

Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен, Л. С. Шупот

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМІ БАГАТОШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ ЗА УМОВ ПОЖЕЖІ

Проблема. Актуальними задачами сьогодення є визначення розподілу температурного поля в циліндричних конструкціях типу «суцільний циліндр всередині багатошарової циліндричної оболонки». Характерною особливістю таких конструкцій є поєднання різного роду механічних та теплофізичних характеристик шарів, що робить їх більш доскональшими. Проте такий підхід зумовлює значні труднощі при розробці аналітичних методів їх дослідження. Тому розробка нових методів дослідження багатошарових, зокрема, циліндричних конструкцій є актуальною задачею сьогодення.

Мета. Застосування прямого методу до дослідження процесів теплообміну в системі «суцільний циліндр всередині багатошарової циліндричної оболонки».

Методи дослідження. Для розв'язання вихідної паралельно ставиться допоміжна задача про визначення розподілу нестационарного температурного поля у багатошаровій порожнистій циліндричній конструкції з «вилученим» циліндром достатньо малого радіуса. Реалізація розв'язку допоміжної задачі проводиться шляхом застосування методу редукції із використанням концепції квазіпохідних. Надалі використовується схема Фур'є із застосуванням модифікованого методу власних функцій.

Основні результати дослідження. Для знаходження розв'язку вихідної задачі використано ідею граничного переходу шляхом прямування радіуса вилученого циліндра до нуля. Встановлено, що при такому підході всі власні функції відповідної задачі на власні значення не мають особливостей в нулі, а це означає, що й розв'язки вихідної задачі є обмеженими у всій конструкції. Для ілюстрації запропонованого методу розв'язку модельний приклад про знаходження розподілу температурного поля у чотиришаровій колоні круглого поперечного перерізу (трубобетонна колона) за умов впливу стандартного температурного режиму пожежі. Результати обчислень представлені у вигляді об'ємного графіка зміни температури залежно від часу та просторової координати.

Висновки. До розв'язування вихідної задачі застосовано прямий метод, причому вперше використано ідею граничного переходу. У загальній постановці (функція зміни температури середовища вважається довільною, не накладається жодних обмежень на товщину оболонки та кількість шарів) таку задачу розв'язано вперше.

Структура отриманих явних точних формул дає змогу створити алгоритм розрахунку температурного поля у вигляді автоматизованих програм, де достатньо лише ввести початкові дані. Зауважимо, що такі алгоритми включають в себе: а) обчислення коренів характеристичного рівняння; б) множення скінченного числа відомих матриць; в) обчислення визначених інтегралів; г) сумування необхідної кількості членів ряду для отримання заданої точності розрахунку.

Ключові слова: циліндрична конструкція, стандартний температурний режим пожежі, прямий метод, граничний перехід

R. M. Tatsii, O. Y. Pazen, L. S. Shypot

Lviv State University of Life Safety

RESEARCH OF THE TEMPERATURE FIELD IN THE SYSTEM OF MULTILAYER CYLINDRICAL SOLID BODIES UNDER FIRE CONDITIONS

Introduction. The current urgent task is to find the temperature field distribution in cylindrical structures such as "solid cylinder inside a multilayer cylindrical shell". A characteristic feature of such structures is different mechanical and thermophysical characteristics of the layers combination, which makes them more perfect. However, this approach causes significant difficulties in developing analytical methods for their study. Therefore, new research methods development for multilayer, in particular, cylindrical structures is an urgent task today.

Purpose. Direct method is used to study the heat transfer processes in the system "one-piece cylinder inside a multilayer cylindrical shell".

Methods. To solve the initial parallel, the auxiliary problem of determining the distribution of a nonstationary temperature field in a multilayer hollow cylindrical structure with a "removed" cylinder of a sufficiently small radius is set. The solution of

the auxiliary problem is realized by applying the method of reduction using the concept of quasi-derivatives. The Fourier scheme is used by using a modified method of eigenfunctions.

Results. To find the solution to the problem, we used the idea of a boundary transition by directing the radius of the removed cylinder to zero. It is established that in this approach, all eigenfunctions of the corresponding problem have no singularities at zero, which means that the solutions of the original problem are limited in the whole structure. To illustrate the proposed method, a model example of finding the temperature field distribution in a four-layer column of circular cross-section (tubular concrete column) under the influence of the standard temperature of the fire. The results of the calculations are presented in the form of a three-dimensional graph of temperature changes depending on time and spatial coordinates.

Conclusions. A direct method was used to solve the initial problem, using the idea of a boundary transition for the first time. In the general formulation (the function of changing the temperature of the environment is considered arbitrary, no restrictions are imposed on the thickness of the shell and the number of layers) such a problem is solved for the first time.

