

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
Вінницький національний технічний університет
Центр математичного моделювання ІПГММ
ім. Я.С.Підстригача НАН України
AGH науково-технологічний університет
ім. Ст.Сташіца, Польща
Представництво "Польська академія наук" в Києві
Лудзький університет, Польща
Інститут кібернетики НАН України
Національний авіаційний університет
Фінансово-економічний інститут Таджикистану
Економічна академія "Д.А.Ценов", Болгарія
Харківський національний університет радіоелектроніки
НДІ інтелектуальних комп'ютерних систем ТНЕУ та ІК НАН України
Новий університет Лісабона, Португалія
Азербайджанська державна нафтова академія
Об'єднаний інститут проблем інформатики НАН Білорусі
Інститут інженерів з електротехніки
та електроніки (ІЕЕЕ), Українська секція
Асоціація "Інформаційні технології України"
Громадська організація "Івано-Франківський ІТ кластер"

"ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ"

**матеріали
міжнародної науково-практичної конференції**

**14 - 19 травня 2018 року
Івано-Франківськ**

**"INFORMATION TECHNOLOGIES AND COMPUTER MODELLING"
proceedings
of the International Scientific Conference
May 14-19, 2018
Ivano-Frankivsk, Ukraine**

Івано-Франківськ - 2018

УДК (004:004.2/004.9+007):33/37+51+621
ББК 22.17 32.81
I-74 Т

Науковий редактор: Л.Б. Петришин - доктор технічних наук, професор
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника;
Науково-технологічний університет Akademia Górniczo-Hutnicza
im. St. Staszica w Krakowie).

Рецензенти:

- Секція 1** С.В. Голуб - доктор технічних наук, професор (Черкаський національний університет ім. Богдана Хмельницького);
- Секція 2** Ю.Й. Тулашвілі - доктор педагогічних наук, професор (Національний університет водного господарства та природокористування);
- Секція 3** Р.Н. Квєтний - доктор технічних наук, професор (Вінницький національний технічний університет);
- Секція 4** В.П. Боюн - доктор технічних наук, член-кор. НАН України, професор (Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова національної академії наук України);
- Секція 5** В.А. Лужецький - доктор технічних наук, професор (Вінницький національний технічний університет);
- Секція 6** В.М. Синєглазов - доктор технічних наук, професор (Національний авіаційний університет);
- Секція 7** О.Ю. Чернуха - доктор технічних наук, професор (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача);
- Секція 8** Я.Д. П'янило - доктор технічних наук, старший науковий співробітник (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача).

Матеріали статей рецензовано та опубліковано в авторській редакції.

"Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання"; матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції, м. Івано-Франківськ, 14-19 травня 2018 року. – Івано-Франківськ: п. Голіней О.М., 2018. –с.

Збірка містить матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції з проблем інформаційних технологій в технічних системах, в соціумі, освіті, медицині, економіці та екології; теорії інформації, кодування та перетворення форми інформації; технологій цифрової обробки інформації; захисту інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах; математичного та імітаційного моделювання систем.

УДК (004:004.2/004.9+007):33/37+51+621
ББК 22.17 32.81
I-74 Т

ISBN

© ПНУ ім. В. Стефаника, 2018
© Автори статей, 2018

Дослідження Процесів Теплопереносу у Багатошарових Конструкціях Основних Геометричних Форм з Урахуванням Внутрішніх Джерел Тепла

Роман Тацій, Марта Стасюк

кафедра прикладної математики і механіки
Львівський державний університет безпеки
життєдіяльності
Львів, Україна

roman.tatsiy@gmail.com, marta_stasiuk@yahoo.com

Олег Пазен

кафедра наглядово-профілактичної діяльності
Львівський державний університет безпеки
життєдіяльності
Львів, Україна

opazen@gmail.com

Research of Heat Transfer Processes in Multilayered Structures of Basic Geometric Forms with Internal Heat Sources

Roman Tatsiy, Marta Stasiuk

department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine

roman.tatsiy@gmail.com, marta_stasiuk@yahoo.com

Oleg Pazen

Department of Monitoring and Fire Prevention
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine

opazen@gmail.com

Анотація—Запропонована загальна схема дослідження процесу теплопередачі в багатошарових конструкціях основних трьох геометричних форм одночасно, з урахуванням внутрішніх джерел тепла. В зв'язку з цим розв'язується однопараметрична сім'я крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено: метод редукції, концепція квазіпохідних, сучасна теорія систем лінійних диференціальних рівнянь, метод Фур'є і модифікований метод власних функцій.

