ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Тези доповідей

VI Всеукраїнської науково-практичної конференції

курсантів та студентів:

“МАТЕМАТИКА, ЩО НАС ОТОЧУЄ: МИНУЛЕ, СУЧАСНЕ, МАЙБУТНЄ”

29 березня 2019 року

Львів – 2019

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ:

Голова:

Кузик Андрій Данилович, проректор з науково-дослідної роботи Львівського державного університету безпеки життєдіяльності, доктор сільськогосподарських наук.

Заступники голови:

Ренкас Андрій Гнатович, кандидат технічних наук, начальник навчально-наукового інституту цивільного захисту ЛДУ БЖД;

Тацій Роман Мар'янович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики і механіки ЛДУ БЖД;

Меньшикова Ольга Володимирівна, заступник начальника навчально-наукового інституту цивільного захисту ЛДУ БЖД, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени оргкомітету:

Васильєва Олена Едуардівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки ЛДУ БЖД;

Гембара Тарас Васильович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки ЛДУ БЖД;

Дзюба Лідія Федорівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки ЛДУ БЖД;

Карабин Оксана Олександрівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки ЛДУ БЖД;

Кусій Мирослава Ігорівна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки ЛДУ БЖД;

Пазен Олег Юрійович – докторант ЛДУ БЖД, кандидат технічних наук;

Стасюк Марта Федорівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки;

Трусевич Оксана Мирославівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки ЛДУ БЖД;

Чмир Оксана Юріївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки ЛДУ БЖД.

СЕКЦІЯ 1

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ В МАТЕМАТИЦІ

В.Т. Балога

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***Сокульська Н.Б., к.ф.-м.н.***

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ РОБОТИ МАШИННИХ АГРЕГАТІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

Метою роботи є отримання розрахункових залежностей для дослідження впливу швидкості поздовжнього руху робочого органу, фізико-механічних характеристик системи, дії зовнішнього збурення на коливання робочого органу ПЗМ-2.

Об'єкт дослідження – коливні процеси робочих органів спеціалізованих інженерних машин.

Для побудови математичної моделі коливних процесів у гнучких тілах розглядається безмежно малий елемент середовища. Вважається, що він перебуває у стані динамічної рівноваги, що дає можливість сформулювати відповідне диференціальне рівняння для опису динамічного процесу. Скориставшися принципом Д'Аламбера, знаходимо диференціальне рівняння із частинними похідними другого порядку

(для дослідження динамічних процесів у двовимірних системах із сталою швидкістю поздовжнього руху у змінних Ейлера)

$$u_{tt}+2Vu_{xt}-(\alpha^2-V^2)u_{xx}-\gamma^2u_{yy}=\varepsilon f\left(u,u_t,u_x,u_{xx},u_y,u_{yy},t\right)$$

Аналітичний опис контакту гнучкого елемента до ведучого та веденого барабанів забезпечують крайові умови. Для задачі про поперечні коливання рухомої стрічки , що викликані ексцентриситетом шківів, крайові умови мають вигляд

$$u\big|_{x=0}=e_0\sin(\Omega_0 t) \qquad u\big|_{x=l}=e_l\sin(\Omega_l t)$$

де e_0, e_l – ексцентриситети лівого та правого шківів відповідно, Ω_0, Ω_l – кругові частоти їх обертання.

При дослідженні використовується принцип суперпозиції коливань, який дозволяє трактувати динамічний процес у вигляді суми прямої і відбитої хвилі, що рухаються у протилежному напрямку.

$$u(x,t)=\Phi(x-at)+\Phi(x+at)$$

де a – швидкість поширення хвиль по струні (чи стрижню).

Аналітичні та графічні залежності дають змогу проаналізувати вплив фізико-механічних, кінематичних та геометричних характеристик на основні параметри процесу (частота, хвильові числа) та зробити наступні висновки:

- для більших значень швидкості поздовжнього руху у двовимірних ГЕСП (за незмінних інших параметрів) частота власних коливань є меншою;
- для двовимірних ГЕСП приводу більшої ширини частота власних коливань є меншою;

- за значних швидкостей поздовжнього руху частота власних коливань стає рівною нулеві, тобто проходить зрив коливань.

Методику поширення основних ідей хвильової теорії руху можна узагальнити і на більш складні двовимірні системи приводу, а саме – двовимірні системи, що взаємодіють із зовнішнім середовищем. Динамічні процесиу таких системах описуються диференціальним рівнянням у частинних похідних типу Клейна-Гордона

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - \left(\alpha^2 - V^2\right)u_{xx} - \gamma^2 u_{yy} + \beta u = 0,$$

де β – параметр, що визначає пружні властивості середовища.

Використовуючи метод опису динамічного процесу у вигляді накладання двох хвиль (прямої та відбитої) різних довжин показано, що поздовжній рух середовища:

- спотворює форму динамічного процесу;
- впливає на власну частоту коливань;
- за значних величини швидкостей поздовжнього руху приводить до зриву динамічного процесу.

У роботі встановлено, що:

-швидкість поздовжнього руху суттєво впливає на частоту власних коливань системи.

-частота коливань залежить від натягу двовимірного гнучкого елемента.

-збільшення ширини гнучкого елемента також супроводжується зменшенням частоти коливань.

-існує деяке критичне значення швидкості поздовжнього руху, за якого частота коливань стає рівною нулеві і проходить зрив коливань.

-амплітуди прямої та відбитої хвиль у лінійних моделях двовимірних гнучких елементів механічних систем визначаються крайовими та початковими умовами.

Достовірність розробленої методики та отриманих розрахункових формул підтверджується граничним переходом $\gamma \to 0$ із якого випливають відомі результати для випадку одновимірних поздовжньо-рухомих гнучких елементів, а при $\gamma \to 0$ та $V \to 0$– відомі класичні результати.

Література

1.Василенко М.В. Теорія коливань і стійкості руху: підручник / М.В. Василенко, О.М. Алексейчук. – К. : Вища школа, 2004. – 525 с.

2.Павлище В.Т Основи конструювання та розрахунок деталей машин. – Львів: Афіша, 2003. – 567 с.

3.Сокіл Б.І. Хвильова теорія руху у дослідженні нелінійних коливань двовимірних об’єктів, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху / Б.І. Сокіл, О.І. Хитряк, М.Б. Сокіл // Збірник наукових праць “Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності”. – Львів. – 2010. – № 4. – С. 55-60.

А.В. Дацків
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: **Врублевський І.Й.**, к.т.н., доцент

Дослідження вібраційного транспортера для переміщення масивних спеціальних вантажів

Транспортер – це технічний пристрій для переміщення вантажів або особового складу на певну відстань. Їх можна поділити на два типи: 1) транспортні засоби на колісному або гусеничному ходу, призначені, як правило, для транспортування на велику відстань; 2) транспортні засоби безперервної дії для переміщення штучних або насипних вантажів (конвеєри).

Теорія процесу вібраційного транспортування – складна наукова проблема, якій присвячена велика кількість досліджень, в яких використовуються різноманітні математичні моделі процесу. В процесі вібраційного переміщення деталі у вигляді точки масою m по шорсткій площині, нахиленої до горизонту під кутом α на деталь діють наступні сили: mg – сила тяжіння; сила інерції (при незалежному віброприводі горизонтальних і вертикальних коливаннях її доцільно розкласти на повздовжню $m\ddot{x}_1$ і нормальну $m\ddot{y}_1$ складові); $F_{тр}$– сила тертя; N– вертикальна реакція, g – прискорення вільного падіння. Тут, як і дальше, точкою позначення диференціювання по часу t, x_1 і y_1 – дані координати руху несучої площини відповідно вздовж и за нормаллю до неї в нерухомій системі координат $X_1O_1Y_1$ (рис.2.1.); ω – частота коливань.

Під дією вібрації з круговою частотою ω деталь за період коливань ковзає вперед і назад, зупиняючись і підскакуючи, але переміщається з постійною середньою швидкістю V, яку можна визначити за формулою.

$$V=A_x\omega K_v,$$

де K_v– безрозмірний коефіцієнт швидкості, який залежить від декількох безрозмірних параметрів, перш за все параметра кута нахилу K_α, параметра кута вібрації K_β і параметра перевантаження W.

$$K_\alpha = \frac{tg\alpha}{f}; \quad K_\beta = \frac{A_x}{A_y f}; \quad W = \frac{A_y\omega^2}{gcos\alpha}; \tag{2}$$

де A_x, A_y– відповідно амплітуди горизонтальних і вертикальних коливань.

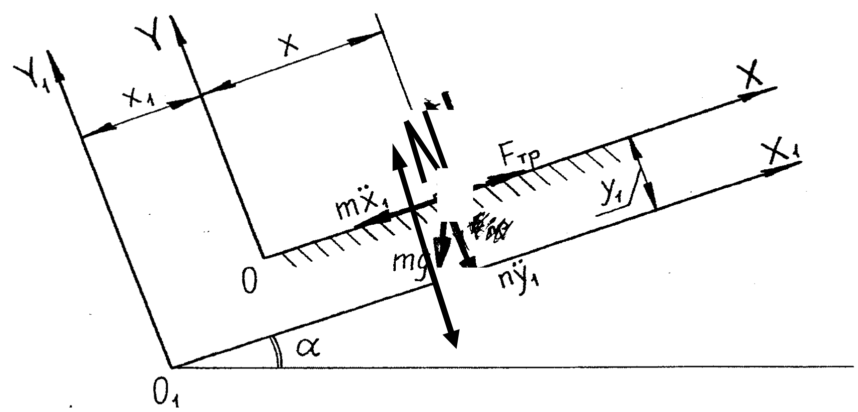


Рис.1. **Схема діючих на деталь сил в процесі вібротранспортування**

Диференціальні рівняння відносного руху деталі в рухомій системі координат *XOY*, жорстко зв'язаний з вібруючою поверхнею, виходячи із аналізу діючих сил, запишуться так:

$$m\ddot{x} = -m\ddot{x}_1 - mg\sin\alpha + F_{mp}$$
$$m\ddot{y} = -m\ddot{y}_1 - mg\cos\alpha + N \qquad (3)$$

Вважається, що опором повітря можна знехтувати, сила тертя ідеалізована у вигляді «сухого» тертя, а коефіцієнти тертя *f* ковзання і спокою рівні між собою, тобто:

$$F_{\text{тр}} = -fN\operatorname{sign}\dot{x} \text{ при } \ddot{x} \neq 0$$
$$-fN < < F_{\text{тр}} < < fN \text{при } \ddot{x} = 0 \qquad (4)$$

Вібротранспортування при прямолінійних коливаннях, особливо в безвідривних режимах, коли *y=0*, вивчено достатньо детально. В монографії [3] розглянуті періодичні режими вібротранспортування з постійною середньою швидкістю переміщення, визначені межі їх існування і стійкості, виведені формули для визначення середньої швидкості.

Література

1. Спиваковский А.О., Дьячков В.К. Транспортирующие машины – Москва: Машиностроение, 1983.
2. Рабинович А.Н., Яхимович В.А., Боечко Б.Ю. Автоматические загрузочные устройства вибрационного типа. – Киев: Техника, 1965.
3. Повідайло В.О. Вібраційні процеси та обладнання: Навч. посібник. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2004.

Жарковський А.С.
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: **Ковальчук Р.А.,** кандидат технічних наук

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В НАСОСНИХ АГРЕГАТАХ СПЕЦІАЛЬНИХ МАШИН

Ґрунтовні дослідження перехідних та усталених режимів роботи насосних агрегатів спеціальних машин можна здійснити лише на основі врахування взаємовпливу електромагнітних коливальних явищ у машинних агрегатах і коливальних явищ у виконавчому механізмі насоса. Необхідно приймати до уваги пружно-дисипативні та інерційні властивості ланок кривошипно-повзунних механізмів насоса, навантажувальні характеристики передавальних пристроїв, зокрема, фрикційної муфти, закономірності зміни тиску рідини на поршні насоса. У зв'язку з екстремальним характером навантаженості елементів насосних агрегатів намітилися тенденції до уточнення їх розрахункових моделей та більш загального комплексного підходу до аналізу динамічних процесів у насосних агрегатах.

Для досягнення цієї мети розв'язуються такі задачі:

– розробка математичної моделі і алгоритму розрахунку нестаціонарних процесів у насосному агрегаті з урахуванням взаємозв'язку електромагнітних явищ в асинхронному двигуні і механічних коливань у привідній системі, а також несталості зведеного моменту інерції кривошипно-повзунного механізму насоса та визначення впливу експлуатаційних параметрів на зусилля у пружних ланках привідного механізму насоса;

– розроблення технічних рішень і практичних рекомендацій, що спрямовані на зниження динамічних навантажень елементів привідних систем і удосконалення конструкцій з'єднувальних вузлів насосних агрегатів бурових установок.

Механічна система насосного агрегату, що складається з асинхронного двигуна, шинопневматичної муфти, пасової передачі, редуктора та поршневого насоса, схематично зображена на рис. 1.

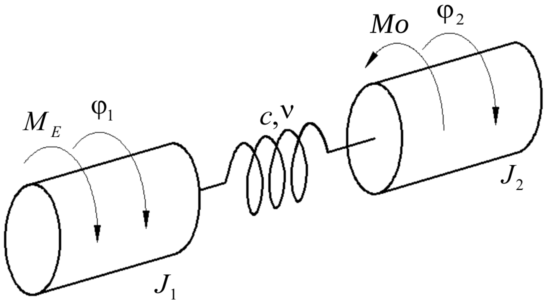


Рис.1. Розрахункова схема механічної системи насосної установки

На схемі прийняті такі позначення: J_1 – зведений до корінного вала насоса момент інерції ротора двигуна; J_2 – зведений до корінного вала момент інерції механізму насоса; c – зведена до корінного вала насоса жорсткість послідовно з'єднаних пружних ланок (шинопневматичної муфти і пасової передачі); ν – зведений коефіцієнт лінійного опору пружних ланок; $M_{Ез}$ – зведений електромагнітний момент двигуна; M_O – момент сил опору рухові, що діє на корінний вал насоса; φ_1, φ_2 – кутові координати.

Диференціальні рівняння руху елементів агрегату, складені за схемою рівняння Лагранжа другого роду, мають вигляд

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2;$$

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + c(\varphi_1 - \varphi_2) + \nu(\omega_1 - \omega_2) = M_{Ез};$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial J_2}{\partial \varphi_2}\omega_2{}^2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) - \nu(\omega_1 - \omega_2) = -M_O, \tag{1}$$

де $M_{Ез}=M_E \cdot u$, M_E – електромагнітний момент на валі двигуна; u – передавальне відношення приводу. Початкові умови інтегрування рівнянь (1) прийнято нульовими. В результаті сумісного інтегрування диференціальних рівнянь руху механічної системи (1) і рівнянь, що описують електромагнітні явища в асинхронному двигуні, отримано часові залежності величин φ_1, φ_2, ω_1, ω_2, M_E, а також крутний момент в пружній ланці

$$M = c(\varphi_1 - \varphi_2) + \nu(\omega_1 - \omega_2). \tag{2}$$

За різних значень тиску на викиді насоса УНБ-600 визначено момент в пружній ланці, електромагнітний момент, а також кутові швидкості ротора двигуна та корінного вала насоса як функції часу. Особливе значення має дослідження перехідних режимів роботи насоса, оскільки саме під час пуску і гальмування елементи та вузли привідної системи зазнають найбільших навантажень.

Розроблена математична модель може бути застосована в системах автоматизованого проектування насосних агрегатів для забезпечення належної точності розрахунків на міцність і прогнозування ресурсу елементів конструкцій, а також з метою підвищення ефективності експлуатації насосів шляхом раціонального добору їх продуктивностей і робочих швидкостей.

Література

1. *Алюшин Ю. А.* Динамические эффекты в кривошипно-ползунных механизмах / *Ю.А. Алюшин, А.Э. Волков, Д.А. Рыкунов* // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 3. С. 15–19.

2. *Бахшалиев В. И.* Динамический анализ кривошипно-ползунного механизма и расчет на прочность «плавающего шатуна» / В.И. *Бахшалиев* // Изв. вузов. Маши-ностроение, 2000. № 3, С. 44–50.

3.*Василенко М. В., Алексейчук О. М.* Теорія коливань і стійкості руху. К.: Вища школа, 2004. – 525 с.

4. *Павлище В. Т.* Основи конструювання та розрахунок деталей машин. – К.: Вища школа, 1993. – 556 с.

5. *Писаренко Г. С., Квітка О. А., Уманський Є. С.* Опір матеріалів. –2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.

6. *Харченко Є. В., Ковальчук Р. А.* Визначення зведених моментів інерції поршневих насосів бурових установок // Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні і приладобудуванні / Вісник Національного університету «Львівська політехніка» № 535. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. С. – 89–95.

В.В. Коломієць
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***Величко Л.Д.,*** к.ф-м.н, доцент

ВПЛИВ ОПОРУ ПОВІТРЯ НА ДИНАМІКУ РУХУ КУЛЬ ВИПУЩЕНИХ З АК-74

Визначення кінематичних параметрів руху снарядів, мін та куль ґрунтуються на використання еталонної функції опору та балістичного коефіцієнту, який має певне значення для кожного типу снарядів.

Найкращим способом визначення балістичного коефіцієнту є оснащення стрільбища приладами та інструментами, які забезпечать якісне проведення контрольованих тестових стрільб. Однак проведення таких дослідів є дороге і технічно складне.

Основи теоретичних досліджень зовнішньої балістики куль та снарядів, викладені в роботах та наукових статтях, ґрунтуються на визначенні сили лобового опору повітря залежністю

$$R=\frac{\rho V^2}{2}\frac{\pi d^2}{4} i c_x\left(\frac{V}{V_s}\right),$$

Автомат Калашникова є найбільш поширеним типом автоматичної стрілецької зброї. Його конструкція відзначається значною простотою і характеризується високими бойовими та експлуатаційними властивостями. У світі є значна кількість зразків стрілецької зброї, які розроблені на основі моделі автомата Калашникова, з ефективними бойовими властивостями.

Розглядається рух кулі в повітрі на яку діють сили: вага кулі – $\vec{P}$ і лобовий опір повітря – $\vec{R}$.

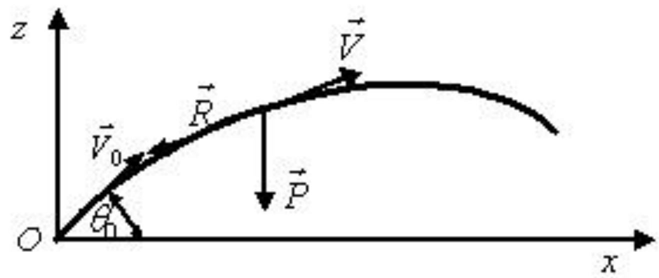


Рис. 1. Схема руху кулі в повітрі

На основі методики в функціональну залежність сили лобового опору повітря руху кулі визначається окремо на етапах її руху з надзвуковою та дозвуковою швидкостях, тобто зміну його величини описують формулою

$$R(t) = c_x\,\rho_a s_x (V(t))^{2+\gamma_i}\left(\frac{V(t)}{V_a}\right)^{\beta_i}$$

Оскільки куля вилітає з ствола АК-74 з надзвуковою швидкістю $V_0 = 900\,{}^{м}\!/_{c}$, то розв'язується система диференціальних рівнянь, при $(i=1)$.

$$m\ddot{x} = -\frac{c_x\,\rho_a\ s\ _x\,\dot{x}}{V_a^{\beta_i}}\left(\dot{x}^2+\dot{z}^2\right)^{0,5(1+\gamma_i+\beta_i)},$$

$$m\ddot{z} = -mg - \frac{c_x \rho_a s_x \dot{z}}{V_a^{\beta_i}} \left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right)^{0,5(1+\gamma_i+\beta_i)}$$

Під час розв’язування системи диференціальних рівнянь з початковими умовами та граничними умовами брались такі значення параметрів: маса кулі, початкова швидкість, калібр, площа поперечного перерізу, густина повітря. Методом послідовних наближень отримали наступні значення величин c_x=3,34, γ_1=–0,48 і β_1=–0,007, що забезпечує незначне відхилення між теоретичними і експериментальними значеннями параметрів руху кулі у випадку її лету з надзвуковою швидкістю.

При ведені стрільби одним з найважливіших факторів є вплив вітру на кінематичні параметри руху кулі. Відхилення вітром – це недетермінований фактор, який є найважливішою проблемою при стрільбі на великі віддалі. Реальний вітер, на всій ділянці лету кулі, характеризується зміною його напрямків, завихренням, раптовими поривами, вертикальними потоками. Вимірявши швидкість і напрям вітру в одній точці, ви не можете вважати, що це відноситься до всієї траєкторії.

Деривація – це наслідок забезпечення стабільності розташування кулі в просторі внаслідок її обертанням. Стабілізація досягається завдяки тому, що обертання кулі навколо своєї повздовжньої осі робить її стійкою, і ця стійкість сильніше аеродинамічного перекидаючого моменту сили, прикладеного до носика кулі. Однією з формул, яка наближено визначає величину деривації кулі, має вигляд:

$$y=0,03175\left(S_g \cdot f_V \cdot f_{Tp} + 1,2\right)t_k^{1,83}$$

Значення величин деривації визначенні теоретично добре співпадають з експериментальними, при стрільбі на віддаль до 600 метрів включно, а потім розбіжності зростають. Значення величини деривації кулі, суттєво відрізняються від значень отриманих .

Література

1. Грабчак В.І. Апроксимація функції аеродинамічних коефіцієнтів сили опору повітря методом найменших квадратів / В.І. Грабчак. – Львів: АСВ. – 2012. – Вип. 2 (7). – С. 20-24.
2. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика: учебник для студентов вузов / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко. – М.: Машиностроение, 2005. – 608 с.
3. Тарасов В.М. Основні положення зовнішньої балістики ракет і снарядів: навчальний посібник / Тарасов В.М., Тимошенко Р.І., Сорока В.С. – К.: НАОУ, 2002. – 60 с.
4. Величко Л.Д., Горчинський І.В. Визначення величини сили лобового опору повітря кулі випущеної з кулеметів ПК, ПКБ, ПКС І ПКТ. Військово-технічний збірник. – 2018. – Випуск 18. стор. 26-30.
5. Настанова зі стрілецької справи 5,45-мм автомати Калашникова (АК-74, АКС-74, АК-74Н, АКС-74Н) та 5,45-мм ручні кулемети Калашникова (РПК-74, РПКС-74, РПК-74Н, РПКС-74Н). – Київ. 2006. – 140 с.

В.Д. Питлик
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***Величко Л.Д.,*** к.ф.-м.н., доцент

ВПЛИВ ДЕМПФЕРНИХ ПРИСТРОЇВ НА КІНЕТИКУ ВАЛА ВІЙСЬКОВОЇ МАШИНИ

Механічні з’єднання супроводжують життя людини. Під час воєнних дій працює тисячі одиниць техніки, при цьому кожної секунди між собою з’єднуються тисячі деталей. З’єднання деталей під час руху це дуже важлива і важка задача машинобудування. У сучасному машинобудуванні пристрої для передачі обертового руху та обертового моменту з одного вала на інший, які розміщені співвісно, або із вала на встановлену на ньому деталь називають муфтами.

У науковій роботі було проведено аналіз впливу муфтового з’єднання на коливання ведених валів, висвітлено принцип роботи муфтових з’єднань, які використовуються у військовій техніці.

Метою роботи є представлення усталених уявлень про механічні з’єднання і муфти.

У першому розділі розкриті загальні відомості про муфти , у другому класифікація муфт, у третьому особливості використання муфт у військовій техніці ,зокрема розглядалися муфти коробки передач і головного фрикціону полкової землерийної машини ПЗМ-2, у четвертому розділі було проведено теоретичні дослідження впливу пружного муфтового з’єднання на динаміку вала коробки передач.

Муфти приводів здійснюють з’єднання валів, кінці яких підходять один до одного щільно або розведені на невелику відстань, причому з’єднання повинно допускати передачу обертального моменту від одного вала до іншого. Вали у більшості випадків розташовані так, що геометрична вісь одного складає продовження геометричної осі другого вала. Рідше геометричні вісі валів розташовані під деяким кутом один до одного. Необхідність застосування муфт викликана різноманітними обставинами: отриманням довгих валів, що виготовляються з окремих частин; компенсацією шкідливого впливу неспіввісності валів, пов’язаною з неточністю виготовлення або монтажу; наданням одному з валів деякої рухливості; зменшенням динамічних навантажень; вмиканням і вимиканням одного з валів при постійному обертанні другого та деякими іншими. Муфти застосовують також для з’єднання валів з зубчастими колесами, шківами пасових передач та іншими деталями. Муфти приводів, що застосовуються в сучасному машинобудуванні, за призначенням, принципом дії та конструкцією надзвичайно численні та різноманітні. За принципом дії вони діляться на механічні, електричні і гідравлічні; за ознакою керованості - на некеровані (не допускають роз'єднання валів в процесі роботи); керовані (дозволяють примусово з'єднувати і роз'єднувати провідний і ведений вали в процесі роботи); самоврядні (автоматично роз'єднувати вали при зміні заданого режиму роботи); інші (наприклад комбіновані, що складаються з некерованої і керованої або самокерованої муфт). Було проведено певна кількість обчислень, з яких нам стало відомо, що: початкові умови мають вплив на динаміку руху лише на початку взаємодії ведучого валу і веденої шестерні ; в установленому режимі динаміка руху механічної системи залежить лише від діючого зовнішнього силового навантаження; на початку режиму запуску в дію пружної муфти ведучий вал зазнає впливу коливних процесів; зростання жорсткості пружної муфти сприяє різкій передачі крутного моменту від ведучого валу до веденої шестерні.

Робота може бути використана у машинобудуванні для покращення роботи муфтових з'єднань, що в свою чергу забезпечить зменшення часу на проведення ремонту військової техніки

Література

1. Павлище В.Т., Харченко Є.В., Барвінський А.Ф., Гаршнєв Ю.Г. Прикладна механіка: Навчальний посібник / За ред. В.Т. Павлище.– Львів: Інтелект-Захід, 2004.– 368 с.
2. Малащенко В.О., Янків В.В. Деталі машин Проектування елементі механічних приводів: Навчальний посібник / В.О. Малащенко, В.В. Янків.– Львів: Новий Світ, 2002, 2013, – 264 с.
3. Величко Л.Д., Верхола І.І., Ковальчук Р.А. Прикладна механіка: Навчально-методичний посібник / Л.Д.Величко, І.І.Верхола, Р.А. Ковальчук–Львів: НАСВ, 2016. – 298 с.
4. Матузко Б.П., Малофеїк П.У., Хаустов Д.Є., Шаталов О.Є. Бойова машина десанту БМД-2: будова та основи експлуатації: Навчальний посібник // Б.П. Матузко, П.У. Малофеїк, Д.Є. Хаустов, О.Є. Шаталов. – Львів: АСВ, 2012. – 281 с.

М.І. Шалан, О.С. Потапенко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Васильєва О.Е.**, кандидат технічних наук, доцент, полковник служби цивільного захисту*

ПРОГНОЗУВАННЯ ПОЖЕЖ НА ПІДСТАВІ СТАТИСТИКИ ДСНС

Рятування людей – справа доволі непроста. Всі знають девіз рятувальника: «Запобігти. Врятувати. Допомогти». Коли для порятунку та допомоги потрібна професійна та фізична підготовка, то для запобігання НС – потрібно її передбачити. Саме в напрямку прогнозування пожеж науковці ведуть постійну та кропітку роботу.

Метою роботи є розробка методу метод прогнозування пожеж на підставі статистики їх виникнення з використанням статистичних кореляційних зв'язків. Статистичні зв'язки можуть бути дуже складними. Найбільш простим видом статистичного зв'язку, який має важливе практичне значення, є, так званий, кореляційний зв'язок. Кореляційний зв'язок може бути прямолінійним або криволінійним.

Кореляційними називають рівняння вигляду $\overline{y}_x = f(x)$. Для отримання цього рівняння необхідно в першу чергу встановити наявність зв'язку між його чинниками за допомогою коефіцієнта кореляції для прямолінійних зв'язків і кореляційного відношення для криволінійних зв'язків. Метод статистичних кореляційних зв'язків між випадковими величинами розглядається на прикладі виникнення в процесі ліквідації пожеж та наслідків надзвичайних ситуацій травмуючих чинників, що призводить до щорічного отримання травм особами рядового та начальницького складу ДСНС України. Результати аналізу отриманого рівняння для прогнозування травмуючих чинників показали, що середнє значення травмуючих чинників та їх кількісна частота виникнення на кінець 2018 року у порівняні з 2017 роком практично не змінилося. Тому на підставі розглянутого методу та результатів обчислень було встановлено, що між випадковими величинами, які стосуються стану організації пожежогасіння та пожежно-рятувальних робіт, найбільш доцільно встановлювати криволінійний кореляційний зв'язок з отриманням кореляційних рівнянь на підставі результатів статистичних даних.

