

**Львівський державний університет  
безпеки життєдіяльності**

**Роман ТАЦІЙ  
Марта СТАСЮК  
Олег ПАЗЕН**

**ЕЛЕМЕНТИ  
МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ  
ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

**Львів 2021**

УДК 517.912  
Т 12

**Рецензенти:** **Михайло СЕМЕРАК**, доктор технічних наук, професор, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, заслужений діяч науки і техніки України, завідувач кафедри теплоенергетики, теплових та атомних електричних станцій Національного університету «Львівська політехніка»;

**Петро ГАЩУК**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри експлуатації транспортних засобів та пожежно-рятувальної техніки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності.

*Рекомендовано до друку вченою радою  
Львівського державного університету безпеки життєдіяльності  
(протокол №4 від 25 листопада 2020 року)*

**Тацій, Роман.**

Елементи математичного моделювання та прикладної математики : навчальний посібник / Роман ТАЦІЙ, Марта СТАСЮК, Олег ПАЗЕН – Львів : ЛДУ БЖД, 2021. – 182 с. Бібліогр. с. 181 (7 назв).

У посібнику викладено елементи математичного моделювання та прикладної математики. Тут, зокрема, представлено нові наукові результати, які до цього часу не були опублікованими в навчальній літературі. У книзі розглянуто застосування квазидиференціальних рівнянь та прямого методу дослідження процесів теплообміну в багат шарових структурах.

Для курсантів та студентів старших курсів, магістрів та ад'юнктів за спеціальністю «Пожежна безпека». Посібник може бути корисним для дослідників, що мають справу з крайовими задачами.

© Роман ТАЦІЙ, 2021;  
© Марта СТАСЮК, 2021;  
© Олег ПАЗЕН, 2021  
© ЛДУ БЖД, 2021

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	6
<b>Розділ 1. Математичні моделі. Основні поняття</b> .....	8
1.5. Приклади найпростіших математичних моделей.....	8
1.2. Відповідність математичної моделі і критерій практики.....	11
1.3. Розвиток і уточнення математичної моделі.....	12
1.3.1. Уточнена модель вільного падіння тіла.....	13
1.3.2. Коливання в електричному колі з опором.....	15
<b>Розділ 2. Рівняння математичної фізики – математичні моделі реальних фізичних явищ</b> .....	18
2.1. Приклади побудови математичних моделей деяких фізичних явищ.....	18
2.1.1. Рівняння малих поперечних коливань струни.....	18
2.1.2. Лінійна задача про розподіл тепла.....	23
2.2. Задача Коші для рівняння коливань струни. Метод Даламбера.....	27
2.3. Мішана крайова задача для рівняння коливань струни. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є).....	30
2.4. Задача Коші для рівняння теплопровідності. Формула Пуассона.....	36
2.5. Мішана крайова задача для рівняння теплопровідності. Метод Фур'є і метод власних функцій.....	41
2.5.1. Розв'язок однорідної задачі.....	42
2.5.2. Розв'язок неоднорідної (вихідної) задачі (метод власних функцій).....	44

2.6. Рівняння Лапласа. Розв'язування задачі Діріхле в крузі методом Фур'є.....	48
2.7. Задача Діріхле в концентричному круговому кільці.....	53
Завдання для самостійного розв'язування.....	57
<b>Розділ 3. Лінійні диференціальні рівняння (ЛДР) 2-го порядку.....</b>	<b>62</b>
3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку..	62
3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.....	64
3.3. Лінійні неоднорідні рівняння 2-го порядку.....	68
3.4. Метод Коші знаходження частинного розв'язку $y^*(x)$ ..	68
Завдання для самостійного розв'язування.....	73
Відповіді .....	75
<b>Розділ 4. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....</b>	<b>78</b>
4.1. Однорідні системи.....	78
4.2. Матриця Коші однорідної системи диференціальних рівнянь.....	81
4.3. Метод Коші розв'язування систем диференціальних рівнянь.....	82
Завдання для самостійного розв'язування.....	85
Відповіді .....	90
<b>Розділ 5. Системи лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами.....</b>	<b>93</b>
5.1. Однорідні системи.....	93
5.2. Неоднорідні системи.....	100

<b>Розділ 6. Квазідиференціальні рівняння 2-го порядку з кусково-сталими коефіцієнтами</b> .....	106
6.1. Постановка задачі.....	106
6.2. Розв'язування однорідної задачі.....	108
6.3. Розв'язування неоднорідної задачі.....	111
<b>Розділ 7. Крайові задачі</b> .....	118
7.1. Основні поняття.....	118
7.2. Приклади розв'язування крайових задач.....	119
<b>Розділ 8. Основи прямого методу дослідження процесів теплообміну в багат шарових плоских конструкціях</b> ...	135
8.1. Модель теплопровідності. Загальні положення теорії теплопровідності.....	135
8.2. Основні методи розв'язування крайових задач теплообміну.....	137
8.3. Порівняння прямих та операційних методів.....	139
8.4. Постановка задачі та основні позначення.....	140
8.5. Метод редуції.....	142
8.5.1. Розв'язування крайової задачі.....	143
8.5.2. Метод Фур'є та задача на власні значення.....	148
8.5.3. Конструктивна побудова власних функцій.....	150
8.5.4. Розвинення в ряд Фур'є за системою власних функцій.....	153
8.5.5. Побудова розв'язку мішаної задачі.....	155
8.6. Модельний приклад.....	157
8.7. Алгоритм обчислення температурного поля двошарової плоскої конструкції у системі комп'ютерної алгебри Maple.....	177
<b>Рекомендована література</b> .....	181

## Вступ

*Предмет математика настільки серйозний, що не варто знехтувати нагодою зробити його трохи цікавішим.*

**Блез Паскаль**

Навчальний посібник “Елементи математичного моделювання та прикладної математика” є спеціальним курсом технічного спрямування.

Вивчення різних явищ природи завжди починається з їх формалізації або з побудови відповідних **математичних моделей**: виділяються найбільш характерні риси того чи іншого явища і описуються за допомогою математичних співвідношень. Такий підхід дозволяє в подальшому вже для побудованої математичної моделі використовувати потужні математичні методи.

Математичні моделі ніколи не є адекватними до об’єктів, які вони описують, оскільки завжди ґрунтуються на спрощенні та ідеалізації. Ступінь адекватності (відповідності) об’єкта і його математичної моделі може перевірити лише експеримент. Цей критерій практики дозволяє порівняти різноманітні гіпотетичні моделі і вибрати з них таку, яка є найбільш простою і одночасно в границях потрібної точності правильно передає властивості об’єкта, що вивчається (так званий перший етап). Якщо ж на цьому етапі така точність не досягається, то така модель потребує вдосконалення.

На шляху вдосконалення математичної моделі слід враховувати ті характеристики даного процесу, які необґрунтовано були відкинуті при створенні спрощеної моделі. Якщо на цьому етапі бажана точність досягається, то модель вважається адекватною. Якщо ж ні – знову вдосконалюється.

Зауважимо, що математичні моделі дають змогу звести дослідження реального об'єкта до розв'язування суто математичної задачі, стимулюючи при цьому вдосконалення і розвиток старих, а також створення нових математичних методів. Сукупність таких методів в широкому розумінні й називають "*прикладною математикою*", підкреслюючи цією назвою роль математики для процесу пізнання законів реального світу.

## Розділ 1. Математичні моделі. Основні поняття

### 1.1. Приклади найпростіших математичних моделей

В цьому розділі розглянемо приклади побудови та уточнення найпростіших математичних моделей деяких фізичних явищ, що ілюструють можливі схеми їх математичного опису. Кількість таких моделей далі буде примножено, наприклад, при вивченні рівнянь математичної фізики. Очевидно, що такі приклади далеко не вичерпують процеси пізнання навколишнього світу.

**Приклад 1.1.** Розглянемо задачу про вільне падіння тіла  $M$  маси  $m$  під дією сили тяжіння  $P$ , без урахування опору середовища (рис.1.1).



Рис. 1.1. Вільне падіння тіла

Позначимо через  $v = v(t)$  швидкість падіння тіла  $M$ , що залежить від часу  $t$ . Тоді сила тяжіння  $P = mg$ , ( $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – прискорення вільного падіння) в кожен момент часу, згідно з другим законом Ньютона, врівноважується силою інерції  $\Phi = m \frac{dv}{dt}$ . Тому можна записати таке рівняння  $m \frac{dv}{dt} = mg$ , з якого після скорочення на  $m$ , отримуємо:

$$\frac{dv}{dt} = g.$$

Після інтегрування цього найпростішого диференціального рівняння (з відокремленими змінними)



матимемо  $v = gt + C$ , де  $C$  – довільна стала. Для її визначення скористаємося початковими умовами, які можна сформулювати так: припустимо, що в початковий момент часу ( $t=0$ ) тіло  $M$  мало початкову швидкість  $v_0$ . Звідси отримуємо, що  $v_0 = C$ . Отже швидкість тіла  $M$  під час падіння буде змінюватися в часі за такою лінійною залежністю

$$v = gt + v_0. \quad (1.1)$$

**Приклад 1.2.** До джерела з електрорушійною силою  $E(t)$  підключено контур, який складається з послідовно з'єднаних котушки індуктивності  $L$  та ємності  $C$  (рис. 1.2).

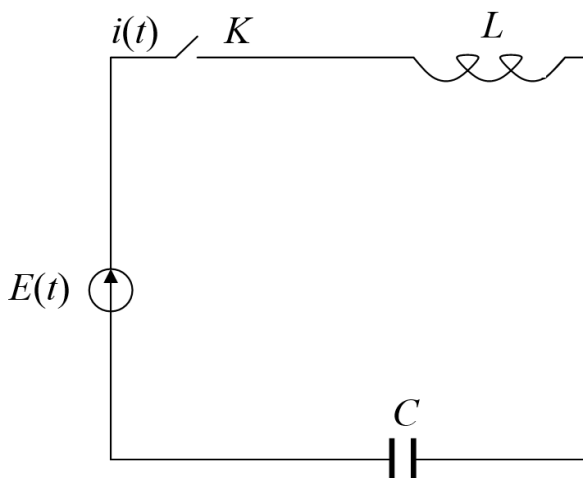


Рис. 1.2. Схема електричного кола

Необхідно визначити, як буде змінюватися струм  $i(t)$  у колі в часі після замикання ключа  $K$ , якщо в початковий момент часу  $t=0$  струм в контурі і заряд конденсатора дорівнюють нулеві.

Згідно із законом Кірхгофа, електрорушійна сила в колі дорівнює сумі падінь напруги на котушці індуктивності та ємності:

$$E(t) = U_L + U_C, \quad (1.2)$$

що пов'язані зі струмом в колі співвідношеннями:

$$U_L = L \frac{di}{dt}, \quad U_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt. \quad (1.3)$$

На основі (1.2) та (1.3) приходимо до співвідношення:

$$E(t) = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt. \quad (1.4)$$

Надалі, для спрощення, вважатимемо, що  $E(t) = E = \text{const}$ . Тоді диференціюючи рівність (1.4) за змінною  $t$ , приходимо до диференціального рівняння:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0$$

або (після ділення на  $L \neq 0$ ), до рівняння:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + w^2 i = 0, \quad (1.5)$$

де позначено  $w^2 = \frac{1}{LC}$ .

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.5) має вигляд:

$$i(t) = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt \quad (1.6)$$

Зауважимо, що з (1.4) впливає умова:

$L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = E$ , тобто до рівняння (1.5) слід долучити початкові

умови:

$$i \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{E}{L}. \quad (1.7)$$

З (1.6) шляхом диференціювання отримуємо

$$\frac{di}{dt} = -C_1 w \sin wt + C_2 w \cos wt . \quad (1.8)$$

Підставляючи тепер умови (1.7) при  $t = 0$  у вирази (1.6) та (1.8), отримуємо систему рівнянь для визначення невідомих сталих  $C_1$  і  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 w = \frac{E}{L}. \end{cases}$$

Звідси  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \frac{E}{wL}$ .

Отже, струм у колі (рис.1.2.) буде змінюватись за законом

$$i(t) = \frac{E}{wL} \sin wt \quad (1.9)$$

## **1.2. Відповідність математичної моделі і критерій практики**

Надмірне спрощення та ідеалізація математичних моделей може привести до невідповідності явищ або процесів, які вивчаються. *Критерій практики* (експеримент) є саме тим засобом, що дозволяє встановити адекватний взаємозв'язок між ними.

В зв'язку з цим, ще раз проаналізуємо припущення, які закладені при створенні математичних моделей в попередньому підрозділі.

В прикладі 1.1, при визначенні залежності швидкості тіла в умовах вільного падіння, не було враховано сили опору середовища. Аналізуючи формулу (1.1)  $v = v_0 + gt$ , можна зробити певні висновки:

✓ швидкість тіла пропорційна часу і при його зміні необмежено збільшується;

✓ ця швидкість не залежить від маси (а значить від ваги) тіла;

✓ вона не залежить від форми тіла.

Можна припустити, що така модель добре “працювала” б у безповітряному просторі, скажімо, на Місяці, де  $g$  – означало б прискорення “місячного” тяжіння.

Натомість, наші повсякденні спостереження показують, що, наприклад, парашути опускаються на землю зі сталою швидкістю, плоди з дерев падають швидше, ніж листя тощо. Мусимо, отже, визнати, що математична модель в цьому прикладі є адекватною лише в середовищах без опору.

В прикладі 1.2 отримано, що струм  $I$  в електричному колі, яке схематично зображене на рис. 1.2. визначається формулою (1.9)  $i(t) = \frac{E}{\omega L} \sin \omega t$ . Ця формула характеризує

незатухаючі гармонічні коливання зі сталою амплітудою  $\frac{E}{\omega L}$  і частотою  $\omega$ , а сама модель є реалізацією “вічного двигуна”. Це суперечить одному з основних законів фізики про неможливість створення такого двигуна. Така модель може бути прийнятою в рамках припущення відсутності опору провідників в цьому колі.

Проведений аналіз деяких найпростіших математичних моделей не означає, що їх потрібно відкинути. Необхідно лише встановити умови їх застосовності. Цей аналіз одночасно вказує шляхи уточнення таких моделей у випадках, коли умови їх застосовності перестають виконуватися.

### 1.3. Розвиток і уточнення математичної моделі

При побудові нової моделі корисно використати результати, що отримані на першому етапі. Нерідко процес послідовного розвитку і уточнення моделі повторюється

багатократно. Задля ілюстрації цих міркувань знову повернемося до найпростіших моделей з підрозділу 1.1.

### 1.3.1. Уточнена модель вільного падіння тіла

Припустимо тепер, що крім сили тяжіння  $P = mg$ , на тіло  $M$  діє сила опору середовища  $F = -kv$ , що пропорційна швидкості (знак “-” вказує на те, що сила  $F$  діє проти напрямку руху тіла) (рис.1.3)

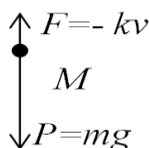


Рис.1.3. Уточнена модель вільного падіння тіла

З урахуванням сили тертя приходимо до диференціального рівняння (рівняння руху певних типів парашутистів):

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad \text{або} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g.$$

Це – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку відносно швидкості  $v$ . Розв’язуючи його, наприклад, методом варіації довільної сталої, отримуємо загальний розв’язок у вигляді

$$v = C e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad (1.10)$$

де  $C$  – довільна стала, що визначається з початкової умови  $v(0) = v_0$ . Підставивши цю умову в (1.10), отримуємо, що  $C = v_0$  і

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad (1.11)$$

Проаналізуємо детальніше формулу (1.11):

1. З ростом часу вираз  $e^{-\frac{k}{m}t}$  швидко прямує до нуля. Це значить, що швидкість  $v$  з часом набуває свого максимального (усталеного) значення  $v_{\max}$ , причому

$$v_{\max} = \frac{gm}{k}, \quad (1.12)$$

і є величиною сталою.

2. Максимальна швидкість прямо пропорційна вазі тіла, тобто важчі тіла падають з більшою швидкістю.

3. З формули (1.12) видно, що при збільшенні коефіцієнта  $k$   $v_{\max}$  зменшується. Експериментально доведено, що коефіцієнт  $k$  прямо пропорційно залежить від площі поперечного перерізу тіла  $M$ . Саме тому після відкриття парашута можливе безпечне приземлення парашутиста, швидкість якого не перевищує 20 км/год.

4. В граничному випадку (при  $k \rightarrow 0$ ) з формули (1.10) отримуємо формулу (1.1). Дійсно:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \left[ v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{t} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right] &= v_0 \lim_{k \rightarrow 0} e^{-\frac{k}{m}t} + gm \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-\frac{k}{m}t}}{k} \right) = \\ &= v_0 + gm \frac{t}{m} = v_0 + gt. \end{aligned}$$

(тут  $\lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-\frac{k}{m}t}}{k} \right) = \frac{t}{m}$  – обчислений за правилом Лопіталя

відносно змінної  $k$ ).

Цей висновок виправдовує застосовність формули (1.1) лише при достатньо малих значеннях  $k$ , тобто в середовищі з достатньо малим тертям.

### 1.3.2. Коливання в електричному колі з опором

Ускладнюючи математичну модель, що описана в прикладі 1.2, припустимо, що крім котушки індуктивності  $L$  і ємності  $C$  послідовно під'єднано активний опір  $R$  (рис. 1.4).

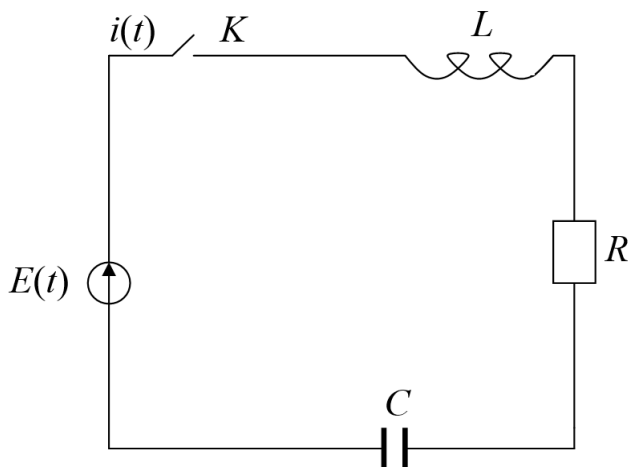


Рис. 1.4. Ускладнена модель електричного кола

Тоді співвідношення (1.2) набуває вигляду

$$E(t) = U_L + U_R + U_C, \quad U_R = Ri,$$

а співвідношення (1.4) зміниться на

$$E(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (1.13)$$

Диференціюючи (1.13) за умови  $E(t) = E = const$ , приходимо до диференціального рівняння

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

має корені

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}.$$

Якщо  $R^2C - 4L \geq 0$ , то обидва корені – дійсні і загальний розв'язок не буде періодичною функцією (в колі відсутні електричні коливання). Якщо ж  $R^2C - 4L < 0$ , то загальний розв'язок

$$i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 \cos w_1 t + C_2 \sin w_1 t), \quad (1.14)$$

де  $w_1^2 = \frac{4L - R^2C}{4L^2C}$  визначає електричні коливання.

Диференціюючи (1.14) за змінною  $t$ , отримуємо

$$\frac{di}{dt} = e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ -\frac{R}{2L} (C_1 \cos w_1 t + C_2 \sin w_1 t) + w_1 (-C_1 \sin w_1 t + C_2 \cos w_1 t) \right]. \quad (1.15)$$

Підставляючи у вираз (1.14) і (1.15) крайові умови

$$i(t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L}, \text{ отримуємо}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ \frac{E}{L} = -\frac{R}{2L} C_1 + w_1 C_2. \end{cases}$$

Звідки отримуємо що

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{E}{Lw_1}$$

і розв'язок набуває вигляду:

$$i(t) = \frac{E}{Lw_1} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin w_1 t. \quad (1.16)$$



Він характеризує *затухаючі в часі коливання*, оскільки множник  $e^{-\frac{R}{L}t}$  з плином часу швидко прямує до нуля.

Така модель є ближчою до реального процесу в електричному колі. З формули (1.16) при  $R \rightarrow 0$  випливає, що  $e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow 1$ ,  $\omega_1 \rightarrow \omega$  і вже відома формула (1.9):

$$i(t) = \frac{E}{\omega L} \sin \omega t.$$

На завершення цього розділу ще раз підкреслимо, що математичні моделі дозволяють звести дослідження реального об'єкта до розв'язування суто математичної задачі, стимулюючи при цьому вдосконалення і розвиток старих, а також створення нових математичних методів. Такі моделі створюються, досліджуються та вдосконалюються шляхом експериментів. Тому в подальшому отримані аналітичні розв'язки вже не потребують додаткових (часто вельми дорогих) експериментальних підтверджень.

