Oñate. – Springer Netherlands, 2009. – 495 p.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

УДК 519.632.4

А. Н. ХОМЧЕНКО

Черноморський національний університет імені Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

**ПРО СЕРЕНДИПОВІ ПОВЕРХНІ, ЯКІ УТВОРЮЮТЬ СІМПСОНОВІ ТІЛА**

У роботі вперше серендипові поліноми, відомі з методу скінченних елементів, розглядаються як поверхні, з яких можливо утворювати клиноподібні сімпсонові тіла. Існує безліч таких серендипових поверхонь, а це означає, що в задачах повузлової локалізації навантаження від одиної масової сили замість формули Ньютона-Котеса можна використовувати наближену формулу Сімпсона. Отримані результати суттєво поповнюють модельний ряд сімпсонових тіл.

Ключові слова: сімпсонові тіла, серендипові поверхні, серендипові елементи, формула Ньютона-Котеса, правило Сімпсона.

А. Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могили

Е.И. ЛИТВИНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

**О СЕРЕНДИПОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ, КОТОРЫЕ СОЗДАЮТ СИМПСОНОВЫ ТЕЛА**

В работе впервые серендиповы полиномы, известные из метода конечных элементов, рассматриваются как поверхности, из которых можно моделировать клиноподобные симпсоновы тела. Существует бесконечное множество таких серендиповых поверхностей, а это означает, что в задачах поузлового распределения единичной массовой силы вместо формулы Ньютона-Котеса можно использовать приближенную формулу Симпсона. Полученные результаты существенно пополняют модельный ряд симпсоновых тел.

Ключевые слова: симпсоновы тела, серендиповы поверхности, серендиповы элементы, формула Ньютона-Котеса, правило Симпсона.

A. N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

O.I. LITVINENKO

Kherson National Technical University

**ON SERENDIPITY SURFACES WHICH CREATE SIMPSON BODIES**

For the first time the serendipity polynomials known from finite elements method are considered in the work as surfaces from which one can model sphenoidal simpson bodies. There are plenty of such serendipity surfaces and this means that in the problems of per-node distribution of unit mass force instead of Newton -Cotes formula it is possible to use proximate Simpson formula. The received results essentially replenish model range of simpson bodies.

Key words: simpson bodies, serendipity surfaces, serendipity elements, Newton -Cotes formula, Simpson rule.

**Вступ**

Серендипові поверхні – це фінітні поліноміальні функції двох аргументів. Кожна функція  $N_i(x, y)$  асоціюється з розрахунковим вузлом «i» на границі скінченного елемента-носія. У класичній задачі відновлення функції  $f(x, y)$  за відомими вузловими аплікатами  $f_i$  функції  $N_i(x, y)$  називають базисними (функціями впливу), а в методі скінченних елементів (МСЕ) – це функції форми. Задача локалізації у вузлах навантаження на скінченний елемент (СЕ) від одиної масової сили передбачає обчислення об'єму тіла, що міститься між серендиповою поверхнею і площиною носія. Об'єм зазвичай обчислюють подвійним інтегруванням  $N_i(x, y)$ . Ми спробували обчислювати об'єм наближено за правилом Сімпсона і виявили, що в багатьох випадках можна отримати точне значення. Такі тіла називають сімпсоновими.

**Аналіз попередніх публікацій, мета роботи**

Формулу параболічних трапецій з 1743 р. називають формулою Сімпсона, хоча раніше вона була отримана Кавал'єрі (1639 р.) і Грегорі (1668 р.) Автори статті [1] наводять сучасне формулювання і доведення теореми Сімпсона, а також дають означення сімпсонова тіла. Неважко переконатися, що до переліку сімпсонових тіл належать призма, піраміда, зрізана піраміда, циліндр, конус, зрізаний конус, куля та кульовий сегмент. У роботі [1] доведено, що призматоїд також є сімпсоновим тілом. А це, в свою чергу, означає, що до сімпсонових тіл належать клиноподібні тіла, що обмежені площинами. З цієї точки зору цікаво протестувати клиноподібні тіла, що обмежені поверхнями, особливо поверхнями вищих порядків.

**Мета дослідження**

Мета роботи – довести, що сімпсонові тіла можна конструювати із серендипових поверхонь. Здається, що з цього боку серендипові поліноми ще не розглядалися. В роботі розглядаються СЕ від першого до п'ятого порядку включно. Зауважимо, що на відміну від прихильників матричного аналізу, ми побудували базис (і не один) елемента п'ятого порядку без використання внутрішніх вузлів. На елементі четвертого порядку це було зроблено раніше [2-3]. Треба підкреслити, що тестування правилом Сімпсона витримують як стандартні серендипові поверхні [4-6], так і альтернативні [7].

**Основна частина**

Нагадаємо, як виглядає правило Сімпсона на інтервалі  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} (f(c) + 4f(c) + f(b)), \text{ де } c = \frac{1}{2}(b+a). \tag{1}$$

Якщо  $f(x) = S(x)$  – площа поперечного перерізу тіла, що міститься між опорними площинами  $x = a$  та  $x = b$ , то за формулою (1) обчислюють об'єм тіла.

Підкреслимо, що поліноми не вище третього порядку – це той клас функцій  $f(x)$ , для якого формула (1) є квадратурою з нульовим залишком.

На рис. 1 зображені серендипові елементи, що розглядаються в роботі.

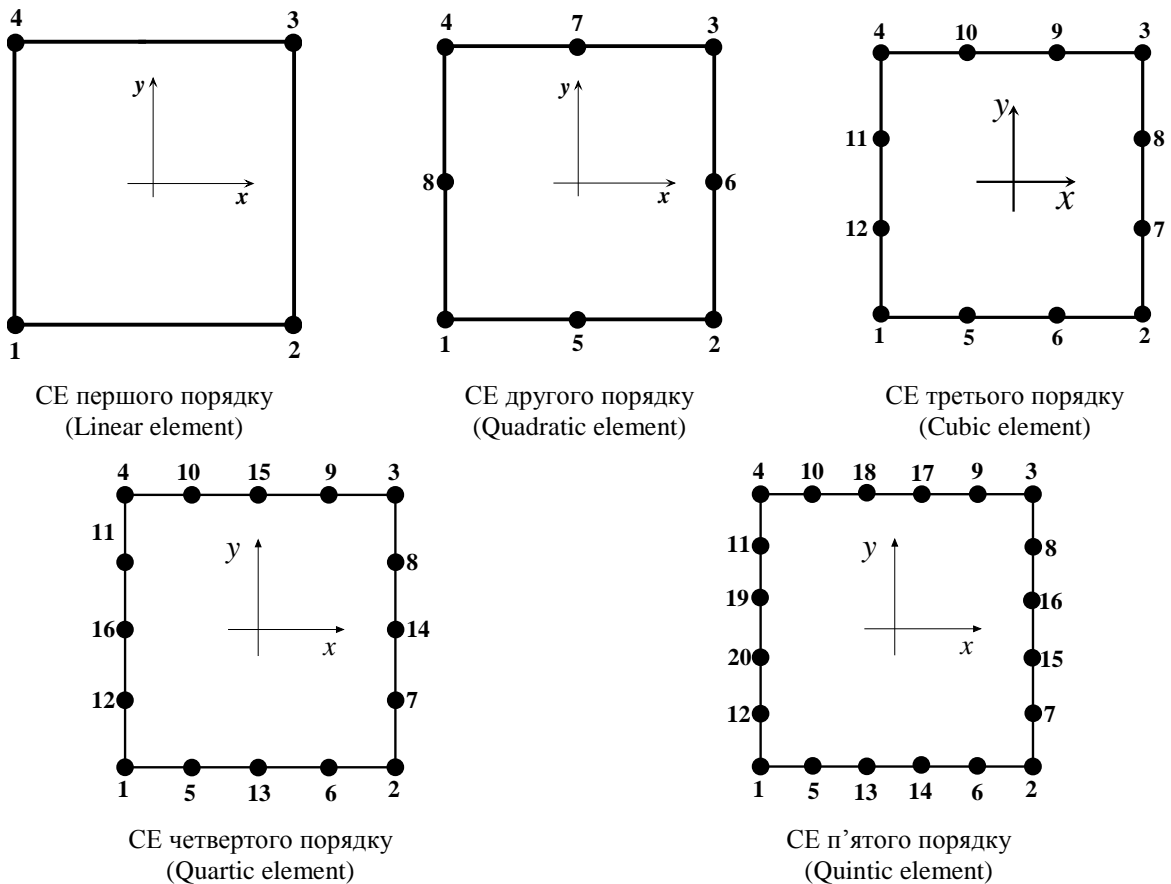


Рис. 1. Серендипові скінченні елементи

Підготовлений читач зверне увагу на відсутність внутрішніх вузлів на СЕ Quartic і Quintic. Вважається, що без внутрішніх вузлів неможливо побудувати базис на елементах четвертого і п'ятого порядків. Це негативний наслідок метода оберненої матриці, який багато років панує в МСЕ. Але, якщо скористатися будь-яким нематричним методом, можна обмежитись тільки граничними вузлами. Саме так ми сконструювали базисні функції (серендипові поверхні) СЕ четвертого і п'ятого порядків. Базисні функції, незалежно від порядку СЕ, повинні задовольняти наступним умовам інтерполяційної гіпотези:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^M N_i(x, y) = 1, \quad (2)$$

де  $i$  – номер функції,  $k$  – номер вузла,  $M$  – кількість вузлів СЕ. Порядок СЕ на одиницю менший кількості вузлів на стороні квадрата (рис. 1).

Щоб скористатися формулою Сімсона, важливо правильно обрати паралельні опорні площини. Виявляється, що для тіл, утворених серендиповими поверхнями, кращий вибір  $x = \pm 1$  або  $y = \pm 1$ . Це суттєво спрощує обчислення, особливо на СЕ вищих порядків. На цих елементах виникає необхідність розв'язувати задачу на найменше та найбільше значення функції  $N_i(x, y)$ , щоб визначити опорні площини  $z = a$  і  $z = b$ . При цьому область в «середньому» перерезі  $z = c$  може мати складну конфігурацію в залежності від рельєфу поверхні. У всіх випадках ми користуємося опорними площинами  $y = \pm 1$ , а на СЕ вищих порядків не розглядаємо «кутові» поверхні  $N_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , щоб не порушувати умови теореми Сімсона.

Порівняння результатів подвійного інтегрування  $N_i(x, y)$  та наближеної оцінки інтеграла за Сімсоном почнемо з елементів 1-го порядку. Тут лише «кутова» поверхня і вона має вигляд [1,4-6]:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y),$$

аналогічно  $N_i(x, y)$  для  $i = 2, 3, 4$ .

Подвійний інтеграл на всі випадки має вигляд:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(x, y) dx dy. \quad (3)$$

З геометричної точки зору (3) – це алгебраїчна сума об'ємів над носієм і під носієм поверхні  $N_i(x, y)$ .

Результат (3) ми порівняємо з оцінкою Сімсона (1), де використовується три (навіть дві) площі паралельних перерізів.

Відповідна формула має вигляд:

$$I = 2 \left( \frac{1}{6} S_{-1} + \frac{4}{6} S_0 + \frac{1}{6} S_1 \right), \quad (4)$$

де  $S_{-1} = S(x, -1)$ ,  $S_0 = S(x, 0)$ ,  $S_1 = S(x, 1)$  – площі у відповідних перерізах. Вузли розподілені по периметру квадрата рівномірно, тому достатньо протестувати лише ті поверхні  $N_i(x, y)$ , які асоціюються із стороною  $y = -1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Для моделі 1-го порядку – це  $N_1(x, y)$ , для моделей другого і третього порядків – це  $N_5(x, y)$ , для моделей четвертого і п'ятого порядків –  $N_5(x, y)$  і  $N_{13}(x, y)$ .

Для лінійної моделі формули (3) і (4) дають однакові результати: об'єм тіла  $V = 1$  куб.од. Це означає, що тіло, яке утворене поверхнею  $N_i(x, y)$  і квадратним носієм, є сімпсоновим. Особливий характер лінійної моделі забезпечує точний результат також за правилом трапецій (два перерізи  $S_{-1}$  і  $S_1$ ) і навіть за правилом центрального інтегрування (один переріз  $S_0$ ).

Для СЕ другого порядку достатньо навести поверхні  $N_1(x, y)$  і  $N_5(x, y)$  [3-5]:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y),$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y). \quad (5)$$

Нагадаємо, що ми тестуємо лише «проміжні» поверхні. «Кутова» поверхня  $N_1(x, y)$  наведена для того, щоб читач мав повне уявлення про базис СЕ.

Цікаво зауважити, що на СЕ другого порядку поверхні  $N_1(x, y)$  і  $N_5(x, y)$  утворюють тіла Сімпсона.

Наведемо характерні поверхні СЕ третього порядку [4-6]:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(-10 + 9(x^2 + y^2)),$$

$$N_5(x, y) = \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-3x). \quad (6)$$

Тестування свідчить, що «проміжні» поверхні утворюють сімпсонові тіла. Читач може самостійно зробити висновок щодо «кутових» поверхонь.

Характерні функції стандартного базису СЕ четвертого порядку (17 вузлів) мають вигляд [5, 6]:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{12}(1-x)(1-y)(-4x(x^2-1) - 4y(y^2-1) + 3xy),$$

$$N_5(x, y) = \frac{4}{3}(1-x^2)(1-y)\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right),$$

$$N_{13}(x, y) = 2(x^2-1)(1-y)\left(x^2 + \frac{1}{4}y\right),$$

$$N_{17}(x, y) = (1-x^2)(1-y^2). \quad (7)$$

В цьому випадку «тест Сімпсона» витримують як «проміжні» поверхні  $N_1(x, y)$  і  $N_5(x, y)$ , так і центральна поверхня («дута» мода)  $N_{17}(x, y)$ . Стосовно «дутаї» моди треба зауважити, що у формулі Сімпсона результативно працює лише один переріз (середній), але формула дає точний об'єм тіла.

Цікаво протестувати характерні поверхні нестандартного базису СЕ четвертого порядку (16 вузлів):

$$N_1(x, y) = \frac{1}{60}(1-x)(1-y)(12 + 32x + 32y + 27xy - 20(x^3 + y^3)),$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{12}(1-x^2)(1-y)(16x^2 - 8x - 3y - 3),$$

$$N_{13}(x, y) = \frac{1}{20}(1-x^2)(1-y)(-40x^2 + y + 11). \quad (8)$$

Нестандартні «проміжні» поверхні  $N_5(x, y)$  і  $N_{13}(x, y)$  також витримують «тест Сімпсона». Як відомо [2, 3, 7], на СЕ вищих порядків існує безліч альтернативних поверхонь  $N_i(x, y)$ . Це означає, що існує безліч сімпсонових тіл, утворених цими поверхнями. Наприклад,

$$N_1(x, y) = \frac{1}{240}(1-x)(1-y)(80x(1-x^2) + 80y(1-y^2) + 99xy + 33x + 33y + 33),$$

$$N_{13}(x, y) = \frac{1}{80}(1-x^2)(1-y)(-160x^2 + 9y + 49). \quad (9)$$

Нам не відомо жодного джерела, яке б містило інформацію про Quintic. Цей елемент заслуговує на особливу увагу. Аналіз схеми Паскаля свідчить про те, що для метода оберненої матриці необхідно повернути деякі внутрішні вузли лагранжевої версії елемента п'ятого порядку. Нагадаємо, що лагранжевий Quintic має 16 внутрішніх вузлів. Стандартний базис серендипової версії може складатися із 21 або 25

поверхонь  $N_i(x, y)$ . Ми скористалися лише граничними вузлами (рис. 1) і сконструювали декілька нестандартних базисів. Один із таких базисів має вигляд:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{1536}(1-x)(1-y)\left(25(x^2 + y^2) - 26\right)\left(25(x+y+1)^2 - 9\right), \\ N_5(x, y) &= \frac{25}{1536}(1-x^2)\left(1-25x^2\right)(1-y)(5x+y-2), \\ N_{13}(x, y) &= \frac{25}{768}(1-x^2)\left(25x^2 - 9\right)(1-y)(5x-1). \end{aligned} \quad (10)$$

«Проміжні» поверхні  $N_5(x, y)$  і  $N_{13}(x, y)$  моделі Quintic витримують тестування правилом Сімпсона. Нові бази елементів Quartic і Quintic привертають особливу увагу. Експерименти свідчать, що при фіксованій кількості параметрів  $M$ , швидкість  $p$ -збіжності вища за швидкість  $h$ -збіжності. Саме цей факт стимулює пошуки нових базисів SE вищих порядків [5, 6].

#### Висновки

Існує безліч серендипових поверхонь, які утворюють клиноподібні сімпсонові тіла. Це означає, що в задачах вузлової локалізації навантаження від одичної масової сили замість формули Ньютона-Котеса можна використовувати наближену формулу Сімпсона. Отримані результати суттєво поповнюють модельний ряд сімпсонових тіл.

#### Список використаної літератури

1. Кукуш О. Г. Призматод та його об'єм / О. Г. Кукуш, Р. П. Ушаков // У світі математики. — Том 8. — Вип. 2. — К.: ТВІМС, 2012. — С. 46–50.
2. Астіоненко І.О. Інтерполяційна процедура Тейлора для побудови базисів серендипових скінченних елементів: модифікація / І.О.Астіоненко, О.І.Литвиненко, А.Н. Хомченко // Матер. міжн. наук. конф. “Інтелект. системи прийняття рішень і проблеми обчислюв. інтелекту”. — Т. 1. — Херсон: ХНТУ, 2009. — С. 9-12.
3. Хомченко А.Н. Чи потрібний 17-й вузол серендиповому елементу 4-го порядку? / А. Н. Хомченко, С. О. Камаєва // Вестник Херсонського нац. техн. ун-та. — № 2(35). — Херсон: ХНТУ, 2009. — С. 455–461.
4. Ergatoudis I. Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, В.М. Irons, О. С. Zienkiewicz // Int. J. Solids Struct. — # 4. 1968. — P. 31–42.
5. Akin J. E. Finite Element Analysis with Error estimators / J. E. Akin. — Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. — 477 p.
6. Oñate E. Structural Analysis with the Finite Element Method, vol. 1 / E. Oñate. — Springer Netherlands, 2009. — 495 p.
7. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т, 1982. — 9 с. — Деп. В ВИНТИ 18.02.82, № 1213.



УДК 519.7: 629.5.03

И.В. ХУДЯКОВ

Херсонская государственная морская академия

А.В. РУДАКОВА

Херсонский национальный технический университет

Н.К. КЛЕВЦОВ

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНИХ УСЛОВИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ ДИНАМИКИ СУДНА В ХОДОВЫХ РЕЖИМАХ

*Рассмотрены внешние факторы, влияющие на основные показатели работы пропульсивного комплекса. Получены аналитические зависимости, позволяющие имитировать изменение внешних условий движения судна в ходовых режимах, которые позволяют моделировать работу пропульсивного комплекса и оценивать эффективность систем управления движением судна.*

*Ключевые слова: управление движением судна, пропульсивный комплекс, регрессионные модели, динамика судна, ходовой режим.*

I.V. ХУДЯКОВ

Херсонська державна морська академія

Г.В. РУДАКОВА

Херсонський національний технічний університет

М.К. КЛЕВЦОВ

Київський національний університет будівництва та архітектури

## МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ЗОВНІШНІХ УМОВ ПРИ АНАЛІЗІ ДИНАМІКИ СУДНА В ХОДОВИХ РЕЖИМАХ

*Розглянуто зовнішні фактори, що впливають на основні показники роботи пропульсивного комплексу. Отримано аналітичні залежності, що дозволяють імітувати зміну зовнішніх умов руху судна в ходових режимах, які дозволяють моделювати роботу пропульсивного комплексу та оцінювати ефективність систем управління рухом судна.*

*Ключові слова: управління рухом судна, пропульсивний комплекс, регресійні моделі, динаміка судна, ходовий режим.*

I.V. KHUDIAKOV

Kherson State Maritime Academy

G.V. RUDAKOVA

Kherson National Technical University

M.K. KLEVTSOV

Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture

## MODELING OF THE EXTERNAL CONDITIONS INFLUENCE FOR THE ANALYSIS OF THE VESSEL DYNAMICS IN THE ANGLE REGIMES

*External factors affecting the main performance indicators of the propulsion complex are considered. Analytical dependencies allowing simulating changes in the external conditions of vessel motion in running modes that allow modeling the operation of the propulsion complex and assessing the effectiveness of the ship's motion control systems are obtained.*

*Keywords: Ship movement control, propulsion complex, regression models, ship dynamics, running mode.*

### Постановка проблеми

Основная задача анализа *динамики судна* - изучение движения судна под действием приложенных к нему внешних сил и моментов. Движение судна характеризуется мореходными качествами, такими как мореходность (способность судна противостоять воздействию морского волнения с колебаниями возможно меньшей частоты и амплитуды), управляемость (способность судна удерживать заданное направление движение или изменять его в соответствии с желанием судоводителя) и ходкость (способность судна перемещаться с заданной скоростью под действием энергии его пропульсивного комплекса, преодолевая сопротивление среды - воды и воздуха). При разработке или модернизации систем управления пропульсивным комплексом при движении судна необходимо учитывать действие внешних факторов неопределенного характера, оказывающих влияние на технико-эксплуатационные характеристики судна [1].

**Анализ последних исследований и публикаций**

Пропульсивный комплекс - это гидромеханическая система, включающая корпус судна и пропульсивную установку, в которой мощность, развиваемая главным двигателем, преобразуется в упор, сообщающий движение судну [2]. Пропульсивная установка комплекса в наиболее общем случае состоит из: одного или нескольких движителей (гребных винтов); одного или нескольких валопроводов; главных судовых передач; главных двигателей. Главные двигатели (ГД) составляют основу главной энергетической установки (ГЭУ), куда входят основные системы, вспомогательные механизмы, теплообменные аппараты и другие агрегаты обеспечения работы ГД. Главные судовые передачи предназначены для преобразования энергии ГД, а также объединения мощности (для нескольких ГД), передаваемых посредством валопровода к движителям. Упор, создаваемый движителем, в свою очередь передается на корпус судна.

Элементы пропульсивного комплекса характеризуются в работе следующими основными показателями [3]:

главный двигатель - мощностью  $N_e$ , крутящим моментом  $M_e$ , частотой вращения  $n$ ;

передача - частотой вращения ведущего (от главного двигателя)  $n$  и ведомого (гребного) валов  $n_p$ ;

гребной винт - упором винта  $P$ , вращающим моментом  $M_p$ , частотой вращения  $n_p$ ;

корпус судна - полным сопротивлением воды и воздуха движению судна  $R$ , скоростью судна  $v$ .

Судно при своем движении выводит массы воды из состояния покоя и воспринимает реакцию в виде гидродинамических сил, распределенных по наружной поверхности его обшивки. Поскольку судно симметрично относительно его диаметральной плоскости, то действие гидродинамических сил реакции воды может быть сведено к одной равнодействующей силе  $F$ , лежащей в диаметральной плоскости, и моменту  $M$ , действующему в той же плоскости (рис. 1). Горизонтальная составляющая  $R$  силы  $F$  является силой сопротивления среды - воды и воздуха; она уравнивается полезной тягой движителя  $P_e$ .

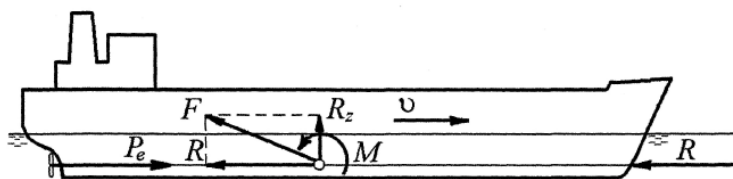


Рис. 1. Силы и моменты, действующие на судно в прямолинейном движении

При разработке эффективных систем управления движением судна необходимо учитывать изменение внешних условий, влияющих на работу пропульсивного комплекса, и использовать адаптивные методы управления механизмом подачи топлива в дизель [4].

**Формулирование цели исследования**

Целью исследований является получение аналитических зависимостей, позволяющих учитывать влияние внешних условий на основные показатели работы пропульсивного комплекса и анализировать динамику судна в ходовых режимах.

**Изложение основного материала исследования**

Гребной винт при своем вращении потребляет вырабатываемую двигателем мощность, которая более или менее эффективно преобразуется в упор  $P$  и поступательную скорость движения судна  $v$ . Между двигателем и винтом приходится вводить понижающий редуктор (передачу) [5]. Взаимодействие элементов движительного комплекса изучается путем совместного рассмотрения их характеристик (рис. 2).

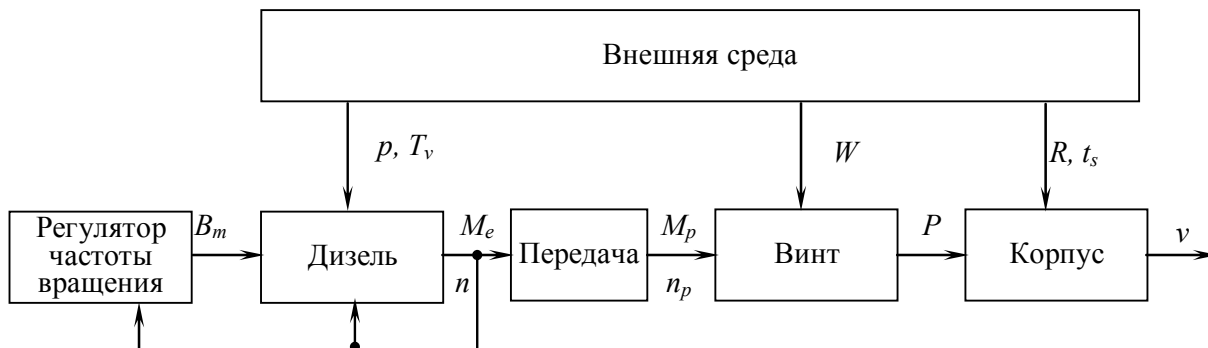


Рис. 2. Схема взаимодействия элементов пропульсивного комплекса

Техническое совершенство пропульсивного комплекса определяется его способностью преобразовывать мощность  $N_e$  (или вращающий момент  $M_e$ ) главного двигателя в движение судна со скоростью  $v$  и с наименьшими потерями в реальных условиях плавания.

На работу пропульсивного комплекса влияет значительное число факторов. Наиболее существенные из них [3]:

- геометрические характеристики, мореходные качества и эксплуатационные параметры судна;
- технические особенности корпуса судна;
- технические характеристики пропульсивной установки: типы и характеристики главной энергетической установки, передачи, движителей;
- текущее техническое состояние элементов пропульсивного комплекса: увеличение эксплуатационной шероховатости корпуса судна вследствие обрастания, возникновения вмятин и коррозии; изменения характеристик гребного винта под действием обрастания и эрозии его лопастей; увеличение трения в подшипниках валопровода за счет износа; изменение характеристик главного двигателя (дизеля) по причине износа деталей и ухудшения характеристик его систем;
- эксплуатационные факторы: реальная нагрузка судна (масса судна, посадка); гидрометеорологические условия плавания (ветер и волнение); влияние мелководья и ширины фарватера в речных условиях плавания и в каналах; скорость течения воды (против хода судна или попутное).

Взаимодействие элементов пропульсивного комплекса (главный двигатель – гребной винт – корпус судна) на всех эксплуатационных режимах может быть рассмотрено и проанализировано путем совместного решения дифференциальных уравнений равновесия сил, действующих на корпус судна, и моментов сил, действующих на гребные винты [3, 6].

Уравнение равновесия горизонтальных сил, действующих на корпус судна, имеет вид

$$M_c \frac{dv}{dt} = \sum P_e - R, \quad (1)$$

где  $M_c$  - масса судна с учетом присоединенной массы воды, кг;  $v$  - скорость судна, м/с;  $\sum P_e$  - суммарная тяга гребных винтов, Н;  $R$  - сопротивление движению судна, Н.

Уравнение моментов сил, действующих на гребные винты записывается как

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_f - M_g, \quad (2)$$

где  $J$  - приведенный к оси гребного винта суммарный момент инерции вращающихся масс главного двигателя, редуктора, валопровода и гребного винта;  $\omega = 2\pi n$  - угловая скорость вращения вала;  $M_e$  - вращающий момент главного двигателя;  $M_f$  - момент трения в подшипниках валопровода, редуктора и соединительной муфты;  $M_g$  - момент гидродинамических сил, действующих на лопасти винта.

Силы и моменты, входящие в уравнения (1) и (2) находятся в зависимости от состояния окружающей среды, то есть зависимости можно выразить в следующей форме

$$P_e = P_e(n_p, v, E), \quad R = R(v, E), \quad (3)$$

$$M_e = M_e(n, p_s, B_m, E), \quad M_p = M_p(n, v, E),$$

где  $E$  - обобщенный фактор воздействия окружающей среды;  $p_s$  - давление перед цилиндром двигателя;  $B_m$  - мгновенный расход топлива на дизель.

- На силы и моменты, действующие в пропульсивной системе, влияют следующие внешние факторы:
- тяговое усилие  $P$  и упор винта  $P_e$  зависят от состояния моря и характера движения судна;
  - сопротивление движения судна  $R$  - от состояния моря, осадки, глубины воды, движения судна, рыскания и силы ветра;
  - тяговый момент двигателя  $M_e$  - от давления, влажности и температуры воздуха;
  - момент сопротивления гребного винта  $M_g$  - от состояния моря и движения судна.

Обслуживающий персонал должен выбирать режим работы главного двигателя таким образом, чтобы избежать его тепловой и механической перегрузки в различных режимах плавания, когда изменяется сопротивление движению судна, что требует изменения буксировочной мощности. Характерные факторы, влияющие на сопротивление движению судна: его загрузка (погружение), гидрометеорологические условия, степень обрастания корпуса, глубина под килем [3].

1. Влияние волнения моря.

Сопротивление движению судна на волнующемся море возрастает с увеличением высоты волн и полноты корпуса и имеет относительно большое значение при небольших скоростях судна. Уменьшение скорости судна в штормовых условиях обуславливается как увеличением сопротивления, так и снижением пропульсивного коэффициента, что связано с ростом нагрузки на движитель. Все эти факторы увеличивают упор гребного винта (рис. 3, а).

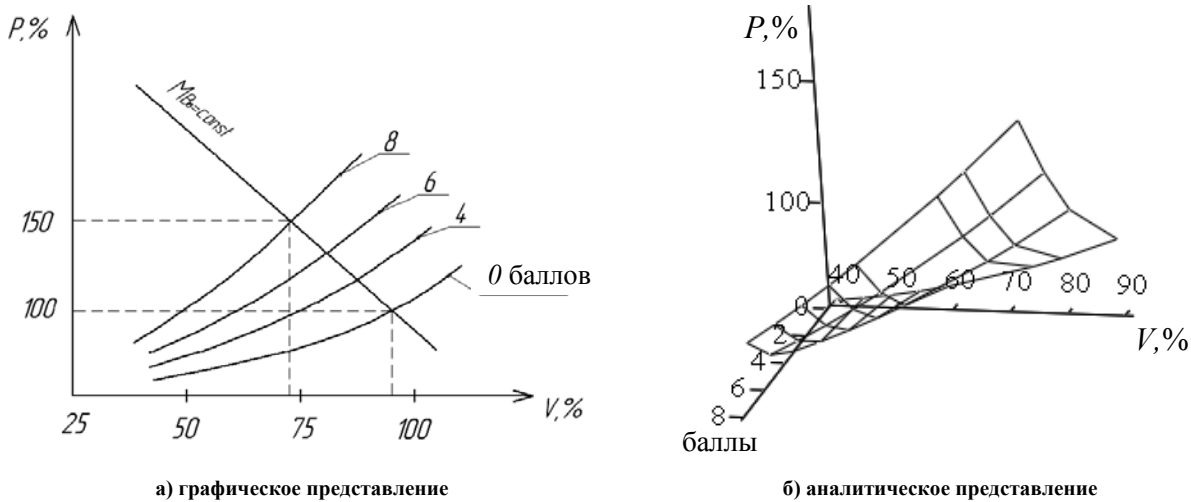


Рис. 3. Зависимость упора винта от скорости судна с учетом штормовой погоды

Для возможности проведения экспериментов путем компьютерного моделирования были получены аналитические зависимости упора винта от скорости судна с учетом штормовой погоды (рис. 3, б) вида

$$k_P(x_1, x_2) = 0,644 - 0,364x_1 - 1,137x_2 + 2x_1x_2 + 0,73(x_1)^2 + 1,113(x_2)^2, \tag{4}$$

где  $x_1$ ,  $x_2$  и  $k_P$  - нормированные значения скорости судна  $V$ , бальности волнения моря  $B_l$  и упора винта  $P$ . Формулы перехода между абсолютными и нормированными значениями имеют вид

$$x_1 = \frac{V}{100}, x_2 = \frac{B_l}{12}, \hat{P} = \frac{P}{100}. \tag{5}$$

2. Влияние атмосферных условий.

Номинальная мощность дизеля гарантируется при определенных атмосферных условиях: температуре воздуха  $t_o = 20^\circ C$ , атмосферном давлении  $P_a = 760$  мм.рт.ст. и относительной влажности воздуха  $\varphi = 50\%$ . Однако в условиях эксплуатации температура в машинном отделении колеблется от  $+15^\circ C$  до  $+45^\circ C$  при  $\varphi = 70..100\%$ . Изменение атмосферного давления существенное влияние не оказывает. Зависимости изменения мощности судовых дизельных установок от температуры и влажности показаны на рис. 4, а.

Получено аналитическую зависимость (см. рис.4, б) относительной мощности дизеля  $k_N = N_e / N_{enom}$  от температуры и влажности окружающей среды вида

$$k_N = 1,04 - \frac{0,008 \cdot \varphi}{100} - 0,004 \cdot t_o. \tag{6}$$

Проведенная проверка значимости коэффициентов регрессионных уравнений позволила обосновать структуру моделей [7]. Анализ адекватности моделей (4), (6) влияния внешних факторов на параметры пропульсивного комплекса выявил отклонение расчетных значений от экспериментальных зависимостей не более 3 %.

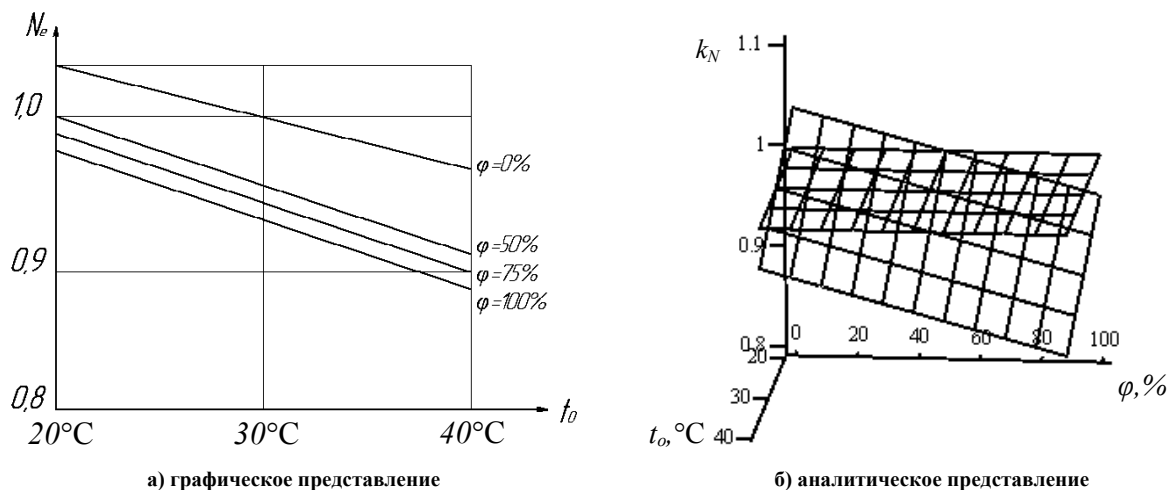


Рис. 4. Влияние параметров окружающей среды на мощность судовых дизельных установок

Аналогичным образом на основе известных экспериментально определенных характеристик можно определить зависимость величины сопротивления движению судна от его скорости, ухудшения технического состояния корпуса (степени обрастания) и спектра волнения.

#### Выводы и перспективы дальнейших исследований

Полученные регрессионные модели влияния внешних факторов на работу пропульсивного комплекса позволяют имитировать изменение условий эксплуатации судна. Это позволяет проводить анализ динамики судна в ходовых режимах путем компьютерного моделирования с учетом изменения внешних условий при разработке и оценивании эффективности систем управления движением судна.

#### Список использованной литературы

1. Обеспечение надежности судовых дизелей на эксплуатационных и особых режимах работы / М.А. Малиновский, А.А. Фока, В.И. Ролинский, Ю.З. Вахрамеев. – Одесса: ФЕНИКС, 2003. -150 с.
2. Суворов П.С. Судовые двигатели внутреннего сгорания: учебное пособие / П.С. Суворов. – Одесса: ОНМА, 2012. – 626 с.
3. Суворов П.С. Динамика дизеля в судовом пропульсивном комплексе. / П.С. Суворов. – Одесса: ОНМА, 2004. – 304 с.
4. Ланчуковский В.И. Автоматизированные системы управления судовых дизельных и газотурбинных установок. Учебник./ В.И. Ланчуковский, А.В. Кузьминых. – М.: Транспорт, 1983. – 320с.
5. Вагущенко Л.Л. Системы автоматического управления движением судна. / Л.Л. Вагущенко, Н.Н. Цымбал – Одесса: Фенікс, 2007. – 328 с.
6. Токарев Л.Н. Системы автоматического регулирования. Примеры схем и структур, статические и динамические характеристики, математические модели, элементы теории регулирования. / Л.Н. Токарев – СПб.: «Нотабене», 2001. – 192с.
7. Киричков В.Н. Автоматика и управление в технических системах. В 11-ти кн. Кн.2. Идентификация объектов систем управления технологическими процессами / В.Н. Киричков; под ред. А.А. Краснопрошиной. – К.: Выща шк. 1990. – 263 с.

УДК 519.6

С. В. ЧОПОРОВ

Запорізький національний університет

**СГЛАЖИВАНИЕ СЕТОК ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА**

*Статья посвящена исследованию актуальной проблемы построения и сглаживания неструктурированных сеток четырехугольных конечных элементов. При построении таких сеток в окрестностях особенностей границ объекта могут возникать невыпуклые четырехугольники. Для устранения невыпуклых элементов при выборе новых координат в каждом узле предлагается решать локальную задачу минимизацию функционала площади. Функционал площади в узле определяется как сумма экспонент площадей, вычисленных с учетом знака, для смежных элементов.*

*Ключевые слова: дискретная модель, сетка, конечный элемент, четырехугольник, сглаживание.*

С. В. ЧОПОРОВ

Запорізький національний університет

**ЗГЛАДЖУВАННЯ СІТОК ЧОТИРИКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛОКАЛЬНОЇ  
МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІОНАЛУ**

*Стаття присвячена дослідженню актуальної проблеми побудови та згладжування неструктурованих сіток чотирикутних скінченних елементів. При побудові таких сіток в околицях особливостей меж об'єкта можуть виникати неопуклі чотирикутники. Для усунення неопуклих елементів при виборі нових координат у кожному елементі пропонується розв'язувати задачу мінімізації функціоналу площини. Функціонал площини у вузлі визначається як сума експонент площин, обчислених з урахуванням знаку, для суміжних елементів.*

*Ключові слова: дискретна модель, сітка, скінченний елемент, чотирикутник, згладжування.*

S. V. CHOPOROV

Zaporizhzhya National University

**SMOOTHING OF QUADRILATERAL MESHES BY LOCAL FUNCTIONAL  
MINIMIZATION**

*This article describes the problem of unstructured quadrilateral mesh generation and smoothing. During automatic mesh generation, in general, non-convex quadrilaterals can be obtained near boundaries of non-convex regions. We suggest the smoothing algorithm that refines meshes using local minimization of an area functional. The area functional for some node is an exponential sum of signed areas of adjacent elements. Such functional is minimized for each node using the conjugate gradient method.*

*Keywords: discrete model, mesh, finite element, quadrilateral, smoothing.*

**Постановка проблеми**

В процессе конечно-элементного исследования инженерных объектов возникает проблема построения адекватных дискретных моделей областей. Как правило, к дискретным моделям предъявляются определенные требования: (в общем случае) границы объекта должны быть аппроксимированы гранями и ребрами элементов заданной формы, не должно быть слишком больших и слишком маленьких элементов, форма элементов должна быть как можно ближе к правильной и т. п. Удовлетворение таким требованием в процессе генерации дискретной модели геометрического объекта является достаточно трудной задачей, поэтому в качестве завершающих этапов на практике используют различные процедуры сглаживания.

Под процедурой сглаживания понимается алгоритм выбора новых координат узлов. Такие алгоритмы, чаще всего, явно или неявно решают задачу оптимизации одной или нескольких геометрических характеристик конечных элементов. Например, обеспечения равенства длин ребер или площадей, максимальности минимального угла и т. д. Алгоритмы сглаживания разделяют на глобальные и локальные. Глобальные алгоритмы решают задачу оптимизации положений одновременно всех узлов, а локальные – одного или нескольких узлов, требуя многократного итерационного применения ко всем узлам.

В задачах исследования напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек весьма распространено использование четырехугольных конечных элементов. При генерации сеток таких элементов для геометрических объектов, границы которых аппроксимируются невыпуклыми многоугольниками, могут возникать вырожденные четырехугольники (один из углов больше или равен  $180^\circ$ ). Таким образом, целью

данной статьи является разработка подхода к сглаживанию сеток четырехугольных элементов, гарантирующего отсутствие вырожденных элементов.

**Анализ последних достижений и публикаций**

Возможно, наибольшее распространение получили подходы, основанные на сглаживании Лапласа [1]. Оно основывается на идее перемещения узла в центр масс фигуры, образованной смежными элементами (рис. 1). Простейшая реализация такого сглаживания предполагает использование следующей формулы вычисления новых координат

$$S(P) = \sum_{P_i \in A_P} w_i P_i, \tag{1}$$

где  $A_P$  – множество соседних с  $P$  узлов,  $w_i$  – весовые коэффициенты (весьма распространено использование значения  $w_i = |A_P|$ ).

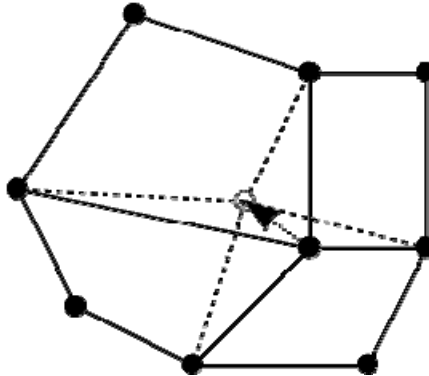


Рис. 1. Сглаживание Лапласа для фрагмента четырехугольной сетки

Процедура состоит в сглаживании каждого узла по очереди. Такая процедура повторяется несколько раз.

Модификации сглаживания Лапласа, как правило, связаны с введением правил вычисления весовых коэффициентов в формуле (1). Например, взвешенное по длинам сторон [2]; основанное на использовании окружающих узлов (для четырехугольников и шестигранников используются все узлы смежных элементов) [3]; ограниченное сглаживание Лапласа [4-6], при котором узел перемещается в новую позицию, только если выбранная метрика (например, минимальный угол в элементе) не ухудшается; и другие [7-8].

Основным преимуществом подходов, основанных на сглаживании Лапласа, является использование малых вычислительных ресурсов, а также простота реализации. Основным недостатком такой процедуры является возможность получения вырожденных элементов (особенно при обработке четырехугольников или шестигранников). Также необходимо отметить, что оно стремится равномерно расположить узлы.

Альтернативой сглаживанию Лапласа являются подходы, основанные на введении целевой функции, минимизация или максимизация которой обеспечит оптимальное расположение узлов сетки. Например, в качестве целевой функции могут выступать значения минимального или максимального угла элемента [5-6, 9]. Также в качестве метрик используются отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной (для треугольников и тетраэдров) [10], площади элементов, длины сторон или скалярные произведения векторов, определенных на сторонах элементов [11-15].

Преимущество методов, основанных на оптимизации, состоит в гарантировании улучшения качества сетки. Однако, их реализация требует решения задачи оптимизации с числом переменных вдвое или втрое большим, чем число узлов сетке. Время, необходимое на выполнение процедуры такого сглаживания, может значительно превышать время, необходимое на выполнение сглаживания Лапласа [4].

Также разрабатываются гибридные методы [5-6, 16], основанные на комбинировании оптимизационных методов и сглаживания Лапласа.

**Цель исследования**

Цель исследования является разработка подхода к сглаживанию неструктурированных сеток четырехугольных элементов, гарантирующего отсутствие невыпуклых элементов.

**Изложение основного материала исследования**

Пусть неструктурированная сетка четырехугольных элементов  $M$  задана в виде

$$M = \{V = (v_i), E = (q_j)\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}, \tag{2}$$

где  $V$  – упорядоченное (например, в порядке добавления) множество вершин;  $v_i = (x_i, y_i)$  – радиус-вектор  $i$ -й вершины;  $n$  – число вершин в сетке;  $E$  – упорядоченное множество элементов

(четырёхугольников);  $q_j = (i_{j,1}, i_{j,2}, i_{j,3}, i_{j,4})$  –  $j$ -й четырёхугольник сетки, заданный номерами вершин в множестве  $\mathbf{V}$  в порядке обхода против часовой стрелки;  $k$  – число элементов в сетке.

Апликаты векторных произведений пар векторов, направленных из каждой вершины вдоль смежных в ней ребер (рис. 2), равны удвоенным площадям треугольников, определенных вершиной, смежными ребрами и диагональю. Причем знак апликаты будет положительным, если угол между векторами больше  $0$  и меньше  $\pi$ ; отрицательным, если угол между векторами от  $\pi$  до  $2\pi$ . Равным нулю оно будет, если векторы коллинеарны или длина хотя бы одного равна  $0$ . Т.е., у невыпуклого четырёхугольника хотя бы в одном узле такое произведение будет меньшим или равным нулю.

Если  $a$ ,  $b$  и  $c$  – радиус-векторы вершин треугольника, перечисленные в порядке обхода против часовой стрелки, тогда удвоенное значение площади с учетом знака определяется функцией

$$\alpha(a, b, c) = (b - a) \times (c - a), \tag{3}$$

где  $\times$  обозначает векторное произведение.

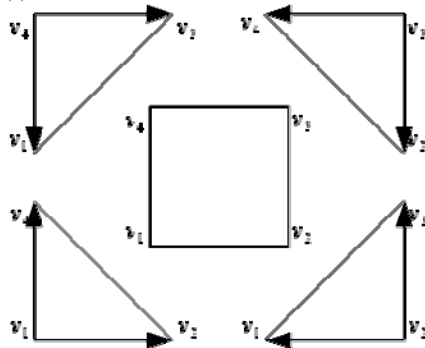


Рис. 2. Представление четырёхугольника четырьмя треугольниками

Простейшая целевая функция, минимизация которой будет стремиться устранить треугольники с углом больше или равным  $\pi$ , будет иметь вид [13]

$$F(\mathbf{M}) = \sum_{j=1}^k \left( e^{-t\alpha(v_1(q_j), v_2(q_j), v_4(q_j))} + e^{-t\alpha(v_2(q_j), v_3(q_j), v_1(q_j))} + e^{-t\alpha(v_3(q_j), v_4(q_j), v_2(q_j))} + e^{-t\alpha(v_4(q_j), v_1(q_j), v_3(q_j))} \right), \tag{4}$$

где  $t$  – это действительное положительное число, используемое для масштабирования;  $v_p(q_j) = v_{i_{j,p}}$ ,  $p = \overline{1,4}$  – функция нахождения радиус-вектора  $p$ -й вершины четырёхугольника.

Минимуму (4) будет соответствовать выпуклая сетка, если выполняется неравенство [13]

$$t > \ln \frac{4k}{\alpha_-}, \tag{5}$$

где  $\alpha_-$  – минимальное значение функции (3) в сетке  $\mathbf{M}$ .

Формула (5) позволяет автоматизировать выбор  $t$ . Однако, минимизация (4) для всех узлов сетки одновременно является экстенсивной процедурой, т.к., количество независимых переменных будет в два раза больше числа узлов в сетке. Уменьшить размерность решаемой задачи можно при помощи последовательных локальных решений для каждого узла.

В локальной формулировке функция (4) примет вид

$$L(v) = \sum_{q_j \in \text{Adj}(v)} \left( e^{-t\alpha(v_1(q_j), v_2(q_j), v_4(q_j))} + e^{-t\alpha(v_2(q_j), v_3(q_j), v_1(q_j))} + e^{-t\alpha(v_3(q_j), v_4(q_j), v_2(q_j))} + e^{-t\alpha(v_4(q_j), v_1(q_j), v_3(q_j))} \right), \tag{6}$$

где  $\text{Adj}(v)$  – множество четырёхугольников, смежных в узле  $v$ .

У функции (6) две независимые переменные (координаты узла), что существенно упрощает поиск минимума. Последовательную минимизацию функции (6) можно рассматривать как итерационное приближение к минимуму функции (4) при помощи координатного спуска. По аналогии со сглаживанием



Лапласа для достижения наилучшего результата данную процедуру необходимо повторять несколько раз. В результате получен следующий алгоритм.

**algorithm** local-optimization-smoothing

**input:**

Сетка четырехугольников  $\mathbf{M} = \{\mathbf{V}, \mathbf{E}\}$ ,  $\varepsilon$  – параметр точности поиска.

**output:**

Сетка четырехугольников  $\mathbf{M} = \{\mathbf{V}, \mathbf{E}\}$  с измененными координатами вершин в множестве  $\mathbf{V}$

$$x_{min} \leftarrow \min_x (V), x_{max} \leftarrow \max_x (V), y_{min} \leftarrow \min_y (V), y_{max} \leftarrow \max_y (V)$$

**for each**  $v_i$  **in**  $\mathbf{V}$  **do**

$$\mathbf{A} \leftarrow \text{Adj}(v_i)$$

$$\bar{l} \leftarrow 0, \alpha_- \leftarrow (x_{max} - x_{min})(y_{max} - y_{min})$$

**for each**  $q_j$  **in**  $\mathbf{A}$  **do**

$$\bar{l} \leftarrow \bar{l} + v_2(q_j) - v_1(q_j) + v_3(q_j) - v_2(q_j) + v_4(q_j) - v_3(q_j) + v_1(q_j) - v_4(q_j)$$

$$\alpha_- \leftarrow \min\{\alpha_-, \alpha(v_1(q_j), v_2(q_j), v_4(q_j)), \alpha(v_2(q_j), v_3(q_j), v_1(q_j)), \alpha(v_3(q_j), v_4(q_j), v_2(q_j)), \alpha(v_4(q_j), v_1(q_j), v_3(q_j))\}$$

**end for**

$$\bar{l} \leftarrow \frac{\bar{l}}{4|\mathbf{A}|}, t \leftarrow \ln\left(\frac{4|\mathbf{A}|}{\alpha_-} + 1\right)$$

**function**  $L(w)$

$$s \leftarrow 0$$

**for each**  $q_j$  **in**  $\mathbf{A}$  **do**

$$v_1 \leftarrow \begin{cases} w, & v_1(q_j) = v_i, \\ v_1(q_j), & v_1(q_j) \neq v_i \end{cases}, v_2 \leftarrow \begin{cases} w, & v_2(q_j) = v_i, \\ v_2(q_j), & v_2(q_j) \neq v_i \end{cases}$$

$$v_3 \leftarrow \begin{cases} w, & v_3(q_j) = v_i, \\ v_3(q_j), & v_3(q_j) \neq v_i \end{cases}, v_4 \leftarrow \begin{cases} w, & v_4(q_j) = v_i, \\ v_4(q_j), & v_4(q_j) \neq v_i \end{cases}$$

$$s \leftarrow s + e^{-t\alpha(v_1, v_2, v_4)} + e^{-t\alpha(v_2, v_3, v_1)} + e^{-t\alpha(v_3, v_4, v_2)} + e^{-t\alpha(v_4, v_1, v_3)}$$

**end for**

**return**  $s$

**end function**

$$v_i \leftarrow \text{conjugate\_gradient}(L, v_i, \varepsilon \bar{l}, \varepsilon^2 \bar{l})$$

**end for**

В приведенном выше алгоритме,  $\text{conjugate\_gradient}(L, v_i, \varepsilon \bar{l}, \varepsilon^2 \bar{l})$  – поиск минимума функции  $L$  при помощи метода сопряженных градиентов ( $v_i$  – начальное приближение,  $\varepsilon \bar{l}$  – шаг метода,  $\varepsilon^2 \bar{l}$  – расстояние между приближениями, при котором решение считается найденным).

Рассмотрим работу описанного выше алгоритма на примере дискретной модели квадратной пластинки с треугольным вырезом (рис. 3). Исходная модель (рис. 3, а), полученная при помощи метода фоновой сетки, содержит вырожденные элементы около вершин выреза. В результате сглаживания Лапласа (4 итерации, рис. 3, б) общее расположение узлов улучшилось, но остались три невыпуклых элемента (около вершин выреза). После одной итерации предложенным алгоритмом (рис. 3, в) модель уже не содержит невыпуклых элементов, но около отверстия есть элемент с углом, близким к  $180^\circ$ . На рис. 3, г, д, е, ж, соответственно, показаны результаты применения 2, 4, 8 и 16 итераций по узлам с локальной минимизацией. Можно увидеть, что уже на 8 итерациях ребро у правого угла выреза практически совпадает с его биссектрисой. Результат решения глобальной задачи (4) показан на рис. 3, з.

Зависимость времени обработки модели от количества узлов при использовании компьютера с процессором Intel Core i5-3330 3.0GHz (4 ядра) и 8 гигабайтами оперативной памяти показана в табл. 1. В ходе вычислительного эксперимента процедуры сглаживания Лапласа и локальной минимизации с использованием предложенного подхода повторялись в четырех итерациях. Можно увидеть, что наименьшее время необходимо для выполнения сглаживания Лапласа. Локальная минимизация в среднем на три порядка дольше сглаживания Лапласа и на три порядка быстрее поиска минимума в глобальной постановке.

Таблица 1

Зависимость времени сглаживания от количества узлов в дискретной модели

Способ сглаживания	Количество узлов						
	828	1138	1496	1912	2367	2874	3427
Сглаживание Лапласа	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,009
Локальная минимизация	0,382	0,469	0,880	1,108	1,420	1,710	2,029
Глобальная минимизация	63,620	102,300	271,000	428,316	662,700	947,434	1338,041

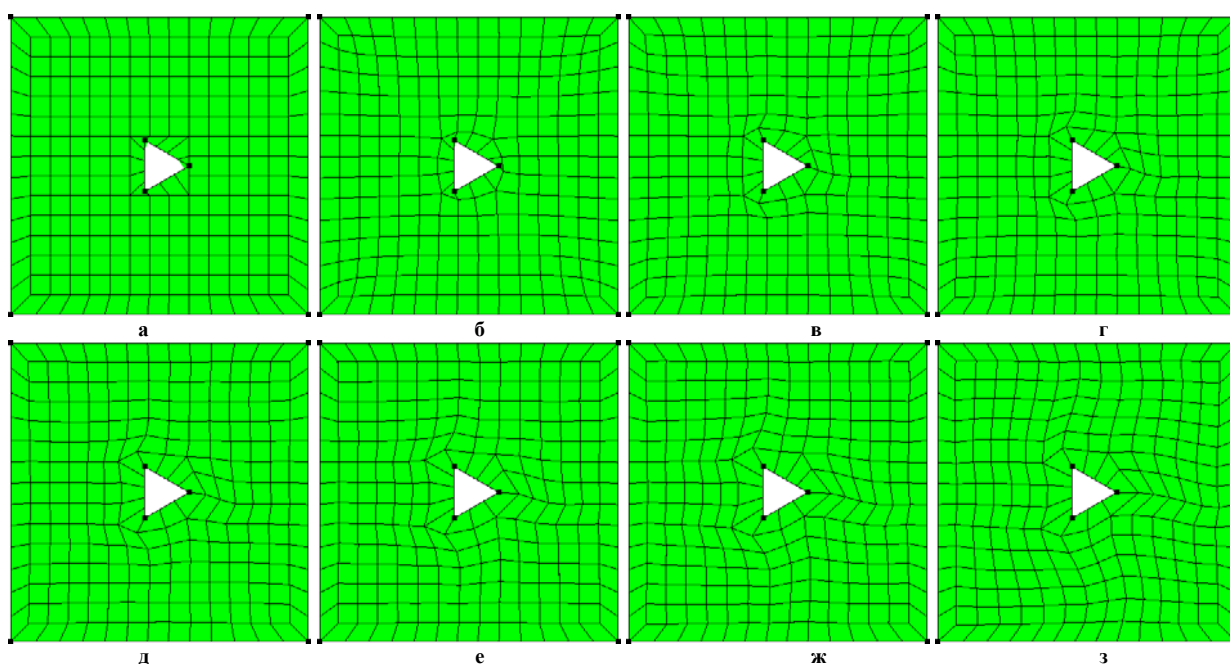


Рис. 3. Дискретная модель квадратной пластинки с треугольным вырезом

На рис. 4 сопоставляются начальная сетка (рис. 4, а), а также результаты сглаживаний Лапласа (рис. 4, б) и при помощи предложенного подхода (рис. 4, в), для дискретной модели фрикционного диска трансмиссии. В результате сглаживания Лапласа остаются два невыпуклых элемента, которые устраняются при локальной оптимизации предложенным подходом.

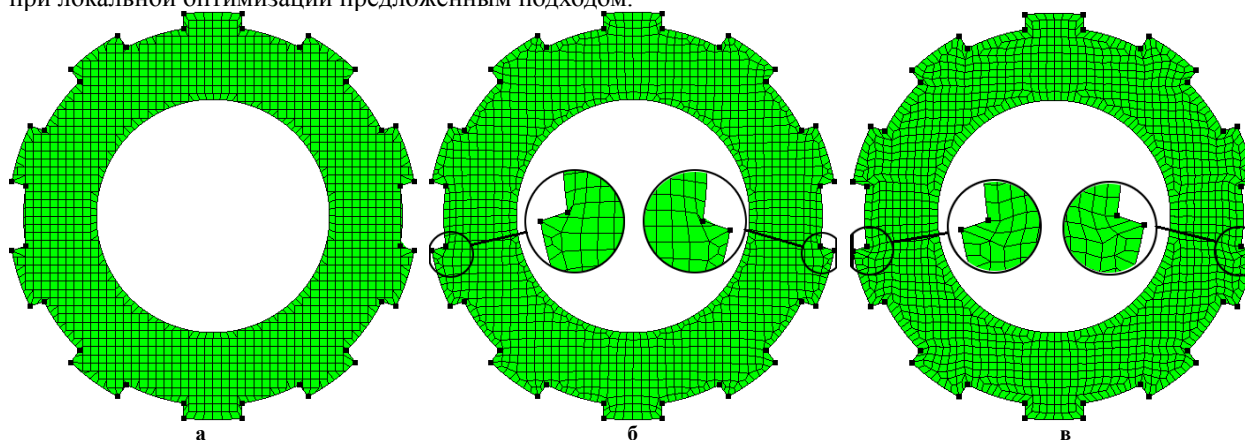


Рис. 4. Дискретная модель фрикционного диска трансмиссии

**Выводы**

Таким образом, основным научным результатом является новый подход к локальному сглаживанию дискретных моделей, позволяющий устранить невыпуклые элементы. Такой подход показывает качество дискретных моделей, сравнимое с глобальной оптимизацией положений узлов, но при этом, требует значительно меньших вычислительных ресурсов. Также его относительно не сложно обобщить для трехмерного случая, используя смешанные произведения троек векторов в узлах шестигранников.

**Список использованной литературы**

1. Field D. A. Laplacian Smoothing and Delaunay Triangulation / D. A. Field // Communications in Applied Numerical Methods. – 1988. – vol. 4. – P. 709-712.
2. Blacker T. D. Paving: a New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation / T. D. Blacker, M. B. Stephenson // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1991. – vol. 32. – P.811-847.
3. Zhu J. Z. A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation / J. Z. Zhu, O. C. Zienkiewicz, E. Hinton, J. Wu // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – vol. 32. – 1991. – P. 849-866.
4. Freitag L. A. A Comparison of Tetrahedral Mesh Improvement Techniques / L. A. Freitag, C. Ollivier-gooch // 5<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A., October 10-11, 1996 : proceedings. – Sandia: Sandia National Labs, 1996. – P. 87-100.
5. Freitag L. A. On Combining Laplacian And Optimization-Based Mesh Smoothing Techniques / L. A. Freitag // Trends in Unstructured Mesh Generation. – 1997. – P. 37-43.
6. Canann S. A. An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes / S. A. Canann, J. R. Tristano, M. L. Staten // 7<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : Dearborn, Michigan, U.S.A., October 26-28, 1998 : proceedings. – Sandia: Sandia National Labs, 1998. – P. 479-494.
7. Hansbo P. Generalized Laplacian Smoothing of Unstructured Grids / P. Hansbo // Communications in Numerical Methods in Engineering. – 1995. – vol. 11. – P. 455-464.
8. Chen L. Mesh Smoothing Schemes Based on Optimal Delaunay Triangulations // 13<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : Williamsburg, Virginia, U.S.A., September 19-22, 2004 : proceedings.. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2004. – P. 109-120.
9. Zhou T. An Angle-based Approach to Two-Dimensional Mesh Smoothing / Tian Zhou and Kenji Shimada // 9<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : International Conference, New Orleans, U.S.A., October 2-5, 2000 : proceedings. – 2000. – Sandia: Sandia National Laboratories, P. 373-384.
10. Parthasarathy V. N. A constrained optimization approach to finite element mesh smoothing / V. N. Parthasarathy, S. Kodiyalam // Finite Elements in Analysis and Design. – 1991. – vol. 9, iss. 4. – P. 309-320.
11. Castillo J. E. An adaptive direct variational grid generation method / José E. Castillo // Computers & Mathematics with Applications. – 1991. – vol. 21, iss. 5. – P. 57-64.
12. Tinoco-Ruiz J.-G. Some Properties of Area Functionals in Numerical Grid Generation / José-Gerardo Tinoco-Ruiz, Pablo Barrera-Sánchez, Adán Cortes-Médina // 10<sup>th</sup> International Meshing Roundtable: International Conference, Newport Beach, U.S.A., October 7-10, 2001: proceedings. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2001. – P. 43-54.
13. Barrera-Sánchez P. Robust Discrete Grid Generation on Plane Irregular regions / Pablo Barrera-Sánchez, Guilmer F. González Flores, Francisco J. Dominguez-Mota // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2003. – vol. 43, iss. 6. – P. 845-853.
14. Khattri S.K. An effective quadrilateral mesh adaptation / S. K. Khattri // Journal of Zhejiang University SCIENCE A. – 2006. – vol. 7, iss. 12. – P. 2018-2021.
15. Khattri S.K. An adaptive quadrilateral mesh in curved domains / S. K. Khattri // Serdica Journal of Computing. – 2009. – vol. 3. – P. 248-268.
16. Chen Z. Combined Laplacian and Optimization-based Smoothing for Quadratic Mixed Surface Meshes / Z. Chen // 12<sup>th</sup> International Meshing Roundtable: International Conference, Santa Fe, U.S.A., September 14-17, 2003 : proceedings. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2003. – P. 201-213.

УДК 539.3

И.В. ЩЕРБИНА, О.В. БЕЛОВА  
Национальная металлургическая академия Украины  
Т.С. КАГАДИЙ  
Национальный горный университет

### ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ДЛЯ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

*Исследована плоская задача о передаче нагрузки упругим стрингером упругому анизотропному прямоугольнику, закрепленному на двух противоположных кромках. В середине свободных кромок вдоль оси  $Ox$  пластина усилена стрингером, который при  $x = 0$  нагружен продольной силой  $P_0$ . Получены законы изменения усилия в стрингере и контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной. Рассмотрены частные случаи. Задача решена асимптотическим методом Маневича-Павленко [1,2]. Разработанный авторами метод возмущений позволил свести решение сложных задач теории упругости анизотропных сред к последовательному решению краевых задач теории потенциала.*

*Ключевые слова:* асимптотический метод, ортотропный материал, контактное усилие

I.V. ЩЕРБИНА, O.V. БЕЛОВА  
Національна металургійна академія України  
Т.С. КАГАДІЙ  
Національний гірничий університет

### ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДА ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПЕРЕДАЧУ НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ ТІЛ СКІНЧЕНИХ РОЗМІРІВ

*Досліджено плоску задачу про передачу навантаження пружним стрінгером пружному анізотропному прямокутнику. Отримано закони зміни зусилля в стрінгері і контактне зусилля взаємодії між стрингером та пластиною. В середині вільних кромок вздовж осі  $Ox$  пластина посилена стрингером, який при  $x = 0$  навантажений поздовжньою силою  $P_0$ . Розглянуто окремі випадки. Задача розв'язана асимптотичним методом Маневича-Павленко [1,2]. Розроблений авторами метод збурення дозволив звести розв'язання складних задач теорії пружності анізотропних середовищ до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу.*

*Ключові слова:* асимптотичний метод, ортотропний матеріал, контактне зусилля

I.V. SHERBINA, O.V. BELOVA  
National metallurgical academy of Ukraine  
T.S. KAGADIY  
National metallurgical academy of Ukraine

### APPLICATION OF THE ASYMPTOTIC METHOD TO THE SOLUTION OF THE LOAD TRANSFER PROBLEM FOR BODIES OF FINITE SIZES

*The plane problem of transferring a load by an elastic stringer to an elastic anisotropic rectangle is investigated. The laws of force variation in the stringer and the contact force between the stringer and the plate are obtained. In the middle of the free edges along the axis  $Ox$ , the plate is reinforced by a stringer, which is loaded with  $x = 0$  a longitudinal force  $P_0$ . Particular cases are considered. The problem is solved by the Manevich-Pavlenko asymptotic method [1, 2]. The elaborated by authors perturbation method is allowed to reduced the solution of complicated problems of linear elasticity to subsequently solved boundary problems of potential theory.*

*Keywords:* asymptotic method, orthotropic material, contact force

В механіке деформованого твердого тіла отримання аналітичних рішень в контактних задачах для анізотропних тіл кінцевих розмірів є найбільш складною і, зазвичай, невыполнимою задачею. Тому, попередній асимптотичний аналіз дозволяє не тільки спрогнозувати, смоделировать результат, но і отримати наближене рішення, яке в малій околиці особливих точок, практично, не відрізняється від точного [3-6]. Представлена задача вирішується асимптотичним методом Маневича-Павленко, заснованому на використанні малих параметрів, що характеризують анізотропію. Інтересно той факт, що чим сильніше анізотропія, тим швидше рішення задачі, отримане цим методом, сходиться до точного [1,2].