Використання даних статистики ДСНС дозволило прогнозувати до кінця 2019 року виникнення пожеж на Україні, прямих збитків від них, загибелі людей тощо з використанням рівнянь різних типів для визначення середнього кількісного значення об'єкта, який розглядається, а саме середнє значення загальної кількості пожеж за рік, починаючи з 2015 року:

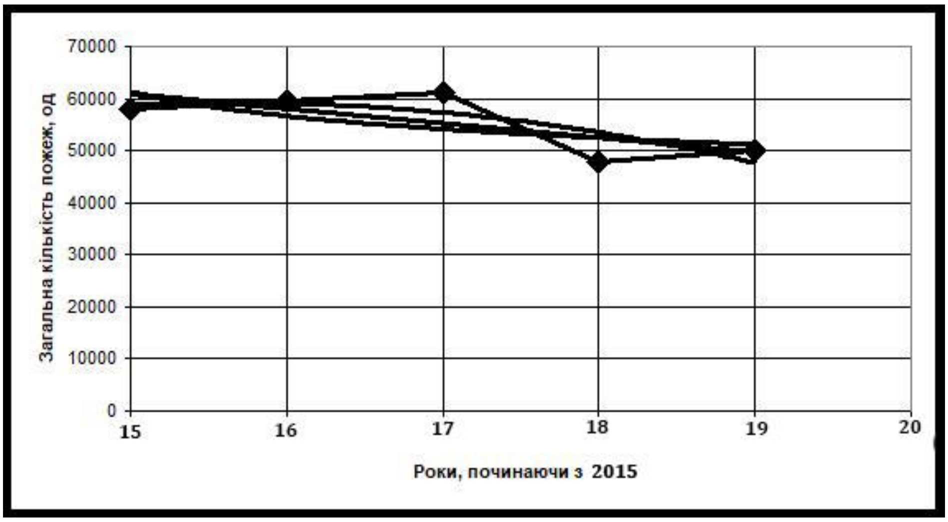


Рис.1. Динаміка статистики пожеж: 1 – кількість пожеж по роках за статистикою; 2 – поліноміальна залежність; 3 – степенева та експоненціальна залежності (співпали); 4 – прямолінійна залежність.

Для прогнозування результатів за отриманими рівняннями необхідно спочатку за їх допомогою визначити середні статистичні значення чинника за відомий останній звітний період, а потім середні значення на прогнозований період, тобто до кінця терміну прогнозування. Після цього визначити відсоток збільшення або зменшення цих даних і врахувати цю зміну з використанням останніх звітних статистичних даних, що і буде прогнозованим результатом до кінця терміну прогнозування. Розроблений метод прогнозування пожеж дозволяє прогнозувати їх виникнення на період не більше як до 0,5...1 року. Для більш точного прогнозування пожеж необхідно мати статистичні дані за кожний місяць року. З метою удосконалення методу необхідно вести статистику пожеж не тільки за їх загальною кількістю, а також з використанням відповідної класифікації за об’єктами, на яких вони виникли. Тобто важливо не тільки ліквідувати пожежу, а передбачити її, для чого і призначена математична статистика.

Література:

1. Фере В.А., Романченко О.В. Методи оцінки фінансового ризику // Фінанси України. 1997. - № 2. С. 47-52.
2. Наказ ДСНС України від 16.08.2017 № 445 “Про забезпечення ведення обліку пожеж”
3. Постанова КМ України від 29 лютого 2012 р. N 306 "Про затвердження критеріїв, за якими оцінюється ступінь ризику від провадження господарської діяльності та визначається періодичність здійснення планових заходів державного нагляду (контролю) у сфері техногенної та пожежної безпеки".
4. Юрченко В.О., Мазуренко В.І., Гудович О.Д., Соколовський І.П., Гаваза А.О. Навчальний посібник «Рекомендації з прийняття рішень щодо реагування та ліквідацію наслідків надзвичайної ситуації об’єктового рівня».

А.Ю. Якунін, В.В. Погинайко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Васильєва О.Е.,*** *кандидат технічних наук, доцент, полковник служби цивільного захисту*

ОПТИМІЗАЦІЯ ПОЖЕЖНИХ НАСОСІВ НА СТАДІЇ РОЗРОБКИ

В 64-му році нашої ери місто Рим було майже зруйновано в наслідок масштабної пожежі, яку не вдалося приборкати протягом тижня. Сьогодні пожежні підрозділи мають все необхідне обладнання та техніку, щоб локалізуватися, ліквідувати пожежу та врятувати життя, майно і навколишнє середовище. Але час не стоїть на місці, вимоги та задачі, які ставлять перед пожежним обладнанням постійно зростають, і на сьогоднішній день гостро стоїть питання оптимізації параметрів пожежних насосів, що постійно працюють в надскладних умовах.

Наприклад, самий розповсюджений пожежній автомобіль АЦ-40, на якому встановлений насос ПН-40УВ. Насосами цієї серії оснащували практично всі вітчизняні АЦ і АНР, тобто основні пожежні автомобілі загального призначення з 70-х років. Тому на сьогоднішній день постало питання оптимізації основних параметрів пожежного насоса ще на стадії розробки виходячи з умов проектного розрахунку.Отже, була розроблена блок-схема алгоритму для оптимального розрахунку параметрів насоса ПН-40УВ на основі середовища Delphi

Delphi є нащадком мови програмування Pascal. Цей продукт був

Рис.2. Вікно програми

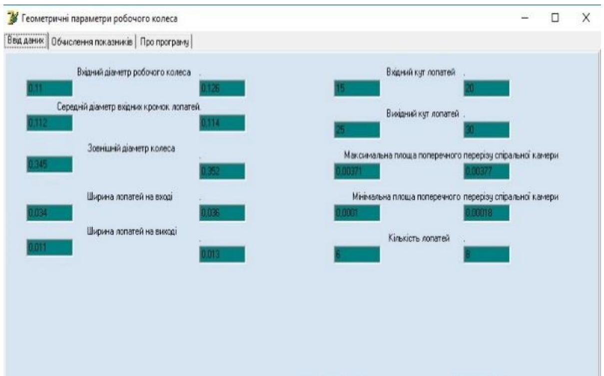


Рис. 2 Вікно програми

Рис.1.Запуск програми

створений з надзвичайно зручним інтерфейсом, на базі якого можна було створити безліч програм різного призначення. Цей винахід позбавив програмістів багатьох зусиль для створення програм.

Розроблена нами програма здатна за лічені секунди зробити розрахунок основних параметрів пожежного насосу, а саме: вхідного діаметру робочого колеса, середнього діаметру вхідних кромок лопатей, ширини лопатей на вході і виході, а найважливіше, що, програма обчислює максимізований напір насоса, максимізовану витрату та багато інших показників.

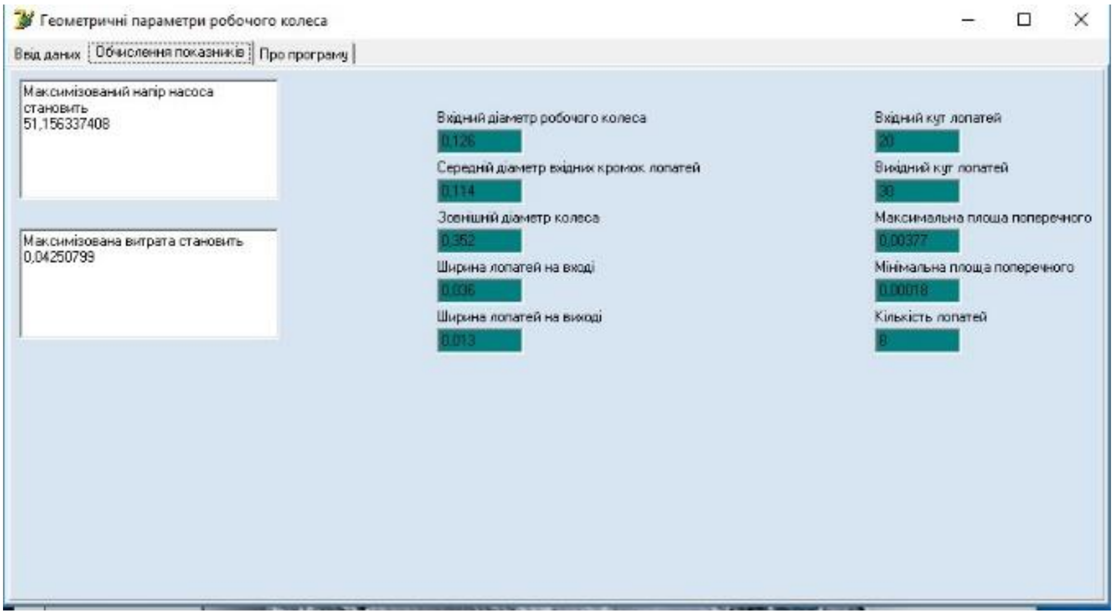


Рис.3. Вікно програми

Розробка навіть найменшої деталі потребує математичних розрахунків, а що тоді говорити про удосконалення та оптимізацію одного з основних елементів ПА - пожежного насоса? Отже, математика та прогрес завжди поруч!

Література:

1. Занимательное Программирование Delphi/ [С.Симонович, Г.Евсеев]
2. Автомобільні транспортні засоби. Основи конструкції. / [Я. І. Підгорецький, М. І. Сичевський; А. М. Домінік]
3. Автореферат дисертації підвищення ефективності гасіння пожеж пожежними автомобілями з відцентровими пожежними насосами / [І. Л. Ущапівський]

В. С. Самойленко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник Дзюба Л. Ф., кандидат технічних наук, доцент

Застосування рівняння Лагранжа для дослідження коливань механічних систем

Стійкість руху механічної системи за дії зовнішніх навантажень визначається, перед усім, її динамічними властивостями. Ці властивості залежать від пружних параметрів системи, частот власних коливань, динамічної піддатливості складників системи та способу навантаження. Для дослідження властивостей механічних систем створюють динамічні моделі. Динамічними моделями вважають сукупність формалізованих розрахункових схем та математичних моделей, які за певних припущень описують динамічний процес.

Важливою характеристикою динамічної моделі є число ступенів вільності, тобто число незалежних узагальнених координат, що однозначно визначають положення динамічної системи у будь-який фіксований момент часу t. За цією ознакою розрізняють динамічні системи зі скінченим та нескінченим числом ступенів вільності [1, 2].

Для складання диференціальних рівнянь коливного руху механічної системи зі скінченим числом ступенів вільності використовують рівняння Лагранжа другого роду [2]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_j}=Q_j;\quad (j=1,2,...,n), \tag{1}$$

де T – кінетична енергія системи, R – дисипативна функція Релея, Π – потенціальна енергія системи, Q – узагальнені сили, q – узагальнені координати, $\dot{q}$ – узагальнені швидкості, n – число ступенів вільності системи, яке дорівнює числу узагальнених координат.

Для тримасової механічної системи (рис. 1) узагальнені координати та узагальнені швидкості дорівнюють: $q_1=\varphi_1$; $q_2=\varphi_2$; $q_3=\varphi_3$; $\frac{dq_1}{dt}=\dot{q}_1=\frac{d\varphi_1}{dt}=\omega_1$; $\frac{dq_2}{dt}=\dot{q}_2=\frac{d\varphi_2}{dt}=\omega_2$; $\frac{dq_3}{dt}=\dot{q}_3=\frac{d\varphi_3}{dt}=\omega_3$. Вирази для кінетичної T, потенціальної Π енергій та дисипативної функції R мають вигляд:

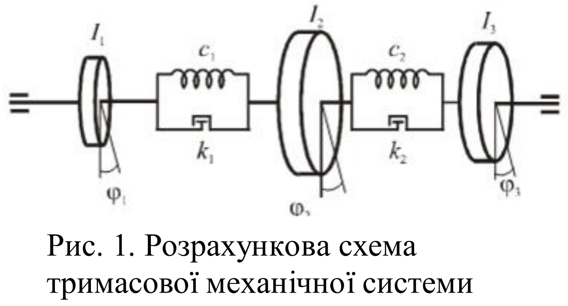


Рис. 1. Розрахункова схема тримасової механічної системи

$$T=\frac{I_1\dot{\varphi}_1^2}{2}+\frac{I_2\dot{\varphi}_2^2}{2}+\frac{I_3\dot{\varphi}_3^2}{2};$$

$$\Pi=\frac{c_1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)^2+\frac{c_2}{2}(\varphi_3-\varphi_2)^2;$$

$$R=\frac{k_1}{2}(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_1)^2+\frac{k_2}{2}(\dot{\varphi}_3-\dot{\varphi}_2)^2, \tag{2}$$

де $I_1; I_2; I_3$ – моменти інерції мас системи; c_1; c_2 – коефіцієнти жорсткості; k_1; k_2 – коефіцієнти демпфування.

Вирахувавши у виразах (2) похідні: за узагальненими швидкостями та часом від кінетичної енергії, за узагальненими координатами від потенціальної енергії та дисипативної функції, отримуємо систему однорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} + k_1\left(\dfrac{d\varphi_1}{dt} - \dfrac{d\varphi_2}{dt}\right) + c_1\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0; \\ I_2 \dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} - k_1\left(\dfrac{d\varphi_1}{dt} - \dfrac{d\varphi_2}{dt}\right) + k_2\left(\dfrac{d\varphi_2}{dt} - \dfrac{d\varphi_3}{dt}\right) - c_1\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + c_2\left(\varphi_2 - \varphi_3\right) = 0; \\ I_3 \dfrac{d^2\varphi_3}{dt^2} - k_2\left(\dfrac{d\varphi_2}{dt} - \dfrac{d\varphi_3}{dt}\right) - c_2\left(\varphi_2 - \varphi_3\right) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

За розв'язком системи диференціальних рівнянь (3) можна дослідити вільні крутильні коливання тримасової механічної системи та визначити частоти коливань.

Література

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский . – М.: Наука, 1975. – 640 с.

2. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1: Колебания линейных систем / под. ред. В. В. Болотина. – 1978. – 352 с.

О.О. Радійчук
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***Сорокатий М.І.,*** к.ф.-м.н., доцент

ДИНАМІКА ЕЛЕМЕНТІВ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ БОЙОВИХ КОЛІСНИХ МАШИН

Збройні сили України оснащені великою кількістю бойових колісних машин. Робочі органи цих машин в процесі експлуатації зазнають значних навантажень, що приводить їх до передчасного зношування, а за певних умов і до руйнування. Елементи підвіски бойової машини розглядаються як пружні системи, тому до дослідження їхньої поведінки застосовують методи теорії коливань та стійкості. Зокрема, необхідна подальша розробка методів дослідження неперервних та неперервно-дискретних механічних систем, ефективних способів знаходження їхніх частот і критичних навантажень як функцій різних параметрів. Особливе значення має розробка аналітичних методів і отримання на їхній основі інженерних розрахункових формул для оцінки впливу різноманітних факторів: геометричних, жорсткісних, масових характеристик, властивостей навантажень, характеристик середовища і т.п. на малі коливання і стійкість деформівних систем.
Нехтуючи розподіленою масою балки і вважаючи що вантаж і балка після першого дотику не відділяються знайдемо частоту результуючих вільних коливань і її залежність від точки прикладання сили Р. При цьому будемо враховувати тільки вплив згинальних моментів).

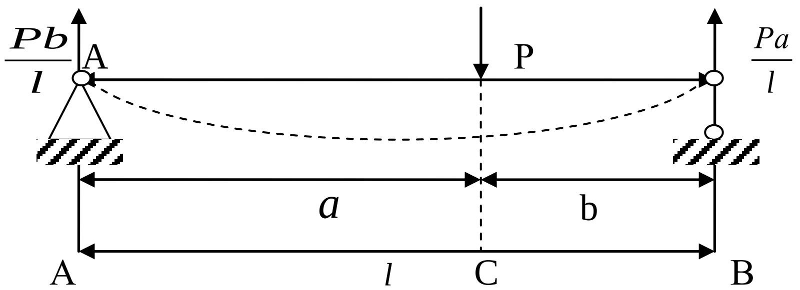


Рис. 1. Схема вільно опертої завантаженої балки

Знайдемо частоту коливань для таких значень:
матеріал балки – двотавр №20; довжина балки $l = 2{,}1 м$; сила Р=1000Н, прикладена в точці a =1,4 $м$.Знайдемо частоту власних коливань: $f = 77{,}5 с^{-1}$

Розглянемо тепер вплив пружного закріплення на частоту коливань стержня. Розглянемо випадок, коли лівий кінець балки вільно опертий, а правий пружно закріплений (рис.2) при умові, що розподіленою масою стержня знехтувано. Вважаємо, що стержень має постійний перетин

Якщо вага балки wl мала у порівнянні із вагою вантажу Р, то можна із достатньою точністю припустити, що прогин балки при коливаннях має таку саму форму, як профіль лінії статичних прогинів при дії зосередженого навантаження. У цьому випадку переміщення поперечних перерізів буде таким, як і для невагомої балки, до якої прикладено навантаження

$$W = P + \frac{17}{35} wl$$

Частота коливань при цьому становитиме

$$f = 73{,}8c^{-1}$$

Похибка у порівнянні із частотою, отриманою без урахування маси балки, становить менше ніж 5%.

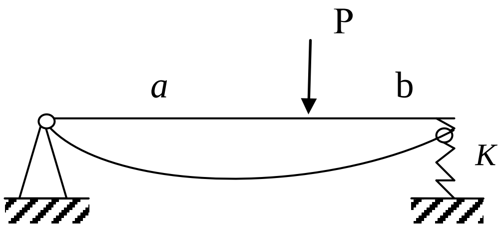


Рис 2. Схема балки із пружно опертим кінцем

Дослідимо вплив жорсткості пружини на частоту коливань, взявши за вихідні дані числові значення попередньої задачі, якщо радіус витка пружини R=5см, радіус перерізу дроту r=1см, кількість витків n=8. Для матеріалу балки і пружини використано сталь Сталь 3.

Частота коливань балки при цьому буде такою:

$$f = 8{,}63c^{-1}$$

Отже, пружне підкріплення правого кінця балки приводить до істотного зменшення частоти коливань системи вантаж-балка. Частота зменшується більш ніж у 8 разів. Пружні підкріплення елементів підвіски бойової машини здійснюють суттєвий вплив на частоту коливань, а саме: частоти коливань можна істотно змінювати за рахунок пружного закіплення кінців стержня, яким моделюється елемент підвіски. Підбір характеристик металу, із якого виготовляються елементи підвіски, числа витків пружин, на які ці елементи опираються, розмір цих пружин, даватиме змогу змінювати частоти, а отже уникати таких шкідливих явищ, як резонанс.

Література

1.Подригало М.А. / Динамика автомобиля. В.П. Волков, А.А. Бобошко, В.А. Павленко, В.Л. Файст, Д.М. Клец, В.В. Редько, М.А. Подригало. Харьков: ХНАДУ, 2008. - 424с.

2.Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко; пер. Я.Г.Пановко с 3-го американ. изд., перераб. совместно с Д.Х.Янгом.- 2-е изд., стер.- М.: URSS; Ком. Книга, 2006. - 439с.

3.Гащук П.В. / Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. Л.М. Зорій, Львів: Українські технології, 1999. - 372 с.

4. Б.І.Сокіл, Р.А.Нанівський, М.Г.Грубель. Власні вертикальні коливання корпусу автомобіля з урахуванням нелінійних характеристик пружної підвіски. Науково-виробничий журнал “Автомобільний транспорт”.-2013.- №5(235). - С. 15-18.

С.А. Рузак
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***ПАК Р.М.,*** доцент кафедри інженерної механіки

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ НА ФОРТИФІКАЦІЙНІ СПОРУДИ

Під час проектування інженерних споруд (зокрема і військових), в процесі будівництва і для режимних спостережень застосовують геофізичні методи.

Для будівництва інженерних споруд використовується <u>сейсмічна розвідка</u>, яка дає надійні відомості про становище геологічних тіл і про їх фізико-механічні властивості. Ця інформація враховуються під час проектування та будівництва.

Для інтерпретації даних сейсмічної розвідки використовують певні сейсмологічні методи, які ґрунтуються на уявленнях про фізичні процеси, що відбуваються всередині Землі. Сейсмічні впливи, джерелами якого можуть бути вибухи зумовлюють динамічну дію на навколишнє середовище і переважно на ґрунти. Ці впливи є вимушеними механічними коливаннями часточок ґрунту, передані від об’єктів-джерел через проміжне (геологічне) середовище до різних інженерних об’єктів, для яких це середовище є основою фундаментів або вміщуючим середовищем. Якщо при цьому гірські породи є міцними і мають пружні властивості, то вони здатні передавати хвилі (вібрацію) від джерела до об’єкта. Якщо ж об’єктом первинного (з боку джерела) сейсмічного впливу виявляються відносно слабкі дисперсні ґрунти, то можливі незворотні зміни їхньої структури і як наслідок цього – об’ємні зміни товщі порід і деформації побудованих на ній будинків і споруд. Отже, міцність інженерних споруд значною мірою залежить від їх основи – осадової товщі земної кори, на якій розташовано забудову. У цьому випадку, при неправильному уявленні про будову земної товщі, виникають непередбачені катастрофічні результати. Важливим методом таких досліджень є математичне моделювання хвильового поля. Використання цього методу зумовлене глибинною будовою земної кори в сейсмічному, інженерному, акустичному діапазонах та практичною недоступністю дослідних зразків для безпосереднього експериментального вивчення.

Внаслідок вибухового розкладу вибухової речовини (ВР) у газах, рідинах і твердих тілах на межі поділу двох середовищ виникає ударна хвиля [1].

З вирівнюванням переднього фронту ударної хвилі в середовищі спостерігається її перехід у хвилю стиснення. Хвиля стиснення на відміну від ударної хвилі змінюється достатньо плавно, швидкість поширення збуджень дорівнює швидкості звуку в цьому середовищі. При зниженні градієнта напружень згасання енергії хвиль збільшується через те, що підвищується в’язкість середовища. В області поширення хвиль стиснення середовище веде себе не пружно, і у ньому виникають залишкові деформації, що ведуть до порушення суцільності будови середовища [2]. Зона поширення цих деформацій обмежена практично 120 – 150 радіусами заряду. Далі хвиля стиснення переходить у пружну хвилю (рис. 1).

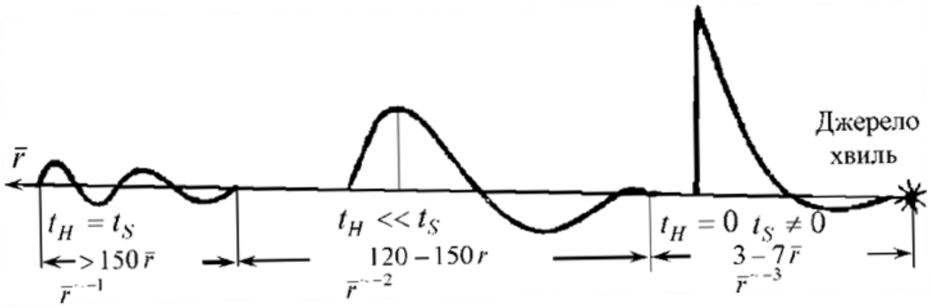


Рис. 1. Області поширення ударних хвиль, хвиль стиснення і сейсмічних: t_H – час наростання напружень від 0 до max; t_S – час спадання напружень від max до 0; $\bar{r}$ - відносний радіус заряду [3]

Руйнування конструкції під дією пружної хвилі настає в тих випадках, коли напруження в її елементах перевищують деяку межу, властиву матеріалу, з якого ці елементи виготовлені. Напруження, взагалі кажучи, будуть більшими, коли більші деформації елементів конструкції. Деформації ж коливної системи будуть зростати за законом, близьким до пропорційності кореню квадратному від потенціальної енергії системи [4].

Зв'язок між величиною швидкості коливання ґрунтів і руйнуваннями може розглядатися як вказівка на існування залежності між деформаціями елементів споруди і енергією коливання ґрунтів. На основі прийнятих припущень для деформацій d споруди отримано формулу

$$d = \frac{m(\sqrt[3]{m})^{v}}{r^{v}\sqrt{(1-\frac{T_0^2}{(\alpha\lg r)^2})^2+\gamma^2\frac{T_0^2}{(\alpha\lg r)^2}}},$$

де d деформація споруди, m - маса заряду вибухової речовини, r - віддаль від вибуху до точки спостереження, T_2 – період коливання ґрунту, T_0 – період власних коливань споруди, γ є величиною, що залежить від згасання власних коливань споруди, v в залежності від r і c набуває значень, що лежать в межах від 1 до 2, a – число, що залежить від властивостей ґрунту. Ця формула може бути застосована для встановлення розмірів сейсмічно небезпечних зон під час вибухів.

Література

1. Покровский Г.И. Взрыв / Г.И. Покровский. – М.: Недра, 1980. – 190 с.
2. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. ─ М.: Мир, 1975. ─ 520 с.
3. Мосинец В.Н. Дробящее и сейсмическое действие взрыва в горных породах / В.Н. Мосинец. ─ М.: Недра, 1976. – 271 с.
4. Аки К. Количественная сейсмология. Теория и методы / К. Аки, П. Ричардс. ─ М.: Мир, 1983. ─ 520 с.

О.О. Юдін
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного
Науковий керівник ***Х.І. Ліщинська****, к.т.н,. доцент кафедри ІМ(ОТІВ)*

РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ РЯТУВАЛЬНОГО ПРИСТРОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

Під час проведення бойових виникають ситуації, коли є необхідність у використанні рятувальних пристроїв. Особливо це стосується випадків, проведення рятувальних робіт у місцях багатоповерхової забудови, де такі пристрої можуть застосовуватися для вивільнення людей з під завалів будинків. За допомогою рятувальних пристроїв можливе підняття як особового складу, так і вантажу (боєприпасів, спорядження, зброї, продуктів та інших важливих предметів для ведення бойових дій) на певну висоту у випадку, коли інші шляхи доступу відсутні. У водолазній справі рятувальні пристрої можуть застосовуватися на водоймах для підняття снарядів з днища водойм під час розмінування тощо.

Одним з таких пристроїв є рятувальний пристрій «Триніг», статична міцність ніг якого оцінена не повністю, оскільки при проектуванні враховувався лише випадок, коли нижні опори ніг розміщені в одній площині.

Метою роботи є аналіз статичної та динамічної міцності елементів конструкції стержневого рятувального пристрою «Триніг».

У роботі проводився розрахунок повздовжніх сил за різного розміщення нижніх опор стержнів. Для трьох випадків такого розміщення визначені геометричні параметри, записані та розв'язані системи рівнянь для визначення стискальних зусиль у ногах пристрою, отримані числові значення поздовжніх сил у стержнях для двох варіантів навантаження пристрою (5 та 8 кН), також визначені статичні напруження стиску в ногах пристрою за 2 варіантів навантаження. Для обох випадків навантаження та трьох способів розміщення опор ніг рятувального пристрою значення напружень стиску у ногах є меншими, ніж допустимі для сталі напруження. Отже, умови міцності на стиск у разі статичного навантаження рятувального пристрою виконуються.

Нога пристрою 3 (нога з лебідкою) перебуває в умовах поздовжньо-поперечного згину, на неї одночасно діє стискальна сила N_3 та момент M, який утворюється силою натягу каната *F*. За розрахункову схему ноги пристрою прийняли балку на двох шарнірних опорах. У роботі записане $\frac{d^2x}{dy^2}+\frac{N_3}{EI_z}\cdot x=\frac{M}{EI_z l}y$ та розв'язане $x=-\frac{M\sin ky}{EI_z k^2\sin kl}+\frac{M}{EIlk^2}y$ диференціальне рівняння пружної лінії балки, відповідно до якого визначене максимальне значення згинального моменту у перерізі стержня-ноги 3: $M_{\text{зг}\max}=M\frac{\sin kl_2}{\sin kl}$, $k=\sqrt{N_3/EI_z}$. Отримано значення максимальних напружень у разі поздовжньо-поперечного згину ноги 3 за двох варіантів навантаженнях та трьох способів розміщення нижніх опор ніг пристрою. Як видно з результатів обчислень, під час поздовжньо-поперечного згину при навантаженні пристрою силою 8 кН, умова статичної міцності для ноги 3 не виконується. Під час навантаження ноги з лебідкою силою 5 кН у разі розміщення двох ніг рятувального пристрою на підвищенні висотою 20 см розрахункові напруження в нозі 3 дуже наближені до допустимого напруження. Тому такий випадок потрібно перевірити на динамічну міцність.

Під час обертання лебідки електродвигуном на ногах пристрою виникають значні вібрації. Для більш точної оцінки міцності ніг пристрою проведене теоретичне дослідження динамічного навантаження, а саме аналіз коливних процесів, що відбуваються у нозі 3 під час вібраційного навантаження. Під час роботи від електроприводу унаслідок обертання незбалансованих мас лебідки виникає збурювальна сила $F(t) = F_0 \sin \Omega t$, що викликає вібрацію конструкції,. У роботі побудоване $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = \dfrac{F_0}{m}\sin\Omega(t), \quad \omega = \sqrt{c/m}, \quad n = \dfrac{\alpha}{2m}$ та розв'язане диференціальне рівняння вимушених поперечних коливань ноги з лебідкою з урахуванням збурювальної сили ($x = Ae^{-nt}(\sin\omega_1 t + \varphi) + \dfrac{F_0}{m\omega^2} \Big/ \sqrt{1 - \left[\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right]^2 + \dfrac{4n^2\Omega^2}{\omega^2}} \cdot \sin(\Omega t - \psi)$). З розв'язку рівняння видно, що нога пристрою з лебідкою бере участь у двох коливальних рухах. Першим коливальним процесом є вільні згасаючі коливання з частотою ω та амплітудою A, які визначаються початковими умовами. Другий коливальний процес проходить з частотою збурювальної сили та зсувом фаз ψ. Ці коливання не згасають, а продовжуються під дією сили $F(t)$. Отримано формулу для визначення амплітуди вимушених коливань та для динамічного коефіцієнта. Визначено частоту вільних коливань лебідки масою 21 кг та кругову частоту збурювальної сили. Оскільки частота вільних коливань лебідки набагато більша від частоти збурювальної сили, то резонанс у такій коливальній системі не виникає.

Література

1. Василенко М.В. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник / М.В. Василенко, О.М. Алексейчук – К.: Вища школа, 2004. – 525 с.
2. Ольховий І.М. Дослідження міцності елементів рятувального пристрою «Триніг» / Ольховий І.М., Боднар Г.Й., Воробець Б.С., Лащ В.А. // Пожежна безпека: Зб. наук. пр. – Львів: ЛІПБ, 2009. №15. – С.118-124.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник / М.А. Павловський – К.: Техніка, 2002. – 510с.
4. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підручник / Г. С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переоб. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
5. Рудавський Ю.К. Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. / Ю.К. Рудавський, П.І. Каленюк, Р.М. Тацій та інші – Львів: В-во НУ «Львівська політехніка», 2001. – 244 с.

