

**КОМИТЕТ ПО ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ  
МВД РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**КОКШЕТАУСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**№ 2 (38), 2020**

**ВЕСТНИК  
КОКШЕТАУСКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

**КОКШЕТАУ 2020**

*О. Ю. Пазен, кандидат технических наук  
Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности,  
Украина*

## **АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА В МНОГОСЛОЙНОМ СПЛОШНОМ ШАРЕ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА**

В статье рассмотрена схема построения решения смешанной задачи теплопроводности для системы твердых тел «шар внутри многослойной сферической оболочки». Для решения исходной задачи параллельно ставится вспомогательная задача об определении распределения температурного поля в многослойной полой сферической конструкции с «удаленным» шаром достаточно малого радиуса. Для нахождения решения исходной задачи использовано идею предельного перехода путем стремления радиуса удаленного шара к нулю.

*Ключевые слова:* сферическая конструкция, прямой метод, предельный переход.

*Введение.* Внутри тел могут происходить различные процессы, сопровождающиеся выделением или поглощением тепла. Такие явления происходят при прохождении электрического тока через электронные элементы или проводники, в тепловыделяющих элементах ядерных реакторов, протекании химических реакций, испарении влаги при нагревании бетонных или железобетонных конструкции и тому подобное [1]. Такое выделение или поглощение тепла в теле может существенно влиять на процесс теплопроводности в нем. Поэтому исследования процессов теплообмена в многослойных конструкциях с учетом внутренних источников тепла является актуальной научно-технической задачей.

Теоретически, аналитические методы должны применяться к многослойным конструкциям. Однако на практике количество слоев, как правило, ограничивается двумя или тремя [2]. Это обусловлено тем, что при увеличении количества слоев значительно возрастает объем вычислений. Кроме этого, в задачах «шар внутри многослойной сферической оболочки», существует проблема ограничения решения в точке  $r = 0$ .

*Исходная задача.* Рассмотрим задачу о нагревании сплошного сферического шара радиуса  $r = r_1$ , который в дальнейшем будем называть ядром, внутри многослойной сферической оболочки радиусов  $r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < r_n$ . Между слоями существует идеальный тепловой контакт. В начальный момент времени  $\tau = 0$ , такая сферическая конструкция имеет одинаковую начальную температуру  $T = T_0$ , которая совпадает с температурой окружающей среды. На наружной поверхности конструкции происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой меняется по некоторому закону  $\psi(\tau)$ , то есть выполняется краевое условие третьего рода. Кроме этого, в ядре и слоях конструкции

предполагается наличие внутренних (распределённых) источников тепла  $q_v$ . Будем считать, что температура среды  $\psi(\tau)$  равномерно распределена по поверхности сферической оболочки так, что изотермы внутри этой конструкции представляют собой коаксиальные поверхности, а это значит, что температура  $T(r, \tau)$  зависит только от радиуса  $r$ , времени  $\tau$ , т.е. задача является симметричной. Необходимо найти распределение нестационарного температурного поля  $T(r, \tau)$  такой конструкции в любой момент времени  $\tau$ .

Такая постановка задачи сводится к решению дифференциального уравнения теплопроводности [3] с краевым условием третьего рода, условием симметрии и начальным условием соответственно

$$c\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right) + q_v, \quad r \in (0, r_n), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha (T(r_n, \tau) - \psi(\tau)), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, \tau) = 0, \quad (3)$$

$$T(r, 0) = T_0. \quad (4)$$

Здесь обозначено:  $c$  – удельная массовая теплоемкость, Дж / (кг·°С)  $r$  – координата, м;  $T$  – температура, °С;  $\alpha$  – коэффициент теплообмена, Вт/(м<sup>2</sup>·°С)  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·°С),  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $q_v$  – интенсивность внутреннего источника тепла, Вт/м<sup>3</sup>;  $\tau$  – время, с;  $\psi(\tau)$  – закон изменения температуры окружающей среды, °С.

