



**SHEVCHENKO SCIENTIFIC SOCIETY
DEPARTMENT OF IVANO-FRANKIVSK**

**PRECARPATHIAN BULLETIN
OF THE SHEVCHENKO
SCIENTIFIC SOCIETY**

Number

1(37)-2017

Ivano-Frankivsk
2017

ПРИКАРПАТСЬКИЙ
ВІСНИК
НАУКОВОГО
ТОВАРИСТВА
ім. ШЕВЧЕНКА
1(37)-2017

Науковий журнал
Видається у чотирьох
серіях

**ЧИСЛО, СЛОВО,
ДУМКА, ПУЛЬС**
(по одному випуску
кожної серії щороку)

Заснований у 2008 році
Реєстраційне свідоцтво
КВ № 14628-3599
від 10 жовтня 2008 р.
видане Міністерством
юстиції України

Журнал входить до пере-
ліку наукових фахових
видань України (наказ
МОН України № 1081
від 29.09.2014 р., науки –
фізико-математичні,
технічні)

ЗАСНОВНИКИ:

Івано-Франківський
осередок Наукового
товариства ім. Шевченка

Прикарпатський
національний університет
імені Василя Стефаника

Івано-Франківський
національний технічний
університет нафти і газу

Івано-Франківський
національний медичний
університет

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

**О. Б. Скасків, О. Ю. Тарновецька,
О. М. Трусевич**

Про співвідношення Бореля для рядів
типу Тейлора-Діріхле 11

В. К. Маслюченко, О. Д. Мироник

Точки неперервності L -значних функцій
і локальні екстремуми 20

І. Є. Овчар, Я. І. Савчук

Розв'язання оберненої задачі теорії роз-
поділу значень для цілих кривих 27

О. Б. Скасків, Т. М. Сало

Цілі ряди Діріхле та h -міра виняткової
множини 37

**Диференціальні рівняння
і математична фізика**

М. І. Серов, Ю. В. Приставка

Симетрійні властивості та деякі
точні розв'язки нелінійного
двовимірного рівняння реакції-
конвекції-дифузії 42

Н. В. Ічанська

Групова класифікація еволюційних
багатовимірних рівнянь другого
порядку 53

МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.5

ПРО СПІВВІДНОШЕННЯ БОРЕЛЯ ДЛЯ РЯДІВ ТИПУ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

О. Б. Скасків¹, О. Ю. Тарновецька², О. М. Трусевич³

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка;
e-mail: olskask@gmail.com

² Чернівецький факультет НТУ “Харківський політехнічний
інститут”; e-mail: savinska.olga@gmail.com

³ Львівський державний університет безпеки життєдіяльності;
e-mail: trusev14@gmail.com

У статті отримані достатні умови для того, щоб співвідношення $\ln F(x) \leq (1+o(1)) \ln \mu(x, F)$ мало місце для кожної функції виду $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$ при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини E нульової лінійної щільності або нижньої нульової лінійної щільності, де (f_n) , (λ_n) , (β_n) – послідовності невід’ємних чисел, а диференційовна функція $\tau: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ задовольняє умові $\tau'(x) \geq 1$ ($x \geq x_0$), $\mu(x, F) = \max\{f_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$.

Ключові слова: ряд Тейлора-Діріхле, співвідношення Бореля, виняткова множина, максимальний член.

Нехай L – клас додатних неспадних до $+\infty$ на $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$ функцій, а через L^+ позначимо клас неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій $\psi \in L$; скрізь надалі через ψ^{-1} позначаємо обернену

функцію до функції $\psi \in L^+$. Для $\Phi \in L$ означимо клас

$$L(\Phi) := \{\psi_1 \in L^+ : \forall b > 0 \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{b\Phi(R)} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} = 0\}.$$

Нехай $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$ клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad a_n \geq 0 (n \geq 0), \quad (1)$$

де $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ невід'ємні послідовності, тобто,