УДК 512.8

БІНАРНИЙ МЕТОД ПІДНЕСЕННЯ ДО СТЕПЕНЯ ЗА МОДУЛЕМ ТА КРИПТОСИСТЕМА RSA

Бортник В.

Стасюк М.Ф., к.ф.-м.н., доцент, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Запропонована в 1977 р. криптосистема RSA є чи не найпотужнішою криптосистемою з відкритим ключем.

Генерація ключів в криптосистемі RSA полягає у виборі досить великих простих чисел p і q. Для їх добутку визначена функція Ейлера $\varphi(n)=\varphi(pq)=n-p-q+1.$ Далі випадковим чином вибирають елемент e такий, що не перевищує значення $\varphi(n)$ і НСД$\left(e,\varphi(n)\right)=1.$ Тоді знаходять інверсію d до елемента e за модулем $\varphi(n),$ тобто розв'язують конгруенцію

$$ed \equiv 1\left(\operatorname{mod}\varphi(n)\right). \tag{1}$$

Конгруенцію (1) можна розв'язати, наприклад, методом ланцюгових дробів. Як результат отримують :

Відкритий ключ: e, n;

Таємний ключ: d.

Шифрування відбувається блоками. Для цього повідомлення записують у цифровій формі і розбивають на блоки так, що кожен блок визначає число, яке не перевищує $n.$ Блок M розглядається як елемент кільця $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$

Алгоритм шифрування E в системі RSA полягає у піднесенні M до степеня e за модулем $n.$

$$E(M)=M^e\left(\operatorname{mod} n\right) \tag{2}$$

$(2)-$це блок криптотексту $C=E(M).$

Алгоритм дешифрування D блоку криптотексту C полягає у піднесенні C до степені $d-$таємного ключа цієї криптосистеми, тобто

$$D(C)=C^d\left(\operatorname{mod} n\right).$$

Отже , як бачимо, як для шифрування криптотексту, так і для його дешифрування потрібно вміти підносити число до степеня за даним модулем. Оскільки числа p, q, n при описаному формуванні ключів повинні бути достатньо великими, то потрібно мати ефективні алгоритми піднесення до степеня за модулем. Одним з таких алгоритмів є відомий ще до нашої ери в Індії бінарний метод, який базується на поданні показника d, до якого підносять число a за модулем у двійковій системі числення. Якщо потрібно знайти $a^d \left(\mathrm{mod}\, m\right)$, то подамо показник d у вигляді

$$d = \left(d_n, d_{n-1}, \dots, d_1, d_0\right), \quad d_i \in \{0,1\}, \quad d = \sum_{i=0}^{n} d_i 2^i$$

Тоді результат піднесення до степеня a^d за модулем m можна виразити такою рекурентною процедурою

$$\left(\left(\left(\left(a^{d_n}\right)^2 a^{d_{n-1}}\right)^2 a^{d_{n-2}}\right)^2 \cdots\right)^2 a^{d_0} = \tag{3}$$

$$= a^{d_n 2^n + d_{n-1} 2^{n-1} + d_{n-2} 2^{n-2} + \dots + d_0 2^0} = a^d .$$

При цьому витрачається $n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \le 2n \le 2\log_2 d$ множень.

Приклад. Нехай $p = 53, q = 67$. Тоді $n = 3551$ і $\varphi(n) = 3432$. Виберемо $e = 1021$ і, розв'язавши конгруенцію $1021d \equiv 1\left(\mathrm{mod}\, 3432\right)$, знайдемо $d = 1237$. Припустимо,що нам потрібно надіслати повідомлення «HI», якому відповідає цифрова форма $M = 1711$. Подаючи число $e = 1021$ двійковим числом $e = 1111111101$ і застосувавши процедуру (3), знайдемо числовий крипто текст $C = 1844\left(\mathrm{mod}\, 3551\right)$. Подаючи далі таємний ключ $d = 1237$ двійковим числом $d = 10011010101$ і застосувавши рекурентну процедуру (3),

$$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(a^2\right)^2\right)^2 a\right)^2 a\right)^2\right)^2 a\right)^2\right)^2 a\right)^2 a\right)^2 a$$

де $a = 1844,$ прийдемо до вихідного тексту в цифровій формі $D(C) \equiv 1711\left(\mathrm{mod}\, 3551\right)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вербіцький О.В. Вступ до криптології / О.В.Вербіцький. –Львів.: ВНТЛ, 1998.–246с.

2. Ленг С. Алгебра / С. Ленг.–М. Мир, 1968. –564с.

3. Смарт Н. Алгоритмы возведення в степень / Криптография.–Москва.:2005.–528с.

Т.І. Стефанів
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.Ф. Стасюк****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

RSA АЛГОРИТМ –АЛГОРИТМ КРИПТОГРАФІЇ З ВІДКРИТИМ КЛЮЧЕМ

RSA – асиметричний алгоритм шифрування, відмінною рисою якого є розділення ключів для шифрування та розшифрування. При цьому ключ для шифрування не вимагає секретності. Цей алгоритм грунтується на обчислювальній складності задачі факторизації великих цілих чисел.

Криптосистема RSA стала першою системою, придатною і для шифрування, і для цифрового підпису.

Історія створення. Опублікована в листопаді 1976 року стаття Уітфілда Діффі і Мартіна Хеллмана «Нові напрямки в криптографії» перевернула уявлення про криптографічні системи, заклавши основи криптографії з *відкритим ключем*. Розроблений згодом алгоритм Діффі - Хеллмана дозволяв двом сторонам отримати загальний секретний ключ, використовуючи незахищений канал зв'язку. Однак цей алгоритм не вирішував проблему аутентифікації. Без додаткових коштів користувачі не могли бути впевнені, з ким саме вони згенерували загальний секретний ключ.

Вивчивши цю статтю, троє вчених Рональд Ривест, Аді Шамір і Леонард Адлеман з Массачусетського технологічного інституту (MIT) приступили до пошуків математичної функції, яка б дозволяла реалізувати сформульовану Уітфілд Діффі і Мартіном Хеллманом модель криптографічного системи з відкритим ключем. Після роботи над більш ніж 40 можливими варіантами їм вдалося знайти шуканий алгоритм. Система була названа за першими літерами прізвищ її творців.

Опис алгоритму. Алгоритм RSA складається з 4 етапів: генерація ключів, шифрування, дешифрування та розповсюдження ключів.

Генерація ключів. Вибирають два досить великі прості числа p і q. Для їх добутку $n = pq$ знаходять значення функції Ейлера $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = n - p - q + 1$. Далі випадковим чином вибирають елемент $e,$ що не перевищує значення $\varphi(n)$ і взаємно просте з ним. Для вибраного e знаходять елемент $d < \varphi(n)$ такий, що справджує конгруенцію

$$ed \equiv 1 \left(\bmod \varphi(n)\right)$$

Як результат покладають:

Відкритий ключ: $e, n.$

Таємний ключ: $d.$

Шифрування відбувається блоками. Для цього повідомлення записують у цифровій формі і розбивають на блоки так, що кожен блок позначає число, яке не перевищує n. Тобто, якщо блок записаний у вигляді двійкового слова довжини m, то повинна виконуватись нерівність $2^m < n$. Блок M розглядається як елемент кільця $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ і як такий, що може підноситись до степеня за модулем n.

Алгоритм шифрування E в системі RSA полягає у піднесенні блоку M до степеня e. Записуємо це так

$$E(M) \equiv M^e (\bmod n).$$

В результаті отримують блок криптотексту $C = E(M)$, який є цифровим записом якогось елемента кільця $\mathbb{Z}_n$.

Дешифрування. Алгоритм дешифрування D блоку криптотексту C полягає у піднесенні C до степеня d, тобто

$$D(C) \equiv C^d (\bmod n)$$

Відкритий ключ e, n *оприлюднюють.*

Алгоритм генерування ключів використовує процедуру породження простих чисел з використанням криптографічно надійного генератора випадкових чисел і алгоритм Евкліда для розв’язання конгруенції $ed \equiv 1(\bmod \varphi(n))$. В алгоритмах шифрування і дешифрування піднесення до степеня виконується за допомогою бінарного методу, який використовує подання степеня в двійковій системі.

Безпека алгоритму RSA побудована на принципі складності факторизації цілих чисел. Знаходження таємного ключа d, який не оприлюднюється, в системі RSA є еквівалентним до факторизації чисел, що є добутком двох простих.

Криптосистема RSA використана у різних продуктах, на різних платформах і у багатьох галузях. Вона вбудована в комерційні продукти, число яких постійно зростає. Також її використовують операційні системи Microsoft, Apple, Sun і Novell. В апаратному виконанні RSA алгоритм застосований в захищених телефонах, на мережних платах Ethernet, на смарт-картах, широко використовується в криптографічному обладнанні. Крім того, алгоритм входить до складу всіх основних протоколів для захищених комунікацій Internet, в тому числі S/MIME, SSL, S/WAN, а також використаний в багатьох установах, наприклад, в урядових службах, у більшості корпорацій, в державних лабораторіях і університетах. На осінь 2000 року технології з застосуванням алгоритму RSA були ліцензовані понад 700 компаніями.

На практиці криптосистема RSA часто використовується разом з криптографічною системою секретного ключа типу DES для шифрування повідомлення ключем RSA за допомогою цифрового конверта.

Література

Ященко В.В. Введение в криптографию. – М.: МЦНМО. 2012. – 348 с.

В.В. Багнюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Т.В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАГНІТНОЇ ПІСЛЯДІЇ ДЛЯ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ

Математичний опис явища магнітної післядії [1] є актуальною задачею розвитку методів неруйнівного контролю відповідальних елементів конструкцій, особливо при агресивному впливі водню на АЕС. Дослідимо вплив скінченної швидкості релаксації магнетного потоку на магнетну післядію електропровідного тіла. Експериментальні дослідження магнітної післядії зручно проводити на циліндричних зразках. Тому розглянемо тіло у формі достатньо довгого циліндра, який поміщено у зовнішнє однорідне магнітне поле, вектор напруженості якого орієнтований вздовж осі циліндра: $\mathbf{H} = \{0, 0, H_0\}$ Тіло перебуває у стані магнітної рівноваги, тобто його намагніченість визначається як $M_0 = \{0, 0, \kappa H_0\}$. У момент часу $t = 0$ зовнішнє магнетне поле зникає і у тілі починається релаксація намагнеченості. Зміну магнетного поля в рамках запропонованої математичної моделі описує рівняння яке, за умов осьової симетрії: $\mathbf{H} = \{0, 0, H(r)\}$, де r – радіальна координата, набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 H(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H(r,t)}{\partial r} = \sigma\mu_0\left(\frac{\partial H(r,t)}{\partial t} + \alpha\kappa\int_0^t \frac{\partial H(r,\varsigma)}{\partial \varsigma}\exp(-\alpha(t-\varsigma))d\varsigma\right) \quad (1)$$

Розв’язок цього рівняння необхідно підпорядкувати крайовим умовам

$$H(r)\big|_{t=0} = H_0, \quad H(t)\big|_{r=R} = 0, t\rangle 0, \quad \partial H(t)\Big/\partial r\Big|_{r=0} = 0, \quad H(t)\big|_{r=0}\langle\infty. \quad (2)$$

Застосувавши перетворення Лапласа приходимо до такого диференціального рівняння для зображення $H_L(r,p)$:

$$H_L'' + \frac{1}{r}H_L' - \sigma\mu_0 p\left(1 + \frac{\alpha\kappa}{p+\alpha}\right)\left[H_L - \frac{H_0}{p}\right] = 0, \quad (3)$$

загальний розв’язок якого, що задовільняє умову обмеженості, має вигляд

$$H_L(r,p) - \frac{H_0}{p} = AI_0\left(\sqrt{\sigma\mu_0 p\left(1 + \frac{\alpha\kappa}{p+\alpha}\right)}r\right) \quad (4)$$

де $I_0(x)$ – функція Бесселя нульового порядку.

Сталу інтегрування знаходимо з граничної умови

$$A = -\frac{H_0}{pI_0\left(\sqrt{\sigma\mu_0 p\left(1+\frac{\alpha\kappa}{p+\alpha}\right)}R\right)} \qquad (5)$$

Використавши теорему розкладу, знаходимо розв'язок задачі

$$H(r,t) = H_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_nJ_0\left(a_n\frac{r}{R}\right)}{t_0J_1(a_n)}\left(\frac{\exp\left(-p_n^+t\right)}{p_n^+\left(1+\frac{\alpha^2\kappa}{\left(-p_n^++\alpha\right)^2}\right)}+\frac{\exp\left(-p_n^-t\right)}{p_n^-\left(1+\frac{\alpha^2\kappa}{\left(-p_n^-+\alpha\right)^2}\right)}\right) \quad (6)$$

де $t_0 = \sigma\mu_0R^2$; $J_1(a_n)$ – функція Бесселя першого порядку; a_n – корені функції Бесселя нульового порядку $J_0(a_n)$; R – радіус циліндра;

$$p_n^{\pm} = 0.5\left[\left(\alpha\mu_r+\frac{a_n^{\;2}}{t_0}\right)\pm\sqrt{\left(\alpha\mu_r+\frac{a_n^{\;2}}{t_0}\right)^2-4\alpha\frac{a_n^{\;2}}{t_0}}\right] \qquad (7)$$

Зокрема, коли $\alpha\to\infty$ (магнетна релаксація відсутня), співвідношення (6) набуває вигляду

$$H(r,t) = H_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_0\left(a_n{}^{r}\!/\!_{R}\right)}{a_nJ_1(a_n)}\exp(-p_nt), \qquad (8)$$

де $p_n = \frac{a_n^{\;2}}{t_0\mu_r}$. Для експериментального дослідження магнітної післядії зручно вимірювати електрорушійну силу (е.р.с.) електромагнетної індукції ***E***, яка виникає в контурі довкола циліндра. Електрорушійна сила визначається швидкістю зміни магнетного потоку $\varPhi_m$ у поперечному перерізі тіла. Розрахунки показують,що параметр α суттєво впливає на зміну е.р.с. електромагнетної індукції ***E*** :

$$\mathbf{E} = -\frac{d\varPhi_m}{dt} \qquad (9)$$

Література:

1. Солодяк М.Т. Математична модель магнетотермопружності феромагнетних тіл // Фіз. – хім. механіка матеріалів. – 2001. - №1. – С.7 – 16.

В.Т. Батюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИГНАЛІВ СИСТЕМ МОНІТОРИНГУ НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ

Процеси виникнення та розвитку надзвичайних ситуацій (пожежі, задимлення, викид небезпечних речовин та газів, радіоактивне випромінювання, тощо) для яких розробляються системи моніторингу, часто є поширенням будь-яких збурень (змін) - температури, концентрації частинок, напруженості поля, отже, відповідно до їх природи, можуть описуватися як поширення (зміна) деяких сигналів давачів.

При цьому в багатьох випадках немає необхідності в описі процесу в тривимірному просторі (тому що частина змінних - або залежні, або надлишкові), і число просторових змінних функції *F (x, y, z, t)*, яка описує поле контролю може бути зменшене. Стосовно самої функції діапазони значень, в межах яких можуть змінюватися змінні, на практиці завжди обмежені - розмірами об'єкта, тривалістю процесу і часом його спостереження, однак при математичному описі процесу змінні в багатьох випадках зручно розглядати як необмежені (наприклад, змінюються від $-\infty$ до $+\infty$). Наприклад, якщо формується об'єктивом відеокамери оптичне зображення, то з математичної точки зору маємо справу з розподілом інтенсивності потоку випромінювання *I (x, y, t)*, як функції змінних двох просторових координат і часу; а сила струму *i (t)* в електричному колі є функція тільки часу (число просторових змінних зменшується до нуля).

Крім того, у багатьох випадках представляють інтерес (або можуть реєструватися) тільки просторові розподіли деяких величин. Зокрема, зображення на 2D моніторі є результат реєстрації двовимірного розподілу світлової енергії $E(x,y)=\int_{t_1}^{t_2} I(x,y,t)\,dt$, отриманої фотоелементом (або багатоелементних приймачем зображення) за час експозиції $\Delta t = t_2 - t_1$.

Надалі приймемо, що під терміном "сигнали" будуть матися на увазі функції часу в першу чергу, як відгук (реакція) *Fc (t)* фізичної системи на зовнішній вплив (обурення) *Fвх (t).*

При цьому, в силу дії принципу причинності, в момент часу t_1 вихідний сигнал *Fc* (t_1) системи може залежати від сигналу *Fвх (t)* в моменти часу $t \le t_1$, тобто від вхідного сигналу в даний момент часу і в минулому, але не може залежати від майбутніх значень *Fвх (t).*

Під "зображенням" надалі, як правило, буде матися на увазі двовимірний розподіл *F (x, y)* ("яскравість"), відповідне просторового розподілу потужності будь-якого реєстрованого випромінювання, наприклад викликаного пожежею інфрачервоного випромінювання. Аргумент *t* зазвичай може бути відсутнім, тому що більшість систем реєстрації і відтворення зображень працюють або з фіксованим (незмінним) зображенням (фотофіксація), або з дискретним часом (покадровий відеосигнал з певною частотою. Середнє значення яскравості зображення, якщо S – площа зображення, можна визначити як

$$\left\langle F(x,y)\right\rangle_S = \frac{1}{s}\iint_S F(x,y)dxdy. \qquad (1).$$

Якщо зображення просторово не обмежене то середнє значення можна прийняти:

$$\left\langle F(x,y)\right\rangle = \lim_{\substack{a_x\to\infty \\ a_y\to\infty}}\left\{\frac{1}{4L_xL_y}\int_{-a_x}^{a_x}\int_{-a_y}^{a_y}F(x,y)dxdy\right\}, \qquad (2)$$

Нехай функція $F(x,y)$ інтегровна на нескінченності і на нескінченності приймає значення нуль, тоді для оцінки зручно використати інтеграл яскравості

$$F_* = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x,y)dxdy. \qquad (3)$$

Автокореляційна функція може показати зв’язок сигналу, а саме закону зміни величини з «копією» самого себе, зміщеного на деяку величину часу. Практичне застосування можна показати на прикладі такого аналізу. Нехай при оцінці показників яскравості за допомогою автокореляційної функції виявлено зв’язок (кореляцію) між даними в момент спостереження і 5 хвилин тому. Отже, якщо 5 хвилин тому був відзначений ріст яскравості, то і зараз очікується її зростання. Таким чином виявляється наявність або відсутність зв’язку. Після виявлення зв’язку здійснюється пошук причин (наприклад це може бути розвиток пожежі). Автокореляційні функції можна обчислити за формулами:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)F\ (\tau - t)\,d\tau, \qquad (4)$$

$$r(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau_x,\tau_y)F\ (\tau_x - x,\tau_y - y)\,d\tau_x d\tau_y, \qquad (5)$$

а при нульовому значенні аргументів функції приймають значення енергій.

Література:

1. Назаренко М.В. Теоретичні засади та принципи побудови моделей динамічних процесів та їх регуляторів: [монографія] /М.В.Назаренко. – Кривий Ріг: Діоніс, 2010. – 204 с .

І.В. Бородін
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ТЕХНОЛОГІЇ ЧАТ-БОТІВ ТА ЇХ МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ

На сьогодні ринок чат-ботів після стадії піару і експериментів перейшов в стадію гонки технологій і верифікації ефективності інструменту. Поняття «чат-бота» замінюється більш масштабним і повноцінним. Тепер це розмовний штучний інтелект, Conversational AI. Компанії застосовують його для спілкування з клієнтами на сайтах, в месенджерах, мобільних додатках і розумних пристроях. Щоб «зрозуміти» мову, чат-бот зіставляє сказане з фразами великого числа інших людей, на яких бот навчався. Він знаходить подібності зі зразками фраз, визначає тему питання і виконує запрограмовану на цей тип питання дію. У людини виникає ілюзія, що бот його розуміє: діє логічно, реагує як людина і підтримує бесіду. На цій ілюзії заснований знаменитий тест Тьюрінга (Алан Метісон Тьюринг (Alan Mathison Turing, 1912-1954) - відомий англійський математик, фахівець в області математичної логіки, інформатики та криптографії.): якщо суддя не зміг визначити, бот з ним спілкується або людина, технологія проходить успішне випробування. Розуміння - суб'єктивна «величина», яку складно виміряти. Microsoft проводила дослідження ефективності системи розпізнавання мови і системи відповідей на питання по заданому набору тестів в 2017-2018 роках, обидві виявилися ефективніше людей, пройшовши тест з мінімумом помилок. Це стало потужним імпульсом для розробників інтелектуальних систем.

Навчання чат-бота схоже на навчання людини. Люди з дитинства вміють відокремлювати важливе від шуму, враховувати контекст розмови, розуміти різну вимову одних і тих же фраз, наприклад «карати не можна помилувати». Але чат-бот машина, його спочатку потрібно навчити такого розуміння з допомогою технологій. «Розумний» асистент повинен вірно перетворювати звуки в слова, розуміти сенс питання, враховувати контекст бесіди і відповідати адекватно контексту. Все це - комплекс мовних технологій і технологій розуміння природної мови (NLU). Навчання ділиться на кілька етапів. На першому етапі машина тільки розпізнає ознаки звуку, а саме з математичної точки зору - його цифрові характеристики. Потрібно визначити і інтерпретувати ці характеристики так, щоб на виході вийшло те, що сказала людина. З цим багато проблем: основний запит потрібно відокремити від шумів, розпізнати різні за значенням, але однакові за звучанням слова («мила» і «мило»), з кількох варіантів вибрати найбільш адекватний. Чат-бот використовує мовну і акустичну моделі. Вони попередньо навчаються на величезному обсязі даних, накопичують досвід. Акустична модель в реальному часі переводить звук в цифровий формат, нарізає на безліч мікровідрізків, щось подібне на розбиття при обчисленні інтеграла, і встановлює функціональне співвідношення кожного відрізка до певної частини слова. Таких співвідношень неймовірно багато: мовна модель вибудовує послідовність, не плутаючи схожі за звучанням частини слів і цілі слова. Фраза користувача переведена в текст, але сенс і бажання клієнта не визначені. На другому етапі «розумний» асистент починає діяти як людина - співвідносить фразу зі зразками, на яких навчався, і знаходить найбільш близькі за змістом. Він мислить класами, співвідносячи новий запит з одним з них. А класи формуються в залежності від сфери застосування бота: банківські послуги, оформлення замовлень, консультації з вантажоперевезень, тощо. Наприклад, в клас «забронювати номер» потраплять фрази «хочу забронювати», «як замовити», «умови бронювання» і нестандартні, виду «забронювати як». Поступово відбувається навчання бота, і він може самостійно визначати близькі за змістом запити в цей клас. На третьому етапі технологія всередині чат-бота повинна враховувати контекст бесіди. Наприклад, питання «як буде» придбати авіаквиток «по-англійськи?» можна розпізнати і як запит до системи бронювання авіаквитків, і як запит до перекладача.

Основна технологія сучасних ботів - розуміння природної мови (NLU). Вона дозволяє машині розуміти користувачів і запускати потрібні параметри для обробки запитів. Для цього потрібні технологічні рішення, пов'язані з обробкою природної мови. До них відноситься підхід до обробки (rule-based, статистичний, гібридний), технології розпізнавання і синтезу мови, технології впровадження чат-бота в бізнес-процеси компанії (хмарні або локальні). Це величезний і дуже перспективний ринок, якому експерти прогнозують зростання до $ 16 млрд до 2021 року. Розрізняються і технології навчання чат-ботів. Найбільш конкурентоспроможними на ринку стали технології машинного навчання за принципом нейромереж, коли чат-бота навчають на вибірках відповідей. Йому показують приклади фраз клієнтів, а він вчиться поміщати такі фрази і схожі з ними за змістом в потрібний клас. Чим ефективніше алгоритм, тим менше прикладів потрібно, щоб навчити бота.

Важливою в цій програмній технології є роль лінгвістів. Лінгвісти формулюють правила, за якими чат-бот вчиться розуміти сенс сказаного, а не просто шукає «ключі» в тексті. Ці фахівці вміють програмувати і пишуть сценарій поведінки бота на спеціальній мові Just AI DSL. Такі фахівці вчать ботів розуміти числівники, написані текстом, розпізнавати сенс фрази з друкарськими помилками, сленгом або навіть неточним порядком слів.

У інтернет - мережі є багато скріншотів і постів, що висміюють відповіді чат-ботів. Але не менша кількість публікацій на тему помилок співробітників. В обох випадках проблеми однакові: поверхневе планування завдання, бідна база відповідей, немає часу на додаткове навчання.

Література:

Тугушева Н. А. Использование чат-ботов в различных сферах повседневной жизни // Молодой ученый. — 2017. — №21. — С. 36-39. URL https://moluch.ru/archive/155/43920/

В.С.. Самойленко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА ІНТЕРФЕЙС ПРОГРАМИ FDS

З точки зору чисельних методів у програмі FDS (Fire Dynamic Simulator), призначеній для моделювання пожеж, використовується метод сіток: вся область математичної моделі розбивається на паралелепіпеди (осередки розрахункової сітки), розміри яких задаються користувачем і в вершинах цих паралелепіпедів відбувається розрахунок різних характеристик задачі. Таким чином, чим менше розмір сітки, тим більш детальним буде розрахунок, і тим довше він триватиме. Програма дозволяє моделювати об'єкти складені з паралелепіпедів розташованих горизонтально. Якщо необхідно моделювати об'єкт, що має похилі стінки, його можна представити як велику кількість невеликих паралелепіпедів, розташованих сходами. На межі заданої області задаються граничні умови(область, наприклад, можна обмежити стінками із заданою температурою, або вказати, що вона не змінюється поза зоною розрахунку). Усередині заданої області можна створювати об'єкти складені з паралелепіпедів. У цих об'єктів можливо задавати різні фізичні властивості, в тому числі їх можна вважати займистими.

Основою для математичних моделей пожеж є рівняння, що виражають закони збереження маси, імпульсу, енергії і мас компонентів в розглядуваному малому об'ємі. Закон збереження маси стверджує, що у замкненій системі сумарна маса всіх речовин зберігається, незважаючи на будь-які внутрішні процеси. Математично закон описується рівнянням збереження маси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot u_j\right) = 0. \qquad (1)$$

Рівняння збереження імпульсу:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \cdot u_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot u_j \cdot u_i\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho \cdot g_i. \qquad (2)$$

Для ньютонівських рідин, що підлягають закону Стокса, тензор в’язких напружень визначається формулою:

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \cdot \delta_{ij}. \qquad (3)$$

Рівняння енергії:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \cdot h\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot u_j \cdot h\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\lambda}{c_p} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial q_j^R}{\partial x_j}, \qquad (4)$$

де $h = h_0 + \int_{T_0}^{T} c_p \cdot dT + \sum_k (Y_k \cdot H_k)$ - статична ентальпія суміші;

H_k – теплота утворення *k*-го компонента;

$c_p = \sum_k Y_k \cdot c_{p,k}$ – теплоємність суміші при сталому тиску;

q_j^R – радиаційний потік енергії в напрямку x_j.

Рівняння збереження хімічного компонента *k:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot Y_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \cdot u_j \cdot Y_k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot D \cdot \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}\right) + S_k. \qquad (5)$$

Для замикання системи рівнянь (1) - (5) використовується рівняння стану ідеального газу. Для суміші газів воно має вигляд:

$$p = \rho \cdot R_0 \cdot T \cdot \sum_k \frac{Y_k}{M_k}, \qquad (6)$$

де R_0 – універсальна газова стала;

M_k – молярна маса *k*-го компонента.

Найважливішими характеристиками займистих об'єктів в програмі FDS є: теплота згоряння (Heat_of_combustion) - фізичний зміст цієї величини в тому, що вона показує скільки тепла виділяється при згорянні палива. У програмі ця характеристика речовини використовується разом з густиною для обчислення кількості енергії одержуваної при згорянні палива. Реперна температура (reference temperature) - в програмі характеристика горіння, яка показує при якій температурі згорає 1/10 частка речовини. Ця величина характеризує швидкість процесу піролізу, а, значить, і швидкість горіння в цілому. Чим менше реперна температура, тим при меншій температурі виділяється достатня кількість займистого газу для підтримки процесу горіння. Для здійснення розрахунку користувач спочатку пише текст розрахункової програми в файлі з расширенням txt, потім цей файл запускається на виконання в програмі FDS, яка записує результати розрахунків в ряд службових файлів. Для подальшої роботи з цими файлами використовують програму Smokeview, спеціально призначену для візуалізації моделювання. Тут є такі зручні інструменти: зріз температур: 2Д - колірна діаграма, що показує в якій області і яка температура за допомогою різних кольорів, шкала температур для порівняння кольору з температурою в градусах Цельсія, 3Д графіка, що показує області виділення енергії і шкала показує який колір відповідає певним виділенням енергії, візуалізація згоряння речовини: речовина показується певним кольором і при згорянні частина (кубики) речовини зникають і виділяється енергія.

Література:

1. Пустовіт М. О. Моделювання поширення пожежі всередині будівель утривимірному просторі методом клітинних автоматів / М. О. Пустовіт // Системи управління, навігації та зв'язку. - 2013. - Вип. 1. - С. 164-168.