The structure of the obtained explicit exact formulas allows creating an algorithm for calculating the temperature field in the form of automated programs, where it is enough to enter the initial data. Note that such algorithms include: a) calculating the roots of the characteristic equation; b) multiplication of a finite number of known matrices; c) calculation of definite integrals; d) summation of the required number of members of the series to obtain a given accuracy of the calculation.

Keywords: cylindrical construction, standard temperature-time curve, direct method, boundary transition

Вступ. Актуальними задачами сьогодення є визначення розподілу температурного поля в циліндричних та сферичних конструкціях типу «куля в багат шаровій сферичній оболонці» або «суцільний циліндр всередині багат шарової циліндричної оболонки». Типовими є, наприклад, задачі про нагрівання трубобетонних колон, резервуарів, трубопроводів, тепловідільних елементів циліндричної та сферичної форм у ядерних реакторах АЕС тощо. Характерною особливістю таких елементів є поєднання різного роду механічних та теплофізичних характеристик шарів, що робить їх більш досконалими. Проте такий підхід зумовлює значні труднощі при розробці аналітичних методів їх дослідження. Тому розробка нових методів дослідження багат шарових, зокрема, циліндричних конструкцій є актуальною задачею сьогодення.

Основні методи дослідження задач про визначення розподілу нестационарного температурного поля у багат шарових конструкціях умовно поділяються на три види: а) прямі або класичні, які базуються на методі відокремлення змінних [1-4]; б) операційні, що використовують різного роду інтегральні перетворення [5-8]; в) наближені аналітичні та числові методи [9, 10].

Ймовірно, що перша і найпростіша постановка задач на охолодження вкладених тіл була поставлена і розв'язана операційним методом в монографії [5]. На жаль, алгоритмів розв'язування цих задач в цитованій монографії не наведено. Крім того, в задачі про охолодження системи «суцільний циліндр в циліндрі» припускається, що оболонка є настільки тонкою, що її в першому наближенні можна вважати плоскою. Це припущення суттєво спрощує розв'язування такої задачі, але питання про величину отриманої при цьому похибки до цього часу залишається відкритим. Аналогічних задач для вкладених циліндричних та сферичних конструкцій для випадку багат шарових оболонок у доступній автотрам літературі не знайдено.

Застосування прямого методу до розв'язування задач теплообміну в багат шарових порожнистих

циліндричних конструкціях описано в публікаціях [11-12]. В основу цих публікацій покладено пряму (класичну) схему дослідження, що базується на методі редукції, концепції квазіпохідних, сучасній теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, модифікованому методі власних функцій Фур'є. Запропонований в роботі метод є поширенням цієї схеми для випадку вкладених циліндричних тіл та не накладає жодних обмежень на товщину та кількість шарів оболонки. Крім того, на зовнішній поверхні розглядається крайова умова найбільш загального типу.

Постановка вихідної задачі. Розглядається нескінченний суцільний циліндр радіусом $r = r_1$ всередині багат шарової порожнистої циліндричної оболонки радіусами $r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < r_n$ з однаковою початковою температурою $T = T_0$. Між ними існує ідеальний тепловий контакт.

На зовнішній поверхні багат шарової порожнистої циліндричної конструкції існує конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються крайові умови третього роду. Температура навколишнього середовища змінюється за деяким законом $\psi(\tau)$, тобто залежить від часу τ . Необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля $T(r, \tau)$ у будь-який момент часу τ у такій складній системі (рис. 1).

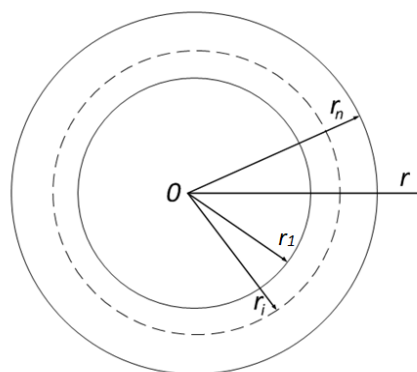


Рисунок 1 – Схема системи багат шарових циліндричних тіл (діаметральний переріз)

Вважається, що закон зміни температури $\psi(\tau)$ рівномірно розподілений у зовнішньому поверхневому шарі, так, що ізотерми всередині циліндричної конструкції являють собою концентричні кола. Це значить, що температура залежить лише від радіуса r та часу τ і задача є симетричною.

Така постановка задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності [5]

$$c\rho \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} \right), r \in [0, r_n], \tau > 0, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$T(r, 0) = T_0. \quad (2)$$

крайовою умовою

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha(T(r_n, \tau) - \psi(\tau)), \quad (3)$$

та умовою симетрії [5]

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, \tau) = 0. \quad (4)$$

Тут $c(r)$ – питома масова теплоємність матеріалу, Дж/(кг·°C), $\rho(r)$ – густина матеріалу, кг/м³, $\lambda(r)$ – його коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·°C), α – коефіцієнт теплообміну, Вт/(м²·°C).

