Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
Представництво "Польська Академія Наук" в Києві
Вінницький національний технічний університет
Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України
AGH науково-технологічний університет ім. Ст.Сташіца, Польща
Лудзький університет, Польща
Інститут кібернетики НАН України
Національний авіаційний університет
Фінансово-економічний інститут Таджикистану
Економічна академія "Д.А.Ценов", Болгарія
Штуттгардський університет, Німеччина
Харківський національний університет радіоелектроніки
НДІ інтелектуальних комп'ютерних систем ТНЕУ та ІК НАН України
Новий університет Лісабона, Португалія
Бакинський державний університет, Азербайджан
Об'єднаний інститут проблем інформатики НАН Білорусі
Інститут інженерів з електротехніки та електроніки (IEEE), Українська секція
Асоціація "Інформаційні технології України"
Громадська організація "Івано-Франківський ІТ кластер"

"ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ"

матеріали міжнародної науково-практичної конференції

20-25 травня 2019 року
Івано-Франківськ

"INFORMATION TECHNOLOGIES AND COMPUTER MODELLING"
proceedings
of the International Scientific Conference
2019, May, 20th to 25th
Ivano-Frankivsk

Івано-Франківськ - 2019

Дослідження Поздовжніх Коливань Стрижня з Двох Кусків Кусково-Сталого Перерізу

Р.М. Тацій
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна

О.О. Карабин
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
tosjakarabyn@gmail.com

О.Ю. Чмир
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
o_chmyr@yahoo.com

The Investigation for Longitudinal Oscillations of Rods of Two Pieces of a Piecewise-Constant Section

R.M. Tatsij
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of life safety
Lviv, Ukraine

O.O. Karabyn
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of life safety
Lviv, Ukraine
tosjakarabyn@gmail.com

O.Yu. Chmyr
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of life safety
Lviv, Ukraine
o_chmyr@yahoo.com

Анотація **– Запропоновано схему дослідження поздовжніх коливань стрижня, що складається з двох кусків кусково-сталого перерізу. В основу схеми покладено концепцію квазіпохідних, метод зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, але взаємозв'язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур'є та модифікований метод власних функцій. Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розв'язку. Такий підхід дозволяє застосовувати програмні засоби до процесу вирішення задачі та графічної ілюстрації розв'язку.**

Abstract **– The method of investigation for longitudinal oscillations rod of two pieces of a piecewise-constant section is offered. In the basis of the solving scheme is a concept of quasi-derivatives, a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a reduction method. The advantage of this method is a possibility to examine a problem on each breakdown segment and then to combine obtained solutions on the basis of matrix calculation. Such an approach allows the use of software tools for solving the problem.**

Ключові слова: **квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, функція Дірака, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій.**

Keywords: **kvazidifferential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the Dirac function, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.**

I. Вступ

Методи розв'язування нестаціонарних крайових задач можна поділити на прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод функції Ґріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

Запропонована у цій роботі схема належить до прямих методів розв'язування крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних [1], метод зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, але взаємопов'язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур'є та модифікований метод власних функцій.

В цій роботі досліджуються поздовжні коливання стрижня з двох кусків кусково-сталого перерізу. За допомогою методу редукції дослідження зводиться до знаходження розв'язку двох задач: стаціонарної неоднорідної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння.

II. Основні позначення, формулювання задачі

Нехай L – відкритий інтервал дійсної осі $\mathbb{R}$, $[x_0;x_2]\subset L$ – відрізок дійсної осі; $x_0<x_1<x_2$ – довільне розбиття відрізка $[x_0;x_2]$ дійсної осі Ox на дві частин.

Введемо основні позначення: θ_i – характеристична функція проміжку $[x_i;x_{i+1})$; F_0, F_1, E, ρ – сталі. Покладемо $F(x)=F_0\cdot\theta_0+F_1\cdot\theta_1$; $u^{[1]}=F(x)\cdot u_x'$ – квазіпохідна.