**Постановка задачі**

Пусть упругая пластина  $0 \leq x \leq h$ ,  $-b \leq y \leq b$  закреплена по кромкам  $y = \pm b$ , две остальные  $x = 0$ ,  $x = h$  остаются свободными. В середине свободных кромок вдоль оси  $Ox$  пластина усилена стрингером, который при  $x = 0$  нагружен продольной силой  $P_0$ . Кроме того предполагается, что стрингер подвержен действию некоторой нагрузки, пропорциональной его смещению, с коэффициентом пропорциональности  $k$ . Материал прямоугольника является ортотропным, главные оси анизотропии совпадают с декартовыми координатами  $x, y$ . Требуется определить законы изменения усилий в стрингере и распределение напряжений в пластине.

Поставленная задача сводится к интегрированию уравнений равновесия прямоугольника в перемещениях

$$\begin{aligned} B_1 u_{xx} + G u_{yy} + m G v_{xy} &= 0, \\ B_2 v_{yy} + G v_{xx} + m G u_{xy} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0 \quad (x = 0, x = h); \\ u = u_c, v = 0 \quad (y = 0); u = v = 0 \quad (y = \pm b), \end{aligned}$$

причем перемещения стрингера  $u_c$  удовлетворяют соотношениям

$$E_c F_c u_{c,xx} = 2ku_c - 2\sigma_{12}(x,0), \tag{2}$$

$$N = E_c F_c u_{c,x} = P_0(x=0); N = 0(x=h), \tag{3}$$

где  $B_j = \frac{E_j h^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$ ,  $G = G_{12} h^*$ ,  $m = 1 + \nu_{21} \frac{B_1}{G}$ ,  $E_1, E_2$  – модули упругости вдоль главных направлений

$Ox; Oy$ ,  $\nu_{12}, \nu_{21}$  – коэффициенты Пуассона,  $G$  – модуль сдвига,  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  – нормальные напряжения,  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  – касательные напряжения; индексы  $x$  и  $y$  означают дифференцирование по соответствующим координатам,  $E_c F_c$  – жесткость на растяжение, сжатие стрингера,  $N(x)$  – усилие в стрингере. При  $y = 0$   $v = 0$ , поэтому контактное усилие взаимодействия между стрингером и прямоугольником определяется по формуле

$$\tau(x) = \sigma_{12}(x,0) = G u_y(x,0). \tag{4}$$

В дальнейшем из условий симметрии относительно оси  $Ox$  рассматривается только область  $0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq b$ .

В соответствии с расщеплением напряженно-деформированного состояния на две составляющие [1,2] сформулированная выше краевая задача в первом приближении сводится к последовательному решению двух следующих

$$B_1 u_{xx}^{1,0} + G u_{yy}^{1,0} = 0 \tag{5}$$

$$u_x = 0(x=0, x=h), u = u_c(y=0), u = 0(y=b) \tag{6}$$

$$G v_{xx}^{2,0} + B_2 v_{yy}^{2,0} = 0 \tag{7}$$

$$v = 0(y=0, y=b), v_x = -u_y(x=0, x=h) \tag{8}$$

Нормальное напряжение  $\sigma_{11}$  и составляющая касательного напряжения  $\sigma_{12}^{(1)}$  определяются по формулам

$$\sigma_{11} = B_1 u_x, \quad \sigma_{12}^{(1)} = G u_y, \tag{9}$$

а усилие в стрингере и контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной находятся из соотношений

$$N(x) = E_c F_c u_x(x,0), \quad \tau(x) = G u_y(x,0). \tag{10}$$

При определении напряженно-деформированного состояния первого типа используются косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по координате  $x$ . В результате получим

$$u_x = \frac{2P_0}{E_c F_c} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh[\omega \alpha_n (b-y)] n \sin(\alpha_n x)}{sh(\omega \alpha_n b) \varphi(n)}, \quad (11)$$

$$u_y = -\frac{P_0}{E_c F_c} \frac{1}{h} \frac{\omega b}{2q + \kappa \omega b} - \frac{2P_0}{E_c F_c} \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch[\varpi \alpha_n (b-y)] n \cos(\alpha_n x)}{sh(\omega \alpha_n b) \varphi(n)}. \quad (12)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. При  $\omega \rightarrow 0$  (пластина работает только на сдвиг) формулы (11), (12) принимают вид

$$u_x = \frac{P_0}{E_c F_c} \frac{b-y}{b} \frac{sh[\sqrt{g_* + \kappa} (h-x)]}{sh(\sqrt{g_* + \kappa} h)}, \quad (13)$$

$$u_y = \frac{P_0}{E_c F_c} \frac{1}{\sqrt{g_* + \kappa}} \frac{ch[\sqrt{g_* + \kappa} (h-x)]}{sh(\sqrt{g_* + \kappa} h)}. \quad (14)$$

где  $g_* = 2G / bE_c F_c$ .

В этом случае нормальное напряжение в пластине  $\sigma_{11} = 0$ , касательное является константой вдоль координаты  $y$ , а для усилия в стрингере имеем

$$N(x) = P_0 \frac{sh[\sqrt{g_* + \kappa} (h-x)]}{sh(\sqrt{g_* + \kappa} h)} \quad (15)$$

При  $h \rightarrow \infty$  (то есть в соответствующей задаче для полуплоскости, работающей только на сдвиг) получим

$$u_x = \frac{P_0}{E_c F_c} \frac{b-y}{b} e^{-\sqrt{g_* + \kappa} x}, \quad u_y = \frac{P_0}{E_c F_c} \frac{1}{b\sqrt{g_* + \kappa}} e^{-\sqrt{g_* + \kappa} x}, \quad N(x) = P_0 e^{-\sqrt{g_* + \kappa} x}$$

При  $b \rightarrow \infty$  соотношения (11), (12) принимают вид

$$u_x = \frac{2P_0}{E_c F_c \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega \alpha_n y} n \sin(\alpha_n x)}{n^2 + 2q \alpha_n (h^2 / \pi^2) + \kappa (h^2 / \pi^2)} \quad (16)$$

$$u_y = \frac{2P_0 \omega}{E_c F_c \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\varpi \alpha_n y} \cos(\alpha_n x)}{n^2 + 2q \alpha_n (h^2 / \pi^2) + \kappa (h^2 / \pi^2)} \quad (17)$$

Предельный переход при  $h \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$  в выражениях (11), (12) дает решение задачи о передаче нагрузки стрингером ортотропной полуплоскости. В частности, при  $y = 0$

$$u_x = \frac{P_0}{E_c F_c \pi \sqrt{q^2 - \kappa}} (a_1 f(a_1 x) - a_2 f(a_2 x)), \quad (18)$$

$$u_y = \frac{P_0 \varpi}{E_c F_c \pi \sqrt{q^2 - \kappa}} (a_1 g(a_1 x) - a_2 g(a_2 x)), \quad (19)$$

$$\text{где } a_1 = q + \sqrt{q^2 - \kappa}, \quad a_2 = q - \sqrt{q^2 - \kappa},$$

$$f(ax) = \sin(ax) si(ax) - \cos(ax) ci(ax), \quad (20)$$

$$g(ax) = -\sin(ax) si(ax) - \cos(ax) ci(ax). \quad (21)$$

Здесь  $si(z)$ ,  $ci(z)$  - соответственно интегральные синус и косинус. Усилие в стрингере  $N(x)$  и контактное усилие взаимодействия  $\tau(x)$  между стрингером и пластиной определяются по формулам (10).

Полученные выше решения не удовлетворяют нулевым граничным условиям по касательным напряжениям  $\sigma_{12}$  для пластины при  $x = 0$ ,  $x = h$ . Эта невязка устраняется при определении напряженно-деформированного состояния второго типа, которое сводится к интегрированию уравнения (7) с граничными условиями (8). Определение напряженно-деформированного состояния второго типа проведем для  $h \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$ , то есть для полуплоскости. Тогда граничные условия для такой задачи будут иметь вид:

$$v = 0 \ (y = 0, y = \infty), v_x = -u_y \ (x = 0) \ v_x = 0, \ (x = \infty) \tag{22}$$

причем  $u_y$  находится из формулы (19) при  $x = 0$ .

Применяя к уравнению (7) и граничным условиям (22) синус-преобразование Фурье по координате  $y$  и возвращая к оригиналу, получим  $v(x, y)$ . Нормальное напряжение  $\sigma_{22}$  и составляющая касательного напряжения  $\sigma_{12}^{(2)}$  находятся по формулам  $\sigma_{22} = B_2 v_y, \ \sigma_{12}^{(2)} = G v_x$

После определения напряженно-деформированного состояния второго типа касательное напряжение  $\sigma_{12}$  при  $x = 0$  удовлетворяет заданным нулевым условиям, так как

$$v_x(0, y) = -\frac{P_0 \omega}{\lambda E_c F_c \pi \sqrt{q^2 - \kappa}} \left( a_1 \int_0^\infty \frac{e^{-\omega y s} ds}{s + a_1} - a_2 \int_0^\infty \frac{e^{-\omega y s} ds}{s + a_2} \right),$$

Значение  $u_y(0, y)$  определяется по формуле (19).

При  $k = 0$  ( $\kappa = 0, a_1 = 2q, a_2 = 0$ ) получаем решение задачи, когда отсутствует дополнительная нагрузка на стрингер, пропорциональная его смещению.

На рис.1 представлено распределение касательного напряжения  $\sigma_{12}$  при  $x = 0$  для различных значений коэффициента  $k$  (1-  $k = 0, 2$  -  $k = 0,2, 3$  -  $k = 0,5, 4$  -  $k = 0,8$ ) На рис.2 представлено изменение усилий в стержне  $N(x)$  (1-  $k = 0,1 2$  -  $k = 0$ ).

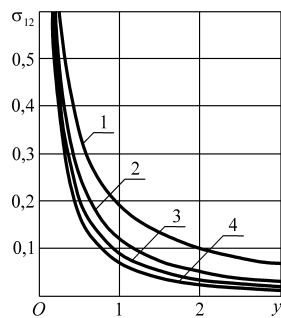


Рис.1. Распределение касательного напряжения при  $x = 0$

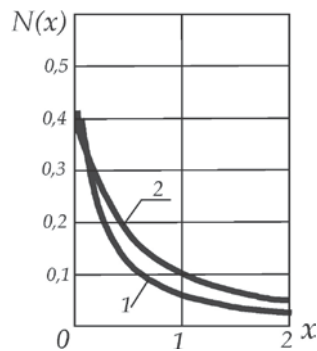


Рис. 2. Изменение усилий в стержне

Решена также задача для случая, когда пластина представляет собой кольцевой сектор из ортотропного материала, обладающего цилиндрической анизотропией.

**Выводы**

Асимптотический анализ является естественным математическим аппаратом, который дает возможность построить обоснованные приближенные уравнения и оценить области применимости различных гипотез. Это открывает новые перспективы при исследовании многих практически важных задач, возникающих в современной технике, которые до сих пор не нашли эффективного решения. Применение метода возмущений в данной работе при решении задачи о передаче нагрузки для тел конечных размеров позволило перейти от сложной смешанной краевой задачи механики к последовательному решению задач теории потенциала, которая сейчас является одной из наиболее изученных областей математической физики. Проведенный асимптотический анализ может быть использован для оценки НДС конструкций с усилениями, накладками, штампами и др.

**Список использованной литературы**

1. Маневич Л. И.. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов / Л. И.. Маневич, А. В Павленко. – Киев: Вища школа, 1991. – 131 с.
2. Маневич Л. И. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела / Л. И. Маневич, А. В. Павленко, С. Г. Коблик. – К., Донецк: Вища школа, 1982. – 152 с
3. Кагадий Т. С. Аналитический подход к решению некоторых контактных задач / Т. С. Кагадий, О. В Белова, И. В. Щербина // Вісник Херсонського національного університету. – 2016. – №3 (58). – С. 104-110.
4. Кагадий Т. С. Об эффективности использования асимптотических методов / Т. С. Кагадий, О. В Белова, И. В. Щербина // Всеукраїнська наукова конференція «Диференціальні рівняння та проблеми аеродинаміки й тепломасопереносу», 28-30 вересня 2016 р. – Дніпро, 2016. – С. 69-71.

5. Белова О. В. Эффективность применения асимптотического метода при решении некоторых задач механики / О. В. Белова, Т. С. Кагадий, И. В. Щербина / Вісник Запорізького Національного Університету, серія ф.-м. науки. – 2014. – № 12. – С. 11-17.

6. Kagadiy T. The analysis of the solution of the task about the mono axial stretching of the anisotropic plate with the curvilinear anisotropy loosened by the circular orifice / T. Kagadiy, O. Belova / Theoretical Foundations of Civil Engineering Polish-Ukrainian Transactions – 2015. – Vol. 23. – P. 9-14.



УДК: 621.313.333, 621.671-621.316, 519.25

Г.Д. ЭФЕНДИЕВ, Я.И. РУСТАМОВ, Н.Г. ТАЛЫБОВА  
Институт Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана**ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С  
ПРИМЕНЕНИЕМ ФОРМУЛЫ БАЙЕСА  
EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/13/1-M-28**

*В статье рассматривается оценка эффективности прогностических моделей, приводится пример оценки показателей эффективности прогностических моделей с применением формулы Байеса, применяемых в медицине и в ирригационных системах.*

*Ключевые слова: прогнозирование, оценка эффективности, чувствительность, специфичность, оправдываемость, формула Байеса, насосная станция, осложнения.*

G.J. EFENDIEV, Ya.I. RUSTAMOV, N.G. TALYBOVA  
Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences**ASSESSMENT OF PROGNOSTIC MODELS EFFICIENCY WITH THE USE OF BAYES FORMULA  
EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/13/1-M-28**

*The assessment of prognostic models efficiency is considered in the article. The example of assessment of indicators of prognostic models efficiency with the use of Bayes formula, which are applied in the medicine and irrigative systems is given in the research.*

*Key words: prognostics, efficiency assessment, sensibility, specificity, Bayes formula, pumping plant.*

**Введение**

Формула Байеса все более широко применяется в теории и практике, активно используется в самых различных областях знаний, где требуется принять наилучший из нескольких вариантов решения, оценить степень риска или шансов на успех [1, 3, 4, 7]. Байесовскому подходу при прогнозировании явлений посвящены большое количество научных и образовательных статей. Однако, об эффективности прогностических моделей, построенных с применением формулы Байеса, можно сказать, не говорится. Оценки эффективности прогностических моделей, с точки зрения повышения точности и усовершенствования моделей имеют большое значение. В данной статье рассматривается оценка эффективности таких моделей, применяемых в ирригационных системах и в медицине.

**Постановка задачи**

Построена прогностическая модель, позволяющая вычислить вероятность возможности явления. Требуется вычислить эффективность модели на основании эмпирических данных.

**Решение**

В практике оценки эффективности прогностических моделей, рассматриваются такие показатели, как чувствительность, специфичность, безошибочность, ошибки первого рода (ложно отрицательные ответы), ошибки второго рода (ложноположительные ответы) [5, 6].

Сущность вышеуказанных показателей заключается в следующем.

Чувствительность – это относительная частота истинно положительных результатов наблюдений (ожидаемые явления наблюдаются). Высокие значения чувствительности важны при утверждении диагноза.

Специфичность – это относительная частота истинно отрицательных результатов наблюдений (не ожидаемые явления не наблюдаются).

Оправдаемость – это относительная частота принятия безошибочных решений по отношению к истинно положительным и истинно отрицательным явлениям.

Ошибка первого рода (ложно отрицательный ответ) – это относительная частота ложно отрицательных результатов наблюдений (не ожидаемые явления наблюдаются).

Ошибка второго рода (ложноположительный ответ) – это относительная частота ложно положительных результатов наблюдений (ожидаемые явления не наблюдаются).

Для оценки эффективности прогностических моделей обычно разрабатывается таблица сопряженности второго порядка, содержащая два прогностических условия (табл. 1): явление прогнозируется (ожидается) или не прогнозируется (не ожидается) и два исходных условия: явление фактически наблюдается или не наблюдается.

Таблица 1.

Таблица оправдываемости альтернативных прогнозов

Результат наблюдения	Прогноз явления		Всего
	ождается	не ожидается	
Наблюдается	a	b	a+b
Не наблюдается	c	d	c+d
Всего	a+c	b+d	a+b+c+d

Здесь:

a – число случаев оправдавшихся прогнозов наличия явления (ожидаемое явление фактически наблюдалось);

b – число случаев неоправдавшихся прогнозов отсутствия явления (не ожидаемое явление фактически наблюдалось);

c – число случаев неоправдавшихся прогнозов наличия явления (ожидаемое явление фактически не наблюдалось);

d – число случаев оправдавшихся прогнозов отсутствия явления (не ожидаемое явление фактически не наблюдалось).

По данным таблицы 1 показатели эффективности вычисляются следующими формулами.

Чувствительность прогностической модели (SE):

$$SE = \frac{a}{a+c} \tag{1}$$

Специфичность прогностической модели (SP):

$$SP = \frac{d}{b+d} \tag{2}$$

Общая оправдываемость прогностической модели (P):

$$P = \frac{a+d}{a+b+c+d} \times 100\% \tag{3}$$

Ошибка первого рода ( $\alpha$ ):

$$\alpha = \frac{b}{a+b} \tag{4}$$

Ошибка второго рода ( $\beta$ ):

$$\beta = \frac{c}{c+d} \tag{5}$$

Кроме показателей эффективности, дополнительно вычисляется критерий точности прогностической модели (Q) по А.Б.Обухову [3]:

$$Q = 1 - \frac{b}{a+b} - \frac{c}{c+d} \tag{6}$$

Рассмотрим примеры оценки эффективности прогностических моделей с применением формулы Байеса в ирригационных системах и в медицине

1. Нами была построена прогностическая модель безотказной работы насосных станций с применением формулы Байеса. Рассмотрены данные 86 насосных станций, были определены три существенных факторов с девятью различными градациями, влияющие на безотказную работу насосной станции в течение требуемого интервала времени.

По эмпирическим данным была составлена таблица оправдываемости модели (табл. 2).

Таблица 2.

Таблица оправдываемости прогностической модели безотказной работы насосных станций

Результат наблюдения	Прогноз безотказной работы		Всего
	ожидалась	не ожидалась	
Наблюдалась	46	2	48
Не наблюдалась	3	35	38
Всего	49	37	86

По данным таблицы 2 вычислены показатели эффективности:

Чувствительность модели:  $SE=0,939$

Специфичность модели :  $SP=0,946$

Общая оправдываемость модели:  $P=0,942$

Ошибка первого рода:  $\alpha=0,042$

Ошибка второго рода:  $\beta=0,079$

Критерий точности модели:  $Q=0,879$

Как видно, эффективность прогностической модели безотказной работы насосных станций с применением формулы Байеса имеет уровень в пределах 93-95%.

2. Еще одна прогностическая модель с применением формулы Байеса была построена для оценки вероятности развития гнойно-воспалительных осложнений послеоперационных ран на органах брюшной полости. Были рассмотрены данные 200 больных, с 26 различными градациями, влияющие гнойно-воспалительные осложнения послеоперационных ран на органах брюшной полости.

Для оценки эффективности прогностической модели развития гнойно-воспалительных осложнений послеоперационных ран на органах брюшной полости, были рассмотрены показатели 56 больных после операции.

По эмпирическим данным была составлена таблица оправдываемости модели (табл. 3).

Таблица 3.

Таблица оправдываемости прогностической модели развития гнойно-воспалительных осложнений послеоперационных ран на органах брюшной полости

Результат наблюдения	Прогноз осложнений		Всего
	ожидалось	не ожидалось	
Наблюдалось	22	2	24
Не наблюдалось	1	31	32
Всего	23	33	56

По данным таблицы 3 вычислены показатели эффективности:

Чувствительность модели:  $SE=0,957$

Специфичность модели :  $SP=0,939$

Общая оправдываемость модели:  $P=0,946$

Ошибка первого рода:  $\alpha=0,083$

Ошибка второго рода:  $\beta=0,031$

Критерий точности модели:  $Q=0,885$

Как видно, эффективность прогностической модели развития гнойно-воспалительных осложнений послеоперационных ран на органах брюшной полости с применением формулы Байеса имеет уровень в пределах 94-96%.

Следует отметить, что в первичном варианте модели были определены 8 факторов риска. После оценки результатов выявилось, что эффективность прогностической модели имеет уровень 88-92%, что неприемлемо в медицине. Поэтому были продолжены исследования, определены еще 3 фактора риска и усовершенствована прогностическая модель. В результате был достигнут вышеуказанный уровень эффективности прогностической модели.

#### Выводы

Результаты работы могут быть использованы для оценки эффективности прогностических моделей с целью их совершенствования.

#### Список использованной литературы

1. Гублер Е.В. Вычислительные методы анализа и распознавания патологических процессов. Л: Медицина 1978; 296 с.

2. Обухов А.М. К вопросу об оценке успешности альтернативных прогнозов // «Изв. АН СССР, сер. геофиз.», 1955, № 4, с. 339-349
3. Эфендиев Г.Д., Халилзаде Р.С., Гасанов Р.С.. Анализ факторов, влияющих на исходы хирургического лечения геморрагических инсультов // Аз. Мед. Жур., Баку, 2003, №4, с. 71-74
4. Шаров В.Д. Применение байесовского подхода для уточнения вероятностей событий в автоматизированной системе прогнозирования и предотвращения авиационных происшествий. // Жур. Управление большими системами: сборник трудов, № 43, 2013, с. 240-253
5. Юнкеров В.И., Григорьев С.Г. Математико-статистическая обработка данных медицинских исследований. СПб.: ВМедА, 2002, 266 с.
6. Хандожко Л.А. Экономическая эффективность метеорологических прогнозов: науч.-мет. пос. – Обнинск: ГУ «ВНИИГМИ-МЦД», 2008. – 129 с.
7. Rustamov Y.I., Afandiyev G.J. Constructing forecasting model of no-failure operation of pump stations // Springer, 2016, pp. 1053-1059

## ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 514.18

Є.О. АДОНЬСВ

Запорізький національний університет

В.М. ВЕРЕЩАГА

Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького

**ОСОБЛИВОСТІ Б-ЛІНІЙ, Б-ПОВЕРХОНЬ, ВИЗНАЧЕННЯ, ПЕРЕВАГИ ТА  
МОЖЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ У КОМПОЗИЦІЙНОМУ МЕТОДІ  
ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Надано визначення Б-ліній, Б-поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша. Показано відмінність способу їхнього моделювання від методів моделювання ліній та поверхонь у традиційній математиці. Ця відмінність полягає у застосуванні геометричної інтерполяції замість інтерполяції з використанням традиційних алгебраїчних методів. Наведено приклади точкових рівнянь ліній та поверхонь. Вказано на переваги використання Б-ліній та Б-поверхонь у композиційному методі геометричного моделювання багатofакторних процесів. Однією з особливостей методу є те, що рівняння геометричних фігур отримуються у результаті встановлення внутрішніх зв'язків між базовими точками симплексу і змінюваної точки геометричної фігури, оминаючи, при цьому, аналітичні методи моделювання, тобто, встановлення геометричних зв'язків між елементами фігури передуює аналітичним ознакам фігури. Такий підхід авторами названо "геометро-математичним апаратом" формалізації розв'язку. Показані підходи до геометричної формалізації багатofакторних ситуацій та процесів. Вказані переваги застосування точкового БН-числення дозволяють у композиційному методі геометричного моделювання багатofакторних процесів не обмежувати кількість факторів, включених до моделі.

Ключові слова: Б-лінія, Б-поверхня, композиційний метод геометричного моделювання, багатofакторні процеси.

Е.А. АДОНЬБЕВ

Запорожский национальный университет

В.М. ВЕРЕЩАГА

Мелитопольский государственный педагогический университет им. Б. Хмельницкого

**ОСОБЕННОСТИ Б-ЛИНИЙ, Б-ПОВЕРХНОСТЕЙ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРЕИМУЩЕСТВА И  
ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ В КОМПОЗИЦИОННОМ МЕТОДЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Дано определение Б-линий, Б-поверхностей в точечном исчислении Балюбы-Найдыша. Показано отличие способа их моделирования от методов моделирования линий и поверхностей в традиционной математике. Это отличие заключается в применении геометрической интерполяции вместо интерполяции с использованием традиционных алгебраических методов. Приведены примеры точечных уравнений линий и поверхностей. Показаны преимущества применения Б-линий и Б-поверхностей в композиционном методе геометрического моделирования многофакторных процессов. Одной из особенностей метода является то, что уравнения геометрических фигур получаются в результате установления внутренних связей между базовыми точками симплекса и изменяемой точки геометрической фигуры, избегая, при этом, аналитические методы моделирования, то есть, установление геометрических связей между элементами фигуры предшествует аналитическим признакам фигуры. Такой подход авторами назван "геометро-математическим апаратом" формализации связей. Показаны подходы к геометрической формализации многофакторных ситуаций и процессов. Указанные преимущества точечного БН-исчисления позволяют в композиционном методе геометрического моделирования многофакторных процессов не ограничивать количество факторов, включенных в модель.

Ключевые слова: Б-линия, Б-поверхность, композиционный метод геометрического моделирования, многофакторные процессы.

Y.O. ADON'YEV  
Zaporizhzhya National University  
V.M. VERESHYAGA  
Melitopol State Pedagogical University named after B. Khmelnytsky

## FEATURES OF B-LINES, B-SURFACES, DEFINITIONS, ADVANTAGES AND OPPORTUNITIES OF APPLICATION IN THE COMPOSITE METHOD OF GEOMETRICAL MODELING

*A definition of B-lines, B-surfaces in the Balyba-Naidysh point calculus is given. The method of their modeling differs from the methods of modeling lines and surfaces in traditional mathematics. This difference consists in applying geometric interpolation instead of interpolation using traditional algebraic methods. Examples of point equations of lines and surfaces are given. The advantages of using B-lines and B-surfaces in the composite method of geometric modeling of multifactor processes are shown. One of the features of the method is that the equations of geometric figures are obtained as a result of establishing internal connections between the base points of the simplex and the variable point of the geometric figure, while avoiding the analytical modeling methods, that is, the establishment of geometric relationships between the elements of the figure precedes the analytical features of the figure. This approach was called the "geometrical-mathematical apparatus" of the formalization of connections by the authors. Approaches to the geometric formalization of multifactorial situations and processes are shown. The indicated advantages of point BN-calculus allow in the composite method of geometric modeling of multifactor processes not to limit the number of factors included to the model.*

*Key words: B-line, B-surface, composite method of geometric modeling, multifactor processes.*

### Постановка проблеми

У різних галузях, з метою прийняття обґрунтованих управлінських рішень, часто виникає проблема поєднання великої кількості фізично різнорідних факторів. Існуючі алгебраїчні методи кореляції вихідних факторів висувають певні обмеження за кількістю та якістю вихідних факторів. Усунення таких обмежень є актуальною проблемою, яку можна розв'язати з використанням композиційного методу формалізованого геометричного моделювання. Однак, на разі недостатня популяризація цього методу викликає певні труднощі при його застосуванні. За результатами доповідей з цього питання на конференціях і семінарах, з'явилася ідея про необхідність додаткових пояснень з питань точкового БН-числення та його використання у композиційному методі геометричного моделювання багатofакторних процесів.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Як відомо з математичної теорії оптимального управління [7], управління лініями та поверхнями відбувається за допомогою функцій та параметрів. Ідею управління геометричними фігурами шляхом зміни вихідних точок вперше висловив І.І. Котов у 1975 році, а сформулював її В.М. Найдиш [8]. Тільки з виконанням досліджень у роботах [9–10] та виданням наукового посібника [11] з'явилася можливість повернутися до досліджень щодо управління формою геометричних фігур за ідеєю І.І. Котова та В.М. Найдиша, а авторам цієї статті вдалося наблизитися до розв'язання проблеми управління формою геометричних фігур вихідними точками, що входять до їх складу. Підґрунтям для розробки композиційного методу геометричного моделювання стало точкове БН-числення [11].

### Формулювання мети дослідження

У порівнянні з відомими методами визначення ліній та поверхонь показати переваги їхнього формування у точковому БН-численні, з метою популяризації композиційного методу геометричного моделювання багатofакторних ситуацій та процесів.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Зазвичай, досліджувані геометричні фігури (об'єкти), у більшості випадків, відносять до деякої системи координат, у результаті чого, розв'язок геометричних питань зводиться до дослідження рівнянь, які зв'язують координати точок, що відносяться до досліджуваної геометричної фігури. Переваги аналітичних методів дослідження відомі і не викликають сумнівів. Однак, при цьому, сам геометричний об'єкт та внутрішні зв'язки між його елементами відходять на другий план, внаслідок чого, втрачається наочність, а разом з тим, і психологічна геометрична впевненість у тому, що за аналітикою геометричної фігури не просто побачити геометричний характер розв'язку. Наприклад, лінія другого порядку [1–2] – плоска лінія, декартові прямокутні координати точок якої задовольняють алгебраїчному рівнянню другого степеня

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

Рівняння (1), за допомогою паралельного переносу та повороту системи координат на певний кут, може бути приведено до канонічного виду, за записом якого визначається вид кривої другого порядку. Однак, для визначення виду та класу лінії другого порядку не обов'язково приводити рівняння (1) до канонічного вигляду через застосування геометричних перетворень (паралельного переносу та повороту),

тому що незмінними є інваріанти визначеної кривої другого порядку. За допомогою цих інваріантів, складених із коефіцієнтів рівняння (1), визначаються види ліній другого порядку, чи вони є такими, що розпадаються ( $\Delta=0$ ), або такими, що не розпадаються ( $\Delta \neq 0$ ), чи вони є центральними ( $\delta \neq 0$ ), або нецентральними ( $\delta=0$ ).

Другий приклад: поверхня другого порядку [1–2] – це множина точок тривимірного дійсного або комплексного простору, координати яких, у декартовій прямокутній системі координат, задовольняють алгебраїчному рівнянню 2-го степеня:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (2)$$

Як і у попередньому прикладі, дослідження поверхні другого порядку може бути виконано без приведення рівняння (2) до одного з 17 можливих рівнянь канонічного вигляду. Таке дослідження виконується шляхом спільного розглядання значень основних інваріантів, які не змінюються у результаті афінних перетворень для визначеної кривої (2), у загальному випадку, визначають поверхню другого порядку з точністю до руху евклідового простору. Якщо відповідні інваріанти двох поверхонь є рівними, то такі поверхні можна сумістити за результатами переміщення. Тобто, такі поверхні є еквівалентними до групи переміщень у просторі, які називають метрично еквівалентними.

Як бачимо з наведених прикладів, множини точок (1) і (2) є віднесеними до декартової системи координат і дослідження їхніх форм відбувається у аналітичному вигляді через інваріанти відносно перетворень.

І навпаки, у точковому БН-численні усі геометричні фігури мають точкові рівняння відносно відповідних симплексів, обраних у афінній системі координат, при цьому, точкові рівняння записують для просторової геометричної схеми розв'язку не у координатній, а у точковій формі. Наприклад, розглянемо відрізок прямої  $AB$  у декартовій системі координат  $Oxyz$  (рис.1). Координати вихідних точок якого відомі  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$ . Необхідно визначити точкові рівняння для множини точок  $M$ , що належать цьому відрізку  $AB$ , використовуючи внутрішні зв'язки між вихідними точками  $A$  і  $B$ , що визначають симплекс, та змінюваною точкою  $M$ .

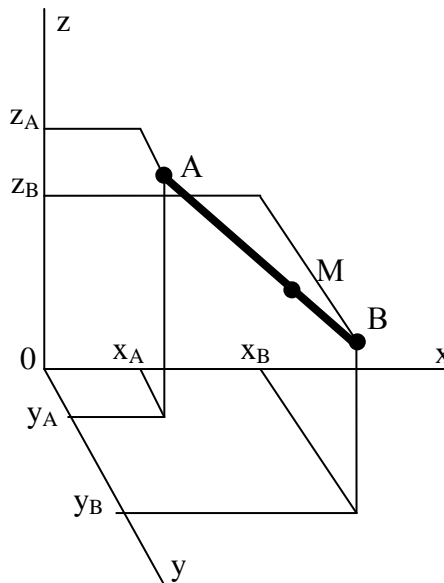


Рис. 1. Геометрична схема для визначення точки  $M$  відрізка  $AB$ .

У відповідності до [3], рівняння відрізка  $AB$  у симплексі  $A, B$  матиме вигляд:

$$M = (B - A)t + A, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

або у іншому вигляді:

$$M = A(1-t) + Bt \rightarrow M = \bar{A}t + Bt, \quad (4)$$

де  $\bar{t}$  – параметр, що доповнює параметр  $t$  до одиниці.

У точковому рівнянні (4) значення  $\bar{t}$  та  $t \in$  частинами від одиниці, тобто  $\bar{t} + t = 1$ .

Якщо у точковому рівнянні (3) зняти обмеження  $0 \leq t \leq 1$ , то отримаємо не відрізок  $AB$ , а пряму  $AB$  в цілому. Виходячи з (4), можна дати визначення для прямої лінії у точковому БН-численні.

**Визначення 1.** Пряма лінія у точковому БН-численні – це множина точок  $M$ , що визначаються як сума відсотків від базових точок  $A$  та  $B$  симплекса  $AB$ , при умові  $0 \leq t \leq 1$ .

Візьмемо  $t=0.5$ , тоді  $\bar{t} = 0.5$ , у відповідності до (4) визначаємо точку  $M = 0.5A + 0.5B$ . З точки зору традиційної математики це рівняння не має сенсу, а у точковому БН-численні воно означає необхідність визначити відповідні дії над координатами цих точок, тобто:

$$x_M = 0.5x_A + 0.5x_B; \quad y_M = 0.5y_A + 0.5y_B; \quad z_M = 0.5z_A + 0.5z_B.$$

Це означає, що точка  $M$  знаходиться всередині відрізка  $AB$ . Таке є можливим, тому що точкове БН-числення побудоване на інваріантах відносно афінних перетворень.

Другий приклад. Розглянемо лінію другого порядку (параболу), у відповідності до [3–5] її точкове рівняння має наступний вигляд:

$$M = A_{11}\bar{t}(1-2t) + A_{12}4t\bar{t} + A_{13}t(2t-1), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (5)$$

Позначимо  $p_1 = \bar{t}(1-2t)$ ;  $q_1 = 4t\bar{t}$ ;  $r_1 = t(2t-1)$ , тоді (5) запишемо:

$$M = A_{11}p_1 + A_{12}q_1 + A_{13}r_1, \quad (6)$$

де  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$  – три дійсні точки, через які проходить парабола, які є точками, що визначають симплекс на площині.

Обов'язкова вимога:  $p_1 + q_1 + r_1 = 1$ , тобто параметри  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $r_1$  є частинами одиниці.

Аналогічним чином можна отримати рівняння для інших ліній другого порядку [6] у локальному симплексі, які будуть аналогічні рівнянню (6).

Виходячи з (6) та вимог щодо неї, дамо визначення для ліній другого порядку у точковому БН-численні.

**Визначення 2.** Лінія другого порядку у точковому БН-численні – це множина точок  $M$ , що визначається як сума відсотків від базових трьох точок симплекса, при умові, що сума параметрів  $p_1 + q_1 + r_1 = 1$ .

Координати точки  $M$ , що є змінюваною для лінії другого порядку, визначаються з координатних рівнянь:

$$\begin{aligned} x_M &= x_{11}p_1 + x_{12}q_1 + x_{13}r_1 \\ y_M &= y_{11}p_1 + y_{12}q_1 + y_{13}r_1 \\ z_M &= z_{11}p_1 + z_{12}q_1 + z_{13}r_1 \end{aligned}$$

Як бачимо, точкове БН-числення надає новий спосіб задання ліній і поверхонь (покажемо далі), який полягає у тому, що кожній точці з множини, що утворює певну геометричну фігуру, відповідає свій набір часток від базових точок симплексу, а сума цих часток завжди дорівнює одиниці. Такий підхід щодо визначення ліній та поверхонь нами було названо композиційним, який не потребує розв'язання системи рівнянь для визначення коефіцієнтів, які забезпечують їхнє проходження через наперед задані точки. А це, у свою чергу, має велике практичне значення для геометричної формалізації багатофакторних ситуацій та процесів.

Оскільки точкові рівняння геометричних фігур отримані у результаті встановлення внутрішніх зв'язків між базовими точками симплексу і змінюваної точки геометричної фігури, оминаючи, при цьому, аналітичні методи моделювання, тобто, без встановлення геометричних зв'язків між елементами фігури передують аналітичним ознакам фігури, то такий підхід нами названо "геометро-математичним апаратом" формалізації розв'язку.

Розглянемо, у точковому БН-численні, формування точкового рівняння поверхні, що проходить через дев'ять наперед визначених дійсних точок, які подамо у вигляді матриці (7):

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad (7)$$



Геометрична схема, що відповідає матриці (7), подана на рис. 2.

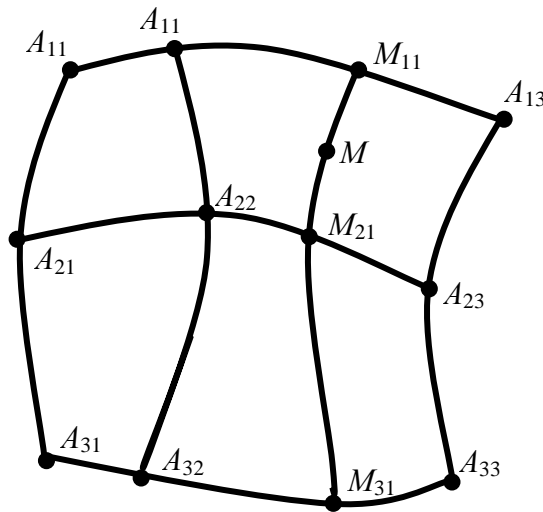


Рис. 2. Схема утворення сегменту Б-поверхні

Цей сегмент поверхні, який складається із чотирьох чарунок, нами названо Б-поверхнею (Балюби поверхнею), щоб відізнати геометро-математичний спосіб його утворення. Він не включає геометричних (миттєвих перетворень, поворотів і таке інше) перетворень афінної або будь-якої іншої групи. Сегмент Б-поверхні має одне рівняння поверхні, яка проходить через дев'ять, наперед заданих (7), точок. Далі покажемо спосіб формування сегменту Б-поверхні.

Трійки точок за стовпчиками і рядками визначимо дугами парабол, точкові рівняння яких мають вигляд:

$$M = A(2t^2 - 3t + 1) + C(4t - 4t^2) + B(2t^2 - t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (8)$$

$$\text{Позначимо } \bar{p}_1 = 2t^2 - 3t + 1; \quad \bar{q}_1 = 4t - 4t^2; \quad \bar{r}_1 = 2t^2 - t. \quad (9)$$

Основною вимогою для (8) є те, що  $\bar{p}_1 + \bar{q}_1 + \bar{r}_1 = 1$ , перевіримо:

$$\bar{p}_1 + \bar{q}_1 + \bar{r}_1 = (2t^2 - 3t + 1) + (4t - 4t^2) + (2t^2 - t) = 1.$$

Якщо прийняти  $u$  та  $v$  за параметри сегменту Б-поверхні, що утворюється дугами парабол (8) та позначити:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2u^2 - 3u + 1; & q_1 &= 4u - 4u^2; & r_1 &= 2u^2 - u; \\ p_2 &= 2v^2 - 3v + 1; & q_2 &= 4v - 4v^2; & r_2 &= 2v^2 - v; \end{aligned} \quad (10)$$

та застосувати схему утворення функцій-параметрів [3]:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{vmatrix} \quad (11)$$

у якій кожний рядок лівої матриці помножується на відповідний елемент правої матриці – стовпчика, то отримаємо функції-параметри  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= p_1 p_2; & a_{12} &= q_1 p_2; & a_{13} &= q_1 p_2; \\ a_{21} &= p_1 q_2; & a_{22} &= q_1 q_2; & a_{23} &= r_1 q_2; \\ a_{31} &= p_1 r_2; & a_{32} &= q_1 r_2; & a_{33} &= r_1 r_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Підставивши (10) у (12), отримаємо функції-параметри  $a_{ij}$ : у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (2u^2 - 3u + 1)(2v^2 - 3v + 1); & a_{12} &= (4u - 4u^2)(2v^2 - 3v + 1); \\ a_{13} &= (2u^2 - u)(2v^2 - 3v + 1); & a_{21} &= (2u^2 - 3u + 1)(4v - 4v^2); \\ a_{22} &= (4u - 4u^2)(4v - 4v^2); & a_{23} &= (2u^2 - u)(4v - 4v^2); \\ a_{31} &= (2u^2 - 3u + 1)(2v^2 - v); & a_{32} &= (4u - 4u^2)(2v^2 - v); \\ a_{33} &= (2u^2 - u)(2v^2 - v). \end{aligned} \tag{13}$$

Поєднавши вихідні значення  $A_{ij}$  матриці (7) з відповідними значеннями функцій-параметрів  $a_{ij}$  (12), (13), отримаємо точкове рівняння сегменту поверхні  $M$ :

$$M = A_{11}a_{11} + A_{12}a_{12} + A_{13}a_{13} + A_{21}a_{21} + A_{22}a_{22} + A_{23}a_{23} + A_{31}a_{31} + A_{32}a_{32} + A_{33}a_{33},$$

або скорочено

$$M = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}a_{ij}; \quad 0 \leq u, v \leq 1. \tag{14}$$

Як бачимо з (14), кожна точка  $M$  поверхні (14) є сумою добутків відсотків, поданих функціями-параметрами  $a_{ij}$ , помножених на відповідну вихідну точку  $A_{ij}$ .

**Визначення 3.** Поверхня будь-якого порядку, класу, виду, що побудована за наперед заданими вихідними точками у точковому БН-численні – є організованою множиною точок  $M$ , які визначаються як сума добутків відсотків (значень функцій-параметрів) на відповідні вихідні точки, за умови, що  $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} = 1$ .

Для визначення координат змінюваної точки  $M$  необхідно використати параметричні рівняння для кожної з координат простору  $E^n$ , у яких функції-параметри відповідають (13). Наприклад, для  $E^3$ :

$$x_M = \sum_{i,j=1}^3 x_{ij}a_{ij}; \quad y_M = \sum_{i,j=1}^3 y_{ij}a_{ij}; \quad z_M = \sum_{i,j=1}^3 z_{ij}a_{ij}; \quad 0 \leq u, v \leq 1. \tag{15}$$

У роботі [3] було доведено твердження, у якому йдеться про те, що якщо суперпозиція  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}$

елементів матриці  $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  дорівнює одиниці, а визначник  $\det A = 0$ , то поверхня, що побудована

на будь-яких вихідних даних  $A_{ij}$  є Б-поверхнею.

Таким чином, точкове рівняння поверхні (14) виконує інтерполяцію дев'яти вихідних точок, яке отримано у результаті геометричної формалізації з використанням геометро-математичного апарату точкового БН-числення, оминаючи, при цьому, алгебраїчні методи інтерполяції, які передбачають розв'язання системи рівнянь для визначення інтерполяційних коефіцієнтів.

Якщо з (14) і (15) прибрати обмеження  $0 \leq u, v \leq 1$ , то ці точкові рівняння будуть виконувати екстраполяцію для  $A_{ij}$  у обох напрямках  $u, v$ , або у одному з них.

Загалом, поверхня (14) є поверхнею четвертого порядку, форму якої можна змінювати, змінюючи значення точок  $A_{ij}$ , тому що функції-параметри  $a_{ij}$  визначають значення відсотків, за допомогою яких кожна з вихідних точок  $A_{ij}$  приймає участь у створенні поверхні  $M$ . Питання управління формою поверхні  $M$

через зміну точок  $A_{ij}$  зовсім не досліджене, тому що воно тільки виникло, при розробці запропонованого тут композиційного методу геометричного моделювання.

Введені поняття Б-лінії (Балюби лінії), Б-поверхні (Балюби поверхні), які уперше були ним отримані без використання алгебраїчних методів інтерполяції у глобальній системі координат.

Б-фігури (Б-лінії, Б-поверхні) подаються у вигляді точкових рівнянь, які отримано у результаті геометричної формалізації у точковому БН-численні.

Таким чином, Б-фігури не є окремим видом, класом, типом, тощо ліній або поверхонь, Б-фігури є іншим способом подання цих ліній, поверхонь у вигляді композиції відсотків  $a_{ij}$  від вихідних точок  $A_{ij}$ .

Тому застосування термінів "Б-лінія", "Б-крива", "Б-поверхня" не означає якихось особливих ліній та поверхонь, вживання цих термінів вказує на інший спосіб утворення відомих ліній та поверхонь.

Виникає питання: "Навіщо це потрібно, коли розроблено достатньо відомих методів геометричного моделювання?" Річ у тім, що подання відомих геометричних фігур у точковій формі надає ряд переваг, таких, як незалежність параметрів, їхня незмінність при проектуванні на осі простору, у фігурі одночасно поєднуються два погляди: як метричного простору зі соєю внутрішньою метрикою (т.з. внутрішня геометрія), так і фігури, що розглядаються у глобальній системі координат у просторі (т.з. зовнішня геометрія).

### Висновки

Таким чином, точкове БН-числення надає новий спосіб побудови ліній і поверхонь, який полягає у тому, що кожній точці з множини, що утворює певну геометричну фігуру, відповідає свій набір часток від базових точок симплексу. При цьому, необхідною умовою є рівність одиниці суми цих. Такий підхід щодо визначення геометричних фігур нами було названо композиційним. Композиційний метод геометричного моделювання не потребує розв'язання системи рівнянь для визначення коефіцієнтів, які забезпечують їхнє проходження через наперед задані точки. Це має велике практичне значення для геометричної формалізації багатofакторних ситуацій та процесів. Точкові рівняння геометричних фігур отримані шляхом встановлення внутрішніх зв'язків між базовими точками симплексу і змінюваної точки фігури без використання аналітичних методів моделювання, тобто, без встановлення геометричних зв'язків між елементами фігури. Такий підхід нами названо "геометро-математичним апаратом" формалізації розв'язку задачі. Вказані переваги точкового БН-числення при застосуванні у композиційному методі геометричного моделювання багатofакторних процесів дозволяють: 1) не обмежувати кількість факторів, включених до моделі, через відсутність алгебраїчних методів кореляції; 2) отримувати модель та розв'язок у просторі, з можливістю подальшого їх аналізу на проєкціях, як одно-, так і двомірних; 3) розкласти задачу багатовимірного простору на необхідну кількість одно-, дво- або тривимірних, що набагато спрощує процес моделювання.

### Список використаної літератури

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, – 1968. – 912 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии, 11-е изд. / Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1972. – 272 с.
3. Адоньев С.О. Композиційний метод геометричного моделювання: суть, особливості та перспективи застосування / С.О. Адоньев // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. – Вип. 8. – С. 3-14.
4. Адоньев С.О. Алгоритм формування моделей багатofакторних процесів композиційного методу / С.О. Адоньев, В.М. Верещага, А.В. Найдиш // Збірник доповідей VI-ої Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених" (м. Київ, 28-29 квітня 2017 р.). – К.: НТУУ "КПІ", 2017. – Вип. 6. – С. 12- 18.
5. Адоньев С.О. Застосування поверхонь відгуку при моделюванні сталого енергетичного розвитку міст / С.О. Адоньев, В.М. Верещага // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2016. – Вип. 3(58). – С. 471-476.
6. Давиденко І.П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / І.П. Давиденко; Тавр. держ. агротехнолог. ун-т. – Мелітополь, 2012. – 23 с.
7. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия, 1984. –Т.4. – 1216 с.
8. Найдыш В.М. Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям: дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / Владимир Михайлович Найдыш; Мелітопольський інститут механізації сільськогосподарського господарства, – 1982. – 512 с.
9. Верещага В.М. Дискретно-параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей: дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / Виктор Михайлович Верещага; МИМСХ – Мелітополь. – 1996. – 320 с.
10. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / Иван Григорьевич Балюба. – К.: КГТУСА, 1995. – 36 с.
11. Точечное исчисление / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш [под ред. В.М. Верещаги]. – Мелітополь: Изд-во МГПУ имени Богдана Хмельницкого, 2015. – 234 с.

УДК 631.31

В.В. ВАНІН, М.В. ГРУБИЧ, В.П. ЮРЧУК  
Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ ЗМІННОГО  
(АКСІАЛЬНОГО) КРОКУ ПРИ КОНСТРУЮВАННІ ВИЛКОВИХ КОПАЧІВ**

*Проведено геометричне моделювання гвинтової поверхні змінного кроку при проектуванні робочих органів вилкового типу. Досліджені геометричні параметри даних копачів в аспекті конструювання робочих органів коренезбиральних машин. Подані в даній статті матеріали є основою для розробки відповідних геометричних моделей та комп'ютерних програмних засобів автоматизованого конструювання як робочих ґрунтообробних поверхонь, так і конкретних робочих органів.*

*Ключові слова: сільськогосподарське машинобудування, моделювання гвинтових поверхонь, поверхні змінного кроку, коренезбиральні машини, робочі органи, копачі вилкового типу, використання робочих органів.*

В.В. ВАНИН, М.В. ГРУБИЧ, В.П. ЮРЧУК  
Национальный технический университет Украины  
"Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЕРЕМЕННОГО  
(АКСИАЛЬНОГО) ШАГА ПРИ КОНСТРУИРОВАНИИ ВИЛЧАТЫХ КОПАТЕЛЕЙ**

*Проведено геометрическое моделирование винтовой поверхности изменяемого шага при проектировании рабочих органов вилочного типа. Исследованы геометрические параметры данных копателей в аспекте конструирования рабочих органов корнеуборочных машин. Представленные в данной статье материалы являются основой для разработки соответствующих геометрических моделей и программных средств автоматизированного конструирования как рабочих почвообрабатывающих поверхностей, так и конкретных рабочих органов.*

*Ключевые слова: сельскохозяйственное машиностроение, моделирование винтовых поверхностей, поверхности изменяемого шага, корнеуборочные машины, рабочие органы, копатели вилочного типа, использование рабочих органов.*

V.V. VANIN, M.V. HRUBICH, V.P. YURCHUK  
National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute"**GEOMETRIC MODELING OF SWITCHING SURFACES OF THE CHANGED STEP FOR THE DESIGN  
OF VOLTAGE COPIES**

*A geometric modeling of the screw surface of the variable step was carried out in the design of the working bodies of the fork type. The geometric parameters of digging data in the aspect of constructing the working bodies of the cornicear machines are investigated. The materials presented in this article are the basis for the development of appropriate geometric models and computer software for automated design of both working soil-forming surfaces and specific working bodies.*

*Key words: agricultural machine building, modeling of screw surfaces, alternating step surfaces, rotational machines, working bodies, fork-type miners, use of working bodies.*

**Постановка проблеми**

В сільськогосподарському машинобудуванні дуже важливе значення має форма робочої поверхні ґрунтообробного знаряддя. Основними факторами руйнації ґрунту, які сприяють процесу кришіння є перебудова самої структури ґрунту. Ця перебудова полягає як в руйнуванні старих, так і в створенні нових структурних зв'язків, а також у виникненні та розвитку мікротріщин. Все це активно впливає на агротехнічні показники всього ґрунтообробного знаряддя.

**Мета дослідження**

Метою даної публікації є дослідження основних властивостей гвинтової просторової кривої, яка є визначальною при геометричному моделюванні та конструюванні гвинтових поверхонь ґрунтообробних знарядь, до яких відносяться робочі поверхні коренезбиральних машин.

Головне завдання даної публікації полягає у вивченні геометричних властивостей гвинтових просторових кривих змінного кроку, які визначають основні властивості гвинтових поверхонь змінного кроку при конструюванні робочих органів ґрунтообробних знарядь. Відповідно до мети даної роботи, необхідно в загальному розглянути принципи побудови гвинтової кривої змінного (аксіального) кроку та її основні властивості.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Методи проектування робочих поверхонь ґрунтообробних знарядь в своїй більшості малоефективні і базуються на емпіричному підході при визначенні параметрів їх поверхонь. Відсутність в таких методах взаємозв'язку між параметрами поверхні, що проектується, і основними агротехнічними вимогами, які пред'явлені до процесу функціонування знаряддя, не дозволяє отримувати робочі поверхні, що забезпечують високу якість виконання технологічного процесу обробку ґрунтового моноліту. При цьому необхідно відмітити, що зменшення радіуса кривини робочої поверхні знаряддя (тобто збільшення напрямків векторів трьохосного стискання) сприяє більш активній дії на ґрунтовий моноліт всього знаряддя [1].

Тобто, при цьому більш активно руйнуються водно-колоїдні та молекулярно-контактні зв'язки, та сам процес деформації створює нову структуру, яка все з меншим опором протидіє зовнішньому стисканню.

Довести залежність радіусу кривини гвинтової просторової кривої від кроку гвинтового переміщення, з чого слідує, що використання гвинтових циліндричних чи конічних робочих поверхонь зі змінним (аксіальним) кроком дозволяє параметрично враховувати недоліки існуючих методів геометричного проектування при роботі ґрунтообробних знарядь та активізувати, підвищити ефективність дії робочої поверхні на ґрунтовий моноліт. Це, в свою чергу, призведе до підвищення агротехнологічних показників всієї ґрунтообробної машини.

Якщо в просторі  $(X, Y, Z)$  взяти точку  $(X_0, Y_0, Z_0)$  (рис. 1,а), то її траєкторія на відповідних площинах визначиться у полярних координатах  $(r, \varphi, z)$  рівняннями [2]:

$$\rho = X_0 + Y_0 = r_0; \quad \varphi = v + v_0; \quad z = Z_0 + f(v);$$

де  $X_0 = r_0 \cos v_0; Y_0 = r_0 \sin v_0.$  (1)

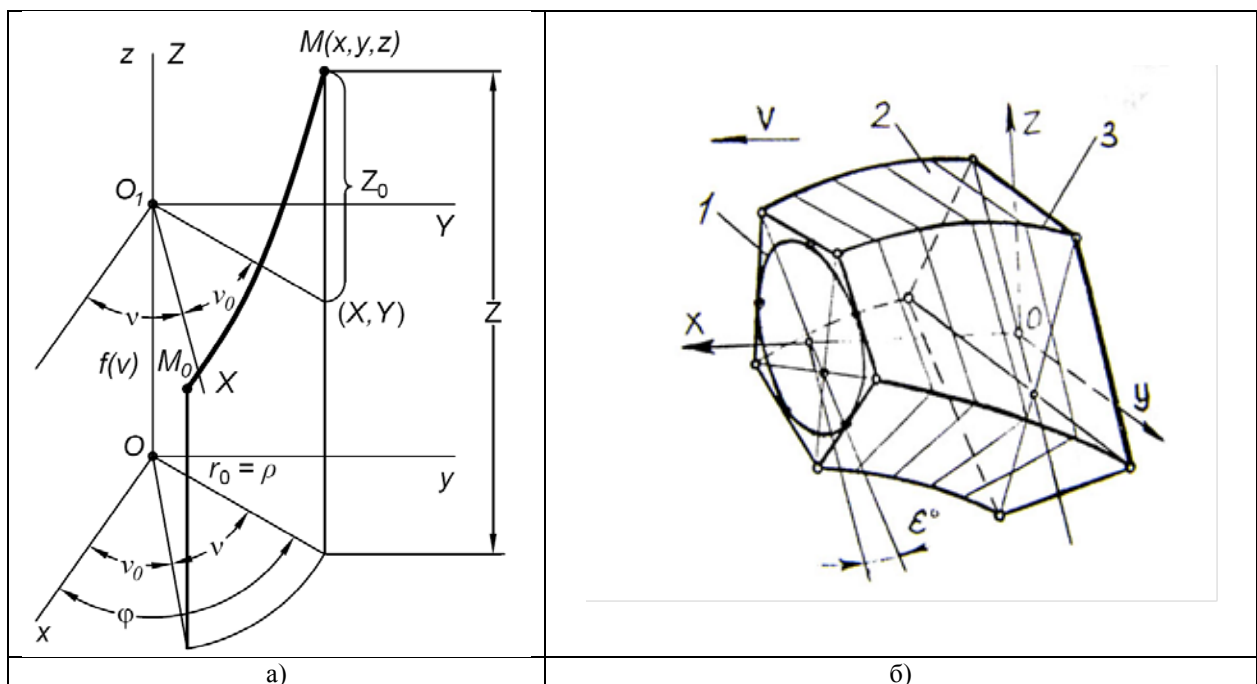


Рис. 1. Геометричне моделювання поверхні копача: а – початкова стадія; б – кінцева стадія

Розглянемо траєкторію точки, що лежить на осі  $X$  і знаходиться на відстані  $X_0 = a$  від осі  $z$ . Цю гвинтову лінію змінного кроку, що відповідає  $f(v)$ , будемо позначати  $l$ . Її рівняння будуть мати вигляд [2]:

$$x = a \cos v; \quad y = a \sin v; \quad z = f(v);$$
 (2)

або на площинних проекціях в полярних координатах:

$$\rho = a; \quad \varphi = v; \quad z = f(v).$$
 (3)

Дану лінію легко побудувати в просторі: для цього треба на площині  $(x, z)$  накреслити графік  $z = f(v)$ , причому  $x = a \cos v$ , розмітити смуги прямими, паралельними  $Oz$ , шириною  $2a\pi$  і утворити з першої смуги основний циліндр  $D$ , а інші смуги повертати на  $D$  ззовні (при конструюванні гіпсової моделі чи чавунної) або зсередини (при конструюванні крупногабаритної тонкостінної моделі).

І тоді графік  $f(v)$  дасть гвинтову лінію  $l$  з окремими випадками:

- 1) при  $f(v) = pv$  – звичайна гвинтова лінія;
- 2) при  $f(v) = h \sin v$  – випадок Маннгейма й Дарбу,
- 3) при  $f(v) = h \sin nv$ , ( $n \neq 1$ ) – випадок Каутного.

При необмежено зростаючій  $f(v)$ , у проекції отримуємо деформовану гіперболічну спіраль із асимптотичною точкою в полюсі. При цьому центральна проекція кривої із точки  $(0, 0, h)$  на площину  $xу$  визначиться аналогічним чином у полярних координатах  $(\rho, \varphi)$  рівнянням:

$$\rho = \frac{ah}{h - f(v)}. \quad (4)$$

А її проекцією буде крива, яка має асимптоту при такому значенні  $v = v_1$ , що визначається рівнянням:

$$h - f(v_1) = 0; \quad f(v_1) \neq 0. \quad (5)$$

Так, при достатньо великому радіусі дуги робочої поверхні (малій кривині дуги), деформація пласта буде пружною: над нейтральною віссю пласта виникає напруга стискання, а нижче осі діє напруга розтягування, як результат дії закону Гука [3].

Дані напруги, як відомо, взаєморівноважені внаслідок рівності моментів інерції частин перерізу пласта відносно нейтральної осі. З метою пошуку нових додаткових сил дії на шар ґрунту шляхом використання нових параметрів робочих поверхонь, раціональним є дія такої гвинтової поверхні, радіус кривини якої й зменшується за певним законом. У цьому випадку необхідно використати гвинтову криву змінного (аксіального) кроку. Тоді поздовжній переріз робочої поверхні можна описати складною кривою, яка геометрично визначається параметрами гвинтового переміщення навколо осі обертання і переміщенням по прямій, паралельній даній осі.

При такому узагальненні приведений крок гвинтового переміщення є змінною величиною, яка залежить від кута повороту навколо базової осі. Тобто, в цьому випадку гвинтовий крок може бути функціонально залежною величиною і входить як параметр наперед визначених агротехнічних вимог: певних часових параметрів та параметрів якості обробки ґрунту, функціональних задач, параметрів заглиблення, певної траєкторії та кутів повороту робочих органів та багато інших залежностей.

Так при зменшенні радіусу кривини робочої поверхні (що відповідає більшій величині вигину ґрунтового пласта) нормальні напруги в ґрунтовому моноліті супроводжуються незворотними нормальними деформаціями. При таких деформаціях закон розподілу напруг відхиляється від лінійного, внаслідок того, що незворотним деформаціям першочергово піддаються найбільш віддалені від нейтральної осі прошарки ґрунтового моноліту.

В іншому випадку, при меншій величині радіуса  $R$  кривини робочої поверхні кінематичний центр деформацій буде збігатися з центром кола радіуса  $R$ , що спричинить зниження рівня дії результуючої осі відносно осі опору перерізу. Тобто в даному випадку ґрунтовий пласт буде підданий надлишковій деформації стискання, що призведе до підвищення енергозатрат при дії робочого органу.

#### Висновки

На основі проведених досліджень та з огляду на вищесказане можна з впевненістю стверджувати про необхідність подальших досліджень вихідних параметрів гвинтових ліній та поверхонь змінного (аксіального) кроку, геометричних досліджень технологічних властивостей поверхонь, що конструюються, розробки алгоритмів і програм для проектування реальних робочих поверхонь.

Дані висновки підтверджуються також науковими дослідженнями Шелудченка Б.А. [4]. Проведені ним дослідження з одноосного та трьохосного стискання ґрунтів показали, що опір зв'язаних ґрунтів, при зовнішньому напрямку дії сил, залежить від швидкості прикладання сил. Так при швидкому зростанні сил (тобто при роботі активного робочого органу, що є наслідком активної дії робочої поверхні), опір зв'язаних ґрунтів зменшується, навіть при незмінному фізичному стані і більш довгій дії прикладеної сили.

При цьому, якщо радіус кривини змінюється, тоді маємо наступні характеристики дії:

а) якщо він зменшується за величиною, тоді опір також зменшується за рахунок активного входження робочого органу в ґрунтовий шар, при якому зростають показники просторового трьохосного стискання (оскільки активні робочі елементи ґрунтообробного знаряддя найчастіше займають загальне положення відносно системи розрахунків, прив'язаних до площини поля та площини переміщення знаряддя);

б) якщо радіус кривини зменшується, то опір зв'язаних ґрунтів під дією робочого органу також зменшується, але в менш значній мірі за рахунок розтягування виділеного ґрунтового шару.

При цьому зменшується загальний опір ґрунтового шару внаслідок виникнення нових мікротріщин, які ростуть за рахунок наявних в ґрунті дефектів структури, що, в кінцевому результаті, призводить до прискореного крихкого руйнування всього ґрунтового шару. А при зменшенні радіуса кривини (наприклад в роторному копачі коренезбиральної машини, рис. 1,б) гвинтова поверхня переростає у циліндричну і тоді відбувається поступове зменшення напрямків трьохосного стискання і відбувається явище затухаючої повзучості мікротріщин [5].

Це сприяє менш активній дії робочої поверхні на ґрунтовий моноліт, тобто погіршується сепарація ґрунтових залишків від коренеплодів, а в кінцевому результаті - погіршується значення агротехнічних показників всього ґрунтообробного знаряддя чи коренезбиральної машини в цілому.

Таким чином, використання гвинтових конічних чи циліндричних просторових кривих при конструюванні робочих поверхонь зі змінним (аксіональним) кроком, дозволяє параметрично активізувати дію робочої поверхні на ґрунтовий моноліт, що, в свою чергу, призведе до підвищення агротехнологічних показників всього ґрунтообробного знаряддя.

#### Список використаної літератури

1. Горячкин В.П. Земледельческая механика. Собр. Соч. в 3 т. – М.: Колос, 1965. – Т. 1. – 282 с.
2. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.2. Более сложные вопросы теории и задачи / С.П. Тимошенко. – М.-Л.: ОГИЗ, 1946. – 455 с.
3. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов / В.С. Люкшин. – М.: Машиностроение, 1967. – 372 с.
4. Шелудченко Б.А. Агротехніка ґрунтів / Б.А. Шелудченко. – Житомир: Полісся, 1992. – 249 с.
5. Завгородній А.Ф. Геометрическое конструирование рабочих органов корнеуборочных машин / А.Ф. Завгородній, В.И. Кравчук, В.П. Юрчук; Под редакцией д-ра техн. наук, академика УААН Л.В. Погорелого. – Киев: Аграрна наука, 2004. – 240 с.



УДК 629.7:004.925.8

В.В. ВАНІН, Г.А. ВІРЧЕНКО, А.Й. НЕЗЕНКО  
Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"**ОСОБЛИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНІ КРИЛА В  
АСПЕКТИ ЖИТТЄВОГО ЦИКЛУ ЛІТАКА**

*Проаналізовано деякі особливості геометричного моделювання поверхні крила в аспекті життєвого циклу літака. Запропоновано новий підхід до формоутворення, який є перспективним для застосування в авіаційній галузі, оскільки дозволяє на етапі проектування більш точно враховувати умови виготовлення та експлуатації крила літака. Подані матеріали слугують основою для розробки відповідних структурно-параметричних геометричних моделей та комп'ютерних програмних засобів автоматизованого конструювання.*

*Ключові слова: автоматизоване конструювання, життєвий цикл літака, поверхня крила, структурно-параметричне геометричне моделювання.*

В.В. ВАНИН, Г.А. ВИРЧЕНКО, А.И. НЕЗЕНКО  
Национальный технический университет Украины  
"Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"**ОСОБЕННОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ КРЫЛА В  
АСПЕКТЕ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА САМОЛЕТА**

*Проанализированы некоторые особенности геометрического моделирования поверхности крыла в аспекте жизненного цикла самолета. Предложенный новый подход к формообразованию является перспективным для применения в авиационной отрасли, поскольку позволяет на этапе проектирования более точно учитывать условия изготовления и эксплуатации крыла самолета. Представленные материалы служат основой для разработки соответствующих структурно-параметрических геометрических моделей и программных средств автоматизированного конструирования.*

*Ключевые слова: автоматизированное конструирование, жизненный цикл самолета, поверхность крыла, структурно-параметрические геометрическое моделирование.*

V.V. VANIN, G.A. VIRCHENKO, A.J. NEZENKO  
National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"**PECULIARITIES OF GEOMETRIC MODELING OF THE WING SURFACE IN THE ASPECT OF  
AIRCRAFT LIFE CYCLE**

*Some features of geometric modeling of the wing surface are analyzed in the aspect of aircraft life cycle. The proposed new approach to shaping is promising for use in the aviation industry. This allows more accurately take into account the conditions for manufacture and operation of the aircraft wing during the design phase. The presented materials are the basis for the development of the corresponding structural-parametric geometric models and software tools for automated design.*

*Keywords: automated design, aircraft life cycle, wing surface, structural-parametric geometric modeling.*

**Постановка проблеми**

Створення складної промислової продукції потребує дослідження її характеристик на різних етапах життєвого циклу. Так, наприклад, літак на стадії технічної пропозиції опрацьовується в польотній конфігурації, під час підготовки виробництва – у стапельній конфігурації, а на етапі експлуатації – в польотній та стоянковій конфігурації. У всіх зазначених випадках крило літака приймає різну форму. У польоті під дією аеродинамічних сил вигинається вгору, у стапельній конфігурації вважається недеформованим, у стоянковій конфігурації під вагою конструкції згинається вниз (див. рис. 1). Змінювання крила впливає на всі аспекти проектування літака. Однак процеси, що відбуваються при зазначених деформаціях, вивчені недостатньо й тому потребують ретельного подальшого дослідження, основою якого, в багатьох випадках, є геометричне моделювання.