СЕКЦІЯ 2

МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ, ЩО ЗМІНИЛИ СВІТ

М.В. Мірошніков
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: **Гузик Н.М.,** кандидат фізико-математичних наук

ВПЛИВ ДИНАМІКИ ПІДРЕСОРЕНОЇ ЧАСТИНИ БОЙОВИХ КОЛІСНИХ МАШИН НА РОЗСІЮВАННЯ СНАРЯДІВ

В умовах сьогодення все більше миротворчих та інших військових операцій проводяться з використанням бойових колісних машин (БКМ). Вони характеризуються високим степенем захисту особового складу від ураження, маневреністю, керованістю, високою ефективністю ведення вогню із встановленої на них зброї. Однак, експлуатація цих машин у складних умовах руху пересічною місцевістю, показує, що коливання корпусу призводить до погіршення всіх його експлуатаційно-технічних характеристик та вливає на ефективність ведення вогню. При цьому одним із визначальних чинників, що впливає на ефективність ведення вогню сходу, є коливання підресореної частини (ПЧ) БКМ. Це стосується БКМ, за базу котрих вибрано шасі серійного виробництва колісних транспортних засобів і на яке додатково встановлено броньований корпус та стрілецьку зброю (кулемет, гранатомет). На сьогоднішній день такі машини є й на озброєнні ЗСУ. Серед них КрАЗ Cougar, КрАЗ Spartan-APC, Козак-2, Барс-8 тощо.

Броньований корпус спричиняє значне збільшення ваги підресореної частини, а від так статичну деформацію пружних амортизаторів, й низку експлуатаційних особливостей. Позбутися наведених вище недоліків можна шляхом модернізації системи підресорювання, використовуючи для таких машин амортизатори із нелінійною (прогресивною чи регресивною) характеристикою системи підресорювання.

У даній роботі розроблено математичний апарат для дослідження впливу нелінійно-пружних характеристик підвіски на амплітуду та частоту вертикальних коливань підресореної частини БКМ та отримано розрахункові залежності для визначення їх впливу на точність ведення вогню із стаціонарно встановленої на них стрілецької зброї. Базою для визначення цих характеристик служить диференціальне рівняння збуреного руху підресореної частини БКМ та нормальний закон розподілу випадкових величин, що використовується при дослідженні явища розсіювання снарядів.

Показано, що встановлення на БКМ СП із прогресивною чи регресивною силовими характеристиками амортизаторів призводить до якісно нової характеристики коливань ПЧ: період, а, отже, частота власних коливань залежить від амплітуди; для підвіски із регресивним законом зміни відновлювальної сили частота власних коливань для більших значень амплітуди є меншою; найбільш ефективно проводиться ведення вогню сходу із стаціонарно розміщеної стрілецької зброї за регресивної характеристики СП.

Т.П. Петрученко
Національний університет «Львівська політехніка»
Науковий керівник: **Бродяк О.Я.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент

ПРО ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО РОЗПОДІЛУ ПУАСОНА

Сучасний розвиток теорії ймовірностей характеризується загальною зацікавленістю нею, а також широким її практичним застосуванням. Вчені зі всього світу намагаються збагатити цю науку новими важливими результатами. Використання теорії ймовірностей в економіці, фізиці, хімії та багатьох інших науках найкраще пояснює ті причини, через які за останні десятиліття теорія ймовірностей перетворилась в одну з областей математики, яка найшвидше розвивається.

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини. Як відомо, випадковою величиною називають величину, яка в результаті випробувань набуває одного і тільки одного можливого значення, невідомого якого саме, залежного від багатьох випадкових причин, які наперед неможливо врахувати. До прикладів випадкових величин можна віднести число викликів, які поступають на телефонну станцію за добу, похибку зважування тіла на аналітичних вагах, послідовність виходу з ладу деталей машин, відстань, яку пролетить куля при вистрілі з гвинтівки тощо.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p. Розглянемо випадкову величину X, яка визначає число появи події A у цій серії випробувань. Якщо число p досить мале, n – велике, а $pn \approx \lambda,$ то ймовірність p_m того, що випадкова величина X приймає значення m обчислюється за формулою Пуассона $p_m \approx \frac{\lambda_m}{m!} e^{-\lambda}.$ Цей закон розподілу називають розподілом Пуассона або розподілом рідкісних подій. У нашій роботі представлено приклади задач, підтверджених експериментально, які приводять до розподілу Пуассона.

Задача про радіоактивний розпад [1]. Радіоактивна речовина випромінює α частинки. Подія, яка полягає в тому, що число α частинок, які за проміжок часу t досягають заданої точки простору, приймає фіксоване значення k, є прикладом випадкової величини з розподілом Пуассона. Підтвердженням цього факту був відомий дослід Резерфорда, Чєдвіка, Елліса.

Задача про зміну хромосом в клітинах [2]. Опромінення живих клітин рентгенівськими променями веде до того, що окремі хромосоми і клітинах змінюються. Допоки клітини піддаються впливу променів, ймовірність зміни залишається постійною, а число N_k клітин з k змінами підпорядковується розподілу Пуассона. На підтвердження цього факту було проведено 11 серій дослідів.

Задача про розриви снарядів [3]. Як приклад задачі просторового розподілу випадкових точок розглянемо статистику падінь снарядів в південній частині Лондона під час Другої Світової війни. Територія, яка розглядалась, була поділена на $N = 576$ областей площею $t = 1/4 кв. км$. Число N_k областей, в яких відбулось k падінь снарядів – приклад випадкової величини з розподілом Пуассона.

Задача про телефонне з'єднання з неправильним номером [4]. Спостереження велось за $N = 267$ номерів. Виявилось, що число N_k номерів, які мали k неправильних з'єднань – випадкова величина з розподілом Пуассона.

Задача про бактерії [5]. Серія з 8 експериментів, які проводились на чашці, показала що число квадратів N_k з k бактеріями, які під мікроскопом виглядали як темні плямки, – випадкова величина з розподілом Пуассона.

Література

1. Rutherford, Chadwick and Ellis. Radiations from radioactive substances. – 1920. – Cambridge. – 265 p.

2. Catcheside D., Lea D. and Thoday I. Types of chromosome structural change induced by the irradiation of Tradescontia microspores // Journal of Genetics. – 1945-1946. – No 47. – P. 113-136.

3. Clarke R. An application of the Poisoon Distribution // Journal of the Institute of Actuaries. – 1946. – No 72. – P. 48-51.

4. Thorndike F. Applications of Poisson`s Probability Summation // The Bell System Technical Journal. – 1926. – No 5. – P. 604-624.

5. Matuszewski T., Supinska J. and Neyman J. Zentralblatt für Bakteriologie, Parasitenkunde und Infektionskrankheiten // II Abt. – 1936. – P. 95-98.

Вірста Т.В., Нікітчин Д.О.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Васильєва О.Е.,*** *кандидат технічних наук, доцент, полковник служби цивільного захисту*

РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ У ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ МЕДИЧНИХ ПРАЦІВНИКІВ

Процеси, що відбуваються в даний час у всіх сферах життя суспільства, висувають нові вимоги до професійних якостей фахівців. Сучасний етап розвитку суспільства характеризується якісною зміною діяльності медичного персоналу,яке пов'язане з широким застосуванням математичного моделювання, статистики та інших важливих явищ, що мають місце в медичній практиці. Основна проблема полягає в тому, що немає загальних критеріїв здоров'я, а сукупність показників для одного конкретного пацієнта (умови, коли він відчуває себе комфортно) може істотно відрізнятися від таких же показників для іншого. При правильному застосуванні математичний підхід не відрізняється істотно від підходу,заснованого просто на здоровому глузді.

Математичні методи просто більш точні, і в них використовуються більш чіткі формулювання і більш широкий набір понять, але все одно вони повинні бути сумісні із звичайними словесними міркуваннями. Етап постановки завдання буває трудомістким і займає досить багато часу. Але саме різні погляди на проблему математиків і медиків, які є представниками двох відмінних за своєю методологією наук, допомагають отримати найкращий результат.

В даний час основним завданням вивчення дисципліни "Математика" є озброєння студентів математичними знаннями та вміннями, необхідними для вивчення спеціальних дисциплін базового рівня, а в вимогах до професійної підготовленості фахівця заявлено вміння вирішувати професійні завдання з використанням математичних методів. Таке введення не може не позначатися на результатах математичної підготовки медиків. Дані результати показують, що, вивчаючи математику, надалі медпрацівники набувають ті чи інші професійно-значущі якості та вміння, а також застосовують математичні поняття і методи в медичній науці і практиці.

Професійна спрямованість математичної підготовки в медичних освітніх установах повинна забезпечувати підвищення рівня математичної компетентності студентів-медиків, усвідомлення цінності математики для майбутньої професійної діяльності, розвиток значущих якостей і прийомів розумової діяльності, освоєння студентами математичного апарату, що дозволяє моделювати, аналізувати і вирішувати елементарні математичні професійно значущі завдання, що мають місце в медичній науці і практиці, забезпечуючи наступність формування математичної культури студентів від першого до старших курсів і виховання потреби у вдосконаленні знань в галузі математики та її додатків.

Спочатку статистика застосовувалася в основному в галузі соціально-економічних наук і демографії, а це неминуче змушувало дослідників більш глибоко займатися питаннями медицини. Засновником теорії статистики вважається бельгійський статистик Адольф Кетле (1796-1874). Найактивнішим прихильником використання статистики був основоположник військово-польової хірургії М.І.Пирогов. Додаток статистики для визначення діагностичної важливості симптомів і гідності операцій можна розглядати як важливе придбання новітньої хірургії .У 60-ті роки XX століття, після очевидних успіхів прикладної статистики в техніці і точних науках, знову почав зростати інтерес до використання статистики в медицині. В.В. Алпатов у статті «Про роль математики в медицині» писав: «Надзвичайно важлива математична оцінка терапевтичних впливів на людину . Нові лікувальні заходи мають право замінити собою заходи, що вже ввійшли в практику, лише після обґрунтованих статистичних випробувань порівняльного характеру» .Величезне застосування може отримати статистична теорія в постановці клінічних та неклінічних випробувань нових терапевтичних та хірургічних заходів. Пройшли ті часи, коли застосування статистичних методів у медицині ставилося під сумнів. Статистичні підходи лежать в основі сучасного наукового пошуку, без якого пізнання в багатьох галузях науки і техніки неможливо. Неможливо воно і в галузі медицини. Медична статистика повинна бути націлена на вирішення найбільш виражених сучасних проблем у здоров'ї населення. Основними проблемами тут, як відомо, є необхідність зниження захворюваності, смертності та збільшення тривалості життя населення.

Відповідно, на даному етапі основна інформація повинна бути підпорядкована вирішенню цього завдання. Повинні детально проводитися дані, що характеризують з різних сторін провідні причини смерті, захворюваності, частоту і характер контактів хворих з медичними установами, забезпечення нужденних необхідними видами лікування, включаючи високотехнологічні. Отже, медицина в нашій країні буде на належному рівні лишень тоді, коли вона в повному обсязі й остаточно поєднає себе з величною математикою.

Література:

1. «Математика в медицині» https://medytsyna.com/matematika-v-med
2. UkrBukva.net «Математика в медицині» https://ukrbukva.net/60692-Matematika-v-medicine.html
3. «Математика і медицина» http://www.slideboom.com/presentations/901178
4. Фармацевт «Навіщо математика медицині» http://fp.com.ua/articles/zachem-meditsine-matematika/

М.І. Шалан
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Васильєва О.Е.,** кандидат технічних наук, доцент, полковник служби цивільного захисту*

МАТЕМАТИКА – ЗАПОРУКА УСПІШНИХ ДІЙ ПІДРОЗДІЛІВ ДСНС

Людство постійно шукає можливість переміщення на великі відстані за мінімальний час. У нашу епоху найбільш масовим наземним транспортним засобом є автомобіль. Автомобіль – колісний транспортний засіб, який приводиться в рух джерелом енергії, а також машина, яка складається з сотень механізмів, кожен з яких працює завдяки іншому. Змогу послідовно сполучити ці механізми, та налагодити їх роботу дає математика та прикладна механіка. Пожежний автомобіль (ПА) – машина набагато складніша, ніж легковий, тому проектування та побудова ПА потребують неабиякої роботи конструкторів, інженерів та математиків.

ПА експлуатуються в умовах надвисоких навантажень та екстримальних температур. Тому, ще під час їх проектування та виготовлення в них закладають підвищений запас міцності. Двигун же при ліквідації надзвичайних ситуацій у 80% випадків працює на максимальних обертах. Відповідно його ресурс та ремонтопридатність є дуже важливою складовою. Під час створення двигуна конструктори приділяють цьому багато уваги, розраховуючи об'єми циліндрів, об'єм камери згоряння та хід поршня.

$$V_h = \frac{\pi D^2}{4} \cdot S - \text{об}'\text{єм циліндра}$$

$$V_c = \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \text{об}'\text{єм камери згоряння}$$

$$V_A = V_h + V_c - \text{повний об}'\text{ємциліндра}$$

$$E = \frac{V_A}{V_C} -\text{хід поршня.}$$

Математика залишається поруч і під час повсякденної діяльності підрозділів ДСНС при роботі з технікою. Надійність техніки залежить від якості її обслуговування. Під час цього знову не обійтись без її величності, хоча і елементарної. Водії перевіряють рівень води в цистерні та піноутворювача в баку, рівень масла в картері двигуна, люфт рульового колеса, спеціальними приладами вимірюється напруга та справність електромережі, перевіряється тиск повітря в шинах, рівень електроліту в акумуляторних батареях. Завершується обслуговування автомобіля перевіркою пожежного насоса на сухий вакуум, падіння розрідження має бути не менше 100 мм/2,5хв.

Математика, як це не дивно, оточує рятувальників і на службі. Математичні розрахунки стають у нагоді під час роботи газодимозахисної служби. Надзвичайні ситуації не повторюються та іноді бувають непередбачуваними. При великих пожежах та задимленнях, коли існує потреба порятунку людей, пожежник одягає ізолюючий протигаз і стає газодимозахисником. Тут знову не обійтись без фундаментальної науки та математичних залежностей, тому що від них залежить не тільки життя потерпілих, а і життя рятувальників. Такими формулами користується пост безпеки, в той час, як ланка газодимозахисної служби працює у непридатному для дихання середовищі. Розраховується все: контрольний тиск, при якому потрібно вийти на чисте повітря, залишок тиску для роботи в НДС, час роботи на місці пожежі.

При звичайних пожежах математичними залежностями користуються як рядові пожежники, начальники караулів, так і штабні командири. Ліквідація надзвичайної ситуації розпочинається з виїзду спеціального автомобіля та його слідування на місце НС. І лише математиці відомо, як це зробити за лічені хвилини:

$$\tau_{\text{пр.}} = \frac{60 \cdot L}{V_{\text{сл.}}}.$$

Визначаємо час прямування на пожежу, де L – відстань від частини до місця пожежі, км; $V_{\text{сл}}$ – середня швидкість руху пожежних автомобілів. Коли підрозділ прибув на місце пожежі, командир оцінює обстановку, загрози та розміри пожежі:

$$R = 0{,}5 \cdot V_{\text{л}} + \tau_1 + V_{\text{Л}}\left(\tau_{\text{в.р.}} - 10\right) + 0{,}5 \cdot V_{\text{Л}}\ \tau_{\text{лок}}$$ – радіус пожежі

Всі розрахунки робляться миттю, а тоді розпочинається важка робота – локалізація та ліквідація пожежі. Відразу ж необхідно розрахувати час роботи водяних стволів:

$$\tau_{\text{пр.}} = \frac{W_{\text{ц}} - \Sigma(N_p \cdot W_p)}{\Sigma(N_{\text{пр.}} \cdot q_{\text{пр.}}) \cdot 60}$$ – час роботи водяних стволів

У справі порятунку людей дрібниць немає, тому кожна дія передбачена Статутом, точними науками та честю.

Література:

1. Автомобільні транспортні засоби. Основи конструкції. / [Я. І. Підгорецький, М. І. Сичевський; А. М. Домінік]
2. Основи підготовки газодимозахисника. Навчальний посібник. / [Ковалишин В. В., Лущ В. І., Пархоменко Р. В.]
3. Пожежна тактика / [Р. В. Пархоменко, Д. О. Чалий, Д. П. Войтович]

С.-А. І. Муха
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Чмир О.Ю.****, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

ЗАСТОСУВАННЯ ПАКЕТУ MAPLE ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Лінійне програмування – це метод досягнення найкращого певного результату (такого як найбільший прибуток або найменша вартість) у математичній моделі чиї вимоги представлені через лінійні відношення.

Більш формально, лінійне програмування є технікою для оптимізації лінійної цільової функції, що обмежена лінійними рівняннями і лінійними нерівностями. Її допустима множина є опуклою областю, яка визначена як перетин скінченної кількості півпросторів, кожен з яких визначає лінійна нерівність. Її цільова функція є дійснозначна функція визначена на цьому багатограннику. Алгоритм лінійного програмування знаходить точку на багатограннику, де ця функція набуває найбільшого чи найменшого значення якщо така точка існує.

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язків у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в лінійну цільову функцію, ця функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Використовуючи засоби програми Maple побудуємо допустиму область та знайдемо розв'язок наступної задачі.

Задача. Авіакомпанія на замовлення армії повинна перевезти не менше 700 військовослужбовців. Авіакомпанія має у своєму розпорядженні два типи літаків. Літак першого типу перевозить 30 пасажирів і має екіпаж 3 осіб. Літак другого типу перевозить 70 пасажирів і має екіпаж 5 осіб. Експлуатація одного літака першого типу коштує 5000 грн., а літака другого типу – 9000 грн. Скільки потрібно використати літаків кожного типу, щоб затрати були мінімальними? Для формування екіпажів літаків можна використати не більше 60 осіб. [2].

Дані задачі запишемо у вигляді таблиці.

Тип літаків / **Особа**	***I тип***	***II тип***	**Обмеження**
Пасажири	30	70	не менше 700
Екіпаж	3	5	не більше 60
Експлуатація одного літака	5000 грн.	9000 грн.	

Математична модель даного процесу має вигляд: мінімізувати затрати $F(x_1, x_2) = 5000x_1 + 9000x_2 \to \min$ за умови виконання обмежень

$$30x_1 + 70x_2 \geq 700,$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 60,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

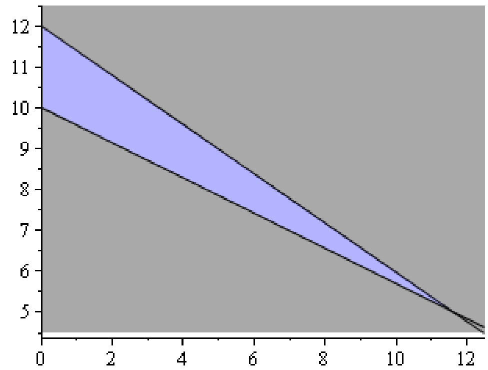
де x_1, x_2 – кількість одиниць літаків відповідно I-го та II-го типів.

Побудуємо допустиму область.

```
> restart:
> with(plots):
> ineq := {30x1 + 70 x2 ≥ 700, 3 x1 + 5x2 ≤ 60, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0};
```

$$ineq := \{0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 700 \leq 30\,x_1 + 70\,x_2, 3\,x_1 + 5\,x_2 \leq 60\}$$

```
> inequal(ineq, x1 = 0..12.5, x2 = 4.5..12.5)
```



Використовуючи програму Maple, розв’язування цієї задачі є досить простим [3].

```
> restart
> with(simplex):
> f := 5000 x1 + 9000 x2; ineq := {30x1 + 70 x2 ≥ 700, 3 x1 + 5x2 ≤ 60, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0};
```

$$f := 5000\,x_1 + 9000\,x_2$$

$$ineq := \{0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 700 \leq 30\,x_1 + 70\,x_2, 3\,x_1 + 5\,x_2 \leq 60\}$$

```
> minimize(f, ineq);
```

$$\{x_1 = 0, x_2 = 10\}$$

```
> assign(minimize(f, ineq)); f
```

$$90000$$

Література

1. *Попов Ю.Д.* Линейное и нелинейное программирование: Учеб. пособие. – К.: Изд-во КГУ, 1988. – 188 с.

2. *Карр Ч., Хоув Ч.* Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. – М.: Мир, 1966. – 464 с.

3. *Прохоров Г. В., Леденев М. А., Колбеев В. В.* Пакет символьных вычислений Maple V / Г. В. Прохоров, М. А. Леденев, В. В. Колбеев – М: Компания Петит, 1998. – 198 с.

Л.І. Жолубак
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Чмир О.Ю.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Перша робота з теорії графів, що належить відомому швейцарському математику Л. Ейлеру, з'явилася в 1736 р. Спочатку теорія графів здавалася досить незначним розділом математики, так як вона мала справу в основному з математичними розвагами й головоломками. Однак подальший розвиток математики і особливо її додатків дало сильний поштовх розвитку теорії графів. Вже в XIX столітті графи використовувалися при побудові схем.

В даний час ця теорія знаходить численне застосування в різноманітних практичних питаннях. Отримання подальших суттєвих результатів у цій галузі датують серединою XIX століття. Однак початок проведення активних систематичних досліджень та становлення теорії графів як окремого авторитетного розділу сучасної математики відбулося ще майже 100 років по тому, тобто в середині XX століття. Саме з цього часу граф стає однією з найпоширеніших і найпопулярніших математичних моделей у багатьох сферах науки і техніки. Картинка у вигляді набору точок на площині та ліній, проведених між деякими з них, стала зручною і наочною формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів та явищ.

Великою мірою це пов'язано з виникненням, бурхливим розвитком та поширенням електронних обчислювальних машин і, як наслідок, значним зростанням ролі задач дискретного характеру. Математика від "обслуговування" переважно фізики переходить до проникнення своїх методів у інші сфери людської діяльності. Одним з потужних інструментів такого проникнення є граф.

Із суто формальної точки зору граф можна розглядати як один з різновидів алгебраїчної системи (а саме, як модель), а отже, і всю теорію графів – як розділ сучасної алгебри. Справді, результати та методи алгебри широко використовуються в теорії графів. Однак за останні півстоліття активного інтенсивного та екстенсивного розвитку теорія графів виробила свою достатньо специфічну власну проблематику і методологію. На сьогодні теорія графів є однією зі складових математичного апарату кібернетики, важливим розділом дискретної математики.

В даний час можна вказати розділи чистої математики, наприклад теорія математичних відношень, в яких теорія графів служить природним апаратом; з іншої сторони, ця теорія знаходить багато численні застосування в різноманітних практичних питаннях: при встановленні різного роду відношень, при вирішенні транспортних задач, задач про потік в сітці нафтопроводів і взагалі в програмуванні. Теорія графів тепер застосовується і в таких областях, як економіка, психологія і біологія. Математичні розваги і головоломки також залишаються частиною теорії графів.

Останнім часом графи і пов'язані з ними методи досліджень використовуються практично в усіх розділах сучасної математики і, зокрема, дискретної математики.

Граф є математичною моделлю найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, що досліджуються і використовуються в науці, техніці та на практиці. Коротко опишемо найвідоміші застосування теорії графів.

Наприклад, у вигляді графа можуть бути зображені:
-електричні і транспортні мережі;
- інформаційні і комп'ютерні мережі;
- карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- і нафтопроводів;
- моделі кристалів;
- структури молекул хімічних речовин;
- моделі ігор;
- різні математичні об'єкти (відношення, частково впорядковані множини, решітки, алгоритми і програми тощо);
- лабіринти;
- плани діяльності або плани виконання певних робіт (розклади);
- генеалогічні дерева тощо.

За допомогою графів можна розв'язати різні задачі, зокрема:
- пошук зв'язних компонентів у комунікаційних мережах;
- пошук найкоротших, "найдешевших" та "найдорожчих" шляхів у комунікаційних мережах;
- побудова кістякового дерева: зв'язність з найменшою можливою кількістю ребер;
- пошук максимальної течії для транспортної мережі, в якій визначено вхідні та вихідні вершини та пропускні спроможності ребер;
- ейлерів цикл: обійти всі ребра (контроль дієздатності мережі);
- розфарбування графів: розфарбування географічних карт, укладання розкладів, розміщення ресурсів тощо;
- планарність графів: проектування друкованих електронних та електричних схем, транспортних розв'язок тощо;
- знаходження центрів графа: вершин, максимальна відстань від яких до всіх інших вершин графа є мінімальною ("столиць") тощо.

Література

1. *Кудрявцев Е.М.* Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. – М.: Радио и связь, 1984. – 184 с.
2. *Оре О.* Теория графов. – М.: Мир, 1980. – 336 с.
3. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 207с.
4. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.

М.М. Гулковський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Чмир О.Ю.****, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

ІСТОРІЯ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ

Як не дивно, незважаючи на те, що у школі вивчають алгебру, багато учні, а згодом і дорослі, не можуть відповісти на запитання: “Що таке алгебра?”

Алгебра – це наука, яка вивчає множини деяких елементів і дії над ними.

Напевно, неодноразово виникало запитання: “Для чого потрібно вводити літери замість цифр і чи потрібно це взагалі робити?”. І тільки пізніше переконуємось, які переваги при вирішенні завдань дає алгебра в порівнянні з арифметикою. Існують різні види алгебри, серед них найбільш відомими є лінійна алгебра, алгебра структур, алгебра кілець, алгебра логіки, або, що те ж саме, алгебра Буля.

Логіка як наука сформувалася в 4 ст. до н. е. Її створив грецький учений Арістотель. Слово «логіка» походить від грецького “логос”, що з одного боку означає “слово” або “виклад”, а з іншого мислення. У тлумачному словнику Ожегова С.І. сказано: “Логіка – це наука про закони мислення”.

Основоположником алгебри Буля вважають Джорджа Буля, який народився в Англії 2 листопада 1815 року. Все своє життя він працював вчителем математики і фізики в школі. Зі спогадів його учнів відомо, яке величезне значення надавав Буль розвитку творчих здібностей учнів. При викладі нового матеріалу він прагнув до того, щоб його учні самі заново «відкривали» деякі формули і закони. Діапазон наукових інтересів Буля був дуже широкий: в рівній мірі його цікавили математика і логіка – наука про закони і форми мислення. В ті часи логіка вважалася гуманітарною наукою, і багатьох, хто знав Джорджа Буля, дивувало, як в одній людині могли уживатися точні методи пізнання, властиві математикам, і суто описові методи логіки. Але вченому захотілося зробити науку про закони і форми мислення такою ж суворою, як і будь-яка з природничих наук, скажімо математика чи фізика. Для цього Буль став позначати буквами не числа, як це робиться у звичайній алгебрі, а висловлювання і показав, що такими рівняннями, дуже схожими з алгебраїчними, можна вирішувати питання про істинність і хибність висловлювань, зроблених людиною. Так виникла алгебра Буля. Булеву алгебру Джордж Буль описав у своїй книзі “Математичний аналіз логіки” (1847), і більш детально у наступній книзі “Дослідження законів думки”(1854).

Але ще задовго до Джорджа Буля німецький філософ і математик Готфрід Лейбніц (1646 - 1716) вперше висловив ідею про створення науки, яка позначить всі поняття звичайної розмовної мови символами і встановить деяку нову алгебру для з’єднання цих символів.

В наші дні алгебра логіки стала найважливішою складовою частиною математики. Одне з її завдань – це рішення всіляких рівнянь, числові співвідношення в яких замінено буквеними. Більшість пам’ятає, як вирішувати рівняння другого і третього ступеня з буквеними коефіцієнтами. Так от, Буль у своїй новій алгебрі скористався всіма цими формулами і правилами.

Новим в алгебрі Буля є те, що елементи множини, які в ній вивчаються, є не числами, а висловлюваннями. Якщо при вирішенні звичайних алгебраїчних рівнянь визначається, якому числу дорівнює невідоме x, звичайна алгебра шукає відповідь на запитання: "Скільки?" Алгебра логіки шукає відповідь на запитання: "чи правильно те чи інше висловлювання, позначене буквою x?" Зміст висловлювання тут не грають ніякої ролі. Кожне висловлювання може бути тільки або істинним, або хибним. Воно не може бути наполовину істинним і наполовину помилковим. В якості прикладу можна згадати кидання жереба за допомогою монети. Розглядаються тільки два стани монети – "орел" або "решка". За домовленістю сторін "орел" – це ТАК, а "решка" – це НЕМАЄ. Ніякі інші проміжні положення в алгебри логіки не враховуються, хоча вони й можливі. Підкинута монета може впасти на ребро, докотитися по підлозі до ніжки стільця або столу і так і залишитися у вертикальному положенні, а то і взагалі провалитися в широку щілину в підлозі. (По аналогії з електричними схемами дві останні ситуації можна розглядати як несправність у вигляді обгорілого контакту).

В ті далекі часи алгебра Буля, на жаль, широкого поширення не отримала. Знову «відкрив» алгебру Буля Клод Шеннон. У 1938 році, будучи ще студентом Массачусетського технологічного інституту в Америці, молодий Клод довів, що алгебра Буля повністю підходить для аналізу і синтезу релейних і перемикальних схем. З допомогою алгебри Буля можна дуже просто скласти електричну схему автомата, що працює на реле. Для цього, виявляється, потрібно тільки точно знати, що повинен робити автомат, тобто потрібно мати алгоритм його роботи. Так була закладена основа теорії цифрових машин, діючих за принципом ТАК чи НІ.

Література

1. *Клини С.* Математическая логика. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
2. *Новиков П.С.* Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

О.. Богданов
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ДЕЯКІ АСПЕКТИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ П'ЯТОГО ТА ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

Математика, як одна з найстародавніших наук, зародилася з потреб практики. Будівництво, вимірювання площ земельних ділянок, торговельні розрахунки потребували вміння виконувати арифметичні обчислення, а також певних геометричних уявлень. Згодом математика сформувалася у певну систему, як складова частина загального комплексу наукових знань. Потреби природознавства, техніки постійно ставили перед людьми нові задачі, які в свою чергу стимулювали розвиток самої математики. Водночас прогрес в самій математиці підвищував ефективність математичних методів.