Розглянемо поздовжні коливання стрижнів

$$\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{41}$$

$$x\in(x_0;x_2),\ t\in(0;+\infty),$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases}u(x_0,t)=\psi_0(t),\\ u(x_2,t)=\psi_1(t),\end{cases} t\in[0;+\infty) \tag{42}$$

та початковими умовами

$$\begin{cases}u(x,0)=\varphi_0(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varphi_1(x),\end{cases} x\in[x_0;x_2], \tag{43}$$

де $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)\in C^2(0;+\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – кусково-неперервні на $(x_0;x_2)$.

Метод редукції відшукання розв'язку задачі детально описаний, наприклад, в [2, 3]. Згідно з цим методом розв'язок задачі (41) - (43) шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t). \tag{44}$$

Одну з функцій, наприклад $w(x,t)$, виберемо спеціальним способом, тоді функцію $v(x,t)$ вже визначимо однозначно.

III. Побудова функції $w(x,t)$

Визначимо функцію $w(x,t)$ як розв'язок крайової задачі

$$(F(x)\cdot w_x')_x'=0, \tag{45}$$

$$\begin{cases}w(x_0,t)=\psi_0(t),\\ w(x_2,t)=\psi_1(t),\end{cases} t\in[0;+\infty). \tag{46}$$

Зауважимо, що змінна t тут вважається параметром.

В основі методу розв'язування задачі (45), (46) лежить концепція квазіпохідних [4].

Введемо вектор $\overline{W}=\begin{pmatrix}w\\ w^{[1]}\end{pmatrix}$, де $w^{[1]}=F\cdot w_x'$. За таких позначень квазідиференціальне рівняння (45) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{W}_x'=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{F(x)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\overline{W}. \tag{47}$$

Під розв'язком системи (47) розуміємо абсолютно-неперервну вектор-функцію $\overline{W}(x,t)$, що за змінною x справджує її майже скрізь (див. [4]).

Крайові умови (46) запишемо у векторній формі

$$P\cdot\overline{W}(x_0,t)+Q\cdot\overline{W}(x_2,t)=\overline{\Gamma}(t), \tag{48}$$

де $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\overline{\Gamma}(t)=\begin{pmatrix}\psi_0(t)\\ \psi_1(t)\end{pmatrix}$.

Нехай $w_i(x,t)$ та $w_i^{[1]}(x,t)$ визначені на проміжку $[x_i;x_{i+1})$, $i=\overline{0,1}$. Покладемо

$$w(x,t)=w_0(x,t)\theta_0+w_1(x,t)\theta_1. \tag{49}$$

На проміжку $[x_i;x_{i+1})$, $i=\overline{0,1}$ система (47) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix}w_i\\ w_i^{[1]}\end{pmatrix}_x'=\begin{pmatrix}0&\dfrac{1}{F_i}\\ 0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_i\\ w_i^{[1]}\end{pmatrix}. \tag{50}$$

Матриця Коші $B_i(x,s)$, $i=\overline{0,1}$ цієї системи має вигляд

$$B_i(x,s)=\begin{pmatrix}1&b_i(x,s)\\0&1\end{pmatrix},\ \text{де}\ b_i(x,s)=\int_s^x\frac{1}{F_i}dz=\frac{x-s}{F_i}. \tag{51}$$

Позначимо

$$B(x_1,x_0) \stackrel{def}{=} B_0(x_1,x_0),$$

$$B(x_2,x_0) \stackrel{def}{=} B_1(x_2,x_1)\cdot B_0(x_1,x_0). \qquad (52)$$

Структура (51) матриць $B_0(x,s)$, $B_1(x,s)$ дає можливість встановити структуру матриці (52) $B(x_k,x_0)=\begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=0}^{k-1} b_m(x_{m+1},x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k=\overline{1,2}$. причому $B(x_k,x_k) \stackrel{def}{=} I$, де I – одинична матриця.

Розв'язок системи (50) на проміжках $[x_0;x_1)$ та $[x_1;x_2]$ має вигляд

$$\overline{W}_0(x,t)=B_0(x,x_0)\cdot\overline{P}_0,$$

$$\overline{W}_1(x,t)=B_1(x,x_1)\cdot\overline{P}_1, \qquad (53)$$

де $\overline{P}_0$, $\overline{P}_1$ – поки що невідомі вектори [1].