Abstract—The general scheme of research of the process of heat transfer in multilayer structures of the three main geometric forms simultaneously, taking into account the internal sources of heat, is proposed. In this connection, a one-parameter family of boundary-value problem is solved. The basis of the implementation of this scheme is laid: the method of reduction, the concept of quasi-derivatives, the modern theory of systems of linear differential equations, the Fourier method and the modified method of eigenfunctions.

Ключові слова—крайова задача; квазіпохідна; матриця Коші; метод Фур'є; метод власних функцій

Keywords—paper; boundary-value problem; quasi-derivative; Cauchy matrix; Fourier method, method of eigenfunctions

I. ВСТУП

У роботах [1]-[4] запропоновано і обгрунтовано конструктивну схему побудови розв'язку мішаної задачі для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами, залежними від просторової координати на скінченному інтервалі та внутрішніми джерелами тепла. В основу схеми було покладено: метод редукції, концепція квазіпохідних, сучасна теорія систем лінійних диференціальних рівнянь, метод Фур'є та модифікований метод власних функцій.

Одержані результати можуть бути використані, наприклад, при дослідженні процесів теплопередачі в багатошарових плиті та порожнистому циліндрі за умов ідеального теплового контакту між шарами. Ця ідея вже

була реалізована в роботах [1], [2]. Природно виникло питання про об'єднання цієї схеми для випадку багатощарових конструкцій будь-якої канонічної форми.

У загальному випадку диференціальні рівняння теплопровідності у прямокутній, циліндричній та сферичній системах координат (рівняння (1), (2) та (3) відповідно) мають вигляд

$$c(r)\rho(r)\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(r)\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r}\right) + q_v(r) \quad (1)$$

$$c(r)\rho(r)\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(r)\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r}\right) + q_v(r) \quad (2)$$

$$c(r)\rho(r)\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda(r)\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r}\right) + q_v(r) \quad (3)$$

Легко бачити, що ці рівняння відрізняються лише наявністю множника r^l , при $l=0$, $l=1$ та $l=2$. У зв'язку з цим авторами запропоновано об'єднати рівняння (1)-(3) в однопараметричну сім'ю диференціальних рівнянь [1], [2].

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Розглядається багатощарова конструкція (у прямокутній, циліндричній або сферичній системі координат) область якої обмежена поверхнями $r=r_0$ і $r=r_n$ та поділена на n шарів. Кожен шар виготовлений із ізотропного матеріалу та наділений своїми коефіцієнтом теплопровідності λ , питомою теплоємністю c та густиною ρ . Крім цього, у шарах конструкції закладається наявність внутрішніх джерел тепла q_v . Для конструкції задано початковий розподіл температурного поля $\varphi(r)$, а температура t залежить від координати r та часу τ . На зовнішніх поверхнях існує конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються крайові умови третього роду [6].

У загальному випадку така постановка задачі зводиться до розв'язування однопараметричної сім'ї диференціальних рівнянь

$$c(r)\rho(r)\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^l}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^l\lambda(r)\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r}\right) + q_v(r), \quad (4)$$

$$l = 0, 1, 2$$

зокрема, при $l=0$ – багатощарова плоска конструкція; $l=1$ – багатощаровий порожнистий циліндр; $l=2$ – багатощарова порожниста куля.

До рівняння (4) додаються крайові умови третього роду

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial t}{\partial r}(r_0, \tau) = \alpha_0 (t(r_0, \tau) - \psi_0(\tau)), \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha_n (t(r_n, \tau) - \psi_n(\tau)), \end{cases} \quad (5)$$

та початкова умова

$$t(r, 0) = \varphi(r). \quad (6)$$

Надалі використовуватимемо такі позначення [2], [3]: θ_i – характеристична функція напіввідкритого проміжку

$$[r_i, r_{i+1}), \text{ тобто, } \theta_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } r \in [r_i, r_{i+1}), \\ 0, \text{ якщо } r \notin [r_i, r_{i+1}), \end{cases} \quad \lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i,$$

$$c(r) \cdot \rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot \rho_i \cdot \theta_i, \quad \varphi(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \cdot \theta_i, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i > 0 \in R,$$

$$\forall i = \overline{0, n-1}, \quad r^l \lambda_i r^l = t^{[l]}(r, \tau) - \text{квасіпохідна, } q = \frac{t^{[l]}(r, \tau)}{r^l}$$

– густина теплового потоку.