Розробка методик автоматизованого формоутворення крила літака для різних конфігурацій на протязі життєвого циклу, з урахуванням наявної великої кількості його конструктивно-силових елементів, функціональних систем та обладнання, становить важливу науково-прикладну задачу, розв'язання якої дозволить суттєво покращити якість даного складного технічного об'єкта.



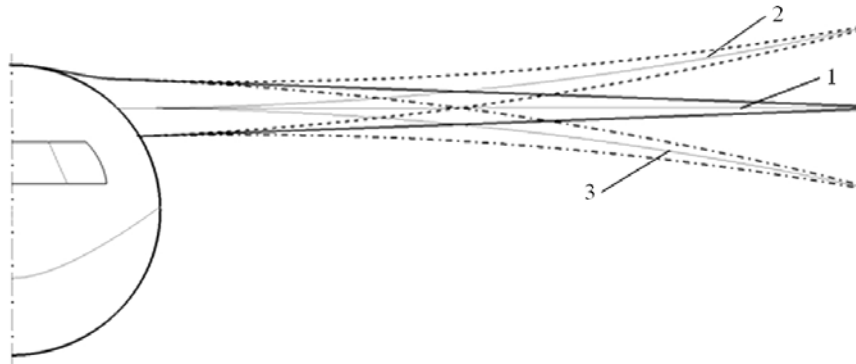


Рис. 1. Форма крила літака в різних конфігураціях:  
1 – стапельній; 2 – польотній; 3 – стоянковій

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

З метою підвищення ефективності автоматизованого конструювання промислової продукції, зокрема літаків, науковою школою прикладної геометрії Національного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» запропоновано методологію структурно-параметричного геометричного моделювання [1-9], результати якої широко впроваджено у виробництво, наприклад, вітчизняне машинобудування.

Одним із перспективних напрямків її подальшого розвитку є проведення наукових пошуків щодо напрацювання нових методів, способів, прийомів та алгоритмів автоматизованих побудов агрегатів планера літака, які у процесі експлуатації суттєво змінюють свою форму та розміри під дією різноманітних факторів.

#### Мета дослідження

Головне завдання даної публікації полягає в узагальненій постановці задачі інтегрованого структурно-параметричного геометричного моделювання поверхні крила проектного літака з урахуванням її деформацій у процесі експлуатації.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо більш докладно на прикладі крила літака побудову моделі поверхні об'єкта, що суттєво змінює свою форму під час експлуатації.

Як зазначалось вище, на стадії технічної пропозиції здійснюється варіантне ітераційне конструювання крила в польотній конфігурації (рис. 2).

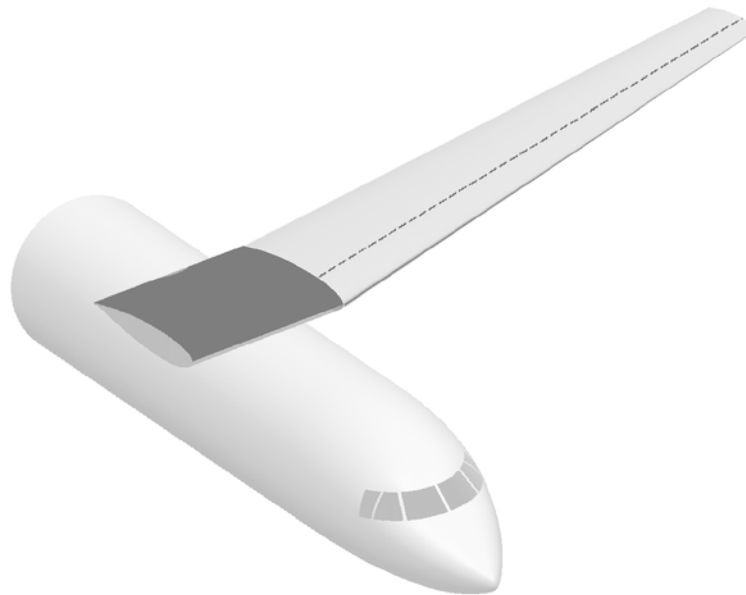


Рис. 2. Варіант попередньої моделі крила літака в польотній конфігурації

Після опрацювання зазначеної моделі в аспекті різних напрямків проектування (аеродинаміка, міцність і т. д.) формується модель поверхні стапельної конфігурації (рис. 3). Ця модель створюється під час ескізного проектування і призначена для розробки конструкції та технологічного оснащення на стадії робочого проектування літака. Вона може допрацьовуватися і змінюватися відповідно до наявних конструктивно-технологічних та інших вимог. У більшості випадків поверхню крила у стапельній конфігурації прагнуть будувати лінійчатою, оскільки це значно спрощує і здешевлює виробництво.

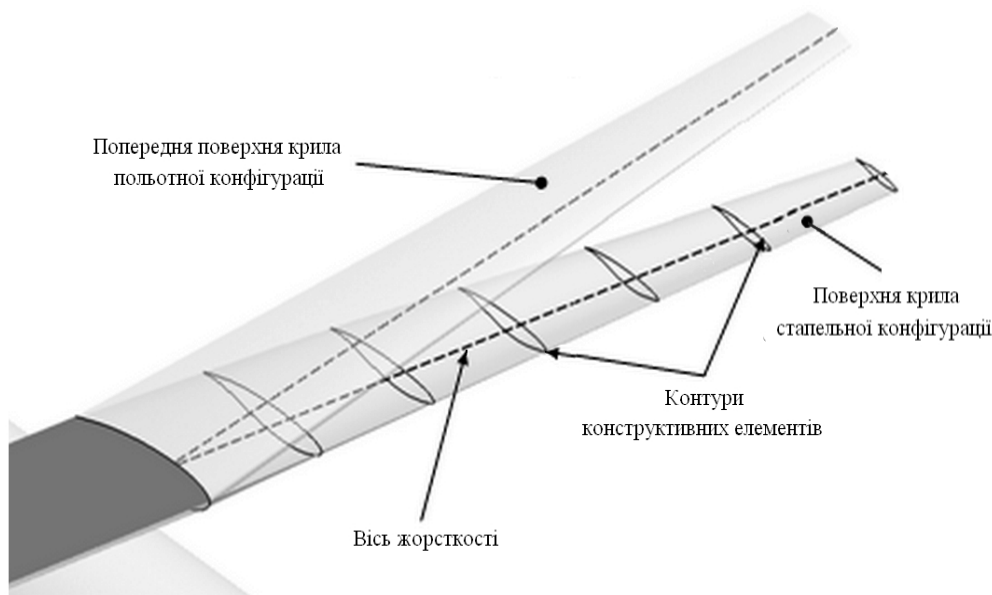


Рис. 3. Крило літака у ступенній конфігурації

Після створення моделі ступенної конфігурації формується модель уточненої польотної конфігурації крила літака. Це необхідно для оцінки впливу змін, які були внесені у ступенну конфігурацію, стосовно реалізації потрібних тактико-технічних характеристик несучої поверхні, а також для дослідження роботи елементів її механізації та органів управління в польоті.

На завершальній стадії виготовлення за результатами замірів отриманих параметрів форми та розмірів будується геометрична модель, актуальність якої надалі підтримується під час експлуатації, що відповідає стоянковому положенню крила (рис. 4). Ця модель призначена для проведення поточного аналізу фактичної геометрії літака у процесі його експлуатації.

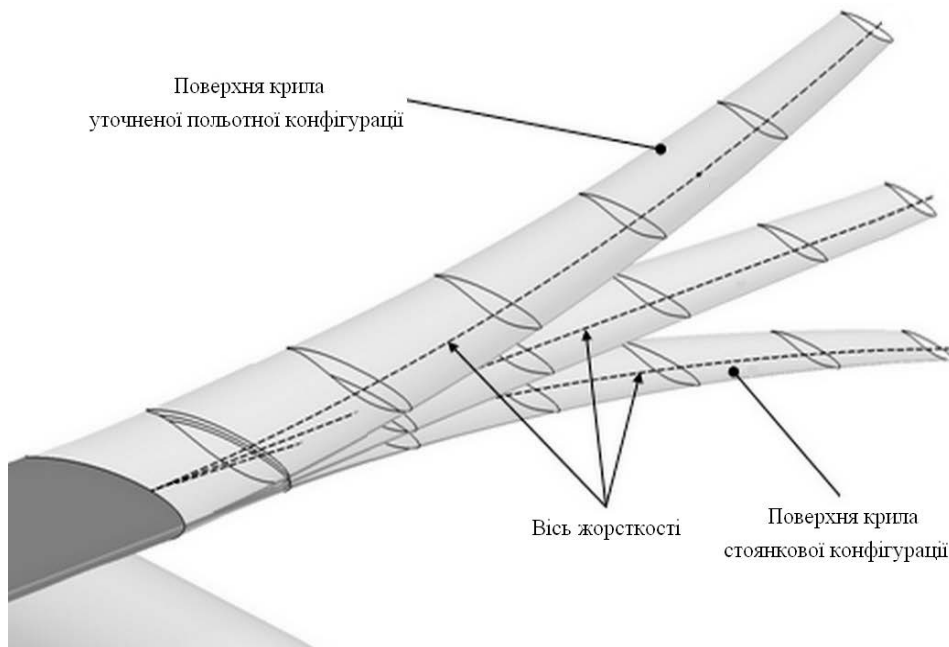


Рис. 4. Модель уточненої поверхні польотної та стоянкової конфігурації крила

Розробка поверхонь у всіх розглянутих вище випадках здійснюється переміщенням твірних аеродинамічних профілів уздовж напрямних, якими є вісь жорсткості, передня та задня кромки крила. При цьому реалізується належне неоднорідне масштабування профілів, що забезпечує необхідне змінювання не тільки їх хорд, а й відносної товщини та угнутості. У такий спосіб одержуємо потрібну серединну поверхню крила. Характер його скруту визначається напрямними, а розташування площин поточних аеродинамічних профілів – відповідними дотичними до осі жорсткості як перпендикулярами до цих площин.

Під час геометричного моделювання поверхні крила, яка зазнає суттєвих деформацій у процесі експлуатації на протязі життєвого циклу літака, особливо важливо забезпечити правильну відповідність розташування на ній слідів елементів конструктивно-силового набору (лонжеронів, нервюр тощо), функціональних систем та обладнання для всіх наведених конфігурацій.

Поверхні уточненої польотної і стоянкової конфігурації можна розглядати як деяке неперервне взаємне однозначне відображення у тривимірному просторі вихідної параметричної поверхні стапельної конфігурації крила.

Для автоматизованого конструювання зазначених поверхонь важливо точно відслідковувати відповідність параметрів форми та розмірів поперечних перерізів (аеродинамічних профілів) на поверхні крила у стапельній, польотній і стоянковій конфігураціях, а також їх розташування та орієнтацію вздовж осі жорсткості крила. Положення точок останньої у просторі визначаються згідно з проведеними розрахунками (аеродинамічними, на міцність і т. д.) для певних досліджуваних умов експлуатації літака.

Оскільки поданий вище підхід до формоутворення поверхні крила на протязі життєвого циклу літака має структурний, параметричний, варіантний та ітераційний характер, то здійснювати відповідне автоматизоване конструювання варто за допомогою засобів комп'ютерного структурно-параметричного геометричного моделювання [1-9]. Однак, проаналізована науково-прикладна задача має певні описані вище особливості, що вимагає не тільки покращення наявних у літературних джерелах методів, способів, прийомів та алгоритмів формоутворення, а й розробки нових, більш пристосованих для успішного вирішення викладеної технічної проблеми.

#### Висновки

У даній публікації подано узагальнену постановку задачі інтегрованого автоматизованого структурно-параметричного геометричного моделювання поверхні крила на протязі життєвого циклу літака з урахуванням її деформацій у процесі експлуатації. Визначено потрібний для цього математичний апарат, окреслено перспективні напрямки його подальшого удосконалення та розробки належного комп'ютерного програмного забезпечення.

#### Список використаної літератури

1. Ванін В.В. Структурно-параметричні геометричні моделі як основа для узгодженої розробки літака на стадії ескізного проектування / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко, І.В. Ванін // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – №4(48). – К.: НТУУ "КПІ", 2006. – С. 35-41.
2. Ванін І.В. Геометричне моделювання крила літака на стадії ескізного проектування з використанням кривих Безьє третього порядку / І.В. Ванін, Г.А. Вірченко // Праці Тавр. держ. агротех. академії. – Вип. 4., т. 31. – Мелітополь: ТДАТА, 2006. – С. 89-95.
3. Ванін В.В. Деякі питання розробки обчислювальних алгоритмів структурно-параметричного моделювання складних геометричних об'єктів / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко, І.В. Ванін // Прикл. геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 76. – С. 17-23.
4. Ванін В.В. Структурно-параметричні геометричні моделі як інваріантна складова комп'ютерних інформаційних технологій підтримки життєвого циклу виробів машинобудування / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко, В.В. Ванін // Праці Тавр. держ. агротех. академії –Мелітополь: ТДАТА, 2007. – Вип. 4, т. 36. – С. 16-21.
5. Вірченко Г.А. Геометричне моделювання як одна з основних складових сучасних систем автоматизованого проектування / Г.А. Вірченко, В.В. Ванін, В.Г. Вірченко // Прикл. геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2007. – Вип. 77. – С. 129-134.
6. Ванін В.В. Структурно-параметричне геометричне моделювання як засіб підвищення ефективності групових технологій у машинобудуванні / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко, В.В. Ванін // Праці Тавр. держ. агротех. університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – Вип. 4, т. 39. – С. 9-17.
7. Ванін В.В. Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2009. – Вип. 23. – С. 42-48.
8. Ванін В.В. Структурно-параметричні геометричні моделі як засіб інтеграції автоматизованого проектування сучасного літака / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко // Вісник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2014. – Вип. 3(50). – С. 571-574.
9. Ванін В.В. Комп'ютерні структурно-параметричні геометричні моделі як засоби конструкторсько-технологічної оптимізації літака / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко, О.В. Збруцький // Механіка гіроскопічних систем. – Київ: НТУУ "КПІ", 2014. – Вип.27. – С. 111-119.

УДК 514.18

Е.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК  
Таврический государственный агротехнологический университет  
А.В. НАЙДЫШ

Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

**ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО  
ОБВОДА НА ОСНОВЕ ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ КРИВЫХ  
С ЗАДАНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

*Рассматривается задача формирования пространственных одномерных обводо́в с закономерным изменением кривизны, кручения, радиусов соприкасающихся сфер. Обвод формируется сгущением исходного точечного ряда по участкам, на которых обеспечивается монотонное изменение геометрических характеристик. Точки сгущения назначаются внутри области возможного расположения кривых с заданными геометрическими свойствами.*

*Ключевые слова: монотонная дискретно представленная кривая (ДПК), соприкасающаяся окружность, соприкасающаяся сфера, ход кривой, тетраэдр расположения ДПК, трехгранник прилегающих сфер.*

Є.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК  
Таврійський державний агротехнологічний університет  
А.В. НАЙДИШ

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

**ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНОГО ПРОСТОРОВОГО ОБВОДУ НА ОСНОВІ  
ОБЛАСТІ МОЖЛИВОГО РОЗТАШУВАННЯ КРИВИХ ІЗ ЗАДАНИМИ ГЕОМЕТРИЧНИМИ  
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

*Розглядається задача формування просторових одновимірних обводів із закономірною зміною кривини, скруту, радіусів стичних сфер. Обвід формується згущенням вихідного точкового ряду по ділянкам, на яких забезпечується монотонна зміна геометричних характеристик. Точки згущення призначаються всередині області можливого розташування кривих із заданими геометричними властивостями.*

*Ключові слова монотонна дискретно представлена крива (ДПК), стичне коло, стична сфера, хід кривої, тетраедр розташування ДПК, тригранник сфер, що прилягають.*

E.A. GAVRILENKO, YU.V. KHOLODNYAK  
Tavria State Agrotechnological University  
A.V.NAYDYSH  
Bohdan Khmelnytskyi Melitopol State Pedagogical University**DISCRETE MODELING OF ONE-DIMENSIONAL SPATIAL CONTOURS ON THE BASIS OF A  
POSSIBLE LOCATION OF CURVES WITH GIVEN GEOMETRIC CHARACTERISTICS**

*The task of the formation of spatial one-dimensional contours with a regular change of curvature, torsion, and the radiuses of the adjoining spheres is considered in this article. The contour is formed by thickening of the initial points set along the sections on which monotonous change of geometric characteristics is provided. The points of thickening are assigned within the area of the possible location of curves with given geometric properties.*

*Keywords: monotonous discretely represented curve (DRC), osculating circle, tangent sphere, trend of curve, tetrahedron of the DRC location, trihedron of adjacent spheres.*

**Постановка проблеми**

Одномерные обводо́в используются в качестве инструмента решения многих задач геометрического моделирования. Примерами таких задач могут служить приближенные вычисления, построение графиков, описывающих явления и процессы, формирование поверхностей на основе линейчатых каркасов. Обвод определяется исходным точечным рядом, фиксированными геометрическими характеристиками, назначенными в исходных точках, заданной закономерностью изменения характеристик вдоль обвода.

На данный момент наиболее разработаны методы непрерывного геометрического моделирования одномерных обводо́в. Обвод формируется участками аналитически заданных кривых, состыкованных в исходных точках с обеспечением заданного порядка гладкости. Нарращивание условий, накладываемых на

формируемый объект, требует увеличения параметрического числа кривых линий, формирующих участки обвода. При этом неизбежно возникают особые точки: точки перегиба, самопересечения и смены хода кривой, точки перемены возрастания-убывания вдоль кривой кривизны, кручения, радиусов соприкасающихся сфер. Неконтролируемое возникновение особых точек снижает качество получаемого решения.

Особенно важен контроль возникновения особых точек при моделировании динамических поверхностей, функциональное назначение которых – взаимодействие со средой. Основное требование к линейным элементам моделей таких поверхностей – максимально возможный порядок гладкости обвода при минимальном числе особых точек на его участках.

Задача контроля возникновения особых точек может быть решена вариативным дискретным геометрическим моделированием [3]. Формируемая кривая представлена упорядоченным множеством принадлежащих ей точек и геометрическими характеристиками кривой. Кривая формируется сгущением, предполагающим определение для исходного точечного ряда промежуточных точек. Такой подход позволяет отказаться от аналитического представления участков кривой и формировать обвод исходя из заданных геометрических свойств.

Основная проблема дискретного подхода к формированию обводов в том, что кривая и ее характеристики не определены однозначно на всех этапах моделирования. Необходима разработка специальных критериев, позволяющих оценивать характеристики дискретно представленных геометрических образов.

Создание алгоритмов формирования одномерных обводов, не требующих аналитического представления его участков, способных обеспечить заданные геометрические свойства кривой даст эффективный инструмент решения задач геометрического моделирования.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Способ вариативного моделирования гладкой дискретно представленной кривой (ДПК) постоянного хода предложен в [1]. ДПК формируется на основе исходного точечного ряда назначением промежуточных точек сгущения. При этом полагаем, что исходные точки заданы без погрешности и в процессе моделирования не изменяют своего положения.

Каждые три последовательные точки определяют прилегающую плоскость (ПП). Четыре последовательные ПП, проходящие через  $i$ -ю и  $i+1$ -ю точки ограничивают тетраэдр. Этот тетраэдр является областью возможного расположения ДПК постоянного хода на участке  $(i, i+1)$ . Цепочка последовательных тетраэдров, определенных на всех участках, является областью расположения гладкой кривой линии постоянного хода, интерполирующей исходный точечный ряд (рис. 1).

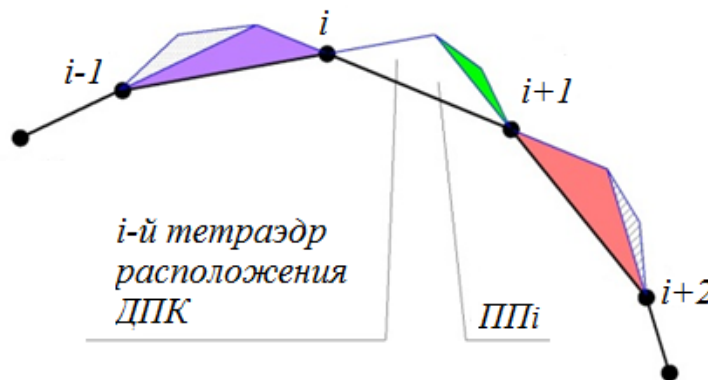


Рис. 1. Исходная область расположения ДПК

Кручение на участках ДПК оценивается величиной отношения угла между смежными ПП к длине соответствующей хорды сопровождающей ломаной линии ( $B_i^\varphi$ ). Точка сгущения назначается внутри тетраэдра расположения ДПК. В результате последовательных сгущений, в пределе, получим непрерывный обвод постоянного хода, в каждой точке которого существует единственное положение основного трёхгранника. Регулярность значений кручения в точках обвода ( $B_i$ ) обеспечивает выполнение условия  $B_{i-1}^\varphi > B_i > B_i^\varphi$  при каждом сгущении.

Предложенный в [1] способ не обеспечивает контроль значений кривизны и радиусов соприкасающихся сфер в точках формируемого обвода.

В [2] исследованы условия формирования монотонных кривых линий – кривых постоянного хода, вдоль которых радиусы соприкасающихся окружностей и сфер монотонно возрастают или убывают. Кривая линия рассматривается, как траектория движения точки  $M$ , принадлежащей нормальной плоскости  $N$ , обкатывающей полярный торс, ребро возврата которого – кривая постоянного хода (рис. 2).

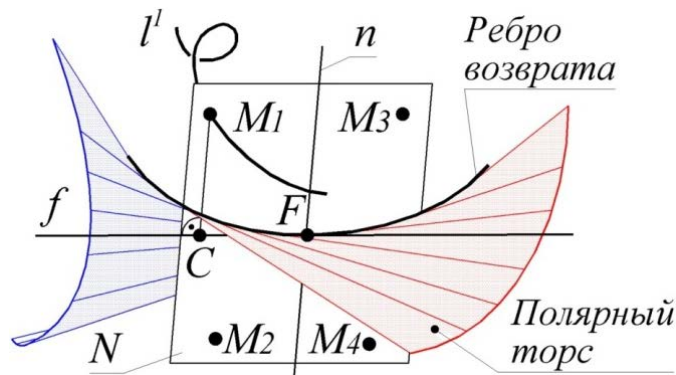


Рис. 2. Формирование монотонной кривой линии

Установлены условия, при которых полярный торс определяет монотонную кривую линию.

Ось кривизны  $f$ , соответствующая текущему положению точки  $M$ , и прямая  $n$ , которая пересекает ось кривизны в центре соприкасающейся сферы ( $F$ ) под прямым углом, разделяют плоскость  $N$  на четыре части. Накатывание четверти плоскости  $N$ , в которой расположена точка  $M$ , на полярный торс означает, что вдоль траектории движения точки  $M$  значения радиусов кривизны монотонно убывают. Точки плоскости  $N$ , в направлении которых перемещается прямая  $n$ , описывают кривые, вдоль которых радиусы соприкасающихся сфер монотонно убывают. Точка  $M$ , расположенная в четверти плоскости  $N$ , которая накатывается на полость полярного торса и в направлении которой перемещается прямая  $n$ , двигается по кривой, ход которой совпадает с ходом ребра возврата ее полярного торса.

Существует восемь различных вариантов сочетаний направления возрастания радиусов кривизны, радиусов соприкасающихся сфер и хода вдоль монотонных кривых. Все варианты можно определить тремя параметрами:

- направление хода ребра возврата полярного торса кривой;
- направление обкатывания полярного торса нормальной плоскостью кривой;
- расположение в нормальной плоскости точки, описывающей при своем движении монотонную кривую.

Предложенная классификация позволяет рассматривать любую кривую как состоящую из участков монотонных кривых и формировать её локально, по этим участкам.

На основании механизма формирования монотонной кривой линии сделан анализ взаимного расположения ее соприкасающихся окружностей и сфер. Соприкасающиеся сферы рассматриваются как заданные соприкасающимися окружностью и бесконечно близкой точкой кривой, а соприкасающиеся окружности как линии пересечения смежных соприкасающихся сфер. Указанный анализ позволяет сделать вывод о расположении монотонной кривой относительно ее соприкасающихся сфер. Кривая линии постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в одном направлении, расположена за пределами ее соприкасающихся сфер. Если вдоль монотонной кривой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в разных направлениях, то она расположена внутри своих соприкасающихся сфер.

#### Цель исследования

Исследовать условия формирования дискретно представленной кривой (ДПК) постоянного хода с монотонным изменением радиусов соприкасающихся окружностей и сфер. Разработать способ, позволяющий определить область возможного расположения кривых, с заданными геометрическими свойствами. Предложить схему сгущения пространственного точечного ряда, которая обеспечивает формирование ДПК с монотонным изменением геометрических характеристик.

#### Изложение основного материала исследования

Рассмотрим точечный ряд, расположенный на кривой линии  $l$  постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер монотонно возрастают в одном направлении. Каждые четыре последовательные точки определяют прилегающую сферу –  $ПС\phi_i$  ( $i-1, i, i+1, i+2$ ) и две принадлежащие ей прилегающие окружности –  $ПО_i$  ( $i-1, i, i+1$ ) и  $ПО_{i+1}$  ( $i, i+1, i+2$ ).

Когда расстояние между точками бесконечно мало, то они определяют соприкасающиеся окружности и сферы ( $СО_i$  и  $СС\phi_i$ ).

При увеличении расстояний между точками, заданными на  $l$ , определяемые этими точками окружности и сферы будут пересекать кривую.

Направление возрастания вдоль точечного ряда радиусов  $ПО$  и  $ПС\phi$  соответствует направлению возрастания радиусов  $СО_i$  и  $СС\phi_i$  вдоль  $l$ .



$ПС\phi_i$  пересікає  $l$  в точках  $i-1, i, i+1, i+2$  (рис. 3).

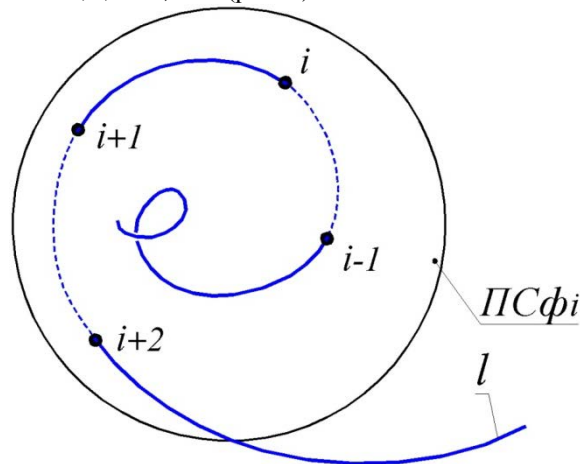


Рис. 3. Расположение монотонной кривой относительно прилегающей сферы

Участки кривой  $\dots i-1, i \dots i+1, i+2 \dots$  расположены за пределами  $ПС\phi_i$ , а участки  $i-1 \dots i$  и  $i+1 \dots i+2$  – внутри нее. Из этого следует, что последовательные  $ПС\phi_{i-1}, ПС\phi_i, ПС\phi_{i+1}$  ограничивают область, внутри которой расположен участок  $i \dots i+1$  кривой  $l$ . Эту область, имеющую форму сферического трехгранника, будем называть трехгранник прилегающих сфер и обозначим  $\delta_i$ .

Для кривой  $l$  трехгранник  $\delta_i$  расположен за пределами  $ПС\phi_i$ , а для кривой, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в противоположных направлениях,  $\delta_i$  расположен внутри  $ПС\phi_i$ .

Аналогичные трехгранники, определенные на остальных участках, составляют область возможного расположения монотонной ДПК. Все кривые линии, интерполирующие точечный ряд, характеристики которых соответствуют характеристикам  $l$ , находятся внутри области возможного расположения ДПК.

Точка сгущения ( $i_{ce}$ ) назначается в плоскости  $P_i$ , перпендикулярной хорде  $[i, i+1]$  и проходящей через середину хорды. Исходная область расположения точки сгущения – криволинейный треугольник 1, 2, 3, получаемый в пересечении трехгранника  $\delta_i$  плоскостью  $P_i$  (рис. 4) Характеристики криволинейного треугольника однозначно определяют тип монотонной ДПК.

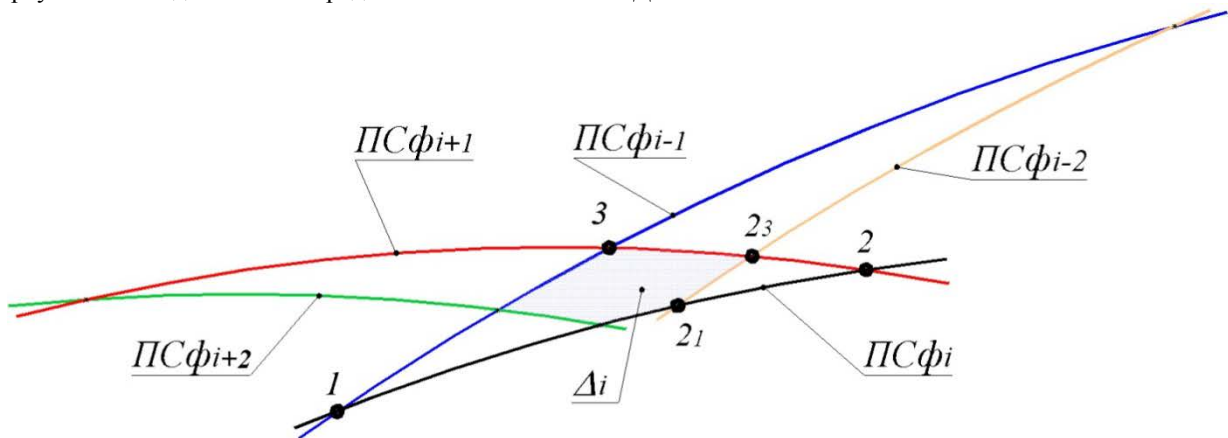


Рис. 4. Область расположения точки сгущения

Участок ДПК  $(i, i+1)$  расположен в пределах трехгранника  $\delta_i$  и одновременно за пределами  $ПС\phi_{i-2}$  и  $ПС\phi_{i+2}$ . Окружности пересечения указанных сфер плоскостью  $P_i$  могут ограничивать область возможного расположения точки  $i_{ce}$ . Криволинейный многоугольник, ограниченный дугами пяти окружностей, получаемых в пересечении плоскостью  $P_i$  пяти последовательных прилегающих сфер ( $ПС\phi_{i-2} \dots ПС\phi_{i+2}$ ), будем называть областью расположения точки сгущения  $i$ -го участка ДПК и обозначим  $\Delta_i$ .

Сгущение производится на участках с максимальной областью расположения ДПК. Назначив  $i_{ce}$  на участке  $(i, i+1)$  получаем последовательность узлов, определяющих два новых участка –  $(i, i_{ce})$  и  $(i_{ce}, i+1)$ , четыре новые прилегающие сферы:  $ПС\phi(i-2, i-1, i, i_{ce}), ПС\phi(i-1, i, i_{ce}, i+1), ПС\phi(i, i_{ce}, i+1, i+2), ПС\phi(i_{ce}, i+1, i+2, i+3)$  и шесть новых трехгранников прилегающих сфер ( $\delta^{ce}$ ).

На участках  $(i, i_{c2})$  и  $(i_{c2}, i+1)$  трехгранники  $\delta^{c2}$  ограничены прилегающими сферами, полученными в результате назначения точки сгущения. На участках  $(i-2, i-1)$ ,  $(i-1, i)$ ,  $(i+1, i+2)$ ,  $(i+2, i+3)$  трехгранники  $\delta^{c2}$  ограничены исходными и вновь сформированными и прилегающими сферами, которые локализуют исходные трехгранники прилегающих сфер. Назначение точки сгущения в пределах области  $\Delta_i$  гарантирует расположение трехгранников  $\delta^{c2}$  в пределах исходной области расположения ДПК.

Назначение точек сгущения внутри области  $\Delta_i$  необходимое и достаточное условие формирования монотонной ДПК. В случае назначения  $i_{c2}$  на границе  $\Delta_i$ , например на  $ПС\phi_{i-2}$ , трехгранники  $\delta_{i-1}^{c2}$  и  $\delta_{i-2}^{c2}$  вырождаются в отсеки этой сферы. В этом случае участок ДПК  $(i-2 \dots i)$  будет формироваться как сферическая кривая, принадлежащая  $ПС\phi_{i-2}$ . Если  $i_{c2}$  назначить за пределами  $\Delta_i$ , например, внутри криволинейного треугольника  $2,2_1,2_3$  (рис. 4), то получим трехгранники  $\delta_{i-1}^{c2}$  и  $\delta_{i-2}^{c2}$ , определяющие участки монотонной ДПК правого хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей монотонно возрастают, а радиусы соприкасающихся сфер убывают. В этом случае ДПК будет состоять как минимум из трёх монотонных участков

Наличие постоянно локализуемой в результате последовательных сгущений области возможного расположения обвода, при сохранении исходных характеристик трехгранников прилегающих сфер – необходимое условие формирования монотонной ДПК.

Монотонные участки ДПК формируются сгущением исходного точечного ряда по следующей схеме.

1. На каждом участке, ограниченном двумя последовательными исходными точками, формируется тетраэдр расположения ДПК. Параметры тетраэдров позволяют определить ход и направление увеличения значений кручения вдоль ДПК [1].
2. Внутри каждого тетраэдра определяется область расположения ДПК, ограниченная прилегающими сферами – трехгранники прилегающих сфер.
3. Точки сгущения назначаются внутри области возможного расположения ДПК.

В результате каждого сгущения получаем точечный ряд, вдоль которого радиусы прилегающих окружностей и сфер возрастают в том же направлении, что и у исходного точечного ряда. Наличие после назначения каждой точки сгущения последовательно локализуемой области расположения ДПК обеспечивает сходжение процесса моделирования к формированию участков, вдоль которых значения кручения, кривизны и радиусов соприкасающихся сфер изменяются монотонно.

#### Выводы

Предложен способ формирования на основе точечного ряда произвольной конфигурации дискретно представленной кривой (ДПК) с регулярным изменением кручения, радиусов соприкасающихся окружностей и сфер. ДПК формируется по участкам, вдоль которых обеспечивается монотонное изменение геометрических характеристик кривой.

Монотонные участки формируются сгущением исходного точечного ряда и не требуют аналитического представления. Определение области возможного по условиям задачи расположения кривой позволяет оценивать максимальную абсолютную погрешность, с которой ДПК представляет формируемый обвод. Окончательное решение может быть получено в виде сопровождающей ломаной линии, расстояние от которой до кривой с заданными геометрическими свойствами не превышает заранее назначенной величины.

#### Список использованной литературы

1. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование одномерных обводов с заданными дифференциально геометрическими свойствами / Е.А. Гавриленко // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2015. – Вип. 3 (54). – С. 555-559.
2. Гавриленко Е.А. Формирование геометрических характеристик монотонной кривой линии / Е.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк, В.А. Пахаренко // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2016. – Вип. 3 (58). – С. 492-496.
3. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція: навчальний посібник / В.М. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2008. – 250 с.



УДК 514.18

О.М. ГУМЕН  
 Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"  
 Є.В. МАРТИН  
 Львівський державний університет безпеки життєдіяльності  
 Н.А. СПОДИНЮК, С.Є. ЛЯСКОВСЬКА  
 Національний університет "Львівська політехніка"

### ІНФОРМАЦІЙНІ ГРАФІЧНІ ЗАСОБИ ПОДАННЯ ПРОСТОРУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРОМИСЛОВИХ БУДІВЕЛЬ

*Запропоновані графічні засоби прикладної багатовимірної геометрії щодо подання і дослідження багатовидів та гіперповерхонь температурних полів промислових будівель на прикладі інфрачервоних систем опалення з витяжною системою вентиляції птичників. Одержані експериментальні графічні залежності розподілу температурних полів у поперечному перерізі інфрачервоного нагрівача. Підтверджена сталість температурного поля по всій ширині приміщення птичника. Показано, що ізотерми являють частинні перерізи температурного поля при фіксованому значенні ширини  $y = y_i$  інфрачервоного нагрівача. Встановлено, що геометрична модель температурного поля реалізується багатовидом чотиривимірного евклідового простору  $E^4$ , виміри якого становлять геометричні розміри приміщення будівлі птичника і числові значення температур для визначених експериментальних ізотерм температурного поля.*

*Ключові слова: прикладна багатовимірна геометрія, багатовиди, температурне поле, ізотерми, птичники.*

Е.Н. ГУМЕН  
 Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"  
 Е.В. МАРТЫН  
 Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности  
 Н.А. СПОДЫНЮК, С.Е. ЛЯСКОВСКАЯ  
 Национальный университет "Львовская политехника"

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ЗДАНИЙ

*Предложены графические средства прикладной многомерной геометрии по представлению и исследованию разновидностей и гиперповерхностей температурных полей промышленных зданий на примере инфракрасных систем отопления с вытяжной системой вентиляции птичников. Получены экспериментальные графические зависимости распределения температурных полей в поперечном сечении инфракрасного нагревателя. Подтверждена устойчивость температурного поля по всей ширине помещения птичника. Показано, что изотермы представляют частные сечения температурного поля при фиксированном значении ширины  $y = y_i$  инфракрасного нагревателя. Установлено, что геометрическая модель температурного поля реализуется многообразием четырехмерного евклидова пространства  $E^4$ , измерения которого составляют геометрические размеры помещения здания птичника и числовые значения температур для определенных экспериментальных изотерм температурного поля.*

*Ключевые слова: прикладная многомерная геометрия, многообразия, температурное поле, изотермы, птичники.*

О.М. GUMEN  
 National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"  
 Ye.V. MARTYN  
 Lviv State University of Life Safety  
 N.A. SPODYNIUK, S.Ye. LYASKOVSKA  
 National University "Lviv Polytechnic"

### INFORMATION GRAPHIC MEANS FOR REPRESENTATION OF THE TEMPERATURE FIELD SPACE OF INDUSTRIAL BUILDINGS

*The proposed graphical means of applied multidimensional geometry on the representation and study of varieties and hyperperiodic temperature fields of industrial buildings on the example of infrared heating systems with exhaust ventilation of poultry houses. The obtained experimental graphical dependences of the distribution of*

temperature fields in the cross section of the infrared heater. The stability of the temperature field over the entire width of the house was confirmed. It is shown that isotherms represent particular sections of the temperature field for a fixed value of the width  $y = y_i$  of the infrared heater. It is established that the geometric model of the temperature field is realized by the varieties of the four-dimensional Euclidean space  $E^4$ , the measurements of which are the geometric dimensions of the house building and the numerical values of the temperatures for certain experimental isotherms of the temperature field.

Keywords: applied multidimensional geometry, manifolds, temperature field, isotherms, poultry houses.

### Постановка проблеми

Поступ у розвитку людського суспільства визначається прогресом у вдосконаленні його духовних цінностей і зростанням матеріальних благ. Остання складова набула на сучасному етапі свого бурхливого зростання за рахунок вдосконалення промислових і харчових технологій, використання новітніх досягнень науки у розвитку, зокрема, тваринництва. Для вирощування молодняка м'ясних порід, наприклад птиці, передбачені агропромислові комплекси, які включають замкнутий цикл системи підготовки і реалізації годівлі птиці, її утримання і вирощування до досягнення стандартних параметрів щодо віку, ваги та утилізації відходів тощо.

Підвищення результативності у технологічному процесі вирощування птиці м'ясних порід залежить першочергово від умов її утримання. Промислові будівлі, пташники, побудовані за умови, в переважній більшості, перебування птиці у клітках. Необхідний температурний режим, комфортний у кожній клітці перебування птиці, забезпечують з використанням нагрівачів, а видалення шкідливих газів з приміщення відбувається за рахунок використання вентиляційних систем різного типу. Проте сучасні вимоги до економії енергії передбачають використання відповідних енергоощадних технологій опалення та вентиляції. Рациональний вибір та використання теплового та вентиляційного устаткування певного типу вимагає першочергово дослідження розподілу температур у зоні перебування кліток з птицями з подальшим використанням експериментальних даних і теоретичних напрацювань для оптимізації роботи теплонагрівачів і вентиляційних систем.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

В Україні та за кордоном приділяється належна увага розвитку та використанню енергоощадних технологій у агропромисловому комплексі [1,2]. Розроблена система інфрачервоного опалення промислових приміщень пташників на засадах використання інфрачервоного нагрівача і витяжного зонта [3]. Побудовані експериментально одержані епюри швидкостей витяжного повітря. Результати проведених досліджень уможливають дати належну оцінку зони дії витяжного зонта та розподілу геометрії поля швидкостей у відповідних поперечних перерізах. Наукова розробка [3] наводить результати експериментальних досліджень кількості локалізованої витяжним зонтом теплоти при опаленні приміщення пташника інфрачервоними випромінювачами. На прикладі розробленого експериментального устаткування для дослідження температури внутрішнього повітря в зоні перебування птиці досліджена робота системи інфрачервоного опалення у поєднанні з місцевою вентиляцією на засадах аналізу одержаних експериментально графічних залежностей температури повітря в зоні перебування птиці [4]. Також були одержані графічні залежності кількості локалізованої теплоти зонтом від витрати витяжного повітря та теплової потужності нагрівача. Аналіз літературних джерел підтвердив необхідність узагальнення експериментальних досліджень у напрямку розбудови інформаційних графічних засобів подання геометрії простору температурного поля промислових будівель на прикладі пташників із застосуванням теорії геометрії фазового багатовимірного простору [5].

### Мета дослідження

Реалізація завдання забезпечення належного рівня функціонування агропромислових комплексів, зокрема, через розбудову і особливо через організацію підвищення функціонування промислових будівель на прикладі пташників потребує проведення геометричного аналізу виконаних експериментальних досліджень інфрачервоної системи опалення з побудовою геометричних образів, що моделюють температурне поле в зоні знаходження кліток з птицею. Вимагає геометричного обґрунтування також експериментально знята картина ізотерм у поперечному перерізі зони дії інфрачервоного випромінювача для підвищення результативності роботи (комфортності перебування птиці) при зниженні енергозатрат.

Мета дослідження полягає у вивченні геометричної картини ізотерм та розробленні інформаційних графічних засобів подання геометрії фазового багатовимірного простору параметрів температурного поля у загальному об'ємі промислових будівель на прикладі приміщень для утримання птиці.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Аналіз температурного поля, яке створюють у промислових будівлях, проводиться з використанням експериментальної установки, яка імітувала реальні теплові процеси в приміщенні.

При постановці експерименту враховувався температурний фактор: основна вимога у забезпеченні належного мікроклімату полягає у підтриманні належної комфортної температури повітря. Рух повітря, його

перемішування здійснювалось з урахуванням градієнта температури при наявності зон нагрітого і холодного повітря у загальному об'ємі промислової будівлі.

Експериментальне устаткування для дослідження геометрії температурного поля змонтовано відповідно до схеми (рис.1).

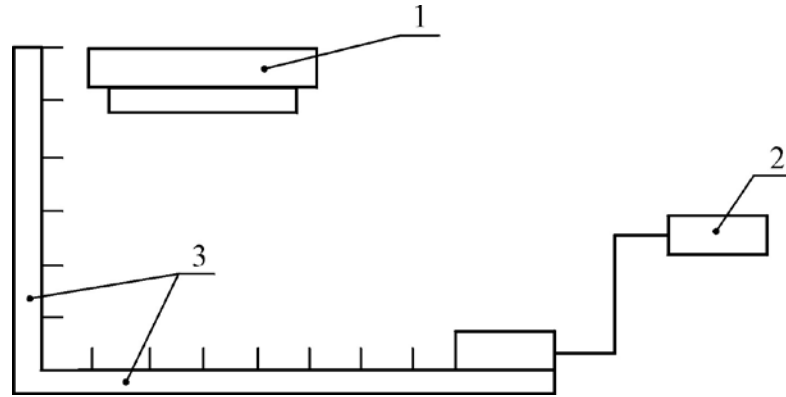


Рис. 1. Схема експериментального устаткування

Головний елемент устаткування, інфрачервоний нагрівач 1 типу NL-12R, встановлений на висоті  $h=2$  м. Числове значення висоти є найбільш оптимальним з точки зору перебування птиці у клітках та її поточного обслуговування. Для визначення числових значень температури повітря передбачений термоанемометр 2 типу АТТ-1004 з датчиком температури в зоні обслуговування під інфрачервоним нагрівачем 1. Вимірювання температури здійснювалось у фіксованих точках робочого простору під інфрачервоним нагрівачем 1 із використанням координатника 3.

У процесі експерименту здійснювались заміри значень температури у фіксованих точках простору при увімкненому інфрачервоному нагрівачі. Значення температури для опорних і допоміжних точок реєструвались у поперечних перерізах 1-1 робочого простору при постійних величинах координати  $y = const$  (рис. 2).

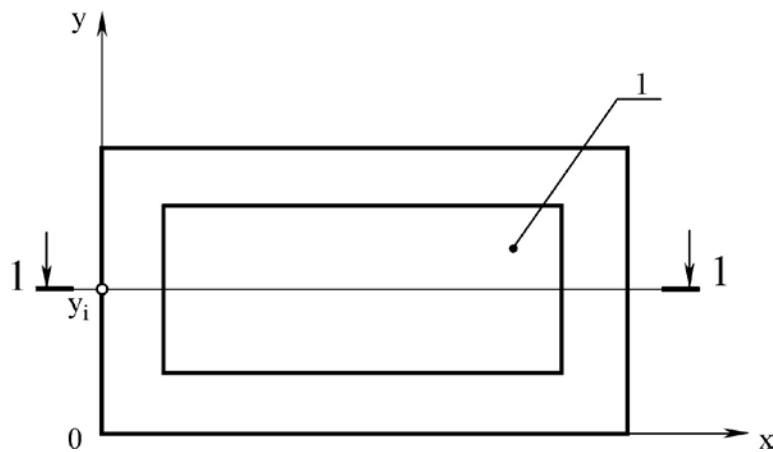


Рис. 2. Площина 1-1 відбору значень температури в робочому просторі

За поточними значеннями температури при фіксованих координатах  $x$ ,  $h$  і  $y$  будується діаграма розподілу температур у січній площині 1-1 робочого простору при постійному числовому значенні його ширини  $y_i = const$ .

Характер розподілу температур повітря в перерізі 1-1 робочого простору вказує на наявність ліній з однаковою температурою, ізотерм. Геометрично кожна ізотерма є перерізом поверхні  $t = t(x, h)$  січними площинами рівня  $t_i = const$  для значень, приведених на рисунку 3 температур. Для подальшого геометричного аналізу зручно розглянути частину проєкцій температурного поля з ізотермами, наприклад,  $t_1 = 18^\circ$ ,  $t_2 = 19^\circ$ ,  $t_3 = 23^\circ$  (рис. 3).

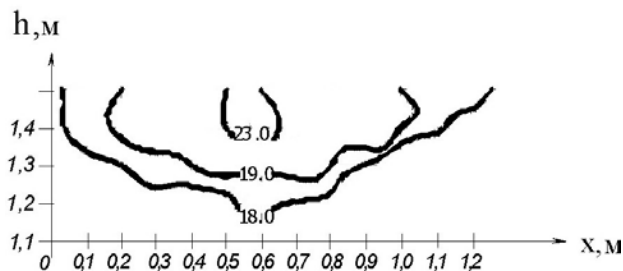


Рис. 3. Проекція температурного поля з ізотермами  $t_1 = 18^{\circ}, t_2 = 19^{\circ}, t_3 = 23^{\circ}$

Для прийнятого перерізу 1-1 робочого простору зі слідом  $y_i = const$  маємо, що значення температур  $t_1, t_2, t_3$  можна розглядати як сліди січних площин поверхні температурного поля (рис. 4).

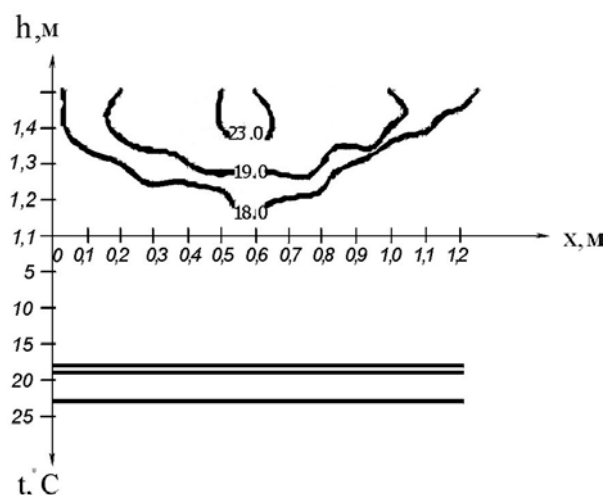


Рис. 4. Комплексний кресленик поверхні температурного поля

Комплексний кресленик дає змогу одержувати ізотерми, побудова яких за умов і можливостей проведення експерименту важкодоступна. Так, на рисунку 5 будується ізотерма для значення  $t = 21^{\circ}$ .

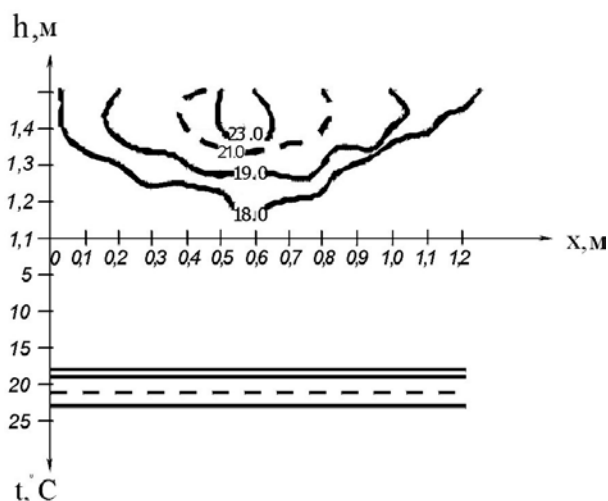
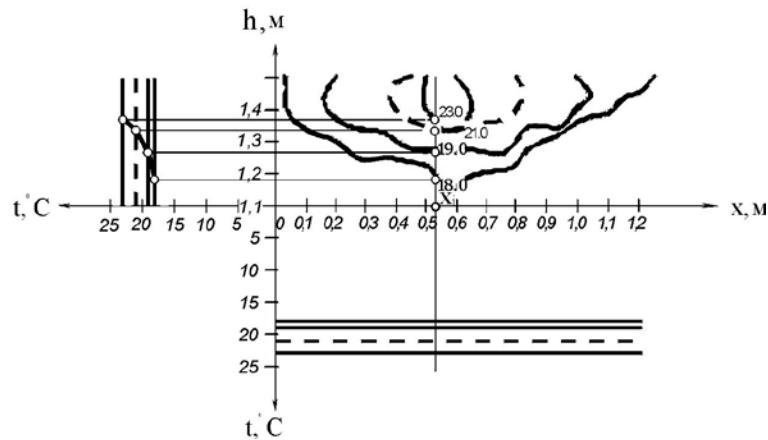


Рис. 5. Побудова ізотерми для  $t = 21^{\circ}$

Комплексні кресленики поверхні температурного поля (рис. 4, 5) є повними, дають змогу визначати температуру в будь-якій точці площини перерізу 1-1, а використання додаткового поля дозволяє будувати залежності  $h = f(t)$  для заданого значення координати  $x_i = const$  (рис. 6).

Рис. 6. Побудова залежності  $h = f(t^0)$  при  $x_i = const$ 

Приведені графічні залежності  $h = h(x)$ , одержані при  $t_i = const$  і  $h = h(t)$ , одержані при  $x_i = const$ , складають дійсні зображення перерізів поверхні  $t = t(h, x)$  температурного поля тривимірного підпростору  $Oxht$  чотиривимірного фазового простору  $Oxhty$ . Такий простір є окремим випадком лінійного багатовимірного дійсного проєктивного простору:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

#### Висновки

Проведені експериментальні дослідження теплових процесів у робочому просторі з використанням інфрачервоного нагрівача показали обмеженість можливостей одержання в лабораторних умовах окремих залежностей їх параметрів. Встановлено, що тепловий процес є чотирипараметричним, і його модель реалізується багатовидом у чотиривимірному фазовому просторі  $Oxhty$ . Практичне значення мають його проєкції у тривимірних підпросторах  $Oxht$  і  $Oxhy$ . Отже, використання геометричних методів та інформаційних графічних засобів дозволяє будувати додаткові практично значущі графічні залежності параметрів у двовимірних площинах і, виконавши їх візуалізацію у тривимірних просторах, оцінити тенденцію зміни температури в будь-яких координатних точках робочого простору.

#### Список використаної літератури

1. Волков О.Д. Проектирование вентиляции промышленного здания / О.Д. Волков. – Х.: Вища школа, ХДУ, 1989. – 240 с.
2. Wakowski K. Sieci i instalacje gazowe / K. Wakowski // Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. – Warszawa, 2002. – р. 655.4. Schwank.
3. Сподинок Н.А. Дослідження ефективності роботи витяжного зонта конструкції інфрачервоного нагрівача / Н.А. Сподинок, В.М. Желих // Теорія і практика будівництва: Вісник НУ "Львівська політехніка". – Львів, 2010. – №664. – С. 235-238.
4. Сподинок Н.А. Забезпечення мікроклімату в приміщеннях пташників / Н.А. Сподинок, В.М. Желих // Теорія і практика будівництва: Вісник НУ "Львівська політехніка". – Львів, 2008. – №627. – С. 197-200.
5. Гумен О.М. Геометрія проєктивних  $n$ -просторів щодо перебігу технологічних процесів у дослідженнях багатопараметричних систем / О.М. Гумен, С.Є. Ляковська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип. 4. – Т. 49. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – С. 89-94.

УДК 514.18

О.В. ДУБІНІНА

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

Є.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК

Таврійський державний агротехнологічний університет

**КОНТРОЛЬ ЗАКОНОМІРНОСТІ ЗМІНИ КРИВИНИ НА ДІЛЯНЦІ КУБІЧНОГО  
В-СПЛАЙНА**

*У роботі запропоновано спосіб формування ділянки кубічного В-сплайна із забезпеченням монотонної зміни кривини через контроль параметрів базисних трикутників. Запропоновано спосіб визначення радіусів кривини в граничних точках дуги В-сплайна через параметри контрольного багатокутника. Запропоновано способи корегування контрольного багатокутника з метою забезпечення монотонної зміни кривини вздовж кривої.*

*Ключові слова: кубічний В-сплайн, дискретно представлена крива (ДПК), контрольний багатокутник, базисний трикутник (БТ), кривина.*

Е.В. ДУБИНИНА

Мелітопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

Е.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК

Таврический государственный агротехнологический университет

**КОНТРОЛЬ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ КРИВИЗНЫ НА УЧАСТКЕ КУБИЧЕСКОГО В-  
СПЛАЙНА**

*В работе предложен способ формирования участка кубическим В-сплайном с обеспечением монотонного изменения кривизны через контроль параметров базисных треугольников. Предложен способ определения радиусов кривизны в граничных точках дуги В-сплайна через параметры контрольного многоугольника. Предложены способы корректировки контрольного многоугольника с целью обеспечения монотонного изменения кривизны вдоль кривой.*

*Ключевые слова: кубический В-сплайн, дискретно представленная кривая (ДПК), контрольный многоугольник, базисный треугольник, кривизна.*

O.V. DUBININA

Melitopol State Pedagogical University named after Bohdan Khmelnytsky

E.A. GAVRILENKO, Yu.V. KHOLODNYAK

Tavria State Agrotechnological University

**CHECKING THE REGULARITY OF CHANGING CURVATURE  
ON THE PART OF THE CUBIC B- SPLINE**

*This article describes the method for forming the part of the curve with a cubic B-spline, with a monotone change in the curvature through the control of the base triangles parameter's. The method of determining the curvature radii in the boundary points of the B-spline arc through the parameters of the control polygon is proposed. Methods of correction of the control polygon are proposed in order to provide a monotonic change in the curvature along the curve.*

*Keywords: a cubic B-spline, a discrete curve, a control polygon, a basic triangle, a curvature.*

**Постановка проблеми**

Формування складних поверхонь, заданих дискретним лінійчатим каркасом, є важливим завданням геометричного моделювання. Властивості одновимірних обводів, які є лінійними елементами каркасу, визначають функціональні властивості поверхні. Наприклад, при моделюванні динамічних поверхонь, призначенням яких взаємодія із середовищем (канал двигуна внутрішнього згоряння, лопатка турбіни, крило літака та інші), вимоги до лінійних елементів – другий порядок гладкості обводу при мінімальній кількості особливих точок (точки зміни опуклості-ввігнутості та точки зміни напряму зростання – зменшення значення кривини вздовж кривої). Більшість сучасних пакетів геометричного моделювання для побудови одновимірних обводів використовують кубічний В-сплайн. Коригування закономірності зміни кривини уздовж В-сплайна можливо в ручному режимі. А саме, на екрані монітора за допомогою миші через параметри контрольного багатокутника змінюється закономірність зміни кривизни уздовж сплайна. При цьому орієнтуємося на фантом графіка зміни кривини. Забезпечення контролю зміни кривини уздовж

обводу, який складається з великої кількості вузлів, в ручному режимі виявляється трудомістким, а часом – неможливим. Розробка інструмента, який дозволить в автоматизованому режимі забезпечити заданий характер зміни кривини вздовж кубічного В-сплайна, надасть можливість ефективно моделювати поверхні із заданими функціональними властивостями.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

В роботі [3] досліджено положення дотичних у вихідних точках, при яких задача формування обводу з монотонною зміною кривини має розв'язок. Форма базисного трикутника (БТ), обмеженого дотичними до обводу, вздовж якого радіуси кривини монотонно зростають, та відповідною хордою супроводжуючої ламаної лінії (СЛЛ), повинна відповідати умові:

$$a < b \quad (1)$$

де  $a, b$  – довжини сторін БТ, які належать дотичним до обводу, при цьому сторона з довжиною  $a$  відповідає вузлу з меншим радіусом кривини.

Виконання умови (1) необхідно забезпечити незалежно від того, ділянками яких кривих формується обвід.

В [1] розглянуто метод поділу сплайна за алгоритмом Кокса де Бура та кривої Без'є за допомогою алгоритму де Кастельжо. Якщо кубічний В-сплайн визначає контрольний багатокутник, що складається з трьох ланок, то В-сплайн ідентичний кубічній кривій Без'є. В цьому випадку, поділ В-сплайна можливо здійснити за допомогою алгоритму де Кастельжо. Якщо контрольний багатокутник, який задає неоднорідний кубічний В-сплайн складається з трьох ланок, то визначити будь-яку точку на В-сплайні можливо за допомогою алгоритму де Кастельжо. Кожна ланка контрольного багатокутника поділяється у співвідношенні  $u : (1 - u)$ , де  $0 < u < 1$ . З'єднавши точки, що поділяють ланки, отримуємо відрізки, які також ділимо у співвідношенні  $u : (1 - u)$ . Кількість кроків поділу відрізків за алгоритмом де Кастельжо дорівнює кількості ланок контрольного багатокутника сплайна. В результаті виконання алгоритму отримуємо точку( т.  $A$  ), яка належить сплайну, та два контрольні багатокутники, кожний з яких задає ділянку вихідної кривої.

Завдання В-сплайна через контрольні точки носить дискретний характер та забезпечує гнучкість управління його формою. Підхід до управління В-сплайном через контрольні точки близький до формування дискретно представленої кривої на основі вихідного точкового ряду. Задача формування геометричних образів, які задані впорядкованою множиною точок може бути розв'язана варіативним дискретним геометричним моделюванням (ВДГМ). Основні принципи та напрямки ВДГМ сформульовані в [2].

#### Мета дослідження

Запропонувати спосіб визначення закону зміни кривини вздовж кубічного В-сплайна, заданого вихідними контрольними точками. Розробити спосіб корегування точок, що задають В-сплайн, з метою забезпечення монотонної зміни кривини вздовж кривої.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Дискретно представлена крива (ДПК), вздовж якої радіуси кривини монотонно зростають, формується на основі впорядкованої множини точок  $[i...n]$ . Назначимо у вузлах ДПК дотичні, в таких положеннях, які дозволяють сформувати кожен ділянку кривої з монотонною зміною кривини [3]. Отримуємо ланцюг БТ, кожний з яких відповідає умові (1). Контрольний багатокутник, що задає В-сплайн, поєднуємо з базисним трикутником. Розглянемо  $i$ -ий БТ та умови, при яких можливо сформувати ділянку ДПК кубічним В-сплайном. Дотичні, які утворюють БТ,  $t_i$  та  $t_{i+1}$  проходять через контрольні точки багатокутника, що задає В-сплайн,  $P_0, P_1$  та  $P_2, P_3$  відповідно (див. рис. 1).

В точках  $i$  та  $i+1$ , які обмежують ділянку сплайна, можуть бути задані значення кривини ДПК.

Дугу В-сплайна, яка визначає ділянку ДПК, задаємо, назначивши положення ланки багатокутника  $P_1P_2$ . Ланка  $P_1P_2$  визначає положення точки  $A$ , що належить сплайну, та дотичну  $t^A$  в цій точці. В першому приближенні ланка  $P_1P_2$  встановлюється паралельно хорді  $P_0P_3$ . В цьому випадку точці  $A$  відповідає значення параметру рівняння В-сплайна  $u = \frac{1}{2}$ , а дотична  $t^A$  паралельна хорді БТ  $P_0P_3$ .

Дотична  $t^A$  знаходиться на відстані  $\frac{3}{4}h$  від хорди  $P_0P_3$ , де  $h$  – відстань від хорди  $P_0P_3$  до ланки  $P_1P_2$  багатокутника  $P_0P_1P_2P_3$ .

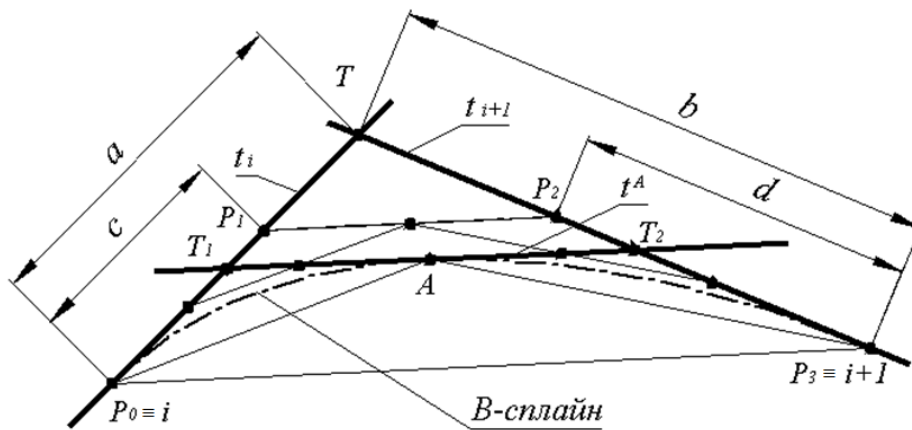


Рис. 1. Оцінка характеристик В-сплайна через параметри базисних трикутників

$$k = \frac{S}{l^2}$$

де  $S$  – площа БТ згущення;  $l$  – довжина основи БТ згущення.

За алгоритмом де Кастельжо розділяємо вихідну дугу В-сплайна на ділянки, кожній з яких відповідає контрольний багатокутник та поєднаний з ним БТ згущення.

Необхідною умовою монотонної зміни кривини вздовж В-сплайна є відповідність параметрів скільки завгодно великого числа БТ згущення умові (1). Максимально можливе відхилення сформованого В-сплайна від кривої з монотонною зміною кривини будемо оцінювати за допомогою коефіцієнту:

Якщо БТ згущення, якому відповідає максимальне значення коефіцієнту  $k$ , не перевищує наперед задане значення та при цьому форма всіх БТ згущення відповідає умові (1), задачу формування В-сплайна з монотонною зміною кривини будемо вважати виконаною.

Ланцюг, який складається з будь-якої кількості БТ згущення, відповідає задачі формування В-сплайна з монотонною зміною кривини, якщо перший та останній БТ ланцюга відповідають умові (1).

Якщо форма будь-якого БТ згущення не відповідає (1) та при цьому значення коефіцієнту недостатньо мало, необхідно змінити форму В-сплайна, корегуючи положення середньої ланки вихідного контрольного багатокутника.

На першому етапі корегування змінюємо положення середньої ланки  $P_1P_2$ , яка залишається паралельною основі БТ  $P_0P_3$ . Якщо умова (1) не виконується в першому БТ згущення (на рис. 1 це БТ  $P_0T_1A$ ), ланку  $P_1P_2$  переміщуємо в напрямку хорди  $P_0P_3$ . При цьому змінюється форма всіх БТ згущення ланцюга. Крайнє положення середньої ланки настає тоді, коли останній БТ згущення стає рівнобедреним. Якщо останній БТ згущення не відповідає умові (1) – середня ланка зміщується у зворотному напрямку.

Дослідимо, як положення дотичної  $t^A$  визначає радіуси кривини у точках  $i$  та  $i+1$ , що обмежують ділянку сплайна.

Для кривої, що задана параметричними рівняннями, радіус кривини визначається за формулою:

$$R_i = \frac{|r'(u)|^3}{|r'(u) \times r''(u)|}$$

де  $r(u)$  – вектор-функція кривої.