## Розділ 2. Рівняння математичної фізики – математичні моделі реальних фізичних явищ

### 2.1. Приклади побудови математичних моделей деяких фізичних явищ

Більшість фізичних законів природи можна сформулювати за допомогою рівнянь з частинними похідними, які є їх математичними моделями. Поява похідних в цих моделях пов'язана з тим, що вони описують такі важливі фізичні величини, як швидкість, прискорення, тепловий потік тощо.

Методи побудови розв'язків рівнянь з частинними похідними доволі різноманітні. Тут, зокрема, розглядається один з них: *метод відокремлення змінних (метод Фур'є)* і, пов'язаний з ним метод власних функцій.

#### 2.1.1. Рівняння малих поперечних коливань струни

Рівняння з частинними похідними 2-го порядку гіперболічного типу найчастіше зустрічаються в фізичних задачах, що описують процеси коливань. Найпростіше рівняння гіперболічного типу

$$u_{,xx} - u_{,yy} = 0$$

зазвичай називають рівнянням коливання струни. В цьому розділі, як і в наступних, ми обмежимося розглядом класу лінійних рівнянь.

*Рівняння малих поперечних коливань струни.* Кожну точку струни довжиною  $l$  можна охарактеризувати значенням її абсциси  $x$ . Опис процесу коливання струни може бути проведено за допомогою фіксації точок струни в різний момент часу. Для визначення положення струни в момент часу  $\tau$  достатньо задати компоненти вектора переміщення  $\{u_1(x, \tau), u_2(x, \tau), u_3(x, \tau)\}$  точки  $x$  в момент часу  $\tau$ .

Ми розглянемо найбільш просту задачу про коливання струни. Вважатимемо, що зміщення струни лежать в одній площині  $(x, u)$  і що вектор зміщення  $u$  перпендикулярний в будь який момент часу до осі  $x$ ; тоді процес коливання можна описати однією функцією  $u(x, \tau)$ , що характеризує вертикальне переміщення струни. Будемо розглядати струну як гнучку та пружну нитку. Математичне визначення поняття гнучкості полягає в тому, що напруження, що виникають в струні, завжди спрямовані по дотичній до її моментального профілю (рис. 1). Ця умова характеризує собою те, що струна не опирається згину. Сила натягу, що виникає в струні внаслідок пружності, може бути визначеною за законом Гука. Будемо розглядати малі коливання струни та ігнорувати квадратом  $u_x$ .

Користуючись цією умовою, обчислимо видовження, яке проходить на відріжку струни  $(x_1, x_2)$ . Довжина дуги цього відрізка дорівнює

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \cong x_2 - x_1 = S$$

Таким чином, в рамках прийнятої точності, видовження відрізків струни в процесі коливання не відбуваються.

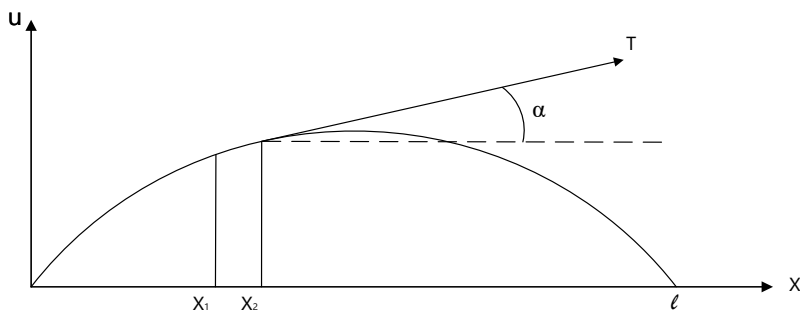


Рис. 2.1. Гнучкість струни

Звідси із закону Гука випливає, що величина натягу  $T$  в кожній точці не змінюється з часом. Покажемо також, що натяг не залежить від  $x$ , тобто,

$$T(x) = T_0 = \text{const.}$$

Знайдемо проекції натягу на осі  $x$  та  $u$  (позначимо їх  $T_x$  та  $T_u$ ):

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha \cong T(x) \operatorname{tg} \alpha = T(x) u_x,$$

де  $\alpha$  – кут дотичної до кривої  $u(x, \tau)$  з віссю  $x$ . На відрізок  $(x_1, x_2)$  діє сила натягу, зовнішні сили і сили інерції. Сума проекцій усіх сил на вісь  $x$  повинна дорівнювати нулеві (ми розглядаємо тільки поперечні коливання). Оскільки сили інерції і зовнішні сили за попередніми припущеннями спрямовані вздовж осі  $u$ , то

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{або} \quad T(x_1) = T(x_2) \quad (2.1)$$

Звідси у зв'язку з довільністю  $x_1$  і  $x_2$  слідує, що натяг не залежить від  $x$  тобто для всіх значень  $x$  та  $\tau$

$$T(x) \equiv T_0 \quad (2.2)$$

Після зроблених попередніх зауважень перейдемо до виведення рівнянь поперечних коливань струни. Використаємо другий закон Ньютона. Зберігаючи певну кількість рухів струна відрізка  $(x_1, x_2)$  по осі  $u$  рівна

$$\int_{x_1}^{x_2} u_\tau(\xi, \tau) \rho(\xi) d\xi$$

де  $\rho$  – лінійна густина струни. Прирівняємо зміну кількості руху за відрізок часу  $\Delta \tau = \tau_2 - \tau_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_\tau(\xi, \tau_2) - u_\tau(\xi, \tau_1)] d\xi$$

до імпульсу діючих сил, які складаються із натягу

$$T_0 u_x \big|_{x=x_2} - T_0 u_x \big|_{x=x_1}$$

В точках  $x_2$ ,  $x_1$  і зовнішньої сили, котру будемо вважати неперервно розподіленою з щільністю (навантаженням)  $F(x, \tau)$ , розрахованою на одиницю довжини. В результаті отримаємо рівняння поперечних коливань елемента струни в інтегральній формі

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [u_\tau(\xi, \tau_2) - u_\tau(\xi, \tau_1)] \rho(\xi) d\xi = \\ & = \int_{\tau_1}^{\tau_2} T_0 [u_x(x_2, s) - u_x(x_1, s)] ds + \int_{x_1}^{x_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\xi, s) d\xi ds \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для переходу до диференціального рівняння припустимо існування і неперервність похідних другого порядку від  $u(x, \tau)$ . Тоді формула (2.3) після подвійного застосування теореми про середнє значення набуде вигляду

$$\begin{aligned} u_{\tau\tau}(\xi^*, \tau^*) \rho(\xi^*) \Delta\tau \Delta x &= \{T_0 [u_{xx}(\xi^{***}, \tau^{***})] + F(\xi^{***}, \tau^{***})\} \Delta\tau \Delta x, \\ \xi^*, \xi^{***}, \xi^{***} &\in (x_1, x_2), \text{ а } \tau^*, \tau^{**}, \tau^{***} \in (\tau_1, \tau_2) \end{aligned}$$

Скоротивши на  $\Delta x \Delta \tau$  і переходячи до границі при  $x_2 \rightarrow x_1$ ,  $\tau_2 \rightarrow \tau_1$ , отримаємо диференціальне рівняння поперечних коливань струни

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{\tau\tau} - F(x, \tau) \quad (2.4)$$

У випадку сталої густини  $\rho = const$  цьому рівнянню зазвичай надають вигляд

$$u_{\tau\tau} = a^2 u_{xx} f(x, \tau) \quad \left( a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \right) \quad (2.5)$$

де

$$f(x, \tau) = \frac{1}{\rho} F(x, \tau) \quad (2.6)$$

якщо щільність сили, віднесена до одиниці маси. При відсутності зовнішньої сили отримаємо однорідне рівняння  $u_{\tau\tau} = a^2 u_{xx}$  або  $u_{xx} - u_{yy} = 0$  ( $y = a\tau$ ), яке описує вільні коливання струни. Це рівняння є найпростішим прикладом рівняння гіперболічного типу.

Якщо в точці  $x_0$  ( $x_1 < x_0 < x_2$ ) прикладена зосереджена сила  $f_0(\tau)$  (рис.2) то рівняння (2.3) запишеться так:

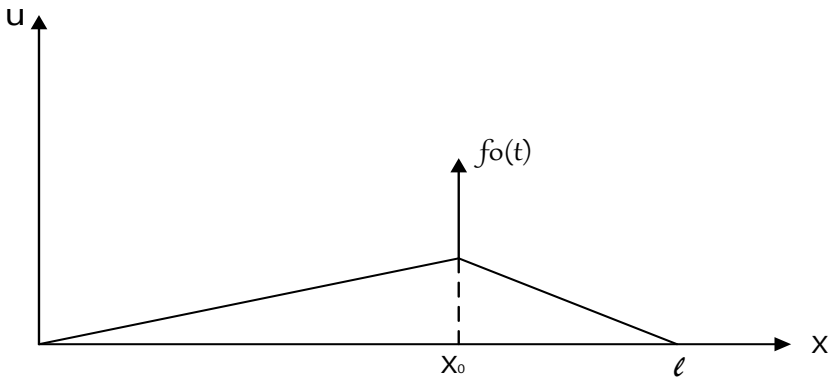


Рис. 2.2. Натяг струни зовнішньою силою

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_{\tau}(\xi, \tau_2) - u_{\tau}(\xi, \tau_1)] d\xi - \int_{x_1}^{x_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\xi, s) d\xi ds =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} T_0 [u_x(x_2, s) - u_x(x_1, s)] ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f_0(s) ds$$

Оскільки швидкості точок струни обмежені, то при  $x_1 \rightarrow x_0$  і  $x_2 \rightarrow x_0$  інтеграли в лівій частині цієї рівності прямують до нуля і рівність (2.3) набуде вигляду

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_0 [u_x(x_0 + 0, s) - u_x(x_0 - 0, s)] ds = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} f_0(s) ds \quad (2.7)$$

Користуючись теоремою про середнє значення, скорочуючи обидві частини рівності на  $\Delta\tau$  і переходячи до границі при  $\tau_2 \rightarrow \tau_1$  отримаємо

$$u_x(x, \tau) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = -\frac{1}{T_0} f_0(\tau)$$

Звідси отримаємо, що в точці прикладання зосередженої сили перші похідні мають розрив і диференціальне рівняння втрачає свою суть. В цій точці повинні виконуватись дві умови

$$\begin{cases} u(x_0 + 0, \tau) = u(x_0 - 0, \tau), \\ u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau) = -\frac{1}{T_0} f_0(\tau), \end{cases} \quad (2.8)$$

перша з яких виражає неперервність струни, друга визначає величину зламу струни в точці  $x_0$  залежну від  $f_0(\tau)$  і натягу  $T_0$ .

Отже, типовим представником рівнянь гіперболічного типу є рівняння поперечних коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.9)$$

### 2.1.2. Лінійна задача про розподіл тепла

Розглянемо однорідний стрижень довжиною  $l$  теплоізолюваний з боків і достатньо тонкий, щоб в кожен момент часу температуру у всіх точках поперечного перерізу можна було вважати однаковою. Якщо кінці стрижня підтримувати при сталих температурах  $t_1$  та  $t_2$  то, як відомо, вздовж стрижня встановлюється лінійний розподіл температури (рис.2.3)

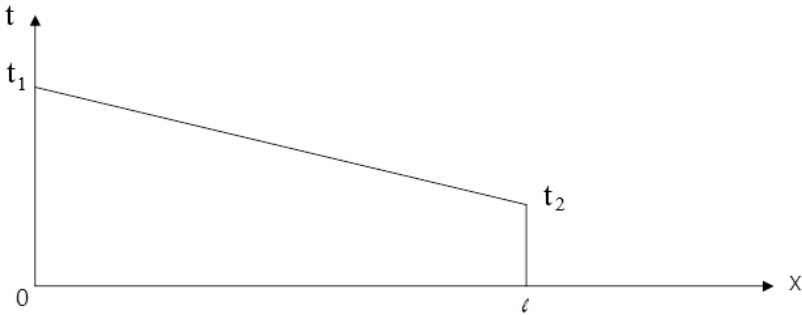


Рис. 2.3. Лінійний розподіл тепла

$$t(x) = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{l} x \quad (2.10)$$

При цьому тепло буде переходити від більш нагрітого до менш нагрітого кінця стрижня. Кількість тепла, яке проходить через переріз стрижня площею  $S$  за одиницю часу, визначається експериментальною формулою

$$Q = -\lambda \frac{t_2 - t_1}{l} S = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} S \quad (2.11)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності, який залежить від матеріалу стрижня.

Величина теплового потоку вважається додатною, якщо тепло рухається в напрямку збільшення осі  $x$ .

Розглянемо процес розподілу температури в стрижні. Цей процес може бути описано функцією  $t(x, \tau)$ , яка визначає температуру в перерізі  $x$  в момент часу  $\tau$ . Знайдемо рівняння, яке повинна справджувати функція  $t(x, \tau)$ . Для цього встановимо фізичні закономірності, що пов'язані з процесами розподілу тепла.



1. Закон Фур'є. Якщо температура тіла не рівномірна то в ньому виникають теплові потоки, які спрямовують тепло із більш нагрітих місць до менш нагрітих.

Кількість тепла, яке проходить через переріз  $x$  за певний відрізок часу  $(\tau, \tau + d\tau)$ , дорівнює

$$dQ = qSd\tau \quad (2.12)$$

де

$$q = -\lambda(x) \frac{\partial t}{\partial x} \quad (2.13)$$

Густина теплового потоку дорівнює кількості тепла, яке проходить за одиницю часу через площу в  $1 \text{ см}^2$ . Цей закон описує формула (2.11). Йому можна також надати інтегральну форму

$$Q = -S \int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x, \tau) d\tau \quad (2.14)$$

де  $Q$  – кількість тепла, яке проходить за проміжок часу  $(\tau_1, \tau_2)$  через переріз  $x$ . Якщо стрижень неоднорідний, то  $\lambda$  є функцією  $x$ .

2. Кількість тепла, яке необхідно надати однорідному тілу, щоб збільшити його температуру на  $\Delta t$ , дорівнює

$$Q = cm\Delta t = c\rho V\Delta t \quad (2.15)$$

де  $c$  – питома теплоємність,  $m$  – маса тіла,  $\rho$  – його густина,  $V$  – об'єм.

Якщо зміна температури має різну величину на різних відрізках стрижня або якщо стрижень неоднорідний, то

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\Delta t(x) dx \quad (2.16)$$

Всередині стрижня може виникати або втрачатись тепло (наприклад при проходженні електричного струму, хімічних реакцій і т.д.). Виділення тепла характеризується інтенсивністю теплових джерел  $q_v(x, \tau)$  в точці  $x$  в момент

$\tau$ . В результаті дії цих джерел на відріжку стрижня  $(x, x + dx)$  за проміжок часу  $(\tau, \tau + d\tau)$  виділиться кількість тепла

$$dQ = Sq_v(x, \tau) dx d\tau \quad (2.17)$$

або в інтегральній формі

$$Q = S \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{x_1}^{x_2} q_v(x, \tau) dx d\tau \quad (2.18)$$

де  $Q$  - кількість тепла, яке виділяється на відріжку стрижня  $(x_1, x_2)$  за проміжок часу  $(\tau_1, \tau_2)$ .

Рівняння теплопровідності отримаємо обчислюючи баланс тепла на певному відріжку  $(x_1, x_2)$  за певний проміжок часу  $(\tau_1, \tau_2)$ . Застосовуючи закон збереження енергії і користуючись формулами (2.14), (2.16) і (2.18), можна записати рівняння

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x, s) \Big|_{x=x_2} - \lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x, s) \Big|_{x=x_1} \right] ds + \int_{x_1}^{x_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} q_v(\xi, s) d\xi ds = \\ = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [t(\xi, \tau_2) - t(\xi, \tau_1)] d\xi \end{aligned} \quad (2.19)$$

яке є рівнянням теплопровідності в інтегральній формі.

Щоб отримати рівняння теплопровідності в диференціальній формі, припустимо що функція  $u(x, \tau)$  має неперервні похідні  $t_{xx}$  і  $t_\tau$ .

Використовуючи теорему про середнє значення отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \left[ \lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x, s) \Big|_{x=x_2} - \lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x, s) \Big|_{x=x_1} \right]_{\tau=\tau_3} \Delta\tau + q_v(x_4, \tau_4) \Delta x \Delta\tau = \\ = \{c\rho [t(\xi, \tau_2) - t(\xi, \tau_1)]\}_{\xi=x_3} \Delta x \end{aligned} \quad (2.20)$$

яке за допомогою теореми про скінченні прирости можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x, \tau) \right]_{\substack{x=x_5 \\ \tau=\tau_3}} \Delta \tau \Delta x + q_v(x_4, \tau_4) \Delta x \Delta \tau = \\ = \left[ c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau}(x, \tau) \right]_{\substack{x=x_3 \\ \tau=\tau_5}} \Delta x \Delta \tau \end{aligned} \quad (2.21)$$

де  $\tau_3, \tau_4, \tau_5$  і  $x_3, x_4, x_5$  – проміжні точки інтервалів  $(\tau_1, \tau_2)$  і  $(x_1, x_2)$ .

Звідси, після скорочення на добуток  $\Delta x \Delta \tau$  знаходимо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x_5 \\ \tau=\tau_3}} + q_v(x, \tau) \Big|_{\substack{x=x_4 \\ \tau=\tau_4}} = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \Big|_{\substack{\tau=\tau_5 \\ x=x_3}} \quad (2.22)$$

Всі ці міркування відносяться до довільних проміжків  $(x_1, x_2)$  і  $(\tau_1, \tau_2)$ . Переходячи до границі при  $x_1, x_2 \rightarrow x$  і  $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \tau$ , отримаємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + q_v(x, \tau) = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (2.23)$$

яке називається *рівнянням теплопровідності*. Якщо ж внутрішні джерела тепла відсутні, то рівняння (2.23) набуде вигляду

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right). \quad (2.24)$$

## 2.2. Задача Коші для рівняння коливань струни. Метод Даламбера

Нехай маємо однорідну нескінчену струну, яка перебуває під дією початкового натягу  $T_0$  і в стані спокою збігається з віссю  $Ox$ . Якщо струну відхилити від положення рівноваги або надати її точкам деякої швидкості, то струна почне коливатись.

Будемо розглядати малі відхилення точок струни від початкового положення. Тому можна вважати, що рух точок

струни відбувається в одній площині, причому кожна точка рухається в напрямку, перпендикулярному до осі  $Ox$ .

Позначимо через  $u = u(x, \tau)$  відхилення точок струни від положення рівноваги в момент часу  $\tau$ . При кожному фіксованому значенні  $\tau$  графік функції  $u(x, \tau)$  дає на площині  $Oxi$  форму струни в цей момент часу. Якщо коливання струни є вільними, тобто на неї не діє зовнішня сила, то закон руху кожної точки струни залежно від часу описується хвильовим рівнянням (2.9)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де  $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ ,  $\rho = \text{const}$  – лінійна густина струни.

Нехай в початковий момент часу струна мала форму

$$u|_{\tau=0} = \varphi_0(x) \quad (2.25)$$

і швидкість

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \varphi_1(x). \quad (2.26)$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (2.9), який справджує умови (2.25) і (2.26), називається **задачею Коші** для нескінченної струни. Умови (2.25) і (2.26) називаються **початковими умовами**.

Для розв'язання задачі (2.9), (2.25), (2.26) покладемо

$$\begin{cases} \xi = x - a\tau, \\ \eta = x + a\tau. \end{cases}$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції двох змінних, отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = a \left( -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right).$$

Тому рівняння (2.9) в змінних  $\xi$  і  $\eta$  набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.27)$$

З (2.27) знаходимо

$$u = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta),$$

де  $\psi_1(\xi)$ ,  $\psi_2(\eta)$  – довільні, двічі диференційовані функції.

Повертаючись до змінних  $x$  і  $\tau$ , отримуємо

$$u = \psi_1(x - a\tau) + \psi_2(x + a\tau). \quad (2.28)$$

Отриманий розв'язок називається **розв'язком Даламбера**. Підставимо (2.28) в (2.25) і (2.26),

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) = \varphi_0(x),$$

$$-a\psi_1'(x) + a\psi_2'(x) = \varphi_1(x).$$

Звідки

$$-a\psi_1(x) + a\psi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(y) dy + aC,$$

де  $C$  – довільна константа, або

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi_0 - \frac{1}{a} \int_0^x \varphi_1(y) dy - C \right],$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi_0 + \frac{1}{a} \int_0^x \varphi_1(y) dy + C \right].$$

Отже, розв'язок задачі Коші (2.9), (2.25), (2.26) має вигляд

$$u(x, \tau) = \frac{\varphi_0(x - a\tau) + \varphi_0(x + a\tau)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} \varphi_1(y) dy. \quad (2.29)$$

Формула (2.29) є **формулою Даламбера**.

**Приклад 2.1.** Розв'язати задачу (2.9), (2.25), (2.26) для  $a = 2$ ,  $\varphi_0(x) = 3x - 2x^2$ ,  $\varphi_1(x) = -6x$ .