Розв'язок задачі (4)-(6) шукатимемо у вигляді суми двох функцій (метод редукції) [3]

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau). \quad (7)$$

Будь-яку з функцій $u(r, \tau)$ чи $v(r, \tau)$ можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

III. 2. ВИБІР ФУНКЦІЇ $u(r, \tau)$ ТА МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ

$$v(r, \tau)$$

A. Задача для функції $u(r, \tau)$.

Розв'язуємо квазістационарну крайову задачу [2]-[4]

$$\frac{1}{r^l} (r^l \lambda u')' + q_v = 0, \quad (8)$$

з крайовими умовами (5) для функції $u(r, \tau)$, тобто

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0^l u(r_0, \tau) - u^{[l]}(r_0, \tau) = \alpha_0 r_0^l \psi_0(\tau), \\ \alpha_n r_n^l u(r_n, \tau) + u^{[l]}(r_n, \tau) = \alpha_n r_n^l \psi_n(\tau). \end{cases} \quad (9)$$

Введемо вектори $\mathbf{u} = (u, u^{[l]})^T$, $\mathbf{q} = (0 \quad r^l q_v)^T$ та

$$\text{матрицю } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & r^l \lambda \end{pmatrix}.$$

(Квасі)диференціальне рівняння (8) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь 1-го порядку [2]

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{q}. \quad (10)$$

Крайові умови (9) запишемо у векторній формі [3]

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}(r_0) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}(r_n) = \mathbf{\Gamma}(\tau), \quad (11)$$

де \mathbf{P} , \mathbf{Q} і $\mathbf{\Gamma}(\tau)$ мають вигляд

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha_0 r_0^l & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n r_n^l & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{\Gamma}(\tau) = \begin{pmatrix} \alpha_0 r_0^l \Psi_0(\tau) \\ \alpha_n r_n^l \Psi_n(\tau) \end{pmatrix}.$$

На кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ система (10) має вигляд

$$\mathbf{u}'_i = \mathbf{A}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & r^l \lambda_i \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матриця Коші $\mathbf{B}_{i,l}(r,s)$ системи (13) має наступний вигляд

$$\mathbf{B}_{i,l}(r,s) = \begin{pmatrix} 1 & K_{i,l}(r,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l=0,1,2, \quad (14)$$

$$\text{де } K_{i,l}(r,s) = \frac{1}{\lambda_i} \int_s^r \frac{dz}{z^l}.$$

Для довільного $k \geq i$ позначимо

$$\mathbf{B}_l(r_k, r_i) \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{B}_{k-1,l}(r_k, r_{k-1}) \cdot \mathbf{B}_{k-2,l}(r_{k-1}, r_{k-2}) \cdots \mathbf{B}_{i,l}(r_{i+1}, r_i). \quad (15)$$

Структура (14) матриці $\mathbf{B}_{i,l}(r,s)$ дає можливість встановити структура матриці (15), а саме

$$\mathbf{B}_l(r_k, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=m}^{k-1} K_{i,l}(r,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

На кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ розв'язок задачі (8), (9) має вигляд вектор-функції $\mathbf{u}_i(r, \tau)$ [2], де першою координатою є шукана нами функція $u_i(r, \tau)$, а другою – її квазіпохідна.

$$\mathbf{u}_i(r, \tau) = \mathbf{B}_i(r, r_i) \cdot \mathbf{B}(r_i, r_0) \cdot \mathbf{P}_0 - \mathbf{B}_i(r, r_i) \times \\ \times \sum_{k=0}^i \mathbf{B}(r_i, r_k) \cdot \mathbf{Z}_k - \int_{r_i}^r \mathbf{B}_i(r, s) \cdot \mathbf{q}_i(s) ds, \quad (17)$$

$$\text{де } \mathbf{P}_0 = (\mathbf{P} + \mathbf{Q} \mathbf{B}_i(r_n, r_0))^{-1} \cdot (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{Q} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}_i(r_n, r_k) \cdot \mathbf{Z}_{k,l}),$$

$$\mathbf{Z}_{k,l} = \int_{r_{k-1}}^{r_k} \mathbf{B}_{k-1,l}(r_k, s) \mathbf{q}_{k-1}(s) ds,$$

$$\int_{r_i}^r \mathbf{B}_{i,l}(r, s) \cdot \mathbf{q}_i(s) ds = \int_{r_i}^r \begin{pmatrix} 1 & K_{i,l}(r,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r^l q_{vi} \end{pmatrix} ds.$$