$\lambda = \{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbf{R}_+$, $\beta = \{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbf{R}_+$, а функція $\tau \in L$. Для $\Phi \in L$

через $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$ позначимо підклас класу $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$, в який входять функції F , для яких $\ln F(x) \leq \Phi(x)$ ($x \geq x_0$), а через $\underline{\mathbf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$ позначимо клас функцій

$$F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$$

таких, що

$(\exists x_j \uparrow +\infty) : \ln F(x_j) \leq \Phi(x_j)$ ($j \geq 1$); $\mathbf{S}(\lambda) := \mathbf{S}(\lambda, 0, \tau)$, $\mathbf{S}(\beta) := \mathbf{S}(\lambda, 0, \tau)$,

$\mathbf{S}(\lambda, \Phi) := \mathbf{S}(\lambda, 0, \tau, \Phi)$, $\underline{\mathbf{S}}(\lambda, \Phi) := \underline{\mathbf{S}}(\lambda, 0, \tau, \Phi)$ – відповідні класи збіжних

для всіх $x \geq 0$ рядів Діріхле $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n}$, $a_n \geq 0 (n \geq 0)$. Для

$F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$ і $x \geq 0$ визначимо $\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$. Ві-

домо (див. [1]-[5]), що задача отримання оцінок зверху для досить широкого класу регулярно збіжних функціональних рядів (Тейлора, Діріхле, Тейлора-Діріхле, за системою функцій Міттаг-Леффлера і т.п.) зводиться до подібної задачі для рядів $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$. В [4, 5] встановлено наступні два твердження, що є аналогами відповідних тверджень, встановлених в [6] в класі цілих рядів Діріхле $\mathbf{S}(\lambda)$.

Теорема А [5]. *Нехай $\tau \in L$ – диференційовна функція. Якщо виконується умова*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n(\lambda_n + \beta_n)} < +\infty, \quad (2)$$

то для кожної для функції $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$ співвідношення

$$\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F) \quad (3)$$

у випадку $\tau'(x) \geq 1$ ($x \geq x_0$) справджується при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої

множини E скінченної міри, тобто, $\int_{E \cap [0; +\infty)} dx < +\infty$, а у випадку

$\tau'(x) \leq 1$ ($x \geq x_0$) – зовні деякої множини E такої, що $\int_{E \cap [0; +\infty)} d\tau(x) < +\infty$.

На необхідність умови (2) вказує наступна теорема.

Теорема В [5]. *Нехай функція $\tau \in L$ така, що $0 \leq \tau'(x) \leq 1$. Якщо послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ – довільні неспадні такі, що $\ln n = O(\lambda_n + \beta_n)$ ($n \rightarrow +\infty$), а умова (2) не виконується, то існують функція $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$ і стала $h > 0$ такі, що*

$$(\forall x \geq x_0) : \ln F(x) \geq (1 + h) \ln \mu(x, F). \quad (4)$$

Якщо застосувати теорему В до функції $F_1(x) = F(\tau^{-1}(x))$, то з теореми В отримується такий наслідок.

Наслідок [5]. Нехай послідовності λ , β такі, як в теоремі В, а $\tau'(x) \geq 1$ ($x \geq x_1$). Тоді існує функція $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$, для якої для всіх $x \geq x_0$ виконується нерівність (4) з деяким $h > 0$.

У даній статті умову (2) теореми А ослабимо, розглядаючи співвідношення (3) у підкласах $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$, $\underline{\mathbf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$. При цьому, як і у випадку класів цілих рядів Діріхле $\mathbf{S}(\lambda, \Phi)$, $\underline{\mathbf{S}}(\lambda, \Phi)$ (стосовно класу $\mathbf{S}(\lambda, \Phi)$ див., наприклад, [7]) доведеться “пожертвувати” якістю описання величини виняткової множини E . Методика наших доведень відрізняється від методу, що застосовувався у статтях [6, 7] і, як і в цілому ряді інших статей (див., наприклад, [3-5], [8], [10-22]), в її основі лежать оцінки, які отримуються на основі ймовірнісних нерівностей Чебишова або, як у нашому випадку, Маркова. Встановимо спочатку наступні твердження.