**Розв'язування.** Підставляючи дані у формулу (2.29), отримуємо

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{3(x-2\tau) - 2(x-2\tau)^2 + 3(x+2\tau) - 2(x+2\tau)^2}{2} + \frac{1}{4} \int_{x-2\tau}^{x+2\tau} (-6y) dy = \\ &= 3x - 2x^2 - 8\tau^2 - \frac{3}{2} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x-2\tau}^{y=x+2\tau} = 3x - 2x^2 - 8\tau^2 - \frac{3}{4} [(x+2\tau)^2 - (x-2\tau)^2] = \\ &= 3x - 2x^2 - 8\tau^2 - 6x\tau. \end{aligned}$$

### 2.3. Мішана крайова задача для рівняння коливань струни.

#### Метод відокремлення змінних (Метод Фур'є)

Нехай потрібно описати поперечні коливання однорідної струни довжиною  $l$ , кінці якої нерухомі. В початковий момент часу форма струни визначилась функцією  $f(x)$ , а швидкість кожної її точки – функцією  $\varphi(x)$ .

Складемо математичну модель поставленої задачі. Припустимо, що кінці струни розташовані в точках  $x = 0$  і  $x = l$  осі  $Ox$  прямокутної декартової системи координат  $Oxi$ . Як і вище, позначимо через  $u = u(x, \tau)$  відхилення точок струни від положення рівноваги в момент часу  $\tau$ .

Закон руху кожної точки струни залежно від часу, при відсутності зовнішньої сили, описується, як було показано вище, рівнянням (2.9)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Оскільки кінці струни – нерухомі, то виконуються умови:

$$\begin{cases} u(0, \tau) = 0 \\ u(l, \tau) = 0 \end{cases}, \quad (2.30)$$

Умови (2.30) називаються **крайовими умовами**.

В початковий момент часу струна мала форму

$$u(x, 0) = u|_{\tau=0} = f(x), \quad (2.31)$$

а її точки – швидкість

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \varphi(x). \quad (2.32)$$

Отже, для знаходження закону руху скінченої, закріпленої на кінцях, струни, що в початковий момент часу має форму  $f(x)$  та швидкість  $\varphi(x)$ , потрібно розв'язати таку задачу: знайти розв'язок хвильового рівняння (2.9), який справджує крайові умови (2.30) та початкові умови (2.31), (2.32).

Така задача називається **мішаною крайовою задачею для рівняння коливань струни**.

Розв'яжемо задачу (2.9) за умов (2.30), (2.31) і (2.32) методом відокремлення змінних (методом Фур'є).

Шукатимемо нетривіальний (ненульовий) частинний розв'язок рівняння (2.9), що справджує крайові умови (2.30), у вигляді добутку двох функцій, одна з яких  $X = X(x)$  залежить лише від  $x$ , а друга  $T = T(\tau)$  – лише від  $\tau$ . Отже, шукаємо  $u(x, \tau) \neq 0$  у вигляді

$$u(x, \tau) = X(x) \cdot T(\tau). \quad (2.33)$$

Зауважимо, що  $X(x) \neq 0$ ,  $T(\tau) \neq 0$ , оскільки  $u(x, \tau) \neq 0$ . Крім того, з (2.33) і (2.30) отримуємо

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, \\ X(l) &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Підставимо вираз (2.33) в хвильове рівняння (2.9). Будемо мати

$$X(x)T''(\tau) = a^2 X''(x)T(\tau),$$

або після відокремлення змінних

$$\frac{T''(\tau)}{a^2 T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (2.35)$$

У лівій частині рівності (2.35) стоїть функція, яка залежить лише від  $\tau$ , а в правій – функція, яка залежить лише від  $x$ . Отже, ліва і права частини рівності (2.35) є стала величина, яку позначимо  $-\lambda^2$  (випадок  $+\lambda^2$  розглянемо пізніше). Таким чином

$$\frac{T''(\tau)}{a^2 T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \quad (2.36)$$

З рівностей (2.36) отримуємо два рівняння:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (2.37)$$

$$T''(\tau) + \lambda^2 a^2 T(\tau) = 0. \quad (2.38)$$

З крайових умов (2.30) випливає, що до звичайного диференціального рівняння (2.37) слід додати умови (закріплення) (2.34). Отже, потрібно розв'язати **задачу на власні значення**

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0, \end{aligned}$$

яка полягає в знаходженні таких значень параметра  $\lambda^2$  (власні значення), для яких існують відповідні їм нетривіальні розв'язки задачі (2.37), (2.34) (власні функції).

На шляху розв'язання цієї задачі спочатку знаходимо загальний розв'язок рівняння (2.37). Як відомо, він має вигляд

$$X(x) = c \cos \lambda x + d \sin \lambda x. \quad (2.39)$$

Для визначення довільних сталих  $c$  і  $d$  використаємо умови (2.34). Перша з них ( $X(0) = 0$ ) дає:



$$0 = X(0) = c, \quad \text{тобто } c = 0.$$

Тоді з умови  $X(l) = 0$  отримуємо

$$d \sin \lambda l = 0,$$

при цьому  $d \neq 0$ , інакше, ми отримали б тривіальний розв'язок  $X(x) = 0$ . Отже, маємо

$$\sin \lambda l = 0. \quad (2.40)$$

Рівняння (2.40) називається **характеристичним рівнянням**. Воно має безліч розв'язків:

$$\lambda_k l = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отже, значення

$$\lambda_k^2 = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}, \quad k \neq 0 \quad (2.41)$$

– власні значення задачі (2.37), (2.34), а функції

$$X_k(x) = d_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

– відповідні їм власні функції (замість  $d$  тут пишемо  $d_k$  для кожного  $k$ ).

Підставляючи тепер замість  $\lambda^2$  в рівняння (2.38) величини  $\frac{k^2 \pi^2}{l^2}$ , отримуємо сукупність рівнянь

$$T_k'' + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.43)$$

загальні розв'язки яких мають вигляд

$$T_k(\tau) = a_k \cos \frac{k\pi a}{l} \tau + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} \tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

Підставляючи (2.42) і (2.44) в (2.33), отримаємо для кожного  $k = 1, 2, \dots$  розв'язок рівняння (2.9)

$$u_k(x, \tau) = \left( A_k \cos \frac{ak\pi}{l} \tau + B_k \sin \frac{ak\pi}{l} \tau \right) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (2.45)$$

$A_k = a_k d_k$ ,  $B_k = b_k d_k$ , який справджує крайові умови (2.30).

Оскільки хвильове рівняння (2.9) – лінійне і однорідне, то сума частинних розв’язків (2.45) є також розв’язком. Тому розв’язок мішаної задачі (2.9), (2.30), (2.31), (2.32) слід шукати у вигляді ряду

$$u(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{ak\pi}{l} \tau + B_k \sin \frac{ak\pi}{l} \tau \right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (2.46)$$

Припускаємо, що коефіцієнти  $A_k$  і  $B_k$  такі, що ряд (2.46) і ряди, отримані його почленним двократним диференціюванням за змінними  $x$  і  $\tau$  – збіжні.

Для знаходження коефіцієнтів  $A_k$  і  $B_k$  використаємо початкові умови (2.31) і (2.32). Поклавши в (2.46)  $\tau = 0$  і врахувавши (2.31), отримаємо

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (2.47)$$

Вважаємо також, що функцію  $f(x)$  можна розвинути в ряд Фур’є на проміжку  $(0; l)$ . Тоді в рівності (2.47) коефіцієнти Фур’є  $A_k$  функції  $f(x)$  визначаються формулою

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.48)$$

Продиференціюємо почленно ряд (2.46) за змінною  $\tau$  і покладемо  $\tau = 0$ . Враховуючи умову (2.32), отримаємо

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{ak\pi}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Розвинувши функцію  $\varphi(x)$  в ряд Фур’є за системою функцій  $\left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  на проміжку  $(0; l)$ , знаходимо

$$B_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

Отже, за умов, що ряд (2.46) і ряди, отримані його почленним двократним диференціюванням за змінними  $x$  і

$\tau$  – збіжні, цей ряд є розв'язком мішаної крайової задачі (2.9), (2.30), (2.31), (2.32). При цьому коефіцієнти  $A_k$  і  $B_k$  визначаються за формулами (2.48) і (2.49).

**Зауваження.** Якщо у рівності (2.36) покласти  $+\lambda^2$ , то рівняння (2.37) набуло б вигляду

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0.$$

Загальним розв'язком такого рівняння є функція  $X(x) = ce^{\lambda x} + de^{-\lambda x}$ . Частинний розв'язок, що справджує умови (2.34) – тривіальний, тобто  $X(x) \equiv 0$ , а тому й  $u(x, \tau) \equiv 0$ , що нас не цікавить.

**Приклад 2.2.** Знайти розв'язок мішаної крайової задачі:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad \tau > 0,$$

$$u(0, \tau) = u(\pi, \tau) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\tau=0} = \cos x.$$

**Розв'язання.** Покладемо у формулі (2.46)  $a = 2$  і  $l = \pi$ . Отримаємо

$$u(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos 2k\tau + B_k \sin 2k\tau) \sin kx.$$

Коефіцієнти  $A_k$  і  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) знайдемо, використовуючи формули (2.48), (2.49), поклавши в них відповідно

$$f(x) = \sin x, \quad \varphi(x) = \cos x, \quad a = 2, \quad l = \pi.$$

Отже, маємо

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = 1;$$

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin kx \, dx = 0, \quad k = 2, 3, \dots;$$

$$B_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, d(\sin x) = 0;$$

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{2k\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin kx \, dx = \frac{1}{2k\pi} \int_0^{\pi} [\sin(k+1)x + \sin(k-1)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2k\pi} \left[ -\frac{\cos(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right]_0^{\pi} = \frac{1+(-1)^k}{\pi(k^2-1)} = \\ &= \begin{cases} 0, & k = 2m+1, \\ \frac{2}{\pi(k^2-1)}, & k = 2m, \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені величини  $A_k$ ,  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) в формулу (2.46), в якій покладемо  $a = 2$ ,  $l = \pi$ , отримуємо розв'язок поставленої мішаної задачі у вигляді

$$u(x, \tau) = \cos 2\tau \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 4m\tau \sin 2mx}{4m^2 - 1}.$$

#### 2.4. Задача Коші для рівняння теплопровідності. Формула Пуассона

До задачі Коші для рівняння теплопровідності (2.24) приходимо, вивчаючи, наприклад, поширення тепла в необмеженому стрижні, бічна поверхня якого – теплоізолювана. Ця задача формулюється так: знайти обмежену функцію  $t(x, \tau)$ ,  $\tau > 0$ , яка справджує рівняння теплопровідності (2.24)

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

і початкову умову

$$t(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty; \infty). \quad (2.50)$$

де  $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ .

Дамо формально схему розв'язання задачі Коші для рівняння теплопровідності, яка ґрунтується на використанні перетворення Фур'є.

Нагадаємо, що образом Фур'є функції  $f(x)$ ,  $x \in (-\infty; \infty)$  називається функція

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (2.51)$$

Функція  $f(x)$  називається **оригіналом**. Якщо відомий образ  $f(\lambda)$ , то оригінал шукаємо за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (2.52)$$

На шляху розв'язання задачі Коші (2.24), (2.50) помножимо обидві частини рівняння (2.24) на  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}$  і проінтегруємо їх в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$  за змінною  $x$ . Отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} e^{-i\lambda x} dx = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} dx. \quad (2.53)$$

Використовуючи формулу (2.51), знаходимо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} e^{-i\lambda x} dx = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, \tau) e^{-i\lambda x} dx \right) = \frac{d\hat{t}(\lambda, \tau)}{d\tau}.$$

Припустимо, що функція  $t(x, \tau)$  і її похідна  $\frac{\partial t}{\partial x}$  досить швидко прямують до нуля при  $x \rightarrow \infty$ . Тоді, проінтегрувавши праву частину (2.53) частинами, будемо мати

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} e^{-i\lambda x} \Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\lambda t(x, \tau) e^{-i\lambda x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \lambda^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, \tau) e^{-i\lambda x} dx = -\lambda^2 \hat{t}(\lambda, \tau).$$

Тепер рівняння (2.53) набуває вигляду

$$\frac{d\hat{t}(\lambda, \tau)}{d\tau} = -a^2 \lambda^2 \hat{t}(\lambda, \tau). \quad (2.54)$$

З рівності

$$\hat{t}(\lambda, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, \tau) e^{-i\lambda x} dx$$

для  $t = 0$  отримаємо

$$\hat{t}(\lambda, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, 0) e^{-i\lambda x} dx,$$

звідки, врахувавши початкову умову (2.50) і формулу (2.51), знаходимо

$$\hat{t}(\lambda, 0) = \varphi(\lambda). \quad (2.55)$$

Розв'язком рівняння (2.54), який справджує умову (2.55) є функція

$$\hat{t}(\lambda, \tau) = \varphi(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 \tau}.$$

Отже, використовуючи формулу (2.52), отримаємо

$$t(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{t}(\lambda, \tau) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 \tau} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Оскільки за формулою (2.51)

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi,$$

то

$$\begin{aligned} t(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \right) e^{-a^2 \lambda^2 \tau} e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 \tau} e^{i\lambda(x-\xi)} d\lambda \right) d\xi. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Це і є розв'язок поставленої задачі.

Перетворимо формулу (2.56). Для цього обчислимо інтеграл, що стоїть в круглих дужках. Покладемо

$$z = a\lambda\sqrt{\tau}, \quad \beta = \frac{x - \xi}{a\sqrt{\tau}}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2\tau} e^{i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{\tau}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} e^{i\beta z} dz. \quad (2.57)$$

Введемо функцію

$$J(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} e^{i\beta z} dz.$$

Продиференціювавши функцію  $J(\beta)$ , отримаємо

$$\frac{dJ(\beta)}{d\beta} = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} z e^{i\beta z} dz,$$

або, проінтегрувавши останній інтеграл частинами, матимемо

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\beta)}{d\beta} &= i \left( -\frac{1}{2} e^{-z^2} e^{i\beta z} \Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} + \frac{i\beta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} e^{i\beta z} dz \right) = \\ &= -\frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} e^{i\beta z} dz = -\frac{\beta}{2} J(\beta), \end{aligned}$$

тобто

$$\frac{dJ(\beta)}{d\beta} = -\frac{\beta}{2} J(\beta).$$

Інтегруючи це диференціальне рівняння, знайдемо

$$J(\beta) = C e^{-\beta^2/4},$$

де  $C$  – стала величина.

Відомо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}, \quad (2.58)$$

тому з рівності

$$J(0) = C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz$$

отримаємо

$$C = \sqrt{\pi}.$$

Таким чином

$$J(\beta) = \sqrt{\pi} e^{-\beta^2/4}$$

і інтеграл (2.57) набуває вигляду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 \tau} e^{i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau}}.$$

Підставивши це значення інтеграла в формулу (2.56), отримаємо розв'язок задачі Коші (2.24), (2.50) у формі

$$t(x, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau}} d\xi. \quad (2.59)$$

Формула (2.59) називається **інтегралом Пуассона**.

**Приклад 2.3.** Знайти розв'язок задачі Коші:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad \tau > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$t(x, 0) = e^{2x-x^2}.$$

**Розв'язання.** Поклавши в формулі (2.59)  $a = \frac{1}{2}$ ,

$\varphi(\xi) = e^{2\xi-\xi^2}$ , отримаємо

$$\begin{aligned} t(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\xi-\xi^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\tau}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\xi\tau-\xi^2\tau-(x-\xi)^2}{\tau}} d\xi = \\ &= \frac{\psi}{\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\tau} \left( \sqrt{1+\tau}\xi - \frac{\tau+x}{\sqrt{1+\tau}} \right)^2} d\xi, \end{aligned}$$

де

$$\psi = \psi(x, \tau) = e^{-\frac{x^2-\tau-2x}{1+\tau}}.$$



Зробимо заміну

$$z = \frac{(1+\tau)\xi - (\tau+x)}{\sqrt{\tau(1+\tau)}}.$$

Тоді

$$\xi = \sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}}z + \frac{\tau+x}{1+\tau}, \quad d\xi = \sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}}dz$$

і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\tau}\left(\sqrt{1+\tau}\xi - \frac{\tau+x}{\sqrt{1+\tau}}\right)^2} d\xi = \sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi\tau}{1+\tau}}.$$

(Тут використано рівність (2.58)). Отже, розв'язком шуканої задачі є функція

$$t(x, \tau) = \frac{\psi(x, \tau)}{\sqrt{\pi\tau}} \sqrt{\frac{\pi\tau}{1+\tau}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau}} e^{\frac{2x-x^2+\tau}{1+\tau}}.$$

### 2.5. Мішана крайова задача для рівняння теплопровідності. Метод Фур'є і метод власних функцій

Розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \varphi(x, \tau), \quad \tau > 0, \quad x \in [0; l] \quad (2.60)$$

за таких крайових і початкових умов:

$$\begin{cases} t(0, \tau) = 0, \\ t(l, \tau) = 0, \end{cases} \quad (2.61)$$

$$t(x, 0) \equiv t|_{\tau=0} = f(x). \quad (2.62)$$

Рівняння (2.60) описує процес поширення температури  $t(x, \tau)$  в стрижні довжиною  $l$ . Функція  $\varphi(x, \tau)$  описує зовнішнє джерело температури. Крайові та початкові умови (2.61), (2.62) означають, що в точках  $x=0$  і  $x=l$  підтримується нульова температура, а в початковий момент часу ( $\tau=0$ ) відома температура  $f(x)$  в кожному перетині стрижня.

Задача (2.60) - (2.62) називається **неоднорідною**. Якщо ж рівняння (2.60) замінити рівнянням

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (2.63)$$

то така задача називається **однорідною**.

### 2.5.1. Розв'язок однорідної задачі

Схема застосування методу Фур'є до задачі (2.63), (2.61), (2.62) цілком аналогічна схемі, викладеній в підрозділі 2.3. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$t(x, \tau) = X(x)T(\tau), \quad \tau(x, \tau) \neq 0. \quad (2.64)$$

Підставляючи вираз (2.64) в рівняння теплопровідності (2.63), приходимо до рівностей

$$\frac{T'(\tau)}{a^2 T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

які приводять до рівнянь:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (2.65)$$

$$T'(\tau) + \lambda^2 a^2 T(\tau) = 0. \quad (2.66)$$

Розглядаючи рівняння (2.65) разом з крайовими умовами

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (2.67)$$

ми знову приходимо до задачі на власні значення, де

$\lambda_k^2 = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  – її власні значення. Функції  $C_k \sin \frac{k\pi}{l} x$

– відповідні цим значенням власні функції, що визначаються з точністю до довільного сталого множника  $C_k$ .

Підставляючи в рівняння (2.66) величини  $\frac{k^2 \pi^2}{l^2}$  замість  $\lambda^2$ ,

приходимо до нескінченної сукупності рівнянь

$$T_k'(\tau) + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_k(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.68)$$

Загальні розв'язки цих рівнянь, як легко перевірити, мають вигляд

$$T_k(\tau) = D_k e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} \tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.69)$$

де  $D_k$  – довільні сталі.

Згідно з формулою (2.64), функції

$$t_k(x, \tau) = A_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} \tau},$$

(де  $A_k = C_k D_k$ ) є частинними розв'язками рівняння (2.63), що справджують крайові умови (2.61). Рівняння (2.63) – лінійне й однорідне, тому сума його розв'язків є також розв'язком (2.63). Отже, розв'язок мішаної задачі (2.63), (2.61), (2.62) будемо шукати у вигляді ряду

$$t(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} \tau}. \quad (2.70)$$

Для визначення невідомих сталих  $A_k$  припускаємо, що функція  $f(x)$  допускає розвинення в Фур'є на проміжку

$(0; l)$  за системою функцій  $\left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (2.71)$$

Тоді  $A_k$  є коефіцієнтами Фур'є функції  $f(x)$ , які визначаються формулою:

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.72)$$

Отже, за умов збіжності ряду (2.70) та збіжності рядів, отриманих його почленним диференціюванням (двічі за змінною  $x$  і один раз за змінною  $\tau$ ), ряд (2.70) є розв'язком мішаної задачі (2.64), (2.61), (2.62).

Зауважимо, що центральне місце при розв'язуванні мішаних задач для рівняння поперечних коливань струни і рівняння теплопровідності займає **задача на власні значення**, що виникає при відокремленні змінних. Побудова розв'язків таких задач базується на зображенні початкових умов у вигляді рядів за системою власних функцій задачі.