Вираз (17) дозволяє записати розв'язок задачі (8), (9) на проміжку $[r_0, r_n]$ за допомогою характеристичних функцій θ_i у вигляді

$$\mathbf{u}(r, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{u}_i(r, \tau) \theta_i. \quad (18)$$

В. Задача для функції $v(r, \tau)$

На основі зображення (7) перепишемо рівняння (4) у наступному вигляді [2], [5]

$$c\rho \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} = \\ = \frac{1}{r^l} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^l \lambda \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^l} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^l \lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r} \right). \quad (19)$$

Підставивши рівняння (8) в (19) отримуємо неоднорідну мішану задачу (роль неоднорідності грає вираз $-c\rho \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau}$ із вже знайденою функцією $u(r, \tau)$)

$$c\rho \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^l} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^l \lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r} \right) - c\rho \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau}, \quad (20)$$

з нульовими крайовими умовами для функції $v(r, \tau)$,

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0^l v(r_0, \tau) - v^{l,l}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n r_n^l v(r_n, \tau) + v^{l,l}(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

та початковою умовою

$$v(r, 0) = f(r) = \varphi(r) - u(r, 0). \quad (22)$$

В.1. Відокремлення змінних та задача на власні значення.

Розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^l} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^l \lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r} \right) \quad (23)$$

шукатимемо у вигляді [4]

$$v(r, \tau) = e^{-\omega \tau} \cdot R(r), \quad (24)$$

де ω – параметр, а $R(r)$ – невідома функція.

Підставляючи (24) у (23), отримуємо квазидиференціальне рівняння

$$(r^l \lambda R')' + \omega c\rho r^l R = 0, \quad (25)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0^l R(r_0) - R^{l,l}(r_0) = 0, \\ \alpha_n r_n^l R(r_n) + R^{l,l}(r_n) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Задача (25), (26) – класична задача на власні значення, у якій необхідно знайти значення параметра ω (власні значення) при яких існують відповідні їм нетривіальні розв'язки (власні функції) $R_k(r, \omega_k)$. Відомо [4], що всі власні значення $\omega_k \in \mathbb{R}$ є додатними та різними.

Ввівши квазіпохідну $R^{[l]} = r^l \lambda R'$, вектор $\mathbf{R} = (R, R^{[l]})^T$ і матрицю $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega r^l c \rho & 0 \end{pmatrix}$, зведемо квазидиференціальне рівняння (25) до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} \mathbf{R}. \quad (27)$$

На кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ система (27) матиме вигляд [1], [3]

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega r^l c_i \rho_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Матриця Коші $\bar{\mathbf{B}}_{i,l}(r, s, \omega)$ системи (28) має наступний вигляд [1], [4]

$$\bar{\mathbf{B}}_{i,l}(r, s, \omega) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, l=0, \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, l=1, \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, l=2, \end{cases} \quad (29)$$

де позначено, $a_{11} = \cos \beta_i(r-s)$, $a_{12} = \frac{\sin \beta_i(r-s)}{\lambda_i \beta_i}$,

$$a_{21} = -\lambda_i \beta_i \sin \beta_i(r-s), \quad a_{22} = \cos \beta_i(r-s),$$

$$b_{11} = \frac{\pi \beta_i s (J_1(\beta_i, s) Y_0(\beta_i, r) - J_0(\beta_i, r) Y_1(\beta_i, s))}{2},$$

$$b_{12} = \frac{\pi (J_0(\beta_i, s) Y_0(\beta_i, r) - J_0(\beta_i, r) Y_0(\beta_i, s))}{2 \lambda_i},$$

$$b_{21} = \frac{\pi \lambda_i \beta_i^2 r s (J_1(\beta_i, r) Y_1(\beta_i, s) - J_1(\beta_i, s) Y_1(\beta_i, r))}{2},$$

$$b_{22} = \frac{\pi \beta_i r (J_1(\beta_i, r) Y_0(\beta_i, s) - J_0(\beta_i, s) Y_1(\beta_i, r))}{2}.$$

$$c_{11} = \frac{\beta_i s \cos(\beta_i(r-s)) + \sin(\beta_i(r-s))}{\beta_i r}, \quad c_{12} = \frac{\sin(\beta_i(r-s))}{\beta_i r s \lambda_i},$$

$$c_{21} = \frac{(\omega c_i \rho_i r s + \lambda_i) \sin(\beta_i(r-s)) + (\beta_i \lambda_i (s-r)) \cos(\beta_i(r-s))}{\beta_i},$$

$$c_{22} = \frac{\beta_i r \cos(\beta_i(r-s)) + \sin(\beta_i(r-s))}{\beta_i s}.$$