Допоміжна задача. У системі циліндр всередині багатошарової циліндричної оболонки, «вилучимо» циліндр радіусом $r = r_0$, $0 < r_0 < r_1$ та розглянемо мішану задачу теплопровідності для багатошарової порожнистої циліндричної конструкції, зображеної на рис. 2. Для того, щоб розрізнити функцію розподілу температурного поля $T(r, \tau)$ вихідної задачі від функції розподілу допоміжної задачі, позначатимемо останню через $t(r, \tau)$.

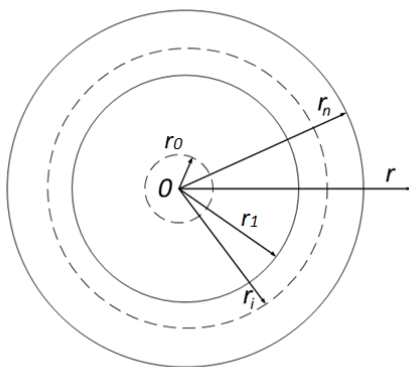


Рисунок 2 – Схема багатошарової порожнистої циліндричної конструкції

Нехай θ_i – характеристична функція [11] проміжку $[r_i, r_{i+1})$, тобто

$$\theta_i(r) = \begin{cases} 1, & r \in [r_i, r_{i+1}), \\ 0, & r \notin [r_i, r_{i+1}), \end{cases} i = \overline{0, n-1}.$$

Позначимо

$$\lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i, \quad c(r) \rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \theta_i,$$

$$\lambda_i > 0, \quad c_i \rho_i > 0, \quad \forall i = \overline{0, n-1}, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i \in R.$$

Для знаходження розподілу нестационарного температурного поля $t(r, \tau)$ у багатошаровій порожнистій циліндричній конструкції необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності [12]

$$c\rho \frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r} \right), r \in [r_0, r_n], \tau > 0, \quad (5)$$

з початковою умовою

$$t(r, 0) = T_0. \quad (6)$$

та крайовими умовами

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial r}(r_0, \tau) = 0, \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha(t(r_n, \tau) - \psi(\tau)). \end{cases} \quad (7)$$

Зауважимо, що розв'язок вихідної задачі (1)-(4) буде отримано з розв'язку задачі (5)-(7) шляхом граничного переходу при $r_0 \rightarrow 0$.

Введемо позначення квазіпохідної $t^{[1]} = r\lambda t'_r$, та помножимо крайові умови (7) на λr та r відповідно. Тоді отримаємо

$$\begin{cases} t^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha r_n t(r_n, \tau) + t^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha r_n \psi(\tau). \end{cases} \quad (8)$$

Надалі будемо слідувати схемі, що детально описана в роботі [12].

Метод редукції. Розв'язок задачі (5)-(7) шукатимемо за допомогою методу редукції [11-13] у вигляді

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau), \quad (9)$$

де одна з функцій ($u(r, \tau)$ або $v(r, \tau)$) вибирається спеціальним чином, а інша вже визначається однозначно.

Крайова задача для $u(r, \tau)$ та мішана задача для $v(r, \tau)$. Як і вище, позначимо квазіпохідні $r\lambda u'_r = u^{[1]}$ та $r\lambda v'_r = v^{[1]}$. Визначимо функцію $u(r, \tau)$ як розв'язок крайової (квазістационарної) задачі:

$$(r\lambda u')'_r = 0, \quad (10)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u^{[1]}(r_0) = 0, \\ \alpha r_n u(r_n, \tau) + u^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha r_n \psi(\tau). \end{cases} \quad (11)$$

Підставляючи (9) у рівняння (5), з урахуванням (10), послідовно отримуємо мішану задачу для функції $v(r, \tau)$

$$c\rho \frac{\partial}{\partial \tau}(u+v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial}{\partial r}(u+v) \right) \Rightarrow c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (12)$$

Оскільки крайові умови (11) для функції $u(r, \tau)$ справджують крайові умови (8) для функції $t(r, \tau)$, отримаємо нульові крайові умови для визначення функції $v(r, \tau)$, тобто

$$\begin{cases} v^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha r_n v(r_n, \tau) + v^{[1]}(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

а початкова умова набуде вигляду

$$v(r, 0) = T_0 - u(r, 0) \equiv T_0. \quad (14)$$

Розв'язування крайової задачі (10), (11). Введемо вектор $\mathbf{u} = (u, u^{[1]})^T$ та матрицю

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r\lambda(r) & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Тоді квазидиференціальне}$$

рівняння (10) зводиться до розв'язування еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь 1-го порядку [12]

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u} \quad (15)$$

На кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ система (15) має вигляд

$$\mathbf{u}_i' = A_i \mathbf{u}_i, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r\lambda_i & 0 \end{pmatrix}$$

