**Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національний університет "Львівська політехніка"
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича**

VI ВСЕУКРАЇНСЬКА МАТЕМАТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ Б. В. ВАСИЛИШИНА

"НЕЛІНІЙНІ ПРОБЛЕМИ АНАЛІЗУ"

(26 – 28 вересня 2018 року, Івано-Франківськ – Микуличин)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Івано-Франківськ — 2018

УДК 51(063)-03
ББК 22-1
П99

П99 Нелінійні проблеми аналізу : VI Всеукраїнська математична конференція імені Б. В. Василишина : Тези доповідей, (26 – 28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ – Микуличин). – Івано-Франківськ : Голіней, 2018. – 92 с.

У збірнику представлені тези доповідей VI Всеукраїнської математичної конференції імені Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу". Розглянуто питання побудови і дослідження властивостей розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, інтегро–диференціальних та диференціально–операторних рівнянь, актуальні питання теорії функцій, функціонального аналізу і прикладної математики.

Застосування диференціальних рівнянь з імпульсною дією до розв'язування крайових задач теплопровідності

Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Пазен О.Ю.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Власій О.О.
Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника

1. Постановка задачі. Розглядається багатошарова плоска конструкція, область якої обмежена площинами $x = x_0$ і $x = x_n$ та поділена на n шарів. Кожен шар виготовлений з ізотропного матеріалу та наділений своїми коефіцієнтом теплопровідності λ, питомою теплоємністю та густиною ρ. Крім цього, між шарами задано умови неідеального теплового контакту. Для конструкції відомим є початковий розподіл температурного поля $\phi(x)$, а температура залежить від координати x та часу τ. На зовнішніх поверхнях існує конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються крайові умови третього роду.

Описана задача зводиться до розв'язування наступного диференціального рівняння [1, 2]

$$c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right) \tag{1}$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} t_{i+1}^{[1]}(x_{i+1}) - t_i^{[1]}(x_{i+1}) = 0, \\ t_{i+1}(x_{i+1}) - t_i(x_{i+1}) = \frac{1}{\alpha_{i+1}}t_i^{[1]}(x_{i+1}), \end{cases} \tag{2}$$

крайовими умовами третього роду

$$\begin{cases} \alpha_0 t(0,\tau) - t^{[1]}(0,\tau) = \alpha_0\psi_0(\tau), \\ \alpha_n t(x_n,\tau) - t^{[1]}(x_n,\tau) = \alpha_n\psi_n(\tau) \end{cases} \tag{3}$$

та початковою умовою

$$T(x,0) = \phi(x). \tag{4}$$

Позначення: Θ_i – характеристична функція напіввідкритого проміжку $[x_i, x_{i+1})$, тобто $\Theta_i = \begin{cases} 1, x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, x \notin [x_i, x_{i+1}), \end{cases}$ $\lambda(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i\Theta_i$, $c(x)\rho(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i\rho_i\Theta_i$, $\phi(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \phi_i\Theta_i$, $\lambda_i, c_i, \rho_i \in R$, $\lambda_i, c_i, \rho_i > 0$, $\forall = \overline{0, n-1}$, $\lambda t'_x \stackrel{df}{=} t^{[1]}(x,\tau)$ — квазіпохідна [3], $q(x,\tau) = -t^{[1]}(x,\tau)$ — густина теплового потоку.

2. Побудова розв'язку. Розв'язок задачі (1)-(4) шукається у вигляді суми двох функцій (метод редукції) [4]

$$t(x,\tau) = u(x,\tau) + v(x,\tau). \tag{5}$$

Будь-яку з функцій $u(x,\tau)$ чи $v(x,\tau)$ можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

Для функції $u(x,\tau)$ поставлено квазістаціонарну крайову задачу [2]

$$\left(\lambda u'\right)' = 0, \tag{6}$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} u_{i+1}^{[1]}(x_{i+1}) - u_i^{[1]}(x_{i+1}) = 0, \\ u_{i+1}(x_{i+1}) - u_i(x_{i+1}) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} u_i^{[1]}(x_{i+1}) \end{cases} \tag{7}$$

та крайовими умовами (3) для функції $u(x,\tau)$, тобто

$$\begin{cases} \alpha_0 u(0,\tau) - u^{[1]}(0,\tau) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n u(x_n,\tau) - u^{[1]}(x_n,\tau) = \alpha_n \psi_n(\tau). \end{cases} \tag{8}$$

Структуру розв'язку цієї задачі детально вивчено та описано в роботі [2]. Зокрема, отримано аналітичне представлення цього розв'язку у вигляді $u(x,t) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} u_i(x,t)\Theta_i$, де функції $u_i(x,t)$ виражаються виключно через вхідні дані поставленої задачі.