*Вспомогательная задача.* Для того чтобы решить поставленную исходную задачу (1)-(4), в сплошной сферической конструкции, удалим шар достаточно малого радиуса  $r = r_0$ , причем  $0 < r_0 < r_1$ . Рассмотрим теперь смешанную задачу теплопроводности в многослойной полой сферической конструкции. Для того чтобы различить функцию распределения температурного поля  $T(r, \tau)$  исходной задачи от функции распределения вспомогательной задачи, обозначим последнюю через  $t(r, \tau)$ .

Итак, для нахождения распределения нестационарного температурного поля в многослойной полой сферической конструкции необходимо найти решение дифференциального уравнения теплопроводности [4-6]

$$c\rho \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right) + q_v, \quad r \in (r_0, r_n), \quad \tau > 0, \quad (5)$$

условие симметрии (3) изменим на нулевое краевое условие второго рода,

тогда получим краевые условия для уравнения (5)

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial r}(r_0, \tau) = 0, \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha(t(r_n, \tau) - \psi(\tau)), \end{cases} \quad (6)$$

при начальном условии

$$t(r, 0) = T_0. \quad (7)$$

Заметим, что решение исходной задачи (1)-(4) будет получено из решения задачи (5)-(7) путем предельного перехода при  $r_0 \rightarrow 0$ :  $T(r, \tau) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} t(r, \tau)$

*Схема решения вспомогательной задачи.* Обозначим (см. например [4]),  $t^{[1]} \stackrel{df}{=} r^2 \lambda t'_r$  – квазипроизводная,  $\theta_i$  – характеристическая функция полуоткрытого промежутка  $[r_i, r_{i+1})$ , т. е.  $\theta_i(r) = \begin{cases} 1, r \in [r_i, r_{i+1}), \\ 0, r \notin [r_i, r_{i+1}), \end{cases}$   $\lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i$ ,  $c(r) \rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \theta_i$ ,  $q_v(r) = \sum_{i=0}^{n-1} q_{vi} \theta_i$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $c_i \rho_i > 0$ ,  $\forall i = \overline{0, n-1}$ ,  $\lambda_i, c_i, \rho_i, q_{vi} \in R$ .

Умножив краевые условия (6) на  $\lambda r^2$  и  $r^2$  соответственно, получим

$$\begin{cases} t^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha r_n^2 t(r_n, \tau) + t^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha r_n^2 \psi(\tau). \end{cases} \quad (8)$$

Аналогично, как и в работах [7, 8], решение задачи (5)-(7) будем искать с помощью метода редукции [9, 10]

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau), \quad (9)$$

где одна из функций ( $u(r, \tau)$  или  $v(r, \tau)$ ) выбирается специальным образом, а другая уже определяется однозначно.

*Краевая задача для  $u(r, \tau)$  и смешанная задача для  $v(r, \tau)$ .*

Как и выше, обозначим квазипроизводные  $r^2 \lambda u'_r \stackrel{df}{=} u^{[1]}$  и  $r^2 \lambda v'_r \stackrel{df}{=} v^{[1]}$ . Определим функцию  $u(r, \tau)$  как решение краевой (квазистационарной) задачи

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial u}{\partial r} \right) + q_v = 0, \quad (10)$$

$$\begin{cases} u^{[1]}(r_0) = 0, \\ \alpha r_n^2 u(r_n, \tau) + u^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha r_n^2 \psi(\tau). \end{cases} \quad (11)$$

Подставляя (9) в уравнение (5), с учетом (10), последовательно получаем смешанную задачу для нахождения функции  $v(r, \tau)$

$$c\rho \frac{\partial}{\partial \tau}(u+v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial}{\partial r} (u+v) \right) + q_v \Rightarrow c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (12)$$

Поскольку краевые условия (11) для функции  $u(r, \tau)$  совпадают с краевыми условиями (8) для функции  $t(r, \tau)$ , получим нулевые краевые условия для определения функции  $v(r, \tau)$ , то есть

$$\begin{cases} v^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha r_n^2 v(r_n, \tau) + v^{[1]}(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