Тут J_0 , J_1 и N_0 , N_1 – функції Бесселя і Неймана нульового та першого роду відповідно, а $\beta_i = \sqrt{\frac{c_i \rho_i \omega}{\lambda_i}}$, $i = 0, n-1$.

Аналогічно як і в (15), позначимо:

$$\bar{\mathbf{B}}_l(r_i, r_0, \omega) = \prod_{j=0}^{l-1} \bar{\mathbf{B}}_{i-j,l}(r_{i-j+1}, r_{i-j}, \omega), \quad (30)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_l(r, r_0, \omega) = \sum_{i=0}^{n-l} \bar{\mathbf{B}}_{i,l}(r, r_i, \omega) \cdot \bar{\mathbf{B}}_l(r_i, r_0, \omega) \cdot \theta_i, \quad (31)$$

Розв'язок системи (27) шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{R}(r, \omega) = \bar{\mathbf{B}}_l(r, r_0, \omega) \cdot \mathbf{C}, \quad (32)$$

де, $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$ – деякий ненульовий вектор.

Застосувавши до рівності (32) крайові умови (26) та після перетворень отримаємо

$$[\mathbf{P} + \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{B}}_l(r_n, r_0, \omega)] \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (33)$$

Для існування вектора \mathbf{C} в (33) необхідно и достатньо виконання умови

$$\det[\mathbf{P} + \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{B}}_l(r_n, r_0, \omega)] = 0. \quad (34)$$

Характеристичне рівняння задачі на власні значення (25), (26) має вигляд (34) [1].

Виходячи з умови (33), ненульовий вектор \mathbf{C} має вигляд

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 r_0^l \end{pmatrix}^T. \quad (35)$$

Власні вектори системи диференціальних рівнянь (27) з крайовими умовами (26) мають наступну структуру

$$\mathbf{R}_k(r, \omega_k) = \bar{\mathbf{B}}_l(r, r_0, \omega) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 r_0^l \end{pmatrix}^T, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

Власні функції $R_k(r, \omega_k)$, як перші координати власних векторів $\mathbf{R}_k(r, \omega_k)$, можна зобразити наступним чином

$$R_k(r, \omega_k) = (1, 0) \cdot \tilde{\mathbf{B}}_l(r, r_0, \omega_k) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_0 r_0^l}, 1 \right)^T, \quad (37)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Оскільки $R_k(r, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} R_{ki}(r, \omega_k) \theta_i$, то із (37)

випливає, що

$$R_{ki}(r, \omega_k) = (1, 0) \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{l,i}(r, r_i, \omega_k) \cdot \tilde{\mathbf{B}}_l(r_i, r_0, \omega_k) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_0 r_0^l}, 1 \right)^T. \quad (35)$$

В.2. Метод власних функцій.

Розв'язок мішаної задачі (20)-(22) шукатимемо у вигляді

$$v(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k), \quad (38)$$

де $T_k(\tau)$ – невідомі функції.

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ входить у праву частину рівняння (20), розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями $R_k(r, \omega_k)$.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k). \quad (39)$$

Тут слід зауважити, що розвинення деякої функції $g(r)$ в ряд Фур'є за власними функціями $R_k(r, \omega_k)$ задачі (25), (26) має вигляд

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot R_k(r, \omega_k), \quad (40)$$

де коефіцієнти Фур'є g_k знаходяться за формулою [3]

$$g_k = \frac{1}{\|R_k\|^2} \int_{r_0}^{r_n} c \rho r^l g(r) R_k(r, \omega_k) dr = \frac{1}{\|R_k\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^l g_i(r) R_{ki}(r, \omega_k) dr. \quad (41)$$

Зауважимо, що $\|R_k\|^2$ – квадрат норми власних функцій $R_k(r, \omega_k)$

$$\|R_k\|^2 = \int_{r_0}^{r_n} c \rho r^l R_k^2(r, \omega_k) dr = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^l R_{ki}^2(r, \omega_k) dr. \quad (42)$$