Виразивши першу та другу похідну сплайна через радіус-вектори контрольних точок [1], отримуємо формули визначення радіусів кривини у крайніх точках ділянки  $i$  та  $i+1$  ( $R_i$  та  $R_{i+1}$  відповідно):

$$R_i = \frac{3|r_1 - r_0|^3}{2|(r_1 - r_0) \times (r_2 - r_1)|}$$

$$R_{i+1} = \frac{3|r_3 - r_2|^3}{2|(r_2 - r_1) \times (r_3 - r_2)|}$$

Виразивши радіус-вектори через параметри контрольного багатокутника, отримуємо:



$$R_i = \frac{3c^3}{4S_1}, \quad R_{i+1} = \frac{3d^3}{4S_2},$$

де  $c$  – довжина ланки  $P_0P_1$  контрольного багатокутника (див. рис.1);  $d$  – довжина ланки  $P_2P_3$ ;  $S_1$  та  $S_2$  – площі трикутників  $P_0P_1P_2$  та  $P_1P_2P_3$  відповідно.

При формуванні обводу другого порядку гладкості необхідно забезпечити рівність радіусів кривини в кінцевій точці попередньої та першій точці наступної ділянки.

Якщо при зміщенні середньої ланки  $P_1P_2$  паралельно хорді  $P_0P_3$  перший та останній БТ згущення досягають рівнобедреності, то корегування параметрів ланцюга виконуємо зміною кута нахилу середньої ланки  $P_1P_2$  до хорди  $P_0P_3$ .

При корегуванні першого БТ згущення повертаємо середню ланку  $P_1P_2$  таким чином, щоб ланка  $P_0P_1$  контрольного багатокутника зменшувалася, а ланка  $P_2P_3$  збільшувалася (рис. 2). При корегуванні останнього БТ згущення – діємо навпаки.

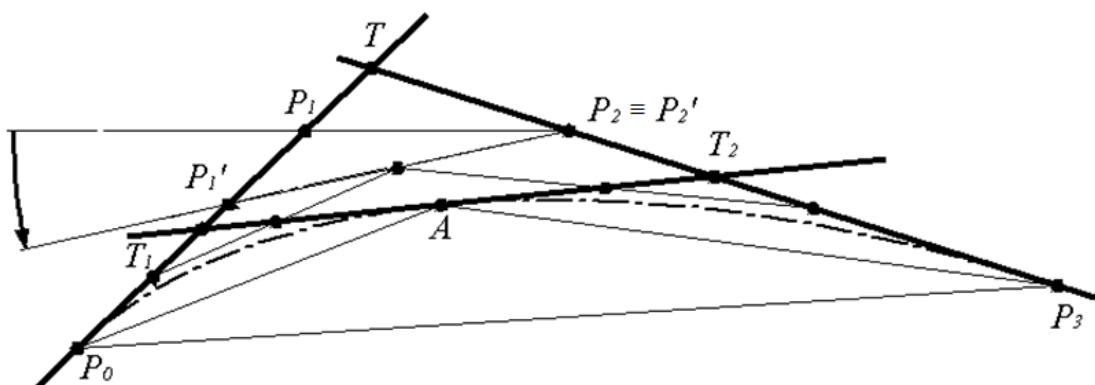


Рис. 2. Корегування базисного трикутника  $P_0T_1A$  обертанням ланки  $(P_1P_2)$

Якщо після виконання корегувань, сформувати ділянку ДПК з монотонною зміною кривини дугою одного В-сплайна неможливо, ділянка формується як складена крива другого порядку гладкості, що складається з двох та більше ділянок В-сплайна. В цьому випадку БТ згущення формуються за допомогою алгоритму Кокса де Бура.

#### Висновки

В роботі запропоновано спосіб формування ділянки кубічного В-сплайна із забезпеченням монотонної зміни кривини вздовж кривої при накладених граничних умовах на координати граничних точок та положення дотичних в них.

Запропоновано спосіб, який дозволяє визначити закономірність зміни кривини вздовж кубічного В-сплайна, що визначається контрольним багатокутником. Запропоновано спосіб визначення радіусів кривини в граничних точках дуги В-сплайна через параметри контрольного багатокутника. Запропоновано способи корегування контрольного багатокутника з метою забезпечення монотонної зміни кривини вздовж кривої.

Завданням майбутніх досліджень є формування обводу другого порядку гладкості з монотонною зміною кривини, ділянки якого складаються з В-сплайна, що може складатися з довільної кількості ділянок.

#### Список використаної літератури

1. Ли Кунву. Основы САПР CAD/CAM/CAE / Кунву Ли. – СПб. : Питер, 2004. – 560 с.
2. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція / В. М. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2008. – 250 с.
3. Холодняк Ю.В. Вариативное дискретное геометрическое моделирование обводо́в на основе базисных треугольников по заданному изменению кривизны: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Ю.В. Холодняк. – Мелітополь, 2016. – 24 с.

УДК 515.2

С.М. КОВАЛЬОВ, С.І. БОТВИНОВСЬКА,  
А.В. ЗОЛотоВА, С.О. ЛОСЬ  
Київський національний університет будівництва і архітектури**ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНОГО РЯДУ ТОЧОК  
СКЛАДЕНИХ КРИВИХ ЛІНІЙ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Розглянуто формування дискретного каркаса кривої лінії, яка є двовимірною інтерпретацією пневматичної оболонки високого тиску, з урахуванням власної ваги матеріалу та зусиль, які виникають у затяжках. Задача формування дискретного каркаса моделі поверхні пневматичної оболонки може бути вирішена на основі використання статико-геометричного методу (СГМ). Різноманітність форм таких конструкцій можна отримати за рахунок як різних елементів спираючої контуру (лінійних і точкових), так і за рахунок різних внутрішніх затяжок (канатів і тросових елементів) і додаткових з'єднань.*

*Ключові слова: геометричне моделювання, пневматична оболонка, дискретний каркас, статико-геометричний метод*

С.Н. КОВАЛЁВ, С.И. БОТВИНОВСКАЯ,  
А.В. ЗОЛотоВА, С.О. ЛОСЬ

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

**ФОРМИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО РЯДА ТОЧЕК  
СОСТАВНЫХ КРИВЫХ ЛИНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ**

*Рассмотрено формирование дискретного каркаса кривой линии, которая является двумерным аналогом пневматической оболочки высокого давления, с учетом собственного веса материала и усилий, которые возникают в затяжках. Задача формирования дискретного каркаса модели пневматической оболочки может быть решена на основе использования статико-геометрического метода (СГМ). Разнообразие форм таких конструкций можно получить как за счет разных элементов опоры контура (линейных и точечных), так и за счет разных внутренних затяжек (канатов и тросовых элементов) и дополнительных соединений.*

*Ключевые слова: геометрическое моделирование, пневматическая оболочка, дискретный каркас, статико-геометрический метод*

S. KOVALEV, S. BOTVINOVSKA,  
A. ZOLOTOVA, S. LOS

Kyiv National University of Construction and Architecture

**FORMATION OF THE DISCRETE SET OF POINTS OF COMPOUND CURVES UNDER  
THE NORMAL LOAD**

*The task of formation of the discrete frame model of the shell can be accomplished using the static-geometric method (SGM). Variety of forms of such constructions can be obtained as from different (linear and point) elements of the contour support as well as from different internal ties (cable stays and rope elements) and additional connections. Considered the formation of the discrete frame of the curve that is a two-dimensional interpretation of pneumatic shell high pressure with the own weight of the material and forces that emerge in the ties taken into account*

*Keywords: geometric modeling, pneumatic shell, discrete frame, static-geometric method.*

**Постановка проблеми**

Застосування пневматичних конструкцій в архітектурі і будівництві обумовлюється можливістю за їх допомогою перекидати великі прогони конструкціями з малою вагою; компактністю самих пневматичних конструкцій в транспортному (неробочому) стані та коротким терміном монтажу таких конструкцій.

Поверхні пневматичних оболонок надлишкового високого тиску, в ідеалі, формуються під діями нормальних до поверхні зусиль та зусиль власної ваги. Як правило, це м'які оболонки, що характеризуються малою жорсткістю на згин. Несуча спроможність таких конструкцій підвищується за рахунок накладання на них підсилюючих канатів або тросових елементів. Стабільність форми пневматичних оболонок забезпечується внутрішнім тиском, в результаті чого в оболонці виникають розтягуючі зусилля.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Пневматичні конструкції знайшли широке застосування у виробництві меблів, в суднобудуванні, у будівництві та архітектурі у другій половині двадцятого сторіччя. Вони виготовляються з повітронепроникних матеріалів. Конструкція таких оболонок займає проектне положення завдяки надмірному тиску повітря, що її заповнює.

Основи теорії м'яких оболонок було закладено Алексеевим С.О. в роботі [1]. Дуже часто в якості покриття в архітектурі використовують пневмоподушки (на прямокутному опорному контурі) і пневмолінзи (на довільному опорному контурі). Для розрахунків конструкцій такого типу Дж. Оден і В. Кубітцем [7] було запропоновано використовувати метод кінцевих елементів, який знайшов подальший розвиток у роботах Ч. Лі, Дж. Леонарда [8], Н. Срівастави [9], В.Н. Кислоокого [4], В.І. Усюкіна [5], Р.Г. Борсова [2], Е. Хауга [6].

### Мета дослідження

Найцікавішими, на сьогодні, залишаються питання моделювання подібних поверхонь за наперед заданими умовами на довільних опорних контурах. Задача формування дискретного каркасу моделі поверхні пневматичної оболонки може бути вирішена на основі використання статико-геометричного методу (СГМ), який є наочною інтерпретацією методу скінчених різниць.

Різноманітність форм таких конструкцій можна отримати за рахунок як різних елементів спирання контуру (лінійних та точкових), так і за рахунок різних внутрішніх зтяжок (канатів і тросових елементів) і додаткових з'єднань.

Площинним аналогом подібної задачі є формування дискретного ряду точок складених кривих ліній під дією нормального навантаження.

Мета роботи – змоделювати дискретний каркас кривої лінії, яка є двовимірною інтерпретацією пневматичної оболонки високого тиску з урахуванням власної ваги матеріалу оболонки та зусиль, які виникають у зтяжках.

### Викладення основного матеріалу дослідження

За основу дискретного моделювання поверхонь пневматичних конструкцій збиткового високого тиску можна прийняти площинну задачу формування кривих ліній у дискретному вигляді. Дискретні каркаси кривих ліній формуються як натягнуті нитки під дією зосереджених зусиль, прикладених до їх вузлів, за наперед заданими умовами. В якості останніх можуть обиратись: вузли, спільні для декількох кривих ліній; одна або декілька внутрішніх зтяжок, що будуть сприяти жорсткості конструкції; коефіцієнти напруження у ланках (стиску або розтягнення); апліката одного із вузлів. Площинна задача обрана тому, що вона простіша у розв'язанні, ніж тривимірна, але передбачається її подальше узагальнення на поверхні у тривимірному просторі.

В такому випадку, зусиллям збиткового внутрішнього тиску на вузли поверхні будуть відповідати нормальні зусилля, прикладені до вузлів дискретної моделі кривої лінії. Власній вазі матеріалу пневматичної оболонки у двовимірній моделі будуть відповідати вертикальні зусилля, пропорційні довжинам в'язей дискретної моделі кривої лінії. У спрощеному випадку, з певним наближенням, величину власної ваги можна задавати, у всіх вузлах дискретної моделі кривої лінії, однаковою.

Розглянемо дискретну модель кривої лінії, що буде двовимірною інтерпретацією пневматичної оболонки високого тиску. На рис. 1 представлена розрахункова схема побудови дискретного точкового каркасу кривої лінії. Для розв'язання задачі будемо враховувати, що на вузли такої моделі діє збитковий внутрішній тиск, аналогом якого приймається зусилля ( $P_i$ ) та власна вага елементів – ( $G$ ), прикладені до кожного з вузлів лананої. Слід також враховувати, що окремим параметром є власна вага окремих в'язей-розтяжок – ( $G'$ ). Напрямок зусиль вибирається таким, як показано на рис. 1.

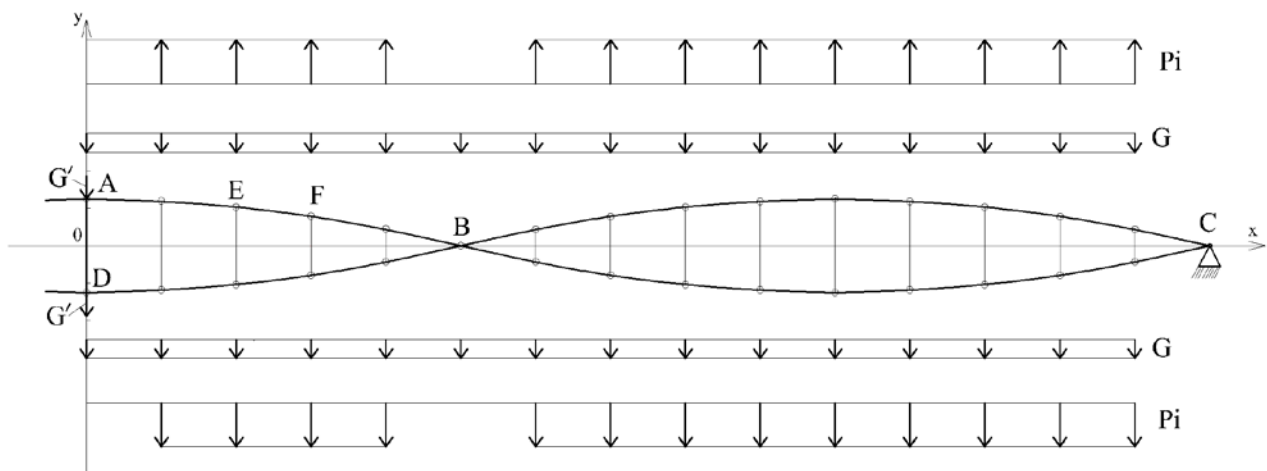


Рис. 1. Розрахункова схема дискретної кривої лінії, яка є двовимірною інтерпретацією пневматичної оболонки високого тиску

Елементами такої моделі виступають: вузли ( $A, B, C, D, E, F$ ); в'язі (ребра) як одного, так і другого поясів, типу ( $EF$ ); в'язі-розтяжки, які з'єднують вузли двох різних поясів ( $AD$ ). Власна вага елементів конструкції у вузлах типу ( $E$ ) приймається, у спрощеному варіанті, однаковою для всіх вузлів. Власна вага елементу у вузлі (типу  $B$ ) приймається у 2 рази більшою, а власна вага елементу у вузлах (типу  $A, D$ ) включає в себе ще і половину власної ваги стержня ( $AD$ ).

Серед вузлів такої моделі можна виділити: «звичайні» вузли, які є незакріпленими, (типу  $E, F$ ) з індексом розгалуження – 2; закріплені вузли, які можуть бути заданими та можуть відповідати крайовим умовам задачі типу ( $C$ ). До "особливих" вузлів можна віднести вузли (типу  $A$ ), з індексом розгалуження – 3, та вузли (типу  $B$ ), з індексом розгалуження – 4.

Для розрахунку координат вузлів дискретної кривої лінії обираємо статико-геометричний метод (СГМ). Складаємо систему рівнянь рівноваги вузлів. Зовнішні зусилля, які імітують надлишковий тиск, прикладені до вузлів є нормальними і будуть залежати від координат суміжних вузлів дискретної кривої. Оскільки, координати вузлів є невідомими, то система рівнянь рівноваги вузлів стає нелінійною. В процесі моделювання дискретної кривої лінії необхідно весь час уточнювати коефіцієнти пропорційності при зусиллях у вузлах, та напрямок зовнішнього формоутворюючого навантаження.

Розв'язання нелінійних систем рівноваги вузлів при формуванні дискретних образів статико-геометричним методом (СГМ) потребує правильної організації ітераційних процесів. Це дозволить отримати ціленаправлений результат з довільною допустимою похибкою [3]. Всі розрахунки у подальшому будемо виконувати за допомогою системи MathCAD.

Застосовуючи метод послідовних наближень організуємо ітераційний процес. На першому етапі необхідно правильно обрати перше наближення. Найпростішим є варіант, коли всі зовнішні зусилля, прикладені до вузлів з рівномірним кроком вздовж осі  $OX$  дискретної кривої лінії, направлені вертикально. Після знаходження координат вузлів першого наближення, надалі будемо уточнювати зовнішнє навантаження  $kPx_i, kPy_i$  за формулами (1), (2):

$$kPx_i = \frac{kP(y_{i+1} - y_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}} \quad (1)$$

$$kPy_i = \frac{-kP(x_{i+1} - x_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}} \quad (2)$$

де  $kPx_i, kPy_i$  – складові формоутворюючого навантаження, що прикладається до кожного з вузлів кривої лінії, в склад якого входить як величина збиткового тиску так і власна вага;

$x_i, y_i$  – координати вузлів дискретної моделі;

$i$  – номер вузлів у глобальній системі координат.

Форма дискретної моделі кривої лінії, що може бути двовимірним аналогом перерізу пневматичної оболонки, повністю залежить від зусиль, що прикладаються до її вузлів.

*Приклад 1.* Розглянемо формування складеної кривої, яка є контуром перерізу пневматичної оболонки за наступними вихідними даними. Задано, дивлячись на рис. 1, ординати  $y_i$  вузлів дискретної ламаної: вузла типу ( $C$ ), з номером  $i=0$ , і одного з вузлів типу ( $E$ ), з номером  $i=5$ :  $y_0=2.5, y_5=0$ . Власна вага елементів  $G=0.1$ . Величини проєкцій формоутворюючого зусилля  $kPx_i, kPy_i$  і координати невідомих вузлів дискретної кривої знаходимо із системи рівнянь рівноваги (3):

$$\begin{aligned} X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1} + k\bar{P}_{x,i} &= 0; \\ Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1} + k\bar{P}_{y,i} + G_i + G'_i &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

Згідно із алгоритмом, спочатку знаходимо абсциси та ординати вузлів у першому наближенні, коли зусилля зовнішнього навантаження  $kP_i$  вважаємо вертикальними.

Далі уточнюємо величину формоутворюючого навантаження і координати відповідних вузлів. Для отримання кінцевого результату знадобилося три ітерації. Результати занесені у табл. 1. За даними таблиці побудовано графіки кривих першої та останньої ітерації (рис. 2).

Значення координат вузлів, які було отримано на IV ітерації, збігаються з відповідними координатами III ітерації.

Таблиця 1

№ вузла, $i$	$kPy_i$	$kPx_i$	$Y_i$	$X_i$
1	2	3	4	5
<b>I ітерація</b>				
0	-0.3000	0.0000	2.5000	0.0000
1	-0.2985	-0.0299	2.3971	2.1182
2	-0.2942	-0.0588	2.0901	4.2059
3	-0.2873	-0.0862	1.5832	6.2337
4	-0.2785	-0.1114	0.8835	8.1736
5	-	-	0.0000	10.0000
6	0.2343	-0.1874	-1.6874	8.3045
7	0.2572	-0.1543	-3.036	6.4181
8	0.2785	-0.1114	-4.0225	4.3744
9	0.2942	-0.0588	-4.6252	2.2171
10	0.3000	0.0000	-4.8280	0.0000
<b>II ітерація</b>				
0	-0.3000	0.0000	2.5000	0.0000
1	-0.2984	-0.0306	2.3971	2.1192
2	-0.2940	-0.0598	2.0900	4.2072
3	-0.2872	-0.0866	1.5833	6.2345
4	-0.2789	-0.1104	0.8838	8.1735
5	-	-	0.0000	10.0000
6	0.2390	-0.1814	-1.6946	8.2976
7	0.2591	-0.1512	-3.0456	6.4104
8	0.2788	-0.1108	-4.0324	4.3690
9	0.2941	-0.0592	-4.6351	2.2147
10	0.3000	0.0000	-4.8380	0.0000
<b>III ітерація</b>				
0	-0.3000	0.0000	2.5000	0.0000
1	-0.2984	-0.0306	2.3971	2.1193
2	-0.2940	-0.0598	2.0900	4.2075
3	-0.2872	-0.0866	1.5833	6.2347
4	-0.2789	-0.1104	0.8838	8.1736
5	-	-	0.0000	10.0000
6	0.2390	-0.1817	-1.6942	8.2980
7	0.2591	-0.1514	-3.0451	6.4108
8	0.2788	-0.1108	-4.0319	4.3693
9	0.2941	-0.0592	-4.6346	2.2148
10	0.0000	0.0000	-4.8375	0.0000

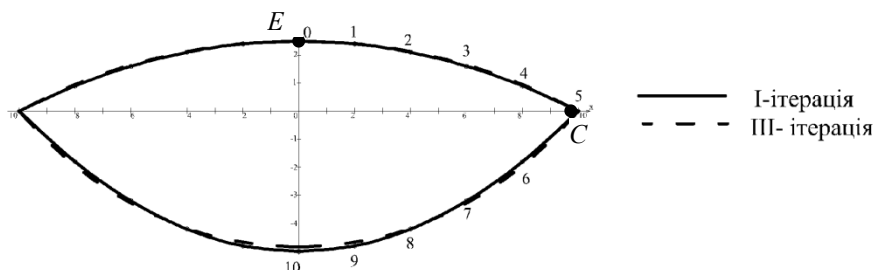


Рис. 2. Приклад 1. Графік кривої без натяжки, перша і остання ітерації

Приклад 2. Необхідно побудувати дискретну криву лінію, яка буде двовимірним аналогом пневматичної оболонки високого тиску і матиме одну натяжку, вузол типу (B). В якості вихідних даних задані ординати вузлів номер 0, 2:  $y_0=0, y_2=1$ . Для розрахунку власну вагу приймаємо  $G=0.1$ . У вузлі номер 5 плануємо зробити натяжку, вузол типу (B) (рис. 1).

Обчислення координат кривої виконуємо за описаним вище алгоритмом. Складаємо систему рівнянь рівноваги вузлів (3), розв'язання якої відбувається в ітераційному режимі. Так само, як і в попередньому прикладі, результати розрахунків зведені у табл. 2. За результатами розрахунків побудовано графіки кривих першої і останньої ітерації (рис. 3).

Таблиця 2

№ вузла	$kPy_i$	$kPx_i$	$Y_i$	$X_i$
<b>I ітерація</b>				
0	-	-	0.0000	0.0000
1	-0.5821	0.1455	0.7496	1.9587
2	-0.6000	-0.1196	1.0000	3.8301
3	-0.5821	-0.1732	0.7329	5.7733
4	-0.5367	-0.2208	-0.0333	7.8204
5	-	-	-1.2519	10.0000
6	0.5571	-0.3634	-2.3704	8.1329
7	0.5993	-0.3027	-2.8156	6.0477
8	0.5747	-0.2216	-2.5440	4.1441
9	0.5031	-0.1185	-1.5809	2.1076
<b>II ітерація</b>				
0			0	0
1	-0.5821	0.1455	0.7499	2.0013
2	-0.6000	-0.0027	1.0000	3.8527
3	-0.5809	-0.1503	0.7317	5.7068
4	-0.5373	-0.2670	-0.0352	7.7158
5	-	-	-1.2559	10.0000
6	0.5588	-0.2187	-2.3765	8.0568
7	0.5994	-0.0258	-2.8214	5.8881
8	0.5732	0.1772	-2.5486	3.6930
9	0.5060	0.3224	-1.5850	1.6804
<b>III ітерація</b>				
0			0	0
1	-0.5821	0.1455	0.7499	2.0013
2	-0.6000	-0.0027	1.0000	3.8526
3	-0.5809	-0.1503	0.7329	5.7068
4	-0.5374	-0.2670	-0.0333	7.7158
5	-	-	-1.2519	10.0000
6	0.5588	-0.2187	-2.3704	8.0568
7	0.5994	-0.0258	-2.8156	5.8881
8	0.5732	0.1772	-2.5440	3.6929
9	0.5060	0.3224	-1.5809	1.6803

Слід зазначити, що математичний апарат статико-геометричного методу повністю відповідає математичному апарату методу скінчених різниць (МСР), тому похибка СГМ аналогічна тій, що виникає при розрахунках за МСР і достатньо широко вивчена у літературі. Саме тому, у процесі розв'язання поставлених задач похибка не досліджується. Використання СГМ надає наочності процесу формування дискретного точкового каркаса кривої лінії під дією зовнішнього формоутворюючого навантаження.

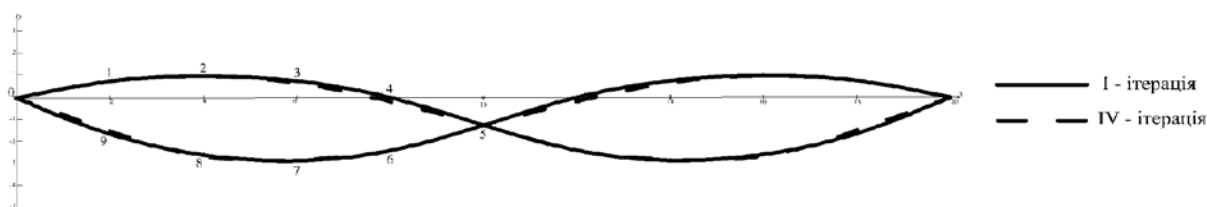


Рис. 3. Приклад 2. Графік кривої із затяжкою, перша і остання ітерації

**Висновки**

Площинна інтерпретація тривимірної задачі формування пневматичної оболонки високого тиску дозволила сконструювати і проаналізувати алгоритм визначення дискретного точкового каркасу кривої лінії за методом поступових наближень. Аналіз результатів розв'язання тестових прикладів показує, що ітераційний процес збігається до четвертого десяткового знаку.

В перспективі, запропонований алгоритм буде узагальнений для розв'язання тривимірної задачі формування дискретного точкового каркаса пневматичної оболонки.

#### Список використаної літератури

1. Алексеев С.А. Основы общей теории мягких оболочек / С.А. Алексеев // Расчет пространственных конструкций. — М.: Стройиздат, 1967. — Вып. XI. — С. 31-52.
2. Борсов Р.Г. Исследование напряженно-деформированного состояния конструкций из мягких оболочек разностными методами [Текст]: Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук : (05.07.03) / Моск. высш. техн. училище им. Н.Э. Баумана. — Москва : [б. и.], 1976. — 16 с.
3. Ботвіновська С.І. Нелінійні задачі формування дискретних образів статико-геометричним методом // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. — Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. — Вип. 3. — С. 21-27.
4. Кислоокий В.Н. Исследование статики и динамики висячих, пневмонапряженных и комбинированных систем методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений, 1977. — № 4. — С. 27-30.
5. Усюкин В. И. Техническая теория мягких оболочек и ее применение для расчета пневматических конструкций. В кн.: Пневматические строительные конструкции. М.: Стройиздат, 1983, — С. 299-333.
6. Haug E. Finite element analysis of nonlinear membrane structures / E. Haug, G.H. Powell // Proc. IASS Pacific Symposium: Part II. Tension Structures and Space Frames. — Tokyo and Kyoto, 1971. — P. 165 - 175.
7. Oden J.T. Numerical analysis of nonlinear pneumatic structures / J.T. Oden, W.K. Kubitzka // Proceedings of the 1-st International colloquium on pneumatic structures. — Stuttgart, 1967. — P. 87-107.
8. Li C.-T., Leonard J. W. Finite Element Analysis of Inflatable Shells / C.-T. Li, J. W. Leonard // Journal of the Engineering Mechanics Division. — 1973. — Vol. 99. — P. 495-514.
9. Li C.-T., Srivastava N.K. Analysis of pneumatic shells with or without cable net; general finite-element formulation / C.-T. Li, N.K. Srivastava // Computers and Structures. — 1974. — Vol. 4. — P. 813-828.

УДК 514.18

Л.М. КУЦЕНКО

Національний університет цивільного захисту України

Л.Л. ЗАПОЛЬСЬКИЙ

Український науково-дослідний інститут цивільного захисту

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗГОРТАННЯ У НЕВАГОМОСТІ  
БАГАТОЛАНКОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ З ІНЕРЦІЙНИМ РОЗКРИТТЯМ**

*Роботу присвячено геометричному моделюванню коливання багатоланкового маятника в умовах невагомості. Матеріал статті подано на прикладі моделі процесу розгортання багатоланкової конструкції (каркасу) космічного сонячного дзеркала, яка ототожнюється з багатоланковим маятником на уявній площині. Ініціювання коливань пропонується здійснювати за допомогою реактивного двигуна для надання імпульсу (типу "кляцання") одному з вузлових елементів багатоланкового маятника. В результаті одержано інерційний спосіб розкриття багатоланкової конструкції. Опис процесу розгортання каркасу сонячного дзеркала (як коливання багатоланкового маятника) здійснено за допомогою рівняння Лагранжа другого роду. Процес розкриття можна контролювати за допомогою кадрів комп'ютерної анімації.*

*Ключові слова: багатоланковий маятник, великомасштабна конструкція, розгортання у космосі, дзеркало у космосі, рівняння Лагранжа другого роду.*

Л.Н. КУЦЕНКО

Национальный университет гражданской защиты Украины

Л.Л. ЗАПОЛЬСКИЙ

Украинский научно-исследовательский институт гражданской защиты

**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВЕРТЫВАНИЯ В НЕВЕСОМОСТИ  
МНОГОЗВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ С ИНЕРЦИОННЫМ РАСКРЫТИЕМ**

*Работа посвящена геометрическому моделированию колебания многозвенного маятника в условиях невесомости. Материал статьи представлен на примере модели процесса развертывания многозвенной конструкции (каркаса) космического солнечного зеркала, отождествляемой с многозвенным маятником на абстрактной плоскости. Иницирование колебаний предлагается осуществлять при помощи реактивного двигателя для предоставления импульса (типа "щелчок") одному из узловых элементов многозвенного маятника. В результате получен инерционный способ раскрытия многозвенной конструкции. Описание процесса развертывания каркаса солнечного зеркала (как колебания многозвенного маятника) осуществлено при помощи уравнения Лагранжа второго рода. Процесс раскрытия можно контролировать при помощи кадров компьютерной анимации.*

*Ключевые слова: многозвенный маятник, крупномасштабная конструкция, развертывание в космосе, зеркало в космосе, уравнение Лагранжа второго рода.*

L.N. KUTSENKO

National university of civil defence of Ukraine,

L.L. ZAPOLSKY

The State Emergency Service of Ukraine

**GEOMETRICAL MODELING OF DEPLOYMENT IN THE WEIGHTLESSNESS  
OF A MULTI-PURPOSE CONSTRUCTION WITH INERTIAL DISCLOSURE**

*The work is devoted to geometric modeling of the oscillation of a multi-tiered pendulum under conditions of weightlessness. The material of the article is presented on the example of the process of deployment of a multi-tier structure (skeleton) of a cosmic solar mirror, identified with a multi-tiered pendulum on abstract plane. Initiation of oscillations is proposed to be carried out with the help of a rocket motor to provide an impulse (such as a "shot") to one of the nodal elements of a multi-link pendulum. As a result, we obtain an inertial way of opening the multi-tier structure. The process of the deployment of the solar mirror frame (as oscillations of a multi-member pendulum) is realized using the Lagrange equation of the second kind. The process of disclosure can be controlled using computer animation frames.*

*Keywords: multi-link pendulum, large-scale design, deployment in space, mirror in space, Lagrange equation of the second kind.*

**Постановка проблеми**

Розвиток космічних технологій у провідних країнах світу націлений на створення великогабаритних конструкцій [1], тому що для використання практично нескінченних запасів сонячної енергії доцільно



застосовувати потужні сонячні електростанції, сонячні концентратори і дзеркала космічного базування. Ці конструкції призначені як для обслуговування виробництва у космосі, так і для передачі енергії на Землю. До головних областей застосування великогабаритних конструкцій слід віднести: створення дзеркал для нічного освітлення районів Землі відбитим з орбіти сонячним світлом (населених пунктів, заполярних районів, місць масштабних катастроф тощо); створення відбивачів сонячного світла з орбіти для керування погодою в локальному регіоні, впливу на врожайність у районах виробництва морепродуктів, сільськогосподарської й лісової продукції, а також створення великогабаритних екранів для очищення космосу від технологічних осколків. Освітлення населених пунктів з космосу надасть можливість вивільнити електричні потужності, застосовуваних для освітлення вулиць і приміщень і їхнього використання для інших потреб без додаткового будівництва нових електростанцій.

Розрахунки показують [2], що для рентабельного використання космічних конструкцій необхідно створювати корисні площі антен або дзеркал порядку декількох гектарів. Наприклад, для освітлення відбитими сонячними променями у нічний час одного міста (наприклад, Харкова) необхідне дзеркало площею понад 12 гектарів [3]. Наведене вказує на доцільність досліджень у галузі розробки технологій розгортання у космосі великогабаритних конструкцій.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Створення великогабаритних конструкцій, що трансформуються у космосі, пов'язано з рішенням ряду технічних і механічних проблем, обумовлених унікальністю об'єктів. Характерною рисою для них є поєднання суперечливих вимог стосовно суттєвого збільшення габаритних розмірів і забезпечення достатньої жорсткості при досить обмеженій масі силового каркаса. Як правило, подібні конструкції мають вигляд каркасу (ферми), що трансформується, з "натягнутим" на нього сіткополотном, яке, власне, і формує відбивальну поверхню. Існують різні концепції розкриття каркасів таких конструкцій. Найпоширеніша з них полягає у трансформуванні множини однотипних елементів, зв'язаних між собою шарнірними вузлами, які утворюють плоску або просторову конструкцію відбивача у розгорнутому стані [4–5]. Керування положенням великогабаритних конструкцій у просторі є складною науково-технічною задачею, яка не має аналогів у наземній чи космічній техніці.

Для обґрунтування вибору конструктивних параметрів елементів системи розгортання й підтвердження надійності процесу розкриття потрібне проведення детального математичного моделювання з використанням ефективної математичної моделі [6–8]. Для побудови рівнянь руху і їхніх розв'язків можуть бути використані різні методи, деякі з них представлені в роботі [9]. Формування на орбіті конструкцій часто потребує для свого ефективного рішення нетрадиційних підходів. Один з таких підходів базується на утворенні конструкцій відцентровими силами. У роботі [10] розглянуто безкаркасні конструкції, які формовані відцентровими силами.

Але на практиці більш вживаними є каркасні тросові системи розгортання. В Україні питаннями розгортання каркасних конструкцій займаються в Інституті технічної механіки Національної академії наук України та Державного космічного агентства України (м. Дніпро). В роботах [11–12] цієї школи проаналізовані схеми розгортання тросових систем і математичних моделей їх динаміки стосовно до завдань виведення космічних апаратів. Виділено два основних класи систем розгортання: імпульсні й квазістатичні, і проведено їх порівняльний аналіз. Запропоновано математичну модель розгортання, у якій трос являє собою набір  $N$  матеріальних точок. Проаналізовано вплив маси троса на характер розгортання системи. Показано, що при повільному розгортанні троса (зі швидкостями до 1 м/с), без врахування сил аеродинамічного опору, маса троса істотно не впливає на характер розгортання.

У роботі [13] наведено математичну модель процесу розгортання багатоланкової каркасної конструкції сонячної батареї із тросовою системою розкриття. На рис. 1 представлена схема розкриття конструкції, а на рис. 2 зображена тросова система синхронізації зазначеної дії.

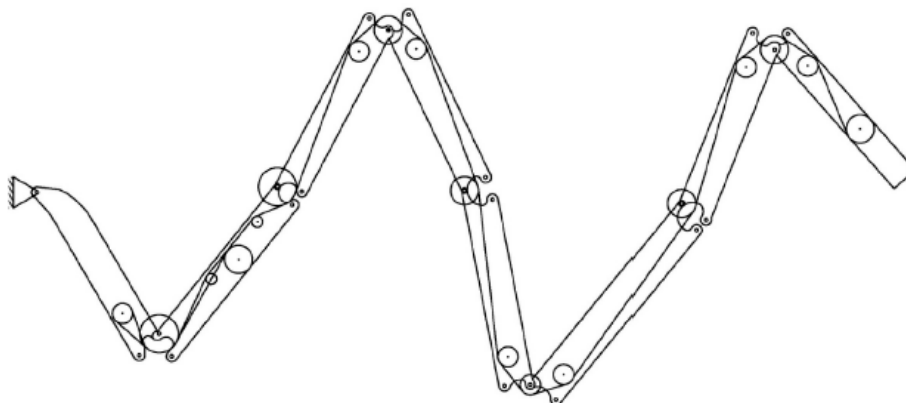


Рис. 1. Основна система розкриття (запозичене з роботи [13])

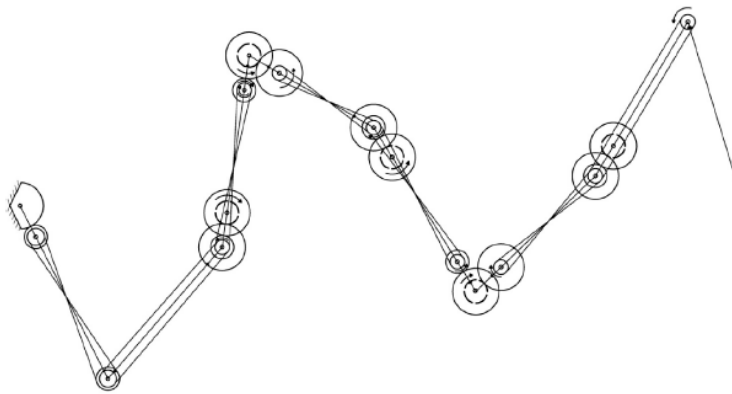


Рис. 2. Тросова система синхронізації розкриття (запозичене з роботи [13])

При цьому на основі аналізу кінематичної схеми системи розкриття необхідно обрати розміри радіусів роликів і передатного відношення двох типів шестерних механізмів, що забезпечують задану послідовність фіксації ланок. Для дослідження процесу розкриття сонячної батареї використане рівняння Лагранжа другого роду. При розробці схем розкриття багатоланкових конструкцій виникає необхідність у створенні математичних моделей, що адекватно описують їхні динамічні властивості. Застосування моделей ще на етапі проектування, дозволяє оцінити параметри функціонування конструкції. Для чисельного аналізу процесу розгортання конструкцій, що трансформуються, використовують можливості сучасних пакетів моделювання динаміки механічних систем [14–15].

Але розглянуті вище схеми тросового розкриття багатоланкових конструкцій є надто складними для застосування у випадку великогабаритних розмірів їх ланок (порядку сотні метрів). Ми вважаємо, що в цьому випадку доцільніше буде застосовувати інерційну систему розкриття, де наявність протяжних ланок конструкції принципово не впливає на реалізацію технології розкриття.

#### Мета дослідження

Побудувати геометричну модель процесу розгортання у невагомості багатоланкової конструкції з інерційною системою розкриття, за умови, що багатоланкова конструкція ототожнюється з багатоланковим маятником на площині. Для ініціювання коливань застосувати реактивний двигун з метою надання імпульсу (типу "клацання") одному з вузлових елементів багатоланкового маятника. Забезпечити результат розгортання візуальним контролем шляхом спостереження за анімаційною схемою розкриття з фіксацією прийнятної форми конструкції в обраний момент часу.

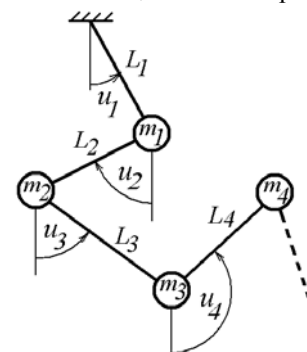
#### Викладення основного матеріалу дослідження

Зафіксуємо в умовах невагомості уявну площину з декартовими координатами  $Ox_1y_1$  і розглянемо на ній багатоланковий маятник, початок першої ланки якого збігається з початком координат. Для визначення у часі взаємного положення елементів багатоланкового маятника при коливаннях у невагомості за умови відсутності дисипативних сил необхідно використати рівняння Лагранжа другого роду.

У 1788 році Лагранж застосував варіаційний принцип до розрахунку механічних конструкцій з урахуванням їх кінематичних зв'язків, використовуючи поняття кінетичної й потенціальної енергії механічної системи. У результаті Лагранж одержав універсальний підхід для опису руху будь-якої механічної системи у вигляді рівнянь руху, відомих як рівняння Лагранжа другого роду. У роботі [16] розглянуто можливість застосування рівнянь Лагранжа другого роду за умови відсутності сили гравітації (тобто у разі невагомості), і, як наслідок, "нульової" потенціальної енергії механічної системи. Тому цікавим буде питання реалізації цієї ідеї на практиці.

Розглянемо ідеалізовану математичну модель багатоланкового маятника. Вважатимемо, що  $n$ -ланковий маятник, складається [17–18] з  $n$  невагомих нерозтяжних стержнів довжин  $L_i$  ( $i=1..n$ ), і шарнірно сполучених між собою прикінцевими вузловими точками, на яких закріплено вантажі (для спрощення – кулі) з масами  $m_i$  ( $i = 1..n$ ). Рух шарнірів повинен забезпечувати переміщення вантажів у межах обраної площини.

Узагальненими координатами вважатимемо кути  $u_i(t)$  ( $i = 1..n$ ), утворені відповідними ланками з обраним напрямком на площині (рис. 3). Для спрощення вважатимемо, що тертя у вузлах відсутнє, а точка кріплення нерухома у системі координат площини завдяки тому, що вона приєднана до космічного апарату, маса якого на порядок більша маси вантажів у вузлах.

Рис. 3. Схема  $n$ -ланкового маятника

Опис коливання маятника в площині з врахуванням "відсутності" потенціальної енергії виконаємо на основі рівнянь Лагранжа другого роду [18].

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial u_i'} L(n) \right) - \frac{\partial}{\partial u_i} (L(n)) = 0, \quad (i = 1..n), \quad (1)$$

де  $L(n)$  – лагранжіан, вираз якого збігається з описом кінетичної енергії системи;  $u_i(t)$  –  $i$ -та узагальнена координата (кут між обраним допоміжним напрямком і ланкою);  $u_i' = \frac{d}{dt} u_i(t)$  – похідна від функції опису узагальненої координати.

Для обчислення лагранжіана маємо вираз [15–16]:

$$L(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left[ \left( -\sum_{i=1}^{k-1} L_i \cos(u_i(t)) \frac{du_i(t)}{dt} - L_k \cos(u_k(t)) \frac{du_k(t)}{dt} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{k-1} -L_i \sin(u_i(t)) \frac{du_i(t)}{dt} - L_k \sin(u_k(t)) \frac{du_k(t)}{dt} \right)^2 \right] \quad (2)$$

У результаті після підстановки формули (2) у вирази рівнянь Лагранжа другого роду (1) опис руху  $n$ -ланкового маятника одержимо у вигляді системи з  $n$  диференціальних рівнянь відносно кутів  $u_i(t)$  ( $i=1..n$ ).

Для пояснення ідеї ініціювання у невагомості коливань багатоланкового маятника розглянемо його чотириланковий варіант ( $n=4$ ). При розв'язанні рівнянь Лагранжа другого роду у цьому випадку слід враховувати такі параметри (всі значення параметрів в умовних величинах):

- вектор довжин ланок маятника:  $\mathbf{L} = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ ;
- вектор значень мас куль:  $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ .

Крім того, при розв'язанні системи рівнянь слід враховувати початкові умови:

- вектор значень початкових кутів відхилень:  $\boldsymbol{\theta} = \{u_1(0), u_2(0), u_3(0), u_4(0)\}$ .
- вектор значень початкових швидкостей, наданих кутам відхилень:  $\boldsymbol{\theta}' = \{u_1'(0), u_2'(0), u_3'(0), u_4'(0)\}$ .

Враховуючи те, що початкове положення множини ланок маятника після доставки його на орбіту має "складений" вигляд (наочно це нагадує побутовий метр у складеному стані), то вектор значень початкових кутів відхилень завжди матиме координати  $\boldsymbol{\theta} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$ .

Ініціювання коливань маятника у невагомості здійснюємо шляхом вибору координат вектора початкових швидкостей, наданих одному з кутів відхилень. Наприклад,  $\boldsymbol{\theta}' = \{0, 0, 0, A\}$  означає, що тільки кулі № 4 масою  $m_4$  надано "кляцанням" початкову швидкість величиною  $A$  умовних одиниць. Вектор напрямку  $R$  надання швидкості розташований перпендикулярно четвертій ланці  $L_4$  маятника у прикінцевій точці (рис. 4). Тобто він визначає швидкість зміни кута розкриття  $u_4(0)$  четвертої ланки.

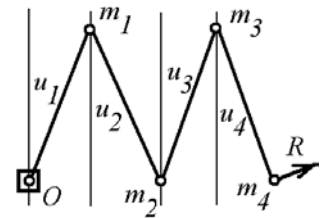


Рис. 4. Чотириланковий варіант маятника

З врахуванням наданого реактивним двигуном імпульсу маятникова система далі має розгортатися за інерцією. Перевага інерційного способу розгортання багатоланкової конструкції у невагомості полягає у відсутності необхідності синхронізувати якісь дії по зміні кутів в окремих вузлах (як це необхідно здійснювати у разі тросової системи розгортання). Використовуючи лише один реактивний двигун, можна розрахувати геометричну форму і забезпечити прогнозоване взаємне положення ланкам маятника.

Для розрахунку розташування елементів маятника було складено програму у середовищі maple [19–21], де вираз лагранжіана співпадає з описом кінетичної енергії (тут збережено синтаксис мови maple):

$$L := \frac{1}{2} m_3 L_2^2 \left( \frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_4^2 \left( \frac{d}{dt} u_4(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \left( \frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_2^2 \left( \frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 L_3^2 \left( \frac{d}{dt} u_3(t) \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} m_3 L_1^2 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_1^2 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_3^2 \left( \frac{d}{dt} u_3(t) \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + m_3 L_1 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \left( \frac{d}{dt} u_2(t) \right) \cos(u_1(t) - u_2(t)) \\
 & + m_3 L_1 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_3 \left( \frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(u_1(t) - u_3(t)) \\
 & + m_3 L_2 \left( \frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_3 \left( \frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(-u_2(t) + u_3(t)) \\
 & + m_2 L_1 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \left( \frac{d}{dt} u_2(t) \right) \cos(u_1(t) - u_2(t)) \\
 & + m_4 L_1 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_3 \left( \frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(u_1(t) - u_3(t)) \\
 & + m_4 L_1 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_4 \left( \frac{d}{dt} u_4(t) \right) \cos(u_1(t) - u_4(t)) \\
 & + m_4 L_2 \left( \frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_3 \left( \frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(-u_2(t) + u_3(t)) \\
 & + m_4 L_1 \left( \frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \left( \frac{d}{dt} u_2(t) \right) \cos(u_1(t) - u_2(t)) \\
 & + m_4 L_2 \left( \frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_4 \left( \frac{d}{dt} u_4(t) \right) \cos(u_2(t) - u_4(t)) \\
 & + m_4 L_3 \left( \frac{d}{dt} u_3(t) \right) L_4 \left( \frac{d}{dt} u_4(t) \right) \cos(u_3(t) - u_4(t))
 \end{aligned} \tag{3}$$

За допомогою лагранжіана (3) утворено систему з чотирьох диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду відносно функцій  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  і  $u_4(t)$ . З врахуванням відповідних початкових умов складену систему рівнянь розв'язано наближено методом Рунге-Кутти, а одержані розв'язки позначено символами  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$ ,  $U_3(t)$  і  $U_4(t)$ .

Застосуємо на площині декартову систему координат  $Oxy$  з центром в нерухомій точці маятника (вісь  $Oy$  співпадає з обраним вище напрямком). З використанням одержаних розв'язків визначаємо координати вузлових точок в момент часу  $t$ :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= L_1 \sin(U_1(t)); & y_1 &= L_1 \cos(U_1(t)); \\
 x_2 &= x_1 + L_2 \sin(U_2(t)); & y_2 &= y_1 + L_2 \cos(U_2(t)); \\
 x_3 &= x_2 + L_3 \sin(U_3(t)); & y_3 &= y_2 + L_3 \cos(U_3(t)); \\
 x_4 &= x_3 + L_4 \sin(U_4(t)); & y_4 &= y_3 + L_4 \cos(U_4(t));
 \end{aligned}$$

При необхідності можна визначити і швидкості переміщення відповідних вузлових точок.

У результаті виконання програми одержимо послідовність кадрів анімаційних зображень залежно від часу розгортання конструкції. Одночасно будуть видаватися значення поточних величин кутів  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  і  $u_4(t)$  для обраного моменту часу  $t$ . На рис. 5 зображено послідовні положення ланок маятника для випадку, коли реактивний двигун розташований на місці четвертого вантажу (зображено темним кольором). Квадратом позначено нерухому точку закріплення маятника.

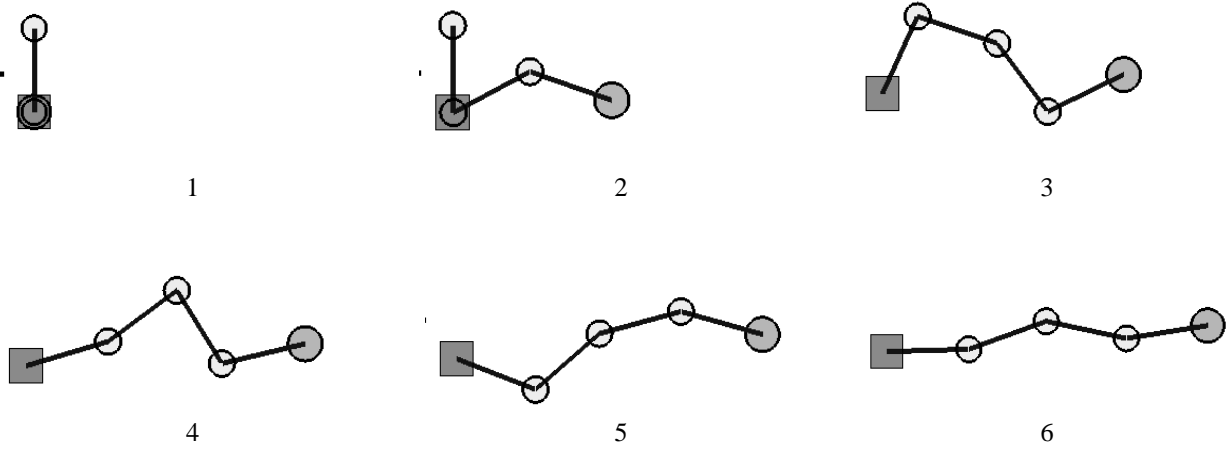


Рис. 5. Послідовні положення ланок маятника в процесі коливань

Розв'язання рівнянь Лагранжа другого роду у цьому випадку виконано з такими параметрами (все в умовних величинах):

- довжини ланок маятника:  $\mathbf{L} = \{2, 2, 2, 2\}$ ;
- значення мас куль:  $\mathbf{m} = \{0.1, 0.1, 0.1, 10\}$ .
- значення початкових кутів відхилень:  $\boldsymbol{\theta} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$ .
- значення початкових швидкостей кутів відхилень:  $s\boldsymbol{\theta}' = \{0, 0, 0, 1\}$ .

При аналізі одержаних анімаційних зображень був помічений ефект, який можна використати для подання команди на фіксацію елементів маятникової конструкції. А саме, на прикінцевій фазі "розпрямлення" конструкції спостерігаються поперечні коливання вузлів маятника (рис. 6).

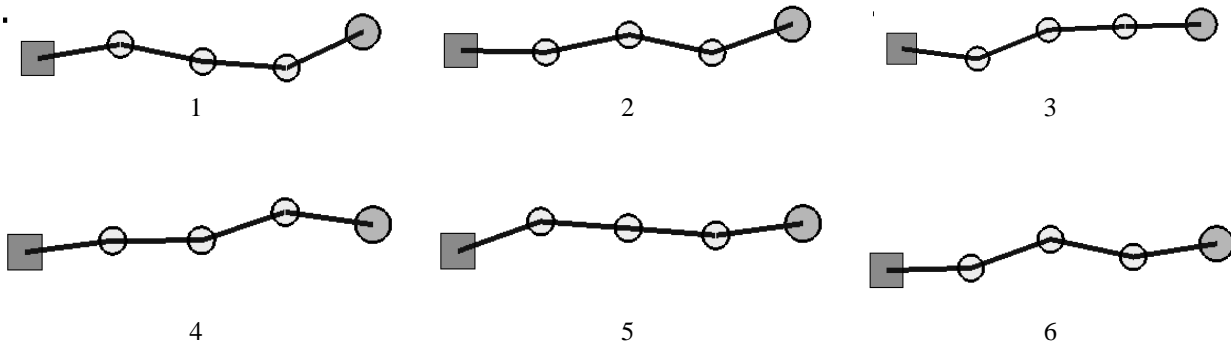


Рис. 6. Розгортання ланок маятника на прикінцевих фазах коливань

Детально проілюструвати цей ефект можна за допомогою функції суми модулів одержаних

розв'язків. На рис. 7 наведено графік функції  $W(N) = \sum_{k=1}^4 \left| U_k \left( \frac{iT}{N} \right) \right|$ , де

$U_k$  – розв'язки системи рівнянь Лагранжа другого роду,  $T$  – час інтегрування системи,  $N$  – кількість розбиттів інтервалу  $0..T$ ,  $i$  – ціла змінна у межах інтервалу  $0..N$ . Для конкретного випадку обрано:  $T = 4,2$ ;  $n = 300$ . Поперечні коливання вузлів маятника можна використати для включення сигналу спрацювання датчиків замків фіксації положення суміжних ланок маятника.

На основі інерційного способу розкриття одного променя можна утворювати схеми з багатьма променями зі спільним вузлом кріплення.

На рис. 8 зображено схему розкриття "зіркової" конструкції, утвореної з п'ятьох чотириланкових маятників.

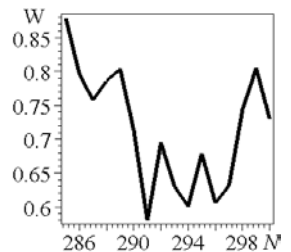


Рис. 7. Графік функції  $W(N)$

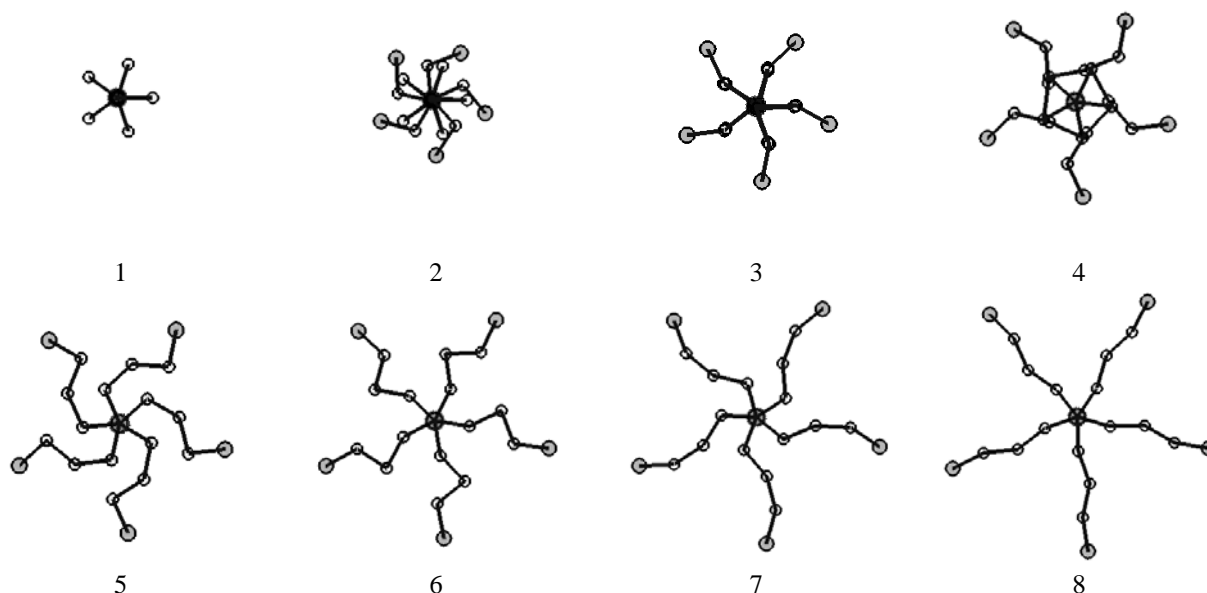


Рис. 8. Схема розкриття "зіркової" конструкції з п'ятьох чотириланкових маятників

#### Висновки

Побудовано геометричну модель розгортання у невагомості багатоланкової конструкції з інерційною системою розкриття. Багатоланкова конструкція ототожнюється з багатоланковим маятником на уявній площині. Для ініціювання коливань передбачено застосовувати реактивний двигун з метою надання імпульсу (типу "кляцання") одному з вузлових елементів багатоланкового маятника. Перевага інерційного способу розгортання багатоланкової конструкції у невагомості полягає у відсутності необхідності синхронізувати якісь дії по зміні кутів в окремих вузлах. Контроль результату розгортання здійснюється візуально за допомогою створеного анімаційного фільму, в результаті чого визначається прийнятна форма конструкції та пропонується виконати фіксацію відповідних вузлових елементів.

#### Список використаної літератури

1. Lovegrove, K. and Stein, W., Concentrating Solar Power Technology. Principles, Developments and Applications, Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2012. 708 p.
2. Стребков Д.С. Концентраторы солнечного излучения / Д.С. Стребков, Э.В. Тверьянович. – М.: ВИЭСХ, 2007. – 315 с.
3. Лабунский А. На пути к созданию систем дополнительного вреземного освещения. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://m.nkj.ru/news/21424/?mobile=N&PAGEN\\_1=3&ID=21424](https://m.nkj.ru/news/21424/?mobile=N&PAGEN_1=3&ID=21424)
4. Бакунин Д.В. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечных батарей / Д.В.Бакунин, С.В. Борзых, Н.С. Ососов // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16. – № 6. – С. 86–92.
5. Ильясова И.Г. Динамика процесса раскрытия многозвенных солнечных батарей / И.Г. Ильясова // Вестник Самарского ГАУ им. академика С.П. Королева. – 2012. – № 4 (35). – С. 88–93.
6. Крылов А.В. Моделирование раскрытия солнечных батарей различных конфигураций / А.В. Крылов, С.А. Чурилин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Машиностроение", 2011. – № 1. – С. 106–111.
7. Юдинцев В.В. Моделирование процессов раскрытия многоэлементных конструкций космических аппаратов / В.Юдинцев // Полет. – 2012. – № 5. – С. 28–33.
8. Паничкин В.И. Математическое моделирование динамики деформирования многостворчатой солнечной батареи в процессе раскрытия / В.И.Паничкин // Известия АН СССР. МТТ. – 1992. – № 4. – С. 183–190.
9. Зарубин В.С. Особенности математического моделирования технических устройств / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 1. – С. 5–17.
10. Райкунов Г.Г. Центробежные бескаркасные крупногабаритные космические конструкции / Г.Г. Райкунов, В.А. Комков, В.М. Мельников, Б.Н. Харлов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 448 с.
11. Пироженко А.В. Схема развертывания малой космической тросовой системы / А.В. Пироженко, Д.А. Храмов // Вісник Дніпропетровського університету : Ракетно-космічна техніка. – 2007. – № 9/2. – С. 198 – 204.
12. Храмов Д.А. Анализ схем и моделей развертывания космических тросовых систем [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/Khramov.pdf?sequence=1>

13. Бушуев А.Ю. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади / А.Ю.Бушуев, Б.А.Фарафонов // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 2. – С. 101–114.
14. Щесняк С. Проектирование и расчет крупногабаритных раскрывающихся конструкций с помощью программных комплексов MSC.Software / С. Щесняк, А. Романов // CADmaster. – 2009. – № 2-3. – С. 28–36.
15. Бойков В.Г. Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER / В.Г. Бойков // САПР и графика. – 2000. – № 9. – С. 17–20.
16. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula without gravity. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://www.cmsim.eu/papers\\_pdf/january\\_2014\\_papers/7\\_CMSIM\\_Journal\\_2014\\_Szuminski\\_1\\_57-67.pdf](http://www.cmsim.eu/papers_pdf/january_2014_papers/7_CMSIM_Journal_2014_Szuminski_1_57-67.pdf)
17. Gmiterko A., Grossman M. N-link Inverted Pendulum Modeling. Recent Advances in Mechatronics 2010, Part 3, p. 151-156.
18. Martinez-Alfaro H. Obtaining the dynamic equations, their simulation, and animation for n pendulums using Maple. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www2.esm.vt.edu/~anayfeh/conf10/Abstracts/martinez-alfaro.pdf>
19. Адашевська І.Ю. Геометричне моделювання коливальних багатоланкових маятникових механічних систем: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / І.Ю. Адашевська; Київський національний університет будівництва і архітектури – Київ, 2006. – 20 с.
20. Куценко Л.М. Геометричне моделювання коливальних багатоланкових маятників. / Л.М. Куценко, І.Ю. Адашевська. – Харків: НТМТ, 2008. – 176 с.
21. Куценко Л.М. Моделювання взаємних положень ланок маятника за умови відсутності гравітації / Л.М. Куценко, І.Ю. Адашевська // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. – Вип. 9. – С. 85-89

УДК 514.18

Л.М. КУЦЕНКО

Національний університет цивільного захисту України

Л.Л. ЗАПОЛЬСЬКИЙ

Український науково-дослідний інститут цивільного захисту

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СЕРЕДОВИЩІ MAPLE  
ЕФЕКТУ ДЖАНИБЕКОВА З ВИКОРИСТАННЯМ КВАТЕРНІОНУ**

*У роботі наведено алгоритм геометричного моделювання ефекту, відкритого космонавтом В. Джанібєковим, і який полягає у незвичному поведженні обертання твердого тіла, що переміщується в невагомості. Експериментально на орбіті було показано, що ефект Джанібєкова виникає тоді, коли обертання відбувається навколо осі із середнім значенням моменту інерції тіла. В статті диференціальні рівняння для опису обертання об'єкта складено з використанням кватерніонів. При цьому не використовувались тригонометричні функції, що дозволяє реалізувати раціональний алгоритм геометричного моделювання. На прикладі складеної тарле програми підтверджено, що обертання навколо осі із середнім за значенням моментом інерції є нестійким.*

*Ключові слова: ефект Джанібєкова, моменти інерції тіла, обертання паралелепіпеда, кватерніони, елементи матриці повороту.*

Л.Н. КУЦЕНКО

Національний університет гражданской защиты Украины

Л.Л. ЗАПОЛЬСКИЙ

Украинский научно-исследовательский институт гражданской защиты

**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ MAPLE  
ЭФФЕКТА ДЖАНИБЕКОВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОНА**

*В работе приведен алгоритм геометрического моделирования эффекта, открытого космонавтом В. Джанибековым, и состоящего в непривычном поведении вращающегося тела, перемещающегося в невесомости. Экспериментально на орбите продемонстрировано, что эффект Джанибекова возникает тогда, когда вращение происходит вокруг оси со средним значением момента инерции тела. В статье дифференциальные уравнения для описания вращения объекта составлены с использованием кватернионов. При этом не использовались тригонометрические функции, что позволяет реализовать рациональный алгоритм геометрического моделирования. На примере составленной тарле программы подтверждено, что вращение вокруг оси со средним по значению моментом инерции является неустойчивым.*

*Ключевые слова: эффект Джанибекова, моменты инерции тела, вращение паралелепипеда, кватернионы, элементы матрицы поворота.*

L.N. KUTSENKO

National university of civil defence of Ukraine,

L.L. ZAPOLSKY.

The State Emergency Service of Ukraine

**GEOMETRICAL MODELING IN THE PROGRAM MAPLE  
THE EFFECT OF JANIBEKOV WITH THE USE OF THE QUATERNION**

*The algorithm of geometric modeling of the effect, discovered by cosmonaut V. Janibekov, and consisting in unusual behavior of a rotating body moving in weightlessness is given in the work. Experimentally on the orbit it was demonstrated that the Dzhanibekov effect arises when the rotation occurs around the axis with an average value of the moment of inertia of the body. In the paper, differential equations for describing the rotation of an object are compiled using quaternions. In this case, trigonometric functions were not used, which makes it possible to implement a rational algorithm for geometric modeling. Using the example of a compiled maple program, it was confirmed that rotation around an axis with an average moment of inertia is unstable.*

*Keywords: Dzhanibekov effect, moments of inertia of the body, rotation of the parallelepiped, quaternions, elements of the rotation matrix.*

**Постановка проблеми**

Відкритий у 1985 році космонавтом В.Джанібєковим ефект [1–2] полягає у дивному поведженні твердого тіла, яке, обертаючись, переміщається у невагомості. При відкручуванні на орбіті гайки з "вушками" (рис. 1) у разі її зіскоку з різьбового гвинта, вона продовжувала летіти за інерцією, обертаючись як пропелер. Космонавт помітив, що пролетівши у невагомості приблизно 40 сантиметрів "вушками"



вперед, гайка робила раптовий переворот на 180 градусів і продовжувала летіти у тому ж напрямку, але вже "вушками" назад і обертаючись в іншу сторону. Потім процес повторювався. Ефект Джанібєкова демонструє приклад того, що в неінерційних системах відліку явища механіки носять складніший характер порівняно з інерційними [3].

В Інтернеті можна знайти відеофайли поводження "гайки Джанібєкова" й експериментів аналогічної природи в умовах земного тяжіння (наприклад, з тенісною ракеткою [4]). З'явилися десятки різних пояснень цього ефекту. Цікаво, що у роботі [5] для цього розглядається навіть гіпотеза "одухотвореної матерії". Ми схиляємося до такого пояснення, яке надається в роботах [1, 4, 6, 7]. Швидкість обертання гайки з "вушками" порівняно невелика, тому, на відміну від гіроскопа, вона перебуває у нестійкому стані. Гайка, крім основної осі обертання, також обертається й навколо двох інших просторових осей зі швидкостями на порядок нижчими (другорядні рухи). У результаті впливу цих другорядних рухів, згодом поступово відбувається зміна нахилу основної осі обертання (прецесія підсилюється), і коли він (тобто кут нахилу) досягає критичного значення, коливальна система здійснює перевертання.

Крім того, коли тіло обертається навколо осі з найменшим моментом інерції, то воно рухається досить стійко й ефект Джанібєкова не проявляється. Прикладом такого обертання є куля, випущена з нарізного ствола зброї. Вона обертається навколо осі, що проходить уздовж витягнутої сторони. Інший крайній випадок – коли тіло обертається навколо осі з найбільшим моментом інерції. Прикладом є спортивний снаряд диск, який має обертатися під час польоту. У цьому випадку обертання є теж стійким.