а начальное условие примет вид

$$v(r, 0) = T_0 - u(r, 0) \equiv T_0. \quad (14)$$

Схема построения решения задачи (10), (11) детально изучена и описана в работах [5, 6]. Установлено, что на каждом из промежутков  $[r_i, r_{i+1})$  решение задачи (10), (11) представляется в виде вектор-функции  $\mathbf{u}_i(r, \tau)$ , где первой координатой вектора является искомая функция  $u_i(r, \tau)$  как решение уравнения (10), а второй - ее квазипроизводная  $u_i^{[1]}(r, \tau)$ :

$$\mathbf{u}_i(r, \tau) = \mathbf{B}_i(r, r_i) \cdot \mathbf{B}(r_i, r_0) \cdot \mathbf{P}_0 + \mathbf{B}_i(r, r_i) \cdot \sum_{k=1}^i \mathbf{B}(r_i, r_k) \cdot \mathbf{Z}_k + \int_{r_i}^r \mathbf{B}_i(r, s) \cdot \mathbf{q}_i(s) ds, \quad (15)$$

где  $\mathbf{P}_0$  - начальный вектор, вычисляемый по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{B}(r_n, r_0))^{-1} \cdot (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{Q} \sum_{k=1}^n \mathbf{B}(r_n, r_k) \cdot \mathbf{Z}_k), \\ \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_n^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}(\tau) = (0, \alpha r_n^2 \psi(\tau))^T, \\ \mathbf{B}_i(r, s) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{r-s}{\lambda_i r s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(r_i, r_0) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{i-1} \frac{r_{k+1} - r_k}{\lambda_k r_{k+1} r_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Z}_k &= - \begin{pmatrix} \frac{q_{v,k-1}}{\lambda_{k-1}} \left( \frac{r_k^2}{6} - \frac{r_{k-1}^2}{2} + \frac{r_{k-1}^3}{3r_k} \right) \\ \frac{q_{v,k-1}}{3} (r_k^3 - r_{k-1}^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_k \\ z_k^{[1]} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

$$\int_{r_i}^r \mathbf{B}_i(r, s) \mathbf{q}_i ds = - \begin{pmatrix} \frac{q_{vi}}{\lambda_i} \left( \frac{r^2}{6} - \frac{r_i^2}{2} + \frac{r_i^3}{3r} \right) \\ \frac{q_{vi}}{3} (r^3 - r_i^3) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Проведя соответствующие математические вычисления, установлено, что вектор  $\mathbf{P}_0$  имеет вид

$$\mathbf{P}_0 = (p_0 \quad p_0^{[1]})^T,$$

где

$$p_0 = \alpha r_n \frac{q_{v,0}}{\lambda_0} \left( \frac{r_1^2}{6} - \frac{r_0^2}{2} + \frac{r_0^3}{3r_1} \right) + \alpha r_n \frac{q_{v0}}{3} (r_1^3 - r_0^3) \sum_{k=1}^n \frac{r_{k+1} - r_k}{\lambda_k r_{k+1} r_k} +$$

$$+ \alpha r_n \sum_{i=2}^n \left[ \frac{q_{v,i-1}}{\lambda_{i-1}} \left( \frac{r_i^2}{6} - \frac{r_{i-1}^2}{2} + \frac{r_{i-1}^3}{3r_i} \right) + \frac{q_{v,i-1}}{3} (r_i^3 - r_{i-1}^3) \sum_{k=i}^n \frac{r_{k+1} - r_k}{\lambda_k r_{k+1} r_k} \right] - \alpha r_n \psi(\tau) -$$

$$- \left( \frac{q_{v0}}{3} (r_1^3 - r_0^3) + \sum_{i=2}^n \frac{q_{v,i-1}}{3} (r_i^3 - r_{i-1}^3) \right),$$

$$p_0^{[1]} = 0.$$

Далее необходимо найти функцию  $v(r, \tau)$  как решение уравнения (12) с нулевыми краевыми условиями (13) при начальном условии (14). Метод решения такой задачи с использованием метода собственных функций подробно описан, например, в работах [5, 7, 8]. Здесь только следует заметить, что:

1) характеристическое уравнение соответствующей задачи на собственные значения имеет вид

$$\det [P + Q \cdot B(r_n, r_0, \omega)] = 0, \quad (16)$$

где  $B(r_n, r_0, \omega) = \prod_{i=1}^n B_{i-1}(r_i, r_{i-1}, \omega)$ ,  $B_i(r_{i+1}, r_i, \omega) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{pmatrix}$ ,

$$b_{11}^i = \frac{\beta_i r_i \cos(\beta_i (r_{i+1} - r_i)) + \sin(\beta_i (r_{i+1} - r_i))}{\beta_i r_{i+1}}, \quad b_{12}^i = \frac{\sin(\beta_i \cdot (r_{i+1} - r_i))}{\beta_i r_{i+1} r_i \lambda_i},$$

$$b_{21}^i = \frac{(\omega c_i \rho_i r_{i+1} r_i + \lambda_i) \sin(\beta_i (r_{i+1} - r_i)) + (\beta_i \lambda_i (r_i - r_{i+1})) \cos(\beta_i \cdot (r_{i+1} - r_i))}{\beta_i},$$

$$b_{22}^i = \frac{\beta_i r_{i+1} \cos(\beta_i (r_{i+1} - r_i)) + \sin(\beta_i (r_{i+1} - r_i))}{\beta_i r_i}, \quad \beta_i = \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}}.$$

2) Собственные векторы, построение которых также описано в [7, 8], имеют вид

$$\mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, r_0, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = (b_{11}^0, b_{21}^0)^T, \quad (17)$$

$$\mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_0, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = \tilde{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_1, \omega_k) \cdot (b_{11}^0, b_{21}^0)^T.$$

Решение задачи (12)-(14) методом собственных функций изображается в виде [5]

$$v(r, \tau) \sum_{i=0}^{n-1} v_i(r, \tau) \cdot \theta_i, \quad v_i(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} \gamma_k(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k), \quad (18)$$

где  $f_k$  и  $\gamma_k$  коэффициенты разложения начального условия и функции  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  соответственно в ряды Фурье по системе собственных функций  $R_k(r, \omega_k)$ .

**Предельный переход при  $r_0 \rightarrow 0$  и изображение решения исходной задачи (1)-(4).** На основе метода редукции решение исходной задачи изображается в виде [4]

$$T(r, \tau) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (u(r, \tau) + v(r, \tau)). \quad (19)$$

Значение начального вектора  $\mathbf{P}_0$  после предельного перехода будет иметь вид:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \alpha r_n \frac{q_{v,0} r_1^2}{6 \lambda_0} + \alpha r_n \frac{q_{v,0} r_1^3}{3} \sum_{k=1}^n \frac{r_{k+1} - r_k}{\lambda_k r_{k+1} r_k} + \\ + \alpha r_n \sum_{i=2}^n \left[ \frac{q_{v,i-1}}{\lambda_{i-1}} \left( \frac{r_i^2}{6} - \frac{r_{i-1}^2}{2} + \frac{r_{i-1}^3}{3 r_i} \right) + \frac{q_{v,i-1}}{3} (r_i^3 - r_{i-1}^3) \sum_{k=i}^n \frac{r_{k+1} - r_k}{\lambda_k r_{k+1} r_k} \right] - \alpha r_n \psi(\tau) - \\ - \left( \frac{q_{v,0} r_1^3}{3} + \sum_{i=2}^n \frac{q_{v,i-1}}{3} (r_i^3 - r_{i-1}^3) \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обозначив  $B(r_n, r_1, \omega) = B_{n-1}(r_n, r_{n-1}, \omega) \cdot B_{n-2}(r_{n-1}, r_{n-2}, \omega) \cdot \dots \cdot B_1(r_2, r_1, \omega) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ ,