### 2.5.2. Розв'язок неоднорідної (вихідної) задачі (метод власних функцій)

Розв'язок задачі (2.60) - (2.62) шукаємо у вигляді

$$t(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (2.73)$$

де  $T_k(\tau)$ ,  $k=1, 2, \dots$  – невідомі функції змінної  $\tau$ . Підставляючи (2.73) в рівняння (2.60) приходимо до рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(\tau) \sin \frac{k\pi}{l} x = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \left( -\frac{k^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin \frac{k\pi}{l} x + \varphi(x, \tau),$$

або

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( T_k'(\tau) + \frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} T_k(\tau) \right) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

де через  $B_k(\tau)$  позначені коефіцієнти розвинення функції  $\varphi(x, \tau)$  в ряд Фур'є за системою власних функцій  $\left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$ ,  $k=1, 2, \dots$  (при цьому змінна  $\tau$  вважається параметром):

$$B_k(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x, \tau) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx. \quad (2.74)$$

Отже, приходимо до сукупності рівнянь:

$$T_k'(\tau) + \frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} T_k(\tau) = B_k(\tau), \quad k=1, 2, \dots \quad (2.75)$$

Використовуючи початкову умову (2.62), зображення (2.73) та розвинення функції  $f(x)$  в ряд Фур'є, знаходимо початкові умови для функцій  $T_k(\tau)$ , тобто  $T_k(0)$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

звідки отримуємо

$$T_k(0) = A_k. \quad (2.76)$$

Тому розв'язок рівняння (2.75) при початковій умові (2.76) має вигляд:

$$T_k(\tau) = A_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}\tau} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}(\tau-s)} B_k(s) ds.$$

Отже, розв'язок вихідної задачі (2.60) - (2.62) має вигляд:

$$\begin{aligned} t(x, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}\tau} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}(\tau-s)} B_k(s) ds \right] \sin \frac{k\pi}{l} x = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}\tau} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^{\tau} e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}(\tau-s)} B_k(s) ds \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \end{aligned} \quad (2.77)$$

**Зауваження.** Зокрема, якщо  $\varphi(x, \tau) \equiv 0$ ,  $B_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то з (2.77) отримуємо вже відомий розв'язок (2.70) однорідної задачі з коефіцієнтами (2.72).

**Приклад 2.4.** Знайти розв'язок мішаної задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + e^{l\tau} \sin \frac{a\pi}{l} x, \quad \tau > 0, \quad x \in [0; l], \\ t(0, \tau) &= t(l, \tau) = 0, \\ t(x, 0) &= lx - x^2. \end{aligned} \quad (2.78)$$

**Розв'язання.** Будемо шукати розв'язок мішаної задачі (2.78) у вигляді (2.77),

$$t(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} \tau} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^{\tau} e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} (\tau-s)} B_k(s) ds \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x$$

Коефіцієнти  $A_k$  визначаються за формулою (2.72), а саме

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l (lx - x^2) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k=1, 2, \dots \quad (2.79)$$

Обчислимо інтеграл в правій частині (2.79), двічі використовуючи спосіб інтегрування частинами:

$$\int_0^l (lx - x^2) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = \left. \begin{array}{l} lx - x^2 = u \\ dv = \sin \frac{k\pi}{l} x dx \\ du = (l - 2x) dx \\ v = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l} x \end{array} \right| = -\frac{l}{k\pi} (lx - x^2) \cos \frac{k\pi}{l} x \Big|_0^l +$$

$$+ \frac{l}{k\pi} \int_0^l (l - 2x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{l}{k\pi} \int_0^l (l - 2x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx.$$

(позаінтегральний доданок дорівнює нулеві, перевірити самостійно). Далі аналогічно

$$\int_0^l (l - 2x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx = \left. \begin{array}{l} u = l - 2x \\ dv = \cos \frac{k\pi}{l} x dx \\ du = -2 dx \\ v = \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{l} x \end{array} \right| = \frac{l}{k\pi} (l - 2x) \sin \frac{k\pi}{l} x \Big|_0^l +$$

$$+ \frac{2l}{k\pi} \int_0^l \sin \frac{k\pi}{l} x dx = -\frac{2l^2}{k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi}{l} x \Big|_0^l = -\frac{2l^2}{k^2 \pi^2} (\cos k\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{4l^2}{k^2 \pi^2}, & k = 2n-1. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\int_0^l (lx - x^2) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{4l^3}{k^3 \pi^3}, & k = 2n-1 \end{cases}$$

і коефіцієнти Фур'є  $A_k$  визначаються таким чином:

$$A_k = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{8l^2}{k^3 \pi^3}, & k = 2n-1. \end{cases}$$

Отримуємо розв'язок однорідної задачі (2.64), (2.61), (2.62)

$$t(x, \tau) = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} \tau}.$$

Коефіцієнти  $B_k$  визначаються за формулою (2.74), а саме

$$B_k(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l e^{l\tau} \sin \frac{a\pi}{l} x \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.80)$$

Відома така властивість ортогональності системи функцій  $\left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0, \quad \text{якщо } m \neq n$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{m\pi}{l} x dx = \frac{l}{2}.$$

Тому, із (2.80) випливає

$$B_k(\tau) = \begin{cases} e^{l\tau}, & k = a, \\ 0, & k \neq a. \end{cases}$$

Обчислимо інтеграл в правій частині (2.77), враховуючи вираз для  $B_k$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}(\tau-s)} B_k(s) ds &= \int_0^{\tau} e^{-\frac{a^4\pi^2}{l^2}(\tau-s)} e^{ls} ds = e^{-\frac{a^4\pi^2\tau}{l^2}} \int_0^{\tau} e^{\frac{a^4\pi^2+l^3}{l^2}s} ds = \\ &= \frac{l^2}{a^4\pi^2+l^3} e^{-\frac{a^4\pi^2\tau}{l^2}} e^{\frac{a^4\pi^2+l^3}{l^2}s} \Bigg|_{s=0}^{s=\tau} = \frac{l^2}{a^4\pi^2+l^3} \left( e^{l\tau} - e^{-\frac{a^4\pi^2\tau}{l^2}} \right). \end{aligned}$$

Підставляючи цей вираз в (2.77) та враховуючи, що перший доданок в (2.77) є розв'язком однорідної задачі, остаточно отримуємо розв'язок вихідної задачі у вигляді

$$\begin{aligned} t(x, \tau) &= \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 a^2}{l^2}\tau} + \\ &+ \frac{l^2}{a^4\pi^2+l^3} \left( e^{l\tau} - e^{-\frac{a^4\pi^2\tau}{l^2}} \right) \sin \frac{a\pi}{l} x. \end{aligned}$$

## 2.6. Рівняння Лапласа. Розв'язування задачі Діріхле в крузі методом Фур'є

Нехай  $D$  – обмежена однозв'язна область з границею  $\Gamma$ . **Задачею Діріхле** називається задача розв'язування рівняння Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.81)$$

в області  $D$  за умови, що задані граничні значення функції  $u(x, y)$  на границі  $\Gamma$ , тобто

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y). \quad (2.82)$$

В конкретному випадку, коли область  $D$  – круг радіуса  $r$ , доцільно перейти до полярної системи координат,



сумістивши полюс з центром круга. Введемо заміну змінних:  
 $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ .

Використовуючи правило диференціювання складної функції двох змінних, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{1}{\rho} \sin 2\varphi + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \sin^2 \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{2\rho^2} \sin 2\varphi + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{2\rho^2} \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{1}{\rho} \sin 2\varphi + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{2\rho^2} \sin 2\varphi + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{1}{\rho^2} \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{2\rho^2} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Тому рівняння Лапласа (2.81) в полярних координатах набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.83)$$

Гранична умова запишеться так

$$u|_{\rho=r} = f(\varphi), \quad (2.84)$$

де  $f(\varphi)$  – відома функція полярного кута. Отже, (2.83), (2.84) – **задача Діріхле для круга**.

Розв'яжемо рівняння (2.83) методом Фур'є, тобто будемо шукати його розв'язок у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi). \quad (2.85)$$

Підставляючи (2.85) в (2.83), отримуємо

$$-\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -k^2, \quad (2.86)$$

де  $k^2$  – стала величина. З (2.86) випливає, що для знаходження  $R(\rho)$  і  $\Phi(\varphi)$  отримуємо такі диференціальні рівняння:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0, \quad (2.87)$$

$$\Phi'' + k^2 \Phi = 0. \quad (2.88)$$

Функція  $u(\rho, \varphi)$  повинна справджувати співвідношення:

$$u(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi + 2\pi),$$

бо точки площини з полярними координатами  $(\rho, \varphi)$  і  $(\rho, \varphi + 2\pi)$  збігаються. Отже, як випливає з (2.85), функція  $\Phi(\varphi)$  є  $2\pi$  - періодичною, тобто

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Для  $k = 0$  загальним розв'язком рівняння (2.88) є функція

$$\Phi_0(\varphi) = a_0 + b_0 \varphi, \quad (2.89)$$

яка буде періодичною лише для  $b_0 = 0$ . Для довільного  $k$  загальний розв'язок рівняння (2.88) має вигляд

$$\Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi. \quad (2.90)$$

Очевидно, що  $\Phi_k(\varphi)$  буде періодичною функцією з періодом  $2\pi$ , якщо  $k$  є цілим числом:  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Від'ємні значення  $k$  не змінюють характер правої частини (2.90).

Рівняння (2.87) – рівняння Ейлера, яке для  $k = 0$  має загальний розв'язок

$$R_0(\rho) = c_0 + d_0 \ln \rho, \quad (2.91)$$

а для  $k > 0$  загальним розв'язком є функція

$$R_k(\rho) = c_k \rho^k + d_k \frac{1}{\rho^k}. \quad (2.92)$$

Оскільки функції  $\ln \rho$  і  $\frac{1}{\rho^k}$  є необмеженими в центрі круга, при  $\rho = 0$ , в (2.91) слід покласти  $d_0 = 0$ , а в (2.92) –

$d_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Звідси випливає, що частинний розв'язок рівняння (2.83), який є обмежений в крузі  $\rho \leq r$ , для  $k = 0, 1, 2, \dots$  має вигляд

$$u_k(\rho, \varphi) = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)\rho^k, \quad (2.93)$$

де  $A_k = c_k a_k$ ,  $B_k = c_k b_k$ .

Оскільки сума розв'язків рівняння (2.83) також є розв'язком цього рівняння, яке є лінійним й однорідним, будемо шукати його розв'язок у вигляді ряду

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)\rho^k. \quad (2.94)$$

Визначимо коефіцієнти  $A_k$ ,  $B_k$  так, щоб виконувалась умова (2.84). Підставивши в розв'язок (2.94) значення  $\rho = r$  і використавши умову (2.84), знаходимо

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)r^k.$$

Отже, величини  $A_k r^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $B_k r^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  є коефіцієнтами Фур'є функції  $f(\varphi)$  на інтервалі  $(-\pi, \pi)$ . Таким чином

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad A_k = \frac{1}{\pi r^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi r^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.95)$$

Підсумовуючи попередні викладки, робимо висновок, що розв'язком задачі Діріхле для круга (2.83), (2.84) є ряд (2.94), коефіцієнти якого знаходять за формулами (2.95).

Підставивши в (2.94) вирази  $A_k$ ,  $B_k$  у формі (2.95), після нескладних перетворень отримаємо

$$u(\rho, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(s - \varphi) + \rho^2} ds. \quad (2.96)$$

Формула (2.96) називається **інтегралом Пуассона**.

**Приклад 2.5.** Знайти розв'язок задачі Діріхле для круга:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (2.97)$$

$$u|_{\rho=1} = \cos^2 \varphi.$$

**Розв'язання.** Будемо шукати розв'язок задачі (2.97) у вигляді ряду (2.94). Для знаходження коефіцієнтів  $A_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , використаємо формули (2.95). Оскільки  $r = 1$ ,  $f(\varphi) = \cos^2 \varphi$ , матимемо

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2};$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi \cos k\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\varphi \, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \cos k\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{k\pi} \sin k\varphi \Big|_0^{\pi} + \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2, \end{cases}$$

звідки отримаємо

$$A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_k = 0, \quad k = 1, 3, 4, 5, \dots$$

Оскільки функція  $\cos^2 \varphi \sin \varphi$  – непарна, а проміжок інтегрування  $[-\pi; \pi]$  – симетричний, то

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi \sin k\varphi \, d\varphi = 0.$$

Підставивши знайдені значення  $A_k$ ,  $B_k$  в ряд (2.94), остаточно матимемо

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rho^2 \cos 2\varphi.$$

### 2.7. Задача Діріхле в концентричному круговому кільці

Нехай  $D$  – кругове кільце, що обмежене концентричними колами радіусів  $r_1$  і  $r_2$  ( $0 < r_1 < r_2$ ) з центром в полюсі.

В цьому випадку задача Діріхле формулюється так: знайти розв’язок рівняння Лапласа (2.83)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

що справджує систему граничних умов

$$u|_{\rho=r_1} = f_1(\varphi), u|_{\rho=r_2} = f_2(\varphi). \quad (2.98)$$

Для розв’язування цієї задачі використаємо результати пункту 6. У цьому випадку функції  $\ln \rho$  і  $\frac{1}{\rho^k}$  – обмежені в кільці  $r_1 \leq \rho \leq r_2$ , тобто в формулах (2.91) і (2.92)  $d_k \neq 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Отже, замість (2.93) отримуємо такі частинні розв’язки рівняння (2.83):

$$\begin{aligned} u_0(\rho, \varphi) &= C_0 + D_0 \ln \rho, \\ u_k(\rho, \varphi) &= (C_k^{(1)} \rho^k + D_k^{(1)} \rho^{-k}) \cos k\varphi + (C_k^{(2)} \rho^k + D_k^{(2)} \rho^{-k}) \sin k\varphi, \quad (2.99) \\ &k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

де  $C_0 = c_0 a_0$ ,  $D_0 = d_0 a_0$ ,  $C_k^{(1)} = c_k a_k$ ,  $D_k^{(1)} = d_k a_k$ ,  $C_k^{(2)} = c_k b_k$ ,  $D_k^{(2)} = d_k b_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Тому розв’язок  $u(\rho, \varphi)$  рівняння (2.83), подібно, як в пункті 6, слід шукати у вигляді ряду

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= C_0 + D_0 \ln \rho + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (C_k^{(1)} \rho^k + D_k^{(1)} \rho^{-k}) \cos k\varphi + (C_k^{(2)} \rho^k + D_k^{(2)} \rho^{-k}) \sin k\varphi \right]. \quad (2.100) \end{aligned}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $C_k^{(1)}$ ,  $C_k^{(2)}$ ,  $D_k^{(1)}$ ,  $D_k^{(2)}$  використаємо розвинення функцій  $f_1(\varphi)$  і  $f_2(\varphi)$  в ряди Фур'є на проміжку  $(-\pi; \pi)$ :

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= \alpha_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k^{(1)} \cos k\varphi + \beta_k^{(1)} \sin k\varphi \right), \\ f_2(\varphi) &= \alpha_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k^{(2)} \cos k\varphi + \beta_k^{(2)} \sin k\varphi \right) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Використовуючи розвинення (2.101), крайові умови (2.98) та розв'язок у формі (2.100), матимемо:

$$\begin{aligned} & C_0 + D_0 \ln r_1 + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( C_k^{(1)} r_1^k + D_k^{(1)} r_1^{-k} \right) \cos k\varphi + \left( C_k^{(2)} r_1^k + D_k^{(2)} r_1^{-k} \right) \sin k\varphi \right] = \\ & = \alpha_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k^{(1)} \cos k\varphi + \beta_k^{(1)} \sin k\varphi \right), \\ & C_0 + D_0 \ln r_2 + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( C_k^{(1)} r_2^k + D_k^{(1)} r_2^{-k} \right) \cos k\varphi + \left( C_k^{(2)} r_2^k + D_k^{(2)} r_2^{-k} \right) \sin k\varphi \right] = \\ & = \alpha_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k^{(2)} \cos k\varphi + \beta_k^{(2)} \sin k\varphi \right), \end{aligned} \quad (2.102)$$

в яких  $\alpha_0^{(1)}$ ,  $\alpha_0^{(2)}$ ,  $\alpha_k^{(1)}$ ,  $\beta_k^{(1)}$ ,  $\alpha_k^{(2)}$  і  $\beta_k^{(2)}$ ,  $k=1, 2, \dots$  – коефіцієнти Фур'є в розвиненнях функцій  $f_1(\varphi)$  та  $f_2(\varphi)$  в ряди Фур'є на інтервалі  $(-\pi; \pi)$ . Вони, як відомо, обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(i)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_i(\varphi) d\varphi, \quad \alpha_k^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_i(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \\ \beta_k^{(i)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_i(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, \quad i=1, 2, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.103)$$

Прирівнюючи в (2.102) коефіцієнти біля функцій  $\cos k\varphi$  і  $\sin k\varphi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , приходимо до сукупності систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $C_k^{(1)}$ ,  $D_k^{(1)}$ ,  $C_k^{(2)}$  і  $D_k^{(2)}$ :

$$\begin{cases} C_0 + D_0 \ln r_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi) d\varphi, \\ C_0 + D_0 \ln r_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi) d\varphi; \\ \left\{ \begin{aligned} C_k^{(1)} r_1^k + D_k^{(1)} r_1^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \\ C_k^{(1)} r_2^k + D_k^{(1)} r_2^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi) \cos k\varphi d\varphi; \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} C_k^{(2)} r_1^k + D_k^{(2)} r_1^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, \\ C_k^{(2)} r_2^k + D_k^{(2)} r_2^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi) \sin k\varphi d\varphi. \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (2.104)$$

Отже, розв'язок задачі Діріхле (2.83), (2.98) для кільця – це ряд (2.100), коефіцієнти якого можна знайти, розв'язуючи системи алгебраїчних рівнянь (2.104).

**Приклад 2.6.** Знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кільці:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= 0, \\ u|_{\rho=3} &= -8 \sin 2\varphi + 7, \\ u|_{\rho=5} &= 4. \end{aligned} \quad (2.105)$$

**Розв'язання.** Розв'язок задачі (2.105) – це ряд (2.100), де коефіцієнти  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $C_k^{(1)}$ ,  $D_k^{(1)}$ ,  $C_k^{(2)}$  і  $D_k^{(2)}$  знаходимо з системи рівнянь (2.104):

$$\begin{cases} C_0 + D_0 \ln 3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-8 \sin 2\varphi + 7) d\varphi, \\ C_0 + D_0 \ln 5 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 d\varphi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 + D_0 \ln 3 = 7, \\ C_0 + D_0 \ln 5 = 4; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_0 = \frac{3}{\ln 3/5}, \\ C_0 = \frac{4 \ln 3 - 7 \ln 5}{\ln 3/5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_k^{(1)} 3^k + D_k^{(1)} 3^{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-8 \sin 2\varphi + 7) \cos k\varphi d\varphi, \\ C_k^{(1)} 5^k + D_k^{(1)} 5^{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos k\varphi d\varphi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_k^{(1)} 3^k + D_k^{(1)} 3^{-k} = 0, \\ C_k^{(1)} 5^k + D_k^{(1)} 5^{-k} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_k^{(1)} = 0, \\ D_k^{(1)} = 0; \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} C_k^{(2)} 3^k + D_k^{(2)} 3^{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-8 \sin 2\varphi + 7) \sin k\varphi d\varphi, \\ C_k^{(2)} 5^k + D_k^{(2)} 5^{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \sin k\varphi d\varphi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2^{(2)} 3^2 + D_2^{(2)} 3^{-2} = -8, \\ C_2^{(2)} 5^2 + D_2^{(2)} 5^{-2} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_k^{(2)} 3^k + D_k^{(2)} 3^{-k} = 0, \\ C_k^{(2)} 5^k + D_k^{(2)} 5^{-k} = 0; \end{cases} \quad k \neq 2$$



$$\Rightarrow \begin{cases} C_2^{(2)} = \frac{9}{68}, & D_2^{(2)} = -82 \frac{49}{68}, \\ C_k^{(2)} = D_k^{(2)} = 0, & k \neq 2. \end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі (2.105) має вигляд

$$u(\rho, \varphi) = \frac{3}{\ln \frac{3}{5}} \ln \rho + \frac{4 \ln 3 - 7 \ln 5}{\ln \frac{3}{5}} + \left( \frac{9}{68} \rho^2 - 82 \frac{49}{68} \rho^{-2} \right) \sin 2\varphi.$$

### Завдання для самостійного розв'язування

1. Користуючись формулою Даламбера, розв'язати задачу Коші для рівняння коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