Для функції $v(x,\tau)$ отримано неоднорідну мішану задачу

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial\tau} + c\rho\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{9}$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} v_{i+1}^{[1]}(x_{i+1},\tau) - v_i^{[1]}(x_{i+1},\tau) = 0, \\ v_{i+1}(x_{i+1},\tau) - v_i(x_{i+1},\tau) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} v_i^{[1]}(x_{i+1},\tau), \end{cases} \tag{10}$$

нульовими крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 v(0,\tau) - v^{[1]}(0,\tau) = 0, \\ \alpha_n v(x_n,\tau) - v^{[1]}(x_n,\tau) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

та початковою умовою

$$v(x,0) = \phi(x) - u(x,0) \equiv f(x,0). \tag{12}$$

Для розв'язування цієї задачі застосовується метод власних функцій Фур'є. При цьому проміжкові результати (задача на власні значення, розвинення за власними векторами, тощо) отримані шляхом зведення відповідних задач для звичайних диференціальних (квазідиференціальних) рівнянь до систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1, 3, 5].

Покажемо це на прикладі знаходження нетривіальних розв'язків однорідної задачі

$$c\rho\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{13}$$

з умовами (10), (11).

Покладаючи $v(x,\tau) = e^{-\omega\tau}X(x)$, де ω – параметр, а $X(x)$ — невідома функція, отримано квазідиференціальне рівняння

$$\left(\lambda X(x)'\right)' + \omega c\rho X(x) = 0 \tag{14}$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} X_{i+1}^{[1]}(x_{i+1}) - X_i^{[1]}(x_{i+1}) = 0, \\ X_{i+1}(x_{i+1}) - X_i(x_{i+1}) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} X_i^{[1]})x_{i+1}) \end{cases} \tag{15}$$

та крайовими умовами

$$\begin{cases}\alpha_0 X(0) - X^{[1]}(0) = 0,\\ \alpha_n X(x_n) + X^{[1]}(x_n) = 0.\end{cases} \tag{16}$$

Задача (14)-(16) зводиться до знаходження власних вектор-функцій $\overline{X}_k(x,\omega_k), k\in\mathbb{N}$, системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1, 5]

$$\overline{X}' = A\overline{X}, \tag{17}$$

$$\overline{X}_{i+1}(x_{i+1}) - \overline{X}_i(x_{i+1}) = C_{i+1}\overline{X}_i(x_{i+1}), \tag{18}$$

і крайовими умовами

$$P\overline{X}(x_0) + Q\overline{X}(x_n) = \overline{0}. \tag{19}$$

де

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} X & X^{[1]}\end{pmatrix}^T, A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda(x)} \\ -\omega c\rho & 0\end{pmatrix}, C_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha_{i+1}} \\ -\omega c\rho & 0\end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix}\alpha_0 & -1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язок мішаної задачі (9)–(12) отримано у вигляді

$$v(x,\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x,\tau)\Theta_i,$$

де функції $v_i(x,\tau)$ виражаються через коефіцієнти Фур'є відповідних розвинень за власними функціями [1].

Приклад 1. *Розв'язано модельну задачу про розподіл нестаціонарного температурного поля у восьмишаровій плоскій конструкції, де між трьома шарами існує ідеальний, а між чотирма неідеальний теплові контакти. Результати розрахунків оформлено у вигляді таблиць та графіків.*

[1] O.Y. Pazen and R.M. Tatsii General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – March, 2016, – Vol. 89, No. 2, – P. 357-368.

[2] Таций Р.М., Пазен О.Ю. Расчет стационарного температурного поля в многослойной плите с учетом внутренних источников тепла при условии неидеального теплового контакта между слоями. // Safety and Fire Technique (безопасность и пожарная техника). – Polska, – Jozefov: – CNOBP-PIB, – BiTP 2015. – Vol. 40, – Issue 4. – P. 51-59.

[3] Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко О.В., Власій О.О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич: Коло, 2011. – 301 с.

[4] Арсенин В.Я. Методы математической физики. – Москва: Наука, 1974.

[5] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К: Высшая школа, 1987. – 228 с.

e-mail: roman.tatsiy@gmail.com, opazen@gmail.com

Іменний покажчик

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

VI ВСЕУКРАЇНСЬКА МАТЕМАТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ Б. В. ВАСИЛИШИНА

"НЕЛІНІЙНІ ПРОБЛЕМИ АНАЛІЗУ"

(26 – 28 вересня 2018 року, Івано-Франківськ – Микуличин)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Комп'ютерна верстка *В. Мазуренко*
Коректори *Т. Гой, О. Махней, І. Савка*

Підписано до друку 21.09.2018 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура "Computer Modern".
Ум. друк. арк. 5,37. Наклад 100. Зам. № 74 від 21.09.2018 р.

Друк: підприємець Голіней О. М.
76008, м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128.
Тел.: (0342)58-04-32, +38 050 540 30 64