Роль математики в різних галузях людської діяльності з часом змінювалася, причому залежала в основному вона від двох факторів: рівня розвитку математичного апарату і ступеня зрілості знань про той чи інший досліджуваний об'єкт, тобто можливості описати найістотніші його властивості мовою математичних понять або, як кажуть, можливості побудувати математичну модель цього об'єкта.

Одним з основних видів математичних моделей є рівняння, вивчення якого починається з найпростішого випадку – одне рівняння першого степеня з одним невідомим, а потім поглиблюється в двох напрямках: перший – розглядаються системи двох і трьох рівнянь першого степеня з двома і, відповідно, трьома невідомими; другий – вивчається одне квадратне рівняння з одним невідомим і деякі окремі типи рівнянь, що легко зводяться до квадратних, наприклад, відоме біквадратне рівняння.

Відсутність формул для розв'язування рівнянь вищих степенів не слід вважати дуже прикрою обставиною. Оскільки коефіцієнти більшості рівнянь, які доводиться розв'язувати фізикам чи інженерам, є величинами, знайденими в результаті вимірювань, тобто наближеними, а тому корені потрібно знати лише наближено, із заданою точністю. Це дало поштовх до розробки різних методів наближеного розв'язку рівнянь – графічних та чисельних.

З появою комп'ютерів роль таких методів особливо зросла, оскільки завдяки їм вдалося істотно розширити клас задач, розв'язуваних за допомогою різних комп'ютерних програм.

Таким чином, постає питання не про практичну можливість відшукання коренів, а про їх існування. Відомо, що існують квадратні рівняння з дійсними коефіцієнтами, які не мають дійсних коренів. Розглядаючи квадратні рівняння, а також рівняння третього та четвертого порядків у множині комплексних чисел, обов'язково відшукаються їхні розв'язки. Виникає питання: чи не знайдеться таке рівняння п'ятого чи вищого степеня, яке не має жодного розв'язку, навіть у множині комплексних чисел і чи не доведеться для відшукання розв'язків таких рівнянь переходити до більш ширшої множини чисел, ніж комплексна множина? Відповідь на це запитання дає так звана основна теорема алгебри, яка стверджує, що кожне рівняння з довільними числовими коефіцієнтами має корені, причому коренів цих стільки, який степінь рівняння.

Вивчення алгебраїчних рівнянь є важливим підгрунттям для розв'язування різних задач з курсу вищої математики, наприклад, для обчислення інтегралів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів, для знаходження коренів характеристичного рівняння, яке виникає при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. При розв'язуванні таких задач виникають рівняння

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

ліву частину яких потрібно подати у вигляді

$$a_0(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n) = 0,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корені рівняння (1).

Відомо те, що корені рівнянь першого, другого, третього та четвертого степенів виражаються через їх коефіцієнти за допомогою скінченної комбінації алгебраїчних дій, тобто ці рівняння розв'язуються в радикалах. Цікаво, чи аналогічна картина спостерігається і для рівнянь степеня, вищого за четвертий? Насправді, це не так. Вдається лише виділити окремі види рівнянь п'ятого степеня, що зводяться до розв'язування рівнянь нижчих степенів або до двочленного рівняння

$$y^5 + q = 0,$$

всі значення коренів якого визначаються за формулою добування кореня комплексного числа: $y = \sqrt[5]{-q}$.

До рівнянь, що розв'язуються в радикалах, належать, зокрема, так зване симетричне рівняння

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

яке можна звести до вигляду

$$a_0(x^5 + 1) + a_1(x^3 + 1)x + a_2(x + 1)x^2 = 0$$

і переконатися, що $x = -1$ є його коренем. Інші корені знайдемо в результаті розв'язування рівняння четвертого степеня, яке дістанемо, прирівнявши до нуля частку від ділення лівої частини рівняння на $x + 1$.

Взагалі, симетричним рівнянням n - го степеня називається алгебраїчне рівняння

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

у якому коефіцієнти при x^n і x^{n-m} рівні.

Ще один тип рівнянь вищих степенів, які розв'язуються в радикалах, є так звані тричленні рівняння, тобто рівняння виду

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

яке заміною $x^n = t$, зводиться до квадратного рівняння.

Література.

1. *Петровський И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 280 с.

2. *Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестук М.О.* Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.

М.П. Купріков
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико математичних наук,*
доцент кафедри прикладної математики та механіки

ІСТОРІЯ НУЛЯ – ВІД НЕБУТТЯ ДО ВЕЛИЧІ

Термін «цифра» в перекладі з арабської означає «нуль». Тільки з часом дане слово почали використовувати для позначення будь-якого чисельного символу.... В основі науки, техніки і математики лежить ніщо. Звичайно, це - ніщо, виражене числом нуль. Щоб повністю усвідомити значення і силу нуля, нам потрібно зазирнути в історію його народження і буремний шлях до слави, який йому довелося пройти.

Концепція нуля існувала з давніх часів. Згадки про неї з'являються час від часу у вавилонських трактатах і написах майя, де нуль використовували для розрахунків календаря. Стародавні вчені використовували нуль для позначення відсутності числа, як ми це робимо в числах 101 чи 102, щоб показати, що в середній позиції немає величини, кратної 10. Минуло майже два тисячоліття, перш ніж нуль у всьому його математичному блиску визнали повноцінними числом. І сталося це в Індії. За словами математика Алекса Беллоса, Індія була ідеальним місцем для цієї події.

Ідея, що ніщо може бути чимось, глибоко вкоренилася в індійську культуру. Якщо існує поняття "нірвани" - стану небуття, в якому всі ваші турботи і бажання зникли, чому б не створити спеціальний символ для позначення відсутності всього? Цей символ назвали словом "*шунья*", яке використовують й досі для позначення як поняття відсутності, так і самого числа нуль.

Хоча всі інші цифри, якими ми користуємося сьогодні, протягом історії кардинально змінили свою форму, нуль від початку позначався колом. Однак, згідно з індійським містицизмом, кругла форма нуля означає коло життя, або, як називали його індуси, "змія вічності" (згорнута в кільце змія символізувала нескінченність).

Сходження числа нуль на вершину слави в VII сторіччі відбулося в першу чергу завдяки індійському астроному Брахмагупті. В математиці число шунья почали використовувати не лише на позначення відсутності іншого числа, але й в обчисленнях, як і будь-яке інше число. Відтепер нуль можна було додавати, віднімати і множити на нього. З діленням все було трохи складніше, але ця проблема посприяла виникненню окремого чудового розділу.

Після того, як нуль завоював позиції в Південній Азії, він вирушив на Близький Схід, де його палко підтримали ісламські вчені і внесли в арабську систему числення, яку ми використовуємо сьогодні. Деякі історики стверджують, що походження нуля в Індії цілком несправедливо стерли з історії, і що насправді наша система числення повинна називатися індійсько-арабською. Однак, попри глибоко духовний та інтелектуальний початок, подальша історія числа нуль сповнена запеклої боротьби. Нуль прийшов до

Європи за часів християнських хрестових походів проти ісламу, коли будь-які ідеї арабів, навіть у математиці, зустрічали зі скепсисом та великою недовірою.

У 1299 році нуль заборонили у Флоренції разом з усіма арабськими цифрами, оскільки вважалося, що вони заохочують шахрайство. Нуль можна легко підробити, перетворивши його на дев'ять, або чому б не додати кілька нулів у кінці рахунку, щоб роздути ціну?

До того ж нуль міг започаткувати небезпечний прецедент, оскільки він був кордоном між додатніми і від’ємними числами, а від’ємні числа узаконювали поняття боргів і грошового кредитування.

Нуль, як і всі арабські цифри, остаточно визнали лише в XV столітті. На той час Оксфордський університет існував вже кілька століть, а завдяки друкарству вже повним ходом поширювалися книжки.

Тріумф нуля відбувся у XVII столітті, коли він став основою декартової системи координат. Однак, увійшовши в силу в добу Відродження, нуль знову спричинив запеклі суперечки. Перш за все стояла проблема ділення на нуль. Ще більш заплутане поняття ділення нуля на нуль лягло в основу одного з розділів математики - математичного аналізу.

Нуль, який розмежовує додатні і від’ємні числа, володіє унікальними математичними властивостями. Це парне, не має знака натуральне число. Додавання і віднімання з нулем нуля ніяк не впливає на число, множення на 0 дає нуль. Ділення на нуль вважається не має сенсу операцією, яка у разі виконання в комп’ютерній програмі може завдати системі істотної шкоди.

Саме у спробі ділення на 0 виявився сенс збою в комп’ютерній системі крейсера ВМФ США «Йорктаун», який відбувся восени 1997 року і призвів до несанкціонованого відключення рухової установки. Некоректне ставлення до числа, що означає «ніщо», перетворило потужний військовий корабель в безпорадну нерухому ціль.

Нуль виникає в областях не тільки чисто математичних. Поріг чутності в акустиці приймається за 0. Бінарне числення, що послужило основою для створення сучасних обчислювальних пристроїв, є позиційною системою числення з основою два. Це означає, що всі дані, що вводяться в комп’ютерні системи, кодуються поєднанням двох символів – одиниці і нуля.

Література:

https://ru.wikipedia.org/wik https://www.bbc.com

СЕКЦІЯ 3

ІСТОРЯ МАТЕМАТИКИ

В. Т. Батюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник Дзюба Л. Ф., кандидат технічних наук, доцент

Фазові портрети коливань одномасової динамічної системи з малим тертям

Навантаження на пружну конструкцію може викликати статичну або динамічну втрату стійкості. Статична втрата стійкості характеризується появою суміжного положення рівноваги. Динамічна втрата стійкості виникає тоді, коли тертя стає від'ємним. Прикладом динамічної втрати стійкості є галопування обледенілих проводів повітряних ліній електропередач від дії вітрового навантаження.

Появу динамічної нестійкості розглянемо на прикладі одномасової динамічної системи з малим тертям (рис. 1). Матеріальна точка масою m підтримується пружною ланкою з жорсткістю c та демпфером з коефіцієнтом в'язкого тертя α, який створює силу опору, пропорційну до швидкості $\dot{x}$ ($F_{\text{оп}} = \alpha\dot{x}$). Диференціальне рівняння руху такої динамічної системи має вигляд [1, 2]:

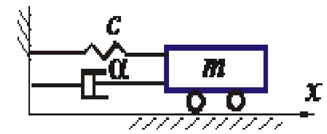


Рис. 1. Розрахункова схема лінійної одномасової динамічної системи з тертям

$$\ddot{x} \pm 2n\dot{x} \pm k^2 x = 0; \qquad (1)$$

де $2n = \dfrac{\alpha}{m}$; $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Диференціальному рівнянню (1) відповідає характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 \pm 2n\lambda \pm k^2 = 0. \qquad (2)$$

Корені цього характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Розглянемо випадок, коли коливання відбуваються за малого додатного або від'ємного тертя $(n^2 < k^2)$. У цьому разі корені характеристичного рівняння (2) комплексно-спряжені з від'ємною $\lambda_{1,2} = -n \pm i\tilde{k}$ або додатною $\lambda_{1,2} = n \pm i\tilde{k}$ дійсною частиною. Розв'язок (1) має вигляд

$$x = ae^{\pm nt}\cos(\tilde{k}t - \varphi), \qquad (3)$$

де знак «мінус» в показнику степеня у разі додатного тертя, знак «плюс» - від'ємного. Після диференціювання (3) отримаємо:

$$\dot{x} = -a \cdot k \cdot e^{\pm nt}\sin(\tilde{k}t - \varphi + \varphi_0), \qquad (4)$$

де $\tilde{k} = k^2 - n^2$, $tg\varphi_0 = \pm\dfrac{n}{\tilde{k}}$.

На фазовій площині ($\dot{x}$, x) за додатного тертя рівняння (3) та (4) зображає сімейство закручених спіралей (рис. 2, а); за від'ємного тертя –розкручених спіралей (рис. 4, а). Особливими точки фазової площини є стійкий (рис. 2, а) або нестійкий (рис. 4, а) фокуси. Зображаючи графік залежності переміщення x від часу t, отримуємо графік згасаючих коливань (рис. 2, б), характерних для коливань маятника у повітрі. У фазовій площині змінних x та $\dot{x}$ наявний стійкий фокус, що переходить у кола чи еліпси для системи без згасання. Тривимірний графік такого асимптотично стійкого руху у просторі змінних x, $\dot{x}$ та t, показаний на рис. 3.

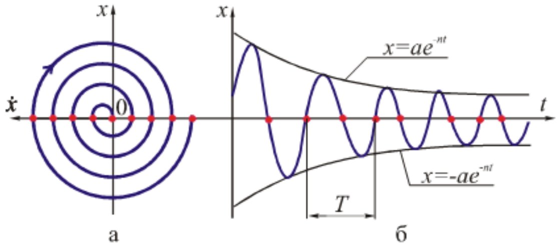


Рис. 2. Стійкий фокус та графік згасаючих коливань лінійної динамічної системи з тертям

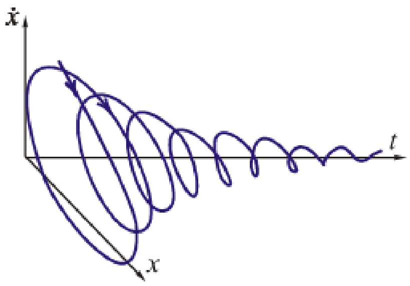


Рис. 3. Траєкторія руху фазової точки у разі стійкого фокуса

У разі нестійкого фокуса (рис. 4, а) рух фазової точки відбувається зі зростанням коливань (рис. 4, б).

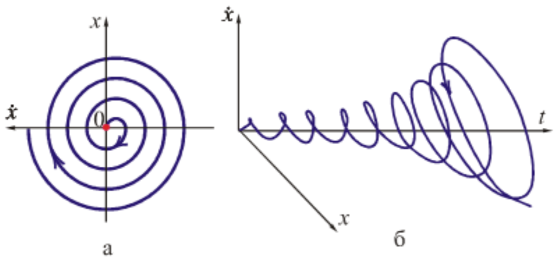


Рис. 4. Нестійкий фокус та траєкторія руху фазової точки

Отже, силова дія на пружну конструкцію може викликати появу від'ємного тертя. У такому разі конструкція втрачає стійкість, коли стійкий фокус переходить у нестійкий. Така втрата стійкості супроводжується наростанням коливного руху. Для уникнення галопування проводів та зменшення амплітуди їх коливань застосовують спеціальні віброгасники та демпферні розпірки.

Література

1. Василенко Н.В. Теория колебаний. / Н. В. Василенко – Киев: Вища школа, 1992. – 430 с.

2. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. – 254 с.

А. П. Романчук
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник Дзюба Л. Ф., кандидат технічних наук, доцент

Потенціальна енергія машини катастроф Зімана

З погляду динаміки система перебуває у стані стійкої рівноваги, коли володіє мінімумом потенціальної енергії. Якщо потенціальна енергія динамічної системи набуває максимального значення або на її графіку є перегини, то стан рівноваги системи є нестійким. Вивчити ці явища детальніше можна за допомогою простої механічної системи, яку називають машиною катастроф Зімана. [1, 2]. Схему машини, яка складається з диска 1 та двох пружних гумок 2, показано на рис. 1. Обидві гумки з'єднані поміж собою та з диском у точці C. Диск може повертатися на кут θ довкола осі, що проходить через точку O. Одну з пружних гумок нерухомо закріплено в точці A. До кінця другої гумки у точці B закріплено олівець. Якщо олівцем натягнути гумку, диск займе певне положення, повернувшись довкола осі. Коли переміщати точку B з олівцем, диск 1 повертається. Виявляється, що за деяких переміщень олівця, мале змінювання його положення здатне викликати катастрофу. Ця катастрофа полягає у тому, що за малих та плавних переміщень олівця, диск раптово стрибком повернеться у нове положення. Якщо відзначити на площині місця всіх таких катастроф, то отримують криву K – криву катастроф.

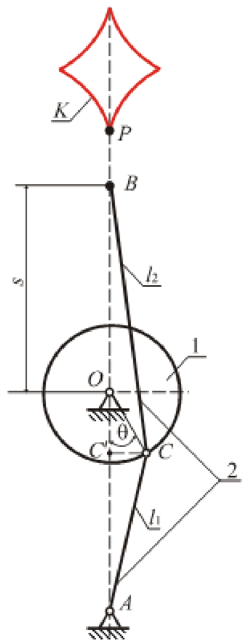


Рис. 1. Схема машини катастроф Зімана

Згідно з [1] приймаємо, що довжини не деформованих гумок однакові та дорівнюють $l=1$, відстань $OC=0{,}5$, відстань $OA=2$. Потрібно визначити положення нижнього вістря кривої катастроф – точки P. З осьової симетрії на рис. 1 зрозуміло, що точка P розміщена на осі симетрії. Коли точка B з олівцем переміщується вздовж осі симетрії, завжди є положення рівноваги, коли $\theta=0$. Відповідно до принципів динаміки, точка P розміщена там, де рівновага змінюється зі стійкої (локальний мінімум потенціальної енергії) на нестійку (локальний максимум потенціальної енергії).

Приймаємо, що l_1 та l_2 є довжинами гумок у положенні, коли диск повернутий на малий кут θ, який близький до нуля, однак не дорівнює нулю ($\theta \neq 0$). За законом Гука потенціальна енергія системи в околі стану рівноваги дорівнює сумі потенціальних енергій деформації обох гумок:

$$\Pi(\theta)=\frac{c}{2}\left(l_1-l\right)^2+\frac{c}{2}\left(l_2-l\right)^2, \qquad (1)$$

де c – коефіцієнт пружності матеріалу гумок. З урахуванням довжин недеформованих гумок вираз для потенціальної енергії запишемо так:

$$\Pi(\theta)=\frac{c}{2}\left(l_1-1\right)^2+\frac{c}{2}\left(l_2-1\right)^2. \qquad (2)$$

Диск повертатиметься на кут θ так, що завжди мінімізувати потенціальну енергію. Отже кут повороту диска θ буде внутрішнім параметром системи.

Визначимо довжини деформованих гумок через задані геометричні параметри та кут θ. За теоремою Піфагора:

$$l_1^2=\left(OA-OC\cos\theta\right)^2+\left(OC\sin\theta\right)^2=\left(2-0{,}5\cos\theta\right)^2+\left(0{,}5\sin\theta\right)^2. \qquad (3)$$

За малого кута θ розкладемо функції $\cos\theta,\ \sin\theta$ в ряди Тейлора:

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-...,\ \sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-...$$

З урахуванням цього вираз (3) набуде вигляду:

$$l_1^2=\left(2-0{,}5\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\theta}{2}\right)^2+O(4),$$

де $O(4)$ позначено функцію 4-го порядку. Після спрощень отримаємо:

$$l_1^2=\frac{9}{4}+\theta^2+O(4)=\frac{9}{4}\left(1+\frac{4}{9}\theta^2+O(4)\right),$$

або

$$l_1=\frac{3}{2}\left(1+\frac{4}{9}\theta^2+O(4)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Для подальших обчислень вираз у дужках в (4) розкладемо в ряд: $\left(1+\frac{4}{9}\theta^2+O(4)\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{9}\theta^2\right)+O(4)$. З урахуванням цього маємо:

$$l_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\theta^2+O(4). \qquad (5)$$

Виходячи з аналогічних міркувань, отримаємо, що:

$$l_2=\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{s}{2(2s+1)}\theta^2+O(4). \qquad (6)$$

Ураховуючи (5) та (6) в (2), отримуємо для потенціальної енергії машини катастроф залежність:

$$\Pi(\theta)=\frac{c}{2}\left[\frac{1}{4}+\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\theta^2\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{s(2s-1)}{2(2s+1)}\right]+O(4). \qquad (7)$$

За виразом (7) можна визначити потенціальну функцію для катастрофи збірки.

Література

1. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 607 с.

2. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. – 254 с.

Кравченко К.Е., Кметь Р.Р., Коток А.Ю.
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: **Петрученко** О.С.**,** кандидат технічних наук

МАТЕМАТИКА І ВІЙСЬКО: ІСТОРИЧНИЙ АСПЕКТ

Немає обов'язку почеснішого і необхіднішого, ніж захищати Батьківщину. Проте на скільки у військових професіях потрібна математика? Уже в давньоєгипетських папірусах і шумеро-вавілонських клинописних табличках знаходимо поради щодо застосування математики у військовій справі. Для воєначальників, інтендантів наводилися зразки розв'язання практичних задач: визначити кількість воїнів, які можуть викопати рів за певний час, або знайти час, за який загін воїнів може здійснити перехід на певну відстань.

З часом математика стала одним з найпотужніших інструментів пізнання і використання на практиці законів збройної боротьби та самозахисту. З великим успіхом застосовував її у військовій справі геніальний давньогрецький математик Архімед, який керував обороною Сіракуз від римських армій і загинув від меча римського воїна.

Уславленому полководцеві О.В. Суворову належить блискучий афоризм: ”Математика - гімнастика розуму”. Він заради перемоги вмів усе розрахувати. Неоцінена заслуга математиків у вдосконаленні військової техніки. М.В. Остроградський математично розрахував таку конструкцію гармати, тиск порохових газів у якій обертав навколо осі спеціально виготовлені снаряди, що забезпечувало велику дальність польоту.

Особливо важливою була роль математики в створенні й удосконаленні нової бойової техніки. Вона народжувалась на міцному фундаменті теоретичних досліджень математиків. Візьмемо, наприклад, авіацію, де участь математики вражаюча. Розв'язання математиками проблем аеродинаміки дало змогу авіаконструкторам досягти блискучих результатів у вдосконаленні бойових літаків.

Конструктори бойової техніки творчо використовували здобутки вчених старшого покоління. Так, результати К.Е. Ціолковського з ракетної техніки були використані при створенні прославлених “Катюш”, які наводили жах на ворога. Спроби застосувати математику для описання збройного протистояння та прогнозу його розвитку робилися ще в XVIII ст. Вони пов'язані з іменами Генріха Ллойда та Генріха Дітріха Бюлова. Ллойд досліджував кількісний зв'язок між різними факторами, що впливають на хід та результат бою. Брюлов продовжив початі Ллойдом дослідження і суттєво розширив сферу використання математики у воєнному мистецтві. Проте ці дослідження мали серйозні недоліки і до початку XIX ст. втратили своє значення.

Наступна спроба математизувати воєнне мистецтво належить англійському математику Ф. Ланчестеру. У своїй роботі «Війна та повітряні сили» (1916р.) він ввів рівняння, що описують залежність втрат військ від їх концентрації при застосуванні різних типів зброї. Саме ці рівняння є основою для наукового дослідження законів ведення війни з метою скоротити терміни підготовки та прийняття рішень і підвищити їх якість, досягнути наявними силами та засобами найкращих результатів бойових дій. Дослідження диференціальних рівнянь Ланчестера, а також побудованих на їх базі розширених та ускладнених моделей, з використанням ПК дає можливість побудувати довгостроковий прогноз бойових рішень, здійснити аналіз будь-яких можливих варіантів рішень, визначити найбільш ефективні способи досягнення кінцевої мети, бойових дій та операцій.

Історичний досвід показує, що розвиток способів та форм збройного протистояння і його ведення протікає не хаотично, а закономірно, в певному порядку. Ці закономірності відображають об'єктивні процеси у веденні бойових дій. Вони викликаються певними причинами в результаті взаємодії різноманітних матеріальних та соціально-політичних обставин, що визначають хід збройного протистояння.

Вказане служить базою для побудови математичних моделей, які найчастіше описуються диференціальними рівняннями. Диференціальні рівняння отримують з умов, що зв'язують параметри модельованої системи, користуючись фізичним змістом похідної: якщо $x = x(t)$ – певний параметр моделі, що залежить від часу t, то його похідна $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ є швидкістю за змінною x, відповідно друга похідна $\ddot{x}$ – пришвидшенням. Очевидне обмеження, що накладаються на функцію x: вона повинна бути диференційованою.

З урахуванням вказаних спрощень математичною моделлю ведення бою є, система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -s_x y; \\ \dot{y} = -s_y x. \end{cases} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{2}$$

де $x(t)$ – чисельність армії однієї із ворогуючих сторін (назвемо їх «синіми») в момент часу t, $y(t)$ – чисельність армії другої сторони («червоних»), x_0, y_0 – початкова чисельність армії синіх та червоних відповідно. Середня ефективність стрільби «синіх» і «червоних» задається константами s_x і s_y. Наприклад, якщо $s_y = 0{,}7$, то в середньому з кожних 10 пострілів «червоних» 7 вражають солдатів противника. Таким чином, параметри s_x і s_y характеризують технічні характеристики зброї і навики солдат, які її використовують, а також тактичну грамотність і досвід командирів.

Отже, вища математика є важливою складовою при підготовці майбутніх офіцерів-командирів.

Ю. Ненека
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.Ф. Стасюк**, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

АФІННІ ШИФРИ

Криптографія сьогодні $-$це найважливіша частина всіх інформаційних систем: від електронної пошти до стільникового зв'язку, від доступу до мережі Internet до електронної готівки.

В цьому повідомленні розглянемо один з видів афінного шифру простої заміни$-$*лінійний шифр* .

Афінний лінійний шифр використовує в якості ключа два числа. Ці числа визначають лінійну залежність порядкових номерів символів криптотексту від порядкових номерів відповідних символів відкритого тексту в алфавіті, який використовується. Афінний шифр$-$це частковий випадок більш загального моноалфавітного шифру підстановки.

Опис алгоритму шифрування. Нехай задано алфавіт розміру m(тобто алфавіт складається з m літер). Перенумеруємо букви цього алфавіту числами з діапазону $0,...,m-1.$

Ключ: пара чисел $a,b,\ \ 0<a,b<m,$ НСД$(a,m)=1,$ тобто числа a і $m-$взаємно прості.

Шифрування: У повідомленні, яке потрібно зашифрувати, кожна літера x замінюється літерою

$$E(x)\equiv ax+b \mod m.$$

Дешифрування: У криптотексті кожна літера x' замінюється літерою

$$D(x')\equiv a^{-1}(x'-b) \mod m,$$

де $a\cdot a^{-1}\equiv 1 \mod m$. Число $a^{-1},$ яке є основою для дешифрування, називається *інверсією* числа a відносно числа $m.$ Це число можна знайти або, використовуючи алгоритм Евкліда в кільці $\mathbb{Z},$ або розв'язавши лінійну конгруенцію $a\cdot a^{-1}\equiv 1 \mod m$ методом ланцюгових дробів.

Легко переконатись, що описане шифрування коректне. Дійсно,

$$D(E(x))\equiv a^{-1}(E(x)-b) \mod m\equiv$$
$$\equiv a^{-1}\big(((ax+b)\mathrm{mod}\, m)-b\big) \mod m\equiv$$
$$\equiv a^{-1}(ax+b-b) \mod m\equiv x \mod m.$$

Приклад 1.. Маючи ключ $3,4$ розшифрувати криптотекст EJJEKIEJNESR в англійському алфавіті, який складається з 26 літер. Зауважимо, що перша літера алфавіту нумерується числом $0.$

Для дешифрування потрібно знайти інверсію числа 3 відносно числа $26.$ Застосувавши алгоритм Евкліда до чисел 26 і 3, знайдемо $a^{-1}=9.$ Легко перевірити, що $3\cdot 9=27\equiv 1 \mod 26.$

Дешифрування доцільно подати таблицею

Криптотекст	E	J	J	E	K	I	E	J	N	E	S	R
x'	4	9	9	4	10	8	4	9	13	4	18	17
$9(x-4)\bmod 26$	0	19	19	0	2	10	0	19	3	0	22	13
Відкритий текст	A	T	T	A	C	K	A	T	D	A	W	N

Отже ми отримали відкритий текст ATTAC AT DAWN, який можна перекласти так : АТАКА НА СВІТАНКУ.

Приклад 2. Використовуючи ключ $5,1,$ розшифрувати криптотекст ЙБІЇВБ в українському алфавіті. Розв'язавши конгруенцію $5x \equiv 1 \bmod 33,$ знайдемо $x = 5^{-1} = 20.$ І знову подамо дешифрування таблицею

Криптотекст	Й	Б	І	Ї	В	Б
x'	13	1	11	*12*	*2*	*1*
$20(x-1)mod33$	9	0	2	*22*	*20*	*0*
Відкритий текст	З	А	В	Т	Р	А

Криптоаналіз. У разі шифрування повідомлень українською мовою (m = 33) існує 297 нетривіальних афінних шифрів, не враховуючи 33 тривіальні шифри Цезаря. Це число легко порахувати, знаючи, що існує всього 20 чисел взаємно простих з 33 і менших 33 (а це і є можливі значення a). Кожному значенню a можуть відповідати 33 різних додаткових зсуви (значення b); тобто всього існує 660 можливих ключів. Аналогічно, для повідомлень англійською мовою (тобто m = 26) існує 312 можливих ключів . Така обмежена кількість ключів призводить до того, що система вкрай не крипостійка з точки зору принципу Керкгоффсаю

Основна вразливість шифру полягає в тому, що криптоаналітик може з'ясувати (шляхом частотного аналізу, повного перебору , вгадування або будь-яким іншим способом) відповідність між двома довільними літерами вихідного тексту і криптоотексту. Тоді ключ може бути знайденим шляхом розв'язання системи рівнянь. Крім того, оскільки a і m - взаємно прості, це дозволяє зменшити кількість перевірених ключів для повного перебору.

На кінець слід зауважити, що афінний шифр використовувався на практиці кілька століть тому, а сьогодні його застосування обмежується здебільшого ілюстраціями основних криптологічних положень.

Література:

1. Вербіцький О.В. Вступ до криптології / О.В.Вербіцький. –Львів.: ВНТЛ, 1998. –246с.