- |       |          |                             |                           |
|-------|----------|-----------------------------|---------------------------|
| 1.1.  | $a = 2,$ | $\varphi_0(x) = 5 - 3x^2,$  | $\varphi_1(x) = e^{-x}.$  |
| 1.2.  | $a = 3,$ | $\varphi_0(x) = 5x - 2x^2,$ | $\varphi_1(x) = \cos 3x.$ |
| 1.3.  | $a = 1,$ | $\varphi_0(x) = \sin 3x,$   | $\varphi_1(x) = 4 - 3x.$  |
| 1.4.  | $a = 4,$ | $\varphi_0(x) = \cos x,$    | $\varphi_1(x) = 2 - x.$   |
| 1.5.  | $a = 2,$ | $\varphi_0(x) = 2x^2 - 7,$  | $\varphi_1(x) = e^{-3x}.$ |
| 1.6.  | $a = 3,$ | $\varphi_0(x) = e^{-4x},$   | $\varphi_1(x) = \sin 3x.$ |
| 1.7.  | $a = 1,$ | $\varphi_0(x) = x^2 - 2,$   | $\varphi_1(x) = \cos 5x.$ |
| 1.8.  | $a = 2,$ | $\varphi_0(x) = \sin 4x,$   | $\varphi_1(x) = x + 2.$   |
| 1.9.  | $a = 3,$ | $\varphi_0(x) = e^{3x},$    | $\varphi_1(x) = x + 3.$   |
| 1.10. | $a = 1,$ | $\varphi_0(x) = \cos 3x,$   | $\varphi_1(x) = 2 - 3x.$  |

2. Методом Фур'є розв'язати мішану задачу для рівняння коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$u|_{t=0} = f(x),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x).$$

2.1  $a = 3, \quad l = 4, \quad f(x) = 4x - x^2, \quad \varphi(x) = 2x^2 - 8x.$

2.2.  $a = 4, \quad l = 6, \quad f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}x.$

2.3.  $a = 3, \quad l = 7, \quad f(x) = 7x - x^2, \quad \varphi(x) = -3x.$

2.4.  $a = 3, \quad l = 3, \quad f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x, \quad \varphi(x) = 9 - 3x.$

2.5.  $a = 1, \quad l = 6, \quad f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2, \quad \varphi(x) = -2x.$

2.6.  $a = 4, \quad l = 3, \quad f(x) = 4x - \frac{4}{3}x^2, \quad \varphi(x) = -2x.$

2.7.  $a = 2, \quad l = 4, \quad f(x) = 16x - 4x^2, \quad \varphi(x) = 3x.$

2.8.  $a = 2, \quad l = 7, \quad f(x) = x^2 - 7x, \quad \varphi(x) = 3x.$

2.9.  $a = 3, \quad l = 2, \quad f(x) = 0, \quad \varphi(x) = -2 \sin 4\pi x.$

2.10.  $a = 4, \quad l = 3, \quad f(x) = -\sin 5x, \quad \varphi(x) = 0.$

3. Користуючись формулою Пуассона, відшукати розв'язок  $u(x, t)$  задачі Коші для рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad \tau > 0,$$

$$t|_{\tau=0} = \varphi(x).$$

- 3.1.  $a=1$ ,  $\varphi(x) = e^{2x-3x^2}$ ,  
3.2.  $a=2$ ,  $\varphi(x) = e^{x-3x^2}$ ,  
3.3.  $a=3$ ,  $\varphi(x) = e^{-2x-2x^2}$ ,  
3.4.  $a=4$ ,  $\varphi(x) = e^{x-x^2}$ ,  
3.5.  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi(x) = e^{-4x-x^2}$ ,  
3.6.  $a = \frac{1}{3}$ ,  $\varphi(x) = e^{-3x-9x^2}$ ,  
3.7.  $a=1$ ,  $\varphi(x) = e^{-7x-6x^2}$ ,  
3.8.  $a=2$ ,  $\varphi(x) = e^{-2x-x^2}$ ,  
3.9.  $a=3$ ,  $\varphi(x) = e^{-x-2x^2}$ .  
3.10.  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\varphi(x) = e^{-4x-8x^2}$ .

4. Методом Фур'є розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad \tau > 0,$$

$$t(0, \tau) = t(l, \tau) = 0,$$

$$t|_{\tau=0} = f(x).$$

- 4.1.  $a=1$ ,  $l=6$ ,  $f(x) = x^2 - 6x$ ,  
4.2.  $a=1$ ,  $l=2$ ,  $f(x) = 5 \sin \frac{\pi}{2} x$ ,  
4.3.  $a=3$ ,  $l=2$ ,  $f(x) = x^2 - 2x$ ,  
4.4.  $a=1$ ,  $l=7$ ,  $f(x) = 4 \sin 3\pi x$ ,

- 4.5.  $a = 2$ ,  $l = 3$ ,  $f(x) = 3x - x^2$ ,  
 4.6.  $a = 4$ ,  $l = 2$ ,  $f(x) = 3 \sin 4\pi x$ ,  
 4.7.  $a = 2$ ,  $l = 4$ ,  $f(x) = 8x - 2x^2$ ,  
 4.8.  $a = 3$ ,  $l = 7$ ,  $f(x) = -8 \sin 2\pi x$ ,  
 4.9.  $a = 1$ ,  $l = 4$ ,  $f(x) = 2x^2 - 8x$ ,  
 4.10.  $a = 2$ ,  $l = 3$ ,  $f(x) = -\sin 2\pi x$ .

5. Відшукати розв'язок  $u(\rho, \varphi)$  задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

а) в крузі радіуса  $r$ :  $u|_{\rho=r} = f(\varphi)$ ;

б) в кільці  $r_1 < \rho < r_2$ :  $u|_{\rho=r_1} = f_1(\varphi)$ ,  $u|_{\rho=r_2} = f_2(\varphi)$ .

5.1.	а) $r = 1$ , $f(\varphi) = 3 \cos^2 \varphi - 4\varphi + 9$ ;		
	б) $r_1 = 1$ , $r_2 = 3$ ,	$f_1(\varphi) = 2$ ,	$f_2(\varphi) = \sin 2\varphi - 1$ .
5.2.	а) $r = 2$ , $f(\varphi) = \cos^2 4\varphi - 7\varphi + 5$ ;		
	б) $r_1 = 2$ , $r_2 = 4$ ,	$f_1(\varphi) = -2 \cos 3\varphi + 1$ ,	$f_2(\varphi) = 3$ .
5.3.	а) $r = 3$ , $f(\varphi) = 3 \sin^2 \varphi - 3\varphi + 7$ ;		
	б) $r_1 = 2$ , $r_2 = 4$ ,	$f_1(\varphi) = 2 \sin 3\varphi - 3$ ,	$f_2(\varphi) = -2$ .
5.4.	а) $r = 1$ , $f(\varphi) = -\cos^2 5\varphi + 7\varphi - 11$ ;		
	б) $r_1 = 1$ , $r_2 = 2$ ,	$f_1(\varphi) = -3$ ,	$f_2(\varphi) = -2 \cos 3\varphi + 1$ .

5.5.	a) $r = 2$ ,	$f(\varphi) = -2 \sin^2 4\varphi - 8\varphi + 5$ ;	
	б) $r_1 = 2$ , $r_2 = 4$ ,	$f_1(\varphi) = -3 \sin 2\varphi + 2$ ,	$f_2(\varphi) = 4$ .
5.6.	a) $r = 4$ ,	$f(\varphi) = 4 \cos^2 \varphi - 2\varphi - 9$ ;	
	б) $r_1 = 3$ , $r_2 = 6$ ,	$f_1(\varphi) = 1$ ,	$f_2(\varphi) = -\sin \varphi - 3$ .
5.7.	a) $r = 1$ ,	$f(\varphi) = 2 \sin^2 8\varphi - 7\varphi + 2$ ;	
	б) $r_1 = 2$ , $r_2 = 4$ ,	$f_1(\varphi) = 4 \sin 2\varphi + 1$ ,	$f_2(\varphi) = 3$ .
5.8.	a) $r = 2$ ,	$f(\varphi) = 11 \cos^2 3\varphi + 5\varphi - 4$ ;	
	б) $r_1 = 2$ , $r_2 = 4$ ,	$f_1(\varphi) = 3 \sin 2\varphi - 4$ ,	$f_2(\varphi) = -2$ .
5.9.	a) $r = 3$ ,	$f(\varphi) = 2 \sin^2 5\varphi - 6\varphi + 10$ ;	
	б) $r_1 = 2$ , $r_2 = 4$ ,	$f_1(\varphi) = 2 \cos \varphi - 1$ ,	$f_2(\varphi) = -1$ .
5.10.	a) $r = 4$ ,	$f(\varphi) = 3 \sin^2 4\varphi + 4\varphi - 3$ ;	
	б) $r_1 = 1$ , $r_2 = 4$ ,	$f_1(\varphi) = \sin 3\varphi - 4$ ,	$f_2(\varphi) = 3$ .

### Розділ 3. Лінійні диференціальні рівняння (ЛДР) 2-го порядку

Вже в процесі застосування методу Фур'є при розв'язуванні мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів ми зустрілися з лінійними диференціальними рівняннями 2-го порядку. Цей розділ присвячений детальному вивченню таких рівнянь. Це пов'язано з підготовкою математичного апарату для розв'язування крайових задач математичної фізики. Основні, запропоновані в наступних підрозділах, твердження та правила приймемо без доведень, відсилаючи читача до рекомендованої літератури.

#### 3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку

Розглянемо лінійне однорідне рівняння 2-го порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (3.1)$$

і встановимо деякі властивості його розв'язків.

Очевидно, що одним з розв'язків рівняння (3.1) є  $y \equiv 0$ . Цей розв'язок називають *нульовим* або *тривіальним*. Надалі будемо шукати лише *нетривіальні* розв'язки цього рівняння.

**Теорема 3.1.** *Якщо  $y_1(x)$  та  $y_2(x)$  – розв'язки (3.1), то розв'язком цього рівняння є також функція*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (3.2)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі.

**Визначення 3.1.** Функції  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  називаються *лінійно незалежними* на проміжку  $(a; b)$ , якщо тотожність

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0, \quad (3.3)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2$  – дійсні числа, справджується тоді і лише тоді, коли  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

Якщо ж хоча б одне з чисел  $\alpha_1$  чи  $\alpha_2$  відмінне від нуля і виконується тотожність (3.3), то функції  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  називаються *лінійно залежними* на  $(a; b)$ .

**Визначення 3.2.** Якщо  $y_1 = y_1(x)$  та  $y_2 = y_2(x)$ , то визначник

$$W(y_1, y_2) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (3.4)$$

називається *визначником Вронського* або *вронскіаном* цих функцій.

**Теорема 3.2.** Якщо функції  $y_1 = y_1(x)$  та  $y_2 = y_2(x)$  – диференційовані та лінійно залежні на проміжку  $(a; b)$ , то їх вронскіан (3.4) тотожно рівний нулеві на цьому проміжку.

**Теорема 3.3.** Якщо функції  $y_1 = y_1(x)$  та  $y_2 = y_2(x)$  – лінійно незалежні розв'язки рівняння (3.1), то визначник Вронського (3.4) цих функцій не дорівнює нулеві в жодній точці проміжку  $(a; b)$ .

**Наслідок 3.1.** Для того, щоб розв'язки  $y_1 = y_1(x)$  та  $y_2 = y_2(x)$  рівняння (3.1) були лінійно незалежними на заданому проміжку необхідно і досить, щоб визначник Вронського (3.4) не дорівнював нулеві хоча б в одній точці цього проміжку.

**Теорема 3.4.** (Про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння). Якщо функції  $y_1 = y_1(x)$  та  $y_2 = y_2(x)$  – два лінійно незалежні на проміжку  $(a; b)$  розв'язки рівняння (3.1), то функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (3.5)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі, є його загальним розв'язком (тобто таким, з якого при належному виборі сталих  $C_1, C_2$ , можна отримати будь-який його частинний розв'язок).

**Визначення 3.3.** Сукупність двох лінійно незалежних розв'язків  $y_1(x)$  та  $y_2(x)$  рівняння (3.1) називається фундаментальною системою розв'язків цього рівняння.

Очевидно, що фундаментальних систем розв'язків є безліч.

**Визначення 3.4.** (Задача Коші). Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння (3.1), який при  $x = x_0 \in (a; b)$  справджує умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0,$$

де  $y_0, y'_0$  – довільні, наперед задані числа (початкові умови), називається задачею Коші або задачею з початковими умовами.

Зауважимо, що так сформульована задача Коші має єдиний розв'язок.

### 3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (3.6)$$

де  $a_1, a_2$  – дійсні числа. Для розв'язання цього рівняння застосовують метод Ейлера, який полягає в тому, що для диференціального рівняння (3.6) складають характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (3.7)$$



та розв'язують його.

При цьому можливі такі *три випадки*:

• корені  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристичного рівняння (3.7) – дійсні та різні. Тоді функції  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$  утворюють *фундаментальну систему розв'язків* диференціального рівняння (3.6). Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (3.6) має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (3.8)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі.

• корені  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  характеристичного рівняння (3.7) – дійсні та рівні. Тоді функції  $y_1(x) = e^{\lambda x}$ ,  $y_2(x) = x e^{\lambda x}$  утворюють *фундаментальну систему розв'язків* диференціального рівняння (3.6) і його загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \quad (3.9)$$

• корені  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  – комплексно-спряжені. Тоді функції  $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$  утворюють *фундаментальну систему розв'язків* диференціального рівняння (3.6) і його загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (3.10)$$

**Приклад 3. 1.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' - 8y' + 15y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 2.$$

**Розв'язання.** Запишемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0,$$

яке за теоремою Вієта має дійсні різні корені  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 5$ . Тоді, за формулою (3.8), загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}.$$

Знайдемо його похідну

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 5C_2 e^{5x}.$$

Справджуючи умови Коші, для визначення сталих  $C_1, C_2$  отримуємо систему двох лінійних рівнянь:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0,$$

$$y'(0) = 3C_1 e^0 + 5C_2 e^0 = 2,$$

звідки знаходимо, що

$$C_2 = -C_1;$$

$$3C_1 - 5C_2 = 2,$$

тобто  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 1$  і розв'язок задачі Коші прикладу 7 має вигляд

$$y(x) = -e^{3x} + e^{5x}.$$

**Приклад 3.2.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 14y' + 49y = 0.$$

**Розв'язання.** Складемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 14\lambda + 49 = 0$$

і знайдемо його корені. Як бачимо, квадратне рівняння  $\lambda^2 - 14\lambda + 49 = (\lambda - 7)^2 = 0$  має один корінь  $\lambda = 7$  кратності 2 (тобто  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 7$ ). Тому загальний розв'язок диференціального рівняння в цьому випадку, згідно з формулою (3.9), має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{7x} + C_2 x e^{7x}$$

**Приклад 3.3.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

**Розв'язання.** Його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

має корені:

$$\lambda_1 = -2 + 3i, \quad \lambda_2 = -2 - 3i.$$

Тому за формулою (3.10) загальний розв'язок диференціального рівняння прикладу 3.3 має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x.$$

**Приклад 3.4.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3.$$

**Розв'язання.** Складемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

Це рівняння має два уявні корені  $\lambda_1 = 3i$ ,  $\lambda_2 = -3i$  (в цьому випадку  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 3$ ). Тоді за формулою (3.10) загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 9y = 0$  має вигляд

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

Знайдемо його похідну

$$y'(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x.$$

Справджуємо умови Коші:

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 = 2,$$

$$y'(0) = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0 = 3C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Тому розв'язок задачі Коші прикладу 3.4 має вигляд

$$y(x) = 2 \cos 3x + \sin 3x.$$

### 3.3. Лінійні неоднорідні рівняння 2-го порядку

Розглянемо неоднорідне лінійне рівняння 2-го порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (3.11)$$

де  $a_1(x), a_2(x), f(x)$  – задані й неперервні на проміжку  $(a; b)$  функції.

Лінійне однорідне рівняння (3.1), ліва частина якого збігається з лівою неоднорідною частиною рівняння (3.11), називатимемо відповідним йому однорідним рівнянням.

**Теорема 3.5.** (Про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння). Нехай  $y^*(x)$  – довільний частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.11), а  $\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  – загальний розв'язок відповідного йому рівняння (3.1). Тоді функція

$$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x) \quad (3.12)$$

є загальним розв'язком неоднорідного рівняння (3.11).

### 3.4. Метод Коші знаходження частинного розв'язку $y^*(x)$

За методом Коші частинний розв'язок  $y^*(x)$  неоднорідного рівняння (3.11) з нульовими початковими умовами подається у вигляді

$$y^*(x) = \int_{x_0}^x K(x, s) f(s) ds, \quad (3.13)$$

де  $K(x, s)$  – функція Коші однорідного диференціального рівняння (3.1), яка має такі властивості:

а) за змінною  $x$  функція  $K(x, s)$  є розв'язком диференціального рівняння (3.1);

б)  $K(x, s)$  для  $x = s$  справджує початкові умови:  
 $K(s, s) = 0, \quad K'_x(s, s) = 1.$

Якщо фундаментальна система розв'язків  $y_1(x), y_2(x)$  однорідного диференціального рівняння (3.1) – відома, то функцію Коші  $K(x, s)$  можна подати у вигляді

$$K(x, s) = C_1(s)y_1(x) + C_2(s)y_2(x), \quad (3.14)$$

де коефіцієнти  $C_1(s), C_2(s)$  підбирають так, щоб початкові умови справджувались умови.

Зауважимо, що для неоднорідного диференціального рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (3.15)$$

де  $p, q$  – дійсні числа, а функція  $f(x)$  – неперервна на деякому інтервалі  $(a; b)$  дійсної осі, розв'язок  $y^*(x)$  можна подати в замкненій формі. При цьому слід розглянути три випадки:

- $p^2 - 4q < 0$ . Тоді

$$K(x, s) = \frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)} \sin \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}(x-s)}{\sqrt{4q-p^2}} \quad (3.16)$$

і частинний розв'язок  $y^*(x)$  рівняння (3.15) має вигляд:

$$y^*(x) = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \int_{x_0}^x e^{-\frac{p}{2}(x-s)} \sin \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}(x-s) \cdot f(s) ds, \quad (3.17)$$

де  $x_0$  – довільна точка з інтервалу  $(a; b)$ ;

- $p^2 - 4q > 0$ . Тоді

$$K(x, s) = \frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} (x-s)}{\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}}, \quad (3.18)$$

а частинний розв'язок диференціального рівняння (3.15) в цьому випадку має вигляд:

$$y^*(x) = \frac{2}{\sqrt{p^2 - 4q}} \int_{x_0}^x e^{-\frac{p}{2}(x-s)} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} (x-s) \cdot f(s) ds. \quad (3.19)$$

- $p^2 - 4q = 0$ . В цьому випадку

$$K(x, s) = (x-s) e^{-\frac{p}{2}(x-s)} \quad (3.20)$$

і частинний розв'язок диференціального рівняння (3.15) матиме вигляд:

$$y^*(x) = \int_{x_0}^x (x-s) e^{-\frac{p}{2}(x-s)} \cdot f(s) ds. \quad (3.21)$$

**Приклад 3.5.** Знайти частинний розв'язок  $y^*(x)$  диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}, \quad (3.22)$$

застосувавши метод Коші.

**Розв'язання.** Знайдемо фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння  $y'' - 2y' + y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  для цього диференціального рівняння має кратні корені  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

Тому функції  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = xe^x$  утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння  $y'' - 2y' + y = 0$ .

Знайдемо функцію  $K(x, s)$  за формулою (3.14).

$$K(x, s) = C_1(s)e^x + C_2(s)xe^x.$$

Коефіцієнти  $C_1(s), C_2(s)$  знайдемо з початкових умов :

$$K(s, s) = 0: \quad C_1(s)e^s + C_2(s)se^s = 0,$$

$$K'_x(s, s) = 1: \quad C_1(s)e^s + C_2(s)(e^s + se^s) = 1.$$

Розв'язавши цю лінійну відносно невідомих функцій  $C_1(s), C_2(s)$  систему рівнянь, отримуємо єдиний розв'язок:

$$C_1(s) = -se^{-s}, \quad C_2(s) = e^{-s}.$$

Отже функцію  $K(x, s)$  можна подати у вигляді

$$K(x, s) = -se^{x-s} + xe^{x-s} = (x-s)e^{(x-s)}. \quad (3.23)$$

Покладаючи у формулі  $x_0 = 0$ , запишемо частинний розв'язок  $y^*(x)$  диференціального рівняння (3.22) у вигляді (3.13)

$$\begin{aligned} y^*(x) &= \int_0^x (-s+x)e^{x-s} \frac{e^s}{s^2+1} ds = \int_0^x \frac{x-s}{s^2+1} e^x ds = \\ &= e^x \left( \int_0^x \frac{x}{s^2+1} ds - \int_0^x \frac{s}{s^2+1} ds \right) = e^x \left( x \arctg s - \frac{1}{2} \ln(s^2+1) \right) \Big|_0^x = \\ &= e^x \left( x \arctg x - \ln \sqrt{x^2+1} \right). \end{aligned}$$

В прикладі (3.21) можна використати формулу (3.20), за якою функція Коші однорідного диференціального рівняння  $y'' - 2y' + y = 0$  (оскільки  $p = -2$ ) має вигляд

$$K(x, s) = (x-s)e^{(x-s)},$$

тобто збігається з (3.23), яку ми знаходили, розв'язуючи систему лінійних відносно змінних  $C_1(s), C_2(s)$  рівнянь, що є, взагалі кажучи, трудомісткою процедурою. Тому

застосування формули (3.20) для знаходження функції Коші – доцільніше.