Твердження 1. Нехай $\tau \in L, \tau'(x) \geq 1$ ($x > 0$), $\Phi \in L^+$, $\Phi_1(x) := x\Phi(x)$. Якщо для деякої функції $\psi_1 \in L(\Phi)$ виконується умова

$$\ln n_\alpha(t) = o(\psi_1^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (5)$$

і $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$, то співвідношення (3) справджується при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини E нульової лінійної щільності, тобто,

$$DE = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{meas}(E \cap [0, R]) = 0;$$

тут $n_\alpha(t) = \sum_{\lambda_n + \beta_n \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності $\alpha_n = \lambda_n + \beta_n$.

Твердження 2. Нехай $\tau \in L, \tau'(x) \geq 1$ ($x > 0$), $\Phi \in L^+$, $\Phi_1(x) := x\Phi(x)$. Якщо для деякої функції $\psi_1 \in L(\Phi)$ виконується умова (5) і $F \in \underline{\mathbf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$, то співвідношення (3) справджується при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини E нульової нижньої лінійної щільності, тобто,

$$dE = \underline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{meas}(E \cap [0, R]) = 0.$$

Нам потрібне таке допоміжне твердження.

Лема 1. Нехай $\Phi \in L^+$, $\Phi_1(x) := x\Phi(x)$, $\psi_1 \in L$, $E = \{x > 0 : \psi_1(g(x)) \leq g'(x)\}$.

1^o. Якщо $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ і $\psi_1 \in L(\Phi)$, то $DE = 0$.

2^o. Якщо $F \in \underline{\mathbf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ і $\psi_1 \in L(\Phi)$, то $dE = 0$.

Доведення леми 1 отримуємо за допомогою наступного твердження з [9, 11], яке можна сформулювати у такому вигляді.

Лема 2 [9, 11] Нехай $\varphi, \psi \in L^+$ функції такі, що

$$A_1(R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varphi(R)} \int^R \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = o(1) \quad (R \rightarrow +\infty, R \in G),$$

$G \subset \mathbf{R}_+$, та $R = o(\psi(R\varphi(R)))$ ($R \rightarrow +\infty$). Тоді,

$$A_2(R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varphi(R)} \int^{R\psi(R)} \frac{dx}{\psi(x)} = o(1) \quad (R \rightarrow +\infty, R \in G).$$

Доведення лема 1. Переконаємось спочатку, що для функції $\psi \in L(\Phi)$ виконується умова $R = o(\psi(R\varphi(R)))$ ($R \rightarrow +\infty$) з лема 2 з функцією $\varphi = \Phi^{-1}$, оберненою до функції Φ . Справді, для довільного $b > 0$

$$\frac{1}{R} \int_1^{b\Phi(R)} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = \frac{\psi^{-1}(t)}{Rt} \Big|_1^{b\Phi(R)} + \int_1^{b\Phi(R)} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt,$$

звідки, $\psi^{-1}(b\Phi(R)) = o(R\Phi(R))$ ($R \rightarrow +\infty$) для довільного $b > 0$, тобто,

$\Phi(R) = \frac{1}{b} \psi(o(R\Phi(R)))$ ($R \rightarrow +\infty$) для довільного $b > 0$, що дає

$R = o(\psi(R\varphi(R)))$ ($R \rightarrow +\infty$). Оскільки для $x \notin E$ виконується нерівність $g'(x) \leq \psi_1(g(x))$, то у випадку $\ln F(x) \leq x\Phi(x)$ ($x \in G$) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\text{meas}(E \cap [0, R])}{R} &= \frac{1}{R} \int_{E \cap [0, R]} dx \leq \frac{1}{R} \int_E \frac{g'(x)}{\psi_1(g(x))} dx = \\ &= \frac{1}{R} \int_{g(E \cap [0, R])} \frac{dx}{\psi_1(x)} \leq \frac{1}{R} \int_0^{g(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \leq \frac{1}{R} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \quad (R \in G). \end{aligned}$$