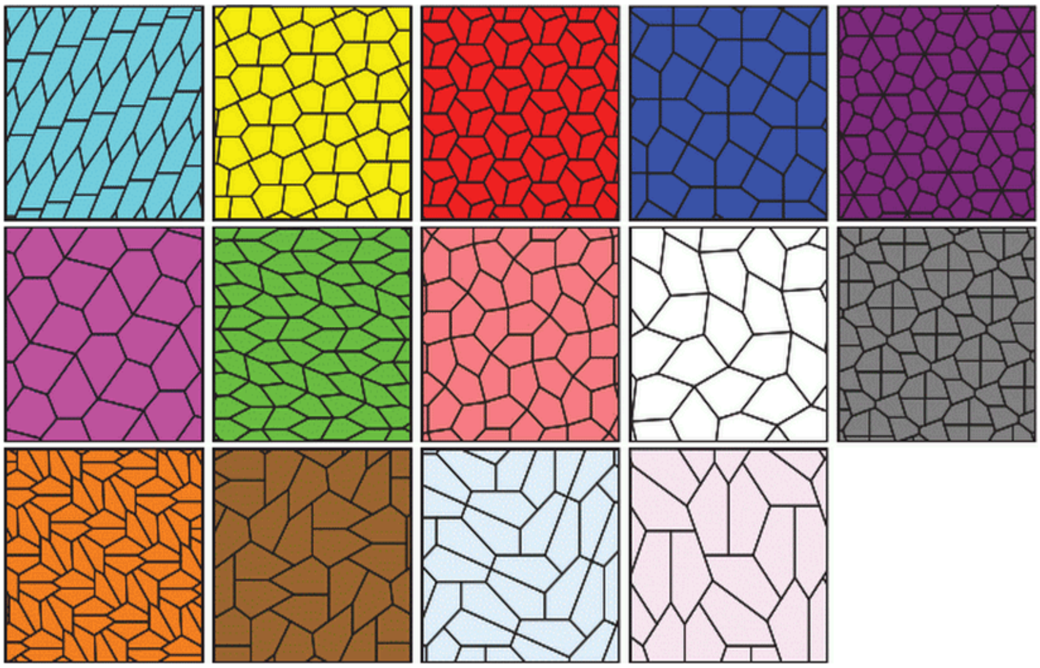
М.М. Гулковський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О. Карабин**, доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПРОБЛЕМА П’ЯТИКУТНИКІВ

У світі математики сенсація: відкрито новий вид п'ятикутників, що покривають площину. Пошук таких фігур вже сто років є однією з найцікавіших математичних задач. П'ятикутник залишаються єдиною фігурою, відносно якої зберігається невизначеність і загадка. Це всього 15-й вид таких п'ятикутників і перший, відкритий за останні 30 років. Площина покривається трикутниками і чотирикутниками будь-якої форми, а от з п'ятикутниками все набагато складніше і цікавіше. Правильні п'ятикутники не можуть покрити площину, але деякі неправильні п'ятикутники можуть. Пошук таких фігур вже сто років є однією з найцікавіших математичних задач.

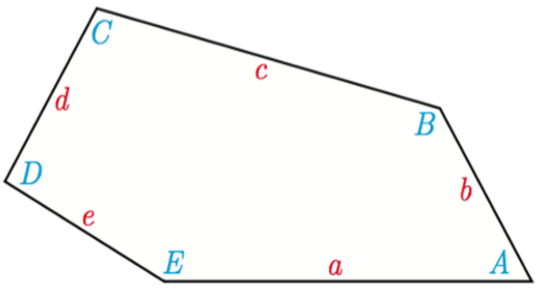
Квест почався в 1918 році, коли математик Карл Рейнхард відкрив п'ять перших підходящих фігур. Довгий час вважалося, що Рейнхард розрахував всі можливі формули і більше таких п'ятикутників не існує, але в 1968 році математик Р.Б. Кершнер знайшов ще три, а Річард Джеймс в 1975 році довів їх число до дев'яти. У тому ж році 50-річна американська домогосподарка і любителька математики Марджорі Райс розробила власний метод нотації і протягом декількох років відкрила ще чотири п'ятикутники. Нарешті, в 1985 році Рольф Штайн довів число фігур до чотирнадцяти.

П'ятикутники залишаються єдиною фігурою, відносно якої зберігається невизначеність і загадка. У 1963 році було доведено, що існує всього три види шестикутників, що покривають площину. Серед опуклих семи-, восьми- і так далі -кутників таких немає. А от з "Пентагоном" поки не все ясно до кінця.
До сьогоднішнього дня було відомо всього 14 видів таких п'ятикутників. Вони зображені на ілюстрації.



Проблема класифікації опуклих п’ятикутників, якими можна замостити площину, є красивою і досить простою математичною задачею, доступною для розуміння навіть дітям. Ця проблема вже протягом ста років не має повного вирішення. Розв’язок цього завдання з 18-ї проблемою Гільберта.

Протягом 30 років ніхто не міг знайти нічого нового, і ось нарешті довгоочікуване відкриття! Його зробила група вчених з Вашингтонського університету: Кейсі Манн, Дженніфер Маклауд і Девід Деро. Ось як виглядає маленький красень.



$A = 60^\circ$ $\qquad a = 1$

$B = 135^\circ$ $\qquad b = 1/2$

$C = 105^\circ$ $\qquad c = \dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$

$D = 90^\circ$ $\qquad d = 1/2$

$E = 150^\circ$ $\qquad e = 1/2$

"Ми відкрили фігуру за допомогою комп'ютерного перебору великої, але обмеженої кількості варіантів, – каже Кейсі Манн. – Звичайно, ми дуже схвильовані і трохи здивовані, що вдалося відкрити новий вид п'ятикутника". Відкриття здається чисто абстрактним, але насправді воно може знайти практичне застосування. Наприклад, у виробництві обробної плитки.

Пошук нових п'ятикутників, що покривають площину, напевне продовжиться.

Література

Бевз Г.П. Геометрія паркетів/Г.П. Бевз. – К.: Вежа, 2007. – 88с.

Д.Я. Хілюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико математичних наук,*
доцент кафедри прикладної математики та механіки

ІСТОРІЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Інтегрування зустрічається ще в давньому Єгипті, приблизно у 1800 до н.е., єгипетський математичний папірус демонструє знання формули об’єму січної піраміди. Першим відомим методом для розрахунку інтегралів є метод вичерпання Евдокса (приблизно 370 до н. е.), який намагався знайти площі і об’єми, розбиваючи їх на нескінченну кількість частин, для яких площа або об’єм вже відомий. Цей метод був підхоплений і розвинутий Архімедом, і використовувався для розрахунку площ парабол і наближеного розрахунку площі круга. Аналогічні методи були розроблені незалежно в Китаї у 3-ому столітті н.е. Лю Хуейєм, який використовував їх для знаходження площі круга. Цей метод був згодом використаний Дзю Чонгши для знаходження об’єму кулі.

Фундаментальний внесок Евдокса в математику складає метод вичерпання, що отримав таку назву в XVII ст. і застосовувався стародавніми при доведенні теорем, пов’язаних з обчисленням площ, об’ємів й інших величин. Він вважається першим варіантом теорії границь. Архімед удосконалив метод вичерпання Евдокса і успішно користувався ним для доведення багатьох теорем. Тут і закладені початки інтегральних методів. Дуже важливим для становлення інтегрального числення було удосконалення Архімедом ідеї Демокріта про розбиття плоских фігур на елементарні полоси, що «заповнюють» фігури, і тіла на шари, що заповнюють їх. Таких елементарних частин могло бути нескінченна множина або скінченне число. Цими діями Архімед передував ідеям Кеплера і Кавальєрі у визначенні числових характеристик різних геометричних об’єктів.

Наступними, хто зробив неабиякий вклад у застосування інтеграла стали Готфрід Вільгельм Лейбніц та Ісаак Ньютон. У 1708 році спалахнув сумно відомий спір Лейбніца з Ньютоном про науковий пріоритет відкриття диференціального числення. Відомо, що Лейбніц і Ньютон працювали над диференціальним численням. Відомо також, що Ньютон створив свою версію математичного аналізу, «метод флюксий», хоч і опублікував свої результати лише багато років потому. Лейбніц першим опублікував числення нескінченно малих і розробив символіку, яка виявилася настільки зручною, що її використовують і на сьогоднішній день $\int$.

Формула Ньютона-Лейбніца – дає співвідношення між операціями обчислення визначеного інтеграла для обчислення первісної. Формула Ньютона-Лейбніца – основна формула інтегрального числення.

Після знаменного часу Ньютона і Лейбніца розвиток ідеї інтеграла пішов в двох напрямах: інтеграл, що трактувався як межа деякої суми, певний інтеграл, знаходив більше застосування при вирішенні задач самої математики, механіки, фізики, проник в технічні науки і став використовуватись у всіх галузях природних наук. Клас інтегровних функцій весь час поповнювався.

Найважливіше застосування невизначеного інтеграла відноситься до інтегрування диференціальних рівнянь, складових могутнього апарату багатьох наук.

Незважаючи на стрімкий розвиток використання цієї формули, вчені зіштовхнулись с деякими проблемами. Обчислення деяких інтегралів по формулі Ньютона – Лейбніца містило в собі деякі парадокси. Першим звернув на це увагу Д'Аламбер в 1768 році – помітив, що формулою Ньютона–Лейбніца не можна користуватися при обчисленні інтегралів у яких підінтегральна функція на проміжку інтегрування перетворюється в нескінченність. Альтернативний спосіб вирішення цієї проблеми запропонував Огюстен Луї Коші. Невизначений інтеграл Коші ввів як частинний випадок визначеного, при змінній верхній межі. Він довів неперервність такого інтеграла по верхній межі і теорему про те, що похідна його по верхній межі рівна підінтегральній функції. Коші довів також справедливість формули Ньютона-Лейбніца. Він висловив положення, пов'язані з диференціюванням і інтегруванням по параметру.

Здавалося б, всі варіанти використання та вдосконалення як визначеного, так і невизначеного інтеграла розглянуті та широко використовуються математиками того часу, але все в нашому житті потребує вдосконаленню та інтерпретації. Так у 1912 році з'явилося узагальнення інтеграла Лебега – інтеграл А. Данжуа (1884-1973), що викликав нові дослідження. У 1930 р. А .І. Колмогоров опублікував роботу, у котрій охопив усі інтеграли як межі різних інтегральні сум. Інтеграл Колмогорова знайшов застосування в математичній фізиці, при математичному обґрунтуванні квантової механіки.

У розвиток поняття інтеграла, окрім Колмогорова, зробили значний внесок і інші математики. Це П. Л. Чебишев (1821-1894), А. А. Марков (1856-1922), А.М. Ляпунов, ІІ. Н. Лузін (1883-1950), А. Я. Хінчін (1894-1959).

Література

1. Вірченко Н.О. Нариси з методики викладання вищої математики. – К. 2006. – 396 с.

О. Бомко
Львівський Державний Університет Безпеки Життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І.Кусій,*** *кандидат педагогічний наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Родоначальником теорії графів є відомий швейцарський, німецький і російський математик та фізик Леонард Ейлер. У 1736 році в одному зі своїх листів він формулює і пропонує розв’язання задачі про сім Кенігсберзьких мостів, що стала згодом однією з класичних задач теорії графів. Теорія графів розглядається як одна з гілок топології; безпосереднє відношення вона має також до алгебри і до теорії чисел. Графи ефективно використовуються в теорії планування та управління, теорії розкладів, соціології, математичній лінгвістиці, економіці, біології, медицині, географії.

Граф – це множина деяких точок та спосіб їх з’єднання. Прикладами є генеалогічне дерево, схема водопостачання, електропостачання, процесу виробництва, блок-схема алгоритмів та ін.

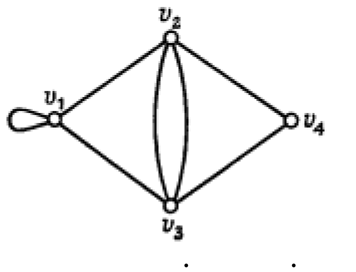
Графом G називається непорожня множина елементів V(G) – вершин графа і скінченна сукупність E(G) невпорядкованих пар елементів з V(G) - ребер.

Існують різні способи задання графів, серед яких найбільш зручними та тими, що широко застосовуються є такі: аналітичний, геометричний, матричний**.**

Геометричне зображення графа є у багатьох випадках символічним та ілюструє зв’язки між вершинами, доцільно задавати граф аналітично. Для цього використовують матриці.

Матрицею суміжності графа G з множиною вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ називаєтьтся матриця $A=(a_{ij})$ розміру nxn, у якій кожен елемент a_{ij} дорівнює кількості ребер, які з’єднують вершини v_i та v_j.

Наприклад, для графа



матриця суміжності записується у вигляді

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

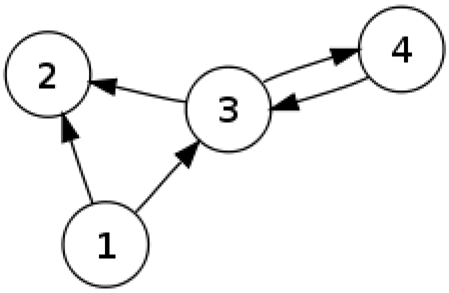
За будь-якою матрицею суміжності можна побудувати орієнтовний граф. Тому замість графів можна розглядати відповідні матриці.

Окрім матриці суміжності, для простого графа з множиною вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ і множиною ребер $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ будують і матрицю інцидентності,

$A=(a_{ij})$ розміру mxn, у якій кожен елемент a_{ij} дорівнює 1, якщо вершина v_j інцидентна ребру e_i і 0 – у протилежному випадку.

Для орієнтованих графів у матриці інцидентності використовують не лише 0 та 1, а і –1. У цьому випадку 1 ставлять тоді, якщо дуга є початком у даній вершині, –1 – її кінцем.

e1=(1,2), e2=(1,3), e3=(3,2), e4=(3,4), e5=(4,3)



$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

З допомогою графів зображають хімічні сполуки, різноманітні процеси та взаємозв’язки у різноманітних галузях. Проте є задачі, які розв’язуються за допомогою теорії графів.

Задача про мережу доріг.

Потрібно n міст сполучити мережею доріг, щоб хоча з будь-якого міста можна було б добратися до іншого, а сумарна довжина доріг була б найменшою.

Цю задачу називають також задачею про мінімальну зв’язку. Мовою графів ми повинні знайти мінімальний підграф (або скелет) зв’язного графа, вершинами якого є міста.

Отже, теорію графів можна застосовувати для відображення зв’язків між елементами, описати аналітично у вигляді матриць суміжності та інцидентності, а також використовувати при розв’язуванні різноманітних задач.

Література:

1. Спекторський І. Я. Дискретна математика.— К.: «Політехніка»,. 220 с. ISBN966-622-136-5
2. Бєлов В. В., Воробйов Є. М., Шаталов В. Є. Теорія графів— М .: Вища. школа, 1976. — С. 392.
3. Берж К. Теорія графів та її застосування. М.: ІЛ, 1962. 320с.

СЕКЦІЯ 4

МАТЕМАТИКА І СУЧАСНІСТЬ

В.С. Токарська
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПРОГРАМНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СЕРЕДОВИЩІ GPSS

При створенні програм імітаційного моделювання виникають завдання, загальні для широкого класу моделей. Це організація псевдопаралельного виконання алгоритмів, динамічний розподіл пам'яті, операції з модельним часом, імітація випадкових процесів, ведення масиву подій, збір і обробка результатів моделювання. Для полегшення вирішення цих завдань створені спеціальні проблемно-орієнтовані засоби (програмні системи), які називаються мовами моделювання. За структурою і правилами програмування мови моделювання подібні до алгоритмічних мов високого рівня. Одна з найбільш поширених мов моделювання є GPSS / PC (General Purpose Simulating System) – загальноцільова система моделювання, що реалізується на персональному комп'ютері. Система GPSS орієнтована на клас об'єктів, процес функціонування яких можна представити у вигляді безлічі станів і правил переходу з одного стану в інший, що визначаються в дискретній просторово-часовій області. Прикладами таких об'єктів є виробничі і обчислювальні системи, комп'ютерні мережі, системи передачі повідомлень тощо. В якості формальних моделей таких об'єктів використовують системи масового обслуговування, автомати, стохастичні мережі, мережі Петрі і т.п. Система GPSS / PC містить більше 40 програмних блоків і набір функціональних об'єктів у вигляді транзактів, черг, пристроїв, функцій і т.д. Кожен з функціональних блоків і об'єктів являє собою набір програмних засобів, що виконують ті або інші функції. Функціональний об'єкт має свої стандартні числові атрибути (СЧА). Транзакти (транзакції ТА) імітують користувачів системи, заявки до системи, вимоги, звернення до системи і т.д. Кожен транзакт має індивідуальний номер, номер блоку, в якому він знаходиться, і набір стандартних числових атрибутів.

Розглянемо побудову імітаційної моделі засобами GPSS World на наступному прикладі складної математичної задачі систем масового обслуговування. Кожні 11 ± 5 хвилин на верстат для обробки надходить деталь. Час обробки деталі на верстаті дорівнює 9 ± 3 хвилини. Деталі, очікують обробки, тимчасово зберігаються на стелажі. Потрібно визначити необхідну ємність стелажа і відсоток часу, протягом якого верстат буде простоювати при обробці тисячі деталей. Модель складається з трьох основних елементів:

1. Введення транзактів (деталей) у модель з інтервалом часу 11 ± 5хв.

2. Черга (стелаж). Транзакти проходять вільно через чергу, якщо розташований за нею пристрій вільний. Якщо ж пристрій зайнятий, то транзакт затримується в черзі до тих пір, поки вона не звільниться.
3. Пристрій (верстат). Після того як в пристрій входить транзакт, він протягом деякого часу (9 ± 3 хв.) вважається зайнятим (верстат обробляє деталь). Після закінчення цього часу транзакт виходить з пристрою, і він може почати обслуговування іншого транзакта.

Програмний код, графічна реалізація програми та звіт представлені на рис.1.

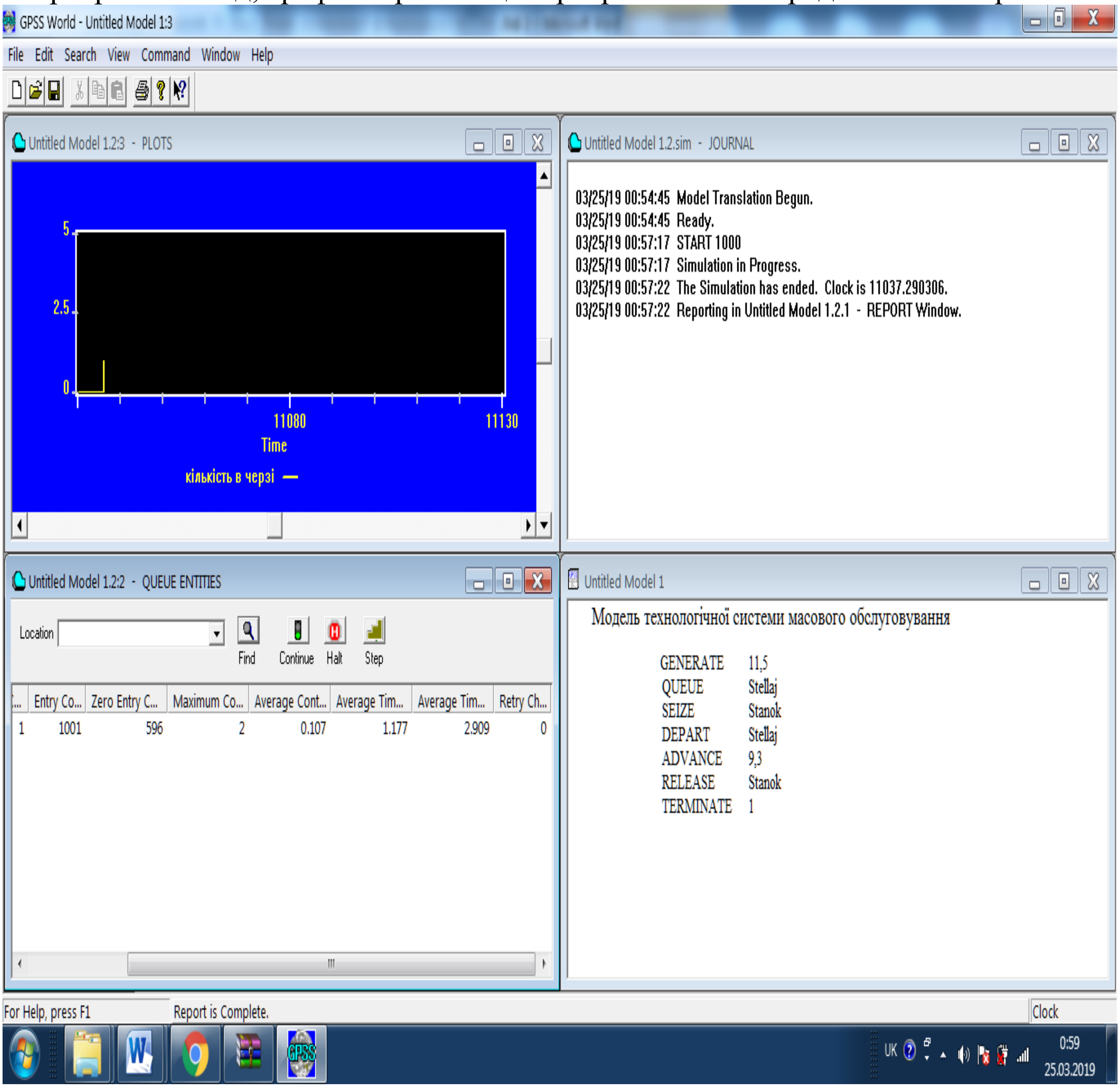


Рис.1.

Із звіту програми випливає, що максимальний розмір черги становить 2. Також у звіті є багато практично необхідних числових розв'язків задачі: середній час очікувння в черзі, кількістьст «нульових» входів, тощо.

Література:

1. 0. Шарапов О. Д., Дербенцев В. Д., Семьонов Д. Є. Системний аналіз. – К.: КНЕУ, 2003. – 154 с.

В.О. Олійник
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Чмир О.Ю.****, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

СТАНОВЛЕННЯ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Кожна людина щодня, не завжди усвідомлюючи це, вирішує проблему отримання найбільшого ефекту, при витраті певних коштів. Кошти і ресурси є обмеженими величинами, а тому доводиться діяти дуже обдумано, для того щоб домогтися бажаного. Щоб досягти найбільшого ефекту, маючи обмежені кошти, треба скласти план, або програму дій. При вирішенні простих завдань припустимо можна використовувати методи, запропоновані ще в Давньому Єгипті, при будівництві першої піраміди. Відоме достовірне джерело – Папірус Ринда – колекція математичних задач, що включає в себе завдання розрахунку обсягу і число цегли, необхідних для піраміди, розрахунок темпів будівництва, дозвіл забезпечення працівників харчуванням, відпочинком, інструментами.

Однак, зростаюча складність технологічного виробництва, нові вимоги до швидкості розрахунків, породили нове знання. У 1938 році Л. В. Канторович розглянув задачі максимізації лінійної форми багатьох змінних при наявності великої кількості обмежень у формі лінійних рівностей та нерівностей. У 1939 році Л. В. Канторович опублікував роботу «Математичні методи організації і планування виробництва», в якій описав завдання економіки з використанням математичних методів і тим самим заклав основи лінійного програмування. Алгоритмічні методи, що дозволяють вирішити більш загальну задачу, що включає пов'язане виробництво і безліч можливих способів виробництва кожного продукту, які пізніше стали відомі як лінійне програмування або лінійна оптимізація, отримали нагороди Нобелівської преміями [1]. Про своє відкриття він писав: «...Я виявив, що широкий діапазон завдань найрізноманітнішого характеру, що стосуються наукової організації виробництва (питання оптимального розподілу роботи машин і механізмів, мінімізації відходів, кращого використання сировини і місцевих матеріалів, палива, транспортування, і так далі), призводить до формулювання єдиної групи математичних задач (екстремальні задачі).... »

У програмі Maple вбудовано пакет для розв’язання задач лінійного програмування simplex, який базується на симплекс-методі. Продемонструємо його на задачі про планування виробництва.

Задача. Підприємство виготовляє три типи шкіряних виробів: *А, Б* та *В*. Кожний тип продукції повинен пройти принаймні дві з трьох виробничих дільниць, які називаються дубильною, розкрійною і завершальною. Робочий час кожної дільниці протягом місяця обмежений так: дубильна – 320 годин на місяць, розкрійна – 400, завершальна – 160. На виготовлення одиниці продукції типу *А* потрібно 0,2 години роботи дубильної дільниці, 0,6 годин роботи розкрійної і 0 годин завершальної. На виготовлення типу *Б* потрібно 0,3 год., 0,5год. і 0 год. на виготовлення типу *В* – відповідно 0,4 год., 0,4 год. і 0,8год. Із врахуванням накладних витрат прибуток від кожної одиниці продукції становитиме 6 грн. для типу *А*, 7 грн. для типу *Б* і 10 грн. для типу *В*. Знайти максимально можливий прибуток підприємства за місяць роботи [2].

Дані задачі запишемо у вигляді таблиці.

Тип шкіряних виробів / **Виробничі дільниці**	***А***	***Б***	***В***	**Робочий час**
Дубильна	0,2 год.	0,3год.	0,4 год.	320 год.
Розкрійна	0,6 год.	0,5 год.	0,4 год.	400 год.
Завершальна	0 год.	0 год.	0,8 год.	160 год.
Прибуток за одиницю продукції	6 грн.	7 грн.	10 грн.	

Математична модель виробничого процесу має вигляд: знайти найбільше значення прибутку $F(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 7x_2 + 10x_3 \to \max$ за умови виконання обмежень

$$0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,4x_3 \le 320,$$
$$0,6x_1 + 0,5x_2 + 0,4x_3 \le 400,$$
$$0,8x_3 \le 160,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

де x_1, x_2, x_3 – кількість одиниць готової продукції відповідно *А*, *Б* та *В*.

Використовуючи програму Maple, розв'язування цієї задачі є досить простим [3].

```
> restart;
```

Підключаємо пакет ***simplex***

```
> with(simplex) :
```

Задаємо функцію мети ***f*** та систему обмежень -- нерівностей ***ineq***

```
> f := 6·x1 + 7·x2 + 10·x3; ineq := {0.2·x1 + 0.3·x2 + 0.4·x3 ≤ 320, 0.6·x1 + 0.5·x2 + 0.4·x3 ≤ 400, 0.8
      ·x3 ≤ 160, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, x3 ≥ 0};
```

$$f := 6\,x_1 + 7\,x_2 + 10\,x_3$$

$$ineq := \{0 \le x_1,\ 0 \le x_2,\ 0 \le x_3,\ 0.8\,x_3 \le 160,\ 0.2\,x_1 + 0.3\,x_2 + 0.4\,x_3 \le 320,\ 0.6\,x_1 + 0.5\,x_2 + 0.4\,x_3 \le 400\} \qquad (1)$$

Знаходимо максимум функції ***f*** при заданій системі обмежень -- нерівностей ***ineq***

```
> maximize(f, ineq);
```

$$\{x_1 = 0.,\ x_2 = 640.0000000,\ x_3 = 200.\} \qquad (2)$$

Знаходимо максимальне значення функції ***f*** в оптимальній точці

```
> assign(%); f;
```

$$6480.000000 \qquad (3)$$

Література

1. *Попов Ю.Д.* Линейное и нелинейное программирование: Учеб. пособие. – К.: Изд-во КГУ, 1988. – 188 с.

2. *Карр Ч., Хоув Ч.* Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. – М.: Мир, 1966. – 464 с.

3. *Прохоров Г. В., Леденев М. А., Колбеев В. В.* Пакет символьных вычислений Maple V / Г. В. Прохоров, М. А. Леденев, В. В. Колбеев – М: Компания Петит, 1998. – 198 с.

В.П. Вередюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Васильєва О.Е.,*** *кандидат технічних наук, доцент, полковник служби цивільного захисту*

МАТЕМАТИКА В НАУКАХ ТА ЖИТТІ ЛЮДИНИ

Якщо уважно подивитися по сторонах, роль математики в житті людини стає очевидною. Комп'ютери, сучасні телефони та інша техніка супроводжують нас кожен день, а їх створення неможливе без використання законів і розрахунків великої науки.

Для початку варто зрозуміти, що взагалі являє собою математика. У перекладі з давньогрецької сама її назва означає «наука», «вивчення». В основі математики лежать операції підрахунку, вимірювання та опису форм об'єктів. Властивості реальних об'єктів ідеалізується і записуються на формальній мові. Так відбувається їх перетворення в математичні об'єкти. Частина ідеалізованих властивостей стають аксіомами. З них потім виводяться інші справжні властивості. Так формується математична модель реально існуючого об'єкта.

Математику можна поділити на дві взаємодоповнюючі частини. Теоретична наука займається глибоким аналізом внутрішніх математичних структур. Прикладна - надає свої моделі іншим дисциплінам. Фізика, хімія, астрономія, інженерні системи, прогнозування і логіка використовують математичний апарат постійно. З його допомогою робляться відкриття, виявляються закономірності, предугадиваются події. У цьому сенсі значення математики в житті людини неможливо переоцінити.

Однак не настільки очевидна роль математики в житті людини. Сліди цариці наук присутні і в гуманітарних знаннях. Здавалося б, поезія — суцільна романтика і натхнення, ній немає місця аналізу і розрахунку. Однак досить згадати віршовані розміри (ямб, хорей, амфибрахий), як приходить розуміння, що математика і тут доклала свою руку. Ритм, словесний або музичний, також описується і прораховується з застосуванням знань цієї науки.

Для письменника або психолога часто такі важливі поняття, як достовірність інформації, одиничний випадок, узагальнення і так далі. Всі вони або безпосередньо є математичними, або будуються на основі закономірностей, розроблених царицею наук, існують завдяки їй та за її правилами.