Наведене вказує на доцільність дослідження ефекту Джанібєкова, особливо при розробці схем розгортання у космосі конструкцій антен або каркасів дзеркал. Адже процеси розгортання тут часто пов'язані з обертовими рухами в умовах невагомості.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Теоретичні основи пояснення ефекту Джанібєкова розглянуто у роботах [1, 3, 4, 6, 7]. Зазначено, що проявляється ефект Джанібєкова починає, коли обертання відбувається навколо осі із середнім значенням  $J$  моменту інерції, тобто коли  $J_{\min} < J < J_{\max}$ . Плюс до цього тіло повинне мати, крім основного обертання, ще й дуже невеликі обертання навколо двох інших осей, швидкості яких мають бути на порядки меншими. У результаті такої "суперпозиції" всіх трьох обертань виходить складний просторовий рух тіла, який у певний момент часу перескакує з одного нестійкого положення в інше нестійке. При цьому ніякі сторонні й невідомі сили в рух тіла не втручаються. Весь процес відбувається відповідно до відомих законів обертання й обчислюється за формулами. В роботах [4, 8, 9] наведено приклади комп'ютерного моделювання ефекту Джанібєкова, реалізованих у різних комп'ютерних середовищах. Але у них обмеженим є використання залежностей, одержаних у аналітичному вигляді. Тому доцільним буде реалізувати зазначене комп'ютерне моделювання ефекту Джанібєкова у середовищі математичного пакету *maple*.

#### Виділення нерозв'язаних раніше частин загальної проблеми

Для ілюстрації та дослідження впливу параметрів на прояви ефекту Джанібєкова необхідно мати універсальний алгоритм геометричного моделювання процесу обертання тіла з різними значеннями моментів інерції вздовж осей декартової системи координат та початкових значень кутів обертання.

#### Мета дослідження

Розробити програму геометричного моделювання процесу обертання твердого тіла за умови врахування ефекту Джанібєкова. Показати, що ефект Джанібєкова виникає тоді, коли обертання відбувається навколо осі із середнім значенням моменту інерції тіла. Диференціальні рівняння для опису обертання об'єкта скласти з використанням кватерніонів, що дозволить відмовитися від використання тригонометричних функцій для опису формул заміни координат.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

В основу складеної програми покладено результати роботи [10]. Як приклад твердого тіла обертання оберемо прямокутний паралелепіпед одиничної маси з різними довжинами сторін, спрямувавши його сторони вздовж осей декартової системи координат: довшу – вздовж осі  $Ox$ , а коротшу – вздовж осі  $Oy$ . В цьому випадку середній за значенням момент інерції буде у разі обертання паралелепіпеда навколо осі  $Oz$ . Адже моменти інерції тіла вздовж відповідних осей наближено можна оцінити величиною площі, яку займає відповідна проекція.

Нехай моменти інерції обраного паралелепіпеда мають значення вздовж відповідних осей  $I_x$ ,  $I_y$  і  $I_z$ . Позначимо  $i_y = I_y/I_x$  і  $i_z = I_z/I_x$ . В якості узагальнених координат оберемо швидкості зміни кутів обертання  $u(t)$ ,  $v(t)$  і  $w(t)$  навколо осей, відповідно,  $x$ ,  $y$  і  $z$ . Початкові швидкості обертань позначимо як  $u_0$ ,  $v_0$  і  $w_0$ . Для геометричного моделювання обертання паралелепіпеда було розроблено програму для середовища математичного пакету *maple*. При чому, процес "перекидання" паралелепіпеда можна спостерігати за допомогою послідовних кадрів анімаційного фільму.



Рис. 1. Гайка з «вушками» експерименту В.Джанібєкова

Диференціальні рівняння обертання об'єкта складено із залученням кватерніону  $Q(t)$ ,  $U(t)$ ,  $V(t)$  і  $W(t)$  з початковими значеннями  $Q_0$ ,  $U_0, V_0$  і  $W_0$  [11–13]. У результаті маємо систему семи диференціальних рівнянь відносно функцій  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $U(t)$ ,  $V(t)$  і  $W(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= (iy - iz) v(t) w(t) \\ \frac{d}{dt} v(t) &= \frac{(iz - 1) u(t) w(t)}{iy} \\ \frac{d}{dt} w(t) &= \frac{(1 - iy) u(t) v(t)}{iz} \\ \frac{d}{dt} Q(t) &= -\frac{1}{2} U(t) u(t) - \frac{1}{2} V(t) v(t) - \frac{1}{2} W(t) w(t) \\ \frac{d}{dt} U(t) &= \frac{1}{2} Q(t) u(t) + \frac{1}{2} W(t) v(t) - \frac{1}{2} V(t) w(t) \\ \frac{d}{dt} V(t) &= \frac{1}{2} W(t) u(t) + \frac{1}{2} Q(t) v(t) + \frac{1}{2} U(t) w(t) \\ \frac{d}{dt} W(t) &= \frac{1}{2} V(t) u(t) - \frac{1}{2} U(t) v(t) + \frac{1}{2} Q(t) w(t) \end{aligned} \tag{1}$$

У цих формулах збережено синтаксис мови математичного пакету maple. Розв'язувати систему рівнянь (1) будемо наближено методом Рунге-Кутти з початковими умовами  $u(0) = u_0$ ,  $v(0) = v_0$ ,  $w(0) = w_0$ ,  $Q(0) = Q_0$ ,  $U(0) = U_0$ ,  $V(0) = V_0$  і  $W(0) = W_0$ . Позначимо одержаний наближений розв'язок для функцій  $Q(t)$ ,  $U(t)$ ,  $V(t)$  і  $W(t)$  як  $qq(t)$ ,  $UU(t)$ ,  $VV(t)$  і  $WW(t)$ .

Головним у програмі є блок операторів maple, що дозволяє обчислити координати точки  $(x_1, y_1, z_1)$ , яка одержується в результаті обертання поточної точки  $(X_1, Y_1, Z_1)$  навколо осі  $Oz$  з врахуванням ефекту Джанібекова (ціла  $i$  змінюється у межах  $0..N$ ):

```

q := qq(T*i/N);
x := UU(T*i/N);
y := VV(T*i/N);
z := WW(T*i/N);
M11 := 1 - 2*y^2 - 2*z^2;
M12 := 2*x*y - 2*z*q;
M13 := 2*x*z + 2*y*q;
M21 := 2*x*y + 2*z*q;
M22 := 1 - 2*x^2 - 2*z^2;
M23 := 2*y*z - 2*x*q;
M31 := 2*x*z - 2*y*q;
M32 := 2*y*z + 2*x*q;
M33 := 1 - 2*x^2 - 2*y^2;
A := array([[M11,M12,M13],
            [M21,M22,M23],
            [M31,M32,M33]]);
s := vector([X1,Y1,Z1]);
B := multiply(A, s);
x1 := B[1]; y1 := B[2]; z1 := B[3];
    
```

У програмі:  $T$  – інтервал часу інтегрування системи рівнянь (1),  $N$  – кількість проміжних положень обертання, а через  $M$  з індексами позначено елементи матриці повороту за допомогою обчислених координат кватерніона [11].

Звертаємо увагу, що при цьому не використовуються тригонометричні функції для перетворення координат. Це дозволяє реалізувати більш раціональний алгоритм обробки графічної інформації порівняно з використанням кутів Ейлера.

Для визначення положення паралелепіпеда в процесі обертання слід задати початкові координати його вершин та координати сигнальної точки з індексом нуль, положення якої також вказуватиме на

положення паралелепіеда у просторі (цікавим буде також і дослідження траєкторій переміщення сигнальної точки з одного нестійкого положення до другого):

```
X0 := 0:      Y0 := 0:      Z0 := 13:
X1 := -10:    Y1 := -5:    Z1 := 7.5:
X2 := -10:    Y2 := 5:     Z2 := 7.5:
X3 := 10:     Y3 := 5:     Z3 := 7.5:
X4 := 10:     Y4 := -5:    Z4 := 7.5:
X_1 := -10:   Y_1 := -5:   Z_1 := -7.5:
X_2 := -10:   Y_2 := 5:    Z_2 := -7.5:
X_3 := 10:    Y_3 := 5:    Z_3 := -7.5:
X_4 := 10:    Y_4 := -5:   Z_4 := -7.5:
```

Далі за допомогою програми обертання навколо осі  $Oz$  визначаються і будуються координати повернутого паралелепіеда.

Важливою характеристикою твердого тіла є еліпсоїд інерції. Розроблена програма дозволяє спостерігати за обертанням паралелепіеда синхронно з його еліпсоїдом інерції. Довжини півосей еліпсоїда інерції через моменти інерції визначаються так:  $\sqrt{I_x}$ ,  $\sqrt{I_y}$  і  $\sqrt{I_z}$ .

Еліпсоїд зображується чотирикутниками на його поверхні. В наведеному фрагменті програми еліпсоїд задається у параметричному вигляді:

```
for j from 0 to eN do
uu := evalf(-Pi + j*2*Pi/eN):
for i from 0 to eM do
vv := evalf(-Pi/2 + i*Pi/eM):
xe[i,j] := cos(uu)*cos(vv)*sqrt(Ix):
ye[i,j] := cos(uu)*sin(vv)*sqrt(Iy):
ze[i,j] := sin(uu)*sqrt(Iz):
Gre[i,j] := display(polygon([[xe[i,j],      ye[i,j],      ze[i,j]],
                             [xe[i+1,j],   ye[i+1,j],   ze[i+1,j]],
                             [xe[i+1,j+1], ye[i+1,j+1], ze[i+1,j+1]],
                             [xe[i,j+1],   ye[i,j+1],   ze[i,j+1]]],
                             color=green, thickness=1)):
end do: end do:
```

Тут параметри  $eN$  і  $eM$  визначають кількість розбиття поверхні еліпсоїда вздовж координатних ліній. Далі за допомогою програми обертання навколо осі  $Oz$  визначаються і будуються координати повернутого еліпсоїда:

```
for jj from 0 to eN do
for ii from 0 to eM do
vect := vector([ xe[ii,jj], ye[ii,jj], ze[ii,jj] ]):
B := multiply(A, vect);
x_e[i, ii, jj] := B[1]:
y_e[i, ii, jj] := B[2]:
z_e[i, ii, jj] := B[3]:
end do: end do:
Gr[i] := display(polygonplot3d([seq([seq(
[[x_e[i,ii,jj],   y_e[i,ii,jj],   z_e[i,ii,jj]],
[x_e[i,ii+1,jj], y_e[i,ii+1,jj], z_e[i,ii+1,jj]],
[x_e[i,ii+1,jj+1], y_e[i,ii+1,jj+1], z_e[i,ii+1,jj+1]],
[x_e[i,ii,jj+1],   y_e[i,ii,jj+1],   z_e[i,ii,jj+1]]],
ii=0..eM-1)], jj=0..eN-1)],
color=blue, style = WIREFRAME) ):
```

**Приклад.** Нехай розміри прямокутного паралелепіеда вздовж осей  $x$ ,  $y$  і  $z$  дорівнюють, відповідно, 20, 10 і 15 умовним величинам. Тоді моменти інерції мають значення  $I_x = 52.0833$ ,  $I_y = 27.0833$  і  $I_z = 41.6666$ . Для тесту оберемо такі початкові значення швидкостей обертання:  $\omega_0 = 0.000005$ ,  $\nu_0 = 0.000005$ ,  $\omega_0 = 1$ , а початкові значення кватерніону –  $Q_0 = 1$ ,  $U_0 = 0$ ,  $V_0 = 0$ ,  $W_0 = 0$ . Всі параметри в умовних величинах.

На рис. 2 зображено залежно від часу аксонометрії відповідних фаз обертання паралелепіеда та еліпсоїда. Також побудовано траєкторію переміщення з одного нестійкого положення до іншого сигнальної точки з початковими координатами  $(0,0,13)$ .

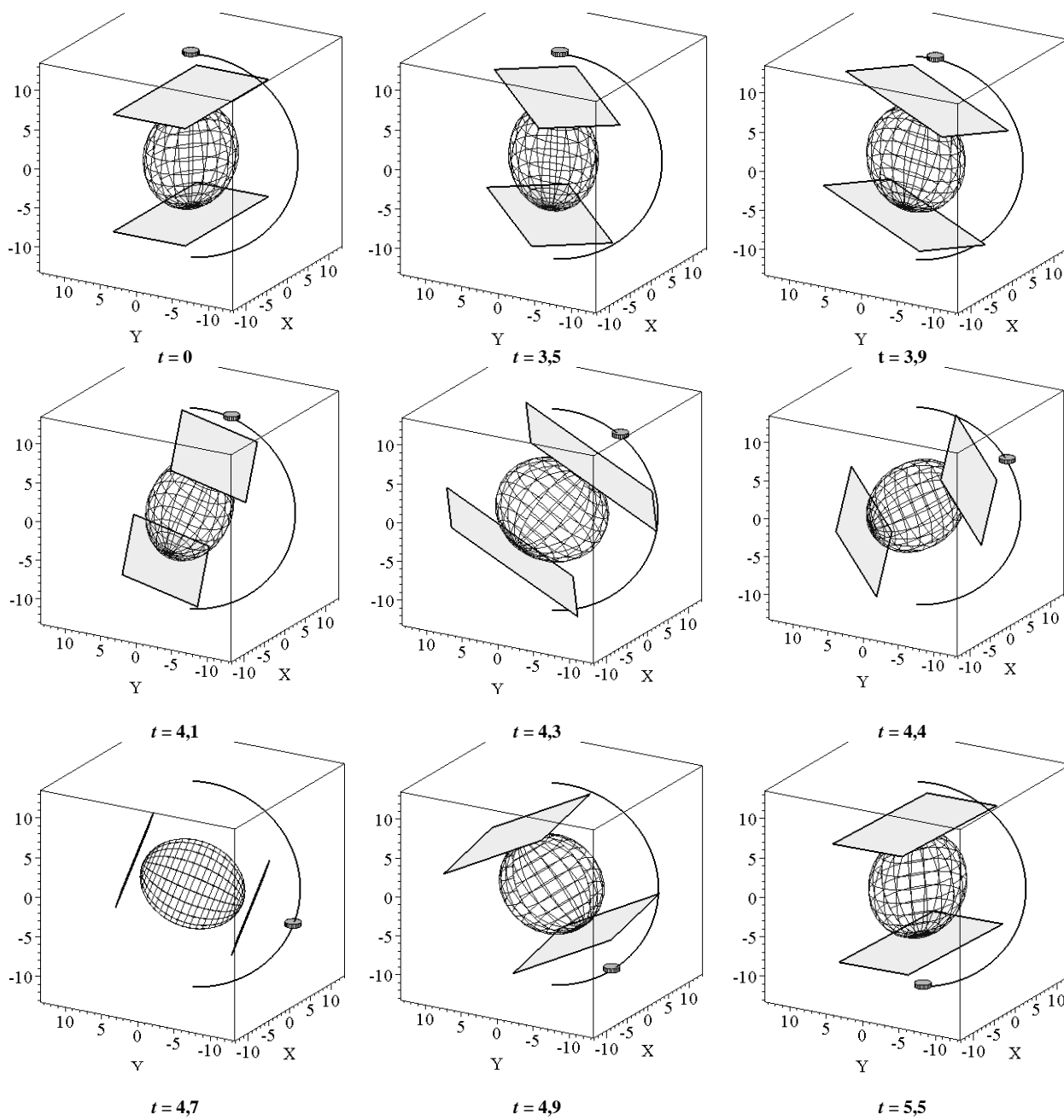


Рис. 2. Фази обертання паралелепіпеда та еліпсоїда залежно від часу

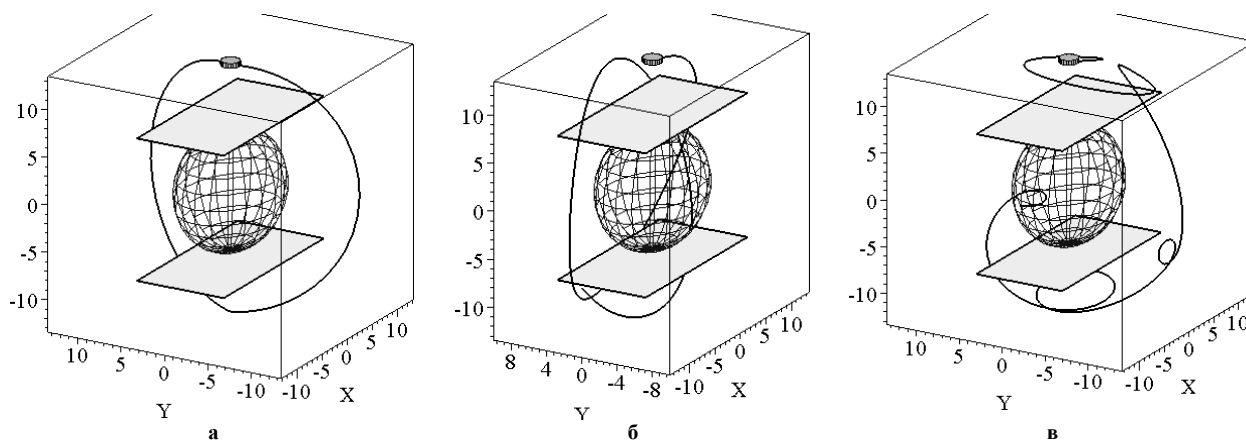


Рис. 3. Траєкторії сигнальної точки залежно від значень початкових швидкостей обертання

На рис. 3 зображено траєкторії сигнальної точки залежно від значень початкових швидкостей обертання навколо відповідних осей для варіантів:

- а)  $T = 100; N = 200; u_0 = 0,01; v_0 = 0,01; w_0 = 1.$
- б)  $T = 100; N = 200; u_0 = 0,01; v_0 = 0,1; w_0 = 0,03.$
- в)  $T = 900; N = 200; u_0 = 0,01; v_0 = 0,01; w_0 = 0,03.$

Складена програма дозволяє демонструвати нестійкість процесу обертання навколо осі із середнім значенням моменту інерції паралелепіпеда. При цьому за умови енергетично консервативної системи одержане обертання буде прагнути перейти до зменшення енергії обертання. Образно говорячи, тіло буде перекидатися, намагаючись знайти собі "комфортне" положення, але щоразу буде його проскакувати й шукати заново. Аналогічний процес спостерігаємо під час коливання ідеального (математичного) маятника. Дійсно, нижнє положення маятника є енергетично оптимальним. Але маятник не зупиняється в ньому. За цією аналогією вісь обертання абсолютно твердого тіла ніколи не співпадає з віссю максимального моменту інерції, якщо спочатку вона не збігалася з нею.

#### Висновки

Розроблена програма дозволяє ілюструвати за допомогою анімаційного фільму процес обертання твердого тіла з врахуванням ефекту Джанибекова. Є можливість спостерігати і аналізувати траєкторію переміщення сигнальної точки з одного крайнього нестійкого положення до іншого. Підтверджено, що ефект Джанибекова виникає тоді, коли обертання відбувається навколо осі із середнім значенням моменту інерції тіла. Завдяки кватерніону вдалося уникнути використання тригонометричних функцій для опису перетворення координат.

#### Список використаної літератури

1. Андреев Ю.М. Моделирование руху вільного твердого тіла в невагомості / Ю.М. Андреев, Т.А. Андреева, В.І. Василюк // Вісник СевНТУ: Серія: Механіка, енергетика, екологія. — Севастополь, 2013. — Вип.137. — С. 3-8
2. Видео "Эффект Джанибекова". [Електронний ресурс]. — Режим доступу: [https://www.youtube.com/watch?v=L2o9eBl\\_Gzw](https://www.youtube.com/watch?v=L2o9eBl_Gzw)
3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев. — М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. — 432 с.
4. Dzhanibekov Effect or tennis racket theorem. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://community.wolfram.com/groups/-/m/t/498246>
5. Шубейкина Т.Д. Эффект Джанибекова – наглядное проявление универсального закона творения / Т.Д. Шубейкина // Ноосфера. Общество. Человек. — 2015. — № 4. — Режим доступу: <http://noocivil.esrae.ru/240-1400>
6. Кирсанов Ф. Эффект Джанибекова. [Електронний ресурс] / Ф. Кирсанов. — Режим доступу: [http://www.orator.ru/int\\_19.html](http://www.orator.ru/int_19.html)
7. Эффект Джанибекова. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: [http://www.orator.ru/int\\_19.html](http://www.orator.ru/int_19.html)
8. Программа, демонстрирующая эффект Джанибекова. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://oko-planet.su/science/sciencehypothesis/15090-yeffekt-dzhanibekova-gajka-dzhanibekova.html>
9. Эффект Джанибекова - компьютерное моделирование. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://1tvprograma.ru/prosmotr/N1FIQ1F4R2ozOFE/>
10. Притыкин В. Магия тензорной алгебры: Часть 18 — Математическое моделирование эффекта Джанибекова. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://habrahabr.ru/post/264381/>
11. Норель М. П. Вращение и кватернионы. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://www.gamedev.ru/articles/?id=30129&page=4>
12. Waveren J.M.P. From Quaternion to Matrix and Back. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://www.mrelusive.com/publications/papers/SIMD-From-Quaternion-to-Matrix-and-Back.pdf>
13. Lindberg V. Chapter 9 Rigid Body Motion in 3D. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://people.rit.edu/vwlsp/IntermediateMechanics2/Ch9v5.pdf>

УДК 514.18

О.В. НЕСВИДОМИНА

Національний університет біоресурсів і природокористування України

**ПОБУДОВА ПЛОСКИХ ІЗОМЕТРИЧНИХ СІТОК ЗА НАПЕРЕД ЗАДАНИМИ  
ПЛОСКИМИ КРИВИМИ**

*Запропоновано спосіб побудови плоскої ізометричної сітки за довільною плоскою кривою, заданою параметричним рівнянням. В основу способу покладено перехід від кривої на дійсній площині до ізотропної кривої на комплексній площині. Наведено рівняння ізометричних сіток, коефіцієнти першої квадратичної форми та відповідні зображення.*

*Ключові слова: плоска ізометрична сітка, плоска крива, ізотропна крива, коефіцієнти першої квадратичної форми.*

А.В. НЕСВИДОМИНА

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

**ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ СЕТОК ПО НАПЕРЕД ЗАДАНЫМ ПЛОСКИМ  
КРИВЫМ**

*Предложен способ построения плоской изометрической сетки для произвольной плоской кривой, заданной параметрическим уравнением. В основу способа положен переход от кривой на действительной плоскости к изотропной кривой на комплексной плоскости. Приведены уравнения сеток, коэффициенты первой квадратичной формы и соответствующие изображения.*

*Ключевые слова: плоская изометрическая сетка, плоская кривая, изотропная кривая, коэффициенты первой квадратичной формы.*

A.V. NESVIDOMINA

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

**BUILDING OF PLANE ISOMETRIC GRID FOR THEIR ARBITRARY PLANE CURVES**

*A method for constructing a plane isometric grid is proposed for an arbitrary plane curve given in parametric form. The basis of the method is the transition from the curve on the real plane to the isotropic curve on the complex plane. The equations of isometric grid, the coefficients of the first quadratic form, and the corresponding images are given.*

*Keywords: plane isometric grid, plane curve, isotropic curve, coefficients of the first quadratic form.*

**Постановка проблеми**

Основною властивістю ізометричних(або ще ізотермічних) плоских та просторових сіток (поверхонь) є те, що їх елементарні комірки мають форму квадратів. Однією із практичних задач застосування ізометричних сіток є моделювання поширення тепла [9]. Так, ізотерми (криві з однаковим значенням температури) унаочнюють приріст температури, а лінії току, які перпендикулярні до ізотерм – напрямок переносу тепла. Також ізометричні сітки координатних ліній широко використовуються як посередники для конструювання мінімальних поверхонь [4, 6], при нанесенні зображень на криволінійні форми з мінімальними спотвореннями [3]. В цих задачах формоутворення плоскої ізометричної сітки доцільно здійснювати, задаючи наперед задану напрямну плоску криву її параметричним рівнянням.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Формоутворення плоских ізометричних сіток за допомогою комплексної змінної, зокрема, тригонометричними функціями, показано в праці [5]. Використання ізотропних кривих Без'є, Лагранжа, дробово-раціональних ізотропних кривих для побудови плоских ізометричних сіток розкрито у дисертаційному дослідженні [2]. Способи конструювання ізотропних кривих за допомогою функцій комплексної змінної показано в праці [8].

**Формулювання цілей статті**

Розкрити спосіб аналітичного опису плоскої ізометричної сітки за будь-якою наперед заданою плоскою кривою. За допомогою розробленої комп'ютерної моделі в середовищі символічної алгебри Maple [1] провести обчислювальні експерименти з визначення рівнянь ізометричних сіток, коефіцієнтів 1-ої квадратичної форми, встановити змінні параметри для їх унаочнення.

**Викладення основного матеріалу**

Нехай маємо будь-яке рівняння плоскої кривої в евклідовому просторі у наступному векторно-параметричному вигляді:

$$r(t)=r[x(t),y(t)]. \tag{1}$$

Якщо рівняння (1) переписати на комплексній площині у вигляді:

$$r_c(t)=r_c[x(t)\pm y(t)\cdot I, y(t)\mp x(t)\cdot I], \tag{2}$$

тоді довжина дуги такої кривої буде дорівнювати нулю:

$$ds(t)=\sqrt{\left(\frac{d}{dt}r_c(t)\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{d(x(t)\pm y(t)\cdot I)}{dt}\right)^2+\left(\frac{d(y(t)\mp x(t)\cdot I)}{dt}\right)^2}=0, \tag{3}$$

де  $I = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Криві нульової довжини (3) на комплексній площині називаються ізотропними кривими. В працях [2, 8] показано застосування ізотропних кривих для формування ізометричних сіток. Так, підстановка до ізотропної кривої (2) замість змінної  $t$  комплексної змінної  $u + v \cdot I$  приводить до рівняння поверхні на комплексній площині виду:

$$R_c(u,v)=R[x(u+v\cdot I)\pm y(u+v\cdot I)\cdot I, y(u+v\cdot I)\cdot x(u+v\cdot I)\cdot I], \tag{4}$$

Дійсна та уявна частини рівняння (4) визначають дві ізометричні сітки виду:

$$R_{re}(u,v)=\text{Re}(R_c(u,v)), \tag{5}$$

$$R_{im}(u,v)=\text{Im}(R_c(u,v)). \tag{6}$$

Основна властивість поверхонь (5) і (6) є рівність крайніх коефіцієнтів першої квадратичної форми. Оскільки для ізометричної сітки коефіцієнт  $F$  дорівнює нулю, то її лінійний елемент можна записати у наступному вигляді:

$$ds^2=Q(du^2 + dv^2), \tag{7}$$

де  $Q = E = G$  – коефіцієнти 1-ої квадратичної форми.

В середовищі символьної алгебри Maple було розроблено програмне забезпечення для побудови та дослідження ізометричних сіток для довільної параметрично заданої плоскої кривої [7]. Детально послідовність формування плоскої ізометричної сітки покажемо на двох прикладах – прямої лінії, як найпростішої лінії на площині, та спіралі Архімеда, заданої полярним рівнянням.

Приклад 1. Нехай маємо параметричне рівняння прямої на площині  $Oxy$ :

$$r(t)=r[at, bt], \tag{8}$$

тоді рівняння ізотропної прямої (2) на комплексній площині матиме вигляд:

$$r_c(t)=r[at - bt \cdot I, bt + at \cdot I], \tag{9}$$

де:  $a, b$  – параметри положення прямої;

$t$  – незалежна змінна.

Заміна  $t$  на  $u + v \cdot I$  приводить до параметричного рівняння плоскої сітки на комплексній площині у наступному вигляді:

$$R_c(u,v)=R[au + bu + I(av - bu), bu - av + I(au + bv)], \tag{10}$$

де  $u, v$  – координатні лінії плоскої сітки.

Відокремимо дійсну та уявну частину у рівнянні (10) – отримаємо відповідно дві сітки на площині:

$$R_{re}(u,v)=R[au + bu, -av + bu], \tag{11}$$

та:

$$R_{im}(u,v)=R[av - bu, au + bv]. \tag{12}$$

Коефіцієнти  $E$  і  $G$  першої квадратичної форми плоских поверхонь (11) і (12) рівні між собою:

$$E=G = a^2 + b^2, F = 0, \tag{13}$$

що підтверджує їх ізометричність.

На рис.1,а,б побудовані дві ізометричнісітки (11) та (12) для наступних вихідних умов: параметрів положення прямої лінії  $a = 2, b = 1$ ; параметрів координатних ліній сітки  $u = 0..1, v = 0..2$ .

Основною особливістю сіток  $R_{re}(u, v)$  та  $R_{im}(u, v)$  є їх конгруентність. Сітка (12) відносно сітки (11) є повернутою на кут  $90^\circ$  навколо початка координат  $Oxy$ .

Приклад 2. Нехай маємо полярне рівняння кривої, наприклад, спіралі Архімеда:

$$\rho(t) = t, \tag{14}$$

звідки параметричне рівняння матиме вигляд:

$$r(t) = r[t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t)]. \tag{15}$$

У відповідності (2) отримаємо рівняння ізотропної спіралі Архімеда на комплексній площині:

$$r_c(t) = r[t \cdot \cos(t) - t \cdot \sin(t) \cdot I, t \cdot \sin(t) + t \cdot \cos(t) \cdot I]. \tag{16}$$

Заміна  $t$  на  $u + v \cdot I$  приводить до параметричного рівняння плоскої сітки на комплексній площині у наступному вигляді:

$$R_c(u, v) = R \begin{bmatrix} -((-Iv - u)\cos(u) + (Iu - v)\sin(u))(\cosh(v) + \sinh(v)), \\ ((Iv + u)\sin(u) + (Iu - v)\cos(u))(\cosh(v) + \sinh(v)) \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Дійсна та уявна частина рівняння (17) визначають відповідно дві ізометричні сітки (рис.1,в,г):

$$R_{re}(u, v) = R \begin{bmatrix} (\cosh(v) + \sinh(v))(v \sin(u) + u \cos(u)), \\ (\cosh(v) + \sinh(v))(u \sin(u) - v \cos(u)) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

та:

$$R_{im}(u, v) = R \begin{bmatrix} -(\cosh(v) + \sinh(v))(u \sin(u) - v \cos(u)), \\ (\cosh(v) + \sinh(v))(v \sin(u) + u \cos(u)) \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Коефіцієнти  $E$  і  $G$  першої квадратичної форми цих плоских поверхонь  $R_{re}(u, v)$  та  $R_{im}(u, v)$  рівні між собою та дорівнюють:

$$E = G = 2(u^2 + v^2 + 2v + 1)(\cosh(v)^2 + \cosh(v)\sinh(v) - 1/2). \tag{20}$$

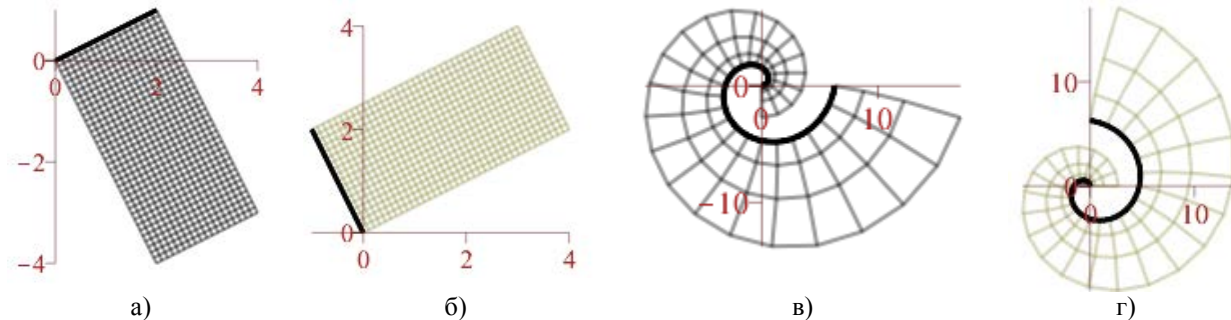


Рис.1. Плоскі ізометричні сіткиз напрямними: а,б – прямою; в,г – спіраллю Архімеда

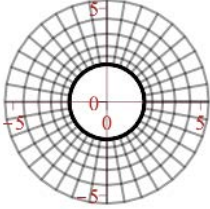
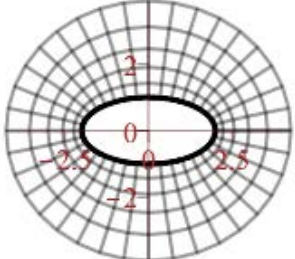
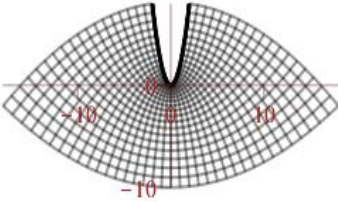
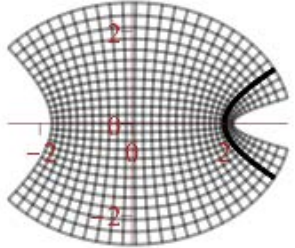
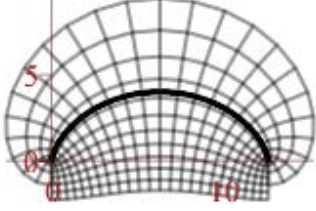

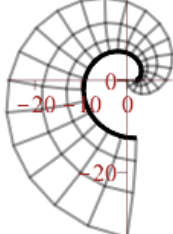
В табл.1 наведено параметричне рівняння плоскої напрямної кривої  $r(t)$ , параметричне рівняння (11) ізометричної сітки  $R_{re}(u, v)$ , коефіцієнти  $Q=E=G$ , першої квадратичної форми плоскої ізометричної сітки та межі зміни незалежних параметрів  $u = [u_o..u_n]$  та  $v = [v_o..v_n]$ .

Звернемо увагу, що криволінійні комірки побудованих плоских ізометричних сіток дещо відрізняються від форми криволінійних квадратів, хоча коефіцієнти  $E$  та  $G$  1-ої квадратичної форми сітки рівні між собою. Це пов'язано з тим, що з метою покращення візуалізації побудованих ізометричних сіток значення  $du$  та  $dv$  відповідних параметрів  $u$  та  $v$  їх координатних ліній бралися дещо завеликими, інакше комірки сітки вироджувалися би в точки і отримали б одну затушовану область.



Таблиця 1

Рівняння та зображення плоских ізометричних сіток

№	Рівняння	Зображення
1	<p>Коло <math>r(t) = r[a \cos(t), a \sin(t)]</math>, де <math>a = 2</math>.</p> $R(u, v) = R \begin{bmatrix} a \cos(u)(\cosh(v) + \sinh(v)), \\ a \sin(u)(\cosh(v) + \sinh(v)) \end{bmatrix},$ <p>де <math>u = [0..2\pi], v = [0..1]</math>.</p> $Q = a^2 (\cosh(v) + \sinh(v))^2$	
2	<p>Еліпс <math>r(t) = r[a \cos(t), b \sin(t)]</math>, де <math>a = 2, b = 1</math>.</p> $R(u, v) = R \begin{bmatrix} \cos(u)(a \cosh(v) + b \sinh(v)), \\ \sin(u)(b \cosh(v) + a \sinh(v)) \end{bmatrix},$ <p>де <math>u = [0..2\pi], v = [0..1]</math>.</p> $Q = -((-a^2 - b^2) \cosh(v)^2 - 2ab \cosh(v) \sinh(v) + (a^2 - b^2) \cos(u)^2 + b^2)$	
3	<p>Парабола <math>r(t) = r[t, at]</math>, де <math>a = 2</math>.</p> $R(u, v) = R \begin{bmatrix} 2auv + u, \\ a(u^2 - v^2) - v \end{bmatrix},$ <p>де <math>u = [-2..2], v = [0..2]</math>.</p> $Q = 4a^2(u^2 + v^2) + 4av + 1$	
4	<p>Гіпербола <math>r(t) = r[a \cosh(t), b \sinh(t)]</math>, де <math>a = 2, b = 1</math>.</p> $R(u, v) = R \begin{bmatrix} \cosh(u)(a \cos(v) + b \sin(v)), \\ \sinh(u)(b \cos(v) + a \sin(v)) \end{bmatrix},$ <p>де <math>u = [-1..1], v = [-2..0.25]</math>.</p> $Q = -((a^2 - b^2) \cos(v)^2 + 2ab \cos(v) \sin(v) + (-a^2 - b^2) \cosh(u)^2 + b^2)$	
5	<p>Циклоїда <math>r(t) = r[a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t))]</math>, де <math>a = 2</math>.</p> $R(u, v) = R \begin{bmatrix} a((-\cosh(v) + \sinh(v)) \sin(u) + u), \\ -a((\cosh(v) - \sinh(v)) \cos(u) + v - 1) \end{bmatrix},$ <p>де <math>u = [0..2\pi], v = [-1..2]</math>.</p> $Q = 2a^2 (\cosh(v) - \cos(u))(\cosh(v) - \sinh(v))$	
6	<p>Ланцюгова лінія <math>r(t) = r[t, a \cosh(t/a)]</math>, де <math>a = 2</math>.</p> $R(u, v) = R \begin{bmatrix} u + a \sinh(u/a) \sin(v/a), \\ -v + a \cosh(u/a) \cos(v/a) \end{bmatrix},$ <p>де <math>u = [0..2\pi], v = [0..1]</math>.</p> $Q = 2a^2 (\cosh(v) + \cosh(v) \sinh(v) - 1/2)(u^2 + v^2)$	
7	<p>Евольвента кола</p> $r(t) = r[a(\cos(t) + t \sin(t)), a(\sin(t) - t \cos(t))]$ , де $a = 2$ . $R(u, v) = R \begin{bmatrix} a(\sinh(v) + \cosh(v))((1 - v) \cos(u) + u \sin(u)), \\ -a(\sinh(v) + \cosh(v))((v - 1) \sin(u) + u \cos(u)) \end{bmatrix},$ <p>де <math>u = [0..2\pi], v = [0..1]</math>.</p> $Q = 2a^2 (\cosh(v)^2 + \cosh(v) \sinh(v) - 1/2)(u^2 + v^2)$	

В табл.1 більшість ізометричних сіток побудовані по одну сторону напрямної кривої. Варіюванням параметрів  $V_o$  та  $V_n$  є можливість здійснювати побудову ізометричних сіток по різні сторони напрямної кривої (див. рядки 4 і 5 табл. 1).

#### Висновки

Будь-якій плоскій кривій з параметричним рівнянням  $r(t)=r[x(t),y(t)]$  на дійсній площині відповідає ізотропна крива  $r_c(t)=r_c[x(t)\pm y(t)\cdot I, y(t)\mp x(t)\cdot I]$  на комплексній площині. Обчислювальними експериментами доведено, що дві плоскі ізометричні сітки  $R_{re}(u, v)$  і  $R_{im}(u, v)$ , які одержані відокремленням дійсної та уявної частин з рівнянн сітки  $R_c(u, v)$  на комплексній площині, є конгруентними та повернутими одна відносно іншої на прямий кут.

#### Список використаної літератури

1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple [Текст] / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба.– Гродно-Таллин, 2007.– 458 с.
2. Аушева Н.М. Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 [Текст] / Н.М. Аушева.– К.: КНУБА, 2014.– 38с.
3. Кремець Т.С. Перетворення плоских зображень шляхом нанесення їх на різні ізометричні сітки [Текст] / Т.С. Кремець, В.М.Несвідомін, Т.С. Пилипака // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип. 4. –Т. 56. – Мелітополь:ТДАТУ, 2013. – С. 158-163.
4. Муквич М.М. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди[Текст] / М.М.Муквич // Вісник ХНТУ.– 2016. – №3 (58). – С.518-523.
5. Несвідоміна О.В. Maple-моделювання плоскихізометричних сіток тригонометричними функціями комплексної змінної[Текст] / О.В. Несвідоміна // Матеріали V-ої всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених".– К.: НТУУ "КПІ", 2016.– С.196-199.
6. Пилипака С.Ф.Конструювання мінімальної поверхні гвинтовим рухом просторової кривої [Текст] / С.Ф. Пилипака, І.О. Коровіна // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Прикладна геометрія та інженерна графіка. –2008. –Вип.4. – Т. 39. – С. 30-36.
7. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство) [Текст] / А.А.Савелов. – М.: ГИФМЛ, 1960. –293 с.
8. Чернишова Е.О. Використання функцій комплексного змінного для побудови поверхонь технічних форм: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 [Текст] / Е.О. Чернишова. – К.: КНУБА, 2007. – 20 с.
9. Фокин В.М. Основы технической теплофизики [Текст] / В.М. Фокин, Г.П. Бойков, Ю.В. Видин.– М.: Машиностроение, 2004.– 172 с.

УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, Т.С. КРЕМЕЦЬ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

М.Б. КЛЕНДИЙ

Бережанський агротехнічний інститут НУБіП України

**РУХ ЧАСТИНКИ ПО ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА, ЯКИЙ ЗДІЙСНЮЄ ПОСТУПАЛЬНІ  
КОЛИВАННЯ У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ**

Складено узагальнені диференціальні рівняння відносного переміщення частинки по внутрішній поверхні похилого циліндра, який здійснює коливальний рух. Всі точки циліндра описують еліпси у вертикальних площинах. Розглянуто випадки коливань циліндра, коли півосі рівні або одна із них дорівнює нулю, тобто циліндр здійснює зворотно-поступальний рух. Рівняння розв'язано чисельними методами і побудовано траєкторії відносного руху частинки по поверхні циліндра. Наведено графіки інших кінематичних характеристик у функції часу. Розглянуто окремі випадки, коли вісь циліндра розташована горизонтально або під кутом до горизонтальної площини.

Ключові слова: похилий циліндр, коливальний рух, вертикальна площина, частинка, диференціальні рівняння, кінематичні параметри.

С.Ф. ПИЛИПАКА, Т.С. КРЕМЕЦЬ

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Н.Б. КЛЕНДИЙ

Бережанский агротехнический институт НУБиПУ Украины

**ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА, СОВЕРШАЮЩЕГО  
ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ**

Составлены обобщенные дифференциальные уравнения относительного перемещения частицы по внутренней поверхности наклонного цилиндра, совершающего колебательное движение. Все точки цилиндра описывают эллипсы в вертикальных плоскостях. Рассмотрены случаи колебаний цилиндра, когда полуоси равны или одна из них равна нулю, то есть цилиндр совершает возвратно-поступательное движение. Уравнения решены численными методами и построены траектории относительного движения частицы по поверхности цилиндра. Приведены графики других кинематических характеристик функции времени. Рассмотрены частичные случаи, когда ось цилиндра расположена горизонтально или под углом к горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: наклонный цилиндр, колебательное движение, вертикальная плоскость, частица, дифференциальные уравнения, кинематические параметры.

S.F. PYLYPAKA, T.S. KREMETZ

National university of life and environmental sciences of Ukraine

M.B. KLENDIY

IS NULES of Ukraine "Berezhany Agrotechnical Institute"

**PARTICLE MOVEMENT ON THE SURFACE OF A CYLINDER THAT MAKES TRANSLATIONAL  
OSCILLATIONS IN A VERTICAL PLANE**

Generalized differential equations of the relative motion of a particle along the inner surface of an inclined cylinder performing oscillatory motion are compiled. All cylinder points describe ellipses in vertical planes. The cases of oscillations of a cylinder are considered, when the semiaxes are equal or one of them is equal to zero, that is, the cylinder makes a reciprocal movement. Equations are solved by numerical methods and trajectories of the relative motion of the particle along the surface of the cylinder are constructed. The graphs of other kinematic characteristics of the time function are given. Partial cases are considered when the axis of the cylinder is located horizontally or at an angle to the horizontal plane.

Keywords: inclined cylinder, oscillatory motion, vertical plane, particle, differential equations, kinematic parameters.

**Постановка проблеми**

Похила площина є універсальним конструктивним елементом багатьох сільськогосподарських машин [1]. По ній в процесі обробки переміщується технологічний матеріал. Найбільш дослідженим є рух частинок по горизонтальній площині, яка здійснює коливальний прямолінійний або коловий рух. Для похилої площини дослідження в основному ведуться при її прямолінійних зворотно-поступальних

коливаннях в горизонтальному напрямі, в напрямі нахилу площини або в поперечному напрямі [1]. При криволінійних коливаннях площини, коли всі її точки описують еліпси, а сама площина має нахил, рух технологічного матеріалу суттєво змінюється. Якщо замість площини взяти циліндр і здійснити аналогічні коливання, то розв'язання задачі на дослідження відносного руху частинки по його поверхні суттєво змінюється.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Окрім фундаментальної монографії [1], в якій розглянуто прямолінійні зворотно-поступальні коливання, існують праці, присвячені криволінійним коливанням площини. Взагалі задача руху матеріальної частинки по площині, яка здійснює коловий коливальний рух, вперше була розв'язана М.С. Жуковським в геометричній інтерпретації [2], узагальнена і поширена на випадки еліптичних коливань І.І. Блехманом [3,4]. П.М. Василенко диференціальні рівняння руху частинки складав у проєкціях на осі рухомої системи координат, жорстко прив'язаної до площини, що коливається [1], а І.І. Блехман – у проєкціях на осі нерухомої системи координат. П.М. Заїка розглядав переміщення частинок по робочих площинах вібраційних зерноочисних машин [5]. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій поверхні циліндра, всі точки якого описують кола в горизонтальних площинах, розглянуто в праці [6]. Відносний рух частинки по поверхні гелікоїда, який обертається навколо своєї вертикальної осі, досліджено в праці [7].

**Формулювання мети досліджень**

Дослідити закономірності відносного руху матеріальних частинок по внутрішній поверхні циліндра, який здійснює поступальні еліптичні коливання у вертикальних площинах, при різних співвідношеннях осей еліпса та їх орієнтації у цих площинах.

**Викладення основного матеріалу досліджень**

Розташуємо нижню половину циліндра так, щоб його вісь була нахилена до горизонтальної площини під кутом  $\beta$  (рис. 1). Спочатку запишемо рівняння циліндра із горизонтальною віссю:

$$X = u; \quad Y = R \cos \alpha; \quad Z = -R \sin \alpha, \tag{1}$$

де  $R$  – радіус циліндра;

$\alpha, u$  – незалежні змінні поверхні,  $\alpha$  – кут повороту точки циліндра навколо його осі;  $u$  – довжина прямолінійної твірної циліндра.

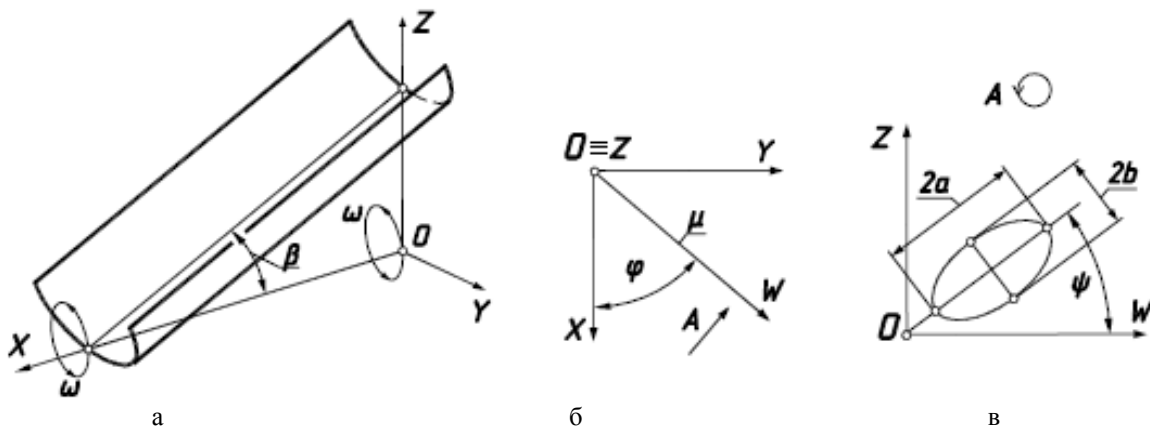


Рис. 1. Графічні ілюстрації до розташування похилого циліндра та напрямку його коливань: а) розташування циліндра в системі координат OXYZ; б) розташування вертикальної площини  $\mu$  в системі координат OXYZ; в) розташування еліпса в площині  $\mu$  з осями OZW

Повернемо циліндр (1) на кут  $\beta$  навколо осі OY. Параметричні рівняння повернутого циліндра запишуться:

$$X = u \cos \beta + R \sin \beta \sin \alpha; \quad Y = R \cos \alpha; \quad Z = u \sin \beta - R \cos \beta \sin \alpha. \tag{2}$$

Циліндр здійснює поступальні коливання таким чином, що всі його точки описують в загальному випадку еліпси у вертикальних паралельних площинах. На рис. 1,а показано окремий випадок, коли циліндр жорстко прив'язаний до системи координат OXYZ, всі точки якої рухаються по колах, паралельних координатній площині OYZ. Вертикальна площина  $\mu$  з осями OZW (рис.1,а), в якій знаходяться кола (в загальному випадку – еліпси), складає із координатною площиною OXZ кут  $\varphi$ . Для випадку, зображеному на рис. 1,а, цей кут рівний  $90^\circ$ . В площині  $\mu$  задамо еліпс з великою  $a$  і малою  $b$  півосями– траєкторію поступальних коливань всіх точок циліндра (рис. 1,в). Напрямок великої осі еліпса задається кутом  $\psi$  її нахилу

до горизонтальної площини. При  $b=0$  циліндр буде здійснювати зворотно-поступальні коливання вздовж заданого напрямку великої осі, при  $a=b$  траєкторією коливального руху будуть кола (при цьому величина кута  $\psi$  не матиме значення). Абсолютний рух частинки будемо розглядати в проєкціях на осі системи координат  $OXYZ$ . Абсолютну траєкторію частинки можна записати як суму переносного руху циліндра, точки якого в загальному випадку описують еліпси, і відносного руху точки по поверхні циліндра:

$$x = x_n + x_\epsilon; \quad y = y_n + y_\epsilon; \quad z = z_n + z_\epsilon, \quad (3)$$

$x_n = x_n(t); y_n = y_n(t); z_n = z_n(t)$  – траєкторія переносного руху циліндра у функції часу  $t$ ;  
 $x_\epsilon = x_\epsilon(t); y_\epsilon = y_\epsilon(t); z_\epsilon = z_\epsilon(t)$  – траєкторія відносного руху частинки по поверхні циліндра у функції часу  $t$ .

Кожна точка похилого циліндра описує еліпс з півосями  $a$  і  $b$ . Радіус-вектор точки еліпса в площині  $\mu$  його розташування має координати:  $\{a \cos \omega t; b \sin \omega t\}$ , де  $\omega$  – частота коливань (при  $a=b$  – кутова швидкість обертання точок циліндра по колах),  $t$  – час, незалежна змінна. Осі такого еліпса паралельні осям  $OX$  і  $OW$ . За відомими формулами повороту повернемо його на кут  $\psi$ . Після цього радіус-вектор точки еліпса запишеться:

$$\{-a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t; \quad a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t\} \quad (4)$$

Враховуючи кут  $\varphi$  між площинами  $OZX$  і  $OZW$ , можна записати параметричні рівняння еліпса в проєкціях на осі системи координат  $OXYZ$ :

$$\begin{aligned} x_n &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi; & x_n &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi; \\ y_n &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi; & y_n &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi; \\ z_n &= -a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t. & z_n &= -a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t. \end{aligned} \quad (5)$$

По циліндру точка ковзатиме по певній траєкторії. Рівняння траєкторії можна одержати, якщо зв'язати між собою незалежні змінні  $\alpha$  і  $u$  поверхні (2). Цей зв'язок запишемо через час  $t$ , тобто координати частинки на поверхні циліндра будуть функціями часу:  $\alpha = \alpha(t)$  і  $u = u(t)$ . В такому випадку відносний рух частинки (траєкторія на циліндрі) опишеться рівняннями:

$$\begin{aligned} x_\epsilon &= u \cos \beta + R \sin \beta \sin \alpha; \\ y_\epsilon &= R \cos \alpha; \\ z_\epsilon &= u \sin \beta - R \cos \beta \sin \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Сумуючи переносний (5) і відносний (6) рухи за формулою (3), отримаємо рівняння абсолютної траєкторії частинки:

$$\begin{aligned} x &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi + u \cos \beta + R \sin \beta \sin \alpha; \\ y &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi + R \cos \alpha; \\ z &= -a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t + u \sin \beta - R \cos \beta \sin \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Задаючи значення півосей  $a$  і  $b$ , можна отримати різні траєкторії переносного руху циліндра (еліпси, кола, прямолінійні відрізки), які можуть бути орієнтовані у вертикальних площинах у всіх можливих положеннях за допомогою відповідних значень кутів  $\varphi$  і  $\psi$ .

Залежності:  $\alpha = \alpha(t)$  і  $u = u(t)$ , які описують траєкторію відносного руху (ковзання частинки по поверхні циліндра), є невідомими функціями, які потрібно знайти. Після диференціювання рівнянь (6) по часу  $t$  знайдемо проєкції абсолютної швидкості частинки:

$$\begin{aligned} x' &= \omega(-a \cos \psi \sin \omega t + b \sin \psi \cos \omega t) \cos \varphi + u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \sin \alpha; \\ y' &= \omega(-a \cos \psi \sin \omega t + b \sin \psi \cos \omega t) \sin \varphi - R \alpha' \cos \alpha; \\ z' &= \omega(a \sin \psi \sin \omega t + b \cos \psi \cos \omega t) + u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Диференціювання виразів (8) дає проєкції абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned} x'' &= -\omega^2 (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi + u'' \cos \beta + R \sin \beta (\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha) \\ y'' &= -\omega^2 (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi - R (\alpha'' \sin \alpha + \alpha'^2 \cos \alpha) \\ z'' &= \omega^2 (a \sin \psi \cos \omega t - b \cos \psi \sin \omega t) + u'' \sin \beta - R \cos \beta (\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

Складемо рівняння руху у вигляді  $m\bar{w} = \bar{F}$ , де  $m$  – маса частинки,  $\bar{w}$  – вектор абсолютного прискорення,  $\bar{F}$  – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги  $mg$  ( $g=9,81 \text{ м/с}^2$ ), реакція  $N$  поверхні циліндра та сила тертя  $fN$  при ковзанні частинки по поверхні циліндра ( $f$  – коефіцієнт тертя). Всі сили потрібно спроекціювати на осі системи координат  $OXYZ$ .

Сила ваги спрямована вниз, отже її проекції запишуться:

$$\{0; 0; -mg\}. \quad (10)$$

Реакція  $N$  поверхні циліндра спрямована по нормалі до нього і визначається із векторного добутку двох векторів, дотичних до координатних ліній циліндра. Проекціями цих векторів є частинні похідні рівнянь (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= R \sin \beta \cos \alpha; & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= -R \sin \alpha; & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} &= -R \cos \beta \cos \alpha; \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= 0; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= \cos \beta \sin \alpha; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Після векторного множення векторів (11) і приведення отриманого вектора до одиничного проекції вектора нормалі до поверхні запишуться:

$$\{-\sin \beta \sin \alpha; -\cos \alpha; \cos \beta \sin \alpha\}. \quad (12)$$

Оскільки сила тертя спрямована по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну сторону, знайдемо проекції вектора дотичної. Вони визначаються першими похідними рівнянь (6):

$$x'_g = u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \cos \alpha; \quad y'_g = -R \alpha' \sin \alpha; \quad z'_g = u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha. \quad (13)$$

Геометрична сума складових (13) дасть величину швидкості ковзання частинки по поверхні циліндра у відносному русі:

$$V_g = \sqrt{x_g'^2 + y_g'^2 + z_g'^2} = \sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2} \quad (14)$$

Одиничний вектор дотичної в проекціях на осі системи  $OXYZ$  одержимо діленням проекцій (13) на величину вектора (14):

$$\left\{ \frac{u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \quad -\frac{R \alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \quad \frac{u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} \right\}. \quad (15)$$

Розпишемо векторне рівняння  $m\bar{w} = \bar{F}$  в проекціях на осі системи координат, взявши до уваги, що сила тертя  $fN$  спрямована вздовж одиничного вектора (15) в протилежну до нього сторону:

$$\begin{aligned} mx'' &= -N \sin \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\ my'' &= -N \cos \alpha + fN \frac{R \alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\ mz'' &= -mg + N \cos \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Підставимо в рівняння (16) другі похідні (проекції абсолютного прискорення) із (9) і отримаємо систему із трьох рівнянь:

$$\begin{aligned}
 m\left[-\omega^2(a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi + u'' \cos \beta + R \sin \beta (\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha)\right] = \\
 = -N \sin \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 m\left[-\omega^2(a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi - R (\alpha'' \sin \alpha + \alpha'^2 \cos \alpha)\right] = -N \cos \alpha + fN \frac{R \alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 m\left[\omega^2(a \sin \psi \cos \omega t - b \cos \psi \sin \omega t) + u'' \sin \beta - R \cos \beta (\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha)\right] = \\
 = -mg + N \cos \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

До системи (17) входить три невідомі функції:  $N=N(t)$ ,  $u=u(t)$  і  $\alpha=\alpha(t)$ . Розв'язуючи її відносно  $N$ ,  $u''$  і  $\alpha''$ , отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned}
 \alpha'' = -f \frac{\alpha'^3}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} R - K \omega^2 \left( \frac{\sin \alpha}{R} + f \frac{\alpha' \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} \right) \sin \varphi + \\
 + \left( \frac{\cos \alpha}{R} - f \frac{\alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} \right) (L \omega^2 \sin \beta \cos \varphi + M \cos \beta); \\
 u'' = -g \sin \beta + A b \omega^2 \sin \omega t + B a \omega^2 \cos \omega t - f \frac{u' P}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 N = mP.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Система (18) має доволі громіздкий вигляд не дивлячись на те, що деякі вирази для сталих і змінних ми замінили символами. Такими сталими є:

$$A = \cos \beta \sin \psi \cos \varphi + \sin \beta \cos \psi; \quad B = \cos \beta \cos \psi \cos \varphi - \sin \beta \sin \psi.$$

Наступними символами замінено змінні величини:

$$\begin{aligned}
 K = \sin \beta \cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha; \quad L = a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t; \\
 M = g + \omega^2 (a \sin \psi \cos \omega t - b \cos \psi \sin \omega t); \quad P = R \alpha'^2 + K L \omega^2 + M \cos \beta \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

Розв'язування системи рівнянь (17) відносно  $N$ ,  $u''$  і  $\alpha''$ , а також чисельне інтегрування системи диференціальних рівнянь (18) для знаходження первісних функцій стало можливим завдяки сучасним програмним продуктам. Розглянемо окремі випадки.

*Циліндр нерухомий* ( $\omega=0$ ). В цьому випадку величина кутів  $\varphi$  і  $\psi$  не має значення. Розглянемо випадок, коли твірні циліндра нахилені під кутом тертя до горизонтальної площини, тобто  $\beta=\arctg f$ . Система диференціальних рівнянь (18) і вираз реакції поверхні  $N$  приймають спрощений вигляд:

$$\begin{aligned}
 \alpha'' = \frac{g}{R} \cos \alpha \cos \beta - \frac{\alpha'}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} (R \alpha'^2 \operatorname{tg} \beta + g \sin \alpha \sin \beta); \\
 u'' = -g \sin \beta - \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} (R \alpha'^2 \operatorname{tg} \beta + g \sin \alpha \sin \beta); \\
 N = m(R \alpha'^2 + g \cos \beta \sin \alpha).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Для окремого випадку, коли початкове значення кута  $\alpha$  дорівнює  $90^\circ$ , тобто частинка знаходиться на нижній твірній циліндра, і  $\alpha'=0$ , тобто початкова кутова швидкість частинки в перпендикулярному до твірних циліндра напрямі відсутня, перше рівняння системи перетворюється в тотожність, тобто ліва і права частини дорівнюють нулю. У другому рівнянні права частина теж перетворюється в нуль при умові, що перед коренем беремо знак "мінус". Отже,  $u'=const$ , тобто швидкість переміщення частинки вздовж нижньої твірної буде сталою, чого і слід було чекати. Реакція поверхні теж буде сталою:  $N=mg \cos \beta$ . Такий же результат дає чисельне інтегрування системи (19) при початкових умовах  $\alpha=\pi/2$  і  $\alpha'=0$ .

Розглянемо випадок, коли  $\alpha=0$ ,  $\alpha'=0$  і  $u'=0$ , тобто початкова швидкість частинки дорівнює нулю і свій рух вона розпочинає із бічної твірної на рівні осі циліндра. В цьому випадку її рух має коливальний

характер, який згодом стабілізується і траєкторія наближається до нижньої твірної (рис. 2,а). Графічні ілюстрації наведені для коефіцієнта тертя  $f=0,3$ , тобто  $\beta=16,7^\circ$ ,  $R=0,2$  м, час руху  $t=2,5$  с.

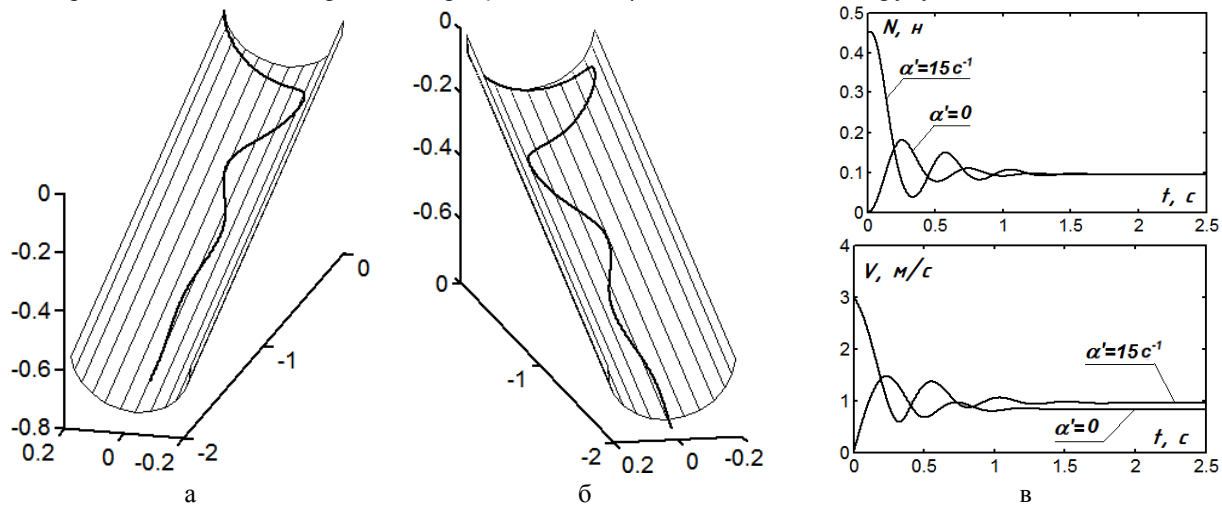


Рис. 2. Графічні ілюстрації до руху частинки по нерухомому циліндру, нахиленому під кутом тертя ( $\beta=\arctg f$ ): а) траєкторія частинки, яка починає рух із стану спокою; б) траєкторія частинки із початковою кутовою швидкістю  $\alpha'=15 c^{-1}$ ; в) графіки зміни реакції  $N$  поверхні та швидкості  $V$  руху частинки

В обох випадках швидкість  $V$  з часом стає сталою і траєкторія руху наближається до нижньої твірної циліндра, причому після стабілізації руху швидкість у другому випадку буде більшою. Реакція поверхні теж згодом стає сталою (на графіку зображеної зміну для частинки масою  $m=0,01$  кг).

Циліндр здійснює прямолінійні зворотно-поступальні коливання в горизонтальній площині ( $b=0$ ,  $\psi=0$ ). При такому коливанні висота точок циліндра не змінюється. Спочатку розглянемо відносний рух частинки по горизонтальному циліндру ( $\beta=0$ ), який коливається в поперечному напрямі ( $\varphi=90^\circ$ ). Очевидно, що траєкторією ковзання частинки буде дуга кола поперечного перерізу циліндра, по якому вона коливатиметься, змінюючи напрям руху. Таке коливання буде за умови, що на початку руху її відносна швидкість дорівнює нулю. Ми задамо початкову швидкість  $u'=2$  м/с вздовж осі циліндра. Чисельним інтегруванням системи (18) при  $R=0,2$  м,  $a=0,1$  м,  $\alpha=\pi/2$ ,  $\alpha'=0$ ,  $f=0,3$  і різних значеннях  $\omega$  ми отримали відносну траєкторію руху, зображену на рис. 3,а. Відрізком із двохсторонніми стрілками показаний напрям зворотно-поступальних коливань. Частинка починає ковзання із нижньої твірної циліндра і через певний час її рух стабілізується, після чого вона починає ковзати по колу. Із збільшенням частоти коливань частинка за один і той же час ( $t=2,5$ с) проходить більшу відстань вздовж осі циліндра. Це також видно із рис. 3,в, на якому зображений графік зміни відстані  $u$  вздовж осі циліндра. На рис. 3,б побудовано траєкторію відносного руху частинки за попередніми вихідними умовами окрім кута  $\varphi$ , який в даному випадку рівний  $45^\circ$ .

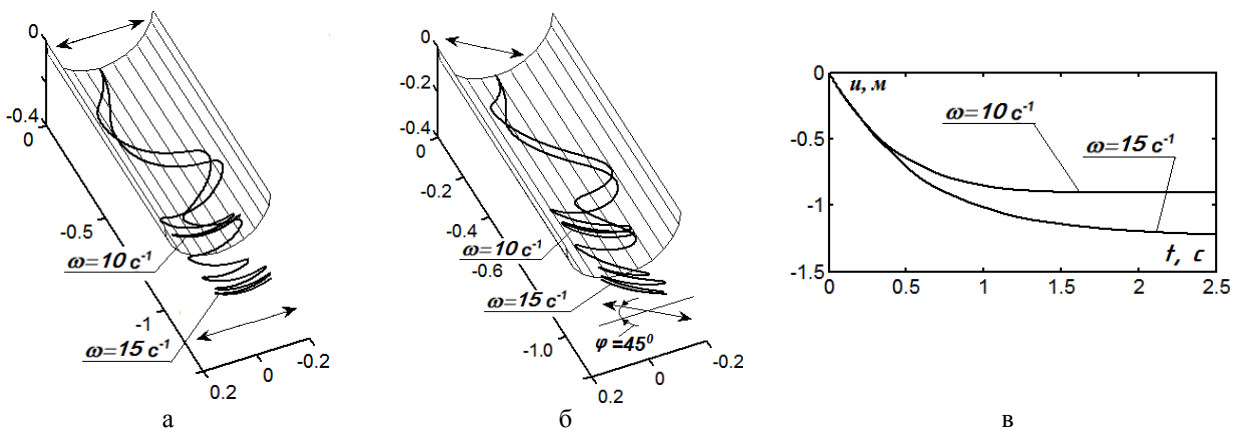


Рис. 3. Графічні ілюстрації до руху частинки по горизонтальному циліндру, який робить прямолінійні зворотно-поступальні коливання в горизонтальній площині при початковій швидкості  $u'=2$  м/с вздовж його осі: а) траєкторія частинки при  $\varphi=90^\circ$ ; б) траєкторія частинки при  $\varphi=45^\circ$ ; в) графіки зміни відстані  $u$  переміщення частинки вздовж осі циліндра



Розглянемо відносний рух частинки при поперечних прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях циліндра при заданому куті  $\beta$  його нахилу до горизонтальної площини. Як відомо, по нерухомій площині частинка не може почати рух із стану спокою, якщо кут її нахилу менший кута тертя. Це ж саме стосується циліндра, якщо частинка знаходиться на нижній твірній (тобто при  $\alpha=\pi/2$ ). Однак картина змінюється при коливальному русі циліндра. Навіть при незначних кутах нахилу циліндра, який коливається, частинка починає ковзати по його поверхні. На рис. 4 відносні траєкторії ковзання частинки побудовані при  $\beta=2^\circ$ ,  $R=0,2$  м,  $a=0,1$  м,  $\alpha=\pi/2$ ,  $\alpha'=0$ ,  $u'=0$ ,  $f=0,3$ .