Звідки у випадку 1^o за лемою 2, застосованою у випадку, коли φ – обернена функція до функції Φ , а $G = [x_0, +\infty)$, виводимо

$$0 \leq DE \leq \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(R)} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} = 0,$$

позаяк $\psi_1 \in L(\Phi)$. У випадку 3^o подібно для $G = \{\Phi(x_j) : j \geq 1\}$, де послідовність (x_j) з умови $\ln F(x_j) \leq x_j\Phi(x_j)$, отримуємо

$$0 \leq dE \leq \overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_j} \int_0^{x_j\Phi(x_j)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \leq \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(R)} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} = 0,$$

тобто $dE = 0$. Лему 1 доведено.

Зауваження 1. Нескладно зрозуміти, що насправді

$R = o(\psi(R\varphi(R)))$ ($R \rightarrow +\infty$) $\Leftrightarrow (\forall b > 0) : \psi^{-1}(b\Phi(R)) = o(R\Phi(R))$ ($R \rightarrow +\infty$) (див. також [12]).

Доведення тверджень 1-2. Нехай $g(x) = \ln F(x)$. Доведення тверджень 1-2 подібно до доведення теореми з [5]. Отже, застосовуючи лему

1 з [10] та лему 1 з $\psi_2(x) = \frac{1}{2}\psi_1(x)$ замість $\psi_1(x)$, для всіх $x \notin E$ (E – деяка множина така, що $DE = 0$ за умов твердження 1 і $dE = 0$ за умов твердження 2) отримуємо

$$F(x) \leq 2 \sum_{\lambda_n + \tau'(x)\beta_n \leq 2g'(x)} b_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n) \leq 2n_\alpha(\psi_1(g(x)))\mu(x, F). \quad (6)$$

Звідки, використовуючи умову (5), негайно при $x \rightarrow +\infty$ ($x \notin E$) отримуємо

$$\ln F(x) \leq \ln 2 + \ln n_\alpha(\psi_1(g(x))) + \ln \mu(x, F) = o(g(x)) + \ln \mu(x, F),$$

тобто, твердження 1-2 доведено.

Теорема 1. Нехай $\tau'(x) \geq 1$ ($x > 0$). Якщо $\Phi \in L^+$ і виконується умова

$$(\forall b > 0): \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \sum_{0 < \alpha_k \leq b\Phi(R)} \frac{1}{k\alpha_k} = 0, \quad \alpha_k = \lambda_k + \beta_k, \quad (7)$$

то для кожної функції $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$, $\Phi_1(x) \equiv x\Phi(x)$, співвідношення (3) справджується при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини E нульової лінійної щільності, тобто $DE = 0$.

Зауваження 2. Теорему 1 раніше [8] було встановлено в класі $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$, який, наприклад, у випадку $\Phi(x) = x^\rho$, $\rho > 0$, є істотно вужчим за клас $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$, де $\Phi_1(x) = x^{1+\rho}$. Зрозуміло також, що у випадку виконання умови $\Phi_1(x) = \Phi(O(x))$ ($x \rightarrow +\infty$) обидва результати є рівносильними.