В точці $x=x_1$ повинна виконуватись умова неперервності $\overline{W}_1(x_1,t)=\overline{W}_0(x_1,t)$, в результаті чого одержимо рекурентне співвідношення

$$\overline{P}_1=B_0(x_1,x_0)\cdot\overline{P}_0, \qquad (54)$$

де $\overline{P}_0$ – початковий (невідомий) вектор.

Для знаходження $\overline{P}_0$ використовуємо крайові умови (48), в яких покладемо $\overline{W}(x_0,t) \stackrel{def}{=} \overline{P}_0$,

$\overline{W}(x_2,t) \stackrel{def}{=} \overline{W}_1(x_2,t)=B(x_2,x_0)\overline{P}_0$.

Тоді $[P+Q\cdot B(x_2,x_0)]\overline{P}_0=\overline{\Gamma}$, звідки одержуємо

$$\overline{P}_0=[P+Q\cdot B(x_2,x_0)]^{-1}\cdot\overline{\Gamma}. \qquad (55)$$

Обчислимо $[P+Q\cdot B(x_2,x_0)]^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\Delta & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, де $\Delta=\sum_{m=0}^{1}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}$. Тоді з (55) та (54)

$$\overline{P}_0=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}\Delta\cdot\psi_0(t)\\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix}, \qquad (56)$$

$$\overline{P}_1=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}\frac{x_2-x_1}{F_1}\psi_0(t)+\frac{x_1-x_0}{F_0}\psi_1(t)\\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix}. \qquad (57)$$

На основі формул (53), (56), (57) після перетворень, отримаємо зображення вектор - функції $\overline{W}_0(x,t)$ та $\overline{W}_1(x,t)$ на проміжках $[x_0;x_1)$ та $[x_1;x_2]$, відповідно

$$\overline{W}_0(x,t)=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}\left(\frac{x_1-x}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}\right)\psi_0(t)+\frac{x-x_0}{F_0}\cdot\psi_1(t)\\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix}, \qquad (58)$$

$$\overline{W}_1(x,t)=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}\frac{x_2-x}{F_1}\psi_0(t)+\left(\frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x-x_1}{F_1}\right)\psi_1(t)\\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix}. \qquad (59)$$

Перші координати векторів $\overline{W}_0(x,t)$ та $\overline{W}_1(x,t)$ в (58) є шуканими функціями $w_0(x,t)$ та $w_1(x,t)$, відповідно. Підставляючи їх у (49), отримуємо розв'язок на всьому проміжку $[x_0;x_2]$.

IV. Побудова функції $v(x,t)$

Запишемо мішану задачу для функції $v(x,t)$. Підставляючи (44) в (41) та враховуючи, що функція $w(x,t)$ задовольняє (45), одержуємо неоднорідне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (60)$$

$$x\in(x_0;x_2),\ t\in(0;+\infty).$$

Підставимо (44) в початкові умови (43). Одержимо для функції $v(x,t)$ початкові умови

$$\begin{cases} v(x,0)=\Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=\Phi_1(x), \end{cases} \quad x\in[x_0;x_2], \qquad (61)$$

де $\Phi_0(x) \stackrel{def}{=} \varphi_0(x)-w(x,0)$, $\Phi_1(x) \stackrel{def}{=} \varphi_1(x)-\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)$.

Оскільки функція $w(x,t)$ справджує крайові умови (46), то із (44) випливають крайові умови для функції $v(x,t)$

$$\begin{cases} v(x_0,t)=0, \\ v(x_2,t)=0, \end{cases} \quad t\in[0;+\infty). \qquad (62)$$

Отже, за умови, що розв'язок $w(x,t)$ задачі (45), (46) є відомим, функція $v(x,t)$ є розв'язком мішаної задачі (60) - (62).

V. Метод Фур'є та задача на власні значення

Для рівняння (60) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (63)$$

Його нетривіальні розв'язки шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sin(\omega t + \varepsilon) \cdot X(x)\,, \qquad (64)$$

де ω – параметр, ε – константа, $X(x)$ – невідома функція. Підставимо (64) в рівняння (63). Одержимо квазідиференціальне рівняння

$$\left(F(x)X'(x)\right)' + \alpha^2 \cdot F(x)X(x) = 0\,, \quad \alpha^2 = \frac{\rho}{E} \cdot \omega^2\,. \quad (65)$$

Підставивши (64) в умови (62), одержимо крайові умови

$$\begin{cases} X(x_0) = 0, \\ X(x_2) = 0. \end{cases} \qquad (66)$$

Як і вище, під розв'язком рівняння (65) розуміємо абсолютно-неперервну на $[x_0; x_2]$ функцію $X(x)$, що справджує його майже скрізь [4].