Підставляючи (38) у (20), враховуючи (24) та після перетворень, приходимо до нескінченної сукупності диференціальних рівнянь

$$T_k'(\tau) + \omega_k T_k(\tau) + u_k(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (43)$$

де $u_k(\tau)$ – коефіцієнти розвинення

$$\frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k).$$

Загальний розв'язок рівняння (43) має вигляд

$$T_k(\tau) = f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} \cdot u_k(s) ds, \quad (44)$$

де f_k – коефіцієнти розвинення початкової умови

$$f(r) \equiv \varphi(r) - u(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k R_k(r, \omega_k) \text{ в ряд Фур'є.}$$

Отже розв'язок мішаної задачі (20)-(22) одержуємо у вигляді ряду [3]

$$v(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_k(r, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(r, \tau) \cdot \theta_i, \quad (45)$$

Враховуючи зображення (7) та формули (17) і (45) розв'язок мішаної задачі (4)-(6) отримаємо у вигляді

$$t(r, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} [u_i(r, \tau) + v_i(r, \tau)] \cdot \theta_i. \quad (46)$$

IV. МОДЕЛЬНА ЗАДАЧА

В якості числового прикладу розглянемо конструкцію, яка складається з п'яти різних шарів. На поверхнях конструкції відбувається конвекційний теплообмін з навколишнім середовищем. Необхідно визначити розподіл нестационарного температурного поля п'ятишарової конструкції (для прямокутної, циліндричної та сферичної систем координат), якщо з однієї сторони температура змінюється за законом стандартного температурного режиму пожежі $\psi_n(\tau) = 345 l g \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 20$ [7]. Теплофізичні характеристики матеріалів та закони зміни температур наведено в табл. 1.

ТАБЛИЦЯ 1. ТЕПЛОФІЗИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Параметр	Шар 1	Шар 2	Шар 3	Шар 4	Шар 5
Товщина [м]	0,01	0,06	0,03	0,2	0,05
Коеф. теплопров. [Вт/м·К]	0,96	0,7	0,09	1,92	0,76
Питома теплоємність [Дж/кг·К]	880	840	840	840	840
Густина [кг/м ³]	2000	1600	300	2500	1800

Внутрішні джерела тепла [Вт/м ³]	-	200	-	-	-	-	-	-
Закони зміни температур [°C]	$\psi_0(\tau) = 20, \psi_n(\tau) = 345 \lg\left(1 + \frac{8\tau}{60}\right) + 10$							
Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях [Вт/м ² ·К]	$\alpha_0 = 10, \alpha_n = 25$							

Використовуючи вище запропонований авторами метод, та програмне забезпечення Maple 13 [8] одержуємо розв'язок поставленої задачі про розподіл нестационарного температурного багатозарової плоскої, циліндричної та сферичної конструкцій у вигляді графіків (рис. 1-3) та табл. II-VII.

Плоска конструкція

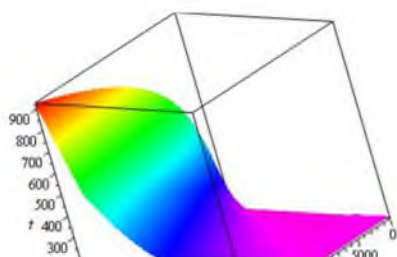


Рис. 1. Об'ємний графік зміни температурного поля по товщині плоскої конструкції

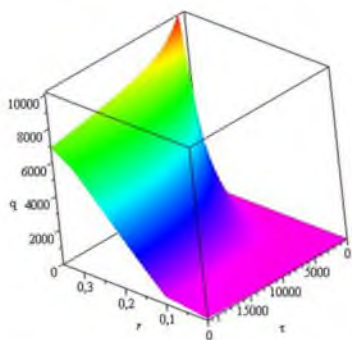


Рис. 2. Об'ємний графік зміни густини теплового потоку по товщині плоскої конструкції

ТАБЛИЦЯ II. ТЕМПЕРАТУРА ПЛОСКОЇ КОНСТРУКЦІЇ

τ, r	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
0	20	18,4	12,7	12,2	11,8	11,4	11	10
3 хв	20	18,4	12,7	12,2	11,8	11,4	11	125,4
5 хв	20	18,4	12,7	12,2	11,8	11,5	11,1	172,9
30хв	20	18,4	12,7	12,2	12,1	16,79	55,2	445,3
1год	20	18,4	12,7	13,4	19,4	46,5	130,8	579,9