Доведення. Перевіримо можливість застосування твердження 1. Справді, застосовуючи нерівність $1/n \geq \ln(n+1) - \ln n$ ($n \geq 1$) з умови (7) отримуємо

$$(\forall b > 0): \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{b\Phi(R)} \frac{d \ln n_\alpha(t)}{t} = 0. \quad (8)$$

Оскільки $\int_{t_0}^u \frac{d \ln n_\alpha(t)}{t} = \frac{\ln n_\alpha(t)}{t} \Big|_{t_0}^u + \int_{t_0}^u \frac{dt \ln n_\alpha(t)}{t^2}$, то з (8) маємо, що одночасно виконуються рівності

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln n_\alpha(\Phi(R))}{R\Phi(R)} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\Phi(R)} \frac{\ln n_\alpha(t)}{t^2} dt = 0. \quad (9)$$

Нехай $\varphi(x)$ – обернена функція до функції $\Phi(R)$. Визначимо

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{I_1(x)}}, \quad I_1(x) = \max\left\{\frac{1}{\varphi(R)} \int_0^R \frac{\ln n_\alpha(t)}{t^2} dt : R \geq x\right\},$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{I_2(x)}}, \quad I_2(x) = \max\left\{\frac{\ln n_\alpha(R)}{R\varphi(R)} : R \geq x\right\}.$$

Зауважимо, що $\psi_2(x)$ і $\psi_3(x)$ строго зростають до $+\infty$ ($x \rightarrow +\infty$).

Крім того, якщо $I(R) = \int_0^R t^{-2} \ln n_\alpha(t) dt$, то з (9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int_0^{\Phi(R)} \frac{\psi_2(t) \ln n_\alpha(t) dt}{t^2} &= \frac{1}{R} \int_0^{\Phi(R)} \psi_2(t) dl(t) \leq \\ &\leq \frac{1}{R} \psi_2(\Phi(R)) I(\Phi(R)) \leq \left\{ \frac{1}{R} \int_0^{\Phi(R)} \frac{\ln n_\alpha(t) dt}{t^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = o(1) \quad (R \rightarrow +\infty), \end{aligned} \quad (10)$$

та

$$\frac{\psi_3(\Phi(R))}{R\Phi(R)} \ln n_\alpha(\Phi(R)) \leq \psi_3(\Phi(R)) l_2(\Phi(R)) = \frac{1}{\sqrt{\psi_3(\Phi(R))}} = o(1) \quad (R \rightarrow +\infty). \quad (11)$$

Виберемо тепер додатну неперервну зростаючу до $+\infty$ функцію ψ_4 таку, що $a(x) \leq \psi_4(x) \leq a(x) + 1$, де

$$a(x) = \min\{\psi_2(x) \ln n_\alpha(x), \psi_3(x) \ln n_\alpha(x)\} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Тоді із співвідношень (10) і (11) отримуємо для $t_0 > 0$, що

$$\psi_4(\Phi(R)) = o(R\Phi(R)), \quad \int_{t_0}^{\Phi(R)} \frac{\psi_4(t)}{t^2} dt = o(R). \quad (12)$$

Із співвідношень (12) отримуємо

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{t_0}^{\Phi(R)} \frac{d\psi_4(t)}{t} = \frac{\psi_4(\Phi(R))}{R\Phi(R)} + \frac{1}{R} \int_{t_0}^{\Phi(R)} \frac{\psi_4(t)}{t^2} dt = 0. \quad (13)$$

Тобто, досить вибрати $\psi_1(x) = \psi_4^{-1}(x)$ при $x \geq \psi_4^{-1}(t_0)$ – обернену функцію до функції $\psi_4(t)$ при $t \geq t_0$. Для $x \in [0, \psi_4^{-1}(t_0)]$ можна вибрати

$$\psi_1(x) = \frac{\psi_4^{-1}(t_0)}{2} + \frac{x}{2}. \text{ Залишається зауважити, що } \ln n_\alpha(t) \leq \frac{\psi_4(t)}{a_1(t)} = \frac{\psi_1^{-1}(t)}{a_1(t)},$$

де $a_1(t) = \min\{\psi_2(t), \psi_3(t)\} \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), і застосувати твердження 0, оскільки $\psi_1 \in L(\Phi)$. Справді, із співвідношення (13) маємо

$$\frac{1}{R} \int^{\Phi(R)} \frac{d\psi_1^{-1}(x)}{x} = \frac{1}{R} \int^{\Phi(R)} \frac{d\psi_4(x)}{x} = o(1) \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Теорему 1 доведено.