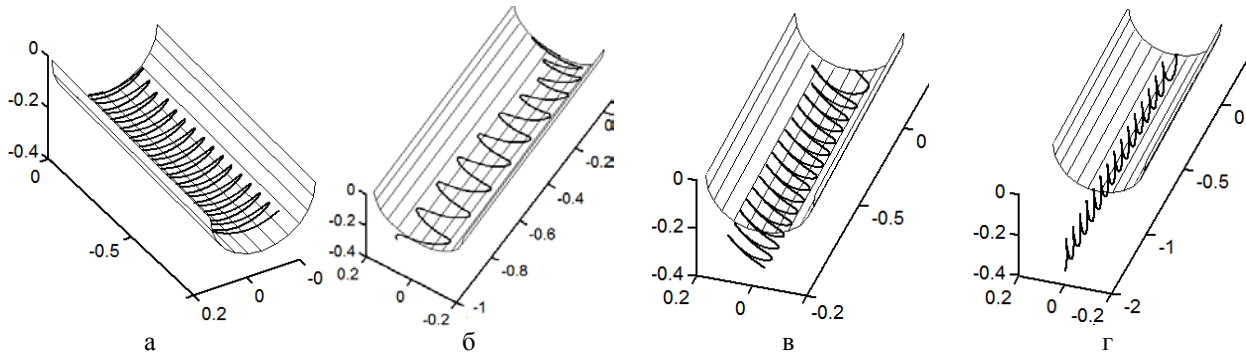


Рис. 4. Відносні траєкторії ковзання частинки по похилому циліндру ( $\beta=2^\circ$ ):  
 а)  $\omega=10$  с<sup>-1</sup>,  $\varphi=90^\circ$ ,  $t=10$  с;  
 б)  $\omega=20$  с<sup>-1</sup>,  $\varphi=90^\circ$ ,  $t=3$  с;  
 в)  $\omega=10$  с<sup>-1</sup>,  $\varphi=45^\circ$ ,  $t=10$  с;  
 г)  $\omega=10$  с<sup>-1</sup>,  $\varphi=15^\circ$ ,  $t=10$  с

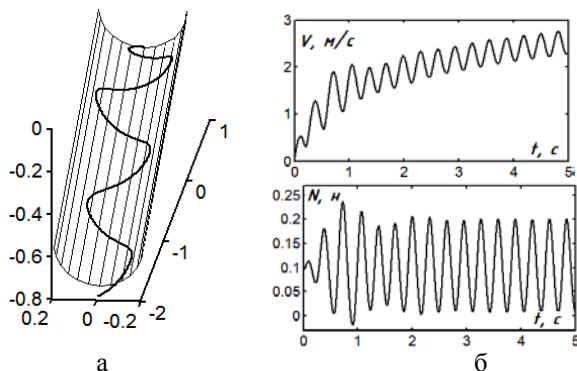


Рис. 5. Графічні ілюстрації до руху частинки по циліндру, нахиленому під кутом тертя ( $\beta=\arctg f$ ), який здійснює зворотно-поступальні коливання:  
 а) траєкторія частинки, яка починає рух із стану спокою;  
 б) графіки зміни реакції  $N$  поверхні та швидкості  $V$  відносного руху частинки

Порівнюючи рисунки 4,а і 4,б, можна дійти висновку, що збільшення частоти коливань призводить до збільшення швидкості пересування частинки вниз по циліндру. Якщо циліндр коливати не в поперечному напрямі, а під певним кутом до нього, то траєкторія видозмінюється (рис. 4,в,г). Очевидно, що при  $\varphi=0$  коливання частинки будуть відбуватися вздовж прямої лінії – нижньої твірної циліндра.

З'ясуємо, як ковзає частинка по циліндру, нахиленому під кутом тертя до горизонтальної площини. При відсутності коливань після стабілізації руху частинка рухається по нижній твірній із сталою швидкістю. Якщо ж надати циліндру зворотно-поступальних прямолінійних коливань в поперечному напрямі, то траєкторією руху частинки буде просторова крива, подібна до синусоїди із періодом, що з часом зростає (рис. 5,а). Із графіка зміни швидкості (рис. 5,б) видно, що вона

має періодичний характер, але в цілому зростає. Дослідження показали, що це зростання вздовж осі циліндра має лінійний характер. Із графіку зміни реакції  $N$  бачимо, що тиск частинки на поверхню у найвищих точках траєкторії близький до нуля.

Циліндр здійснює прямолінійні зворотно-поступальні коливання під кутом  $\psi$  до горизонтальної площини ( $b=0$ ,  $\psi \neq 0$ ). Відносний рух частинки при поперечних коливаннях циліндра у горизонтальній площині ( $\varphi=90^\circ$ ) показано на рис. 4,а. При зменшенні кута  $\varphi$  зростає довжина переміщення частинки вздовж осі (рис. 4,в,г). Очевидно, що шлях переміщення буде максимальний при  $\varphi=0$ . З'ясуємо, як впливає кут  $\psi$  на величину шляху переміщення. Для цього візьмемо всі параметри коливального руху, для яких побудовано траєкторію на рис. 4,а, і додатково будемо давати певні значення кутові  $\psi$ . При такому коливанні висота точок циліндра буде змінюватися. На рис. 6,а на вигляді зверху зображено відносні траєкторії руху частинки при різних значеннях кута  $\psi$ . При  $\psi=90^\circ$  (тобто при вертикальних коливаннях) частинка взагалі припиняє рух. На рис. 6,б побудовано траєкторії ковзання частинки для кута  $\varphi=45^\circ$  і різних значень кута  $\psi$  протягом часу  $t=7$  с. На відміну від кута  $\varphi$ , кут  $\psi$  по іншому впливає на переміщення частинки. При його зростанні від нуля швидкість переміщення частинки теж зростає, потім досягає найбільшого значення приблизно при  $\psi=35^\circ$ , а потім починає зменшуватися. Це видно із величини переміщення частинки вздовж твірних циліндра (рис. 6,б) при різних значеннях кута  $\psi$ .

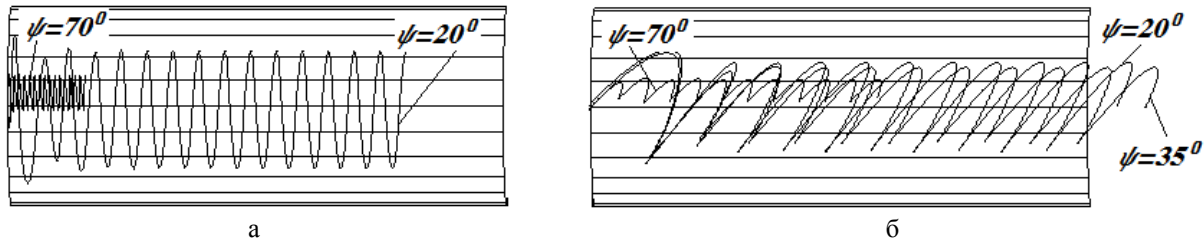


Рис. 6. Відносні траєкторії ковзання частинки по похилому циліндру ( $\beta=2^\circ$ ) при різних поєднаннях кутів  $\varphi$  і  $\psi$ : а)  $\varphi=90^\circ, t=10$  с; б)  $\varphi=45^\circ, t=7$  с

Загальний випадок коливання циліндра (всі його точки описують у вертикальних паралельних площинах криволінійну траєкторію – коло або еліпс). Якщо  $a=b$ , то траєкторією коливань точок циліндра є коло. Розглянемо цей випадок, оскільки він є простий для технічної реалізації. Візьмемо похилий циліндр із кутом нахилу, як і в попередніх випадках,  $\beta=2^\circ$ . Величина кута  $\psi$  при цьому не має значення. Спочатку розглянемо коливання у поперечному по відношенню до циліндра напрямі (при  $\varphi=90^\circ$ ). На рис. 7,а побудовані траєкторії ковзання частинки для різних значень кута  $\varphi$  при  $\beta=2^\circ, R=0,2$  м,  $\omega=10$   $c^{-1}$ ,  $a=b=0,1$  м,  $\alpha=\pi/2, a'=0, u'=0, f=0,3, t=10$  с. Після стабілізації рух частинки починає описувати на поверхні гвинтову лінію, рухаючись при цьому вниз (тобто рух по пів циліндру неможливий). Однак при  $\varphi=45^\circ$  проявляється несподіваний ефект: частинка починає рухатися вгору не виходячи за межі пів циліндра. Цей ефект стає ще більшим при  $\varphi=15^\circ$ .

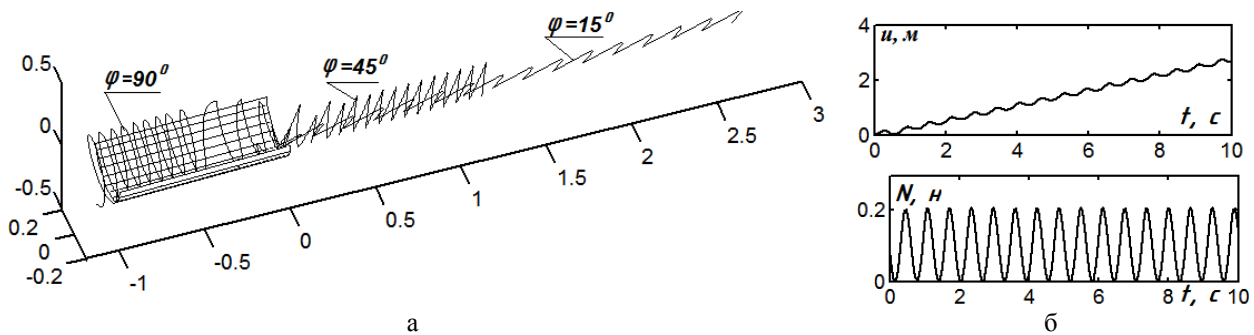


Рис. 7. Графічні ілюстрації до руху частинки по циліндру, точки якого описують кола, нахиленому під кутом  $\beta=2^\circ$ : а) траєкторії частинки для різних значень кута  $\varphi$ ; б) графіки зміни відстані  $u$  та реакції  $N$  поверхні для  $\varphi=15^\circ$

З графіка зміни відстані  $u$  (рис. 7,б) можна зробити висновок, що відстань  $u$  зростає в цілому за лінійним законом, хоча на окремих ділянках вона зменшується. Це означає, що частинка при підйомі вгору по циліндру здійснює коливальний рух, що видно із траєкторії. При  $\varphi=0$  цей ефект, очевидно, іще підсилиться, але коливання частинки із форми траєкторії побачити не вдасться, оскільки вона збігатиметься із нижньою прямолінійною твірною циліндра.

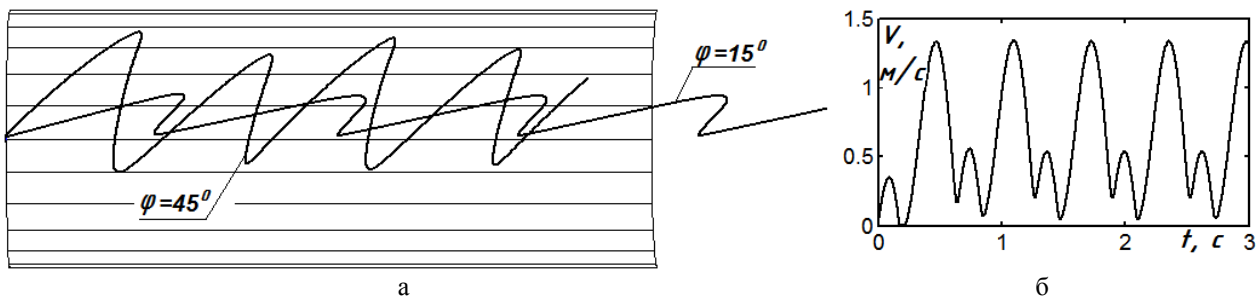


Рис. 8. Графічні ілюстрації до руху частинки по циліндру, точки якого рухаються по колу із кутовою швидкістю  $\omega=10$   $c^{-1}$ , нахиленому під кутом  $\beta=2^\circ$ : а) траєкторії частинки для різних значень кута  $\varphi$ ; б) графік зміни відносної швидкості частинки для  $\varphi=15^\circ$

Можна допустити, що при поєднанні певного співвідношення між півосями  $a$  і  $b$ , тобто при русі точок циліндра по еліпсу, та певного значення кута  $\psi$  цей ефект можна підсилити. Однак дослідження показали, що для підйому частинок вгору найкращою траєкторією переносного руху циліндра є коло. При цьому має значення напрям кутової швидкості  $\omega$ . Якщо для  $\omega$  надати від'ємного значення, що означає зміну напрямку

обертання точок циліндра по колах, то частинки при всіх попередніх параметрах будуть рухатися не вгору по циліндру, а вниз, причому швидкість їх переміщення буде більшою, ніж вгору. На рис. 8,а побудовано траєкторії переміщення частинки вниз по циліндру при різних значеннях кута  $\varphi$  (вигляд зверху). Параметри ті ж самі, що і в попередньому випадку, окрім кутової швидкості  $\omega = -10 \text{ c}^{-1}$ , і часу руху  $t = 3 \text{ с}$ . Із рис. 8,а видно, що траєкторія зміщена відносно осі симетрії циліндра (це добре видно на прикладі траєкторії для  $\varphi = 15^\circ$ ). На рис. 8,б побудовано графік зміни відносної швидкості частинки. В певний момент часу (коли частинка знаходиться в самому нижньому положенні на циліндрі) її швидкість наближається до нуля.

#### Висновки

Складені диференціальні рівняння дозволяють розв'язувати задачі на знаходження кінематичних параметрів руху частинки по циліндру, який здійснює поступальні коливання у вертикальній площині. Циліндр може бути розташований горизонтально або під заданим кутом до горизонтальної площини. Побудовано траєкторії для різних випадків зворотно-поступальних коливань циліндра у прямолінійному напрямку. Для поступальних похилого коливань похилого циліндра, коли його точки описують кола, може бути випадок, коли частинки при русі по циліндру піднімаються вгору. При зміні напрямку обертання точок циліндра по колах частинки будуть опускатися вниз, причому швидкість опускання буде більшою від швидкості підйому.

#### Список використаної літератури

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – Киев: Изд-во Укр. акад. сельск. наук, 1960. – 283 с.
2. Гортинский В.В. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях / В.В. Гортинский, А.Б. Демский, М.А. Борискин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Колос, 1980. – 304 с.
3. Блехман И.И. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. – М.: Наука, 1964. – 410 с.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика / И.И. Блехман. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
5. Заика П.М. Об одном семействе регулярных режимов движения частицы по колеблющейся плоскости вибрационной зерноочистительной машины / П.М. Заика // Теория механизмов и машин. – Х.: Изв. ХГУ им. М. Горького, 1966. – Вып. 1. – С. 28-33.
6. Пилипака С.Ф. Рух частинки по поверхні циліндра, всі точки якого описують кола в горизонтальних площинах / С.Ф. Пилипака, М.Б. Клендій // Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія "Механізація та автоматизація виробничих процесів". – 2016. – Вип. 10/3 (31). – С. 195-201.
7. Pylypaka S.F. Particle motion over the surface of a rotary vertical axis helicoid / S.F. Pylypaka, M.B. Klendiy, O.M. Klendiy // INMATEH – Agricultural Engineering. – Bucharest: INMA, 2017. – Vol. 51, № 1 – P. 15 – 28.

УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, М.М. МУКВИЧ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

**УТВОРЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ УЯВНОЇ  
ЦИКЛОЇДИ, ЗАДАНОЇ КОМПЛЕКСНИМ НАТУРАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ**

*Здійснено аналітичний опис ізотропної лінії та мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної. Для знаходження параметричних рівнянь ізотропної лінії використано комплексне натуральне рівняння циклоїди. Аналітичний опис мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з ізотропними лініями сітки переносу. Доведено твердження про достатню умову утворення мінімальних поверхонь, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній.*

*Ключові слова: мінімальна поверхня, ізотропна лінія, циклоїда, ізометрична сітка координатних ліній, середня кривина поверхні.*

С.Ф. ПИЛИПАКА, Н.Н. МУКВИЧ

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

**ОБРАЗОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ МНИМОЙ ЦИКЛОИДЫ,  
ЗАДАННОЙ КОМПЛЕКСНЫМ НАТУРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ**

*Осуществлено аналитическое описание изотропной линии и минимальных поверхностей с помощью функций комплексного переменного. Для нахождения параметрических уравнений изотропной линии использовано комплексное натуральное уравнение циклоиды. Аналитическое описание минимальных поверхностей осуществляется в комплексном пространстве с изотропными линиями сети переноса. Доказано утверждение о достаточном условии образования минимальных поверхностей, отнесённых к изометрической сетке координатных линий.*

*Ключевые слова: минимальная поверхность, изотропная линия, циклоида, изометрическая сетка координатных линий, средняя кривизна поверхности, изотропная кривая.*

S.F. PYLYPAKA, M.M. MUKVICH

National University Of Life And Environmental Sciences Of Ukraine

**CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES BY THE IMAGINARY CYCLOID GIVEN BY THE  
COMPLEX NATURAL EQUATION**

*The analytical description of the isotropic line and the minimal surfaces with the help of complex variable functions is carried out. To find the parametric equations of the isotropic line, the complex natural equation of the cycloid is used. The analytical description of the minimal surfaces is carried out in a complex space with isotropic lines of the transfer grid. The theorem on a sufficient condition for the formation of minimal surfaces, assigned to the isometric grid of coordinate lines, is proved.*

*Keywords: minimal surface, isotropic line, cycloid, isometric grid of the coordinate lines, mean curvature of a surface.*

**Постановка проблеми**

Використання в CAD системах геометричних моделей, описаних мінімальними поверхнями, зумовлене перевагами практичного змісту при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. Геометрична форма мінімальної поверхні, середня кривина  $H$  у всіх точках якої дорівнює нулю, забезпечує рівномірний розподіл зусиль в оболонці та додаткову жорсткість. Напруженість у кожній точці мінімальної поверхні є сталою величиною, тому її форма залежить тільки від форми контуру, через який проведено мінімальну поверхню [1, с. 43]. Рівність нулю величини  $H$  середньої кривини мінімальної поверхні є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром).

Задаючи мінімальну поверхню функцією  $z = z(x; y)$ , Ж. Лагранж (J. Lagrange) одним із перших зробив висновок, що функція  $z = z(x; y)$  повинна задовольняти диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа [2, С. 683] в частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується. Тому одним із сучасних напрямків дослідження аналітичного опису мінімальних поверхонь є удосконалення чисельних методів розв'язування диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа [3, 4]. Відомими є дослідження з геометричного моделювання деформованого листа параболічного рефлектора, що приймає форму, близьку до мінімальної

поверхні [5]. Періодичні мінімальні поверхні використовуються для побудови пористої архітектури полімерів [6]. При дослідженні геометрії архітектурних конструкцій для утворення точкового каркасу мінімальних поверхонь найчастіше використовують варіаційні [3, 4, 7] та кінцево-різницеві методи [1].

Використання в САД системах геометричних моделей, описаних мінімальними поверхнями, потребує спрощення аналітичного опису мінімальних поверхонь та отримання їх параметричних рівнянь. Проблема аналітичного опису мінімальних поверхонь, починаючи з робіт К. Вейерштрасса, С.Лі, Б. Рімана, Г. Шварца, розв'язується за допомогою методів функцій комплексної змінної [2, С. 685].

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти параметричні рівняння ізотропних ліній нульової довжини [8, С. 144]. У роботах [9, 10] тільки в окремих випадках було знайдено параметричні рівняння ізотропних ліній за формулами Шварца та Вейерштрасса і побудовано відповідні мінімальні поверхні. Моделювання просторових ізотропних кривих за допомогою кватерніонів у просторі  $R^4$ , розглянуто у роботі [11]. Ряд робіт [12, 13] авторів даної статті присвячено задачі аналітичного опису ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній. У дослідженнях [14] здійснено аналітичний опис ізотропної лінії за допомогою циклоїди, заданої натуральним рівнянням із дійсною функцією кривини. Тому потребує дослідження можливість знаходження параметричних рівнянь ізотропної лінії за допомогою уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням.

#### Формулювання мети дослідження

Знайти аналітичний опис ізотропної лінії за допомогою уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням. На основі вказаної ізотропної лінії побудувати мінімальну поверхню та приєднану мінімальну поверхню. Довести твердження про достатню умову утворення мінімальних поверхонь, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Параметричні рівняння плоскої кривої, заданої натуральним рівнянням  $k = k(s)$ , де  $s$  – довжина дуги кривої, мають вигляд [15, С. 48]:

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos \left[ \int_0^s k(s) ds \right] ds; \quad y(s) = y(0) + \int_0^s \sin \left[ \int_0^s k(s) ds \right] ds. \quad (1)$$

Розглянемо уявну циклоїду, задану комплексним натуральним рівнянням:

$$k(s) = \frac{i}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \quad (2)$$

де  $i$  – уявна одиниця,  $a$  – параметр циклоїди,  $a > 0$ .

Підставимо (2) в (1), тоді при виконанні умов  $x(0) = 0$  і  $y(0) = 0$ , отримаємо параметричні рівняння уявної циклоїди із комплексним натуральним рівнянням (2):

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{2} \left[ s \cdot \operatorname{ch} \left( \arcsin \frac{s}{4a} \right) + \sqrt{16a^2 - s^2} \cdot \operatorname{sh} \left( \arcsin \frac{s}{4a} \right) \right]; \\ y(s) &= \frac{1}{2} \cdot i \cdot \left[ s \cdot \operatorname{sh} \left( \arcsin \frac{s}{4a} \right) + \sqrt{16a^2 - s^2} \cdot \operatorname{ch} \left( \arcsin \frac{s}{4a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Із умови [8, С. 14]  $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 0$  визначимо вираз  $z(s) = i \cdot s$  та запишемо параметричні рівняння просторової ізотропної лінії:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{2} \left[ s \cdot \operatorname{ch} \left( \arcsin \frac{s}{4a} \right) + \sqrt{16a^2 - s^2} \cdot \operatorname{sh} \left( \arcsin \frac{s}{4a} \right) \right]; \\ y(s) &= \frac{1}{2} \cdot i \cdot \left[ s \cdot \operatorname{sh} \left( \arcsin \frac{s}{4a} \right) + \sqrt{16a^2 - s^2} \cdot \operatorname{ch} \left( \arcsin \frac{s}{4a} \right) \right]; \\ z(s) &= i \cdot s. \end{aligned} \quad (4)$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні необхідно в параметричних рівняннях ізотропної кривої (4) увести заміну [12, 13]:  $s = u + i \cdot v$ . Тоді отримаємо параметричні рівняння мінімальної поверхні  $X(u, v)$ ,  $Y(u, v)$ ,  $Z(u, v)$ :

$$X(u, v) = \operatorname{Re}\{x(u + i \cdot v)\}; \quad Y(u, v) = \operatorname{Re}\{y(u + i \cdot v)\}; \quad Z(u, v) = \operatorname{Re}\{i \cdot (u + i \cdot v)\} \quad (5)$$

та приєднаної мінімальної поверхні  $X^*(u, v)$ ,  $Y^*(u, v)$ ,  $Z^*(u, v)$ :

$$X^*(u, v) = \text{Im}\{x(u + i \cdot v)\}; \quad Y^*(u, v) = \text{Im}\{y(u + i \cdot v)\}; \quad Z^*(u, v) = \text{Im}\{i \cdot (u + i \cdot v)\}. \quad (6)$$

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (4), згідно (5), (6), отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \cos \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left( -\frac{v}{4a} + m \cdot \cos \alpha \right)^2 + \left( \frac{u}{4a} + m \cdot \sin \alpha \right)^2 \right) \right] \cdot \left( \frac{u}{2} \cdot \text{ch } \beta + \frac{a \cdot m}{8} \cdot \cos \alpha \cdot \text{sh } \beta \right) + \\ &+ \sin \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left( -\frac{v}{4a} + m \cdot \cos \alpha \right)^2 + \left( \frac{u}{4a} + m \cdot \sin \alpha \right)^2 \right) \right] \cdot \left( \frac{v}{2} \cdot \text{sh } \beta + \frac{a \cdot m}{8} \cdot \sin \alpha \cdot \text{ch } \beta \right); \\ Y(u, v) &= \cos \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left( -\frac{v}{4a} + m \cdot \cos \alpha \right)^2 + \left( \frac{u}{4a} + m \cdot \sin \alpha \right)^2 \right) \right] \cdot \left( -\frac{v}{2} \cdot \text{sh } \beta - \frac{a \cdot m}{8} \cdot \sin \alpha \cdot \text{ch } \beta \right) + \\ &+ \sin \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left( -\frac{v}{4a} + m \cdot \cos \alpha \right)^2 + \left( \frac{u}{4a} + m \cdot \sin \alpha \right)^2 \right) \right] \cdot \left( \frac{u}{2} \cdot \text{ch } \beta + \frac{a \cdot m}{8} \cdot \cos \alpha \cdot \text{sh } \beta \right); \end{aligned} \quad (7)$$

$$Z(u, v) = -v,$$

де

$$\begin{aligned} m = m(u, v) &= \left( \frac{u^2 v^2}{64a^2} + \left( 1 - \frac{u^2 - v^2}{16a^2} \right) \right)^{\frac{1}{4}}; \quad \alpha = \alpha(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \text{arctg} \left( \frac{2uv}{u^2 - v^2 - 16a^2} \right); \\ \beta = \beta(u, v) &= \text{arctg} \left[ \frac{\frac{u}{4a} - \left( \frac{u^2 v^2}{64a^2} + \left( 1 - \frac{u^2 - v^2}{16a^2} \right) \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sin \left( \frac{1}{2} \text{arctg} \left( \frac{2uv}{u^2 - v^2 - 16a^2} \right) \right)}{-\frac{v}{4a} + \left( \frac{u^2 v^2}{64a^2} + \left( 1 - \frac{u^2 - v^2}{16a^2} \right) \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \cos \left( \frac{1}{2} \text{arctg} \left( \frac{2uv}{u^2 - v^2 - 16a^2} \right) \right)} \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned} X^*(u, v) &= \cos \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left( -\frac{v}{4a} + m \cdot \cos \alpha \right)^2 + \left( \frac{u}{4a} + m \cdot \sin \alpha \right)^2 \right) \right] \cdot \left( \frac{v}{2} \cdot \text{ch } \beta + \frac{a \cdot m}{8} \cdot \sin \alpha \cdot \text{sh } \beta \right) - \\ &- \sin \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left( -\frac{v}{4a} + m \cdot \cos \alpha \right)^2 + \left( \frac{u}{4a} + m \cdot \sin \alpha \right)^2 \right) \right] \cdot \left( \frac{u}{2} \cdot \text{sh } \beta + \frac{a \cdot m}{8} \cdot \cos \alpha \cdot \text{ch } \beta \right); \\ Y^*(u, v) &= \cos \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left( -\frac{v}{4a} + m \cdot \cos \alpha \right)^2 + \left( \frac{u}{4a} + m \cdot \sin \alpha \right)^2 \right) \right] \cdot \left( \frac{u}{2} \cdot \text{sh } \beta + \frac{a \cdot m}{8} \cdot \cos \alpha \cdot \text{ch } \beta \right) + \\ &+ \sin \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left( -\frac{v}{4a} + m \cdot \cos \alpha \right)^2 + \left( \frac{u}{4a} + m \cdot \sin \alpha \right)^2 \right) \right] \cdot \left( \frac{v}{2} \cdot \text{ch } \beta + \frac{a \cdot m}{8} \cdot \sin \alpha \cdot \text{sh } \beta \right); \end{aligned} \quad (9)$$

$$Z^*(u, v) = u.$$

У параметричних рівняннях (9) приєднаної мінімальної поверхні вирази  $m = m(u, v)$ ;  $\alpha = \alpha(u, v)$ ;  $\beta = \beta(u, v)$  визначаються із рівностей (8).

Вирази коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм мінімальної поверхні (7) та приєднаної мінімальної поверхні (9) є громіздкими, тому у даній статті не наводяться. У середовищі математичного процесора Wolfram Mathematica авторами статті досліджено, що коефіцієнти першої та другої квадратичних форм мінімальних поверхонь (7) та (9), перетворюють вираз середньої кривини  $H$ , для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

На рис.1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (7) і (9) відповідно при  $\alpha = 1$ ;  $u \in [-\pi; \dots \pi]$ ;  $v \in [-2; \dots 4]$ . Слід зазначити, що утворена гвинтова мінімальна поверхня (7) має подібні властивості кривини із приєднаною мінімальною поверхнею, побудованою у дослідженні [14] за допомогою циклоїди, заданої натуральним рівнянням із дійсною функцією кривини.

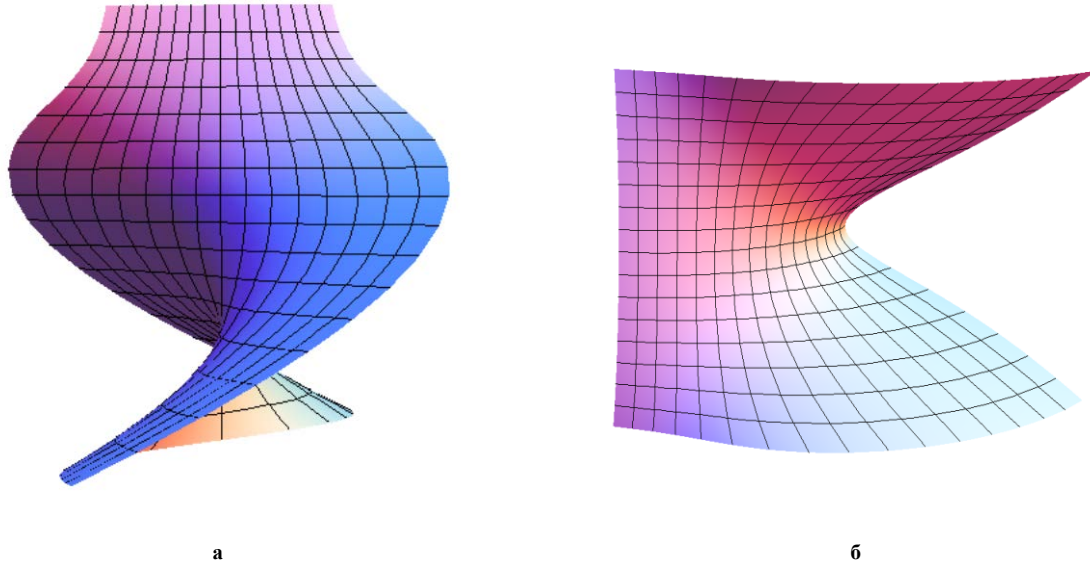


Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропної лінії (4):  
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (7);  
б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (9).

Параметричні рівняння мінімальних поверхонь часто мають громіздкий вигляд, що ускладнює знаходження коефіцієнтів другої квадратичної форми і знаходження виразу  $H$  середньої кривини поверхні. Тому корисним для вказаних досліджень є запропоноване твердження, яке має нескладне доведення.

**Твердження.**

Поверхня, задана у вигляді  $\bar{R} = \bar{R}(u, v)$ , яка віднесена до ізометричної сітки координатних ліній, є мінімальною, якщо виконується рівність:

$$\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial v^2} = \bar{0}. \tag{10}$$

**Доведення.**

Нехай поверхню, яку задано у вигляді  $\bar{R} = \bar{R}(u, v)$ , віднесено до ізометричної сітки координатних ліній, тобто для коефіцієнтів першої квадратичної форми виконуються рівності [8]:  $E = G$ ;  $F = 0$ . Тоді вираз середньої кривини поверхні дорівнює [8, 15]:

$$H = \frac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)} = \frac{E \cdot N + G \cdot L}{2 \cdot E \cdot G}.$$

Враховуючи останню рівність та рівність  $E = G$ , легко зробити висновок, що поверхня, віднесена до ізометричної сітки координатних ліній є мінімальною, тобто  $H = 0$ , якщо  $L + N = 0$ .

Коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні  $\bar{R} = \bar{R}(u, v)$  дорівнюють [15]:

$$L = \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial u^2} \cdot \bar{n}; N = \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial v^2} \cdot \bar{n}, \text{ де } \bar{n} - \text{вектор нормалі до вказаної поверхні. Тоді рівність } H = L + N = 0$$

виконується, якщо  $\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial v^2} = \bar{0}$ . Твердження доведено.



**Висновки**

Використовуючи параметричні рівняння уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням, можна знайти аналітичний опис ізотропної лінії. На основі вказаної ізотропної лінії у комплексному просторі знайдено аналітичний опис мінімальних поверхонь. Доведено твердження про достатню умову утворення мінімальних поверхонь, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній, без знаходження громіздких виразів коефіцієнтів другої квадратичної форми поверхонь.

**Список використаної літератури**

1. Михайленко В.Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв. – Киев: Будівельник, 1978. – 112 с.
2. Математическая энциклопедия / [гл.ред. И.М. Виноградов]. – Т.3.– М.: Изд-во "Советская энциклопедия", 1982.– С. 683–690.
3. Пульпинский Я. С. Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Я.С. Пульпинский. – Пенза: Пензенский гос. университет архитектуры и строительства, 2006. – 20 с.
4. Клячин А.А. О сходимости полиномиальных приближённых решений уравнения минимальной поверхности / А.А. Клячин, И. В. Трухляева // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – №1. – С. 72–83.
5. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала / М. С. Бухтяк // Вестн. Томского гос. ун-та. Серия: математика и механика. – 2017. – №45. – С. 5–24.
6. Zhixing Lin, Shaohua Liu, Wenting Mao, Hao Tian, Nan Wang, Ning Zhang, Feng Tian, Lu Han, Xinliang Feng, Yiyong Mai: Tunable Self-Assembly of Diblock Copolymers into Colloidal Particles with Triply Periodic Minimal Surfaces. *Angewandte Chemie*. 129(25), 7241 – 7246 (2017). DOI: 10.1002/ange.201702591.
7. Абдюшев А.А. Проектирование неполигоных оболочек минимальной поверхности / А.А. Абдюшев, И.Х. Мифтахутдинов, П.П. Осипов // Известия КазГАСУ. – 2009. – №2(12). – С. 86-92.
8. Фиников С. П. Теория поверхностей / С. П. Фиников. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
9. Пилипака С.Ф. Мінімальні поверхні, отримані з ізотропних кривих / С.Ф. Пилипака, Е.О. Чернишова // Збірник наукових праць КНУДТ (спецвипуск): Доповіді третьої кримської науково-практичної конференції "Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн". – К.: ДОП КНУДТ, 2006. – С. 40–45.
10. Пилипака С.Ф. Конструювання мінімальної поверхні гвинтовим рухом просторової кривої / С.Ф. Пилипака, І.О. Коровіна // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т. 39. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – С.30–36.
11. Аушева, Н.М. Моделювання сім'ї ізотропних просторових  $PH$  –кривих на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною / Н.М. Аушева // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– №7. – С. 3–9.
12. Муквич М.М. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди / М.М. Муквич // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: Видавництво ХНТУ, 2016.– №3(58). – С. 519–523.
13. Пилипака С.Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні уявного конуса / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017.– №9. – С. 114–118.
14. Пилипака С.Ф. Аналітичний опис мінімальних поверхонь, утворених за допомогою циклоїди, заданої функціями натурального параметра / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Збірник тез доповідей XII Міжнародної науково-практичної конференції "Обухівські читання" (21 березня 2017 року) / Національний університет біоресурсів і природокористування України. – К., 2017. – С. 10–15. Режим доступу: <https://nubip.edu.ua/node/26574>
15. Милинский В. И. Дифференциальная геометрия / В. И. Милинский. – Л.: КУБУЧ, 1934. – 332 с.



УДК 514.18

О.М. СОБОЛЬ, С.Я. КРАВЦІВ  
Національний університет цивільного захисту України**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ІНТЕГРАЛЬНИМ ПОЖЕЖНИМ  
РИЗИКОМ ТА ЇЇ ОСОБЛИВОСТІ**

*В даній роботі наведено існуючий підхід до визначення основних інтегральних пожежних ризиків. Виявлено основні фактори, що впливають на рівень ризику для людини загинути від пожежі за одиницю часу, та побудовано математичну модель управління даним інтегральним пожежним ризиком. Досліджено особливості розробленої математичної моделі.*

*Ключові слова: математична модель, інтегральний пожежний ризик, управління ризиком.*

А.Н. СОБОЛЬ, С.Я. КРАВЦИВ  
Национальный университет гражданской защиты Украины**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПОЖАРНЫМ РИСКОМ И ЕЕ  
ОСОБЕННОСТИ**

*В данной работе приведен существующий подход к определению основных интегральных пожарных рисков. Выявлены факторы, влияющие на уровень риска для человека погибнуть от пожара за единицу времени, и построена математическая модель управления данным интегральным пожарным риском. Исследованы особенности разработанной математической модели.*

*Ключевые слова: математическая модель, интегральный пожарный риск, управление риском.*

О.М. SOBOL, S. Ya. KRAVTSIV  
National university of civil protection of Ukraine**MATHEMATICAL MODEL OF MANAGEMENT OF INTEGRAL FIRE RISK AND ITS FEATURES**

*In this paper the existing approach to definition of main integral fire risks was given. The factors influenced on the level of risk for a person to die from a fire per unit of time were revealed. The mathematical model of management of this integral fire risk was built. The features of the mathematical model were researched.*

*Keywords: mathematical model, integral fire risk, risk management.*

**Постановка проблеми**

Перш за все, розглянемо такі поняття, як "пожежний ризик" та "управління пожежним ризиком". Так, у монографії академіка М.М. Брушлинського [1] зазначено, що пожежний ризик – це кількісна характеристика можливості реалізації пожежної небезпеки (та її наслідків), що вимірюється, як правило, у відповідних одиницях. Управління пожежним ризиком являє собою розробку та реалізацію комплексу заходів (інженерно-технічного, економічного, соціального та іншого характеру), які дозволять зменшити значення даного пожежного ризику до припустимого (прийнятного) рівня. Що стосується інтегральних ризиків, то вони характеризують комплекс небезпек, які загрожують таким великим і складним об'єктам захисту, як міста, регіони, країни, тобто враховують всі локальні ризики, що притаманні даним системам.

Як правило, алгоритми управління ризиками мають такі складові:

- виявлення небезпек, що загрожують об'єкту захисту;
- обчислення ризиків, які характеризують виявлені небезпеки;
- управління ризиками;
- досягнення безпеки об'єкта захисту.

На теперішній час відбувається процес реформування Державної служби України з надзвичайних ситуацій [2], мета якого – забезпечення належного рівня безпеки життєдіяльності населення, його захисту від надзвичайних ситуацій, пожеж та інших небезпечних подій. Результатом проведення реформ має бути забезпечення належного рівня безпеки життєдіяльності населення, захисту суб'єктів господарювання і територій від загрози виникнення надзвичайних ситуацій, створення ефективної сучасної європейської системи запобігання виникненню надзвичайних ситуацій та профілактики пожеж, удосконалення системи реагування на пожежі, надзвичайні ситуації та інші небезпечні події, зменшення збитків національної економіки та населення у разі виникнення пожеж, надзвичайних ситуацій, небезпечних гідрометеорологічних явищ, створення оптимальної системи управління єдиною державною системою цивільного захисту та підвищення ефективності її функціонування. При цьому важлива роль відводиться застосуванню саме ризик-орієнтованого підходу для обґрунтування заходів у сфері цивільного захисту.

Разом з тим, існує актуальна науково-практична проблема, яка полягає у розробці теоретичних основ управління техногенними, зокрема пожежними, ризиками, оскільки у сучасній літературі практично відсутні наукові дослідження, в яких чітко визначалися б важелі, які впливають на рівень того чи іншого ризику, та були побудовані моделі управління відповідними ризиками.

Однією із задач, розв'язання якої сприятиме вирішенню зазначеної проблеми, є побудова математичної моделі та методів управління інтегральним пожежним ризиком, що дозволить здійснити обґрунтування заходів стосовно нормування ресурсів підсистеми реагування на надзвичайні ситуації (пожежі) на регіональному рівні.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [1] наведено існуючі підходи до визначення основних інтегральних пожежних ризиків, а саме: ризику для людини зіткнутися з пожежею (його небезпечними факторами) за одиницю часу; ризику для людини загинути при пожежі (виявитися його жертвою); ризику для людини загинути від пожежі за одиницю часу. Аналіз інтегральних пожежних ризиків, що характерні для різних регіонів України, проведено у роботі [3], а роботу [4] присвячено закордонному досвіду регулювання рівня прийняттного ризику. Дослідження існуючих підходів до удосконалення функціонування підсистеми реагування на пожежі наведено у [5].

#### Формулювання мети дослідження

В даній роботі необхідно розробити математичну модель управління інтегральним пожежним ризиком та дослідити її особливості з метою подальшого нормування ресурсів підсистеми реагування на надзвичайні ситуації (пожежі) на регіональному рівні.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Відповідно до [1] основними інтегральними пожежними ризиками є:

– ризик для людини зіткнутися з пожежею (його небезпечними факторами) за одиницю часу,  $R_1$ :

$$R_1 = \frac{N_{пож}}{Q_{насел} \cdot T}; \quad (1)$$

де  $N_{пож}$  – кількість пожеж, що зафіксовані у відповідному регіоні протягом періоду  $T$ ;

$Q_{насел}$  – кількість населення, що мешкає у відповідному регіоні;

– ризик  $R_2$  для людини загинути при пожежі (виявитися його жертвою):

$$R_2 = \frac{M_{заг}}{N_{пож}}; \quad (2)$$

де  $M_{заг}$  – кількість загиблих внаслідок пожеж у відповідному регіоні протягом періоду  $T$ ;

– ризик  $R_3$  для людини загинути від пожежі за одиницю часу:

$$R_3 = R_1 \cdot R_2 = \frac{M_{заг}}{Q_{насел} \cdot T}. \quad (3)$$

З точки зору нормування ресурсів підсистеми реагування на надзвичайні ситуації (пожежі) на регіональному рівні викликає інтерес саме ризик  $R_3$ , оскільки він пов'язаний із наслідками пожеж, тобто у певній мірі є індикатором якості реагування пожежно-рятувальних підрозділів.

Було зроблено припущення, що ризик  $R_3$  залежить від таких факторів, як  $N_{пож}$  – кількість пожеж, що зафіксовані у відповідному регіоні;  $M_{заг}$  – кількість загиблих внаслідок пожеж у відповідному регіоні;  $\tau_{сл}$  – час слідування пожежно-рятувальних підрозділів до місця виникнення надзвичайної ситуації (пожежі);  $\tau_{лок}$  – час локалізації пожежі;  $\tau_{лікв}$  – час ліквідації пожежі.

Для визначення причинно-наслідкових зв'язків між досліджуваними факторами було побудовано кореляційну матрицю (табл. 1), яка надає можливість визначити зв'язок між інтегральним пожежним ризиком та виявленими факторами. Очевидно, що коефіцієнти 0,551 та 0,517 показують достатньо тісний зв'язок між рівнем інтегрального пожежного ризику та факторами  $\tau_{сл}$ ,  $\tau_{лок}$ . Таким чином, одними із важелів впливу на інтегральний пожежний ризик  $R_3$  є час слідування пожежно-рятувальних підрозділів до

місяця виникнення надзвичайної ситуації (пожежі) та час локалізації пожежі, які залежать від місць розташування та ресурсного забезпечення пожежно-рятувальних підрозділів.

Таблиця 1

Кореляційна матриця основних факторів

	$R_3$	$N_{пож}$	$M_{заг}$	$\tau_{сл}$	$\tau_{лок}$	$\tau_{лікв}$
$R_3$	1,000	-0,396	1,000	0,551	0,517	-0,403
$N_{пож}$	-0,396	1,000	-0,396	-0,673	-0,591	0,641
$M_{заг}$	1,000	-0,396	1,000	0,551	0,517	-0,403
$\tau_{сл}$	0,551	-0,673	0,551	1,000	0,789	-0,197
$\tau_{лок}$	0,517	-0,591	0,517	0,789	1,000	-0,603
$\tau_{лікв}$	-0,403	0,641	-0,403	-0,197	-0,603	1,000

Таким чином, виникає наступна задача. Нехай задано область  $S_0$  у вигляді багатокутника у глобальній системі координат. Область  $S_0$  має об'єкти заборони  $L_\xi, \xi = 1, \dots, L$ , в яких неприпустимо розміщувати пожежно-рятувальні підрозділи. Необхідно мінімізувати ризик для людини загинути від пожежі за одиницю часу в області  $S_0$  за рахунок визначення додаткової кількості пожежно-рятувальних підрозділів  $P_i, i = 1, \dots, N$  (дані райони являють собою багатокутники зі змінними метричними характеристиками), при цьому мають виконуватись такі обмеження:

- мінімум площі перетину районів функціонування пожежно-рятувальних підрозділів;
- належність районів функціонування пожежно-рятувальних підрозділів області  $S_0$ ;
- мінімум площі перетину районів функціонування пожежно-рятувальних підрозділів з областями заборони  $L_\xi, \xi = 1, \dots, L$ ;
- належність об'єктів підвищеної небезпеки (ОПН) та потенційно небезпечних об'єктів (ПНО)  $S_d, d = 1, \dots, D$ , області перетину  $M_d$  районів функціонування пожежно-рятувальних підрозділів, що забезпечують реагування на надзвичайну ситуацію (пожежу) на ОПН або ПНО відповідно до номеру виклику;
- час прибуття пожежно-рятувальних підрозділів до найвіддаленішої точки району виїзду  $P_i, i = 1, \dots, N$ , має не перевищувати заданого  $T^*$ ;
- розміщення пожежно-рятувальних підрозділів здійснюється з урахуванням існуючих  $P_q, q = 1, \dots, N_q$ ;
- розміщення пожежно-рятувальних підрозділів здійснюється з урахуванням обмежених ресурсів.

Слід зазначити, що дана задача є актуальною і відповідає Стратегії реформування Державної служби України з надзвичайних ситуацій [2].

Математична модель управління ризиком для людини загинути від пожежі за одиницю часу має такий вигляд:

$$\min_{u \in W} R_3(N_{пож}, M_{заг}, \tau_{сл}, \tau_{лок}, \tau_{лікв}, u); u = \{m_i; v_i\}; i = 1, \dots, N; \tag{4}$$

де  $W$  :

$$\omega(m_i, m_j, v_i, v_j) \rightarrow \min; \tag{5}$$

$$i = 1, \dots, N; j = i + 1, \dots, N;$$

$$\omega(m_i, m_{cS_0}, v_i, v_{cS_0}) \rightarrow \min; \tag{6}$$

$$i = 1, \dots, N; S_0 \cup cS_0 = R^2;$$

$$\omega(m_i, m_\xi, v_i, v_\xi) \rightarrow \min; \quad (7)$$

$$i = 1, \dots, N; \xi = 1, \dots, L;$$

$$S_d \in \bigcap_{k=1}^{M_d} P_k'; d = 1, \dots, D; P_k' \in \{P_i'\}, i = 1, \dots, N; \quad (8)$$

$$\tau_{cl}(P_i) \leq T^*; i = 1, \dots, N; \quad (9)$$

$$\omega(m_i, m_q, v_i, v_q) \rightarrow \min; \quad (10)$$

$$i = 1, \dots, N; q = 1, \dots, N_q;$$

$$Q_{pec}(N) \leq Q_{pec}^*. \quad (11)$$

В моделі (4)÷(11) вираз (4) являє собою цільову функцію задачі, при цьому  $m_i$  – метричні характеристики об'єктів  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  (наприклад, координати вершин багатокутників в локальній системі координат),  $v_i$  - параметри розміщення об'єктів  $P_i$  (положення локальної системи координат  $i$ -ого об'єкта в глобальній системі координат); вираз (5) – умова мінімуму взаємного перетину об'єктів  $P_i$  та  $P_j$ ; вираз (6) – умова мінімуму перетину об'єктів  $P_i$  з доповненням області  $S_0$  до евклідового простору  $R^2$ ; вираз (7) – умова мінімуму взаємного перетину об'єктів  $P_i$  з областями заборони  $L_\xi$ ,  $\xi = 1, \dots, L$ ; вираз (8) – умова належності об'єктів  $S_d$ ,  $d = 1, \dots, D$ , які являють собою точки в  $S_0$ , області перетину об'єктів  $P_k'$ , що належать множині об'єктів  $P_i$ ; вираз (9) – умова щодо припустимого часу прибуття пожежно-рятувальних підрозділів до місця виклику; вираз (10) – умова мінімуму взаємного перетину об'єктів  $P_i$  та  $P_q$ ; вираз (11) – умова, що ресурси на додаткове введення пожежно-рятувальних підрозділів не перевищують виділених  $Q_{pec}^*$ .

Треба відзначити, що обмеження моделі (5)÷(7), (10) представлені за допомогою  $\omega$ -функції покриття, яка введена у роботах Ю.Г. Стояна та С.В. Яковлева [6].

Під пожежно-рятувальними підрозділами будемо розуміти підрозділи не тільки державної пожежної охорони, але й місцевої та добровільної. Таким чином, використовується ризик-орієнтований підхід до визначення параметрів підсистеми реагування на надзвичайні ситуації (пожежі) на регіональному рівні.

Розглянемо особливості моделі (4)÷(11):

- задача управління ризиком для людини загинути від пожежі за одиницю часу відноситься до задач нелінійного програмування;
- область припустимих розв'язків визначається, у загальному випадку, системою нелінійних рівностей та нерівностей і є обмеженою та незв'язною;
- загальна кількість наборів рівностей та нерівностей, за допомогою яких здійснюється формалізація обмежень задачі, дорівнює  $C_N^2 + N(L + N_q + 2) + D + 1$ ;
- дана задача може бути розв'язаною без урахування обмеження (11);
- якщо не враховувати наявні пожежно-рятувальні підрозділи, то в моделі не враховується обмеження (10).

Таким чином, розроблена математична модель управління ризиком для людини загинути від пожежі за одиницю часу дозволить у подальшому розробити обґрунтований метод розв'язання задачі (4)÷(11).

#### Висновки

В даній роботі розглянуто існуючі підходи до обчислення основних інтегральних пожежних ризиків, а саме: ризику для людини зіткнутися з пожежею (його небезпечними факторами) за одиницю часу; ризику для людини загинути при пожежі (виявитися його жертвою); ризику для людини загинути від пожежі за одиницю часу. З точки зору нормування ресурсів підсистеми реагування на надзвичайні ситуації (пожежі) на регіональному рівні викликає інтерес ризик для людини загинути від пожежі за одиницю часу, оскільки він пов'язаний із наслідками пожеж. Виявлено фактори, що впливають на зазначений інтегральний

пожежний ризик, та сформульовано постановку задачі нормування ресурсів підсистеми реагування на надзвичайні ситуації (пожежі) на регіональному рівні з використанням ризик-орієнтованого підходу. Розроблено математичну модель управління ризиком для людини загинути від пожежі за одиницю часу та досліджено її особливості. Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку методу, алгоритмічного та програмного забезпечення розв'язання поставленої задачі.

#### Список використаної літератури

1. Основы теории пожарных рисков и ее приложения [Текст]: монографія / [Н.Н. Брушлинский, С.В. Соколов, Е.А. Клепко и др.]. – М.: Академия ГПС МЧС России, 2012. – 192 с.
2. Розпорядження Кабінету Міністрів України від 25.01.2017 р. №61-р «Про схвалення Стратегії реформування системи Державної служби України з надзвичайних ситуацій» [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://zakon5.rada.gov.ua/laws/show/61-2017-p>.
3. Kravtsiv S.Ya. The analysis of integral risks of the territory of Ukraine / S.Ya. Kravtsiv, O.M. Sobol, A.V. Maksimov // Проблеми надзвичайних ситуацій: збірник наукових праць. – Харків: НУЦЗУ, 2016. – Вип. 23. – С. 53-60. – Режим доступу: <http://nuczu.edu.ua/sciencearchive/ProblemsOfEmergencies/vol23/Kravtsiv.pdf>.
4. Кравців С.Я. Аналіз закордонного досвіду державного регулювання рівня прийнятного ризику / С.Я. Кравців, О.М. Соболев // Вісник НУЦЗ України. – Харків: НУЦЗУ, 2016. – Вип. 2 (5) – С. 297-302. – Режим доступу: [http://nuczu.edu.ua/sciencearchive/PublicAdministration/vol5/Visnyk\\_NUCZU\\_41\\_2016\\_2\(5\).pdf](http://nuczu.edu.ua/sciencearchive/PublicAdministration/vol5/Visnyk_NUCZU_41_2016_2(5).pdf).
5. Соболев О.М. Аналіз існуючих підходів до удосконалення функціонування підсистеми реагування на пожежі / О.М. Соболев, С.Я. Кравців // Організаційно-управлінські, економічні, психолого-педагогічні аспекти забезпечення діяльності Єдиної державної системи цивільного захисту: Матеріали I Всеукраїнської науково-практичної конференції курсантів, студентів, ад'юнктів та здобувачів (11 березня 2016 р.). – Черкаси: ЧПБ імені Героїв Чорнобиля НУЦЗ України, 2016. – С. 31-32.
6. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.

УДК 004.93

В.В. СПІРИНЦЕВ, А.Ю. ГОГОЛЮК  
Дніпропетровський національний університет ім.Олеся Гончара**АНАЛІЗ МАМОГРАФІЧНИХ ЗНІМКІВ З ВИКОРИСТАННЯМ  
АЛГОРИТМІВ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ**

*Здійснено порівняльний аналіз алгоритмів кластеризації (*k-means*, FCM, HCM, GK, FAFCM, FCM-SOM, алгоритму гібридної кластеризації), досліджено ступінь їх ефективності (при варіюванні різних параметрів), доступності і здатності до практичного використання при аналізі мамографічних знімків.*

*Ключові слова: кластеризація, мамографія, FCM, HCM, FAFCM, K-MEANS, гібридна кластеризація.*

В.В. СПИРИНЦЕВ, А.Ю. ГОГОЛЮК  
Днепропетровский национальный университет им.Олеся Гончара**АНАЛИЗ МАММОГРАФИЧЕСКИХ СНИМКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ  
КЛАСТЕРИЗАЦИИ**

*Осуществлен сравнительный анализ алгоритмов кластеризации (*k-means*, FCM, HCM, GK, FAFCM, FCM-SOM, алгоритма гибридной кластеризации), исследована степень их эффективности (при варьировании различных параметров), доступности и применимости к практическому использованию при анализе маммографических снимков.*

*Ключевые слова: кластеризация, маммография, FCM, HCM, FAFCM, K-MEANS, гибридная кластеризация.*

V.V. SPIRINTSEV, A.Yu. HOHOLIUK  
Dnepropetrovsk National University named after Oles Honchar**THE ANALYSIS OF MAMMOGRAPHIC ROENTGENOGRAM  
WITH USING THE CLUSTERING ALGORITHMS**

*The comparative analysis of clustering algorithms is carried out (*k-means*, FCM, HCM, GK, FAFCM, FCM-SOM, an algorithm of a hybrid clustering). The level of their efficiency (for varying parameters), accessibility and the ability of practical use while analyzing the mammographic roentgenograms is studied.*

*Keywords: clustering, mammography, FCM, HCM, FAFCM, K-MEANS, hybrid clustering.*

**Постановка проблеми**

Одним із найпоширеніших видів онкологічних захворювань серед жінок за даними ВООЗ (Всесвітній організації охорони здоров'я) є рак молочної залози. Для діагностики онкологічних захворювань застосовують мамографію [1] – неінвазивний рентгенологічний метод дослідження молочних залоз. Існує багато видів мамографії, кожний з яких має свої переваги та недоліки, та специфіку діагностування. Аналіз знімків при цьому не дає однозначного діагнозу, оскільки залежить від кваліфікації лікаря та його суб'єктивної думки. Використання алгоритмів кластеризації при аналізі мамографічних зображень дозволяє знизити ризики встановлення хибного діагнозу пацієнтам та усунути суб'єктивну складову людського фактору [2].

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Зараз використовується безліч методів кластеризації, що істотно відрізняються між собою за різними показниками: тип вихідних даних, чутливість, швидкість дії, кількість управляючих параметрів та ін. [2]. Серед інструментів, що найбільш часто використовуються для виконання кластеризації, виділяють методи нечіткої логіки, нейронні мережі та нейро-фаззі алгоритми (які включають переваги як методів нечіткої логіки так і нейронних мереж). Слід відзначити, що неоднозначність процедури дефазифікації нечітких методів та нейро-фаззі алгоритмів істотно впливає на ефективність та якість кінцевого результату [3]. В даній роботі пропонується здійснювати аналіз мамографічних зображень на основі алгоритмів кластеризації (*k-means*, FCM, HCM, GK, FAFCM, FCM-SOM, алгоритму гібридної кластеризації [4]) при різних параметрах (експоненційна вага, вибір метрики при динамічному стисненні) та дослідити ефективність даних алгоритмів для виявлення новоутворень у молочній залозі та мікрокальцинатів (відкладення солей кальцію).

**Формулювання мети дослідження**

Здійснити порівняльний аналіз результатів роботи алгоритмів кластеризації та виявити оптимальні параметри для виділення новоутворень молочної залози на мамографічних знімках.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

На рис.1 наведено результат роботи алгоритмів (*k*-means, FCM, HCM, GK, FAFCM, FCM-SOM, алгоритму гібридної кластеризації) при однакових параметрах (експоненціальна вага дорівнює 2; кількість нечітких кластерів – 5; критерій зупину – 0,00001) для виявлення новоутворень. Для всіх алгоритмів, крім *k*-means, використано спосіб візуалізації порівняння з початковими даними [5], а для *k*-means – візуалізація на основі кластерів [6] (це обумовлено тим, що в даному алгоритмі не розраховується матриця належності).

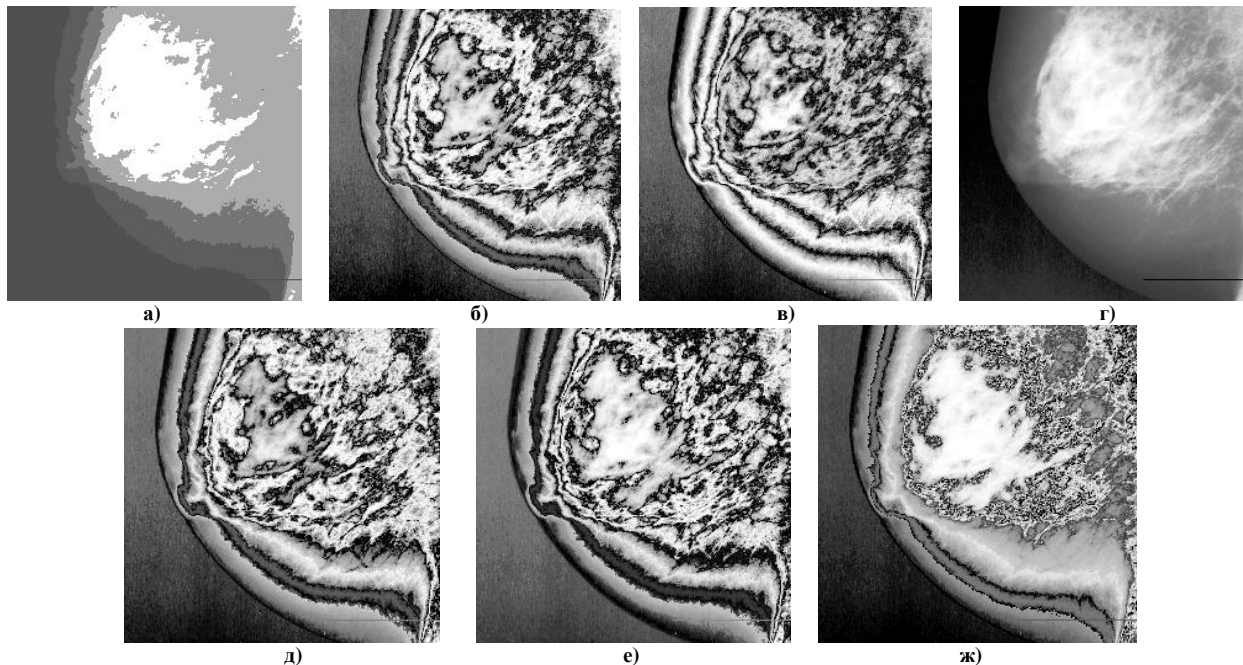


Рис. 1. Результат роботи алгоритмів кластеризації: а) – *k*-means; б) – FCM; в) – HCM; г) – FAFCM; д) – GK; е) – FCM-SOM; ж) – алгоритм гібридної кластеризації

Результат аналізу (див. рис.1) показав неефективність роботи алгоритмів *k*-means та FAFCM у порівнянні з іншими алгоритмами. Щодо алгоритму GK (хоча він і використовується здебільшого для багатовимірних зображень) результат його роботи із напівтоновим зображенням вражає, оскільки необхідна область чітко виділена.

В табл. 1 наведено результати швидкодії запропонованих алгоритмів кластеризації.

Таблиця 1

Результати швидкодії алгоритмів кластеризації	
Алгоритм кластеризації	Час виконання, с
<i>k</i> -means	0.36
FCM	5.8702
HCM	1.424
FAFCM	3.0188
GK	2.1423
FCM-SOM	7.9572
Гібридна кластеризація	6.2245

Аналіз даних з табл. 1 показує, що швидкість дії найвища у алгоритму *k*-means при найгіршому результаті якості отриманого зображення; далі за швидкодією відзначимо алгоритми HCM та GK (в 2-3 рази швидше за стандартний FCM), які також ефективно виділяють область новоутворення молочної залози. Щодо алгоритмів, які мають у своїй архітектурі нейронну мережу, швидкість їх дії є найнижчою, що пояснюється складним механізмом роботи.

Подальші дії було спрямовано на дослідження впливу експоненціальної ваги для базового алгоритму FCM на результат обробки мамографічного зображення (рис.2). Загалом, цей параметр використовують для знаходження матриці відстаней. Було обрано наступні параметри: кількість нечітких кластерів дорівнювала 5; критерій зупину складав 0,00001; експоненціальну вагу змінювали від 2 до 7.

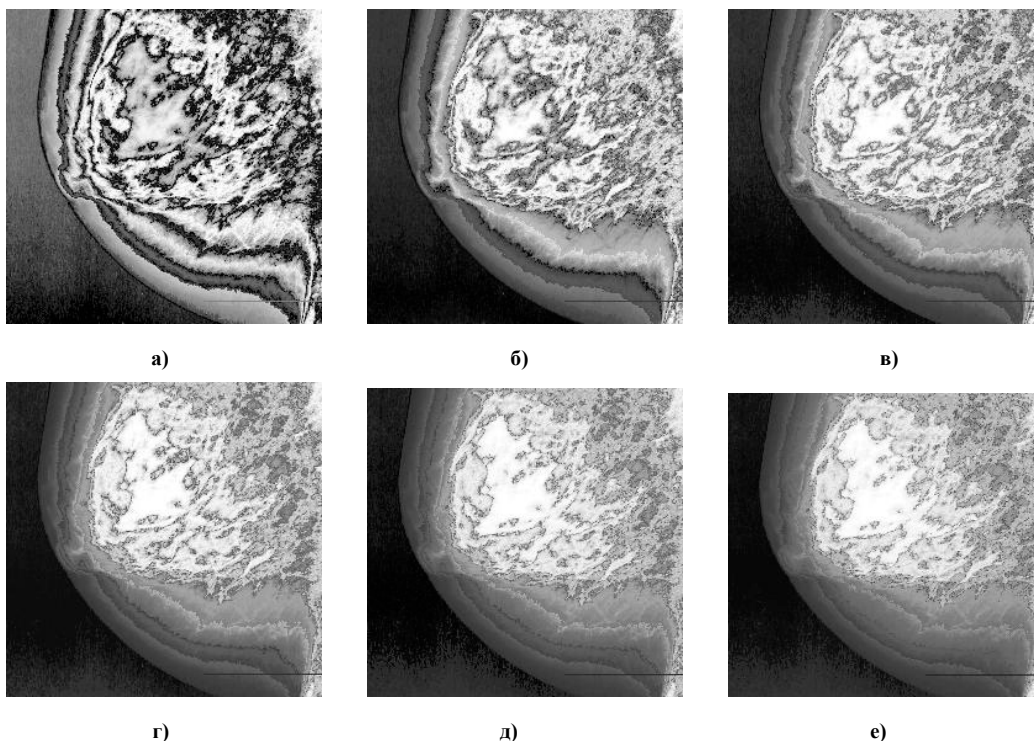


Рис. 2. Візуалізація результатів роботи алгоритму FCM при зміні експоненціальної ваги: а) – 2; б) – 3; в) – 4; г) – 5; д) – 6; е) – 7

Результат аналізу (див. рис.2) показав: збільшення значення експоненціальної ваги знижує якість результуючого зображення (виділення кластерів) та збільшує час обробки. Оптимальним значенням параметра є значення 2 і 3.

Інший напрям досліджень стосувався вивчення впливу метрики при динамічному стисненні [4] на результат обробки (рис.3). Було обрано наступні параметри: кількість нечітких кластерів дорівнювала 20 (із надлишком); критерій зупину складав 0,00001; експоненціальна вага – 2; відсоткове співвідношення між максимальною та мінімальною відстанню центрів нечітких кластерів становило 0,05. Крім Евклідової метрики, також використано зважену Евклідову відстань.