Ввівши квазіпохідну $X^{[1]} \overset{def}{=} FX'$, вектор $\overline{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^{[1]} \end{pmatrix}$ та матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F} \\ -\alpha^2 F & 0 \end{pmatrix}$, запишемо задачу (65)-(66) у матричному вигляді

$$\overline{X}' = A \cdot \overline{X} \qquad (67)$$

$$P\overline{X}(x_0) + Q\overline{X}(x_2) = \overline{0}\,. \qquad (68)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриця Коші $B_i(x,s,\omega)$ системи (67) на проміжку $[x_i; x_{i+1})$, $i = \overline{0,1}$, має вигляд

$$B_i(x,s,\omega) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(x-s) & \dfrac{\sin\alpha(x-s)}{\alpha F_i} \\ -\alpha F_i \sin\alpha(x-s) & \cos\alpha(x-s) \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна матриця (аналог матриці Коші на всьому проміжку) системи (67) має структуру

$$B(x,x_0,\omega) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{1} B_i(x,x_i,\omega) \cdot B(x_i,x_0,\omega) \cdot \theta_i\,, \quad (69)$$

де, аналогічно, як і в формулі (52), $B(x_1,x_0,\omega) \overset{def}{=} B_1(x_2,x_1,\omega) \cdot B_0(x_1,x_0,\omega)$.

Позначимо також

$$B(x,x_0,\omega) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \qquad (70)$$

Нетривіальний розв'язок $\overline{X}(x,\omega)$ системи (67) шукаємо у вигляді $\overline{X}(x,\omega) = B(x,x_0,\omega) \cdot \overline{C}$, де $\overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – деякий ненульовий вектор.

Вектор - функція $\overline{X}(x,\omega)$ має справджувати крайові умови (68), тобто врахувавши, що $B(x_0,x_0,\omega) = I$, прийдемо до рівності

$$\left[P + Q \cdot B(x_2,x_0,\omega)\right] \cdot \overline{C} = \overline{0}\,. \qquad (71)$$

Для існування ненульового вектора $\overline{C}$ в (71) необхідно і досить виконання умови

$$\det\left[P + Q \cdot B(x_2,x_0,\omega)\right] = 0\,. \qquad (72)$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (72), врахувавши вигляд матриць P, Q та (70): $\det\left[P + Q \cdot B(x_2,x_0,\omega)\right] = b_{12}(\omega)$.

Твердження 1. *Характеристичне рівняння задачі на власні значення (65), (66) має вигляд*

$$b_{12}(\omega) = 0\,. \qquad (73)$$

Як відомо (див. [5]), корені ω_k характеристичного рівняння (73), які є власними значеннями задачі (65), (66), є додатними та різними.

Для знаходження ненульового вектора $\overline{C}$ підставимо в рівність (71) ω_k замість ω. Тоді прийдемо до системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ b_{11}(\omega_k) \cdot C_1 + b_{12}(\omega_k) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \qquad (74)$$

Оскільки виконується (73), то система (74) зводиться до рівняння $C_1 = 0$, а $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нехай $\overline{X}_k(x,\omega_k)$ – нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k. Справедливим є твердження.

Твердження 2. *Власні вектори системи диференціальних рівнянь (67) з крайовими умовами* (68) *мають структуру*

$$\overline{X}_k(x,\omega_k) = B(x,x_0,\omega_k) \cdot \overline{C}\,, \; k \in \mathbb{N}\,.$$

Наслідок. *Власні функції* $X_k(x,\omega_k)$, *як перші координати власних векторів* $\overline{X}_k(x,\omega_k)$, *можна записати у вигляді*

$$X_k(x,\omega_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B(x,x_0,\omega_k) \cdot \overline{C}\,, \; k = 1,2,3,\ldots \quad (75)$$

Зокрема, оскільки $X_k(x,\omega_k)=\sum_{i=0}^{1} X_{ki}(x,\omega_k)\cdot\theta_i$, то з (69) та (75) випливає, що

$$X_{ki}(x,\omega_k)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\cdot B_i(x,x_i,\omega_k)\cdot B(x_i,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C}\,. \quad (76)$$

VI. Побудова розв'язку $v(x,t)$ мішаної задачі (60) - (62)

Для розв'язання задачі (60) - (62) застосуємо метод власних функцій [3], який полягає в тому, що розв'язок задачі (60) - (62) шукаємо у вигляді

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k)\,, \quad (77)$$

де $T_k(t)$ – поки що невідомі функції.