Повністю повторюючи міркування з першої частини доведення теореми 1 і застосовуючи потім твердження 2, доводимо таку теорему.

Теорема 2. Нехай $\tau'(x) \geq 1$ ($x > 0$). Якщо $\Phi \in L^+$, $F \in \underline{S}(\lambda, \beta, \Phi)$ і виконується умова (7), то співвідношення (3) справджується при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини E нульової нижньої лінійної щільності, тобто $dE = 0$.

Доведення. Як вже відзначалося перед формулюванням теореми 2, доведення теореми 2 відрізняється від доведення теореми 1 лише застосуванням твердження 2 замість твердження 1, застосованого у доведенні теореми 1. Справді, у доведенні теореми 1 встановлено, що з умови (7)

впливає, що існує функція $\psi_1 \in L(\Phi)$, для якої виконується співвідношення (5). Оскільки за умовою теореми 2, $F \in \underline{S}(\lambda, \beta, \Phi)$, то всі умови твердження 2 виконуються. Застосування твердження 2 завершує доведення теореми 2.

Зауважимо, що у теоремі 1, взагалі кажучи, послідовність (α_n) мусить мати єдину точку скупчення у $+\infty$, а ні λ , ні β не зобов'язані такими бути. У наступній теоремі послідовність λ мусить мати єдину точку скупчення у $+\infty$. Але, ця обставина дозволяє істотно послабити умови теореми 1. Умови теореми 1 допускають таку варіацію.

Теорема 3. Нехай $\tau'(x) \geq 0$ ($x > 0$). Якщо $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$, $\Phi_1(x) \equiv x\Phi(x)$, $\Phi \in L$, і виконується умова

$$(\forall b > 0): \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \sum_{0 < \lambda_k \leq b\Phi(R)} \frac{1}{k\lambda_k} = 0, \quad (14)$$

то співвідношення (3) виконується при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини E нульової лінійної щільності.

Доведення теореми 3 в цілому повторює доведення теореми 1 з тією відмінністю, що замість нерівності (6) воно використовує нерівність

$$F(x) \leq 2 \sum_{\lambda_n \leq 2g'(x)} b_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n) \leq 2n_\lambda(\psi_1(g(x)))\mu(x, F),$$

де $n_\lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$, яка отримується з леми 2 з [10]. З огляду на ці обставини ми не наводимо тут доведення теореми 3.

Література

1. Осколков В.А. О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами / В.А. Осколков // Матем. сб. – 1976. – Т.100, №2. – С. 312-334.
2. Величко С.Д. Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів / С.Д. Величко, О.Б. Скасків // Вісник. Львів. ун-ту. – 1989. – Вип. 32. – С. 50-51.
3. Скасків О.Б. Максимальний член і сума регулярно збіжного функціонального ряду / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.49. – С. 75-79.
4. Скасків О.Б. Теорема типу Бореля для регулярно збіжних функціональних рядів / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т.41, №4. – С. 60-63.
5. Скасків О.Б. Про теорему типу Бореля для рядів, подібних до рядів Тейлора-Діріхле / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Мат. Студ. – 2000. – Т.13, №1. – С. 79-82.
6. Скасків О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию / О.Б. Скасків // Мат. заметки. – 1985. – Т.37, №1. – С. 41-47. Eng. transl. in Math. Notes, 37 1985, 24-28.