Ввівши матриці $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_n & 1 \end{pmatrix}$ та

вектор $\mathbf{\Gamma} = (0, \alpha r_n \psi(\tau))^T$, крайові умови (11) запишемо у матричному вигляді

$$P \cdot \mathbf{u}(r_0) + Q \cdot \mathbf{u}(r_n) = \mathbf{\Gamma},$$

Безпосередньою перевіркою переконаємось, що матриця Коші $B_i(r, s)$ системи (15), має вигляд

$$B_i(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r) - \ln(s)}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (16)$$

Для довільного $k \geq i$ позначимо

$$B(r_k, r_i) \stackrel{df}{=} B_{k-1}(r_k, r_{k-1}) \cdot B_{k-2}(r_{k-1}, r_{k-2}) \cdots B_i(r_{i+1}, r_i). \quad (17)$$

При цьому вважаємо, що $B(r_k, r_k) = E$, де E – одинична матриця.

Структура (16) матриці $B_k(r, s)$ дає можливість встановити структуру матриці (17), а саме:

$$B(r_k, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} \frac{\ln(r_{m+1}) - \ln(r_m)}{\lambda_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В роботі [12] встановлено, що на кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$, розв'язок задачі (10), (11) має вигляд

$$\mathbf{u}_i(r, \tau) = B_i(r, r_i) \cdot B(r_i, r_0) \cdot \mathbf{P}_0, \quad i = \overline{0, n-1}$$

де \mathbf{P}_0 – початковий вектор, який визначається такою формулою:

$$\mathbf{P}_0 = (P + Q \cdot B(r_n, r_0))^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\ln(r_{i+1}) - \ln(r_i)}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha r_n \psi(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Відповідно, розв'язок задачі (10), (11) на кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ зображується так:

$$\mathbf{u}_i(r) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r) - \ln(r_i)}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\ln(r_{k+1}) - \ln(r_k)}{\lambda_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отже, розв'язок крайової задачі (10), (11) $u(r, t) \equiv \psi(\tau)$, тобто не залежить від радіуса r .

Розв'язування мішаної неоднорідної задачі для функції $v(r, \tau)$. Оскільки функція $u(r, \tau)$ вже є відомою, то задача (12) для функції $v(r, \tau)$ набуде вигляду

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \psi'(\tau),$$

з нульовими крайовими умовами (13) при початковій умові (14).

Метод Фур'є та задача на власні значення. Нетривіальні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (18)$$

з крайовими умовами (13) шукатимемо у вигляді [12]

$$v(r, \tau) = e^{-\omega\tau} \cdot R(r), \quad (19)$$

де ω – параметр, а $R(r)$ – невідома функція.

Ввівши квазіпохідну $R^{[1]} = r\lambda R'$, та підставляючи праву частину (19) у рівняння (18) отримуємо квазидиференціальне рівняння [12]

$$(r\lambda R')' + \omega c\rho r R = 0, \quad (20)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} R^{[1]}(r_0) = 0, \\ \alpha r_n R(r_n) + R^{[1]}(r_n) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Задача (20), (21) є класичною задачею на власні значення, у якій необхідно знайти значення ω_k

(власні значення) при яких існують відповідні їм нетривіальні розв'язки $R_k(r, \omega_k)$ (власні функції) задачі (20), (21). Як відомо, всі власні значення цієї задачі є додатними та різними.

Конструктивна побудова власних функцій.

Введемо вектор $\mathbf{R} = (R, R^{[1]})^T$ та матрицю

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda(r)} \\ -\omega c(r)\rho(r) & 0 \end{pmatrix},$$

зведемо квазідиференціальне рівняння (20) до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$

Відповідну систему на проміжку $[r_i, r_{i+1})$ запишемо у вигляді

$$\mathbf{R}'_i = A_i \cdot \mathbf{R}_i, \quad (22)$$

з матрицями $A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda_i} \\ -\omega c_i \rho_i r & 0 \end{pmatrix}$

Рівняння (20) можна переписати у вигляді

$$(rR')' + \beta_i^2 rR = 0,$$

де позначено $\beta_i = \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}} \quad i = \overline{0, n-1}$.

У роботі [12] встановлено, що матриця Коші системи (22) має вигляд

$$B_i(r, s, \omega) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{pmatrix},$$

$$b_{11}^i = \frac{\pi \beta_i s (J_1(\beta_i, s) Y_0(\beta_i, r) - J_0(\beta_i, r) Y_1(\beta_i, s))}{2},$$

$$b_{12}^i = \frac{\pi (J_0(\beta_i, s) Y_0(\beta_i, r) - J_0(\beta_i, r) Y_0(\beta_i, s))}{2\lambda_i},$$

$$b_{21}^i = \frac{\pi \lambda_i \beta_i^2 r s (J_1(\beta_i, r) Y_1(\beta_i, s) - J_1(\beta_i, s) Y_1(\beta_i, r))}{2},$$

$$b_{22}^i = \frac{\pi \beta_i r (J_1(\beta_i, r) Y_0(\beta_i, s) - J_0(\beta_i, s) Y_1(\beta_i, r))}{2},$$

$i = \overline{0, 1}$.