**Приклад 3.6.** Знайти частинний розв'язок  $y^*(x)$  диференціального рівняння

$$y'' + 4y = \cos x.$$

**Розв'язання.** Оскільки  $p = 0$ ,  $q = 4$ ,  $p^2 - 4q = -16 < 0$ , то функція  $K(x, s)$  для відповідного однорідного рівняння  $y'' + 4y = 0$  за формулою (3.16) має вигляд

$$K(x, s) = \frac{\sin 2(x-s)}{2},$$

а частинний розв'язок  $y^*(x)$  вихідного неоднорідного рівняння можна подати у формі (3.17)

$$\begin{aligned} y^*(x) &= \int_0^x \frac{\sin 2(x-s)}{2} \cdot \cos s \, ds = \frac{1}{4} \int_0^x [\sin(2x-3s) + \sin(2x-s)] \, ds \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} \cos(2x-3s) + \cos(2x-s) \right] \Big|_0^x = \frac{1}{3} (\cos x - \cos 2x). \end{aligned}$$

**Приклад 3.7.** Знайти частинний розв'язок  $y^*(x)$  диференціального рівняння

$$y'' - 6y' + 5y = 8e^x.$$

**Розв'язання.** Тут маємо  $p^2 - 4q = 6^2 - 4 \cdot 5 = 4 > 0$ . Тому для функції Коші використаємо формулу (3.18)

$$K(x, s) = \frac{e^{3(x-2s)} \operatorname{sh} 2(x-s)}{2},$$

а частинний розв'язок  $y^*(x)$  отримуємо у вигляді (3.19)

$$y^*(x) = \frac{8}{2} \int_0^x e^{3(x-2s)} \operatorname{sh} 2(x-s) e^s \, ds = \frac{e^{5x} - e^x}{4} - xe^x.$$



**Завдання для самостійного розв'язування**

1. Розв'язати задачу Коші або знайти загальний розв'язок  $y(x)$  диференціального рівняння

$$1. y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$2. y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$3. y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$4. y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}},$$

$$5. y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

$$6. y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{1 + 2x}$$

$$7. 9y'' + 12y' + 4y = \frac{9}{2 - 3x} e^{\frac{2x}{3}}$$

$$8. y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

$$9. 4y'' + 3y' = \frac{4}{e^{\frac{3}{4}x} + 2}$$

$$10. 9y'' + y = \frac{9}{\cos^3 \frac{x}{3}}, \quad y(0) = -\frac{9}{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{3}.$$

$$11. 4y'' + y = \frac{9}{\sin^3 \frac{x}{2}}, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

$$12. 9y'' - 6y' + y = \frac{9}{2x-3} e^{\frac{x}{3}}$$

$$13. 4y'' - 4y' + y = \frac{4}{1-2x} e^{\frac{x}{2}}$$

$$14. 4y'' + 12y' + 9y = \frac{4}{2-x} e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$15. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x-3}$$

$$16. y'' + 16y = \frac{1}{\cos^3 4x} \quad y(0) = -\frac{1}{32}, \quad y'(0) = -4.$$

$$17. y'' + 2y' = \frac{1}{e^{2x} + 2}$$

$$18. y'' - 9y' + 18y = \frac{6e^{3x}}{1+e^{-3x}}$$

$$19. y'' + 9y = \operatorname{ctg}^2 3x \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{9}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

$$20. y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{tg} x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

$$21. y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin x}$$

$$22. y'' + y = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$23. y'' + y = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$24. y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$$

$$25. y'' - 2y' + y = \frac{e^x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$26. y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x} \sin x}{\cos^3 x} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,5$$

$$27. y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = -e^{-2}$$

$$28. 4y'' + 4y' + y = \frac{4e^{-\frac{x}{2}}}{\sin^2 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{4}},$$

$$y'(0) = e^{-\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$29. y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

### Відповіді

$$1. y = -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x \ln |\sin 3x| + \sin 3x$$

$$2. y = x \sin x + \cos x \ln |\cos x| + \cos x.$$

$$3. y = \sin 2x \ln |tgx| + \cos 2x - \sin 2x.$$

$$4. y = 1 + (1 + 3e^{3x}) \ln(3 + e^{-3x}) + C_1 + C_2 e^{3x}.$$

$$5. y = e^{2x} (2xe^{2x} - (1 + e^{2x}) \ln(1 + e^{2x})) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

$$6. y = \frac{1}{2} e^{-3x} \left( x \ln |2x + 1| + \frac{1}{2} \ln |2x + 1| - x \right) + e^{-3x} (C_1 + C_2 x)$$

$$7. y = \frac{1}{3} e^{-\frac{2}{3}x} \left( x + \frac{2}{3} \ln |3x - 2| - x \ln |3x - 2| \right) + e^{-\frac{2}{3}x} (C_1 + C_2 x)$$

$$8. y = 2 \sin 2x \ln |tgx| + \cos 2x.$$

$$9. y = \frac{8}{9} \ln \left( 1 + 2e^{\frac{3x}{4}} \right) - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} e^{-\frac{3x}{4}} \ln \left( 1 + 2e^{\frac{3x}{4}} \right) + C_1 + C_2 e^{-\frac{3x}{4}}$$

$$10. y = -\frac{9}{2} \frac{\cos \frac{2x}{3}}{\cos \frac{x}{3}} + \sin \frac{x}{3}$$

$$11. y = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$12. y = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{3}} (2x \ln |2x-3| - 2x - 3 \ln |2x-3|) + e^{\frac{x}{3}} (C_1 + C_2 x)$$

$$13. y = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} (2x + \ln |2x-1| - 2x \ln |2x-1|) + e^{\frac{x}{2}} (C_1 + C_2 x)$$

$$14. y = e^{-\frac{3}{2}x} (x + 2 \ln |x-2| - x \ln |x-2|) + e^{-\frac{3}{2}x} (C_1 + C_2 x)$$

$$15. y = e^{-2x} (x \ln |x-3| - x - 3 \ln |x-3|) + e^{-2x} (C_1 + C_2 x)$$

$$16. y = -\frac{1}{32} \frac{\cos 8x}{\cos 4x} - \sin 4x$$

$$17. y = -\frac{1}{8} \ln(1 + 2e^{-2x}) - \frac{1}{4} e^{-2x} \ln(e^{2x} + 2) + C_1 + C_2 e^{-2x}$$

$$18. y = -\frac{2}{3} e^{3x} \ln(1 + e^{3x}) - \frac{2}{3} e^{6x} \ln(1 + e^{-3x}) + C_1 e^{3x} + C_2 e^{6x}$$

$$19. y = -\frac{1}{9} \cos 3x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{3x}{2} \right| - \frac{2}{9} + \cos 3x$$

$$20. y = -e^{-x} \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + e^{-x} \cos x$$

$$21. y = e^x (\sin x \ln |\sin x| - x \cos x) + e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$22. y = -\frac{1}{2} \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$23. y = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos x \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin x \ln \left| \frac{\sqrt{2} \sin x + 1}{\sqrt{2} \sin x - 1} \right| + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$24. y = -e^{-x} \ln |\cos x| - e^{-x}$$

$$25. y = -e^x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$$26. y = \frac{1}{2} e^{2x} \operatorname{tg} x + e^{2x}$$

$$27. y = \frac{x^2}{4} e^{-2x} (2 \ln x - 3) + \frac{3}{4} e^{-2x}$$

$$28. y = -e^{-\frac{1}{2}x} \ln |\sin x| + x e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$29. y = e^{3x} \left( x \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| - \sqrt{x^2 + 1} \right) + C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

## Розділ 4. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Розглянемо систему двох лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, яку запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

або у векторній формі

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = A\bar{X} + \bar{F}(t), \quad (4.2)$$

де  $\bar{X} = (x, y)^T$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$ ,  $\bar{F}(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$ .

Коефіцієнти  $a_{ij}$  вважаються дійсними числами, тобто  $A$  – стала матриця розміру  $2 \times 2$ .

### 4.1. Однорідні системи

**Визначення 4.1.** Система (4.2) називається *однорідною*, якщо вектор  $\bar{F}(t) \equiv \bar{0}$  і *неоднорідною* в протилежному випадку.

**Визначення 4.2.** Розв'язком системи (4.1) називається пара диференційованих функцій  $x(t), y(t)$ , яка справджує кожне рівняння цієї системи.

Можна дати й інше визначення розв'язку системи, що використовує її зображення (4.2)

**Визначення 4.3.** Розв'язком системи (4.2) називається диференційовний вектор-стовпець  $(x(t), y(t))^T$ , який справджує векторне рівняння (4.2).

Розглянемо однорідну систему

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = A\bar{X}, \quad (4.3)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \quad (4.4)$$

Будемо розв'язувати цю систему *методом виключення*, схема реалізації якого є такою:

- шукаємо корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

- будемо фундаментальну систему розв'язків  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ , наприклад для компоненти  $x(t)$  шуканого розв'язку;

- використовуючи систему (4.4), знаходимо відповідну фундаментальну систему розв'язків  $\psi_1(t), \psi_2(t)$  для компоненти  $y(t)$ ;

- побудуємо вектори  $\bar{X}_1(t) = (\varphi_1(t), \psi_1(t))^T$ ,  $\bar{X}_2(t) = (\varphi_2(t), \psi_2(t))^T$ . Тоді загальний розв'язок  $\bar{X}(t)$  системи (4.3) або (4.4) можна записати у вигляді

$$\bar{X}(t) = C_1 \bar{X}_1(t) + C_2 \bar{X}_2(t).$$

**Приклад 4.1.** Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$$

**Розв'язання.**

Корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -5 \\ 5 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

є комплексні:  $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$ ;

Тоді, наприклад,

$$\varphi_1(t) = e^{-2t} \cos 3t, \quad \varphi_2(t) = e^{-2t} \sin 3t;$$

З першого рівняння системи отримуємо

$$\psi_1(t) = \frac{1}{5}(2\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)) = \frac{1}{5}(4e^{-2t} \cos 3t + 3e^{-2t} \sin 3t).$$

Аналогічно отримуємо

$$\psi_2(t) = \frac{1}{5}(-3e^{-2t} \cos 3t + 4e^{-2t} \sin 3t);$$

Побудуємо вектори

$$\bar{X}_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \frac{1}{5}(4 \cos 3t + 3 \sin 3t) \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \frac{1}{5}(-3 \cos 3t + 4 \sin 3t) \end{pmatrix}.$$

Отже загальний розв'язок вихідної системи має вигляд

$$\bar{X}(t) = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \frac{1}{5}(4 \cos 3t + 3 \sin 3t) \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \frac{1}{5}(-3 \cos 3t + 4 \sin 3t) \end{pmatrix},$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі.



#### 4.2. Матриця Коші однорідної системи диференціальних рівнянь

При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь визначальну роль відігравала функція Коші  $K(x, s)$ . Її матричним аналогом є, так звана, матриця Коші, побудовою якої й займемось в цьому підрозділі.

**Визначення 4.4.** Функціональна матриця

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

називається *інтегральною матрицею* однорідної системи (4.3).

Зауважимо, що стовпцями цієї матриці є вектори  $\bar{X}_1(t)$  та  $\bar{X}_2(t)$  відповідно. Тому матриця (4.5) справджує матричне рівняння

$$\frac{dY}{dt} = AY. \quad (4.6)$$

**Визначення 4.5.** Матриця-функція двох змінних

$$B(t, s) = Y(t) \cdot Y^{-1}(s) \quad (4.7)$$

називається матрицею Коші однорідної системи (4.3).

Відомо, що матриця Коші (4.6) має такі властивості:

1.  $B(t, s)$  за змінною  $t$  є розв'язком матричного рівняння (4.6) з початковою умовою  $Y(s) = E$ , де

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.  $B(s, t) = B^{-1}(t, s)$ .

3. Для довільних трьох точок  $t_1, t_2, t_3$  з інтервалу  $(a, b)$  справджується рівність

$$B(t_3, t_2) \cdot B(t_2, t_1) = B(t_3, t_1).$$

$$4. \quad B(s, s) = E.$$

### 4.3. Метод Коші розв'язування систем диференціальних рівнянь

Розглянемо аналогічно, як і для диференціального рівняння, задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{d\bar{X}}{dt} = A\bar{X} + \bar{F}(t), \\ \bar{X}(t_0) = \bar{X}_0, \end{cases} \quad (4.8)$$

де  $\bar{X}_0 = (x(t_0), y(t_0))^T$ ,  $t_0 \in (a, b)$ .

Відомо, що розв'язок задачі (4.8) зображується у вигляді

$$\bar{X}(t) = B(t, t_0)\bar{X}_0 + \int_{t_0}^t B(t, s)\bar{F}(s)ds. \quad (4.9)$$

Формулу (4.9) називають *формулою Коші*.

У випадку  $\bar{F}(t) \equiv \bar{0}$  формула (4.9) дає розв'язок задачі Коші для однорідної системи рівнянь (4.3)

$$\bar{X}(t) = B(t, t_0)\bar{X}_0. \quad (4.10)$$

Якщо ж  $\bar{X}_0 = \bar{0}$ , то з (4.9) отримуємо розв'язок системи (4.3) з нульовою початковою умовою.

**Приклад 4.2.** Для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + f_2(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

розв'язати такі задачі;

а) для  $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$  при початкових умовах  $x(0) = 1, y(0) = 0$ ;

б) для  $f_1(t) = 0, f_2(t) = \sin 3t$  при нульових початкових умовах  $x(0) = 0, y(0) = 0$ ;

в) для  $f_1(t) = 0, f_2(t) = \sin 3t$  при початкових умовах  $x(0) = 1, y(0) = 0$ ;

**Розв'язання.**

а) Реалізуємо формулу (4.10) в цьому випадку. Побудуємо матрицю Коші  $B(t, s)$ , використавши інтегральну матрицю  $Y(t)$ . Для цього знайдемо спочатку корені характеристичного рівняння матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Маємо

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -5 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0.$$

Звідси  $\lambda_{1,2} = \pm 3i$ . Отже можна покласти, наприклад,  $\varphi_1(t) = \cos 3t, \varphi_2(t) = \sin 3t$ . Далі, за вже відомою схемою, маємо

$$\psi_1(t) = \frac{1}{5}(\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)) = \frac{1}{5}(\cos 3t + 3 \sin 3t),$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{5}(\varphi_2(t) - \varphi_2'(t)) = \frac{1}{5}(\sin 3t - 3 \cos 3t).$$

Отже

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ \frac{1}{5}(\cos 3t + 3 \sin 3t) & \frac{1}{5}(\sin 3t - 3 \cos 3t) \end{pmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що

$$Y^{-1}(s) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3 \cos 3s - \sin 3s) & \sin 3s \\ \frac{1}{5}(\cos 3s + 3 \sin 3s) & -\cos 3s \end{pmatrix}.$$

Використавши формулу (4.10), послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) &= B(t, 0) \bar{X}_0 = Y(t) \cdot Y^{-1}(0) \cdot \bar{X}_0 = \\ &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ \frac{1}{5}(\cos 3t + 3 \sin 3t) & \frac{1}{5}(\sin 3t - 3 \cos 3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \cos 3t + \sin 3t \\ 2 \sin 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

б) Поклавши в формулі (4.9)  $\bar{X}_0 = \bar{0}$ , послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) &= Y(t) \int_0^t Y^{-1}(s) \bar{F}(s) ds = \\ &= \frac{1}{3} Y(t) \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3 \cos 3s - \sin 3s) & \sin 3s \\ \frac{1}{5}(\cos 3s + 3 \sin 3s) & -\cos 3s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 3s \end{pmatrix} ds = \\ &= \frac{1}{3} Y(t) \int_0^t \begin{pmatrix} \sin^2 3s \\ \frac{1}{2} \sin 6s \end{pmatrix} ds = \frac{1}{3} Y(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( s - \frac{1}{6} \sin 6s \right) \\ -\frac{1}{12} \cos 6s \end{pmatrix} \Bigg|_0^t = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} Y(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{1}{12} \sin 6t \\ \frac{1}{12}(1 - \cos 6t) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ \frac{1}{5}(\cos 3t + 3 \sin 3t) & \frac{1}{5}(\sin 3t - 3 \cos 3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - \frac{1}{6} \sin 6t \\ \frac{1}{6}(1 - \cos 6t) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \cos 3t \left( t - \frac{1}{6} \sin 6t \right) + \frac{1}{6} \sin 3t (1 - \cos 6t) \\ \frac{1}{5}(\cos 3t + 3 \sin 3t) \left( t - \frac{1}{6} \sin 6t \right) + \frac{1}{30}(\sin 3t - 3 \cos 3t)(1 - \cos 6t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

в) Очевидно, що в цьому випадку шуканий розв'язок може бути записаний у вигляді

$$\begin{aligned}
\bar{X}(t) &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \cos 3t + \sin 3t \\ 2 \sin 3t \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \cos 3t \left( t - \frac{1}{6} \sin 6t \right) + \frac{1}{6} \sin 3t (1 - \cos 6t) \\ \frac{1}{5}(\cos 3t + 3 \sin 3t) \left( t - \frac{1}{6} \sin 6t \right) + \frac{1}{30}(\sin 3t - 3 \cos 3t)(1 - \cos 6t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### ***Завдання для самостійного розв'язування***

Розв'язати задачу Коші

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 8e^{3t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 7, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y - 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 5, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y + 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 9. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 15e^{-3t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 7, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y + 18t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 6. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 2 \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y - 8, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = 7. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y + 45, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 10, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y - 9e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 5, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y + 6e^{2t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -3, \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y + 10, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 8y - 16e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 14, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y + 5e^{-2t}, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 5, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y + 8e^{-3t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 7. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y + 9, \\ \frac{dy}{dt} = -5x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 4, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$



$$23. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 4y + 20e^{-3t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 5, \\ y(0) = -4. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 2y + 8e^{3t}, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 3, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = 7. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y - 6e^{-t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 4, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 15e^{-2t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 4, \\ y(0) = 7. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y + 6e^{4t}, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 4, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 4y - 2e^{-2t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -3, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

**Відповіді**

1.  $\begin{cases} x(t) = 8e^t + e^{5t} - 2e^{3t}, \\ y(t) = -8e^t + 3e^{5t} + 6e^{3t}. \end{cases}$
2.  $\begin{cases} x(t) = -\cos 2t - 5 \sin 2t - 1, \\ y(t) = 2 \cos 2t - 3 \sin 2t - 1. \end{cases}$
3.  $\begin{cases} x(t) = -2e^t - 4e^{4t} + 3e^{5t}, \\ y(t) = 2e^t - 2e^{4t} + e^{5t}. \end{cases}$
4.  $\begin{cases} x(t) = (5 + 4t)e^t - 3, \\ y(t) = (7 + 4t)e^t - 2. \end{cases}$
5.  $\begin{cases} x(t) = \cos t - 5 \sin t - 3, \\ y(t) = 6 \cos t - 4 \sin t - 3. \end{cases}$
6.  $\begin{cases} x(t) = -3e^{2t} + 12e^{4t} - 4e^{3t}, \\ y(t) = -3e^{2t} + 4e^{4t} - 2e^{3t}. \end{cases}$
7.  $\begin{cases} x(t) = -e^{2t} - e^{3t} - te^{2t}, \\ y(t) = 4e^{2t} + e^{3t} - 2te^{2t}. \end{cases}$
8.  $\begin{cases} x(t) = 2 \cos 2t - 4 \sin 2t - 1, \\ y(t) = 10 \cos 2t - 1. \end{cases}$
9.  $\begin{cases} x(t) = 3e^{-t} + 2e^{2t} - 3e^{-3t}, \\ y(t) = -3e^{-t} + e^{2t} + 6e^{-3t}. \end{cases}$

10. 
$$\begin{cases} x(t) = 8e^t - e^{-2t} - 4te^t, \\ y(t) = 3e^t - e^{-2t} - te^t. \end{cases}$$
11. 
$$\begin{cases} x(t) = -4e^{3t} + 3t^2 + 2t + 2, \\ y(t) = 4e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2. \end{cases}$$
12. 
$$\begin{cases} x(t) = \cos t + 2 \sin t + t \sin t - t \cos t, \\ y(t) = 4 \sin t - 2t \cos t. \end{cases}$$
13. 
$$\begin{cases} x(t) = 4e^{8t} - 6t - 1, \\ y(t) = 6e^{8t} + 3t + 1. \end{cases}$$
14. 
$$\begin{cases} x(t) = 2e^t + 2e^{3t} - e^{4t}, \\ y(t) = -2e^t + 2e^{3t} - 2e^{4t}. \end{cases}$$
15. 
$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos 3t + 20 \sin 3t + 5, \\ y(t) = -11 \cos 3t + 7 \sin 3t + 10. \end{cases}$$
16. 
$$\begin{cases} x(t) = e^{5t} + 5e^{-t} - e^{2t}, \\ y(t) = 2e^{5t} - 5e^{-t} + 4e^{2t}. \end{cases}$$
17. 
$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} - 4e^{3t} + 2e^{2t}, \\ y(t) = -2e^{-t} + 8e^{3t} - 2e^{2t}. \end{cases}$$
18. 
$$\begin{cases} x(t) = (7 \cos t + 3 \sin t)e^{2t} - 6, \\ y(t) = (2 \sin t - 5 \cos t)e^{2t} + 2. \end{cases}$$
19. 
$$\begin{cases} x(t) = 6e^{3t} + 8e^{-3t}, \\ y(t) = 3e^{3t} - 2e^{-3t} + 2e^t. \end{cases}$$
20. 
$$\begin{cases} x(t) = 4e^{-t} + 4e^{3t} - 3e^{-2t}, \\ y(t) = 2e^{-t} - 2e^{3t} - e^{-2t}. \end{cases}$$
21. 
$$\begin{cases} x(t) = 4e^{5t} - 8e^{-t} + 2e^{-3t}, \\ y(t) = 2e^{5t} + 8e^{-t} - 3e^{-3t}. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x(t) = 5 \cos 3t + 5 \sin 3t - 1, \\ y(t) = 10 \cos 3t - 5 \sin 3t - 5. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x(t) = 13e^t - 10e^{2t} + 2e^{-3t}, \\ y(t) = 13e^t - 15e^{2t} - 2e^{-3t}. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x(t) = -14e^{-t} + 12, \\ y(t) = 21e^{-t} - 24 + 4e^{3t}. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x(t) = -4 \cos t - 5 \sin t + 3, \\ y(t) = \cos t - 9 \sin t + 6. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x(t) = 10e^{2t} - 7e^{3t} + e^{-t}, \\ y(t) = -5e^{2t} + 7e^{3t} + e^{-t}. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x(t) = -4e^t + 4e^{3t} + 4e^{-2t}, \\ y(t) = 4e^t + 4e^{3t} - e^{-2t}. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x(t) = 7 \cos t - \sin t - 8, \\ y(t) = 3 \cos t - 4 \sin t - 4. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x(t) = -4e^t + 3e^{2t} + 5e^{4t}, \\ y(t) = -4e^t + 2e^{2t} + 2e^{4t}. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x(t) = 9e^{-t} - 6 - 6e^{-2t}, \\ y(t) = -6e^{-t} + 3 + 5e^{-2t}. \end{cases}$$

## Розділ 5. Системи лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами

На відміну від попередніх розділів, матеріал цього розділу не викладений в класичних підручниках або монографіях.