Дорослі люди після закінчення університету або коледжу не перестають щодня вирішувати математичні завдання. Як встигнути на поїзд? Вийде з кілограма м'яса приготувати вечерю для десяти осіб? Скільки калорій в страві? На який час вистачить однієї лампочки? Ці і багато інші питання мають пряме відношення до цариці наук і без неї не вирішуються. Виходить, математика в нашому житті незримо присутній практично постійно. Причому найчастіше ми цього навіть не помічаємо.

Сучасний технічний прогрес тісно пов'язаний з ускладненням та розвитком математичного апарату. Комп'ютери та телефони, літаки і космічні апарати ніколи б не з'явилися, не будь людям відома цариця наук. Однак роль математики в житті людини цим не вичерпується. Наука допомагає дитині освоювати світ, навчає більш ефективній взаємодії з ним, формує мислення таокремі риси характеру.

Отож, ця наука не стоїть на місці, а розвивається. Не можна чітко сказати, якою математика буде завтра, адже вчені можуть винайти багато чого нового. Я думаю, якщо приділяти більше уваги цій науці, то можна досягти багато успіхів в цій сфері. Отже, математика – цікава наука, яка важлива для нашого суспільства. Кожен з нас повинен її знати, хоч не всі досконально це можуть зробити, але саму базу математики всі повинні вивчати.

Думаю, можна робити висновок, що математика – важлива наука, яку повинні засвоїти всі. Водночас, це складна наука, яка не під силу всім учням. Адже всі теми пов’язані між собою, якщо не вивчив, щось одне, то інше вивчити без попереднього матеріалу буде набагато складніше. Математика також потребує уважності, один невірний крок і все буде неправильно. Математика оточує нас скрізь. Наші будинки складені з різних геометричних фігур, меблі, предмети – все це теж фігури. Без математики ми не зможемо порахувати гроші та заплатити за товар в магазині, поділити порівно різні продукти (та і не тільки продукти), в дорослому житті ми не зможем правильно розрахувати свій сімейний бюджет. Не зможемо щось підказати своїй маленькій дитині, яка не буде знати, як розв’язуються такі задачі та приклади. Математика потрібна скрізь, без неї ніде не обійдеться.

Література:

5. Юрченко В.О., Мазуренко В.І., Гудович О.Д., Соколовський І.П., Гаваза А.О. Навчальний посібник «Рекомендації з прийняття рішень щодо реагування та ліквідацію наслідків надзвичайної ситуації об’єктового рівня».
6. UkrBukva.net «Математика в медицині» https://ukrbukva.net/60692-Matematika-v-medicine.html
7. Автомобільні транспортні засоби. Основи конструкції. / [Я. І. Підгорецький, М. І. Сичевський; А. М. Домінік

М.О. Завітій, Н.А. Швед
Львівський Державний Університет Безпеки Життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І.Кусій,*** *кандидат педагогічний наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИКА У ПСИХОЛОГІЇ

Вивчаючи математику та психологію виникає питання: як дві таких різних за своєю суттю науки мають ряд певних спільних особливостей?! З 18 ст. основним методом досліджень психології був метод самоспостереження, за допомогою якого не можна було робити ніяких точних вимірювань. Але якщо в 18 ст. стверджували, що психологія ніколи не зможе стати точною наукою, бо вимірювання у ній не можливі, то вже у сучасному світі ми сміло поєднуємо ці науки.

Однією з проблем математики і психології є проблема мови. Використання математичних методів для вивчення психології, так само і психології при проектуванні складних систем, вимагає для свого опису єдиної термінологічної мови. Так, якщо психологам і вдається сформулювати для математиків конкретний сенс поставленої проблеми, то математикам найчастіше не вдається донести до психологів зміст математичних результатів. Книга Ф. Гербарта «Психологія як наука», заснована на досвіді, метафізиці та математиці. Вона стала першою теорією, що спирається на те коло явищ, які безпосередньо доступні кожному, тобто зосередженні на потоці уявлень, що змінюють один одного в свідомості. Мабуть, І. Ф. Гербарту першому належить думка про те, що властивості потоку свідомості – це величини і вони підлягають вимірюванню.

Математичні засоби для вивчення інтелекту, здібностей особистостей стали створювати англомовні вчені. З'явилося поняття «регресія», і були виведені рівняння, що виражають цю залежність. Регресія - це метод математичної статистики, який вивчає залежність середнього значення будь-якої величини від варіацій іншої величини, або декількох величин (у цьому випадку використовують множинний регресійний аналіз). Поняття регресійного аналізу ввів Ф.Гальтон, який установив факт визначеного співвідношення між зростом батьків та їхніх дорослих дітей. Він помітив, що у батьків найнижчого зросту діти виявляються дещо вищими, а у батьків найвищого зросту — нижчими. Такого роду закономірність він назвав регресією. Цей метод використовується переважно в психологічних дослідженнях для вирішення завдань пов’язаних з оцінкою будь-якого впливу (наприклад впливу інтелектуальної обдарованості на успішність тощо) при конструюванні психологічних тестів. Френсіс Гальтон у свої студентські роки зауважив, що рейтинг успішності складання випускних іспитів з математики вимірюється від декількох тисяч до декількох сотень балів. Пізніше, врахувавши розділ талантів, Гальтон прийшов до думки про те, що спеціальні випробування дозволяють прогнозувати подальші життєві успіхи студентів. Так в 21 столітті народився «гальтоновський» метод тестів. Ідею тестів підхопили французькі психологи-створивши перші тести для тестування соціально відсталих дітей. Це стало початком використання такого методу ,як психометрична тестологія , що, в свою чергу, спричинила за собою розвиток психологічних вимірювань. Особливу роль у психологічних вимірюваннях займає англійський інженер - Чарльз Спірмен. Він вважав, що для обчислення кореляції між балами потрібна спеціальна міра. Спірмен запропонував теорію «генерального» фактора, що визначає спільну мінливість змінних тестових результатів, а також розробив метод виявлення цього фактора за кореляційною матрицею. Це був перший метод факторного аналізу, який створений в психології і для психологічних цілей.

Виділяють дві групи математичних методів: методи математичного моделювання (дослідження психологічних явищ через побудову закономірностей функціонування, діяльность людини в різноманітних ситуаціях), статистичні методи. Методи прикладної математичної статистики застосовуються в психології здебільшого для обробки експериментальних даних. Основна мета застосування статистичних методів — підвищення обґрунтованості висновків у психологічних дослідженнях за рахунок використання теорії ймовірності.

Ми можемо використовувати статичні методи психології у : табулюванні та графічному виразі даних; теорії статистичного висновку, яка використовується для передбачення результатів за даними психологічного обстежування.

Отже, математичні методи роблять процес дослідження психологічних явищ більш чітким, впорядкованим та раціональним. Незважаючи на безмежність абстракцій, математика має вихідні положення (те саме поняття числа), зміст яких пов’язаний із закономірностями функціонування людської психіки.

Література:

1.Ф.Гербарт «Психологія як наука, заново заснована на досвіді, метафізиці та математиці».

2.Климчук В.О. Викладання курсу “Математичні методи у психології” в умовах кредитно-модульної системи.

3.Телейко А. Б. Математико-статистичні методи в соціології та психології:навч. посібник / А.Б. Телейко, Р. К. Чорней . – Київ : МАУП, 2007. – 418с.

Малець Д.Р.
Львівський Державний Університет Безпеки Життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І.Кусій,*** *кандидат педагогічний наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

Розв'язання економічної задачі при застосуванні похідної

Поняття похідної широко використовується при розв’язанні задач економічного змісту. Економічні задачі поділяються на декілька типів, проте задачі на отримання підприємством максимального прибутку при мінімальних затратах відносяться до найважливіших задач економіки.

Розглянемо задачу: фірма монополіст прагне досягти максимального прибутку. Визначимо обсяг продажів та ціни на двох ринках та з’ясуємо, .яку тактику для прибутку потрібно застосувати.

Нехай функція загальних витрат фірми на двох ринках має вигляд:

$$TC=30+20Q \ (1),$$

а функція попиту на товар на двох ринках :

$$Q_{д1}=25\text{-}0.5P_1 \ (2) \text{ та } Q_{д2}=10\text{-}0.1P_2 \ (3).$$

Монополіст продає однакову продукцію на двох ринках, але за різними цінами. Знаючи попит і витрати він може прийняти правильне економічне рішення і досягти максимізації власного прибутку.

Для початку знайдемо функцію загальної виручки на кожному ринку:

$$TR_1 = P_1Q_1 \ (4)$$

Визначимо з (2) чому дорівнює P_1

$P_1 = 50\text{-}2Q_1$ Підставляючи це в (4), одержимо: $TR_1= (50\text{-}2Q_1)\ Q_1= 50Q_1 \text{-}2Q_2^2$

Аналогічно $P_2 = 100 - 10Q_2$

$TR_2 = (100\text{-}10Q_2)Q_2=100Q_2\text{-}10Q_2^2$

Визначимо одразу функцію граничної виручки окремо для кожного ринку:

$$MR_1\,(Q_1) = (TR_1)'=50\text{-}4Q_1 \ (5)$$

$$MR_2\,(Q_2) = (TR_2)'=100\text{-}20Q_2 \ (6)$$

Тепер потрібно визначити величину граничної виручки:

$$MC= (TC)' =20 \quad (7)$$

Максимізація прибутку досягається коли MR=MC. Визначимо обсяг продажу окремо на кожному ринку. Для цього прирівняємо рівності (5) і (7) та (6) і (7)

$50 – 4Q_1=20;$ $\quad 100\text{-}20Q_2=20$

$4Q_1=50\text{-}20$ $\quad 20Q_2=100\text{-}20$

$4Q_1=30$ $\quad 20Q_2= 80$

$Q_1=7{,}5$ $\quad Q_2=4$

Тепер можемо знайти ціну на кожному монопольному ринку:

$P_1=50\text{-}2\times7{,}5=35;$ $\quad P_2=100\text{-}10\times4=60.$

Отже, фірма досягне максимального прибутку, якщо на першому ринку продаватиме 7,5 тис. од. продукції за ціною 35 грн. за одиницю продукції, а на другому ринку продаватиме 4 тис. од. продукції за ціною 60 грн. за одиницю продукції.

Знайдемо за таких умов загальний дохід фірми: $TR=(TR_1+TR_2)-TC=P_1Q_1+P_2Q_2-TC=P_1Q_1+P_2Q_2-30-20\ (Q_1+Q_2)=35\times7{,}5+60\times4-30-20\times11{,}5=262{,}5+240-30-230=242{,}5$

Література:

1. О.В. Олійник, І.Є. Тимченко «Олімпіадні завдання з економіки», видавництво «Ранок», Веста 2007 рік.
2. Б.М. Тріщ «Вища математика для економістів». Підручник. Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2011. 552 с.

Р.І. Кушка
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О. Карабин**, доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

НЕВИРІШЕНЕ В МАТЕМАТИЦІ

Нерозв'язані математичні проблеми –це гіпотези, що видаються вірними, але дотепер не доведені. У науковому світі популярна практика складання відомими вченими або організаціями списків відкритих проблем, актуальних на сучасний момент. Зокрема, відомими списки математичних проблем **є:** Проблеми Гільберта, Проблеми Ландау, Проблеми Тисячоліття.

Проблеми Гільберта **-** список з 23 кардинальних проблем математики, представлений Давидом Гільбертом на другому Міжнародному Конгресі математиків у Парижі 1900 році. Тоді ці проблеми, які охоплювали основи математики не були розв'язані. У наш час розв'язані 16 проблем з 23. Ще 2 не є коректними математичними проблемами (одна сформульована занадто розпливчасто, щоб зрозуміти, розв'язана вона чи ні, інша, далека від розв'язання, — фізична, а не математична). З 5 проблем, що залишилися, дві не розв'язані ніяк, а три розв'язані тільки для часткових випадків.

Проблеми Ландау **-** існує багато відкритих питань щодо простих чисел, найвідоміші з яких були пераховані Едмундом Ландау на П'ятому Міжнародному Конгресі математиків.

Перша проблема Ландау (Проблема Гольдбаха). Довести або спростувати, що кожне парне число, більше двох, може бути представлене у виді суми двох простих чисел, а кожне непарне число, більше 5, може бути представлене у виді суми трьох простих чисел.

Друга проблема Ландау. Чи множина простих чисел, різниця між якими дорівнює 2, нескінченна?

Третя проблема Ландау (Гіпотеза Лежандра). Чи правильно, що між n^2 і $(n+1)^2$ завжди знайдеться просте число.

Четверта проблема Ландау. Чи множина простих чисел виду n^2+1 нескінченна?

Проблеми тисячоліття - це сім математичних проблем, визначених Математичним інститутом Клея 2000 року, охарактеризовані як «важливі класичні задачі, розв'язання яких не знайдено впродовж багатьох років». За розв'язання кожної з цих проблем інститутом Клея запропоновано приз у розмірі 1 000 000 доларів США. Кількість проблем у переліку (сім) було обрано виходячи з того, що засновник інституту, бостонський мільйонер Клей, виділив на премії сім мільйонів доларів — по мільйону за вирішення кожної проблеми.

Рівність класів Р і NP . Питання полягає в тому, чи для всіх задач, для яких комп'ютер може швидко перевірити заданий алгоритм він також може швидко *знайти* цей розв'язок.

Гіпотеза Ходжа. Важлива проблема алгебраїчної геометрії. Гіпотеза описує класи когомологій на комплексних проективних многовидах, реалізовані алгебраїчними підмноговидами.

Гіпотеза Пуанкаре (доведена). Гіпотеза стверджує, що всякий «тривимірний об'єкт», що має деякі властивості тривимірної сфери (зокрема, кожна петля всередині нього стягується), має бути сферою з точністю до деформації.

Гіпотеза Рімана. Гіпотеза стверджує, що всі нетривіальні нулі мають дійсну частину 1/2.

Теорія Янга — Мілса. Потрібно довести, що для будь-якої простої компактної каліброваної групи *G* квантова теорія Янга — Мілса для простору R^4 існує й має ненульовий дефект маси.

Рівняння Нав'є — Стокса. Система рівнянь, що описують рух в'язкої рідини, одна з найважливіших задач гідродинаміки. Незважаючи на важливість задачі, існування гладких розв'язків зі скінченною кінетичною енергією математично не доведено.

Гіпотеза Берча і Свіннертона-Даєра. Гіпотеза пов'язана з рівняннями еліптичних кривих і множиною їхніх раціональних розв'язків.

Література:

Проблеми Гільберта, Збірник за редакцією П. С. Александрова, М., Наука, 1969 р., 240 с.

СЕКЦІЯ 5

ПОСТАТІ В МАТЕМАТИЦІ

О. Тшнадель
Львівський інститут економіки і туризму
Науковий керівник Саницька А.О., ст. викладач

ВНЕСОК КАРЛА ФРІДРІХА ГАУССА У РОЗВИТОК МАТЕМАТИКИ

Карл Фрідріх Гаусс – німецький математик, астроном, фізик-теоретик. Будучи вихідцем з найбідніших верств суспільства вже у віці 19-ти років вважався кращим європейським математиком того часу.

Народився 30 квітня 1777 року в одному з німецьких князівств – Брауншвейгу. Читати і писати навчився сам. Першим захопленням у школі стала арифметика. У 9 років відкрив (під час шкільного уроку) формулу суми арифметичної прогресії

Після закінченні гімназії Гаусс у 1792 році вступив до Каролінської колегії, де систематично і поглиблено студіював математичні дисципліни. У цей період ознайомився з творами таких видатних математиків, як Леонард Ейлер, Жозеф-Луї Лагранж і особливо Ісаак Ньютон. Епохальний твір Ньютона «Математичні начала натуральної філософії» справив на Гаусса глибоке враження і запалив невгасимий потяг до математичних досліджень, який тривав впродовж усього життя.

Будучи студентом Геттінгенського університету Гаусс розпочав свої математичні дослідження. У 1795 році винайшов так званий «Метод найменших квадратів», у 1796 році розв'язав класичну задачу про поділ кола, з якої випливала побудова правильного 17-кутника, і написав велику й важливу працю «Арифметичні дослідження», присвячену окремим питанням теорії чисел і вищої алгебри, яка була надрукована у 1801 році. Гаусс докладно розвинув теорію квадратичних лишків, уперше довів квадратичний закон взаємності, по новому докладно розробив теорію квадратичних форм, яку раніше побудував Лагранж, виклав теорію поділу кола. Можна без перебільшень сказати, що теорія чисел, як наука, почала своє справжнє існування саме з досліджень Гаусса.

З 1796 року Гаусс веде короткий щоденник своїх відкриттів. Багато що він, подібно до Ньютона, не публікував, хоча це були результати виняткової важливості.

До 24 років Гаусс увійшов до числа найвідоміших математиків Європи. У 30 років вважався вже «королем» європейських математиків.

Глибоке проникнення в суть предмета, сміливість думки, нестандартний підхід до стандартних проблем дозволили Гауссу створити безліч фундаментальних досліджень у всіх основних областях математики: алгебрі, теорії чисел, диференціальній і неевклідовій геометрії, в математичному аналізі, теорії функцій комплексної змінної, теорії ймовірностей, теорії тяжіння, класичній теорії електрики і магнетизму, а також в галузях теоретичної астрономії, геодезії і механіки.

1830 – 1840 роки Гаусс присвятив теоретичній фізиці. Його дослідження в цій галузі значною мірою були результатом тісного спілкування і спільної наукової роботи з Вільгельмом Вебером. Разом з Вебером Гаусс створив абсолютну систему електромагнітних одиниць і сконструював у 1833 році перший у Німеччині електромагнітний телеграф. Йому належить створення загальної теорії магнетизму, основ теорії потенціалу і багато ін. Отже, важко вказати таку галузь теоретичної чи прикладної математики, в яку б Гаусс не вніс істотного вкладу.

Гаусс плідно працював у різних галузях науки, проте сам часто говорив: «Я весь відданий математиці». Математику він вважав царицею наук, а арифметику – царицею математики. В обчисленнях у думці йому не було рівних. Знав напам'ять перші десяткові цифри багатьох логарифмів і користувався ними при наближених обчисленнях у думці.

Гаусс був першим, хто почав вивчати внутрішню геометрію поверхонь. Ним була визначена характеристика поверхні, так звана «гауссова кривизна», яка не змінюється при згинаннях. Це відкриття лягло в основу ріманової геометрії. У 1827 році опублікував свою повну теорію поверхонь. Праці Гаусса з диференціальної геометрії стали відправною точкою в розвитку цієї науки у наступному столітті.

У галузі математичного аналізу Гаусс так само домігся значних висот. Він просунув теорію спеціальних функцій, рядів, розробив чисельні методи, удосконалив рішення задач математичної фізики. Йому належить математична теорія потенціалу.

Гаусса нерідко називають спадкоємцем Ейлера. Вони обидва носили неформальне звання «король математиків» і удостоїлися посмертного поважного жарту: «Він перестав обчислювати і жити». Їх рідною мовою була німецька, але наукові праці обидва вважали за краще писати латиною. Гаусс виявився останнім латиністом серед крупних учених Європи**.**

Через глибину відкриттів, різносторонність, розкриття нових, невідомих до того законів природи в галузі фізики, геодезії, математики сучасники вважали Гаусса найкращим математиком світу. На медалі, виготовленій у 1855 році на його честь, вигравірувано напис: «Король математиків».

Ім'я великого математика занесено на карту Місяця. Зображення Карла Гаусса є на грошовій банкноті Німеччини вартістю в 10 марок.

Література

1. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики / Пер. с нем. и доп. И. Б. Погребысского. – Изд. 4-е. – Москва: Наука, 1984.

2. Белл Э. Т. Творцы математики. – М.: Просвещение, 1979.

3. Бюлер В. Гаусс: Биографическое исследование / Пер. с англ. – Москва: Наука, 1989.

4. Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П. Математика XIX века. Т. 1. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1978.

О. Пекарська

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЕРАТОСФЕН КІРЕНСЬКИЙ: ОБЧИСЛЕННЯ РАДІУСА ЗЕМЛІ

У ІІІ столітті до нашої ери бібліотекарем знаменитої Александрійської бібліотеки Ерастофеном Кіренським був проведений відомий, один з найдавніших фізичних експериментів, в результаті якого було виміряно радіус Землі. Ератосфен Кіренський (276 рік до н.е.-194 рік до н.е.) - давньогрецький математик, астроном, географ і поет. Син Еглаоса, уродженець Кірени. Перебравшись потім в Афіни, він так тісно зблизився зі школою Платона, що часто називав себе платоніком. Результатом вивчення наук в цих двох центрах була енциклопедична ерудиція Ератосфена. Цар Птолемей III Евергет доручив йому завідування Олександрійської бібліотекою (з 235 року до н.е.).

Найвідоміша географічна робота Ератосфена, що знаходиться в тісному зв'язку з астрономією, полягала у вимірі довжини земного меридіана. Короткий виклад цієї роботи відомо нам з трактату Клеомеда "Про кругообертання небесного зводу": "Вимірювання Землі за Ератосфеном". Ератосфен розрахував радіус Землі, не покидаючи Єгипту. Він знав, що у полудень під час літнього сонцестояння в місці Суен (сучасна назва Асуан, Єгипет), сонце знаходилося прямо над головою. Він дізнався про це завдяки тому, що сонце відсвічує з дна глибокого колодязя, а людина, що заглядала туди в цей час закривала собою відбиття Сонця у воді. До нього прийшла думка, виміряти кут піднесення Сонця в полудень такого ж самого дня в Олександрії.

Цей метод полягав у вимірюваннях за допомогою зменшеного зображення такого трикутника, який мав правильний кут між вертикально встановленим стрижнем і його тінню. Цей кут становив приблизно 7° або 1/50 кола. Припускаючи, що Земля кругла, знаючи відстань і напрямок до Суена, він зробив висновок, що радіус Землі є в 50 разів більшою за цю відстань.

Ці знання про розмір Єгипту були результатом роботи багатьох поколінь, що здійснювали геодезичні подорожі. Рахівники фараона дали відповідь, що відстань між Суеном і Олександрією становить 5000 стадій (цифра яка була встановлена раніше). Можливо ця відстань була встановлена шляхом вимірювання часу, який треба було витратити аби здолати шлях від Суену до Олександрії на верблюді. Карл Саган розповідав, що Ератосфен заплатив людині пройти шлях і виміряти відстань. Є думка, що Ератосфен використав Олімпійську стадію як міру відстані, що становить 176.4 м, що означає, що радіус Землі становить 44100 км, похибка в 10 %, а італійська стадія в 184.8 м стала (300 років пізніше) загально визнаною величиною довжини стадії, що в результаті дає радіус 46100 км, похибка в 15 %. Маючи тогочасні недосконалі інструменти вимірювання Ератосфен навряд-чи міг би точніше виміряти. Та він зробив п'ять основних припущень (жодне з яких не є ідеально точним):

1. Що дистанція між Олександрією і Суеном становила 5000 стадій,
2. Що Олександрія знаходиться точно на північ від Суену
3. Що Суен знаходиться на тропіку Рака
4. Що Земля є ідеальною сферою.
5. Що промені, що випромінюються Сонцем є паралельні.

Згодом Ератосфен округлив результат до остаточного значення в 700 стадій, і в результаті отримав радіус в 252000 стадій, скоріше за все він перерахував це для спрощення розрахунків, оскільки більше число ділиться без залишку на 60. В 2012, Ентоні Абре Мора повторив розрахунки Ератосфена із більш точними вимірюваннями; в результаті він отримав число в 40074 км, яке відрізняється на 66 км (0.16 %) він загально прийнятого зараз полярного радіуса Землі.

Ератосфен тепер відштовхувався від своїх знань про Землю. Використовуючи свої відкриття і знання про розмір планети і форму, він почав її малювати. В Олександрійській бібліотеці він мав доступ до багатьох книг, в яких містилися різноманітні відомості та уявлення про світ. У своїй трьохтомній роботі «Географія» (Грецькою: Geographika) він описав і виклав свої дослідження про світ, навіть розділивши Землю на п'ять кліматичних зон: дві замерзлих зони навколо полюсів, дві помірних зони і зону, що охоплює екватор і тропіки.

Крім того, Ератосфен винайшов географію. Створив термінологію, яка використовується і сьогодні. Ератосфен використовував паралелі і меридіани, щоб з'єднати кожне місце у світі. Тепер можна було оцінити свою відстань від віддалених місць на Землі. У географії були показані назви більш ніж 400 міст та їх розташування: цього ніколи раніше не було досягнуто. На жаль, його географія загубилася в історії, але її фрагменти можна скомпонувати з інших великих істориків, таких як Пліній, Полібій, Страбон і Маркіан.

Суда Лексикон описав Ератосфена як νένταθλος (Pentathlos), що можна перекласти як "різнобічна людина", бо він був умілий у багатьох речах. Вчений отримав прізвисько Бета, тому що він розумівся в багатьох речах, і намагався оволодіти будь-якою інформацією, але все таки не зміг досягнути великих знань у чомусь одному. Страбон вважав Ератосфена математиком серед географів і географом серед математиків.

Література:

1. Скржинська М.В. Ератосфен Кіренський [Електронний ресурс] // Енциклопедія історії України: Т. 3: Е-Й / Редкол.: В. А. Смолій та ін. НАН України. Інститут історії України. - К.: В-во "Наукова думка", 2005. - 672 с.

Кісіль Цвітана, ст. гр. ГРСХТ/18
Львівський інститут економіки і туризму
Ст. викладач Фірман Л.Ю.

НІЛЬС ХЕНРІК АБЕЛЬ : ЖИТТЄВИЙ ШЛЯХ, ВІДКРИТТЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ

У південно-західній частині Норвегії на кількох маленьких острівцях розкинулося невелике рибальське селище Фінней. Там, у сім'ї пастора Абеля 5 серпня 1802 р. народився хлопчик, якого назвали Нільсом Хенріком.

Батько учив його грамоти, а коли синові минуло 13 років, віддав до кафедральної школи в м. Християнії (з 1925 р. Осло).

За короткий час Абель вивчив елементарну математику і звернувся до вчителя з проханням зайнятися з ним вищою. Шістнадцятирічний учень швидко вивчив праці Ньютона, Ейлера, Гаусса, Лагранжа та інших видатних математиків того часу. В останні два роки Абель цікавився питанням про можливість розв'язати рівняння п'ятого і вищих степенів у радикалах. Свої дослідження з цього питання Нільс показав Хольмбое.

За рік до закінчення школи помер батько Абеля. Крім Нільса, з матір'ю залишились молодші брати і сестри. І хоч Нільс одержував у кафедральній школі скромну стипендію, але взяв на своє утримання молодшого брата. У червні 1821 р. Абель закінчив школу і склав екзамени в університет м. Християнії. Його знання з математики оцінили найвищими балами.

Восени 1822 р. Абель успішно склав екзамени з обов'язкових для всіх студентів предметів, що давало йому право займатися тільки улюбленою справою. Він і сам уже написав кілька статей. Спираючись на дослідження видатного французького математика Лежандра, Абель почав досконаліше розробляти теорію еліптичних функцій.

Молодий математик не переставав також цікавитися питанням про можливість розв'язати в радикалах рівняння п'ятого і вищих степенів. Багато математиків висловлювало думку, що такі рівняння взагалі розв'язати в радикалах неможливо. Але ніхто з них не міг довести цього, бо, як відомо, існує багато рівнянь п'ятого і вищих степенів, які в радикалах розв'язати можна.

Абель наприкінці 1823 р. довів теорему про те, що загальні рівняння п'ятого і вищих степенів розв'язати у радикалах неможливо. Водночас він знайшов різні групи рівнянь вищих степенів, які розв'язуються у радикалах. Так на дев'ятнадцятому році життя Нільс досяг вершини, підкорити яку досі не вдавалося жодному математику.

Наприкінці 1824 р. університет домігся призначення Абелю невеликої державної стипендії. Це давало йому можливість поїхати за кордон, щоб підтримати зв'язки з тогочасними вченими-математиками та домовитись про друкування своїх праць у математичних журналах, бо в самій Норвегії таких можливостей не було.

У вересні 1825 р. разом з кількома товаришами Нільс прибув у Копенгаген. Датські вчені радили Абелю поїхати в Берлін до німецьких математиків, показати свої праці "королю математиків" – славнозвісному Гассу. їх поради збігалися з бажанням Нільса довше помандрувати з друзями. Так він і зробив, вирушивши з ними до столиці Пруссії.

Берлінські математики прихильно поставилися до Абеля. Вони допомагали йому діставати найновішу літературу з питань, які його цікавили, супроводили в подорожах по місту. Для математичного журналу, що виходив тоді у Пруссії, Абель за зиму 1825/26 року написав 6 статей, залишив їх німецьким друзям і навесні 1826 р. поїхав далі, але не в Париж, як передбачалося раніше. Друзі порадили йому їхати до Франції через Австрію та Італію – піднести свій культурний рівень, а водночас допомогти їм, геофізикам, проводити обчислення.

В середині літа 1826 р. Абель приїхав до Парижа. Знайомих у нього не було, а з видатними математиками-академіками встановити ділові стосунки було дуже важко. Але молоді математики швидко зрозуміли прагнення молодого вченого з Норвегії. Вони відкрили для нього двері своїх бібліотек, завжди запрошували його на лекцію когось із видатних фізиків чи математиків. У Парижі Нільс наполегливо взявся за роботу.

Наприкінці жовтня 1826 р. Абель був присутнім на засіданні Академії наук, на якому секретар Академії доповідав про поданий норвезьким математиком мемуар. За ухвалою академіків роботу передали на рецензування Лежандру і Коші.

Восени 1827 р. Абелю доручили тимчасово заміщати професора Ханстіна, який виїхав з експедицією.

У цей час у Берліні відкрилася Прусська академія наук. Німецькі друзі намагалися влаштувати туди Абеля на роботу, запрошували його навідатися до Берліна. Тим часом у німецькому математичному журналі почали друкуватися статті Абеля. З ним стали листуватися видатні математики Європи, зокрема Лежандр і Коші.