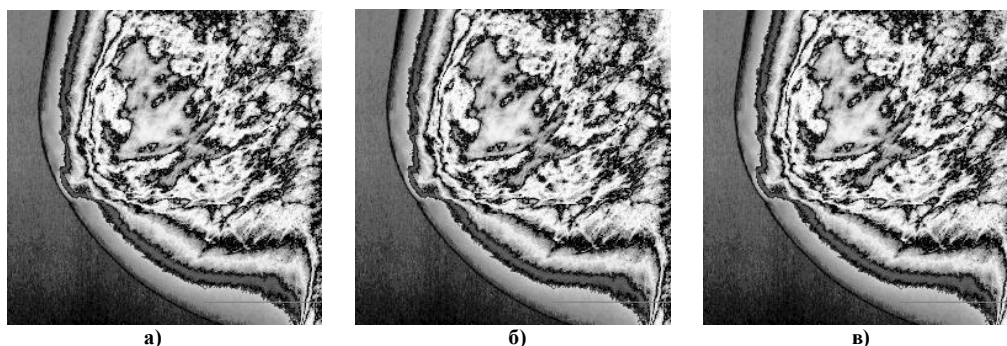


Рис. 3. Візуалізація результату роботи алгоритму FCM при процентному співвідношенні: а) – 10%; б) – 50%; в) – 90%

Таблиця 2

Порівняльний аналіз часу роботи за різних відстаней

Евклідова відстань,с	Зважена Евклідова відстань,с
8.5321	2.9632
8.2014	2.5571
8.3821	2.6457
8.3814	2.5686

Із рис.3 та табл. 2 видно, що використання звичайної Евклідової відстані є більш ефективним у порівнянні зі зваженою Евклідовою відстанню, проте час виконання алгоритму є майже у тричі більшим. Тому постає проблема вибору між якістю результату та часом виконання. Враховуючи специфіку практичної спрямованості (обробка мамографічного знімку), вважаємо за потрібне надати перевагу якості результату обробки.



Також виконано порівняння роботи алгоритму нечіткої FCM та гібридної кластеризації [4] з метою отримання відповіді на питання: чи доцільно використовувати гібридну кластеризацію для виділення новоутворень на мамографічних знімках (рис.4). Для цих двох алгоритмів було обрано наступні параметри: кількість нечітких кластерів дорівнює 20 (із надлишком); критерій зупини 0,00001; експоненційна вага 2; процентне співвідношення між максимальною та мінімальною відстанню центрів нечітких кластерів 0,05. Для нейронної мережі SOM, що входить до алгоритму гібридної кластеризації використано наступні параметри: числове значення, що задає спосіб збільшення кількості кластерів перед використанням SOM дорівнює 2; для методу стиснення кількості кластерів після використання SOM обрано вибір нейронів із максимальною кількістю належних до них початкових даних.

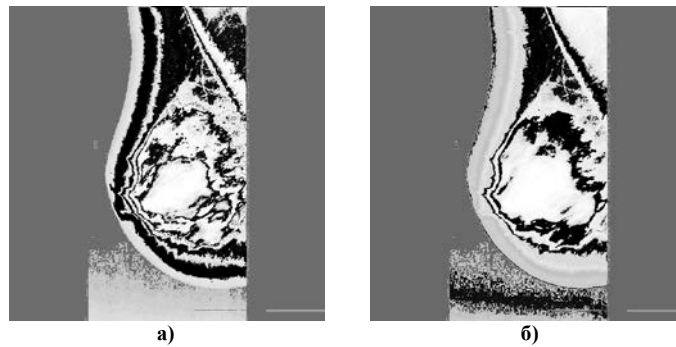


Рис. 4. Візуалізація результатів роботи алгоритмів: а) – FCM; б) – гібридної кластеризації

Із рис. 4 очевидно, що алгоритм гібридної кластеризації не дає змоги дешифрувати мамографічний знімок через високі піки контрасту в області новоутворення (рис. 5).

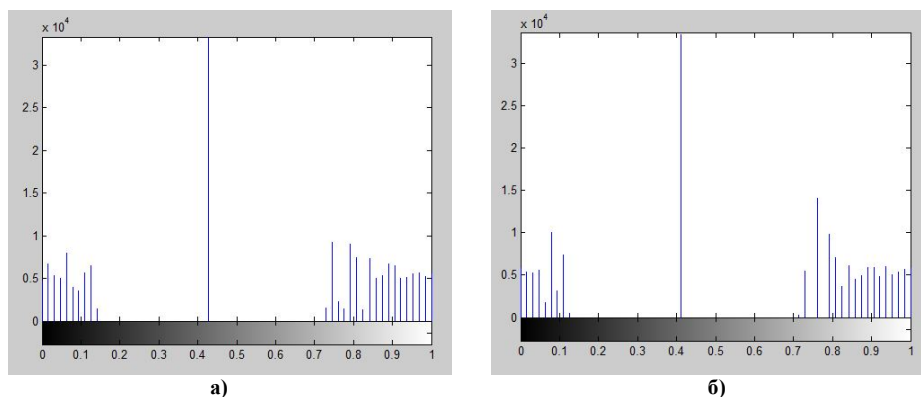


Рис. 5. Гістограми результатів обробки мамографічного знімку алгоритмом: а) – FCM; б) – гібридної кластеризації

Подальші дослідження (рис.6) було спрямовано на застосування алгоритмів кластеризації FCM, HCM, FCM-SOM (при однакових параметрах - попередній дослід, метод візуалізації - порівняння із початковими даними) для виділення мікрокальцинатів (відкладення солей кальцію), що зустрічається досить часто на практиці. Дані відкладення з'являються на місці загиблих чи змінених тканин в наслідок запальних процесів. Якщо вони маленькі (зернисті), то на мамограмі їх важко розпізнати або можна зплутати із дефектом плівки.

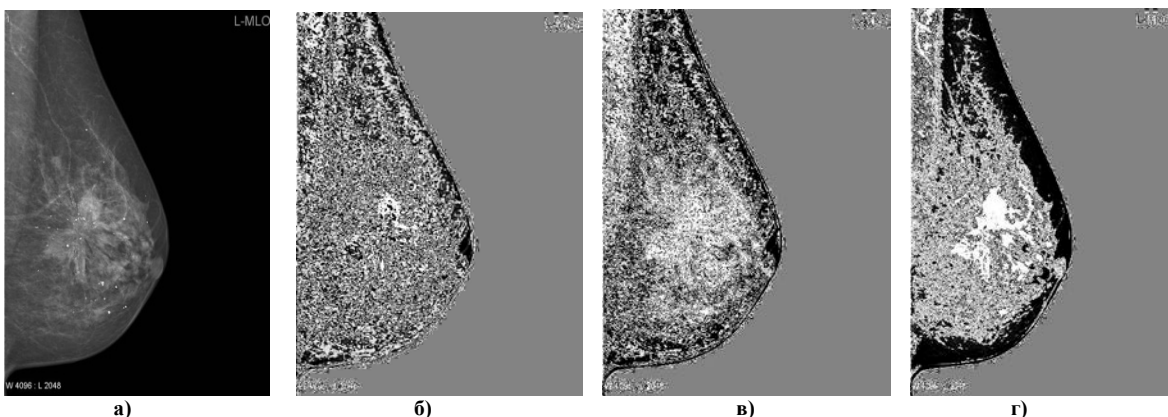


Рис.6. Візуалізація результатів роботи алгоритмів: а) – вхідні дані; б) – HCM; в) – FCM; г) – FCM-SOM

Жодний із наведених вище алгоритмів не дає змоги виділити такі маленькі об'єкти як мікрокальцинати (рис. 6). Отриманий результат більше схожий на шум, хоча контури пухлини чітко виділені. Тому робимо висновок, що алгоритми кластеризації FCM, HCM, FCM-SOM є неефективними при виділенні мікрокальцинатів на мамографічних знімках.

#### Висновки

В даній роботі здійснено аналіз мамографічних зображень з використанням алгоритмів кластеризації: *k*-means, FCM, HCM, GK, FAFCM, FCM-SOM, алгоритму гібридної кластеризації. Результат аналізу показав неефективність роботи алгоритмів *k*-means та FAFCM. Стосовно швидкодії запропонованих алгоритмів кластеризації: швидкість дії найвища у алгоритма *k*-means, при найгіршому результаті якості отриманого зображення; далі за швидкодією відзначимо алгоритми HCM та GK (в 2-3 рази швидше за стандартний FCM), які також ефективно виділяють область новоутворення молочної залози. Щодо алгоритмів, які мають у своїй архітектурі нейронну мережу – швидкість дії найнижча, що пояснюється складним механізмом роботи. В роботі експериментально показано, що збільшення значення експоненційної ваги для базового алгоритму FCM знижує якість результуючого зображення (виділення кластерів) та збільшує час обробки; визначено оптимальне значення параметру експоненційної ваги. Результат аналізу впливу метрики при динамічному стисненні на результат обробки показав, що використання звичайної Евклідової відстані є більш ефективним у порівнянні зі зваженою Евклідовою відстанню, проте час виконання алгоритму є майже у тричі більшим. Також було порівняно роботу алгоритму нечіткої та гібридної кластеризації та зроблено висновок про їх неефективність при виділенні новоутворень. В роботі експериментально доведено неефективність застосування алгоритмів кластеризації FCM, HCM, FCM-SOM для виділення мікрокальцинатів на мамографічних знімках.

Результати роботи можуть бути використані при розробці нових універсальних або модифікації вже існуючих алгоритмів з визначеними критеріями їх ефективності для обробки конкретного типу зображення.

#### Список використаної літератури

1. Садыков С.С. Автоматизированная обработка и анализ маммографических снимков: монография / С.С. Садыков, Ю.А. Буланова, Е.А. Захарова. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. – 208 с.
2. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р.Гонсалес, Р. Вудс; [пер. с англ. Под ред. П.А. Чочиа]. – М.: Техносфера, 2006. – 1070 с.
3. Леоненков А. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. Леоненков – С.Пб.: БХВ-Петербург, 2003. – 719 с.
4. Ахметшина Л.Г. Повышение чувствительности алгоритма гибридной нечеткой кластеризации на основе вычисления взвешенного Евклидова расстояния / Л.Г. Ахметшина, А.А. Егоров // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: IX міжнародна науково-практична конференція (м. Дніпропетровськ, 16-18 листопада 2011 р.). – Дніпропетровськ, 2011. – С. 13–14.
5. Егоров А.О. Візуалізація результатів нечіткої кластеризації на основі порівняння з початковими даними / А.О. Егоров // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: VIII міжнародна науково-практична конференція (м. Дніпропетровськ, 12-14 листопада 2008 р.) – Дніпропетровськ, 2008. – С. 117–118.
6. Лепский А.Е. Математические методы распознавания образов / А.Е. Лепский, А.Г. Броневиц. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. – 155 с.

УДК 514.18

Д.В. СПІРИНЦЕВ, А.В. НАЙДИШ

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

**ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПЛОСКОЇ ДИСКРЕТНОЇ КРИВОЇ**

*У роботі розглядається різні способи представлення дискретно представленої кривої (ДПК). В якості параметрів моделювання використовуються як лінійні, так і кутові параметри. Наведено параметричне представлення дискретної кривої, а також алгоритм визначення кутових параметрів для неоднозначних ДПК.*

*Ключові слова: дискретно представлена крива (ДПК), дискретний точковий ряд, супровідна ламана лінія, визначення кутових параметрів.*

Д.В. СПИРИНЦЕВ, А.В. НАЙДЫШ

Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЛОСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРИВОЙ**

*В работе рассматриваются различные способы представления дискретно представленной кривой (ДПК). В качестве параметров моделирования используются как линейные, так и угловые параметры. Приведены параметрическое представление дискретной кривой, а также алгоритм определения угловых параметров для неоднозначных ДПК.*

*Ключевые слова: дискретно представленная кривая (ДПК), дискретный точечный ряд, сопроводительная ломаная линия, определение угловых параметров.*

SPIRINTSEV D., NAYDYSH A.

Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmelnytsky

**REPRESENTATION OF THE PLANE DISCRETE CURVE**

*Different methods of representing a discretely presented curve (DPC) are considered in this paper. As modeling parameters, both linear and angular parameters are used. The parametric representation of the discrete curve is presented, as well as the algorithm for determining the angular parameters for ambiguous DPC.*

*Keywords: discretely presented curve (DPC), discrete point series, accompanying broken line, determination of angular parameters.*

**Постановка проблеми**

При моделюванні процесів і явищ використовують експериментальні дані, які, як правило, мають дискретний характер. Тим самим замість деякої неперервної кривої  $m$ , що відображає неперервну зміну процесу, маємо її дискретний аналог, тобто *дискретно представлену криву* (ДПК). Геометричною основою ДПК є *дискретний точковий ряд* (ДТР), а сама ДПК це ДТР та алгоритм побудови довільних проміжних точок між вузлами відомого ДТР з метою як можна точнішого представлення шуканої неперервної кривої [1]. Данні алгоритми складають основу дискретної інтерполяції, одним з напрямків якої є варіативне дискретне геометричне моделювання (ВДГМ), завданням якого є встановлення взаємозв'язків між різними характеристиками і параметрами модельованого явища шляхом дослідження адекватних геометричних схем і розробки відповідних розрахункових алгоритмів. Однак, перш ніж розробляти адекватні геометричні схеми та розробляти відповідні розрахункові алгоритми, необхідно обрати відповідний спосіб дискретного подання вихідної дискретно представленої кривої, оскільки подальші дослідження та точність отриманих результатів наряду будуть залежати від цього.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

В результаті експериментальних досліджень або деяких теоретичних розрахунків отримуємо ДТР. Головним допущенням ДГМ є безпомилковість цих даних. За цих умов характер кривої буде тим краще відслідкований, чим щільнішим буде точковий ряд та чим відповіднішим алгоритму ДГМ буде обрано спосіб представлення ДПК. В Мелітополі, починаючи з 80-х років ХХ століття в рамках Мелітопольської школи прикладної геометрії було сформувався новий напрямок – дискретне геометричне моделювання (ДГМ), який пізніше було трансформовано в ВДГМ. Актуальність цього обумовлена наявністю певного класу задач, для розв'язання яких не пристосовані відомі неперервні методи традиційного моделювання, але вони успішно розв'язуються методами ВДГМ [1]. У публікаціях [1-4, 6] були висвітлені основні поняття, властивості, геометричні аспекти та загальні напрямки розвитку ВДГМ, однак, проведені у цих роботах дослідження ще мають перспективи подальшого розвитку та потребують систематизації.

**Мета дослідження**

Розглянути основні способи представлення ДПК та основи лінійних та кутових параметрів як для однозначних так і неоднозначних кривих.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Розглянемо довільний точковий ряд (рис. 1), точки якого для наочності з'єднані ланками *супровідної ламаної лінії* (СЛЛ) [1]. Її розглядають як досить грубе кусково-лінійне наближення кривої *m*, похибка  $\Delta$  якого оцінюється як максимальне відхилення уздовж осі *Oy* точок кривої *m* від відповідних ланок СЛЛ, та дозволяє оцінити точність методу моделювання, що використовується.

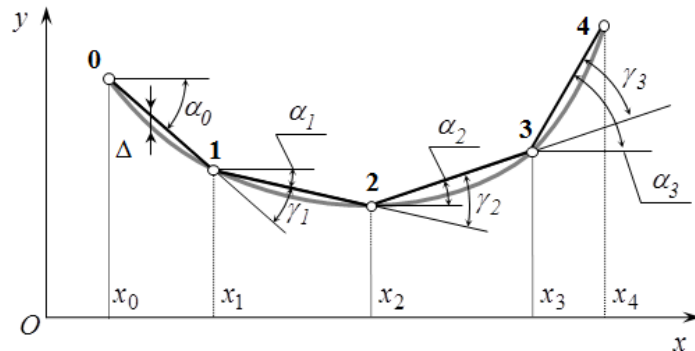


Рис. 1. ДПК з показаними кутовими параметрами.

Характеристики довільного ДТР можна поділити на лінійні та кутові. До *лінійних* характеристик в загальному випадку можна віднести координати вихідних точок  $(x_i, y_i), i = \overline{0;n}$ , довжини ланок СЛЛ  $l_i, i = \overline{0;n}$ , та перевищенням ординат сусідніх точок  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = \overline{0;n-1}$ , а у випадку рівномірного їх розташування, ще й крок сітки  $h = x_i - x_{i-1} = const, i = \overline{1;n}$ .

До *кутових* характеристик відносять кути нахилу ланок до осі *Ox*  $\alpha_i, i = \overline{0,3}$  і кути суміжності ланок  $\gamma_i, i = \overline{1,3}$  (рис. 1). Кутові параметри в процесі дискретного геометричного моделювання останнім часом займають все більш лідируючі позиції завдяки притаманним їм наступним властивостям:

- кутові параметри графічної моделі не залежать від масштабу зображення;
- конфігурація і положення ДПК відносно системи координат, зокрема, мнозначність її відносно осі *Ox*, не впливає на процес моделювання;
- можливість отримання в багатьох випадках більш простих моделей;
- можливість підвищення точності моделювання і таке інше.

Однак, при цьому це варто зменшувати можливості дискретного геометричного моделювання на основі лінійних параметрів, оскільки в деяких випадках доцільніше використовувати саме їх (різницеви рівняння [1]).

Основним способом завдання дискретної кривої на площині є завдання її точкового ряду значеннями координат її вузлів. Таке завдання аналогічне табличному завданню деякої функції та відповідає природній методиці побудови точок. Крім того даний спосіб завдання дозволяє визначити всі лінійні та кутові параметри вихідної ДПК. На рис. 2 наведено приклад дискретної кривої, заданої даним способом, на якому, для наочності вузли з'єднані СЛЛ та зображено лише перші 4 точки.

Однак це не єдиний спосіб завдання дискретної кривої. Одними із поширених способів завдання ДПК є: завдання перевищеннями ординат сусідніх точок  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = \overline{0;n-1}$  (рис. 3), та у вигляді кутів  $\alpha_i$  нахилу ланок СЛЛ до осі *Ox* (рис. 4). Вочевидь, що для однозначного завдання ДПК за заданими графіками  $\Delta y_i$  (рис. 3) та  $\alpha_i$  (рис. 4) треба задати початкову точку  $(x_0, y_0)$ , при цьому вважаємо відомими значення абсцис ДТР.

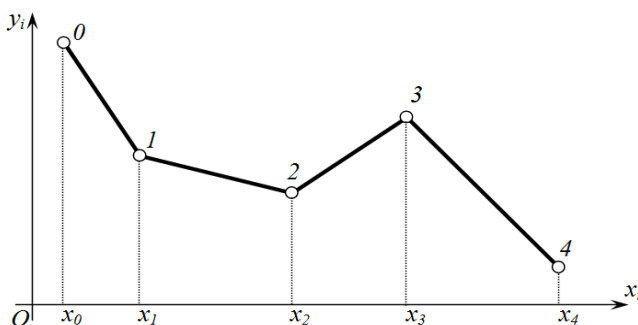


Рис. 2. Завдання ДПК значеннями координат вузлів.

Вхідні данні:

$$(x_i, y_i), i = \overline{0;n}$$

<i>i</i>	0	1	2	3	...	<i>n</i>
<i>x<sub>i</sub></i>	<i>x<sub>0</sub></i>	<i>x<sub>1</sub></i>	<i>x<sub>2</sub></i>	<i>x<sub>3</sub></i>	...	<i>x<sub>n</sub></i>
<i>y<sub>i</sub></i>	<i>y<sub>0</sub></i>	<i>y<sub>1</sub></i>	<i>y<sub>2</sub></i>	<i>y<sub>3</sub></i>	...	<i>y<sub>n</sub></i>

Якщо взяти за основу значення кутів суміжності  $\gamma_i$  сусідніх ланок СЛЛ [1]:  $\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}, i = \overline{1; n-1}$ , то можна запропонувати ще один спосіб завдання ДПК. При цьому, для однозначного її завдання необхідно завдання двох його сусідніх точок, наприклад  $(x_0, y_0)$  та  $(x_1, y_1)$ . Приклад запропонованого способу наведено на рис. 5.

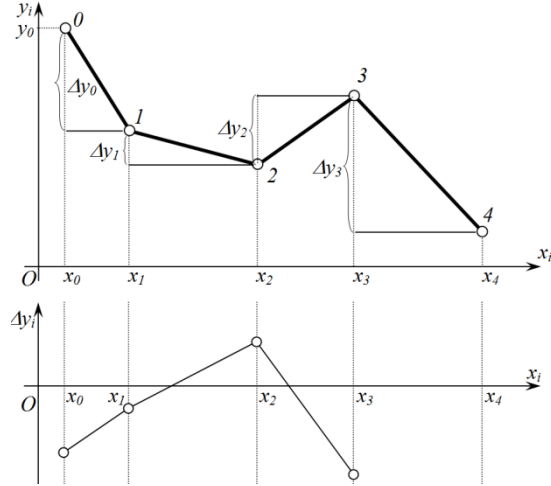


Рис.3. Завдання ДПК перевищеннями ординат сусідніх точок.

Вхідні данні:

$$(x_0, y_0), \{x_i, \Delta y_i\}, i = \overline{0; n-1}$$

$i$	0	1	2	...	$n-1$
$x_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{n-1}$
$\Delta y_i$	$\Delta y_0$	$\Delta y_1$	$\Delta y_2$	...	$\Delta y_{n-1}$

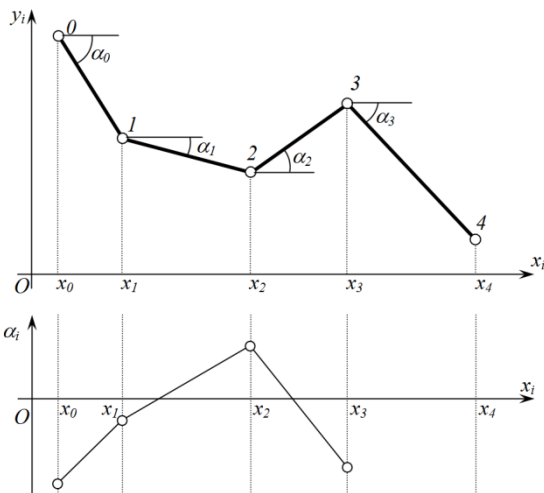


Рис.4. Завдання ДПК кутами нахилу ланок СЛЛ до осі Ox.

Вхідні данні:

$$(x_0, y_0), \{x_i, \alpha_i\}, i = \overline{0; n-1}$$

$i$	0	1	2	...	$n-1$
$x_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{n-1}$
$\alpha_i$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	...	$\alpha_{n-1}$

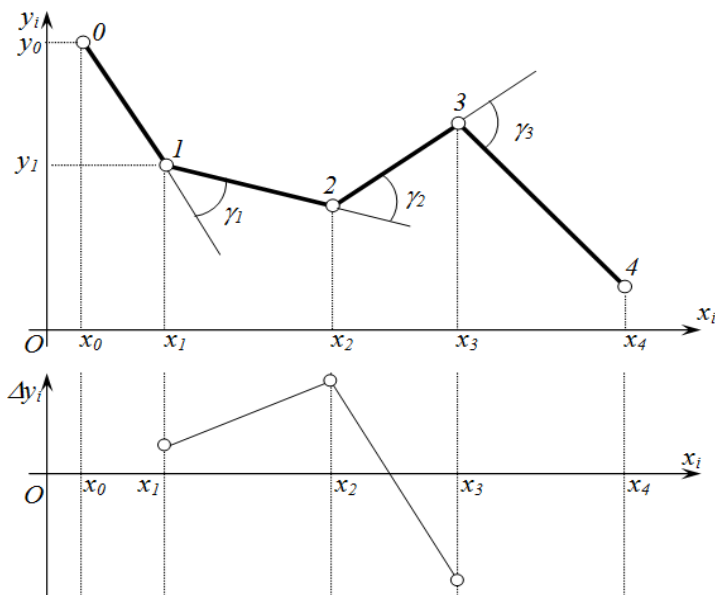


Рис. 5. Завдання ДПК кутами суміжності.

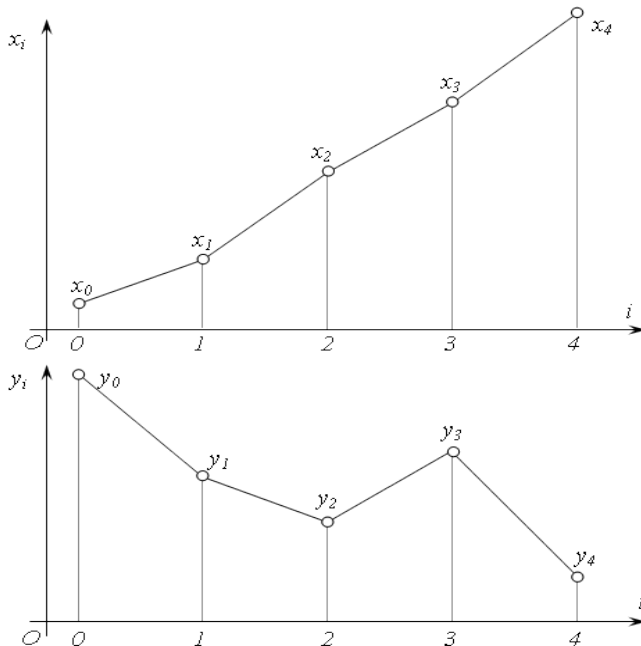
Вихідні данні:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \gamma_i, i = \overline{1; n-1}$$

$i$	1	2	3	...	$n-1$
$\gamma_i$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	...	$\gamma_{n-1}$

Крім зазначених способів, також можна завдавати ДПК за допомогою значень довжин ланок СЛЛ. При цьому в якості другого параметра може виступати як перевищення ординат сусідніх точок ( $\Delta y_i$ ), кути нахилу ланок СЛЛ до осі  $Ox$  ( $\alpha_i$ ), так і кути суміжності ( $\gamma_i$ ). Крім того, для побудови означеним способом ДПК необхідно ще задати початкову точку  $(x_0, y_0)$ .

Означені способи є досить дієвими при завданні однозначних ДПК. Для багатозначних ДПК вони також придатні, однак, при цьому необхідно або використовувати інші формули визначення характеристик ДТР (див. нижче), або представляти багатозначну ДПК двома однозначними параметричними рядами  $(x=f(i))$  та  $y=f(i)$  на цілочисловій рівномірній сітці, де в якості параметра виступає номер точки  $i$ . На рис. 6 наведено приклад параметрично представленої кривої, яка зображена на рис. 2.



Вихідні данні:

$$x(i), y(i), \quad i = \overline{0; n}$$

$i$	0	1	2	3	...	$n$
$x_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$y_i$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$

Рис. 6. Параметричне завдання ДПК.

За характером зміни рядів  $x(i), y(i), i = \overline{0; n}$  можна судити про опорні точки дискретної кривої. Параметричне представлення кривої дозволяє спростити процес моделювання неоднозначних ДПК як за рахунок рівномірної сітки, так і за рахунок застосування методів моделювання однозначних ДПК. Головною перешкодою при моделюванні багатозначних ДПК є наявність вертикальних дотичних, яким відповідають точки екстремуму графіка  $x(i)$ . При моделюванні на нерівномірній сітці, у порівнянні з рівномірною, виникають деякі обчислювальні труднощі [1]. Одним із можливих рішень даної задачі є точне аналітичне визначення характеристик ДТР. Розглянемо це питання детальніше.

Як вже було сказано раніше, до кутових характеристик відносять кути нахилу ланок до осі  $Ox - \alpha_i$  і кути суміжності ланок СЛЛ –  $\gamma_i$  (рис. 1).

Питанням визначення кутових характеристик займалось багато вчених, в тому числі вчені Мелітопольської школи прикладної геометрії [1–4, 6]. Можна кути  $\alpha_i$  нахилу ланок супровідної ломаної лінії (СЛЛ) ДПК до осі  $Ox$  визначати за вже відомою формулою:

$$\alpha_i = \arcsin \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i} = \arcsin \frac{\Delta y_{i+1}}{l_i} . \tag{1}$$

де  $l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$  – довжина ланки  $(i, i+1)$  СЛЛ, а значення кута суміжності за формулою:

$$\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}, \quad i = \overline{1, n-1} . \tag{2}$$

Запропонована схема є простою та зручною у використанні при визначенні кутів  $\alpha_i$  нахилу СЛЛ для однозначних відносно осі  $Ox$  ДПК.

Також для визначення кутів  $\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$  можна використовувати більш складну схему (рис. 7), на якій зображені кути нахилів ланок віднесені до початку координат (т.  $O$ ) [4]. Використовуючи дану

схему куту  $\alpha_i$  можна визначити наступним чином:

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_k = \bar{\alpha} & \text{при } \Delta x, \Delta y > 0, \\ \alpha_m = \bar{\alpha} & \text{при } \Delta x > 0, \Delta y < 0, \\ \alpha_p = -90^0 + \bar{\alpha} & \text{при } \Delta x < 0, \Delta y < 0, \\ \alpha_q = -180^0 + \bar{\alpha} & \text{при } \Delta x < 0, \Delta y > 0, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ,  $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ , а значення кутів  $\bar{\alpha}$  визначаються за формулою (1).

Наведена схема визначення кутів нахилу  $\alpha_i$  ланок СЛЛ ДПК до осі  $Ox$  є більш вдосконаленою у порівнянні з (1), але має певні межі застосування (для неоднозначних кривих у випадках коли значення кутів нахилу  $\alpha_i$  по модулю не перевищують  $270^0$ ). Покажемо це на прикладі дискретно представленого точкового ряду, який зображено на рис. 8. Кутовими характеристиками даного ряду є кути нахилу ланок до осі  $Ox$  ( $\alpha_i$ ,  $i = \overline{0,6}$ ) та кути суміжності ланок ( $\gamma_i$ ,  $i = \overline{0,6}$ ).

Якщо послідовно визначати значення кутів  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{0,6}$  згідно зі схемою (3), то для ділянок 0–1, 1–2, 2–3, 3–4, 4–5 ніяких особливостей не буде спостерігатись. Однак, якщо продовжити розрахунки  $\alpha_i$  за формулою (3) для ділянок кривої 5–6 та 6–7, то замість значень кутів нахилу ланок  $\alpha_5$  і  $\alpha_6$  отримаємо значення кутів  $\alpha_5^*$  і  $\alpha_6^*$  які не є кутами нахилу даних ланок. Отже, використовувати формули (3) для розрахунку кутів нахилу кривих, які мають складну форму, не завжди є можливим.

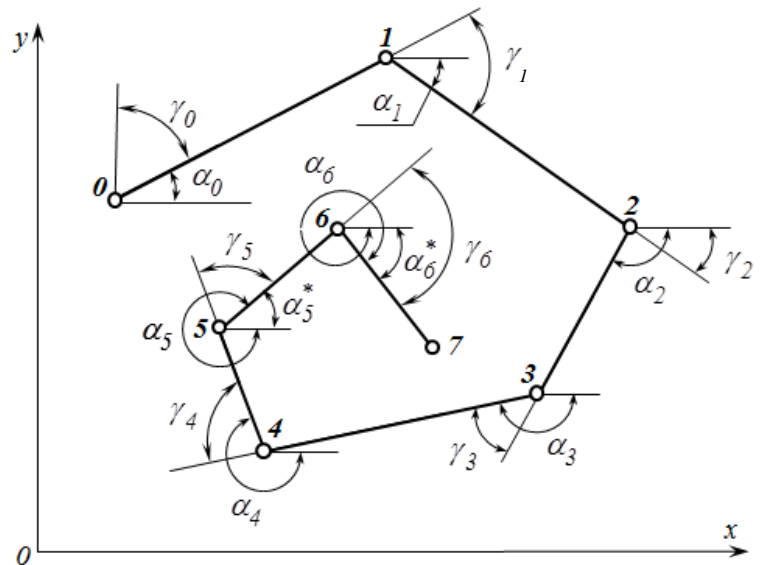


Рис. 8. Кутові параметри СЛЛ ДПК.

Тому запропонуємо наступний спосіб визначення кутових характеристик вихідного точкового ряду. Як відомо [5], кут  $\theta$  (рис.9,а), між прямими  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  і  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ , визначається за формулою:

$$\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2)}}. \quad (6)$$

Проведемо через три послідовні точки ряду  $i-1, i, i+1$  дві умовні прямі  $l$  і  $2$  (рис. 9, б). Тоді за формулою (6) також можна визначити кут  $\theta$  між ними, чисельне значення якого відповідає куту суміжності  $\gamma_i$  в  $i$ -ої точці. Так само можна

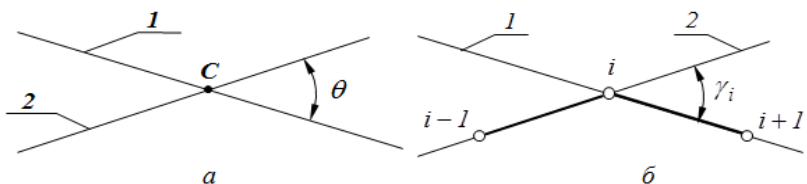


Рис. 9. До визначення кута суміжності ланок СЛЛ ДПК.

визначити значення кутів суміжності для будь-якої точки  $i = \overline{1, n-1}$  заданого ДТР. Тому, при розгляді геометричних характеристик вихідного точкового ряду значення кутів суміжності будемо визначати за формулою:

$$\gamma_i = \pm \arccos \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2)}} \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (7)$$

де  $a_1, a_2, b_1, b_2$  – коефіцієнти рівнянь прямих, що проходять через розглянуті точки ряду;

$$\begin{aligned} a_1 &= y_i - y_{i-1}, & a_2 &= y_{i+1} - y_i, \\ b_1 &= x_{i-1} - x_i, & b_2 &= x_i - x_{i+1}, \end{aligned} \tag{8}$$

тут  $x_{i-1}, y_{i-1}, x_i, y_i$  і  $x_{i+1}, y_{i+1}$  – координати точок  $i-1, i, i+1$  вихідного точкового ряду.

Визначивши за формулою (9), яка є узагальненням схеми (3), значення кута нахилу першої ланки  $\alpha_0$ , і обчисливши значення кутів суміжності  $\gamma_i, i = \overline{1, n-1}$  за формулою (7), в залежності від геометричних характеристик кривої, можна, використовуючи формулу (2), визначити значення інших кутів нахилу ланок  $\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$  для будь-якого вихідного точкового ряду:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \arcsin \frac{y_1 - y_0}{l_0}, & \text{якщо } \Delta x_1 = [x_1 - x_0] > 0, \\ \alpha_0 = -180^\circ - \arcsin \frac{y_1 - y_0}{l_0}, & \text{якщо } \Delta x_1 = [x_1 - x_0] < 0. \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_1 + \alpha_0 \\ \alpha_2 &= \gamma_2 + \alpha_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1} &= \gamma_{n-1} + \alpha_{n-2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким чином, використовуючи формули (7)–(10), можна отримувати значення кутових геометричних характеристик вихідного ДТР, заданого сукупністю точок  $(x_i, y_i), i = \overline{0; n}$  в декартовій системі координат.

Отримані формули дозволять задавати ДПК не тільки однозначних, а й неоднозначних ДПК довільної форми, та при цьому не буде необхідності в візуальній корекції кутових характеристик кривої для неоднозначних кривих.

**Висновки**

В роботі розглянуто основні способи представлення ДПК на основі лінійних та кутових параметрів, які можуть використовуватись як для однозначних так і для неоднозначних кривих. Було запропоновано ефективний спосіб представлення ДПК довільної конфігурації на основі кутових параметрів, необхідних для завдання ДПК. Правильно обраний спосіб представлення ДПК дозволить підвищити точність та спростити процес побудови довільних проміжних точок між вузлами відомого ДТР з метою як можна точнішого представлення шуканої неперервної кривої.

**Список використаної літератури**

1. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна. – Мелітополь: ТДАТУ, 2007. – 194 с.
2. Верещага В.М. Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній і поверхонь: дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01 / Верещага Віктор Михайлович. – Мелітополь, 1996. – 320 с.
3. Щербина В.М. Геометричне моделювання спіралеподібних дискретно представлених кривих ліній: дис. ... канддата. техн. наук: 05.01.01 / Щербина Віктор Михайлович. – Мелітополь, 2003. – 192 с.
4. Лебедев В.О. Дискретна інтерполяція дискретно представлених кривих ліній на основі кутів згущення. автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 / В.О. Лебедев. – Мелітополь, 2004. – 22 с.
5. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. / А. Фокс, М. Пратт – М.: Мир, 1982. – 304 с.
6. Найдиш В.М. Варіативна схема згущення ДПК на основі кутових параметрів з використанням додаткових умов. / В.М. Найдиш, Д.В. Спірінцев // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 35.– Мелітополь: ТДАТА, 2007. – С.3-9.



УДК 514.12

Е.В. СТЕГАНЦЕВ, Е.А. ПИЛИПЕНКО  
Запорозький національний університет**ОГИБАЮЩИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ ОКРУЖНОСТЕЙ**

*Рассматриваются огибающие семейств окружностей с центрами на данной кривой – параллели. Устанавливаются критерии, позволяющие в зависимости от значений параметров кривой определять, будет ли параллель сохранять тип кривой, или произойдет ее деформация.*

*Ключевые слова: кривая, семейство кривых, параметрические уравнения, огибающая, параллель.*

Е.В. СТЕГАНЦЕВ, К.А. ПИЛИПЕНКО  
Запорізький національний університет**ОБВІДНІ СПЕЦІАЛЬНИХ СІМЕЙ КІЛ**

*Розглядаються обвідні сімей кіл з центрами на даній кривій – паралелі. Встановлюються критерії, які дозволяють в залежності від значень параметрів кривої визначати, чи буде параллель зберігати тип кривої, чи відбудеться її деформація.*

*Ключові слова: крива, сім'я кривих, параметричні рівняння, обвідна, параллель.*

E.V. STEGANTSEV, E.A. PILIPENKO  
Zaporozhye National University**THE ENVELOPES OF THE SPECIAL FAMILIES OF THE CIRCUMFERENCES**

*The envelopes of the families of the circumferences with the centers on the given curve – parallels have been considered. One formulates the criterion, which gives the opportunity to determine if the parallel keeps the type of the curve or its deformation takes place in dependence on the parameters of the curve.*

*Keywords: curve, family of the curves, parametric equations, envelope, parallel.*

**Постановка проблемы**

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений применяется метод нахождения огибающих для получения общего и особых решений. Так называемая трубчатая поверхность – огибающая однопараметрического семейства сфер, центры которых принадлежат некоторой плоской кривой – является примером интегральной поверхности. При определенных условиях она действительно имеет вид трубки [3].

Известно, что в дифференциальной геометрии огибающая семейства кривых находится при помощи операции дифференцирования [4]. Как правило, при этом получается система из двух уравнений. Первое уравнение – это уравнение семейства кривых, а второе – его производная по параметру семейства [1]. Огибающие семейств окружностей одинакового радиуса с центрами на данной кривой (назовем ее базой), называются параллелями. Параллели могут иметь тот же тип, что и база, но может происходить и их деформация. Как, зная параметры базы и семейства окружностей, сказать наперед, произойдет ли деформация огибающей? В статье этот вопрос решается для параболы в качестве базы.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Понятие огибающей находит широкое применение в геометрии. Некоторые из этих применений описаны в [4]. В работах [1–2] рассмотрена огибающая как решение системы уравнений, в которой первое уравнение – это уравнение семейства кривых, а второе – производная от уравнения семейства по его параметру. Понятие огибающей также используется при нахождении общего и особых решений дифференциального уравнения [3].

**Формулирование цели исследования**

Получить зависимость между параметром параболы и радиусом окружностей семейства, определяющего параллель параболы, при которой параллель тоже будет параболой.

**Изложение основного материала исследования**

Пусть имеется некоторое семейство плоских линий. Огибающей этого семейства называется такая линия, которая в каждой своей точке касается одной из линий заданного семейства. Если семейство линий задано уравнением  $f(x, y, \alpha) = 0$ , то огибающая этого семейства описывается системой уравнений [1]

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Для наглядности, рассуждения проведем для огибающей семейства окружностей одинакового радиуса, центры которых расположены на параболе  $x^2 = 2\tilde{p}y$ ,  $\tilde{p}$  – параметр параболы. Такую огибающую принято называть параллелью. Сделав замену  $p = \frac{1}{4\tilde{p}}$ , получим уравнение параболы в виде  $y = 2px^2$ . Таким образом, семейство окружностей задается системой уравнений

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2, \\ \beta = 2p\alpha^2. \end{cases}$$

Для нахождения параллели воспользуемся общей теорией нахождения огибающих, изложенной, например, в [2]. Подставив значение  $\beta$  из второго уравнения системы в первое и найдя производную полученного уравнения по  $\alpha$ , получим уравнения искомой огибающей в неявном виде:

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + (y - 2p\alpha^2)^2 = R^2, \\ -2(x - \alpha) - 4p\alpha(y - 2p\alpha^2) = 0. \end{cases}$$

Ее параметрические уравнения следующие:

$$\begin{cases} x = \mp 2p\alpha \sqrt{\frac{R^2}{4p^2\alpha^2 + 1}} + \alpha, \\ y = \pm \sqrt{\frac{R^2}{4p^2\alpha^2 + 1}} + 2p\alpha^2. \end{cases}$$

Как видно из рис. 2, внутренняя параллель может подвергаться искажению. Выясним, когда это происходит. Воспользуемся следующими соображениями. Переместим окружность с центром в начале координат, принадлежащую семейству, вправо на  $\Delta x$  (рис 1). Понятно, что искажение параллели происходит в том случае, когда при смещении окружности вправо, точка касания с огибающей смещается влево. Это означает, что ее абсцисса становится отрицательной.

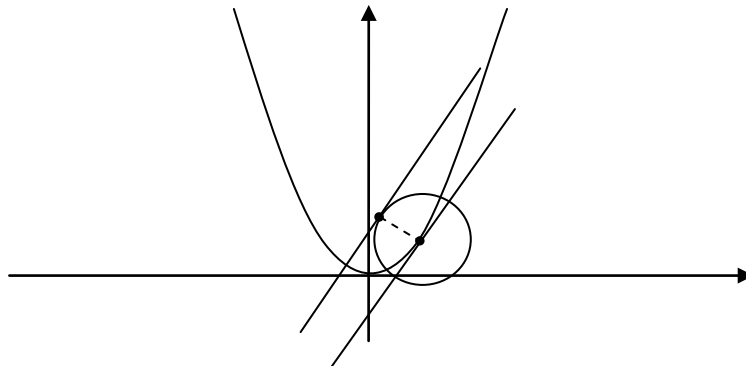


Рис. 1.

Найдем уравнение касательной к параболе в точке  $B(\Delta x, 2p(\Delta x)^2)$ ,  $\Delta x > 0$ . Получим  $y - 2p(\Delta x)^2 = 4p\Delta x(x - \Delta x)$  или  $4p\Delta x^2 - y - 2p(\Delta x)^2 = 0$ . Пусть точка A есть точка касания с огибающей, она также является точкой пересечения перпендикуляра AB к касательной к параболе с параллельной ей и удаленной от нее на расстояние R прямой b. Из условия параллельности имеем

$$b: 4p\Delta x^2 - y + c = 0.$$

Неизвестный коэффициент c найдем из равенства

$$\frac{4p(\Delta x)^2 - 2p(\Delta x)^2 + c}{\sqrt{16p^2(\Delta x)^2 + 1}} = R,$$

левая часть которого выражает расстояние от точки  $B$  до прямой  $b$ . Таким образом,  $c = R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2 + 1} - (\Delta x)^2$ .

Тогда уравнение прямой  $b$  имеет вид  $4px\Delta x - y + R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2 + 1} - (\Delta x)^2 = 0$ , а уравнение  $AB$  запишем по точке и угловому коэффициенту, получим  $y - 2p(\Delta x)^2 = \frac{-1}{4p\Delta x}(x - \Delta x)$ . Система для вычисления координат точки  $A$  имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{4p\Delta x}x + y - \frac{1}{4p} - 2p(\Delta x)^2 = 0, \\ 4px\Delta x - y + R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2 + 1} - (\Delta x)^2 = 0. \end{cases}$$

Нас интересует только абсцисса точки  $A$  и условие ее положительности, то есть

$$x = \frac{\frac{1}{4p} - R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2 + 1} + 4p(\Delta x)^2}{\frac{1}{4p\Delta x} + 4p\Delta x} > 0.$$

Поскольку  $\Delta x > 0$ , то знаменатель как сумма двух взаимно обратных чисел больше двух. Тогда имеем

$$R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2 + 1} < \frac{1}{4p} + 4p(\Delta x)^2.$$

При малых  $\Delta x$  это неравенство имеет вид  $R < \frac{1}{4p}$ . Тогда условие, при котором огибающая семейства равных окружностей, центры которых лежат на параболе с параметром  $\tilde{p}$ , также является параболой, будет следующим

$$R < \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4\tilde{p}}} = \tilde{p}.$$

Таким образом, если значение радиуса  $R$  окружности, принадлежащей семейству, меньше значения параметра параболы  $\tilde{p}$ , то параллель также является параболой.

В качестве примера найдем параллели семейства окружностей

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2, \\ \beta = \alpha^2, \end{cases}$$

центры которых лежат на параболе  $y = x^2$  с параметром  $\tilde{p} = \frac{1}{2}$ . Подставив значение  $\beta$  из второго уравнения системы в первое и найдя производную полученного уравнения по  $\alpha$ , получим уравнение искомой огибающей

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + (y - \alpha^2)^2 = R^2, \\ -2(x - \alpha) - 4\alpha(y - \alpha^2) = 0 \end{cases}$$

в неявном виде. Ее параметрические уравнения следующие

$$\begin{cases} x = \mp 2\alpha \sqrt{\frac{R^2}{4\alpha^2 + 1}} + \alpha, \\ y = \pm \sqrt{\frac{R^2}{4\alpha^2 + 1}} + \alpha^2. \end{cases}$$

Построим огибающую при помощи математического пакета Maple для  $R = 1$  (рис. 2).

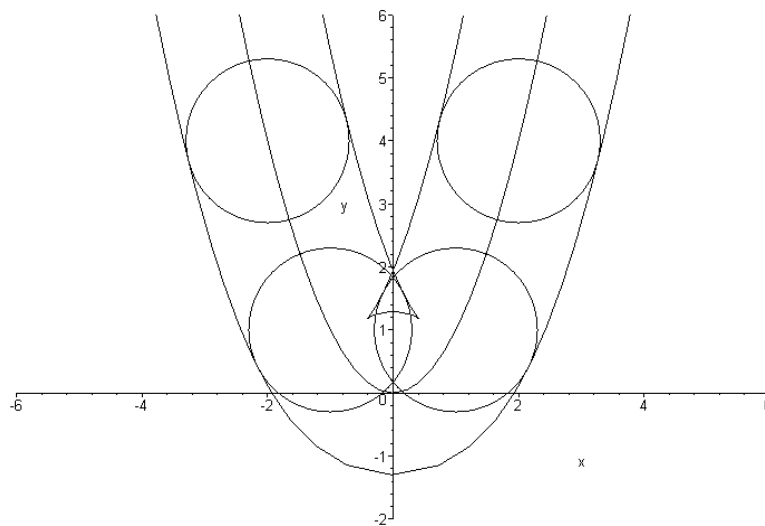


Рис. 2.

Деформация параллели произошла, поскольку в соответствии с полученным критерием, неравенство  $R < \tilde{p}$  имеет вид  $1 < \frac{1}{2}$ , то есть является неверным.

#### Выводы

В статье рассмотрены параллели семейств окружностей с центрами на параболе. Получен критерий, позволяющий сказать наперед, будет ли параллель иметь тот же вид, что и сама кривая. Указанный критерий аналитический. Приведены примеры параллелей некоторых семейств окружностей.

#### Список использованной литературы

1. Болтянский В.Г. Огибающая / В.Г. Болтянский. – М.: Гос. изд-во физико-математической лит., 1961. – 76 с.
2. Залгаллер В.А. Теория огибающих / В.А. Залгаллер. – М.: Наука, 1975. – 106 с.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
4. Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. – М.: Физматлит, 2004. – 304 с.

УДК 681.3: 514.18

С.Ю. СУЛИМЕНКО, В.О. АНПІЛОГОВА, Г.Г. СУЛИМЕНКО  
Київський національний університет будівництва та архітектури**ПОБУДОВА ПЛОЩИНИ СИМЕТРІЇ КОНУСА, ДОТИЧНОГО ДО ПОВЕРХНІ  
ОБЕРТАННЯ, ЗА ЕСКІЗОМ ЛІНІЇ ОБРИСУ**

*Проаналізовано властивості конуса загального положення, дотичного до деякої поверхні обертання. За цим аналізом сформульовано критерій симетрії пари твірних відносно невідомої площини симетрії поверхні конуса. Показано, що пара симетричних твірних однозначно визначає і площину симетрії. Для ескізно заданої на екрані монітору лінії обриса площина симетрії конуса може бути знайдена тільки наближено. Пропонується такий алгоритм. Сформульовано критерій придатності даного конуса для моделювання поверхонь обертання.*

*Ключові слова: дизайн, комп'ютерне моделювання, перспектива, лінія обриса, поверхні обертання, площина симетрії*

С.Ю. СУЛИМЕНКО, В.А. АНПИЛОГОВА, А.Г. СУЛИМЕНКО  
Киевский национальный университет строительства и архитектуры**ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ КОНУСА, КАСАТЕЛЬНОГО К ПОВЕРХНОСТИ  
ВРАЩЕНИЯ, ПО ЭСКИЗУ ЛИНИИ ОЧЕРТАНИЯ**

*Проанализированы свойства конуса общего положения, касательного к некоторой поверхности вращения. По результатам анализа сформулирован критерий симметрии пары образующих относительно неизвестной плоскости симметрии поверхности конуса. Показано, что пара симметричных образующих однозначно определяет плоскость симметрии. Для заданной эскизно на экране монитора линии очертания плоскость симметрии может быть найдена только приблизительно. Предлагается такой алгоритм. Сформулирован критерий использования данного конуса для моделирования поверхностей вращения.*

*Ключевые слова: дизайн, компьютерное моделирование, перспектива, линия очертания, поверхности вращения, плоскость симметрии*

S.Y. SULIMENKO, V.A. ANPILOGOVA, A.G. SULIMENKO  
Kiev national university of civil engineering and architecture**CONSTRUCTION OF THE PLANE OF SYMMETRY OF THE CONE TANGENT TO THE SURFACE OF  
REVOLUTION ACCORDING TO THE SKETCH OF THE OUTLINE**

*In current work properties of cone of general position tangent to some surface of revolution were analyzed. Based on the results of the analysis, a criterion for the symmetry of the pair of creation lines relative to the unknown plane of symmetry of the cone surface is formulated. It is shown that a pair of symmetric creation lines also unequivocally determines the plane of symmetry. For a given line of the outline sketch on the screen, the plane of symmetry can only be found approximately. Following algorithm is proposed. The criterion for using this cone for the modeling of surfaces of revolution is formulated.*

*Keywords: design, computer modeling, perspective, outline, surfaces of revolution, plane of symmetry*

**Постановка проблеми**

Сучасний рівень розвитку технологій та засобів дизайну відкриває нові можливості для комп'ютерного проектування на перспективних зображеннях. Однією з основних задач дизайнера при такому проектуванні є побудова штучного середовища та вписування в нього об'єкта, що проектується. Досягнення органічного взаємозв'язку між призначенням та формою об'єкта проектування виникає внаслідок адекватного вписування його обриса в навколишнє середовище.

Роботи в цьому напрямку проводяться [1, 5], але вони далекі від розв'язання як у геометричному, так і в комп'ютерно-технічному та дизайнерських планах. Наведені дослідження присвячені комп'ютерному моделюванню поверхонь обертання за перспективною лінією обриса. Таке моделювання неможливе без встановлення площини симетрії обгортувальних конусів. Якщо площина симетрії не задана заздалегідь, то задача має тривіальний розв'язок лише тоді, коли ця площина перпендикулярна як картині, так і предметній площині. У випадку конусів другого порядку достатньо перпендикулярності картині. В роботі пропонується алгоритм знаходження такого розв'язання у загальному випадку.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Пряма задача побудови обгортувального конуса для аналітично заданої поверхні вперше була розв'язана ще Гаспаром Монжем. Проте алгоритми комп'ютерної графіки, орієнтовані на побудову обрису довільного об'єкту, мають ітераційний характер, а сам обрис, навіть при розв'язанні прямої задачі, існує як растрова границя між зображенням об'єкта та вільним полем екрану.

Щодо оберненої задачі, то вона, в будь-якому разі, може бути розглянута як задача розпізнавання образів. Це, перш за все, фотограмметрія, а також відтворення форми прообразу по фотографіям, зробленим з фіксованих точок зору (наприклад, відтворення форми тіла конкретної людини).

На даний момент найпоширенішим завданням спеціаліста з 3D-моделювання є побудова просторової моделі за так званим концепт-артом, тобто ескізним малюнком від художника-дизайнера. Це досить трудомісткий процес, що вимагає кропіткої та уважної праці.

Виходячи з цього, зниження трудовитрат на моделювання є пріоритетним завданням провідних розробників програмного забезпечення. Алгоритми (зміст яких приховано), що використовують у сучасних комп'ютерних системах і надають можливість такого спрощеного моделювання, здатні забезпечити результат достатній для якісної 3D-візуалізації, але такий, що потребує досить важкого ручного редагування при використанні для створення реальних об'єктів.

Тому алгоритми, які ставлять у відповідність візуальному образу точну геометричну модель, мають свою сферу використання. Побудова площини симетрії конуса, що обгортає поверхню обертання, орієнтована саме на ці цілі.

У випадку конуса другого порядку задача має строгий аналітичний розв'язок [4], який було застосовано для моделювання поверхонь обертання другого порядку [6]. Цей алгоритм вимагає рівняння кривої в неявній формі і зводиться до розв'язання характеристичного рівняння третього степеня.

Проте такий підхід не відповідає сучасним тенденціям, тому що додатки до систем автоматизованого проектування краще створювати на основі синтетичної геометрії [2–3]. Так в роботі [3] осі конуса другого порядку побудовані з залученням методів проєктивної геометрії. Але це не вирішує проблеми з конусом загальної форми.

**Мета дослідження**

Сформулювати властивості симетричного конуса, які можуть бути встановлені при несиметричному завданні його напрямної. Виявити критерії симетрії такого конуса та на їх основі запропонувати ітераційний алгоритм пошуку площини симетрії. Встановити критерії придатності ескізного контуру в якості напрямної конусу, що обгортає деяку поверхню обертання (а тому і двопараметричну множину поверхонь).

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Розглянемо конус, що є дотичним до поверхні обертання. Він обов'язково має принаймні одну площину симетрії, а його напрямна крива (лінія обрису на картині) визначена разом зі своїми дотичними.

Такий конус будемо вважати *коректним*. Цим умовам відповідають усі конуси другого порядку.

Зауваження: коректний дотичний конус побудувати шляхом довільного завдання кривої  $m$  неможливо. При алгоритмічній побудові зазвичай не втрачається інформація і про площину симетрії. Але і така задача має місце, коли контур поверхні обертання зафіксовано на фотографії з відомого центру. Проте властивість коректного конуса наводиться далі з метою застосування її в некоректній ситуації.

*Властивість 1.* Коректний конус задається вершиною  $S$  та лінією обрису  $m$  (рис.1) На ньому знайдено дві твірні  $SA$  та  $SB$  ( $A \in m, B \in m$ ). Разом з дотичними до кривої  $m$  ( $BC, AC$ ) вони утворюють дотичні площини до конуса. Якщо бісекторна площина  $SCB$  двогранного кута при ребрі  $SC$  перетинає трикутник  $ASD$  по бісектрисі кута між прямими  $SA$  та  $SB$ , то така площина є площиною симетрії всього конуса.

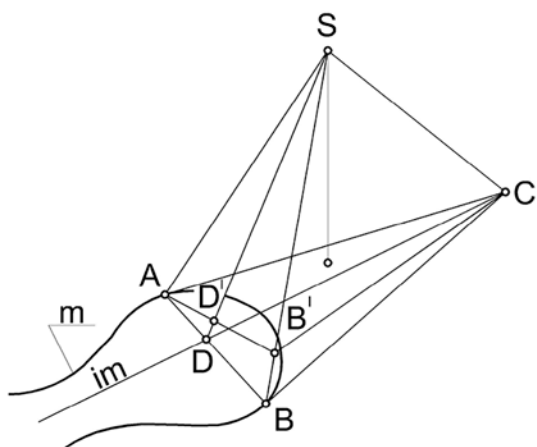


Рис.1. Ілюстрація до властивості 1

Така властивість впливає з одного із можливих методів побудови коректного конуса (рис. 2а). В площині  $I$  задається симетрична крива  $m'$ , де  $im'$  – її вісь симетрії. Площина  $II$  перпендикулярна до  $I$  проведена через вісь симетрії  $im'$ . Вершина  $S \in II$  обирається довільно.  $\{S, m'\}$  – коректний конус поверхні обертання за побудовою.  $B'A'$  – деяка хорда кривої  $m'$  перпендикулярна до вісі  $im'$ . Вісь поділяє цю хорду навпіл:  $|BD'| = |D'A'|$ . Дотичні до  $m'$  в точках  $A'$  та  $B'$  перетинаються в точці  $C' \in im'$ . Внаслідок симетрії маємо:  $B'C' = A'C'$  та  $B'S = SA'$ . Тобто, в цьому симетричному випадку  $II$ , бісекторна площина дотичних площин  $B'SC'$  та  $A'SC'$  перетинає трикутник  $B'SA'$  по бісектрисі  $SD'$ .

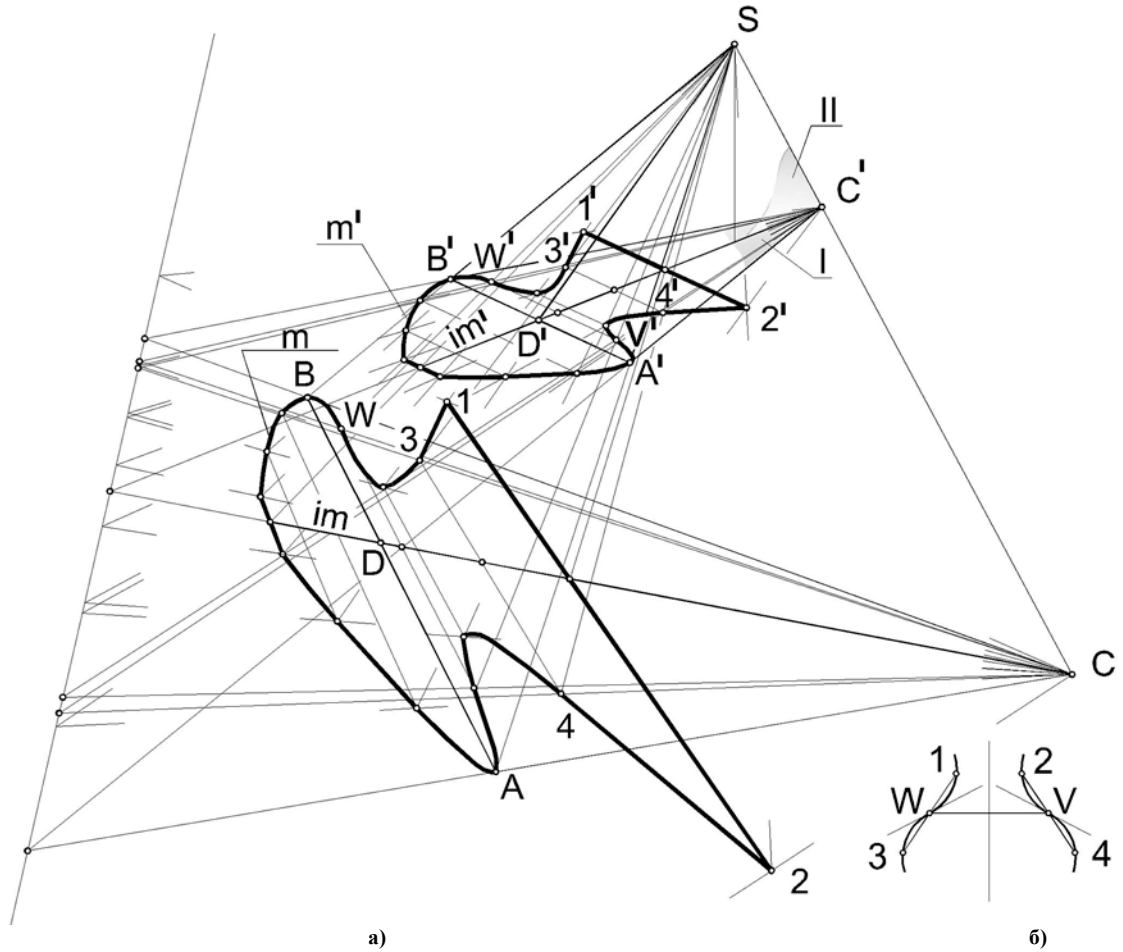


Рис. 2. Побудова несиметричного перерізу коректного конуса

Спроекуємо з вершини конуса  $S$  криву  $m'$  на площину, яку задає довільна точка  $C \in SC'$  та ось гомології  $k$ . Будемо вважати цю площину картиною  $K$ , побудовану криву  $m$  – лінією обрису, а  $S$  точкою зору.

Зрозуміло, що конус  $\{S, m\}$  співпадає з конусом  $\{S, m'\}$  і є коректним. Тому твірні  $SA$  та  $SB$ , дотичні площини в них  $SAC$  і  $SBC$ , бісекторна площина  $SDC$  і бісектриса кута між  $SA$  і  $SB$ , залишились без змін, а тому: якщо дві твірні симетричні відносно площини симетрії коректного конуса, то бісекторна площина їх дотичних площин інцидентна бісектрисі кута між твірними.

Точки  $A$  та  $B$  несиметричні відносно площини  $\Pi$  і  $BD \neq AD$ . Якщо на  $SA$  та  $SB$  відкласти рівні відрізки  $SB'$  та  $SA'$ , то  $BD' = DA'$ .

Властивість 1 наводилась з метою встановлення критерію симетрії двох довільних твірних коректного конусу відносно невідомої площини симетрії. Таких критеріїв може бути декілька. Наприклад, рівність прямих  $AC$  та  $B'C$  на рис.1. Але точка  $C$  їх перетину може бути віддалена, тому важко співвідносити похибку з довжиною самих ліній і зробити критерій знаковим. Він може бути замінений рівнозначним, як оцінка рівності відрізків  $BD'$  та  $DA'$ . Це обчислюють наступним чином:

1. Обирають дві довільні точки  $A$  та  $B$  кривої  $m$ . Записують рівняння дотичних площин в невідомому вигляді таких, що належать твірній та дотичній в точках  $A$  та  $B$ , які за умовою визначені.
2. Складається рівняння бісекторної площини  $\Pi$ .
3. Знаходяться точки  $B'$  та  $A'$  такі що  $|B'S| = |A'S|$ . Розумно знаходити тільки одну точку, на твірній, що має більшу довжину (як на рис.1).
4. Визначається точка  $D'$  перетину площини  $\Pi$  та прямої  $AB'$ .
5. Остаточний критерій має вигляд:

$$KR = \frac{|B'D'| - |A'D'|}{|A'B'|}$$

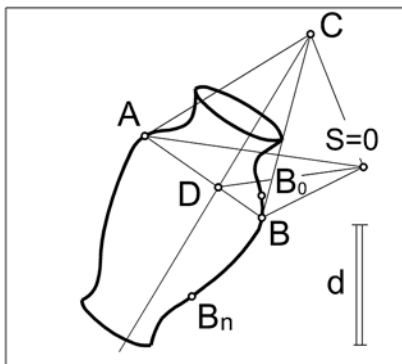
Це відносний критерій. Він не залежить від довжини відрізків  $SA'$  та  $SB'$  і дорівнює нулю при симетрії твірних. В цьому разі площина  $II$  буде площиною симетрії всього коректного конуса. Якщо знайти ще одну пару симетричних твірних  $A_iS$  та  $B_iS$ , то в перетині прямих  $A_iB_i \cap AB$  отримаємо центр пучка, що встановлює всю множину пар симетричних твірних. Це впливає з того, що всі хорди  $A'_iB'_i$  перпендикулярні площині симетрії, тобто паралельні між собою і мають на картині точку сходу.

Зауваження: є особливості, які не змінюються при перетворенні симетричного контуру  $m$  в несиметричний  $m'$ .

Перше: наявність прямолінійних відрізків. Наприклад прямі  $(1,3)$  та  $(2,4)$  при симетризації контуру переходять в прямі  $(1',3')$  та  $(2',4')$  і вісь всього конуса може бути знайдена як бісектриса кута між площинами  $S13$  та  $S24$ .

Друге: якщо вершина  $S$  не належить площині  $I$  та площина кривої  $m'$  не належить дотичним в точках перегину, то точки перегину при симетризації контуру перейдуть також в точки перегину. На рис. 2б) задано фрагмент з точками перегину. Нехай січні в точках перегину замінять криву. Вони перетинають дотичну в точках перегину. Це означає, що при перспективному перетворенні вони теж будуть перетинати дотичну і лінії перегину зберігаються. Тому пара точок перегину теж однозначно задає площину симетрії коректного конуса.

Ітераційний алгоритм пошуку площини симетрії коректного конуса в загальному випадку полягає в наступному:



величини  $KR$  на границях.

Рис. 3. Ілюстрація до роботи ітераційного алгоритму

1. На кривій обирається довільна точка  $A$  (рис. 3), яка не є точкою перегину і дві точки  $B_n$  та  $B_0$  так, щоб між ними не було точки перегину. В цьому разі критерій  $KR$  буде змінюватись монотонно.
2. В точках  $B_0$  та  $B_n$  визначаються  $KR$  для пар хорд  $SB_0$  і  $SA$  та  $SB_n$  і  $SA$ . Якщо  $KR_0$  і  $KR_n$  мають різні знаки то розв'язок лежить в інтервалі  $(B_0, B_n)$  і знаходиться шляхом поділення інтервалу параметрів навпіл. За наступний з двох інтервалів обирається інтервал з різними знаками

3. Якщо  $KR_0$  і  $KR_n$  мають однакові знаки, то розв'язку може не бути. В разі його відсутності точка з меншим по модулю значенням залишається границею інтервалу, а друга задається ззовні інтервалу. Має виконуватись умова, що точка перегину може бути тільки граничною.