У зв'язку з цим усі твердження, представлені в цьому розділі, будемо доводити хоча б за скороченою схемою.

### 5.1. Однорідні системи

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = A(t)\bar{X}, \quad \bar{X} = (x, y)^T, \quad t \in (a, b) \quad (5.1)$$

з початковою умовою

$$\bar{X}(t_0) = \bar{P}_0, \quad t_0 \in (a, b). \quad (5.2)$$

Виберемо точки  $t_i \in (a, b)$ ,  $i = \overline{0, n}$  таким чином:

$$a < t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < b.$$

Ці точки породжують інтервали  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , на кожному з яких матриця-функція  $A(t)$  набуває сталих значень

$$A(t) = A_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

**Визначення 5.1.** Позначимо через  $\Theta_i$  характеристичну функцію інтервалу  $[t_i, t_{i+1})$

$$\Theta_i = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0, & t \notin [t_i, t_{i+1}). \end{cases} \quad (5.3)$$

Тоді матрицю  $A(t)$  можна подати у вигляді

$$A(t) = A_0\Theta_0 + A_1\Theta_1 + \dots + A_{n-1}\Theta_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i\Theta_i.$$

**Визначення 5.2.** Розв'язком системи (5.1) називається абсолютно неперервна вектор-функція  $\overline{X}(t)$ , яка справджує цю систему в звичайному сенсі скрізь на проміжку  $(a, b)$ , окрім, можливо, точок  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ .

Розглянемо рівняння (5.1) на кожному з інтервалів  $[t_i, t_{i+1})$

$$\frac{d\overline{X}_i}{dt} = A_i(t)\overline{X}_i, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (5.4)$$

та побудуємо для цих рівнянь матриці Коші  $B_i(t, s)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ .

Розв'язок задачі Коші на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$  шукаємо у вигляді

$$\overline{X}_i(t) = B_i(t, t_i)\overline{P}_i,$$

де  $\overline{P}_i$  поки що невідомий вектор. Аналогічно, на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$

$$\overline{X}_{i+1}(t) = B_{i+1}(t, t_{i+1})\overline{P}_{i+1}.$$

В точці  $t = t_{i+1}$  повинна виконуватись умова неперервності (див. визначення розв'язку 5.2)

$$\overline{X}_i(t_{i+1}) = \overline{X}_{i+1}(t_{i+1}),$$

тобто

$$B_i(t_{i+1}, t_i)\overline{P}_i = B_{i+1}(t_{i+1}, t_{i+1})\overline{P}_{i+1}.$$

Звідси, враховуючи властивість 4 матриці Коші  $B_{i+1}(t_{i+1}, t_{i+1}) = E$ , приходимо до рекурентного співвідношення

$$\overline{P}_{i+1} = B_i(t_{i+1}, t_i)\overline{P}_i. \quad (5.5)$$

Із співвідношення (5.5) послідовно отримуємо:

$$\overline{P}_1 = B_0(t_1, t_0)\overline{P}_0,$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 &= B_1(t_2, t_1) \bar{P}_1 = B_1(t_2, t_1) B_0(t_1, t_0) \bar{P}_0 = B(t_2, t_0) \bar{P}_0, \\ \bar{P}_3 &= B_2(t_3, t_2) \bar{P}_2 = B_2(t_3, t_2) B_1(t_2, t_1) B_0(t_1, t_0) \bar{P}_0 = B(t_3, t_0) \bar{P}_0, \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{P}_i &= B_{i-1}(t_i, t_{i-1}) \bar{P}_{i-1} = B_{i-1}(t_i, t_{i-1}) B_{i-2}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots B_0(t_1, t_0) \bar{P}_0 = \\ &= B(t_i, t_0) \bar{P}_0, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

де  $\bar{P}_0$  – це початковий вектор (5.2).

Справедливість формули (5.6) можна встановити методом математичної індукції.

Отже, на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$  розв’язок задачі (5.1), використовуючи (5.6), подамо у вигляді

$$\bar{X}_i(t) = B_i(t, t_i) B(t_i, t_0) \bar{P}_0, \tag{5.7}$$

а на усьому інтервалі  $[t_0, t_n]$  – у вигляді

$$\bar{X}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{X}_i(t) \Theta_i. \tag{5.8}$$

**Зауваження 5.1.** Оскільки розв’язок (5.8) – не визначений в точці  $t = t_n$ , то покладемо  $\bar{X}(t_n) = \lim_{t \rightarrow t_{n-0}} \bar{X}_{n-1}(t)$ .

**Приклад 5.1.** Розв’язати задачу Коші

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = A(t) \bar{X}, \quad \bar{X} = (x, y)^T, \quad t \in (0, \infty), \tag{5.9}$$

$$\bar{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

$$A(t) = \begin{cases} A_0, & t \in [0; \pi), \\ A_1, & t \in [\pi; \infty) \end{cases}$$

або  $A(t) = A_0\Theta_0 + A_1\Theta_1$ , де  $\Theta_0$  і  $\Theta_1$  – характеристичні функції (5.3) інтервалів  $[0; \pi)$  і  $[\pi; \infty)$  відповідно, при цьому

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Розглянемо спочатку для  $t \in [0; \pi)$  систему

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = A_0\bar{X} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases} \quad (5.11)$$

Характеристичне рівняння

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

має комплексно-спряжені корені  $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ . Тоді, наприклад,

$$\varphi_1(t) = e^t \cos 2t, \quad \varphi_2(t) = e^t \sin 2t.$$

З першого рівняння системи (5.11) знайдемо

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_1}{dt} - \varphi_1 \right) = \frac{1}{2} (e^t \cos 2t - 2e^t \sin 2t - e^t \cos 2t) = -e^t \sin 2t.$$

Аналогічно отримуємо

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_2}{dt} - \varphi_2 \right) = \frac{1}{2} (e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t - e^t \sin 2t) = e^t \cos 2t.$$

Отже, інтегральна матриця  $Y(t)$  системи (5.11) при  $t \in [0; \pi)$  має вигляд

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [0; \pi).$$

Оскільки  $\det Y(t) = e^{2t}$ , то



$$Y^{-1}(s) = e^{-2s} \begin{pmatrix} e^s \cos 2s & -e^s \sin 2s \\ e^s \sin 2s & e^s \cos 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-s} \cos 2s & -e^{-s} \sin 2s \\ e^{-s} \sin 2s & e^{-s} \cos 2s \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} B_0(t, s) &= Y(t)Y^{-1}(s) = \\ &= \begin{pmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} \cos 2s & -e^{-s} \sin 2s \\ e^{-s} \sin 2s & e^{-s} \cos 2s \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{t-s} \cos 2(t-s) & e^{t-s} \sin 2(t-s) \\ -e^{t-s} \sin 2(t-s) & e^{t-s} \cos 2(t-s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо (перевірте!) для  $t, s \in [\pi; \infty)$

$$B_1(t, s) = \begin{pmatrix} e^{2(t-s)} \cos(t-s) & e^{2(t-s)} \sin(t-s) \\ -e^{2(t-s)} \sin(t-s) & e^{2(t-s)} \cos(t-s) \end{pmatrix}.$$

На основі формули (5.7) з використанням (5.10) маємо

$$\bar{X}_0(t) = B_0(t, 0)\bar{P}_0 = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_1(t) &= B_1(t, \pi)B_0(\pi, 0)\bar{P}_0 = \\ &= \begin{pmatrix} e^{2(t-\pi)} \cos(t-\pi) & e^{2(t-\pi)} \sin(t-\pi) \\ -e^{2(t-\pi)} \sin(t-\pi) & e^{2(t-\pi)} \cos(t-\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\pi & 0 \\ 0 & e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= e^\pi \begin{pmatrix} e^{2(t-\pi)} \cos(t-\pi) & e^{2(t-\pi)} \sin(t-\pi) \\ -e^{2(t-\pi)} \sin(t-\pi) & e^{2(t-\pi)} \cos(t-\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t-\pi} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, розв'язок задачі Коші (5.9), (5.10) за формулою (5.8) має вигляд

$$\bar{X}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} \Theta_0 - e^{2t-\pi} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \Theta_1.$$

**Приклад 5.2.** Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + b(t)y = 0 \quad (5.12)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad (5.13)$$

де

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = l < \infty,$$

$$b(t) = b_0 \Theta_0 + b_1 \Theta_1 + \dots + b_{m-1} \Theta_{m-1},$$

$$b_k > 0, \quad k = \overline{0, m-1},$$

а  $\Theta_k$ ,  $k = \overline{0, m-1}$  – характеристичні функції (5.3).

**Розв'язання.** Зведемо диференціальне рівняння (5.12) до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

На інтервалі  $[t_k; t_{k+1})$  система (5.14) має вигляд

$$\begin{pmatrix} y_k \\ y'_k \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ y'_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (5.15)$$

Характеристичне рівняння цієї системи

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b_k & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + b_k = 0$$

має уявні корені  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b_k}$ . Тоді відповідні фундаментальні системи розв'язків на  $[t_k; t_{k+1})$  мають вигляд:

$$\varphi_{1k}(t) = \cos \sqrt{b_k} t, \quad \varphi_{2k}(t) = \sin \sqrt{b_k} t,$$

$$\psi_{1k}(t) = -\sqrt{b_k} \sin \sqrt{b_k} t, \quad \psi_{2k}(t) = \sqrt{b_k} \cos \sqrt{b_k} t, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Отже, відповідні інтегральні матриці  $Y_k(t)$  системи (5.15) мають вигляд

$$Y_k(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{b_k} t & \sin \sqrt{b_k} t \\ -\sqrt{b_k} \sin \sqrt{b_k} t & \sqrt{b_k} \cos \sqrt{b_k} t \end{pmatrix}.$$

Легко переконатись, що

$$Y_k^{-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{b_k}} \begin{pmatrix} \sqrt{b_k} \cos \sqrt{b_k} s & -\sin \sqrt{b_k} s \\ \sqrt{b_k} \sin \sqrt{b_k} s & \cos \sqrt{b_k} s \end{pmatrix}.$$

Тому відповідні матриці Коші можна записати так

$$B_k(t, s) = Y_k(t) Y_k^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{b_k} (t-s) & \frac{\sin \sqrt{b_k} (t-s)}{\sqrt{b_k}} \\ -\sqrt{b_k} \cdot \sin \sqrt{b_k} (t-s) & \cos \sqrt{b_k} (t-s) \end{pmatrix}.$$

Розглянемо, для простоти, випадок двох інтервалів  $[0; t_1)$  і  $[t_1; t_2)$ . Слідуючи схемі розв'язання прикладу 5.1 із врахуванням початкової умови (5.13), яка має векторне зображення

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

послідовно отримуємо:

$$\begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_0'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{b_0} t & \frac{\sin \sqrt{b_0} t}{\sqrt{b_0}} \\ -\sqrt{b_0} \cdot \sin \sqrt{b_0} t & \cos \sqrt{b_0} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{b_0} t \\ -\sqrt{b_0} \sin \sqrt{b_0} t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{b_1} (t-t_1) & \frac{\sin \sqrt{b_1} (t-t_1)}{\sqrt{b_1}} \\ -\sqrt{b_1} \cdot \sin \sqrt{b_1} (t-t_1) & \cos \sqrt{b_1} (t-t_1) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos \sqrt{b_0} t_1 & \frac{\sin \sqrt{b_0} t_1}{\sqrt{b_0}} \\ -\sqrt{b_0} \sin \sqrt{b_0} t_1 & \cos \sqrt{b_0} t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \sqrt{b_0} t_1 \cdot \cos \sqrt{b_1} (t-t_1) - \frac{\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_1}} \sin \sqrt{b_0} t_1 \cdot \sin \sqrt{b_1} (t-t_1) \\ -\sqrt{b_1} \cos \sqrt{b_0} t_1 \cdot \sin \sqrt{b_1} (t-t_1) - \sqrt{b_0} \sin \sqrt{b_0} t_1 \cdot \cos \sqrt{b_1} (t-t_1) \end{pmatrix}.$$

Записавши розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y'_0(t) \end{pmatrix} \Theta_0 + \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y'_1(t) \end{pmatrix} \Theta_1$$

та відчитавши перший рядок вектора, остаточно отримаємо шуканий розв'язок задачі Коші (5.12) (5.13) для випадку  $m = 2$

$$y(t) = \cos \sqrt{b_0} t \Theta_0 +$$

$$+ \left( \cos \sqrt{b_0} t_1 \cdot \cos \sqrt{b_1} (t-t_1) - \frac{\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_1}} \sin \sqrt{b_0} t_1 \cdot \sin \sqrt{b_1} (t-t_1) \right) \Theta_1.$$

### 5.2. Неоднорідні системи

Розглянемо тепер систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = A(t)\bar{X} + \bar{F}(t), \quad \bar{X} = (x, y)^T, \quad t \in (a, b) \quad (5.16)$$

з початковою умовою

$$\bar{X}(t_0) = \bar{P}_0, \quad t_0 \in (a, b). \quad (5.17)$$

Якщо  $\bar{F}(t) \neq \bar{0}$  для  $t \in (a, b)$ , то система (5.16) називається *неоднорідною*.

Як і в підрозділі 5.1, виберемо точки  $t_i \in (a, b)$ ,  $i = \overline{0, n}$  таким чином:

$$a < t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < b.$$

Ці точки породжують інтервали  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , на кожному з яких матриця-функція  $A(t)$  та вектор-функція  $\bar{F}(t)$  набувають сталих значень:

$$A(t) = A_i, \quad \bar{F}(t) = \bar{F}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Як і в підрозділі 5.1, матрицю  $A(t)$  та вектор  $\bar{F}(t)$  можна подати у вигляді:

$$A(t) = A_0 \Theta_0 + A_1 \Theta_1 + \dots + A_{n-1} \Theta_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Theta_i,$$

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_0 \Theta_0 + \bar{F}_1 \Theta_1 + \dots + \bar{F}_{n-1} \Theta_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{F}_i \Theta_i,$$

де  $\Theta_i$  – характеристичні функції (5.3).

Аналогічно, як у випадку однорідної системи, розв’язок задачі Коші (5.16), (5.17) на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$  шукаємо у вигляді

$$\bar{X}_i(t) = B_i(t, t_i) \bar{P}_i + \int_{t_i}^t B_i(t, s) \bar{F}_i ds, \quad (5.18)$$

де  $B_i(t, s)$  – матриця Коші відповідної однорідної системи (5.4), а  $\bar{P}_i$  – поки що невідомий вектор. Аналогічно, на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$

$$\bar{X}_{i+1}(t) = B_{i+1}(t, t_{i+1}) \bar{P}_{i+1} + \int_{t_{i+1}}^t B_{i+1}(t, s) \bar{F}_{i+1} ds.$$

В точці  $t = t_{i+1}$  повинна виконуватись умова неперервності

$$\bar{X}_i(t_{i+1}) = \bar{X}_{i+1}(t_{i+1}),$$

тобто

$$B_i(t_{i+1}, t_i) \bar{P}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} B_i(t_{i+1}, s) \bar{F}_i ds = B_{i+1}(t_{i+1}, t_{i+1}) \bar{P}_{i+1} + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+1}} B_{i+1}(t_{i+1}, s) \bar{F}_{i+1} ds.$$

Звідси, враховуючи властивість 4 матриці Коші, та властивості визначеного інтеграла, приходимо до рекурентного співвідношення

$$\bar{P}_{i+1} = B_i(t_{i+1}, t_i) \bar{P}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} B_i(t_{i+1}, s) \bar{F}_i ds. \quad (5.19)$$

Надалі, для спрощення позначимо  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} B_i(t_{i+1}, s) \bar{F}_i ds = \bar{Z}_i$ .

Із співвідношення (5.19) послідовно отримуємо:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= B_0(t_1, t_0) \bar{P}_0 + \bar{Z}_0, \\ \bar{P}_2 &= B_1(t_2, t_1) \bar{P}_1 + \bar{Z}_1 = B_1(t_2, t_1) (B_0(t_1, t_0) \bar{P}_0 + \bar{Z}_0) + \bar{Z}_1 = \\ &= B(t_2, t_0) \bar{P}_0 + B_1(t_2, t_1) \bar{Z}_0 + \bar{Z}_1, \\ \bar{P}_3 &= B_2(t_3, t_2) \bar{P}_2 + \bar{Z}_2 = \\ &= B_2(t_3, t_2) (B_1(t_2, t_0) \bar{P}_0 + B_1(t_2, t_1) \bar{Z}_0 + \bar{Z}_1) + \bar{Z}_2 = \\ &= B(t_3, t_0) \bar{P}_0 + B(t_3, t_1) \bar{Z}_0 + B(t_3, t_2) \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2, \quad (5.20) \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{P}_i &= B(t_i, t_0) \bar{P}_0 + \sum_{k=1}^i B(t_i, t_k) \bar{Z}_{k-1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

де  $\bar{P}_0$  – це початковий вектор (5.17).

Справедливість формули (5.20), аналогічно, як і формули (5.6), можна встановити методом математичної індукції.