В [6] детально описано процес побудови функції $v(x,t)$. Використовуючи ці результати, і те, що $v(x,t)=v_0(x,t)\cdot\theta_0+v_1(x,t)\cdot\theta_1$, де $v_i(x,t)$ визначені на проміжку $[x_i;x_{i+1})$, $i=\overline{0,1}$, одержуємо

$$v_i(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t+\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\cdot X_{ki}(x,\omega_k)\,, \quad (78)$$

де w_k, $\Phi_{0\,k}$, $\Phi_{1\,k}$ – відповідні коефіцієнти Фур'є правих частин рівняння (60) та початкових умов (61), функції $X_{ki}(x,\omega_k)$ обчислюються за формулою (76).

Врахувавши перші координати векторів $\overline{W}_0(x,t)$, $\overline{W}_1(x,t)$ в (58) та, (78), отримаємо розв'язок задачі (41) - (43)

$$u(x,t)=(w_0(x,t)+v_0(x,t))\cdot\theta_0+(w_1(x,t)+v_1(x,t))\cdot\theta_1\,.$$

VII. Застосування пакету Maple до знаходження власних значень та власних функцій задачі (67) - (68)

Сучасні програмні засоби дають змогу отримати необхідну кількість власних значень та власних функцій, що забезпечує відповідну точність розв'язку. Розглянемо результат застосування пакету Maple для отримання розв'язку поставленої задачі. Для прикладу розглянемо сталевий стрижень довжиною 1 м, що складається з двох циліндричних кусків однакової довжини, площі поперечних перерізів яких відповідно становлять $F_0=0,0025\pi$ м², $F_1=0,000625\pi$ м². За таких умов $x_0=0$, $x_1=0,5$, $x_2=1$. Модуль Юнга для сталі становить $E=20394324259$ кг/м², густина $\rho=7900$ кг/м³. У [7] обчислено перші одинадцять власних значень та власних функцій.

Висновки

Адаптовано теорему про розвинення за власними функціями для випадку диференціальних рівнянь з кусково-сталими (за просторовою змінною) коефіцієнтами.

Отримано явні формули для обчислення розв'язку та його квазіпохідної для будь-якого підінтервала основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду згаданих вище коефіцієнтів.

Отримані результати мають безпосереднє практичне застосування в теорії коливань стрижнів з кусково-змінним розподілом параметрів.

Наведено приклад застосування пакету Maple до знаходження власних значень та власних функцій задачі коливання сталевого стрижня довжиною 1 м, що складається з двох кусків однакової довжини.

Література References

[1] Тацій Р. М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтам / Р. М. Тацій, О. О. Власій, М. Ф. Стасюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки . - 2014. - № 804. - С. 64-69.

[2] Арсенин В.Я. Методы математической физики. - М.: Наука, 1974. - 432 с.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 735 с.

[4] Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В. Мазуренко, О.О. Власій - Дрогобич. Коло, 2011. - 297 с.

[5] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку. / Р.М. Тацій, В.В. Мазуренко // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2001. – 44. №1 – С. 43-53.

[6] Тацій Р. М. Загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними коефіцієнтами та правими частинами / Р. М. Тацій, О. Ю. Чмир, О. О. Карабин // Дослідження в математиці і механіці. 2017. – Т. 22, вип. 2(30). – С. 55-70.

[7] Тацій Р. М. Схема дослідження поздовжніх коливань стрижня косково - сталого перерізу/ Р. М. Тацій, О. Ю. Чмир, О. О. Карабин // Вісник ЛДУ БЖД. 2018. – Т. 18. – С. 60-69.