2год	20	18,4	21,8	29,7	58,6	124,1	246,7	713,1
6год	29	40,8	171	199,6	263,2	364	502,3	928,1

TABLE II. ГУСТИНА ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ ПЛОСКОЇ КОНСТРУКЦІЇ

τ, r	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
0	-27,6	-19,6	-15,6	-15,6	-15,6	-15,6	-15,6	-15,6
3 хв	-27,6	-19,6	-15,6	-15,6	-15,6	-15,6	-15,6	9171,8
5 хв	-27,6	-19,6	-15,6	-15,6	-15,6	-12,7	-11,7	9835,7
30хв	-27,6	-19,6	-15,6	-15,6	27,63	480,5	3039,4	9661,6
1год	-27,6	-19,6	-15,6	76,1	476,3	1840,2	4964,6	8884,1
2год	-27,6	-19,6	24,2	633	1687,2	3485	6026,6	8147,4

Циліндрична конструкція

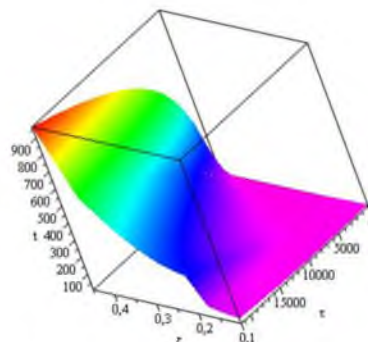


Рис. 3. Об'ємний графік зміни температурного поля по товщині циліндричної конструкції

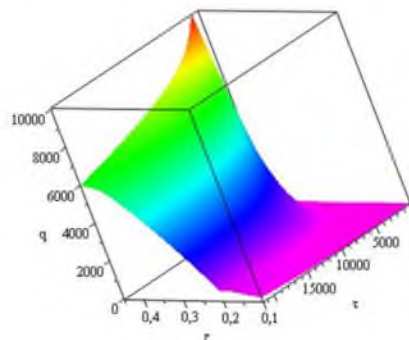


Рис. 4. Об'ємний графік зміни густини теплового потоку по товщині плоскої конструкції

ТАБЛИЦЯ III. ТЕМПЕРАТУРА ЦИЛІНДРИЧНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

τ, r	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
0	20	17,6	11,6	11,2	10,9	10,7	10,5	10
3 хв	20	17,6	11,6	11,2	10,9	10,7	10,5	125,3
5 хв	20	17,6	11,6	11,2	10,9	10,7	10,5	172,9
30хв	20	17,6	11,6	11,2	11,3	16,9	58,5	445,3
1год	20	17,6	11,9	12,8	20,4	51,8	142,4	579,9

2год	20	17,6	24,8	35,6	71	145,1	274,3	713,1
6год	39,9	59,5	234,7	268,2	339,2	443,9	578,2	928,1

ТАБЛИЦЯ IV. ГУСТИНА ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

$\tau, \text{г}$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
0	-47,2	-24,5	-15,2	-12,1	-10,1	-8,7	-7,6	-6,7
3 хв	-47,2	-24,5	-15,2	-12,1	-10,1	-8,7	-7,6	9154
5 хв	-47,2	-24,5	-15,2	-12,1	-10,1	-8,7	-7,6	9803
30хв	-47,2	-24,5	-15,2	-12,1	42,6	549,8	3209,1	9481
1год	-47,2	-24,5	-11,6	108,3	581,5	2060,2	5184,5	8578,2
2год	-47,2	-24,5	39,3	819,3	1992,8	3812,8	6162,3	7686,2

Сферична конструкція

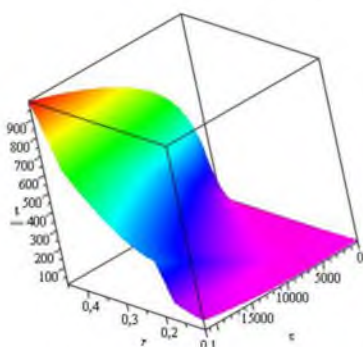


Рис. 5. Об'ємний графік зміни температурного поля по товщині сферичної конструкції