Алгоритм працює в автоматизованому режимі в тому сенсі, що початкові точки  $A$ ,  $B_0$  та  $B_n$  користувач задає самостійно.

Цей алгоритм працює у випадку кривих другого порядку. Криві другого порядку привабливі в якості обрисів поверхонь обертання, тому що побудовані на їх основі поверхні з будь якої точки зору утворюють обриси, що мають власну вісь симетрії.

Критерії і алгоритми націлені, перш за все, на випадки некоректного конуса, які виникають при ескізного завданні лінії обрису. Площини симетрії в цьому разі може взагалі не бути. Щоб з'ясувати це знаходиться множина симетричних пар твірних. Кожна з них визначає точку на картині, що має належати сліду площини симетрії.

Для реалізації цієї задачі була створена програма Outline на базі інтегрованого середовища розробки Unity з можливістю імпорту файлів креслення AutoCAD та подальшої їх обробки. Роботу цієї програми проілюстровано прикладом (рис. 4).

В робочому полі AutoCAD користувач задає довільну криву деякою ламаною. В даному випадку схожу на параболу з вертикальною віссю. Функцією «Smooth» він виконує згладжувальну апроксимацію кривої, та функцією "Path array" задає  $N$  точок, що описані 3D-об'єктами "сфера" з дотичними в них, що описані 3D-об'єктами "циліндр". Ця інформація експортується графічним редактором в форматі ".FBX". Отриманий файл імпортується у підготовлену сцену програми Outline у комплексі Unity.

В програмі Outline користувач виділяє із загального масиву  $N$  робочих точок (в прикладі  $N=3$ , точки  $A_1, A_2, A_3$ ) та робочий інтервал  $B_0, B_n$ , який може бути спільним для всіх робочих точок. За розробленим алгоритмом знаходяться точки  $D_1, D_2, D_3$ . Точки  $D_i$  є наближеною інформацією для побудови сліду  $it$  площини симетрії конусу на картині. Розрахунок проводиться за методом найменших квадратів та оцінюється коефіцієнтом кореляції  $r$  [7], модуль якого має наближатись до одиниці. Остаточне рішення щодо прийнятності результату залишається на розсуд користувача. При позитивному рішенні користувач



обирає одну з гілок кривої обмежену  $im$  і за алгоритмом, розробка і реалізація якого описана в [5], буде поверхню обертання, ось якої належить площині  $II \{S, im\}$ . На рис. 4 це вісь (1, 2), що обмежена точкою 3.

В табл. 1 наведено результати по визначенню осі  $im$ : координати знайдених точок  $D_i$ , результат їх лінійної апроксимації та критерій кореляції. Висока якість, показана критерієм, в значній мірі обумовлена простою вихідної інформації.

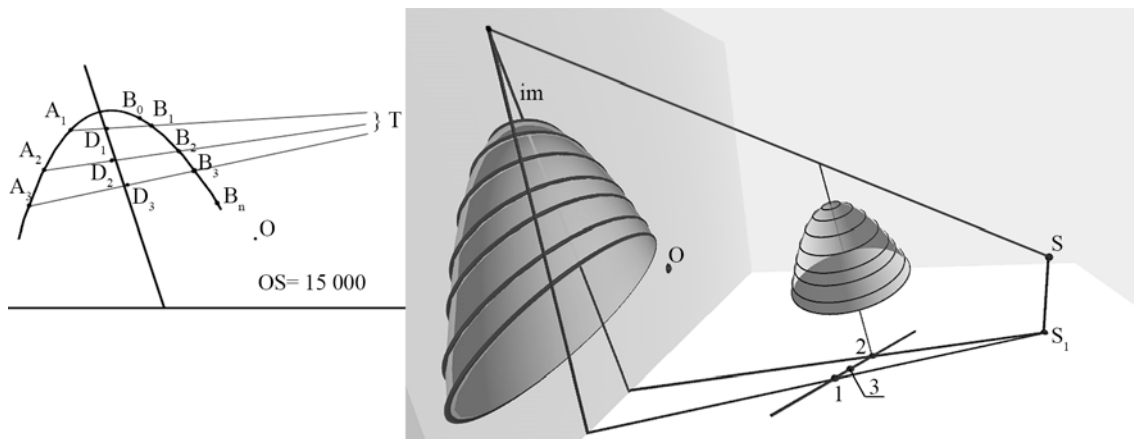


Рис. 4. Конкретний приклад побудови поверхні обертання за ескізно заданою лінією обрису.

Таблиця 1

Точка	x (мм)	y (мм)	KR i	y = ax + b		r
				a	b	
D <sub>1</sub>	-4651,72	1558,418	0,0014	-2,54813	-10073,6	0,97446
D <sub>2</sub>	-5271,84	3791,112	0,0072			
D <sub>3</sub>	-5924,25	4811,921	0,0049			

**Висновки**

Доведені властивості, запропонований критерій та розроблені алгоритми, що реалізовані в програмному вигляді, дають надію, що зроблено певний крок у моделюванні поверхонь за ескізами перспективної лінії обрису.

**Список використаної літератури**

1. Сазонов К.А. Диалоговое графическое пространственное проектирование: автореф. дисс. на соискание учен. степени доктора техн.наук : спец. 05.16.12 "САПР"/ Константин Александрович Сазонов. – М.,1988. – 38 с.
2. Несвідомін В.М. Комп'ютерні моделі синтетичної геометрії : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук : спец. 05.01.01. "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Віктор Миколайович Несвідомін. – К.,2008. – 38с.
3. Короткий В. А. Геометрическое моделирование поверхности посредством ее отображения на четырехмерное пространство / В. А. Короткий // Омский научный вестник – 2015. –№ 1(137). – С. 8-12.
4. Моденов П.С. Аналитическая геометрия / П. С. Моденов. – М.: изд. "Московский университет", 1969. – 698 с.
5. Сазонов К.О. Моделювання поверхонь обертання на перспективних зображеннях / К.О.Сазонов, Г.Г. Суліменко, С.Ю. Суліменко // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2016. – Вип.5. – С.110-115.
6. Суліменко С.Ю. Формоутворення поверхонь обертання другого порядку за їх лініями обрису / С.Ю. Суліменко, В.О.Анпілогова, Ж.Г.Левіна // Сучасні проблеми архітектури та містобудування. – К. : Видавництво КНУБА, 2016. – Вип.44. – С. 313-320.
7. Щербаков И.Н. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ, Материалы к лекционному курсу [Електронний ресурс] / Игорь Николаевич Щербаков – Режим доступу: [http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/Reg\\_MNK.htm](http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/Reg_MNK.htm).

УДК 519.632.4

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Т.А. СЕЛУЯНОВА, Н.В. СТАРУН  
Херсонський національний технічний університет**ІЄРАРХІЧНІ СХЕМИ В ЗАДАЧАХ ЕРМИТОВОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ**

*В статті проведено порівняльний аналіз властивостей інтерполяційних поліномів, що будуються за ієрархічною схемою Ерміта та за методом базисних елементів. Показано, що інтерполяційні поліноми, які отримані за методом базисних елементів, є окремим випадком ієрархічних інтерполяційних поліномів, які отримані за схемою Ерміта. Доведено, що на однакових сітках та при однакових степенях інтерполяційних поліномів ці два підходи приводять до побудови тотожних поліномів.*

*Ключові слова: інтерполяційний поліном, ермітова інтерполяція, метод базисних елементів.*

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Т.А. СЕЛУЯНОВА, Н.В. СТАРУН  
Херсонский национальный технический университет**ИЄРАРХИЧЕСКИЕ СХЕМЫ В ЗАДАЧАХ ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ**

*В статье выполнен сравнительный анализ свойств интерполяционных полиномов, построенных на основе иерархической схемы Эрмита и по методу базисных элементов. Показано, что интерполяционные полиномы, полученные методом базисных элементов, являются частным случаем иерархических интерполяционных полиномов, полученных по схеме Эрмита. Доказано, что на одинаковых сетках и при одинаковых степенях интерполяционных полиномов эти два подхода приводят к построению тождественных полиномов.*

*Ключевые слова: интерполяционный полином, эрмитова интерполяция, метод базисных элементов.*

H.Ya. TULUCHENKO, T.A. SELUIANOVA, N.V. STARUN  
Kherson National Technical University**THE HIERARCHICAL SCHEMES IN THE PROBLEMS OF HERMITE'S INTERPOLATION**

*In the article the comparative analysis for the properties of interpolation polynomials, which are constructed on the basis of Hermite's hierarchical scheme and on the method of basis elements is completed. It is shown that the interpolation polynomials, which are obtained by the basis element method, are a special case of hierarchical interpolation polynomials, which are obtained by the Hermite's scheme. It is proved that on the identical grids and with the same degrees of interpolation polynomials, these two approaches lead to the construction of an identical polynomials.*

*Keywords: interpolation polynomial, Hermite interpolation, the method of basic elements.*

**Постановка проблеми**

У літературі з обчислювальних методів відзначається занадто громіздкий вигляд загального виразу інтерполяційного полінома за схемою Ерміта для його практичного застосування [11]. В той же час відомі прийоми на основі застосування матричного числення для переходу від класичної схеми ермітової інтерполяції до її ієрархічної модифікації. Отримувані при цьому інтерполяційні поліноми є тотожними, але розкладені за різними базисами у просторі поліномів не вище фіксованого степеня [9–10]. Отже, існує нескінченна множина базисів, що складаються із ієрархічних функцій, за якими може бути розкладений інтерполяційний поліном у схемі Ерміта. Реалізація модифікованих схем Ерміта при застосуванні ієрархічних базисів характеризується суттєвим зменшенням об'ємів виконуваних арифметичних операцій.

Таким чином, при розробці інтерполяційних схем без використання апарату матричного числення їх ідентифікація стосовно належності до ієрархічних схем ермітової інтерполяції є не завжди очевидною.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

В численних роботах Дикусара Н.Д. [1–8] розробляється метод базисних елементів (МБЕ), який на початку свого створення був орієнтований на оптимізацію алгоритму інтерполяції функції одного змінного на заданому відрізьку. Надалі метод був узагальнений для розв'язання задач кусочно-поліноміальної апроксимації у різноманітних постановках. Метод базисних елементів позиціонується розробником як такий, що має переваги по оцінкам точності, приводить до зниження складності розрахункових алгоритмів стосовно відомих методів, тощо.

Алгоритм реалізації ермітової інтерполяції описаний практично в усіх посібниках з чисельних методів. Розрахункова схема на основі використання блочних матриць для побудови ієрархічних інтерполяційних поліномів обґрунтовується в роботі [11].

**Мета дослідження**

Метою дослідження є доведення тотожності інтерполяційних поліномів рівних степенів, що будуються на однакових сітках за методом базисних елементів та за класичною схемою інтерполяції Ерміта.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Розглянемо задачу побудови ермітової інтерполяції на трьохточковій сітці  $\Delta_3^{ab} : x_a < x_0 < x_b$ . Не зменшуючи загальності отриманих результатів, будемо вважати, що  $x_0 = 0$ .

**Інтерполяційний поліном Дикусара Н.Д.** У МБЕ інтерполяційний поліном  $\varphi_D(x)$  (індекс обрано за прізвищем розробника метода) для функції  $f(x)$  (яка є диференційованою потрібну кількість разів) шукається у локальній системі координат на відрізку  $[x_a; x_b]$  у вигляді:

$$\varphi_D(x) = \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{r}_j = \sum_{j=0}^m Q^j \cdot \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{r}_j, \tag{1}$$

де  $\mathbf{r}_j = (r_{ja}; r_{jb}; r_{j0})$  – вектор невідомих шуканих коефіцієнтів;

$\mathbf{w} = (w_1; w_2; w_3)$  – вектор базисних елементів у вигляді поліномів другого степеня:

$$w_1 = -\frac{x(x-x_b)}{x_a(x_b-x_a)}; \quad w_2 = \frac{x(x-x_a)}{x_b(x_b-x_a)}; \quad w_3 = \frac{(x-x_a)(x-x_b)}{x_a x_b};$$

$Q = (x-x_a) \cdot x \cdot (x-x_b)$  – допоміжна "зануляюча" кубічна парабола

Особливістю полінома (1) є те, що він має найстарший степінь виключно  $(3m+2)$ . Невідомі коефіцієнти  $\mathbf{r}_j$  знаходяться із вимоги рівності значень інтерполяційного полінома та значень його похідних в вузлах сітки із відповідними значеннями функції, що інтерполюється, та її похідних:

$$(f(x) - \varphi_D(x))^{(j)} \Big|_{x=x_a, x_b, x_0} = 0, \quad j = \overline{0; m}. \tag{2}$$

Особлива структура полінома (1) призводить до того, що кожне рівняння системи (2) містить тільки один невідомий коефіцієнт із вектора  $\mathbf{r}_j$ .

Звернемо увагу на те, що вимоги (2) співпадають із вимогами до інтерполяційного полінома Ерміта  $\varphi_E(\tau)$  з тими ж вузлами  $\{x_a, x_0, x_b\}$ .

**Інтерполяційний поліном Ерміта.** Розглянемо класичну схему Ерміта для побудови інтерполяційного полінома, як і у попередньому випадку, степеня  $(3m+2)$  на сітці  $\Delta_3^{ab}$ . Поліноми степеня не старше  $(3m+2)$  утворюють лінійний простір із стандартним базисом, що складається з мономів  $\{x^i\}$ ,  $i = \overline{0; 3m+2}$ . Отже, досліджуваний лінійний простір має вимірність  $3 \cdot (m+1)$ .

При реалізації класичної інтерполяційної схеми за Ермітом у кожному вузлі інтерполяції мають бути відомі значення функції, що підлягає наближенню, та значення її похідних. Для нашої досліджуваної сітки з трьома вузлами будемо мати  $3 \cdot (m+1)$  базисні функції:

$$N = (N_1(x), N_2(x), \dots, N_{3 \cdot (m+1)}(x))^T,$$

які утворюють інтерполяційний поліном за правилом:

$$\varphi_E(x) = \left( f_{Val} \mid f_{Val}^{(1)} \mid f_{Val}^{(2)} \mid \dots \mid f_{Val}^{(m)} \right) \cdot N, \tag{3}$$

де  $\left( f_{Val} \mid f_{Val}^{(1)} \mid f_{Val}^{(2)} \mid \dots \mid f_{Val}^{(m)} \right)$  – блочний вектор-рядок із  $(m+1)$  блоків зі значеннями функції, що інтерполюється, та її похідних до порядку  $m$  в вузлах сітки  $\Delta_3^{ab}$ ;

$\left| f_{Val}^{(i)} \right| = \left| f^{(i)}(x_a) \quad f^{(i)}(x_b) \quad f^{(i)}(0) \right|$  – вміст  $i$ -ого блоку,  $i = \overline{0; m}$ .

В статті [10] показано як, знаючи стандартний базис лінійного простору і сітку вузлів інтерполяції, можна побудувати множину базисних функцій, які асоційовані з вузлами сітки:

$$E_{3 \cdot (m+1) \times 3 \cdot (m+1)} = C_{3 \cdot (m+1) \times 3 \cdot (m+1)} \cdot \left( X_{Val} \mid X_{Val}^{(1)} \mid X_{Val}^{(2)} \mid \dots \mid X_{Val}^{(m)} \mid \right),$$

де  $C_{3 \cdot (m+1) \times 3 \cdot (m+1)}$  – матриця розмірності  $3 \cdot (m+1) \times 3 \cdot (m+1)$  коефіцієнтів базисних функцій  $N$ ;

$E_{3 \cdot (m+1) \times 3 \cdot (m+1)}$  – одинична матриця аналогічної розмірності;

$\left( X_{Val} \mid X_{Val}^{(1)} \mid X_{Val}^{(2)} \mid \dots \mid X_{Val}^{(m)} \mid \right)$  – блочна матриця розмірності  $3 \cdot (m+1) \times 3 \cdot (m+1)$ ,

$X_{Val}$  – транспонована матриця Вандермонда для вузлів сітки  $\Delta_3^{ab}$  розмірності  $3 \cdot (m+1) \times 3$ ;

$X_{Val}^{(i)}$  – матриці значень  $i$ -их похідних від функцій стандартного базису в вузлах сітки  $\Delta_3^{ab}$  розмірності  $3 \cdot (m+1) \times 3$ .

Очевидно, що

$$C = E \cdot \left( X_{Val} \mid X_{Val}^{(1)} \mid X_{Val}^{(2)} \mid \dots \mid X_{Val}^{(m)} \mid \right)^{-1} = \left( X_{Val} \mid X_{Val}^{(1)} \mid X_{Val}^{(2)} \mid \dots \mid X_{Val}^{(m)} \mid \right)^{-1}$$

Тоді базисні функції можуть бути знайдені так:

$$N = \left( X_{Val} \mid X_{Val}^{(1)} \mid X_{Val}^{(2)} \mid \dots \mid X_{Val}^{(m)} \mid \right)^{-1} \cdot X_e,$$

де  $X_e$  – вектор-стовпець із функцій стандартного базису;

**Твердження.** Інтерполяційні поліноми рівних степенів, які отримані за методом базисних елементів (1), та інтерполяційні поліноми, які отримані за схемою Ерміта (3), на однакових сітках є тотожними.

**Доведення.**

**Частина I.** Позначимо за  $D$  матрицю коефіцієнтів базисних функцій для полінома Дикусара Н.Д.:

$$D = \left( w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad Qw_1 \quad Qw_2 \quad Qw_3 \dots Q^m w_1 \quad Q^m w_2 \quad Q^m w_3 \right)^T. \quad (4)$$

Як показано далі (у частині II) визначник матриці  $D$  не дорівнює нулю при виконанні умов задачі. Це означає, що функції (4) утворюють базис лінійного простору поліномів степеня не старше  $(3m+2)$ . Отже, існує матриця переходу  $T$  від базису ермітової інтерполяції до базису поліномів Дикусара Н.Д.:

$$T \cdot \left( X_{Val} \mid X_{Val}^{(1)} \mid X_{Val}^{(2)} \mid \dots \mid X_{Val}^{(m)} \mid \right)^{-1} = D. \quad (5)$$

Тоді вектор вагових коефіцієнтів інтерполяційного полінома Дикусара Н.Д. може бути отриманий із вектора вагових коефіцієнтів інтерполяційного полінома Ерміта за допомогою формули:

$$\left( r_{0a} \quad r_{0b} \quad r_{00} \quad \dots \quad r_{ma} \quad r_{mb} \quad r_{m0} \right) = \left( f_{Val} \mid f_{Val}^{(1)} \mid f_{Val}^{(2)} \mid \dots \mid f_{Val}^{(m)} \mid \right) \cdot T^{-1} \quad (6)$$

**Частина II.** Нехай  $m=0$ , тоді базис лінійного простору інтерполяційного полінома Дикусара Н.Д. складається із трьох поліномів  $\{w_1, w_2, w_3\}$ . Матриця  $D$  в цьому випадку має вигляд:

$$D \Big|_{m=0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_b}{(x_b - x_a) \cdot x_a} & -\frac{1}{(x_b - x_a) \cdot x_a} \\ 0 & -\frac{x_a}{(x_b - x_a) \cdot x_b} & \frac{1}{(x_b - x_a) \cdot x_b} \\ 1 & -\frac{x_b + x_a}{x_b \cdot x_a} & \frac{1}{x_b \cdot x_a} \end{pmatrix}.$$

Її визначник дорівнює  $\|D \Big|_{m=0}\| = \frac{1}{x_a x_b (x_b - x_a)}$ , тобто є відмінним від нуля.

Нехай тепер  $m=1$ , тоді базис лінійного простору інтерполяційного полінома Дикусара Н.Д. складається із шести поліномів  $\{w_1, w_2, w_3, Qw_1, Qw_2, Qw_3\}$ . Матриця  $D$  в цьому випадку має вигляд:

$$D \Big|_{m=1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_b}{(x_b - x_a) \cdot x_a} & -\frac{1}{(x_b - x_a) \cdot x_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x_a}{(x_b - x_a) \cdot x_b} & \frac{1}{(x_b - x_a) \cdot x_b} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{x_b + x_a}{x_b \cdot x_a} & \frac{1}{x_b \cdot x_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_b^2}{x_b - x_a} & -\frac{(2x_a + x_b) \cdot x_b}{(x_b - x_a) \cdot x_a} & \frac{x_a + 2x_b}{(x_b - x_a) \cdot x_a} & -\frac{1}{(x_b - x_a) \cdot x_a} \\ 0 & 0 & -\frac{x_a^2}{x_b - x_a} & \frac{(x_a + 2x_b) \cdot x_a}{(x_b - x_a) \cdot x_b} & -\frac{2x_a + x_b}{(x_b - x_a) \cdot x_b} & \frac{1}{(x_b - x_a) \cdot x_b} \\ 0 & x_b \cdot x_a & -2 \cdot (x_a + x_b) & \frac{(x_a^2 + 4x_b \cdot x_a + x_b^2)}{x_b \cdot x_a} & -\frac{2 \cdot (x_a + x_b)}{x_b \cdot x_a} & \frac{1}{x_b \cdot x_a} \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю  $D \Big|_{m=1}$  на чотири квадратні блоки та застосуємо для обчислення її визначника відому формулу [12, С. 57]:

$$\begin{vmatrix} D_{11} & 0 \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} = \|D_{11}\| \cdot \|D_{22}\|.$$

Очевидно, що  $\|D_{11}\| = \|D \Big|_{m=0}\| \neq 0$ . Безпосереднім обчисленням пересвідчуємося, що визначник  $\|D_{22}\|$  є також відмінним від нуля:

$$\|D_{22}\| = \frac{1}{x_a x_b (x_b - x_a)}.$$

Отже,  $\|D \Big|_{m=1}\| \neq 0$ . Кожна наступна матриця  $D \Big|_m$  коефіцієнтів поліномів  $\{w_1, w_2, w_3, Qw_1, Qw_2, Qw_3, \dots, Q^m w_1, Q^m w_2, Q^m w_3\}$  утворюється із попередньої  $D \Big|_{m-1}$

додаванням до неї трьох рядків із коефіцієнтами поліномів  $\{Q^m w_1, Q^m w_2, Q^m w_3\}$ . Тоді визначник  $\|D\|_m$  також можна розбити на чотири блоки, де  $\|D_{11}\| = \|D\|_{m-1} \neq 0$ , а у визначнику  $\|D_{22}\|$  кожний рядок складається із трьох коефіцієнтів при старших степенях поліномів  $\{Q^m w_1, Q^m w_2, Q^m w_3\}$ . Пропускаючи не складні, але надзвичайно громіздкі перетворення, запишемо вигляд визначника блока  $D_{22}$  при довільному значенні  $m \in N$ :

$$\|D_{22}\|_m = \frac{1}{x_a^2 x_b^2 (x_b - x_a)^2} \cdot \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2}m(m-1)x_a^2 + m(m+1)x_a x_b + \frac{1}{2}m(m+1)x_b^2\right) & (mx_a + (m+1)x_b) & 1 \\ \left(\frac{1}{2}m(m+1)x_a^2 + m(m+1)x_a x_b + \frac{1}{2}m(m-1)x_b^2\right) & ((m+1)x_a + mx_b) & 1 \\ \left(\frac{1}{2}m(m+1)x_a^2 + (m+1)^2 x_a x_b + \frac{1}{2}m(m+1)x_b^2\right) & ((m+1)x_a + (m+1)x_b) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x_a x_b (x_b - x_a)} \neq 0.$$

Таким чином, доведено, що система поліномів

$$\{w_1, w_2, w_3, Qw_1, Qw_2, Qw_3, \dots, Q^m w_1, Q^m w_2, Q^m w_3\}$$

утворює базис лінійного простору поліномів степеня не більшого за  $3m+2$ .

**Висновки**

У статті доведено, що інтерполяційні поліноми, які побудовані за схемою Ерміта (3) та за методом базисних елементів (1), є тотожними на однакових сітках. Формули (5–6) описують зв'язок між базисами, що використовуються в цих двох випадках. Розрахункова схема, що запропонована д.ф.-м.н. Н.Д. Дикусаром, є за своєю природою ієрархічною і, відповідно, більш ефективною при проведенні уточнюючих досліджень. Матричний підхід, що застосований авторами даної публікації, вимагає виконання значно більшої кількості арифметичних операцій для побудови інтерполяційного полінома, але дозволяє запропоноване доведення зробити наочним.

Відповідно для обох досліджених у статті форм інтерполяційного полінома має місце однакова поточкова оцінка похибки інтерполяції:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\max |f^{(3m+3)}(x)|}{(3m+3)!} \cdot |(x - x_a)^{m+1} (x - x_0)^{m+1} (x - x_b)^{m+1}|, \quad x \in [x_a; x_b]$$

**Список використаної літератури**

1. Dikoussar N.D. Function Parametrization by using 4-point Transforms / N.D. Dikoussar // Computer Physics Communication. – 1997. – Vol. 99. – PP. 235-254.
2. Дикусар Н.Д. Кусочно-кубическая аппроксимация в режиме автоматического слежения / Н.Д. Дикусар, Ч. Торок. – Дубно: ОИЯИ, 2004. – 19 с. – (Препринт / Объединенный институт ядерных исследований; P11-2004-187).
3. Dikoussar N. D. Four-Point Transformation Methods in Approximation and the Smoothing Problems / N.D. Dikoussar // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2008. – Vol. 5, № 3. – PP. 317–323.
4. Дикусар Н.Д. Метод базисных элементов / Н.Д. Дикусар // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22. – № 12. – С. 115-136.
5. Дикусар Н.Д. Разложение полинома по кубической и квадратичным параболам / Н.Д. Дикусар // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. – 2010. – № 3(2). – С. 93-100.
6. Дикусар Н.Д. Кусочно-полиномиальная аппроксимация шестого порядка с автоматическим обнаружением узлов / Н.Д. Дикусар // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26. – № 3. – С. 31-48.

7. Дикусар Н.Д. Полиномиальная аппроксимация высоких порядков / Н.Д. Дикусар // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27. – № 9. – С. 89-109.
8. Дикусар Н.Д. Оптимизация решения в задачах в задачах кусочно-полиномиальной аппроксимации / Н.Д. Дикусар. – Дубно: ОИЯИ, 2016. – 14 с. – (Препринт / Объединенный институт ядерных исследований; P11-2016-85).
9. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
10. Пинежанинов Ф. Базисные функции для конечных элементов [Электронный ресурс] / Ф. Пинежанинов, П. Пинежанинов. – Режим доступа: <http://old.exponenta.ru/soft/mathemat/pinega/a1/a1.asp>
11. Утешев А.Ю. К задаче полиномиального интерполирования с кратными узлами / А.Ю. Утешев, Г.Ш. Тамасян // Вестник Санкт-Петербургского университета. – 2010. – Серия 10. – Вып. 3. – С. 76-85.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. / Ф.Р. Гантмахер. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 560 с.

УДК 514.18:631.31

В.П. ЮРЧУК, П.М. ЯБЛОНСЬКИЙ

Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"**ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ СПРЯЖЕНИХ ПОВЕРХОНЬ ПРИ КОЧЕННІ  
БЕЗ КОВЗАННЯ В СИСТЕМІ "ВИЛКА–ДИСК"**

*Проаналізовано можливість взаємного визначення однієї спряженої поверхні за існуючими геометричними параметрами іншої. Зокрема, запропоновано визначення параметрів спряжених поверхонь при коченні без ковзання в системі "вилка–диск" з використанням діаграми кінематичного гвинта, яка визначає умови спряження досліджуваних поверхонь та наведений алгоритм побудови даної діаграми.*

*Ключові слова: спряжені поверхні, діаграма кінематичного гвинта, явище інтерференції, робочі органи сільськогосподарських машин, система "вилка–диск".*

В.П. ЮРЧУК, П.Н. ЯБЛОНСКИЙ

Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СОПРЯЖЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ КАЧЕНИИ  
БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ "ВИЛКА–ДИСК"**

*Проанализировано возможность взаимного определения одной сопряженной поверхности по существующим геометрическим параметрам другой. В частности, предложено определение параметров сопряженных поверхностей при качении без скольжения в системе "вилка–диск" с использованием диаграммы кинематического винта, которая определяет условия сопряжения исследуемых поверхностей и приведен алгоритм построения данной диаграммы.*

*Ключевые слова: сопряженные поверхности, диаграмма кинематического винта, явление интерференции, рабочие органы сельскохозяйственных машин, система "вилка–диск".*

V. YURCHUK, P. YABLONSKYI

National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"**PARAMETRS' DETERMINATION FOR CONJUGATE SURFACES ON ROLLING MOVEMENT  
WITHOUT SLIDING IN "CRADLE-DISK" SYSTEM**

*The possibility of mutual determination of one conjugate surface according to the existing geometric parameters of another is analyzed. In particular, it is proposed to determine the parameters of conjugate surfaces during rolling without sliding in the "cradle-disk" system using a diagram of a kinematic screw, which determines the conditions of conjugation of the studied surfaces and gives an algorithm for constructing this diagram.*

*Keywords: conjugate surfaces, diagram of a kinematic screw, interference phenomenon, working bodies of agricultural machines, "cradle-disk" system.*

**Постановка проблеми**

Суттєвим недоліком сучасних методів конструювання робочих органів ґрунтообробних машин є певний традиційний підхід науковців та інженерів-конструкторів, що пов'язано з використанням раніше відомих методів. Одним із ефективних методів, які використовують у машинобудуванні, є метод спряження поверхонь. В сільськогосподарському машинобудуванні він також раціонально став використовуватись при геометричному моделюванні робочих поверхонь ґрунтообробних знарядь, а саме при аналітичному конструюванні вильчатих та дискових копачів коренезбиральних машин.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Нові методи конструювання та отримані відповідно до них геометричні форми робочих органів будуються на базі експериментального підбору, виготовлення великої кількості дослідних зразків та подальшого їх випробування у різних технологічних режимах. Із великої кількості методів проектування лише незначна їх частина базується на графоаналітичних та аналітичних залежностях робочих поверхонь від агротехнічних вимог (методи Гячева Л.В., Буромського В.І. та ін.), які є основою алгоритмів конструювання даних поверхонь в графічному та аналітичному виглядах.

Аналіз останніх досліджень вказує на раціональність використання теорії спряження при проектуванні нових робочих поверхонь та при коригуванні поверхонь існуючих викопуючих робочих органів коренезбиральних машин [1-4].



**Мета дослідження**

Метою даного дослідження є взаємне визначення однієї спряженої поверхні за існуючими геометричними параметрами іншої з використанням діаграми кінематичного гвинта, яка визначає умови спряження досліджуваних поверхонь, зокрема, у системі "вилка–диск".

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Кінематичним гвинтом у загальному вигляді називається плоске зображення 3-х гелікоїдальних поверхонь [5– 6]. Кінематичний гвинт знаходить широке застосування при профілюванні зубчастих передач, при розробці конструкцій складного різального інструменту (багатозахідних чистових черв'ячних фрез), при проектуванні поверхонь робочих органів сільськогосподарських машин та ін.

Самими поширеними поверхнями серед гвинтових, які використовуються в сільськогосподарському машинобудуванні, є гелікоїдальні поверхні [7]. Для взаємного визначення однієї спряженої поверхні за існуючими геометричними параметрами іншої, необхідно знати характер їх відносного руху. В теорії машин та механізмів існує два варіанти відносного руху:

- а) кочення поверхонь одна по одній;
- б) кочення з ковзанням.

Відомо, що в першому випадку при коченні без ковзання відносним рухом твірної є обертальний рух, який можна визначити двома параметрами –  $a$  та  $\omega$ , де  $a$  – вісь обертання;  $\omega$  – кутова швидкість.

При коченні поверхонь з ковзанням відносними рухами твірної  $l$  є миттєвий гвинтовий рух, який визначається наступними параметрами:

$h$  – гвинтовий параметр поверхні, який дорівнює:  $h = u/\omega$ ;

$u$  – швидкість поступального руху;

$\omega$  – кутова швидкість твірної навколо осі  $a$  гвинтової поверхні.

При конструюванні однієї поверхні за базовою поверхнею, яка є моделлю наперед визначених агротехнічних вимог, необхідно виключити явище інтерференції, тобто процесу входження поверхні вилкового копача в поверхню дискового (чи при внутрішньому зачепленні – виходу із нього).

Для забезпечення цієї умови необхідно в системі "вилка–диск" використати діаграму кінематичного гвинта, яка визначає умови спряження досліджуваних поверхонь. Вихідною поверхнею в цьому випадку є базовий евольвентний гелікоїд вилкового копача, головними (основними) геометричними параметрами якого є:

1. Евольвентний гелікоїд  $\Sigma_1(a, h_1, \omega_1)$ , де  $a$  – вісь обертання гелікоїда;  $h_1$  – гвинтовий параметр твірної  $l$  навколо осі  $a$ .
2. Кут  $\alpha$  між твірною  $l$  та віссю  $a$ .
3.  $\omega_1$  – кутова швидкість відносного обертання твірної  $l$  відносно осі  $a$ .
4. Відносний рух поверхонь – кочення без ковзання.
5. Радіус основного осевого циліндра евольвентного гелікоїда  $\Sigma_1(a, h_1, \omega_1)$ , який дорівнює:  $r = h_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .
6. Напрями обертань робочих поверхонь вилки та диска співпадають, оскільки знаки гвинтових параметрів за агротехнічними вимогами однакові.

Для отримання шуканого гелікоїда дискового копача необхідно за допомогою діаграми кінематичного гвинта розкласти гвинтовий рух  $(a, h_1, \omega_1)$  на два рухи:

– обертання твірної відносно осі  $a$  —  $l, \omega_a$ ;

– гвинтовий рух відносно шуканої осі —  $\Sigma_2(b, h_2, \omega_2)$ .

Таке розкладання запишеться формулою:

$$(a, h_1, \omega_1) \sim (l, \omega_a) - (b, h_2, \omega_2) \quad (1)$$

Використовуючи систему автоматизованого проектування AutoCAD, побудуємо діаграму кінематичного гвинта [8].

Алгоритм побудови наступний:

1. У вертикальному положенні відкладемо відрізок, який у відносному масштабі дорівнює параметру гвинта (рис. 1):  $h_1 = u_1/\omega_1 = H_1K_1$ .

2. З нижньої точки проводимо пряму, яка дорівнює:  $AK = r_1 = h_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

3. Через точки  $A$  та  $H_1$  проводимо промені  $AO$  та  $H_1O$  таким чином, щоб  $\angle H_1OA = \alpha$ .

4. Навколо трьох точок  $H_1, O, A$  описуємо коло.

5. До перетину з колом проводимо пряму  $AK_1$  і отримуємо точку  $B$ .

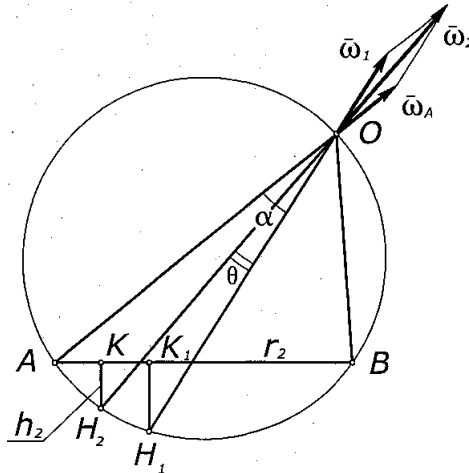


Рис. 1. Визначення параметрів спряжених поверхонь при коченні без ковзання

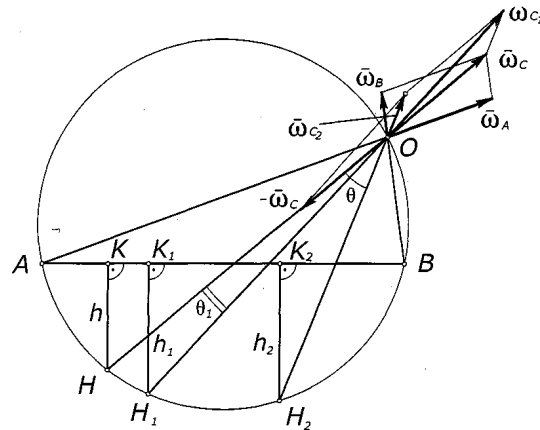


Рис. 2. Визначення параметрів робочих поверхонь, які мають форму евольвентних гелікоїдів

6. У відносному масштабі відкладаємо на променях  $AO$  та  $H_1O$  відповідно вектори кутових швидкостей.
7. За правилом паралелограма визначаємо величину та напрям вектора кутової швидкості  $\overline{\omega_2}$  шуканої поверхні  $\Sigma_2$ .
8. З точки  $O$  за напрямом отриманої швидкості  $\overline{\omega_2}$  проводимо пряму до перетину з колом в точці  $H_2$ .
9. З отриманої точки  $H_2$  проводимо пряму, перпендикулярну прямій  $AK_1$ , до перетину в точці  $K_2$ .

Отримана діаграма кінематичного гвинта дозволяє визначити наступні параметри спряженої шуканої поверхні  $\Sigma_2(b, h_2, \omega_2)$ :

1. Довжину відрізка  $H_2K_2$ , який у відносному масштабі дорівнює гвинтовому параметру  $h_2$  шуканого спряженого гелікоїда  $\Sigma_2(b, h_2, \omega_2)$ .
2. Довжину відрізка  $K_1K_2$ , який дорівнює шуканій відстані між осями  $a$  та  $b$  спряжених поверхонь в системі "вилка-диск".
3. Кут  $\Theta$  між осями  $OH_1$  та  $OH_2$  спряжених поверхонь вилкового  $\Sigma_1$  та дискового  $\Sigma_2$  копачів.
4. Розмір та напрям кутової швидкості  $\omega_2$  шуканої поверхні  $\Sigma_2$ .
5. Радіус основного осьового циліндра  $r_2 = BK_2$  поверхні  $\Sigma_2$ .
6. Значення кута  $\beta$  між твірною  $l$  та віссю  $b(OH_2)$  поверхні  $\Sigma_2$ .

**Висновки**

Значною перевагою при використанні діаграми кінематичного гвинта є те, що, використовуючи отримане графічне рішення даної задачі, можна вирішити обернену задачу [9]: за відомими геометричними параметрами дискового копача отримати параметри спряженої поверхні вилкового копача.

Цю задачу можна записати наступним алгоритмом:

$$(b, h_2, \omega_2) \sim (l, \omega_a) - (a, h_1, \omega_1) \quad (2)$$

Для дослідників та інженерів-конструкторів ґрунтообробних машин та знарядь така інформація може слугувати вихідною для проведення пошуку при побудові нових поверхонь чи при коригуванні поверхонь існуючих викопуючих робочих органів коренезбиральних машин.

**Список використаної літератури**

1. Яблонський П.М. Використання теорії спряжених поверхонь при конструюванні сільськогосподарських знарядь / П.М. Яблонський, А.М. Подкоритов, В.П. Юрчук // Сучасні проблеми моделювання. — Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. — Вип. 8. — С. 159-164.
2. Юрчук В.П. Підвищення ефективності коренезбиральних машин методами використання спряжених поверхонь / В.П. Юрчук, А.М. Подкоритов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КДТУБА, 1998. — Вип. 63. — С. 30-32.
3. Юрчук В.П. Спряжені поверхні в геометричних моделях формотворення робочих органів коренезбиральних машин : автореф. дис. на здобуття наук ступеня доктора техн. наук : спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / В.П. Юрчук. — Київ, 2002. — 36 с.
4. Яблонський П.М. Геометричне моделювання поверхонь ґрунтообробних знарядь дискового типу з урахуванням явища інтерференції автореф. дис. на здобуття наук ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / П.М. Яблонський. — Мелітополь, 2011. — 25 с.
5. Подкорытов А.Н. Определение параметров кинематического винта сопряженных поверхностей / А.Н. Подкорытов, А.Ю. Браилов // Прикладная геометрия и инженерная графика. — К.: КГТУСА, 1996. — Вып. 59. — С.37-39.
6. Подкорытов А.Н. Сопряжение эвольвентных геликоидов / А.Н. Подкорытов, А.Ю. Браилов, В.М. Тигарев // Современные проблемы геометрического моделирования / — Мелітополь: ТГАТА, 1997. — Ч. 1. — С. 21-26.
7. Гевко Б.М. Винтовые подающие механизмы сельскохозяйственных машин / Б.М. Гевко, Р.М. Рогатинский // — Львов: Высш. шк. Изд-во при Львов. Ун-те, 1989. — 175 с.
8. Тигарев В.М. Автоматизоване формування спряжених поверхонь вищих кінематичних пар : автореф. дис. на здобуття наук ступеня канд. техн. наук : спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / В.М. Тигарев. — Київ, 2000. — 18 с.
9. Юрчук В.П. Рішення прямої і оберненої задачі проектування спряжених робочих поверхонь коренезбиральних машин / В.П. Юрчук // Труды Таврической государственной агротехнической академии. — Мелітополь. — 1999. — Вып.4. — Т. 10. — С. 70-72.

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

<b>Абрамов Геннадій Серафимович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:gennadabra@gmail.com">gennadabra@gmail.com</a>
<b>Абрамов Михайло Геннадійович</b>	викладач кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін, Херсонська філія Національного університету кораблебудування E-mail: <a href="mailto:Mike_a@ukr.net">Mike_a@ukr.net</a>
<b>Абрамова Галина В'ячеславівна</b>	вчитель економіки, Херсонська спеціалізована I-III ступенів школа №30 E-mail: <a href="mailto:gv.abramova@gmail.com">gv.abramova@gmail.com</a>
<b>Адоньєв Євген Олександрович</b>	к.т.н., доцент кафедри дизайну та інформаційних технологій Запорізького національного університету в м. Мелітополі E-mail: <a href="mailto:evgen.adoniev@gmail.com">evgen.adoniev@gmail.com</a>
<b>Анпілогова Віра Онисимівна</b>	к.т.н., професор кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Київського національного університету будівництва та архітектури E-mail: <a href="mailto:Anpilogov.g@gmail.com">Anpilogov.g@gmail.com</a>
<b>Астіоненко Ігор Олександрович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:astia@ukr.net">astia@ukr.net</a>
<b>Бардачов Юрій Миколайович</b>	д.т.н., професор, ректор Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:mmkntu@gmail.com">mmkntu@gmail.com</a>
<b>Беглов Костянтин Вячеславович</b>	к.т.н., доцент кафедри автоматизації теплоенергетичних процесів Одеського національного політехнічного університету E-mail: <a href="mailto:beglov.kv@opu.ua">beglov.kv@opu.ua</a>
<b>Беглов Ярослав Ігорович</b>	магістр кафедри автоматизації теплоенергетичних процесів Одеського національного політехнічного університету E-mail: <a href="mailto:yarikb2394@gmail.com">yarikb2394@gmail.com</a>
<b>Бердник Михайло Геннадійович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри «Програмного забезпечення комп'ютерних систем» ДВНЗ «Національний гірничий університет» E-mail: <a href="mailto:MGB2006@ukr.net">MGB2006@ukr.net</a>
<b>Білова Оксана Вікторівна</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики НМетАУ E-mail: <a href="mailto:okbelova@rambler.ru">okbelova@rambler.ru</a>
<b>Боков Ігор Петрович</b>	аспірант відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України E-mail: <a href="mailto:igp.bokov@gmail.com">igp.bokov@gmail.com</a>
<b>Бондаренко Наталія Сергіївна</b>	к.ф.-м.н., Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України E-mail: <a href="mailto:Bondarenko.Natalya.Sergeevna@gmail.com">Bondarenko.Natalya.Sergeevna@gmail.com</a>
<b>Ботвіновська Світлана Іванівна</b>	к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки КНУБА E-mail: <a href="mailto:Botvinovska@ua.fm">Botvinovska@ua.fm</a>
<b>Бриль Тетяна Сергіївна</b>	асистент кафедри ІВМ Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського E-mail: <a href="mailto:bryltanij@yandex.ua">bryltanij@yandex.ua</a>
<b>Брунеткін Олександр Іванович</b>	к.т.н., доцент кафедри автоматизації теплоенергетичних процесів Одеського національного політехнічного університету E-mail: <a href="mailto:alexbrun@rambler.ru">alexbrun@rambler.ru</a>
<b>Ванін Володимир Володимирович</b>	д.т.н., професор, декан фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «КПІ ім. І.Сікорського» E-mail: <a href="mailto:virchga@gmail.com">virchga@gmail.com</a>

<b>Венгрович Дмитро Богданович</b>	к.ф.-м.н., Керівник відділення геодинаміки вибуху ІГФ Інститут геофізики НАН України E-mail: <a href="mailto:vengrovich@gmail.com">vengrovich@gmail.com</a>
<b>Верещага Виктор Михайлович</b>	д.т.н., професор кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Б. Хмельницького E-mail: <a href="mailto:vervik49@gmail.com">vervik49@gmail.com</a>
<b>Вірченко Геннадій Анатолійович</b>	д.т.н., професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «КПІ ім. І. Сікорського» E-mail: <a href="mailto:virchga@gmail.com">virchga@gmail.com</a>
<b>Воронцов Олег Вікторович</b>	к.т.н., доцент, завідувач кафедрою нарисної геометрії та графіки Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка E-mail: <a href="mailto:uaag.poltava2012@gmail.com">uaag.poltava2012@gmail.com</a>
<b>Гавриленко Євген Андрійович</b>	к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій проектування Таврійського державного агротехнологічного університету ім. В.М. Найдиша E-mail: <a href="mailto:eagavrilenko15@gmail.com">eagavrilenko15@gmail.com</a>
<b>Гайдамака Вадим Володимирович</b>	магістрант кафедри електронних приладів та пристроїв Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського» E-mail: <a href="mailto:i.melnyk@kpi.ua">i.melnyk@kpi.ua</a>
<b>Гнисько Василь Іванович</b>	к.т.н., старший науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного НАН України E-mail: <a href="mailto:wollydenis@gmail.com">wollydenis@gmail.com</a>
<b>Гоголюк Артем Юрійович</b>	Студент Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: <a href="mailto:mr.shrrgn@gmail.com">mr.shrrgn@gmail.com</a>
<b>Гоман Олег Гаврилович</b>	к.ф.-м.н., професор кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: <a href="mailto:oleg@goman.com.ua">oleg@goman.com.ua</a>
<b>Горовенко Анатолій Петрович</b>	к.т.н., старший науковий співробітник ІГФ ім.С.І. Субботіна НАН України E-mail: <a href="mailto:ygv_igf@ukr.net">ygv_igf@ukr.net</a>
<b>Грубич Марія Володимирівна</b>	пошукач, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» E-mail: <a href="mailto:yrchyk@bigmir.net">yrchyk@bigmir.net</a>
<b>Губін Олександр Ігорович</b>	к.т.н., доцент кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: <a href="mailto:gubin_ai@ukr.net">gubin_ai@ukr.net</a>
<b>Гумен Олена Миколаївна</b>	д.т.н., професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «КПІ ім. І. Сікорського» E-mail: <a href="mailto:gumens@ukr.net">gumens@ukr.net</a>
<b>Гуменюк Юрій Олегович</b>	к.т.н., доцент, завідувач кафедри сільськогосподарських машин Національного університету біоресурсів і природокористування України. E-mail: <a href="mailto:yhovnyuk@ukr.net">yhovnyuk@ukr.net</a>
<b>Дем'янченко Ольга Пантелеївна</b>	старший викладач Азовського морського інституту Національного університету "Одеська морська академія" E-mail: <a href="mailto:leca91@ya.ru">leca91@ya.ru</a>
<b>Денисюк Іван Іванович</b>	к.т.н., старший науковий співробітник відділу інтенсифікації обмінних процесів Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України E-mail: <a href="mailto:ygv_igf@ukr.net">ygv_igf@ukr.net</a>

<b>Долгополова Наталія Володимирівна</b>	к.т.н., старший науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України E-mail: <a href="mailto:n_dolgopolova@ukr.net">n_dolgopolova@ukr.net</a>
<b>Дубініна Олена Володимирівна</b>	аспірант кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Б. Хмельницького E-mail: <a href="mailto:aiki.helena@gmail.com">aiki.helena@gmail.com</a>
<b>Євдокимов Дмитро Васильович</b>	завідуючий НДЛ моделювання процесів механіки рідини і газу та тепломасообміну Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: <a href="mailto:devd@ukr.net">devd@ukr.net</a>
<b>Єременко Анна Андріївна</b>	аспірант кафедри прикладної математики та моделювання складних систем Сумського державного університету E-mail: <a href="mailto:eremenkoann@gmail.com">eremenkoann@gmail.com</a>
<b>Запольський Леонід Леонідович</b>	к.т.н., старший науковий співробітник, начальник науково-організаційного відділу Українського науково-дослідного інституту цивільного захисту E-mail: <a href="mailto:z_l_l@ukr.net">z_l_l@ukr.net</a>
<b>Зимогляд Андрій Юрійович</b>	Аспірант кафедри інформаційних технологій і систем Національної Металургійної Академії України E-mail: <a href="mailto:azee77871152@gmail.com">azee77871152@gmail.com</a>
<b>Зітек Збігнєв</b>	Професор. Керівник Центру Радіаційної Хімії і Технологій в Інституті Ядерної Хімії і Технологій, Варшава, Польща. E-mail: <a href="mailto:lazurik@hotmail.com">lazurik@hotmail.com</a>
<b>Золотова Алла Василівна</b>	к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Київського національного університету будівництва і архітектури E-mail: <a href="mailto:kagadiy@i.ua">kagadiy@i.ua</a>
<b>Кагадій Тетяна Станіславівна</b>	д.ф.-м.н., професор кафедри вищої математики, Національний гірничий університет E-mail: <a href="mailto:zolotovaav1@gmail.com">zolotovaav1@gmail.com</a>
<b>Караєв Артем Олександрович</b>	студент Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна E-mail: <a href="mailto:a.karaiev@karazin.ua">a.karaiev@karazin.ua</a>
<b>Клевцов Микита Костянтинович</b>	студент факультету автоматизації та інформаційних технологій, Київський національний університет будівництва і архітектури E-mail: <a href="mailto:rudakovaanna25@gmail.com">rudakovaanna25@gmail.com</a>
<b>Книш Людмила Іванівна</b>	д.т.н., професор, завідувач кафедрою аерогідромеханіки та енергомасопереносу Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: <a href="mailto:lknysh@ukr.net">lknysh@ukr.net</a>
<b>Кобильська Олена Борисівна</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри ІВМ Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського E-mail: <a href="mailto:leca91@ya.ru">leca91@ya.ru</a>
<b>Ковальов Сергій Миколайович</b>	д.т.н., професор, завідувач кафедрою нарисної геометрії та інженерної графіки Київський національний університет будівництва і архітектури E-mail: <a href="mailto:sebox@ua.fm">sebox@ua.fm</a>
<b>Ковч Олег Іванович</b>	інженер Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» E-mail: <a href="mailto:olegkovch@gmail.com">olegkovch@gmail.com</a>
<b>Коряшкіна Лариса Сергіївна</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри системного аналізу та управління ДВНЗ «Національний гірничий університет» E-mail: <a href="mailto:koryashkinals@mail.ru">koryashkinals@mail.ru</a>
<b>Кравців Світлана Ярославівна</b>	викладач-методист відділу науково-методичного забезпечення професійної освіти науково-методичного центру навчальних закладів сфери цивільного захисту Національного університету цивільного захисту України E-mail: <a href="mailto:kravtsiv@nuczu.edu.ua">kravtsiv@nuczu.edu.ua</a>

<b>Кремець Тетяна Сергіївна</b>	декан агроінженерного факультету відокремленого підрозділу НУБіП України "Бережанський агротехнічний інститут" E-mail: <a href="mailto:Psf55@ukr.net">Psf55@ukr.net</a>
<b>Крютченко Денис Володимирович</b>	аспірант Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного E-mail: <a href="mailto:wollydenis@gmail.com">wollydenis@gmail.com</a>
<b>Кудін Олег Олексійович</b>	завідувач лабораторією ННІ НКІ Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова E-mail: <a href="mailto:oleg.kudin@nuos.edu.ua">oleg.kudin@nuos.edu.ua</a>
<b>Куценко Леонід Миколайович</b>	д.т.н., професор кафедри інженерної та аварійно-рятувальної техніки Національного університету цивільного захисту України E-mail: <a href="mailto:leokuts@i.ua">leokuts@i.ua</a>
<b>Лазурик Валентин Тимофійович</b>	д.ф.-м. н., декан факультету комп'ютерних наук, професор кафедри моделювання систем і технологій Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. E-mail: <a href="mailto:lazurik@hotmail.com">lazurik@hotmail.com</a>
<b>Лазурик Валентина Михайлівна</b>	старший викладач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення факультету комп'ютерних наук, Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. E-mail: <a href="mailto:lazurik@hotmail.com">lazurik@hotmail.com</a>
<b>Лебеденко Юрій Олександрович</b>	к.т.н., доцент кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:lebedenko@rambler.ru">lebedenko@rambler.ru</a>
<b>Левченко Дмитро Олександрович</b>	аспірант кафедри інформаційних технологій і систем Національної Металургійної Академії України E-mail: <a href="mailto:dimalvchnk1993@gmail.com">dimalvchnk1993@gmail.com</a>
<b>Литвиненко Олена Іванівна</b>	к.т.н., доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:mmkntu@gmail.com">mmkntu@gmail.com</a>
<b>Лось Сергій Олександрович</b>	асистент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки, Київський національний університет будівництва і архітектури E-mail: <a href="mailto:Sergii@Los.com.ua">Sergii@Los.com.ua</a>
<b>Ляковська Соломія Євгенівна</b>	к.т.н., доцент кафедри проектування та експлуатації машин Національного університету «Львівська політехніка» E-mail: <a href="mailto:evmartun@gmail.com">evmartun@gmail.com</a>
<b>Ляшенко Віктор Павлович</b>	д.т.н., професор, завідувач кафедрою IBM Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського E-mail: <a href="mailto:viklyash2903@gmail.com">viklyash2903@gmail.com</a>
<b>Магденко Валентина Русланівна</b>	студент Київського національного університету ім. Т. Шевченка E-mail: <a href="mailto:vlntn12@mail.ru">vlntn12@mail.ru</a>
<b>Максимчук Діана Миколаївна</b>	старший викладач кафедри вищої математики та КЗ Хмельницького національного університету E-mail: <a href="mailto:maximchukd@ukr.net">maximchukd@ukr.net</a>
<b>Мартин Євген Володимирович</b>	д.т.н., професор кафедри управління проектами, інформаційних технологій та телекомунікацій Львівського державного університету безпеки життєдіяльності E-mail: <a href="mailto:evmartun@gmail.com">evmartun@gmail.com</a>
<b>Мельник Ігор Віталійович</b>	д.т.н., професор кафедри електронних приладів та пристроїв Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського» E-mail: <a href="mailto:i.melnyk@kpi.ua">i.melnyk@kpi.ua</a>
<b>Меньшиков Юрій Леонідович</b>	к.т.н., доцент Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: <a href="mailto:Men0605Ude@gmail.com">Men0605Ude@gmail.com</a>
<b>Міроненко Дмитро Сергійович</b>	к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних наук ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет» E-mail: <a href="mailto:mironenko_ds@ukr.net">mironenko_ds@ukr.net</a>

<b>Міхальова Олександра Олександрівна</b>	аспірант кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: <a href="mailto:pavlova-tonya@mail.ru">pavlova-tonya@mail.ru</a>
<b>Моїсеєнко Світлана Вікторівна</b>	к.т.н., доцент Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:4moiseenko@ukr.net">4moiseenko@ukr.net</a>
<b>Морозов Юрій Олександрович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету E-mail: <a href="mailto:mrozovyu@gmail.com">mrozovyu@gmail.com</a>
<b>Мочурад Леся Ігорівна</b>	асистент Науково-навчального інституту підприємництва та перспективних технологій національного університету «Львівська Політехніка» E-mail: <a href="mailto:lesiamochurad@gmail.com">lesiamochurad@gmail.com</a>
<b>Муквич Микола Миколайович</b>	к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України E-mail: <a href="mailto:mmukvich@ukr.net">mmukvich@ukr.net</a>
<b>Нагорний Володимир Петрович</b>	д.т.н., професор, зав. відділу інтенсифікації обмінних процесів Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України E-mail: <a href="mailto:ygv_nagornyi@ukr.net">ygv_nagornyi@ukr.net</a>
<b>Найдиш Андрій Володимирович</b>	д.т.н., професор, завідувач кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Богдана Хмельницького E-mail: <a href="mailto:nav1304@ukr.net">nav1304@ukr.net</a>
<b>Науменко Юрій Віталійович</b>	аспірант Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного E-mail: <a href="mailto:elena15@gmx.com">elena15@gmx.com</a>
<b>Незенко Андрій Йосипович</b>	аспірант кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського» E-mail: <a href="mailto:virchga@gmail.com">virchga@gmail.com</a>
<b>Несвідоміна Олександра Вікторівна</b>	докторант кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України E-mail: <a href="mailto:ynesvidomin@ukr.net">ynesvidomin@ukr.net</a>
<b>Одновол Микола Миколайович</b>	доцент кафедри системного аналізу та управління ДВНЗ «Національний гірничий університет» E-mail: <a href="mailto:pavlova-tonya@mail.ru">pavlova-tonya@mail.ru</a>
<b>Пашенко Володимир Олександрович</b>	к.т.н., доцент кафедри ЕОМ Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: <a href="mailto:31NATA@ukr.net">31NATA@ukr.net</a>
<b>Пилипака Сергій Федорович</b>	д.т.н., професор, завідувач кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України E-mail: <a href="mailto:Psf55@ukr.net">Psf55@ukr.net</a>
<b>Пилипенко Катерина Андріївна</b>	магістр, Запорізький національний університет E-mail: <a href="mailto:Geka1979@mail.ru">Geka1979@mail.ru</a>
<b>Пігнастий Олег Михайлович</b>	д.т.н., професор кафедри комп'ютерного моніторингу і логістики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» E-mail: <a href="mailto:pom7@bk.ru">pom7@bk.ru</a>
<b>Поляков Владислав Олександрович</b>	к.т.н., старший науковий співробітник Інституту транспортних систем та технологій Національної академії наук України E-mail: <a href="mailto:pva78125@gmail.com">pva78125@gmail.com</a>
<b>Попов Геннадій Федорович</b>	к. ф.-м. н., доцент кафедри моделювання систем і технологій факультету комп'ютерних наук, Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна. E-mail: <a href="mailto:lazurik@hotmail.com">lazurik@hotmail.com</a>



<b>Пукач Петро Ярославович</b>	д.т.н., професор кафедри вищої математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка» E-mail: <a href="mailto:ppukach@gmail.com">ppukach@gmail.com</a>
<b>Редчиц Дмитро Олександрович</b>	к. ф.-м. н., старший науковий співробітник Інституту транспортних систем і технологій Національної академії наук України E-mail: <a href="mailto:redchits_da@ua.fm">redchits_da@ua.fm</a>
<b>Рудакова Ганна Володимирівна</b>	д.т.н., професор, завідувач кафедру технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:rudakovaanna25@gmail.com">rudakovaanna25@gmail.com</a>
<b>Сметанкина Наталія Володимирівна</b>	д.т.н., провідний науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України E-mail: <a href="mailto:nsmetankina@ukr.net">nsmetankina@ukr.net</a>
<b>Соболь Олександр Миколайович</b>	д.т.н., старший науковий співробітник, начальник кафедри управління та організації діяльності у сфері цивільного захисту Національного університету цивільного захисту України E-mail: <a href="mailto:sobol@nuczu.edu.ua">sobol@nuczu.edu.ua</a>
<b>Солона Анастасія Вадимівна</b>	аспірант кафедри прикладної математики Дніпровського державного технічного університету E-mail: <a href="mailto:annastasiya_sol@ukr.net">annastasiya_sol@ukr.net</a>
<b>Сохацький Анатолій Валентинович</b>	д.т.н., професор, завідувач кафедру транспортних систем та технологій Університету митної справи та фінансів E-mail: <a href="mailto:Sokhatsky_anatoly@ukr.net">Sokhatsky_anatoly@ukr.net</a>
<b>Спельчук Ольга Василівна</b>	аспірант Запорізького національного університету E-mail: <a href="mailto:olerus21@gmail.com">olerus21@gmail.com</a>
<b>Спирінцев В'ячеслав Васильович</b>	к.т.н., доцент кафедри автоматизованих систем обробки інформації Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: <a href="mailto:V.Spiritsev@gmail.com">V.Spiritsev@gmail.com</a>
<b>Спирінцев Дмитро Васильович</b>	к.т.н., доцент, доцент кафедри математики та фізики Мелітопольського державного педагогічного університету E-mail: <a href="mailto:nav1304@ukr.net">nav1304@ukr.net</a>
<b>Сподинюк Надія Андріївна</b>	к.т.н., доцент кафедри теплогазопостачання та вентиляції Національного університету «Львівська політехніка» E-mail: <a href="mailto:evmartun@gmail.com">evmartun@gmail.com</a>
<b>Старун Наталія Валентинівна</b>	к.т.н., професор кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:mmkntu@gmail.com">mmkntu@gmail.com</a>
<b>Стеганцев Євген Вікторович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри загальної математики Запорізького національного університету E-mail: <a href="mailto:Geka1979@mail.ru">Geka1979@mail.ru</a>
<b>Стояновський Михайло Анатолійович</b>	аспірант кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара E-mail: <a href="mailto:smike2112@gmail.com">smike2112@gmail.com</a>
<b>Стрельникова Олена Олександрівна</b>	д.т.н., професор відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України E-mail: <a href="mailto:elena15@gmx.com">elena15@gmx.com</a> <a href="mailto:herger865@gmail.com">mailto:herger865@gmail.com</a>
<b>Суліменко Ганна Геннадіївна</b>	к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій в архітектурі Київського національного університету будівництва та архітектури E-mail: <a href="mailto:asulimenko@i.ua">asulimenko@i.ua</a>
<b>Суліменко Степан Юрійович</b>	аспірант Київського національного університету будівництва та архітектури E-mail: <a href="mailto:herger865@gmail.com">herger865@gmail.com</a>
<b>Сушко Тетяна Сергіївна</b>	к.ф.-м.н., старший викладач Сумського державного університету E-mail: <a href="mailto:t.sushko@pom.sumdu.edu.ua">t.sushko@pom.sumdu.edu.ua</a>

<b>Тоуфак Едмон Родріг</b>	аспірант кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:rudakovaanna25@gmail.com">rudakovaanna25@gmail.com</a>
<b>Троценко Едуард Анатолійович</b>	генеральний директор ТОВ «Інфоком ЛТД» E-mail: <a href="mailto:eduard_trotsenko@ia.ua">eduard_trotsenko@ia.ua</a>
<b>Тулученко Галина Яківна</b>	д.т.н., професор кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:tuluchenko.galina@ukr.net">tuluchenko.galina@ukr.net</a>
<b>Угримов Сергій Вікторович</b>	к.т.н., старший науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України E-mail: <a href="mailto:sugrimov@ipmach.kharkov.ua">sugrimov@ipmach.kharkov.ua</a>
<b>Фільштинський Леонід Аншеловіч</b>	к.ф.-м.н., професор кафедри прикладної математики та моделювання складних систем Сумського державного університету E-mail: <a href="mailto:leonid@mphis.sumdu.edu.ua">leonid@mphis.sumdu.edu.ua</a>
<b>Халимон Андрій Юрійович</b>	аспірант НТУУ «КПІ» ім. І.Сікорського E-mail: <a href="mailto:andrew.khalymon@gmail.com">andrew.khalymon@gmail.com</a>
<b>Хачапурідзе Микола Михайлович</b>	к.т.н., старший науковий співробітник Інституту транспортних систем та технологій Національної академії наук України E-mail: <a href="mailto:itst@westa-inter.com">itst@westa-inter.com</a>
<b>Холодняк Юлія Володимирівна</b>	к.т.н., старший викладач кафедри інформаційних технологій проектування Таврійського державного агротехнологічного університету ім. В.М. Найдиша E-mail: <a href="mailto:yuliya.kholodnyak@gmail.com">yuliya.kholodnyak@gmail.com</a>
<b>Худяков Ігор Валентинович</b>	аспірант Херсонської державної морської Академії E-mail: <a href="mailto:rudakovaanna25@gmail.com">rudakovaanna25@gmail.com</a>
<b>Череватенко Антоніна Павлівна</b>	асистент кафедри системного аналізу та управління ДВНЗ «Національний гірничий університет» E-mail: <a href="mailto:pavlova-tonya@mail.ru">pavlova-tonya@mail.ru</a>
<b>Човнюк Юрій Васильович</b>	к.т.н., доцент кафедри конструювання машин і обладнання Національного університету біоресурсів і природокористування України, професор Міжнародної Кадрової Академії, дійсний член (академік) Підйомно-транспортної Академії Наук України. E-mail: <a href="mailto:ychovnyuk@ukr.net">ychovnyuk@ukr.net</a>
<b>Чопоров Сергій Вікторович</b>	к.т.н., доцент кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету E-mail: <a href="mailto:s.choporoff@znu.edu.ua">s.choporoff@znu.edu.ua</a>
<b>Шупиков Олександр Миколайович</b>	д.т.н., професор, головний науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України E-mail: <a href="mailto:osharovskaya@gmail.com">osharovskaya@gmail.com</a>
<b>Щербина Ірина Володимирівна</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики НМетАУ E-mail: <a href="mailto:sherbinaiv@ukr.net">sherbinaiv@ukr.net</a>
<b>Юрчук Володимир Петрович</b>	д.т.н., професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського» E-mail: <a href="mailto:yrchyk@bigmir.net">yrchyk@bigmir.net</a>
<b>Яблонський Петро Миколайович</b>	к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського» E-mail: <a href="mailto:ypn@ukr.net">ypn@ukr.net</a>

Відповідальний за випуск	д.ф.-м.н., професор Хомченко Анатолій Никифорович
Макетування, технічна редакція	к.т.н. Омельчук Антон Анатолійович
Типографські роботи	Грінь Дмитро Сергійович

Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ,  
2017. – Вип. 3(62). Т. 2. – 352 с.

Матеріали друкуються в авторській редакції.  
Відповідальність за достовірність даних, зазначених у статтях,  
несуть їх автори.

Свідоцтво про державну реєстрацію засобу масової інформації –  
серія КВ № 17371-6141 от 17.12.2010

Підписано до друку 02.08.2017 р. Формат 60x84 /16 Папір ксерокс.  
Ум. друк. аркушів 19,36. Замовлення № 6457. Тираж 200 прим.

Видання та друк: ФОП Грінь Д.С., 73033, м. Херсон, а/с 15  
e-mail: dimg@meta.ua, Свід. ДК № 4094 від 17.06.2011