де J_0, J_1 і N_0, N_1 – функції Бесселя та Неймана нульового та першого порядків відповідно.

Нетривіальні розв'язки $\mathbf{R}(r, \omega)$ системи (22) шукатимемо у вигляді [12]

$$\mathbf{R}(r, \omega) = B(r, r_0, \omega) \cdot \mathbf{C}, \quad (23)$$

де $B(r, r_0, \omega) = B_0(r, r_0, \omega)\theta_0 + B_1(r, r_1, \omega)B_0^{\times}$

$$\times (r_1, r_0, \omega)\theta_1 + \dots + B_{n-1}(r, r_{n-1}, \omega) \prod_{i=1}^{n-1} B_{i-1}(r_i, r_{i-1}, \omega),$$

а $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$ – деякий ненульовий вектор.

Застосувавши до рівності (23) крайові умови (21) (при $\mathbf{\Gamma}(\tau) \equiv \mathbf{0}$), отримаємо

$$P \cdot \mathbf{R}(r_0, \omega) + Q \cdot \mathbf{R}(r_n, \omega) = [P \cdot B(r_0, r_0, \omega) + Q \cdot B(r_n, r_0, \omega)] \cdot \mathbf{C} = 0.$$

Оскільки $B(r_0, r_0, \omega) = E$, де E – одинична матриця, приходимо до рівності

$$[P + Q \cdot B(r_n, r_0, \omega)] \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (24)$$

Для існування нетривіального вектора \mathbf{C} у (24) необхідно і достатньо щоб виконувалась така умова

$$\det [P + Q \cdot B(r_n, r_0, \omega)] = 0. \quad (25)$$

Позначимо

$$B(r_n, r_1, \omega) = B_{n-1}(r_n, r_{n-1}, \omega) \cdot B_{n-2}(r_{n-1}, r_{n-2}, \omega) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot B_1(r_2, r_1, \omega) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Рівняння (25) – характеристичне рівняння задачі на власні значення (20), (21), яке у розгорнутому вигляді можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} & (\alpha r_n c_{11} + c_{21}) \frac{\pi \beta_0 r_0 (J_1(\beta_0, r_0) Y_0(\beta_0, r_1) - J_0(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0))}{2} + \\ & + (\alpha r_n c_{12} + c_{22}) \frac{\pi \lambda_0 \beta_0^2 r_1 r_0 (J_1(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0) - J_1(\beta_0, r_0) Y_1(\beta_0, r_1))}{2} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Для знаходження нетривіального вектора $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$ покладемо у рівність (24) ω_k замість ω . Використавши позначення (26) прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ((\alpha r_n c_{11} + c_{21}) b_{11}^0 + (\alpha r_n c_{12} + c_{22}) b_{21}^0) & ((\alpha r_n c_{11} + c_{21}) b_{12}^0 + (\alpha r_n c_{12} + c_{22}) b_{22}^0) \\ 1 & + ((\alpha r_n c_{12} + c_{22}) b_{11}^0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ \left(((\alpha r_n c_{11} + c_{21}) b_{11}^0 + (\alpha r_n c_{12} + c_{22}) b_{21}^0) C_1 + \right. \\ \left. + ((\alpha r_n c_{11} + c_{21}) b_{12}^0 + (\alpha r_n c_{12} + c_{22}) b_{22}^0) C_2 \right) = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи дорівнює нулеві, то одне з рівнянь (наприклад, друге) можна відкинути. Звідси випливає, що $C_2 = 0$ при будь-якому ненульовому значенні C_1 . Поклавши, наприклад, $C_1 = 1$, отримуємо, що нетривіальний вектор \mathbf{C} можна записати у вигляді:

$$C = (1, 0)^T.$$

Нетривіальний розв'язок відповідної до (20) системи тоді запишемо у вигляді

$$R_k(r, \omega_k) = \tilde{B}(r, r_0, \omega) \cdot (1, 0)^T = \sum_{i=0}^{n-1} R_{ki} \theta_i, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

На проміжках $[r_0, r_1]$ та $[r_{i-1}, r_i]$ власні вектори мають вигляд

$$R_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, r_0, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = (b_{11}^0, b_{21}^0)^T, \\ R_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_0, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = \\ = \tilde{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_1, \omega_k) \cdot (b_{11}^0, b_{21}^0)^T. \quad (27)$$

Побудова розв'язку мішаної задачі для функції $v(r, \tau)$. Схема побудови розв'язку цієї задачі методом власних функцій детально описана в роботах [11-13, 16-18]. Цей розв'язок зображується у такому вигляді:

$$v(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} \gamma_k(s) ds \right] \cdot R_k(r, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(r, \tau) \cdot \theta_i,$$

$$v_i(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} \gamma_k(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k),$$

де f_k та γ_k коефіцієнти розвинення початкової умови та функції $\psi(\tau)$ відповідно в ряди Фур'є за системою власних функцій $R_k(r, \omega_k)$.