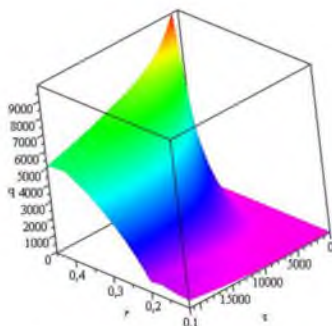


Рис. 6. Об'ємний графік зміни густини теплового потоку по товщині сферичної конструкції

ТАБЛИЦЯ V. ТЕМПЕРАТУРА СФЕРИЧНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

$\tau, \text{г}$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
0	20	16,8	10,9	10,6	10,4	10,3	10,2	10
3 хв	20	16,8	10,9	10,6	10,4	10,3	10,2	126,8
5 хв	20	16,8	10,9	10,6	10,5	10,3	10,2	175,6
30хв	20	16,8	10,9	10,6	10,9	17,5	62,4	459,9
1год	20	16,8	11,3	12,8	22,3	58,2	155,1	603,8
2год	20	16,8	29,8	44	86,4	169,1	304	750,1

6год	58,6	89,8	310,4	348,6	442,2	528,8	655,9	998,5
-------------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

ТАБЛИЦЯ VI. ГУСТИНА ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ СФЕРИЧНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

$\tau, \text{г}$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
0	-77,2	-28,3	-13,3	-8,53	-5,9	-4,4	-3,3	-2,6
3 хв	-77,2	-28,3	-13,3	-8,53	-3,7	-4,4	-3,3	9135,4
5 хв	-77,2	-28,3	-13,3	-8,53	24,3	-4,4	-3,3	9768,8
30хв	-77,2	-28,3	-13,3	-8,53	57,8	622,2	3379,2	9296,7
1год	-77,2	-28,3	-8,9	148,1	699,5	2288,6	5392,5	8287,3
2год	-77,2	-28,3	58,7	1034,8	2311,6	4119,6	6254,74	7224

Висновки

У роботі розглянуто можливість зведення мішаних задач теплопровідності (для прямокутної, циліндричної та сферичної систем координат) до однопараметричної сім'ї крайових задач. Запропоновано конструктивну схему розв'язку даних задач, яка базується на основі методу редукції, концепції квазіпохідних, задачі на власні значення та модифікованого методу Фур'є. Розглянуто модельну задачу про розподіл нестационарного температурного поля по товщині п'ятишарової конструкції (прямокутної, циліндричної та сферичної форм) з урахуванням внутрішніх джерел тепла.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] R. Tatsiy, M. Stasiuk, O. Vlasii, O. Pazen "Direct method of research temperature field in a multilayer conduit for fire conditions" in *Information Technologies and Computer Modelling: International Scientific and Practical Conference ITCM-2017: Precarpath. Nation. Univ., Ivano-Frankivsk, 2017*, in press.
- [2] R. M. Tatsii, T.I. Ushak and O. Y. Pazen. "Zahal'na tretya krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovodnosti z kuskovo-stalymy koeffitsiyentamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla [General third boundary problem for the heat equation with piecewise constant and internal heat sources]". *Zbirnyk naukovykh prats "Pozhezhna bezpeka"*, no. 27, pp. 120-126, 2015. (In Ukrainian).
- [3] O. Y. Pazen and R. M. Tatsii. "General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients". *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 89, no. 2, pp. 357-368, March 2016.
- [4] V.Ya. Arsenin. *Metody matematicheskoy fiziki* [Methods of mathematical physics]. Moscow: Science, 1974. (In Russian).
- [5] R. M. Tatsii and O. Y. Pazen. "Pryamyy metod rozrakhunku nestatsionarnoho temperaturnoho polya v umovakh pozhezhi [Direct method of calculation unsteady temperature field in a fire]" *Zbirnyk naukovykh prats "Pozhezhna bezpeka"*, no 26, pp. 135-141, 2015. (In Ukrainian).
- [6] A. V. Lykov. *Teoriya teploprovodnosti* [Heat Conduction Theory]. Moscow: Vysshaya Shkola, 1967, p. 559. (In Russian).
- [7] EN 1991-1-2 (2002) (English): Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-2: General actions – Actions on structures exposed to fire.
- [8] O. V. Mahnej and T. P. Goj. *Matematychnye zabezpechennya avtomatyzatsiyi prykladnykh doslidzhen* [Mathematics for the protection of automation applications]. Ivano-Frankivsk: "Simyk", 2013, p. 304. (In Ukrainian).