получаем характеристическое уравнение (16) после предельного перехода:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \Delta(r_0) = (\alpha r_n^2 c_{11} + c_{21}) \cdot \frac{\sin(\beta_0(r_1))}{\beta_0 r_1} + (\alpha r_n^2 c_{12} + c_{22}) \cdot \frac{\beta_0 r_1 \cos(\beta_0 \cdot r_1) - \sin(\beta_0 r_1)}{\beta_0} \cdot \lambda_0 = 0, \quad (20)$$

Соответствующие собственные векторы (17) после предельного перехода получает вид:

$$\mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T = \left( \frac{\sin(\beta_0 r)}{\beta_0 r}, \frac{\beta_0 r \cos(\beta_0 \cdot r) - \sin(\beta_0 r)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T,$$

$$\mathbf{R}_{k0}(0, \omega_k) = (1, 0)^T$$

$$\mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_i(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_1, \omega_k) \cdot \left( \frac{\sin(\beta_0 r_1)}{\beta_0 r_1}, \frac{\beta_0 r_1 \cos(\beta_0 \cdot r_1) - \sin(\beta_0 r_1)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T.$$

На основе приведенных выше формул можно сделать вывод, что функция  $T(r, \tau)$  ограничена во всей конструкции и не имеет особенностей в точке  $r = 0$ .

**Модельный пример.** Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим модельный пример, о нагреве сплошной четырёхслойной сферической конструкции, состоящей из ядра и трехслойной оболочки. Теплофизические характеристики и геометрические размеры конструкции приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Теплотехнические характеристики конструкции

Параметр	ядро	слой 1	слой 2	слой 3
радиус $r$ , м	$r_0 = 0,1$	$r_1 = 0,12$	$r_2 = 0,17$	$r_3 = 0,19$
коэффициент теплопроводности $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$	0,5	0,58	2,91	52
удельная массовая теплоемкость $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$	837	850	921	420
плотность $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	2400	1800	2800	7270
внутренний источник тепла $q_v, \frac{\text{кВт}}{\text{м}^3}$	50	отсутствует	16	отсутствует

Температура вокруг наружной поверхности конструкции изменяется по стандартному температурному режиму пожара  $\psi(\tau) = 3451g\left(\frac{8\tau}{60} + 1\right) + 20$ .

Коэффициент теплообмена между поверхностью конструкции и средой пожара составляет  $\alpha = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$ . Начальная температура конструкции  $20^\circ\text{C}$ . Необходимо

найти распределение нестационарного температурного поля вдоль радиуса сферической конструкции. Применяя вышеописанный алгоритм, который реализован в системе компьютерной алгебры Maple 13 [11], получаем решение поставленной задачи в виде графика (рис. 1).



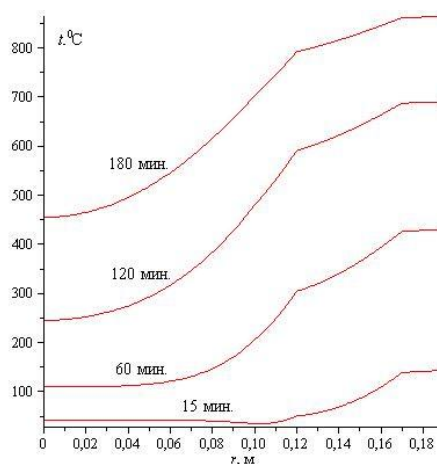


Рисунок 1 - Распределение нестационарного температурного поля сферической конструкции

*Выводы.* К решению поставленной задачи применен прямой аналитический метод для определения нестационарного температурного поля в сплошной многослойной сферической конструкции с учетом внутренних источников тепла. Использована идея предельного перехода путем устремления радиуса «удаленного» шара к нулю. Установлено, что при таком подходе все соответствующие функции не имеют особенностей в нуле, а это значит, что и решение исходной задачи является ограниченными во всей конструкции. Приведено решение модельного примера, который иллюстрирует возможности предложенного метода.