Нільс Хенрік Абель помер 6 квітня 1829 р. Поховали його на кладовищі у Фроланді. На могилі друзі спорудили скромний пам'ятник.

Через 43 роки після цього вийшло найповніше видання творів Абеля, а в 1902 р. у зв'язку з сторіччям з дня його народження, університет міста Християнії видав докладну біографію талановитого математика та його листи до друзів і вчених.

Тепер кожний, хто вивчає вищу математику, знає, що ім'я Абеля увічнено у найрізноманітніших розділах цієї науки. Є ряд теорем Абеля, абелеві інтеграли, функції Абеля, абелеві групи, формули і перетворення Абеля... Його праці істотно вплинули на розвиток усієї сучасної математики.

Література:

1. http://osvita.ua/vnz/reports/biograf/23727/
2. https://uk.wikipedia.org/wiki/Нільс_Генрік_Абель

П. О. Стрижевський

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **Кусій М. І.**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки.

ЖІНКИ МАТЕМАТИКИ ХХ СТОЛІТТЯ

З моменту створення перших арифметичних прикладів та геометричних фігур у розвиток математики вкладали свою душу не лише чоловіки. З давніх давен жінкам не давали можливості навчатися, мати освіту, вивчати, а тим паче вдосконалювати те, що вже було записано кимось. Лише останні декілька століть жінки отримали можливість хоча б навчатися і мати освіту і тому сьогодні ми розглянемо декілька видатних радянських та українських жінок, що зробили свій внесок у розвиток математики у цілому.

Почнемо ми з Марини Володимирівни Щербини. Народилася вона 11 грудня 1958 року в м. Харків. Після закінчення школи, у 1976 році вступила до Харківського державного університету, який закінчила у 1981 році за спеціальністю «Математика». Почала навчатись в аспірантурі і в 1986 році захистила кандидатську дисертацію на тему «Деякі асимптотичні проблеми статистичної фізики». Після закінчення докторантури Марина у Фізико-технічному інституті низьких температур імені Б. І. Вєркіна НАН України у 1997 році захистила докторську дисертацію на тему «Моделі середнього поля у статистичній фізиці та теорії випадкових матриць». На даний момент головними напрямками її досліджень є теорія випадкових матриць, зокрема ермітови та дійсно-симетричні матричні моделі, унітарні матричні моделі, ансамблі сум та добутків випадкових матриць, ансамблі з незалежними елементами, ансамблі рідких випадкових матриць та випадкові графи; спектральна теорія диференційних та скінченно-різницевих операторів з випадковими та майже періодичними коефіцієнтами, зокрема обернені задачі теорії розсіювання для таких операторів; точно та асимптотично точно розв'язувані моделі взаємодіючих впорядкованих та невпорядкованих систем, зокрема фазові перетворення та методи обчислювання важливих відповідних фізичних характеристик. Має нагороду – премію НАН України ім. М. В. Остроградського за серію праць «Імовірнісні задачі на групах та в спектральній теорії» (2008). Зараз одружена і має двох дітей.

Світлана Майборода народилася 2 червня 1981 року в м. Харків. Закінчивши Харківський університет в 2001 році, вона здобула два дипломи магістра в галузі фінансів і в галузі прикладної математики. У 2005 році захистила кандидатську дисертацію в університеті Міссурі під керівництвом Маріуса Майтреей. Зараз працює професором математики в Міннесотському університеті. Її дослідження стосуються гармонійного аналізу та диференціальних рівнянь, в тому числі крайових задач для еліптичних рівнянь. Вона працювала в Австралійському національному університеті, Університеті штату Огайо і Браунському університеті. З 2008 року Майборода працювала в університеті Пердью, а у 2011 році перейшла в університет Міннесоти. Світлана з 2010 по 2015 роки працювала також науковим співробітником

Слоан. У 2015 році була обрана членом Американського математичного товариства. В 2016 році отримала звання професора в університеті Міннесоти. У 2013 році виборола премію Асоціації для жінок в математиці Sadosky за дослідження в аналізі.

Тишкевич Регіна Йосипівна – білоруський математик, відомий фахівець в сфері «теорії графів», доктор фізико-математичних наук, професор. Регіна Йосипівна народилася 20 жовтня 1929 року в Мінську. Після успішного складання іспитів вона поступила на фізико-математичний факультет БДУ, який закінчила в 1952 році. В цьому ж році вона поступила в аспірантуру, закінчивши яку, почала викладати на рідному факультеті. У 1959 році захистила кандидатську дисертацію. У 1984 році в Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова АН УРСР (Київ) захистила докторську дисертацію по темі «Алгебраїчні методи теорії графів» - дана докторська дисертація була першою в Радянському союзі по теорії графів. У 1986 році їй присвоєно вчене звання професора. Регіна Йосипівна веде активну науково-дослідницьку діяльність. Вона є засновником і керівником білоруської наукової школи теорії графів, яка отримала світове визнання. Ввела єдиний новаторський курс алгебри і геометрії, який як і раніше ніколи не викладався ні в одному з вузів СРСР (замість окремих курсів алгебри і геометрії нею спільно з А. С. Феденко вперше в СРСР був прочитаний єдиний курс цих дисциплін). Автор і ініціатор викладання на факультеті курсу «Введення в математику», який не входив до цього в навчальні плани університетів СРСР. Вона – один з авторів колективної праці «Лекції з теорії графів» - першого підручника з теорії графів не тільки в СРСР, а й за його межами. «Лекції з теорії графів» разом з супутнім задачником переведені на англійську мову і видані за кордоном. Підготувала 17 кандидатів і 1 доктора фізико-математичних наук, котрі працюють в університетах Білорусі, Великої Британії, США, Канади, В’єтнаму і Гвінеї. Автор більше 100 наукових і науково-методичних робіт, у тому числі 14 посібників і монографій, три з яких перекладено на англійську мову і видано за кордоном.

Література:

1. Чистяков В.Д. Розповіді про математиків. – Мінськ: Вища школа, 1966.- 410 с.
2. Юшкевич А.П. Історія математики України. – М.: Наука, 1968. 592 с.

М.Б.Тис, Ю.В.Янчук
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики*

МАТЕМАТИКА І МИСТЕЦТВО

Математика володіє не тільки істиною, але і вищою красою, холодною і суворою, подібною красі скульптури.

Бертран Расселл

Математика та мистецтво: на сьогоднішній день ці дві великі сфери культури сприймаються як два полюси і навіть як дві протидіючі сили, в той час, коли насправді вони зв'язані міцними путами. Математик Джеррі Кінг описує математику як мистецтво, зазначивши, що «ключами до математики є краса та елегантність, а не нудність та формальність». Математику можна виділити у багатьох видах мистецтва, наприклад музиці, танці, архітектурі.

Математика і архітектура.

З усіх видів мистецтва архітектура, мабуть, ближче з усіх до математики: тому що, за основу конструкцій покладені найточніші розрахунки. У давнину, окрім відомих нині дев'яти муз, існувала і муза математики, тобто математика вважалася мистецтвом рівним астрономії, муза якої входить в склад свити Аполлона – ватажка усіх муз. Будь-яка архітектурна споруда використовує симетрію. Йдучи вилицями міста, можна спостерігати, як геометричні форми використовуються в архітектурі. Лише досконале знання архітектором математики дає можливість поєднати здавалось б прості геометричні форми (такі як: куб, еліпс , коло, циліндр) у складну музику вишуканих будівель. Результат роботи архітектора повинен бути точним, його перспективний малюнок повинен відповідати правилам геометрії.

Математика і література – два крила натхнення.

Відома як літератор і математик Софія Ковалевська про математику твердила так : «Це наука, яка потребує дуже багато фантазії; не можна бути математиком, в той же час не будучи поетом в серці».

Одним з найбільших математиків , який був чудовим поетом, є Омар Хайям. Він завершив побудову геометричної теорії кубічних рівнянь. Паралельно із заняттями наукою Хайям створював свої вірші.

Підсумовуючи, можна з упевненістю сказати, що математика і література – це вічні науки. З найдавніших часів відомо, що математика вчить правильно і послідовно мислити, логічно міркувати. Не менш важлива і література, що дозволяє людині висловлювати свої думки, почуття, емоції. Тільки в тісному взаємозв'язку цих наук людина відчуватиме себе спокійно, впевнено, комфортно в цьому величезному світі загадок.

Музика – математика почуття. Математика – музика розуму.

Починаючи зі складних фуг Баха до чудових пісень сучасних виконавців музика й математика неминуче перетинаються. Крім основних способів використання математики в теорії музики й музичних позначеннях (наприклад, в акордах, музичному розмірі, що вказує кількість часток в такті, або нотах з точкою, яка збільшує тривалість ноти на половину) музика є джерелом досліджень у багатьох математичних галузях, таких як абстрактна алгебра, теорія множин і теорія чисел. Дослідження показали, що деякі музичні твори стають більш популярними й дуже поширеними виключно завдяки своїй «математичній» структурі. Також дослідники переконанні, що діти, які навчаються грати на музичних інструментах, показують значно кращий результат при вирішенні завдань, що вимагають залучення просторово-часової орієнтації. Частково це пов'язано з кількістю перетинів між музичними й математичними навичками. Наприклад, поняття «частина–ціле», що необхідне для розуміння звичайних десяткових дробів і відсотків, у великій мірі відноситься й до розуміння ритму. Грамотний музикант зобов'язаний постійно подумки розбивати ритм на рівні складові (і контролювати його), щоби правильно відображати ритмічний малюнок твору.

Отже, що математика, відображає не тільки істину, але і незрівнянну красу.

Література:

1. Волошинов А. В. «Математика та мистецтво», 2000 р.
2. https://vsiknygy.net.ua/review/782/

Є. Гаїна
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

«МАТЕМАТИКА З ДАЛЕКОГО МАЙБУТНЬОГО»

Японський математик Сінічі Мотідзукі стверджує, що вирішив одну з найбільших проблем сучасної математики. Але ніхто не може це підтвердити чи спростувати. Його науковий доробок вражає своєю масштабністю. П'ятсот сторінок — обсяг тексту, яким може похвалитись не кожен гуманітарій, не кажучи вже про математика. Але не тільки кількість має значення. Його праця має шанси стати математичною бомбою й започаткувати абсолютно нову математику — «математику з далекого майбутнього», як висловився один його колеґа.

Ексцентричний японський математик Сінічі Мотідзукі стверджує, що довів гіпотезу *abc* — одну з найбільших проблем теорії чисел. А щоб зробити це, йому довелось перевернути самі основи математики, починаючи з арифметичних дій і теорії множин, які вивчають в початкових класах середньої школи.

Гіпотеза *abc* належить до молодих проблем теорії чисел. Її сформулювали незалежно один від одного математики Девід Массер і Джозеф Остерле у 1985 і 1987 рр., тому її також називають гіпотезою Массера-Остерле. Її суть досить проста. Для будь-якого дійсного числа $r > 1$ існує не більше трьох натуральних чисел a, b і c, для яких виконується умова $a + b = c$, якщо a, b і c взаємно прості, тобто у них немає спільних дільників, а с — їх радикал.

Адже щоб довести гіпотезу *abc*, Сінічі Мотідзукі винайшов новий напрямок теорії чисел, який неймовірно абстрактний навіть за стандартами чистої математики. «Коли ви це читаєте, у вас виникає відчуття, що перед вами текст з далекого майбутнього або з іншого Всесвіту», — прокоментував свої враження математик з Університету Вісконсина-Медісона Джордан Елленберґ.

Сам автор каже, що його теорія становить «різновид мініатюрної моделі того, чим є математика в людському суспільстві». Складність, з якою його сприймають його колеґи, — це копія тієї складності, з якою решта членів суспільства сприймають математиків. Іншими словами, це «математика для математиків», або математика в квадраті.

Праця дуже віддалена від стандартної математичної теорії. Відштовхуючись від арифметичної теорії Тейхмюллера, геометрії Аракелова і топології Годжа, він поставив собі за мету реформувати математику знизу догори, починаючи з її найважливіших основ у теорії множин і діаграм Венна, які є аксіомами навіть для школярів.

Іван Фесенко, який є одним з чотирьох математиків (інші двоє — колеґи Мотідзукі з *RIMS*, ще один — з британського Ексетерського університету), котрі заявили, що зрозуміли його праці, пояснює, що суть його всеосяжної системи міжуніверсальної геометрії в тому, що цілі числа належить розглядати у зовсім новому світі, відкидаючи додавання й розглядаючи множення як щось плинне і нестале. Звичні для нас арифметичні дії є тільки одним випадком з цілої низки структур, подібно до того, як коло є спеціальним видом еліпса. Як передає Фесенко, Мотідзукі порівнює себе з математичним гігантом Гротендіком, що не звучить нескромно. «У нас були математики перед ним і тепер будуть після нього», — зазначає Фесенко.

Проблема полягає в тому, що ті кілька математиків, які зрозуміли праці Мотідзукі, своєю чергою, втрачають здатність пояснити це іншим. «Не досить просто мати гарну ідею — треба ще й вміти пояснити її іншим. Люди мають право бути ексцентричними. Якщо він не хоче подорожувати, його ніхто не примушує. Але якщо він хоче бути визнаним, то мусить піти на компроміс», — каже Ґерд Фалтінґс.

Усі, хто читав доведення Мотідзукі, залишились з відкритим ротом. Декого збила з пантелику його розлога, майже месіанська мова, якою він описував свої теоретичні інструкції. Сферу, яку він створив, він назвав «міжуніверсальною геометрією». «Математики переважно дуже скромно описують свої розробки й ніколи не стверджують, що зробили революцію у Всесвіті», — каже Джозеф Остерле з Паризького університету ім. П'єра та Марії Кюрі, один з авторів гіпотези *abc*, який одним з перших прочитав статті Мотідзукі.

Нині надто рано стверджувати, чи праці Сінічі Мотідзукі рухатимуться у бік сприйняття, як це було у випадку Г. Перельмана, чи, можливо, їх спіткає інша доля і світ їх відкине. Прикладом другої перспективи є математик Луї де Бранж з Університету Пердью в Індіані. У 2004 р. він опублікував варіант розв'язку гіпотези Рімана, яку вважають найбільшою проблемою математики. Однак його розв'язок не прийняли, оскільки він був надто складним й спирався на твердження, які не є загально визнані.

Можливо, паралель тут не зовсім вдала. Навіть якщо доведення гіпотези *abc* виявиться хибним, ідеї Мотідзукі з часом просочуватимуться всередині математичної спільноти. «Базуючись на тому, що я про нього знаю, ймовірність того, що в його працях є революційні і вельми важливі ідеї, є дуже високою», — каже Джордан Елленберґ.

Література:

1. https://zbruc.eu/node/46842 - Davide Castelvecchi. The biggest mystery in mathematics: Shinichi Mochizuki and the impenetrable proof

О. Деменко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ДОСКОНАЛІ ЧИСЛА

Розв'язання складних математичних проблем дуже часто пов'язують із захопленням фортеці. Падінню математичної фортеці зазвичай передує тривала та наполеглива облога. Спочатку розвідуються шляхи підходу до цитаделі – можливі шляхи їх вирішення. Потім по черзі захоплюються позиції, які відкривають доступ до фортеці. Після цього починається штурм. І нарешті, щасливий момент – взяття фортеці.

Після падіння чергової математичної фортеці починається період швидкого просування вперед: одна за одною вирішуються великі і малі задачі, виявляються абсолютно несподівані зв'язки, відшукуються важливі практичні застосування.

Одне з найбільш невирішених завдань з математики пов'язане з досконалими числами. Через складність знаходження досконалих чисел із давнини вони вважаються божественними. Середньовічна церква вважала, що вивчення досконалих чисел веде до спасіння душі, і тому, хто знайде наступне досконале число буде гарантоване блаженство.

В давнину існувало переконання, що світ досконалий саме тому, що він створений за 6 днів. Також руки людини вважаються досконалими, оскільки в 10 пальцях міститься 28 фаланг.

Які числа називаються досконалими?

Досконале число – це натуральне число, яке дорівнює сумі всіх своїх дільників окрім самого числа.

Найперше досконале число було винайдене в Стародавній Греції. Це число 6.

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Наступним досконалим числом є число 28.

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Відомий вчений Мартін Гарднер в даному числі вважав особливий сенс, оскільки місяць оновлюється за 28 днів.

Наступні два числа були винайдені Евклідом в IV столітті до н.е.

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 +16 + 31 + 62 + 124 + 248,$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 +4064.$$

Евклідом було доведено не лише існування двох нових досконалих чисел, але й виведено формулу для пошуку парних досконалих чисел:

$$2^{p-1}(2^p - 1),\ \text{де } 2^p - 1 - \text{просте число.}$$

Дві тисячі років тому Ейлером було доведено, що формула Евкліда містить лише парні числа, але не доведено, що досконалими не можуть бути непарні.

Вченими також доведені цікаві властивості досконалих чисел:

- Всі досконалі числа трикутні (якщо взяти досконале число куль, то із них можна скласти рівносторонній трикутник);

- Всі досконалі числа, окрім числа 6, можна записати у вигляді суми кубів послідовних непарних натуральних чисел;

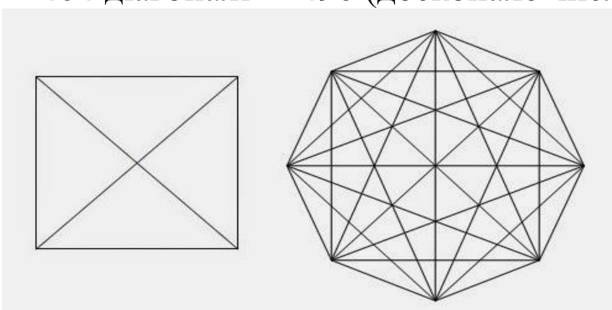
  $1^3 + 3^3 = 1 + 27 = 28$

  $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 496$

- Сума величин, обернених всім дільникам досконалого числа, включаючи його самого, завжди дорівнює 2.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2,\ \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2.$$

Многокутники також мають неперервний зв’язок з досконалими числами:
Квадрат: 4 сторони + 2 діагоналі = 6 (досконале число);
Восьмикутник: 8 сторін + 20 діагоналей = 28 (досконале число);
32 – кутник: 32 сторони + 464 діагоналі = 496 (досконале число).



В XVII столітті досконалі числа шукав французький математик Марен Мерсенн. Він припустив, що при *p* = 17, 19, 31, 67, 127 і 257 формула Евкліда дає досконале число. Проте перевірити своє припущення не зумів через складність обчислень. Правоту Мерсенна для *p* =17, 19 і 31 довів в XVIII столітті Леонард Ейлер. Пізніше виявилась помилковість передбачень для p=67 і 257, що не заважає називати числа вигляду 2*p*−1 числами Мерсенна.

На сьогодні відомо 48 чисел Мерсенна і відповідних їм парних досконалих чисел. Починаючи з 1997 року їх пошуком займається команда розподілених обчислень з мережі Інтернет GIMPS. 48-е число було знайдене саме так у лютому 2013 року. Це $2^{57885161}$-1 – найбільше з відомих простих чисел Мерсенна. До цього часу відбувається пошук досконалих чисел та доведення того факту, що досконалими не можуть бути непарні числа.

Література:

1. З.П. Халецька, В.В.Нарядовий. Математична логіка та теорія алгоритмів: Навч.підруч. . – Кропивницький: РВВ КДПТ ім. В.Винниченка, 2017. – 128 с.

С. Муха
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

КАЛЬКУЛЯТОР ПАСКАЛЯ

Блез Паска́ль - один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей та проективної геометрії, творець перших зразків лічильної техніки, автор основного закону гідростатики. Відомий також відкриттям формули біноміальних коефіцієнтів, винаходом гідравлічного преса й шприца та іншими відкриттями. Автор знаменитих «Думок» та «Листів до провінціала», які стали класикою французької літератури.

Паскаль народився 19 червня 1623 року в місті Клермон-Ферран (Овернь) в родині голови податкового управління Етьєна Паскаля й Антуанетти Бегон, дочки сенешаля Оверні. У Паскалів було троє дітей — Блез і дві його сестри: молодша — Жаклін і старша — Жильберта. Мати померла, коли Блезу було 3 роки. У 1631 році сім'я переїхала до Парижа.

Паскаль-батько дотримувався принципу, за яким складність предмета мала відповідати розумовим здібностям дитини. За його планом давні мови Блез мав вивчати з 12-ти, а математику з 15-16 - річного віку. Метод навчання полягав у поясненні загальних понять і правил та наступному переході до вивчення окремих питань. Так, знайомлячи восьмирічного хлопчика із законами граматики, спільними для всіх мов, батько мав на меті навчити його мислити раціонально. Удома постійно проводилися бесіди з питань математики і Блез надзвичайно цікавився цим предметом. Батько, який побоювався, що математика завадить синові вивчати латинську та грецьку мови, обіцяв звернутися до математики в майбутньому. Якось на чергове запитання сина про те, що таке геометрія, Етьєн коротко відповів, що це спосіб креслити правильні фігури і знаходити між ними пропорції, проте заборонив йому будь-які дослідження в цій сфері. Однак Блез на самоті заходився вугіллям креслити на підлозі різні фігури і вивчати їх. Не знаючи геометричних термінів, він називав лінію «паличкою», а коло «кільцем».

Блез Паскаль створив свій механічний калькулятор у віці 19 років у 1642 році, спостерігаючи за роботою свого батька, який працював збірником податків і був змушений часто виконувати довгі і обтяжливі розрахунки.

Приблизно за 10 років він побудував більше 50 моделей калькуляторів, в тому числі і вдосконалену модель механічного калькулятора. Демонстрація робочої моделі механічного калькулятора відбулася в 1645 році і здивувала середньовічну Європу красою і точністю своїх механізмів.

Машина Паскаля являла собою механічний пристрій у вигляді шухлядки з численними, пов'язаними один з одним зубчастою передачою шестернями. Числа вводилися в машину за допомогою відповідного повороту набірних коліщат. На кожне з цих коліщат, що відповідали одному десятковому розряду числа, були нанесені поділки від 0 до 9. При введенні числа, коліщатка прокручувалися до відповідної цифри. Зробивши повний оберт надлишок над цифрою 9 коліщатко переносило на сусідній розряд, зсуваючи сусіднє коліщатко на 1 позицію. Перші варіанти «Паскаліни» мали п'ять зубчастих коліс, пізніше їх кількість збільшилася до шести або навіть восьми, що дозволяло працювати з великими числами, аж до 9999999.

Відповідь з'являлася у верхній частині металевого корпусу. Обертання коліщат було можливе лише в одному напрямку, виключаючи можливість безпосереднього оперування від'ємними числами. Тим не менше, машина Паскаля дозволяла виконувати не лише додавання, але й інші операції, але вимагала при цьому застосування досить незручної процедури повторення складання. Віднімання виконувалось за допомогою доповнень до дев'ятки, які для допомоги користувачу з'являлися у віконці, розміщеному над виставленим оригінальним значенням. Незважаючи на переваги автоматичних обчислень використання десяткової машини для фінансових розрахунків у рамках діючої в той час у Франції грошової системи було важким. Розрахунки велися в ліврах, су та деньє. У ліврі нараховувалося 20 су, в су — 12 деньє. Зрозуміло, що використання десяткової системи ускладнювало і без того нелегкий процес обчислень. Незважаючи на загальне захоплення, машина не принесла багатства своєму творцю. Складність і висока вартість машини в поєднанні з невеликими обчислювальними здібностями служили перешкодою її широкому поширенню. Тим не менш, закладений в основу «Паскаліни» принцип пов'язаних коліс майже на три століття став основою для більшості створюваних обчислювальних пристроїв.

Машина Паскаля стала другим реально працюючим обчислювальним пристроєм після рахівника Вільгельма Шікарда, створеного в 1623 році. У 1799 році перехід Франції на метричну систему, торкнувся також її грошової системи, яка стала, нарешті, десятковою. Однак, практично до початку XIX століття створення та використання обчислювальних машин залишалося невигідним. Лише в 1820 році Шарль Ксав'є Тома де Кольмар запатентував перший механічний калькулятор, який став комерційно успішним.

Література:

1. Соломатин В.А. История науки. Уч. пос. – М.: ПЕРСЭ, 2002 – 352 с.

М. Самотюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПРОБЛЕМИ ТИСЯЧОЛІТТЯ

Наш світ багатогранний, цікавий та водночас таємничий з багатьма невирішеними проблемами. Розглянемо деякі невирішені задачі в області математики на сьогоднішній час.

Проблема *P* = *NP* полягає в наступному: якщо позитивну відповідь на якесь питання можна швидко *перевірити* (за поліноміальний час), то чи правда, що відповідь на це ж питання можна швидко *знайти* (за поліноміальний час і використовуючи поліноміальну пам'ять)? Наприклад, чи вірно, що серед чисел -2, -3, 15, 14, 7, -10, ... є такі, що їхня сума дорівнює 0 (задача про суми підмножин)? Відповідь *так*, тому що -2 - 3 + 15 - 10 = 0 легко перевірити за допомогою кількох додавань (інформацію, необхідну для перевірки позитивної відповіді, називають сертифікатом). Чи випливає звідси, що так само легко підібрати ці числа? Перевірити сертифікат так само легко, як знайти його? Здається, що підібрати числа складніше (не доведено).

Відповідь на питання про рівність класів *P* і *NP* визначила б, чи дійсно завдання легше перевірити, ніж вирішити $P \neq NP$. Або вирішити настільки ж просто, як і перевірити $P = NP$. Це можна застосовувати до всіх подібних задач, а не тільки до задачі про суми підмножин. Також цей принцип може бути застосований до задач, відповідь на які складніша, ніж ТАК чи НІ.

Відносини між класами *P* і *NP* розглядаються в теорії обчислювальної складності (розділу теорії алгоритмів), що вивчає ресурси, необхідні для вирішення деякої задачі. Найзагальніші ресурси - це час (скільки потрібно зробити кроків) і пам'ять (скільки пам'яті потрібно для вирішення задачі). З визначення класів *P* і *NP* відразу випливає наслідок. Проте досі нічого не відомо про строгість цього включення, тобто чи існує алгоритм, який лежить в *NP*, але не лежить в *P*. Якщо такого алгоритму не існує, то всі завдання, що належать класу *NP*, можна буде вирішувати за поліноміальний час, що значно спрощує обчислювальні операції. Зараз найскладніші *NP*-задачі (так звані *NP* - повні задачі) можна вирішити за експоненційний час, що майже завжди є неприйнятним. Вперше питання про рівність класів було поставлено незалежно Куком і Левіним у 1971 р. На сьогоднішній день більшість математиків вважають, що ці класи нерівні. Згідно з опитуванням, проведеним у 2002 р. серед 100 вчених, 61 людина вважає, що відповідь — «не рівні», 9 — «рівні», 22 не змогли відповісти і 8 вважають, що гіпотеза не виводиться з поточної системи аксіом і, таким чином, не може бути доведена або спростована.

Зараз проблема рівності класів *P* і *NP* є однією із семи проблем тисячоліття, за вирішення якої Математичний інститут Клея призначив премію в мільйон доларів США. У серпні 2010 року американський дослідник Вінай Деолалікар надіслав деяким вченим на перевірку своє доведення нерівності $P \neq NP$. Стівен Кук назвав його препринт «відносно серйозною спробою вирішення проблеми *P* проти *NP*».

Наведемо **гіпотезу Годжа**, що є важливою проблемою алгебраїчної геометрії. Вона була сформульована шотландським математиком Вільямом Воллансом Дугласом Годжа в період між 1930 - 1940 роками. Гіпотеза описує класи когомологій на комплексних проективних многовидах, реалізовані алгебраїчними підмноговидами. Тобто цикли Годжа є комбінаціями об'єктів, що мають геометричну інтерпретацію, — алгебраїчних циклів.

У двадцятому столітті математики винайшли потужні методи дослідження форми складних об'єктів. Основна ідея полягає в тому, щоб з'ясувати, до якої міри ми можемо апроксимувати форму даного об'єкта, склеюючи разом прості тіла зростаючої розмірності. Цей метод виявився ефективним при описі різноманітних об'єктів, що зустрічаються в математиці. При цьому були не ясні геометричні обґрунтування методу: в деяких випадках було необхідно додавати частини, що не мали ніякого геометричного тлумачення.

Гіпотеза Пуанкаре вважається найвідомішою задачею топології. Неформально кажучи, вона стверджує, що всякий «тривимірний об'єкт», що володіє деякими властивостями тривимірної сфери (наприклад, кожну петлю всередині нього повинно бути можливо стягнути), зобов'язаний бути сферою з точністю до деформації. Гіпотезу сформульовано Анрі Пуанкаре у 1904 р. Спроби довести гіпотезу Пуанкаре, як успішні, так і невдалі, привели до численних просувань у топології різноманіть. Доведення гіпотези Пуанкаре (і загальнішої гіпотези Терстона про геометризацію), опубліковано тільки в 2002 р. Григорієм Перельманом р.)

Гіпотеза Берча – Свіннертона - Дайера описує множину раціональних розв'язків рівнянь, які визначаються еліптичною кривою. Це є відкритою проблемою у теорії чисел і широко визнана як одна з найбільш складних математичних проблем. Гіпотеза була вибрана в якості однієї з семи проблем тисячоліття, включених Математичним інститутом Клея до списку задач за які запропонована премію за перше правильне доведення. Гіпотеза названа на честь математиків Брайана Берча та Пітера Свіннертона - Даєра, які сформулювали гіпотезу в першій половині 1960-х років за допомогою машинних обчислень. Станом на 2016 рік доведено лише окремі випадки гіпотези.

Література:

1. Кононенко О.Ю. Актуальні проблеми сталого розвитку: навчально - методичний посібник / О.Ю. Кононенко. –К.: ДП «Прінт сервіс», 2016. – 109 с.