7. Шеремета М.Н. Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле / М.Н. Шеремета // Мат. заметки. – 1987. – Т.42, №2. – С. 215-226.
8. Скасків О.Б. Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Препринт №17-1. – Львів: Інститут прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, 1999. – 18 с.
9. Скасків О.Б. Асимптотичні властивості аналітичних функцій представлених степеневими рядами і рядами Діріхле / О.Б. Скасків // Докт. дис. – Львів, 1995. – 299 с.
10. Скасків О.Б. Про стійкість рядів, подібних на ряди Тейлора-Діріхле / О.Б. Скасків, О.Ю. Тарновецька // Буковинський матем. журн. – 2015. – Т.3, №2. – С. 77-83.
11. Зікрач Д.Ю. Про опис виняткової множини у співвідношенні Бореля для кратних рядів Діріхле з обмеженням на зростання зверху / Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків // Матем.Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С.139-147.
12. Kuryliak A.O. On Borel's type relation for the Laplace-Stieltjes integrals / A.O. Kuryliak, O.B. Skaskiv, D.Yu. Zikrach // Mat. Stud. – 2014. – V.42, №2. – С. 134-142.
13. Скасків О.Б. О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле / О.Б. Скасків // Матем. заметки. – 1999. – Т.66, №2. – С. 282-292. English transl. in Math. Notes, **66** (1999), 223-232.
14. Скасків О.Б. Про стійкість максимального члена цілого ряду Діріхле / О.Б. Скасків, О.М. Тракало // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57, №4. – С. 571-576. English transl. in Ukr. Math. J., **57** (2005), 686-693.
15. Kuryliak A.O. Wiman's inequality for Laplace integrals / A.O. Kuryliak, I.E. Ovchar, O.B. Skaskiv // Int. Journal of Math Analysis. – 2014. – V.8, №8. – P. 381-385.
16. Скасків О.Б. Співвідношення типу Бореля для узагальнень ряду експонент / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53, №11. – С. 1570-1581.
17. Скасків О.Б. Асимптотичні оцінки для інтегралів Лапласа / О.Б. Скасків, О.М. Тракало // Матем. Студії. – 2002. – Т.18, №2. – С. 125-146.
18. Скасків О.Б. Швидкість збіжності додатних рядів / О.Б. Скасків // Укр. мат. журн. – 2004. – Т.56, №12. – С. 1695-1674.
19. Скасків О.Б. Стійкість максимуму послідовності лінійних функцій / О.Б. Скасків // Мат. вісн. НТШ. – 2004. – Вип.1. – С. 120-129.
20. Skaskiv O.B. The best possible description of exceptional set in Borel's relation for multiple Dirichlet series / O.B. Skaskiv, D.Yu. Zikrach // Mat. Stud. – 2008. – V.30, №2. – P. 189-194.

21. Skaskiv O.B. On the best possible description of an exceptional set in asymptotic estimates for Laplace-Stieltjes integrals / O.B. Skaskiv, D.Yu. Zikrach // *Mat. Stud.* – 2011. – V.35, №2. – P. 131-141.
22. Зікрач Д.Ю. Нерівність типу Вімана для інтегралів Лапласа-Стілт'єса / Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків // *Буковинський математичний журнал.* – 2013. – Т.1, №1-2. – С. 58-63.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.10.2016 р.

Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В., д.ф.-м.н., професором Чижиковим І.Е. (м. Львів)

ON BOREL'S TYPE RELATION FOR THE LAPLACE-STIELTJES INTEGRALS

O.B. Skaskiv¹, O. Yu. Tarnovetska², O. M. Trusevych³

¹*Lviv National University named by Ivan Franko;*

e-mail: olskask@gmail.com

²*Chernivtsi faculty of NTU "Kharkiv polytechnic institute";*

e-mail: savinska.olga@gmail.com

³*Lviv State University of Safety of Vital Functions;*

e-mail: trusev14@gmail.com

In article it is obtained sufficient conditions in order that relation $\ln F(x) \leq (1+o(1))\ln \mu(x, F)$ holds for each function of the form $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$ as $x \rightarrow +\infty$ outside some set E of zero linear density or of zero lower linear density, where (f_n) , (λ_n) , (β_n) are positive sequences, and a differentiable function $\tau: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that $\tau'(x) \geq 1$ ($x \geq x_0$), $\mu(x, F) = \max\{f_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$.

Key words: *Taylor-Dirichlet series, Borel relation, exceptional set, maximal term*