#### Список литературы

1. Шихирева Ю.В., Оборский Г.А., Савельева О.С. Особенности проектирования и управления процессами нагрева твердеющего железобетона внутренними источниками тепла // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. - 2014. - Т. 2 № 5. - С. 20-24.
2. Yang, B., & Liu, S. Closed-form analytical solutions of transient heat conduction in hollow composite cylinders with any number of layers // International Journal of Heat and Mass Transfer. - 2017. - Vol. 108. - Pp. 907-917. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.020>
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. - 600 с.
4. Tatsii R., Pazen O. Direct method of research of the temperature field in the system of multilayer spherical shell. // Scientific Journal of TNTU (Tern). – 2019. - Vol. 93, no 1. - Pp. 113-126. [https://doi.org/10.33108/visnyk\\_tntu2019.01.113](https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2019.01.113)
5. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Пазен О.Ю. Прямой метод расчета температурного поля в многослойной полой сферической конструкции // Вестник Кокшетауского технического института. – 2018. - № 1 (29). - С. 9-20.
6. Тацій Р.М., Пазен О.Ю., Ушак Т.І. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла // Пожежна безпека. – 2015. - № 27. - С. 135-141.
7. Tatsii R.M., Pazen O. Yu. (2018). Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. Vol. 91, Issue 6. pp. 1373-1384. DOI:10.1007/s10891-018-1871-3.

8. Tatsiy, R. M., Pazen, O. Y., Vovk, S. Y., Ropyak, L. Y., Pryhorovska, T. O. Numerical study on heat transfer in multilayered structures of main geometric forms made of different materials // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. -2019. -Vol. 13 (2). - Pp. 36-55. DOI: 10.24874/jsscm.2019.13.02.04
9. Арсенин В.Я. Методы математической физики / Арсенин В.Я. - М.: Наука, 1974. - 432 с.
10. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1977. - 735 с.
11. Tatsiy R., Stasiuk M., Pazen O., & Vovk S. Modeling of Boundary-Value Problems of Heat Conduction for Multilayered Hollow Cylinder // Problems of Infocommunications. Science and Technology. - 2018. - Pp. 21-25. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2018.8632131.

*О. Ю. Пазен*

*Өмір тіршілігі қауіпсіздігінің Львов мемлекеттік университеті, Украина*

#### ІШКІ ЖЫЛУ КӨЗДЕРІН ЕСЕПКЕ АЛА ОТЫРЫП, КӨП ҚАБАТТЫ ТҰТАС ШАРДАҒЫ ЖЫЛУ АЛМАСУ ПРОЦЕСТЕРІН АНАЛИТИКАЛЫҚ ЗЕРТТЕУ

Мақалада "көп қабатты сфералық қабықшаның ішіндегі шар" қатты денелер жүйесі үшін жылуөткізгіштіктің аралас есебін құру сұлбасы қарастырылған. Бастапқы есепті шешу үшін параллельді көп қабатты сфералық конструкцияның көп қабатты қуысында жеткілікті кіші радиустағы "қашықтағы" шары бар температуралық өрістің таралуын анықтау туралы қосалқы есеп қойылады. Бастапқы есептің шешімін табу үшін қашықтағы шар радиусының нөлге ұмтылу жолымен шекті өту идеясы қолданылды.

*Түйінді сөздер:* сфералық конструкция, тура әдіс, шекті өту.

*О. Yu. Pazen*

*Lviv State University of Life Safety*

#### ANALYTICAL STUDY OF HEAT EXCHANGE PROCESSES IN A MULTILAYER SPHERICAL BALL WITH ACCOUNT OF INTERNAL HEAT SOURCES

The article discusses a scheme for constructing a solution to the mixed heat conduction problem for the system of solids "a ball inside a multilayer spherical shell". To solve the initial problem, an auxiliary problem is set in parallel to determine the distribution of the temperature field in a multilayer hollow spherical structure with a "remote" ball of a sufficiently small radius. To find a solution to the original problem, the idea of the passage to the limit by tending the radius of the remote ball to zero is used.

*Keywords:* spherical construction, direct method, limit transition.