Граничний перехід при $r_0 \rightarrow 0$ та зображення розв'язку вихідної задачі (1)-(2). На основі методу редукції розв'язок вихідної задачі зображується у вигляді [13]

$$T(r, \tau) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (u(r, \tau) + v(r, \tau)) = \\ = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left(\psi(\tau) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{ki} \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} \gamma_{ki}(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k) \theta_i \right).$$

Зауваження! Оскільки [13]

$$J_1(\beta_0 r_0) = \frac{\beta_0 r_0}{2} + \dots,$$

$$Y_1(\beta_0 r_0) = \frac{2}{\pi} J_1(\beta_0 r_0) \left(\ln \frac{\beta_0 r_0}{2} + const \right) - \\ - \frac{2}{\pi \beta_0 r_0} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m \beta_0 r_0}{m!(m+1)!} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \right],$$

то

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (J_1(\beta_0, r_0) Y_0(\beta_0, r_1) - J_0(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0)) = \frac{2J_0(\beta_0, r_1)}{\pi \beta_0}, \quad (28)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (J_1(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0) - J_1(\beta_0, r_0) Y_1(\beta_0, r_1)) = -\frac{2J_1(\beta_0, r_1)}{\pi \beta_0},$$

На основі (28) отримуємо характеристичне рівняння (26) задачі на власні значення (20), (21) після граничного переходу:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \Delta(r_0) = (\alpha r_n c_{11} + c_{21}) J_0(\beta_0, r_1) - (\alpha r_n c_{12} + c_{22}) \lambda_0 \beta_0 r_1 J_1(\beta_0, r_1) = 0 \quad (29)$$

Відповідні власні вектори (27) зобразяться так:

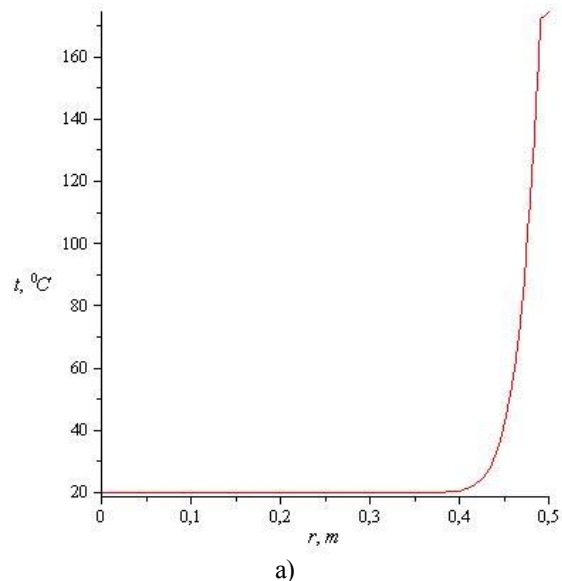
$$R_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T = (J_0(\beta_0 \cdot r), -\lambda_0 \beta_0 r J_0(\beta_0 \cdot r))^T,$$

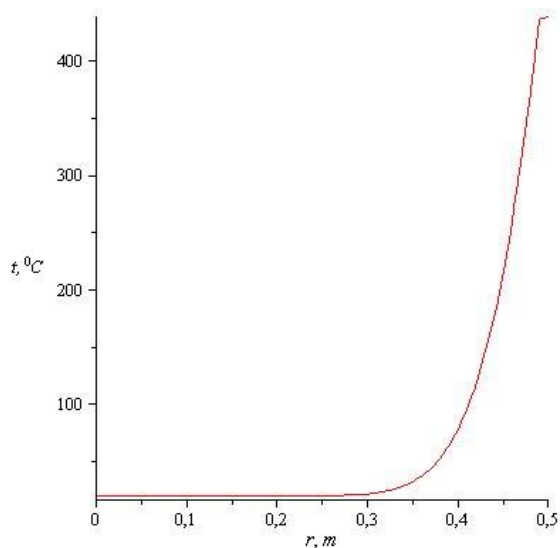
$$R_{k0}(0, \omega_k) = (1, 0)^T.$$

$$R_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_1, \omega) \cdot (J_0(\beta_0 \cdot r_1), -\lambda_0 \beta_0 r_1 J_0(\beta_0 \cdot r_1))^T.$$

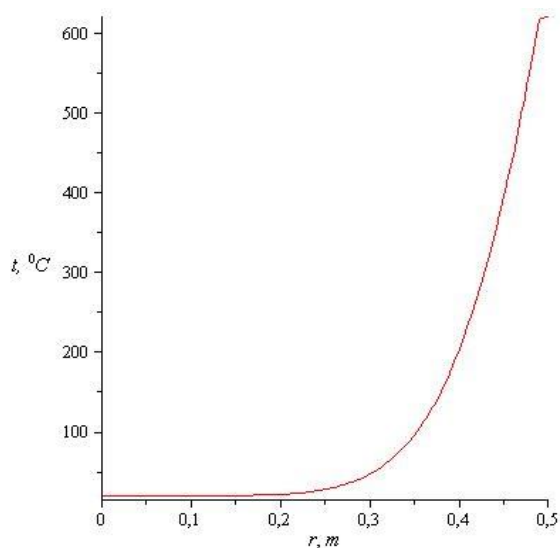
Модельний приклад. В якості модельного прикладу, розглянемо задачу про нагрівання чотиришарової труобетонної колони, яка виготовлена з бетонного осердя радіусом $r_0 = 0,04$ м, шару сталі $r_1 = 0,05$ м, шару бетону $r_2 = 0,49$ м та шару сталі $r_3 = 0,5$ м. Для розрахунку приймалися наступні характеристики: питома масова теплоємність бетону $c_0 = c_2 = 840 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, сталі $c_1 = c_3 = 470 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$; коефіцієнт теплопровідності бетону $\lambda_0 = \lambda_2 = 1,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$, сталі $\lambda_1 = \lambda_3 = 56 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$; густина бетону $\rho_0 = \rho_2 = 2200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, сталі $\rho_1 = \rho_3 = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; закон зміни температури навколишнього середовища $\psi(\tau) = 345 \cdot \lg\left(\frac{8 \cdot \tau}{60} + 1\right) + 20$; коефіцієнт теплообміну між поверхнею конструкції та навколишнім середовищем $\alpha = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$; початкова температура конструкції $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

Використавши запропонований метод та програмне забезпечення Maple 13, отримали результат про розподіл нестационарного температурного поля (рис. 3) та густини теплового потоку (рис. 4) у вигляді графіків. Слід зауважити, що обчислення було проведено для перших 50 та 100 коренів характеристичного рівняння (29) що забезпечило точність результату до 0,000001.

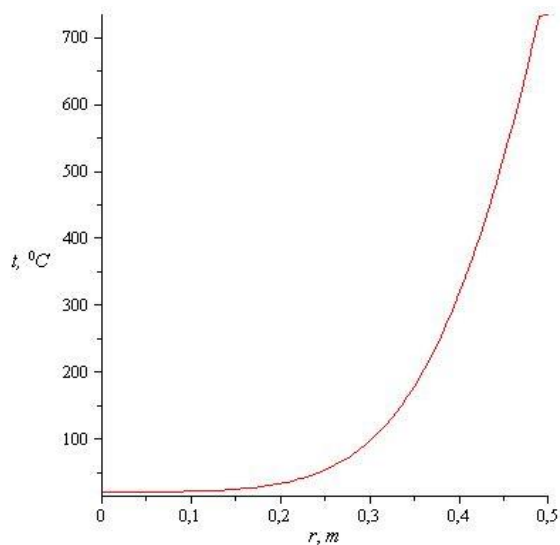




б)



в)



г)

Рисунок 3 – Розподіл нестационарного температурного поля
а) 15 хв, б) 60 хв, в) 120 хв, г) 180 хв

Результати розрахунків також можна виводити у вигляді аналітичних залежностей, 3D-графіків, табличних даних тощо.

Висновки. До розв'язування вихідної задачі застосовано прямий метод, причому використано ідею граничного переходу. Структура отриманих у роботі точних формул дозволяє створити алгоритм розрахунку температурного поля у вигляді автоматизованих програм, де достатньо лише ввести початкові дані.

Результати роботи можуть бути використані зокрема, при розрахунку межі вогнестійкості багат шарових колон циліндричної форми, що є невід'ємною складовою забезпечення пожежної безпеки.

Розв'язаний приклад є модельним, що ілюструє лише можливості запропонованого методу. Відзначимо, що характер зміни температури та теплового потоку в багат шаровій суцільній сфері досліджено в роботі [14].

Список літератури:

1. F. de Monte. (2003) Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results, International Journal of Heat and Mass Transfer. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(02\)00417-9](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00417-9)
2. Singh S, Jain PK, Rizwan Uddin. (2008) Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction, International Journal of Thermal Sciences, 46:1455-1469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2007.01.031>
3. Singh S, Jain PK, Rizwan Uddin. (2009) Analytical solution to transient asymmetric heat conduction in a multilayer annulus, Journal of Heat Transfer, 131:113-119. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2977553>
4. Wojcik1 W, Alimzhanova ZhM, Velyamov TT, Akhmetova AM (2019) About one model of pumping oil mixture of different viscosities through a single pipeline in an unsteady thermal field, News of the National academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences, 437:207-214. <https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.144>
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности/ А.В. Лыков –М.: Высшая школа, 1967. – 600с .
6. Lu X, Tervola P, Viljanen M. (2005) A new analytical method to solve the heat equation for a multi-dimensional composites slab, Journal of Physics A: Mathematical and General, 38:2873-2890. DOI: 10.1088/0305-4470/38/13/004
7. Lu X, Tervola P, Viljanen M. (2006) Transient analytical solution to heat conduction in composite circular cylinder, International Journal of Heat and Mass Transfer, 49:341-348. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019>
8. Singh S, Jain PK, Rizwan Uddin. (2011) Finite integral transform method to solve a symmetric heat

conduction in a multilayer annulus with time-dependent boundary conditions, Nuclear Engineering and Design, 241:144-154. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2010.10.010

9. Özişik MN, Orlande HRB, Colaço MJ, Cotta RM. (2017) Finite Difference Methods in Heat Transfer, Second Edition. New York: CRC Press. ISBN: 13: 978-1-4822-4345-1

10. Gosz MR. (2017) Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer. New York: CRC Press ISBN: 9781315275857

11. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. (2016) General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. vol. 89, no. 2. pp. 357-368. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>

12. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. (2018) Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. vol. 91, no. 6. pp. 1373-1384. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-018-1871-3>

13. Тацій Р.М. Пазен О.Ю., Шипот Л.С. Визначення нестационарного температурного поля в системі двох циліндричних тіл за умов пожежі. Збірник наукових праць Пожежна безпека. Львів. № 34. 2019. С. 84-90. DOI: 10.32447/20786662.34.2019.14

14. Пазен, О. Ю. (2020). Аналитическое исследование процессов теплообмена в многослойном сплошном шаре с учетом внутренних источников тепла. Журнал «Вестник Кокшетауского технического института». КТИКЧСМВДРК. № 2 (38), 2020 г. С. 46-54.

References:

1. F. de Monte. (2003) Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results, International Journal of Heat and Mass Transfer . DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(02\)00417-9](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00417-9)

2. Singh S, Jain PK, Rizwan Uddin. (2008) Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction, International Journal of Thermal Sciences, 46:1455-1469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2007.01.031>

3. Singh S, Jain PK, Rizwan Uddin. (2009) Analytical solution to transient asymmetric heat conduction in a multilayer annulus, Journal of Heat Transfer, 131:113-119. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2977553>

4. Wojcikl W, Alimzhanova ZhM, Velyamov TT, Akhmetova AM (2019) About one model of pumping

oil mixture of different viscosities through a single pipeline in an unsteady thermal field, News of the National academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences, 437:207-214. <https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.144>

5. Lykov AV (1967) Heat conduction theory [Терорија теплопроводности], High school, Moscow, USSR.

6. Lu X, Tervola P, Viljanen M. (2005) A new analytical method to solve the heat equation for a multidimensional composites slab, Journal of Physics A: Mathematical and General, 38:2873-2890. DOI: 10.1088/0305-4470/38/13/004.

7. Lu X, Tervola P, Viljanen M. (2006) Transient analytical solution to heat conduction in composite circular cylinder, International Journal of Heat and Mass Transfer, 49:341-348. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019>.

8. Singh S, Jain PK, Rizwan Uddin. (2011) Finite integral transform method to solve a symmetric heat conduction in a multilayer annulus with time-dependent boundary conditions, Nuclear Engineering and Design, 241:144-154. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2010.10.010.

9. Özişik MN, Orlande HRB, Colaço MJ, Cotta RM. (2017) Finite Difference Methods in Heat Transfer, Second Edition. New York: CRC Press. ISBN: 13: 978-1-4822-4345-1

10. Gosz MR. (2017) Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer. New York: CRC Press ISBN: 9781315275857

11. Pazen OYu, Tatsii RM. (2016) General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 89:357-368. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>.

12. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. (2018) Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. vol. 91, no. 6. pp. 1373-1384. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-018-1871-3>

13. Tatsiy R.M. Pazen O.YU., Shypot L.S. (2019) Vyznachennya nestatsionarnoho temperaturnoho polya v systemi dvokh tsylindrychnykh til za umov pozhezhi. Zbirnyk naukovykh prats' Pozhezha bezpeka. L'viv. № 34. S. 84-90 DOI: 10.32447/20786662.34.2019.14

14. Pazen, O. YU. (2020). Analiticheskoye issledovaniye protsessov teploobmena v mnogosloynom sploshnom share s uchetom vnutrennykh istochnikov tepla. Zhurnal «Vestnik Kokshetauskogo tekhnicheskogo instituta». КТИКЧСМВДРК. № 2 (38), 2020 г. С. 46-54.

* Науково-методична стаття