Отже, враховуючи (5.20), зображення (5.18) можна записати в розгорнутому вигляді, а саме

$$\begin{aligned} \overline{X}_0(t) &= B_0(t, t_0) \overline{P}_0 + \int_{t_0}^t B_0(t, s) \overline{F}_0 ds, \\ \overline{X}_i(t) &= B_i(t, t_i) \left( B(t_i, t_0) \overline{P}_0 + \sum_{k=1}^i B(t_i, t_k) \overline{Z}_{k-1} \right) + \int_{t_i}^t B_i(t, s) \overline{F}_i ds, \quad (5.21) \\ & \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

А розв'язок задачі Коші (5.16), (5.17) на інтервалі  $(a, b)$  подамо як і випадку подання (5.8), так

$$\overline{X}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{X}_i(t) \Theta_i. \quad (5.22)$$

**Приклад 5.2.** Знайти розв'язок задачі Коші (5.16), (5.17), якщо

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{F}_i = \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

**Розв'язання.** Слідуючи схемі розв'язання прикладу 5.1, знайдемо корені характеристичного рівняння матриць  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ . Маємо

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a_i \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0,$$

тобто  $\lambda_{1,2} = 0$ . Отже інтегральні матриці системи на інтервалах  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  такі:

$$Y_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_i^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -a_i s \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Тоді відповідні матриці Коші мають вигляд:

$$B_i(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & a_i(t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (5.23)$$

**Зауваження 5.1.** Матриці вигляду (5.23) – це трикутні матриці, які мають специфічні властивості. Якщо

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad T_k = \begin{pmatrix} 1 & a_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то, як легко бачити,

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_k = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=1}^k a_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що матриця

$$B(t_i, t_k) \stackrel{df}{=} B_{i-1}(t_i, t_{i-1}) \cdot B_{i-2}(t_{i-1}, t_{i-2}) \cdot \dots \cdot B_k(t_{k+1}, t_k) \quad (5.24)$$

має структуру

$$B(t_i, t_k) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{p=k}^{i-1} a_p(t_{p+1} - t_p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \geq k.$$

Опишемо компоненти розв'язку  $\overline{X}_i(t)$  задачі Коші прикладу 5.3 на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ :

$$\begin{aligned} B(t_i, t_0) &= \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{i-1} a_k(t_{k+1} - t_k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t_i, t_0) \overline{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \overline{Z}_i &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} B_i(t_{i+1}, s) \cdot \overline{F}_i ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 & a_i(t_{i+1} - s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \end{pmatrix} ds = \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \end{pmatrix} ds = f_i \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = \begin{pmatrix} f_i(t_{i+1} - t_i) \\ 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$



$$\int_0^t B_0(t,s) \bar{F}_0 ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & a_0(t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix} ds = f_0 \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_0^t = \begin{pmatrix} f_0 t \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\int_{t_i}^t B_i(t,s) \bar{F}_i ds = \int_{t_i}^t \begin{pmatrix} 1 & a_i(t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int_{t_i}^t \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \end{pmatrix} ds = f_i \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{t_i}^t = \begin{pmatrix} f_i(t-t_i) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$i = \overline{1, n-1}.$$

Тоді за формулами (5.21) матимемо

$$\bar{X}_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0 t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f_0 t \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{X}_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & a_i(t-t_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} 1 & \sum_{p=k}^{i-1} a_p(t_{p+1} - t_p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{Z}_{k-1} \right) + \begin{pmatrix} f_i(t-t_i) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_i(t-t_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} f_{k-1}(t_k - t_{k-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} f_i(t-t_i) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

А розв'язок задачі Коші прикладу 5.3 на проміжку  $(a; b)$  остаточно запишеться у формі (5.22).

## Розділ 6. Квазідиференціальні рівняння 2-го порядку з кусково-сталими коефіцієнтами

### 6.1. Постановка задачі

Широке коло прикладних задач зводиться до розв'язування рівняння

$$(a(t)y')' + b(t)y = f(t). \quad (6.1)$$

Вважатимемо, що коефіцієнти  $a(t), b(t)$  та функція  $f(t)$  зображуються, як і в розділі V, у вигляді:

$$a(t) = a_0\Theta_0 + a_1\Theta_1 + \dots + a_{n-1}\Theta_{n-1}, \quad b(t) = b_0\Theta_0 + b_1\Theta_1 + \dots + b_{n-1}\Theta_{n-1},$$

$$f(t) = f_0\Theta_0 + f_1\Theta_1 + \dots + f_{n-1}\Theta_{n-1}, \quad a_i, b_i > 0, \quad i = \overline{0, n-1},$$

де  $\Theta_i$  – характеристичні функції інтервалів  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ .

Через те, що функція  $a(t)$  – розривна, спроба розкриття виразу

$$(a(t)y')' \equiv a(t)y'' + a'(t)y'$$

приводить до відомої «проблеми множення узагальнених функцій».

Цих ускладнень можна уникнути, якщо використати такі міркування.

Розглянемо вираз

$$y^{[1]} \stackrel{df}{=} a(t)y', \quad (6.2)$$

який назвемо *квазіпохідною* функції  $y$ . Зважаючи на таке визначення квазіпохідної (6.2), рівняння (6.1) називають *квазідиференціальним*. «Задачу Коші» для

квазідиференціального рівняння (6.1) поставимо в термінах функції  $y(t)$  та її квазіпохідної  $y^{[1]}(t)$ :

$$\begin{cases} (a(t)y')' + b(t)y = f(t); \\ y(t_0) = y_0, \quad y^{[1]}(t_0) = y_0^{[1]}. \end{cases} \quad (6.3)$$

Введемо матрицю

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(t)} \\ -b(t) & 0 \end{pmatrix}$$

та вектори

$$\bar{X}(t) = (y(t), y^{[1]}(t))^T, \quad \bar{F}(t) = (0, f(t))^T, \quad \bar{P}_0 = (y_0, y_0^{[1]})^T.$$

Тоді задачу (6.3) зведемо до еквівалентної задачі Коші для системи диференціальних рівнянь типу (5.16), (5.17) або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(t)} \\ -b(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}; \quad (6.4)$$

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y^{[1]}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0^{[1]} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Схема розв'язування системи (6.4), (6.5) вичерпно викладена в розділі 5. Реалізуємо цю схему для конкретних вихідних даних (матриця  $A(t)$ , вектори  $\bar{F}(t)$  та  $\bar{P}_0$ ).

**6.2. Розв'язування однорідної задачі****Приклад 6.1.** Розв'язати задачу Коші

$$(a(t)y')' + b(t)y = 0; \quad (6.6)$$

$$y(0) = 1, \quad y^{[1]}(0) = 0, \quad (6.7)$$

де  $a(t)$  і  $b(t)$  подаються у вигляді:

$$a(t) = a_0\Theta_0 + a_1\Theta_1, \quad b(t) = b_0\Theta_0 + b_1\Theta_1.$$

Тут  $\Theta_0$  і  $\Theta_1$  – характеристичні функції інтервалів  $[0; t_1)$  та  $[t_1; t_2)$  відповідно.**Розв'язання.** Зведемо квазидиференціальне рівняння (6.6) до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(t)} \\ -b(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

На інтервалі  $[t_k; t_{k+1})$ ,  $k = \overline{0, 1}$  система (6.8) має вигляд

$$\begin{pmatrix} y_k \\ y_k^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_k} \\ -b_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ y_k^{[1]} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, 1}. \quad (6.9)$$

Характеристичне рівняння цієї системи

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{a_k} \\ -b_k & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{b_k}{a_k} = 0$$

має уявні корені  $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}$ . Тоді відповідні фундаментальні системи розв'язків на  $[t_k; t_{k+1})$ ,  $k = \overline{0,1}$  мають вигляд:

$$\varphi_{1k}(t) = \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t, \quad \varphi_{2k}(t) = \sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t,$$

$$\psi_{1k}(t) = \varphi_{1k}^{[1]}(t) = -a_k \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} \sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t = -\sqrt{a_k b_k} \sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t,$$

$$\psi_{2k}(t) = \varphi_{2k}^{[1]}(t) = a_k \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t = \sqrt{a_k b_k} \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t. \quad \text{!!!!}$$

Отже, відповідні інтегральні матриці  $Y_k(t)$  системи (6.9) мають вигляд

$$Y_k(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t & \sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t \\ -\sqrt{a_k b_k} \sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t & \sqrt{a_k b_k} \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} t \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що елементами другого рядка матриці  $Y_k(t)$  є квазіпохідні відповідних елементів першого рядка.

Легко переконатись, що

$$Y_k^{-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{a_k b_k}} \begin{pmatrix} \sqrt{a_k b_k} \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} s & -\sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} s \\ \sqrt{a_k b_k} \sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} s & \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} s \end{pmatrix}.$$

Тому відповідні матриці Коші можна записати так:

$$B_k(t, s) = Y_k(t)Y_k^{-1}(s) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}(t-s) & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}(t-s)}{\sqrt{a_k b_k}} \\ -\sqrt{a_k b_k} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}(t-s) & \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}(t-s) \end{pmatrix}.$$

Векторне зображення початкової умови (6.7) має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді послідовно отримуємо:

$$\begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_0^{[1]}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}t & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}t}{\sqrt{a_0 b_0}} \\ -\sqrt{a_0 b_0} \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}t & \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}t \\ -\sqrt{a_0 b_0} \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1^{[1]}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1) & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1)}{\sqrt{a_1 b_1}} \\ -\sqrt{a_1 b_1} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1) & \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1 & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1}{\sqrt{a_0 b_0}} \\ -\sqrt{a_0 b_0} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1 & \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t-t_1) - \frac{\sqrt{a_1 b_0}}{\sqrt{a_0 b_1}} \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t-t_1) \\ -\sqrt{a_1 b_1} \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t-t_1) - \sqrt{a_0 b_0} \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t-t_1) \end{pmatrix}.$$

Записавши розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y^{[1]}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_0^{[1]}(t) \end{pmatrix} \Theta_0 + \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1^{[1]}(t) \end{pmatrix} \Theta_1$$

та відчитавши перший рядок вектора, остаточно отримаємо шуканий розв'язок задачі Коші (6.6) (6.7)

$$y(t) = \cos \sqrt{b_0} t \Theta_0 +$$

$$+ \left( \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t-t_1) - \sqrt{\frac{a_1 b_0}{a_0 b_1}} \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} t_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t-t_1) \right) \Theta_1.$$

### 6.3. Розв'язування неоднорідної задачі

**Приклад 6.2.** Розв'язати «задачу Коші» для найпростішого неоднорідного квазідиференціального рівняння

$$(a(t)y)' = f(t), \quad t \in (a;b); \quad (6.10)$$

$$y(0) = 0, \quad y^{[1]}(0) = 1. \quad (6.11)$$

**Розв'язування.** Як і в розділі 5, виберемо точки  $t_i \in (a, b)$ ,  $i = \overline{0, n}$  таким чином:

$$a < t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < b.$$

Ці точки породжують інтервали  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , на кожному з яких функції  $a(t)$  і  $f(t)$  набувають сталих значень:

$$a(t) = a_0 \Theta_0 + a_1 \Theta_1 + \dots + a_{n-1} \Theta_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Theta_i,$$

$$f(t) = f_0 \Theta_0 + f_1 \Theta_1 + \dots + f_{n-1} \Theta_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \Theta_i,$$

де  $\Theta_i$  – характеристичні функції (5.3).

Ввівши квазіпохідну  $y^{[1]} \stackrel{df}{=} a(t) y'$ , зведемо задачу (6.10), (6.11) до задачі Коші для еквівалентної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y^{[1]}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Задача (6.12), (6.13) вписується в загальну схему, що ґрунтовно вивчена в 5.2.

На кожному з інтервалів  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  система рівнянь (6.12) має вигляд



$$\begin{pmatrix} y_i \\ y_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_i^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_i(t) \end{pmatrix}, \quad a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (6.14)$$

Інтегральна матриця відповідної однорідної системи

$$\begin{pmatrix} y_i \\ y_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_i^{[1]} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (6.15)$$

як можна перекоонатись безпосередньою перевіркою, має вигляд

$$Y_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & a_i \end{pmatrix}.$$

Дійсно, матриці  $Y_i(t)$  повинні справджувати, асоційоване до векторного рівняння (6.15), матричне рівняння

$$Y_i'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y_i(t).$$

Послідовно маємо:

$$Y_i'(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & a_i \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

що й доводить справедливість нашого твердження. Оскільки

$$Y_i^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a_i} s \\ 0 & \frac{1}{a_i} \end{pmatrix},$$

То матриці Коші  $B_i(t, s)$  відповідних систем мають вигляд:

$$B_i(t, s) = Y_i(t) \cdot Y_i^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_i}(t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Із зауваження 5.1 випливає, що матриця

$$B(t_i, t_k) \stackrel{df}{=} B_{i-1}(t_i, t_{i-1}) \cdot B_{i-2}(t_{i-1}, t_{i-2}) \cdots B_k(t_{k+1}, t_k)$$

має таку структуру

$$B(t_i, t_k) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{p=k}^{i-1} \frac{(t_{p+1} - t_p)}{a_p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \geq k.$$

Опишемо компоненти розв'язку  $\overline{X}_i(t)$  задачі Коші (6.12), (6.13) на інтервалі  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ :

$$B(t_i, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t_i, t_0) \overline{P}_0 = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\overline{Z}_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} B_i(t_{i+1}, s) \cdot \overline{F}_i ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{(t_{i+1} - s)}{a_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f_i \end{pmatrix} ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \begin{pmatrix} f_i \frac{(t_{i+1} - s)}{a_i} \\ f_i \end{pmatrix} ds =$$

$$\begin{aligned}
 &= f_i \left( -\frac{(t_{i+1}-s)^2}{2a_i} \right) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = f_i \left( \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2a_i} \right); \\
 \int_0^t B_0(t,s) \bar{F}_0 ds &= \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & (t-s) \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \end{pmatrix} ds = \int_0^t f_0 \begin{pmatrix} (t-s) \\ a_0 \end{pmatrix} ds = \\
 &f_0 \left( -\frac{(t-s)^2}{2a_0} \right) \Big|_0^t = f_0 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2a_0 \end{pmatrix}; \\
 \int_{t_i}^t B_i(t,s) \bar{F}_i ds &= \int_{t_i}^t \begin{pmatrix} 1 & (t-s) \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_i \end{pmatrix} ds = f_i \int_{t_i}^t \begin{pmatrix} (t-s) \\ a_i \end{pmatrix} ds = \\
 &= f_i \left( -\frac{(t-s)^2}{2a_i} \right) \Big|_{t_i}^t = f_i \begin{pmatrix} (t-t_i)^2 \\ 2a_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}.
 \end{aligned}$$

Тоді за формулами (5.21) матимемо

$$\bar{X}_0(t) = \begin{pmatrix} t \\ a_0 \\ 1 \end{pmatrix} + f_0 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2a_0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 t^2 + \frac{1}{a_0} t \\ 1 + f_0 t \end{pmatrix}; \quad (6.16)$$

Для обчислення  $\bar{X}_i(t)$  знайдемо його складові:

$$B_i(t, t_i) \cdot B(t_i, t_0) \cdot \bar{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & (t-t_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sum_{p=0}^{i-1} \frac{(t_{p+1}-t_p)}{a_p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{t-t_i}{a_i} + \sum_{p=0}^{i-1} \frac{(t_{p+1}-t_p)}{a_p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t-t_i}{a_i} + \sum_{p=0}^{i-1} \frac{(t_{p+1}-t_p)}{a_p} \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$B_i(t, t_i) \cdot \sum_{k=1}^i B(t_i, t_k) \cdot \bar{Z}_{k-1} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} 1 & \frac{t-t_i}{a_i} + \sum_{p=k}^{i-1} \frac{(t_{p+1}-t_p)}{a_p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot f_{k-1} \begin{pmatrix} \frac{(t_k-t_{k-1})^2}{2a_{k-1}} \\ (t_k-t_{k-1}) \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^i f_{k-1} \begin{pmatrix} \frac{(t_k-t_{k-1})^2}{2a_{k-1}} + \left( \frac{t-t_i}{a_i} + \sum_{p=k}^{i-1} \frac{(t_{p+1}-t_p)}{a_p} \right) (t_k-t_{k-1}) \\ (t_k-t_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

Розв'язок задачі Коші (6.12), (6.13) на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  тепер можна записати так:

$$\bar{X}_i(t) = \begin{pmatrix} \frac{t-t_i}{a_i} + \sum_{p=0}^{i-1} \frac{(t_{p+1}-t_p)}{a_p} \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^i f_{k-1} \begin{pmatrix} \frac{(t_k-t_{k-1})^2}{2a_{k-1}} + \left( \frac{t-t_i}{a_i} + \sum_{p=k}^{i-1} \frac{(t_{p+1}-t_p)}{a_p} \right) (t_k-t_{k-1}) \\ (t_k-t_{k-1}) \end{pmatrix} + \quad (6.17)$$

$$+ f_i \begin{pmatrix} \frac{(t-t_i)^2}{2a_i} \\ t-t_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Відчитуючи у векторах (6.16) та (6.17) перші компоненти, отримуємо розв'язок задачі (6.10) (6.11) на інтервалах  $[0; t_1)$  та  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  відповідно:

$$\begin{aligned}
 y_0(t) &= \frac{f_0}{2a_0}t^2 + \frac{1}{a_0}t; \\
 y_i(t) &= \frac{t-t_i}{a_i} + \sum_{p=0}^{i-1} \frac{(t_{p+1}-t_p)}{a_p} + \sum_{k=1}^i f_{k-1} \left( \frac{(t_k-t_{k-1})^2}{2a_{k-1}} + \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{t-t_i}{a_i} + \sum_{p=k}^{i-1} \frac{(t_{p+1}-t_p)}{a_p} \right) (t_k-t_{k-1}) \right) + f_i \left( \frac{(t-t_i)^2}{2a_i} \right), \\
 & \quad i = \overline{1, n-1}.
 \end{aligned}$$

## Розділ 7. Крайові задачі

### 7.1. Основні поняття

В попередньому розділі ми детально розглянули задачу (6.3):

$$\begin{cases} (a(t)y')' + b(t)y = f(t); \\ y(t_0) = y_0, \quad y^{[1]}(t_0) = y_0^{[1]}. \end{cases}$$

В цій задачі «початкові умови»  $y(t_0) = y_0$ ,  $y^{[1]}(t_0) = y_0^{[1]}$  – значення функції  $y(t)$  та її квазіпохідної  $y^{[1]}(t)$  – задані в одній точці  $t = t_0$ . Натомість, постановка широкого кола прикладних задач потребує задання значень шуканого розв'язку та її похідної (квазіпохідної) в двох точках інтервалу, на якому шукаємо цей розв'язок. Такі задачі прийнято називати *двоточковими* або *крайовими*.

Нехай квазидиференціальне рівняння  $(a(t)y')' + b(t)y = f(t)$  задане на інтервалі  $[t_0; t_n]$ . Для цього рівняння розрізняють крайові умови таких трьох типів:

- *крайові умови першого роду*

$$y(t_0) = \psi_0, \quad y(t_n) = \psi_n, \quad (7.1)$$

де тут і надалі  $\psi_0, \psi_n$  – задані числа;

- *крайові умови другого роду*

$$y^{[1]}(t_0) = \psi_0, \quad y^{[1]}(t_n) = \psi_n, \quad (7.2)$$

- *крайові умови третього роду*

$$-y^{[1]}(t_0) = \alpha_0(\psi_0 - y(t_0)), \quad -y^{[1]}(t_n) = \alpha_n(y(t_n) - \psi_n), \quad (7.3)$$

де  $\alpha_0, \alpha_n$  – також задані числа.

Зауважимо, що крайові умови (7.1)-(7.3) часто зустрічаються в різних комбінаціях на краях  $t_0$  і  $t_n$ , що зумовлено специфікою конкретної фізичної задачі.

Далі розглядатимемо типові приклади розв'язування крайових задач з різноманітними крайовими умовами. Ці задачі можна описати загальною схемою, яка має такі пункти реалізації:

- зведення квазидиференціального рівняння до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку;

- запис крайових умов у векторно-матричній формі;
- зведення крайової задачі до задачі Коші.

## 7.2. Приклади розв'язування крайових задач

**Приклад 7.1.** Розглянемо крайову задачу:

$$(a(t)y')' = 0; \quad (7.4)$$

$$\begin{cases} y(t_0) = \psi_0, \\ y(t_n) = \psi_n. \end{cases} \quad (7.5)$$

Тут  $a(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Theta_i$ , де  $a_i > 0$  – дійсні числа,  $\Theta_i$  –

характеристичні функції інтервалів  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ .

**Розв'язування.** Подібно, як в прикладі (6.2) зведемо квазидиференціальне рівняння (7.4) до еквівалентної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

На кожному з інтервалів  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  ця система має вигляд

$$\begin{pmatrix} y_i \\ y_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ y_i^{[1]} \end{pmatrix}, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{0, n-1},$$

де  $y_i^{[1]} = a_i y_i'$  – квазіпохідна на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$ .

Тоді матриці Коші  $B_i(t, s)$ , які в прикладі 6.2, для систем (7.6) мають вигляд:

$$B_i(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_i}(t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Запишемо крайові умови (7.5) у векторно-матричній формі. Для цього введемо матриці

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

та вектори

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y^{[1]}(t_0) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_n = \begin{pmatrix} y(t_n) \\ y^{[1]}(t_n) \end{pmatrix}.$$

Тоді, як легко переконатись безпосередньою перевіркою, крайові умови (7.5) можна записати у вигляді

$$P \cdot \bar{\Gamma}_0 + Q \cdot \bar{\Gamma}_n = \bar{R}, \quad (7.7)$$

або в розгорнутій формі

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y^{[1]}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(t_n) \\ y^{[1]}(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n \end{pmatrix}.$$

Отже крайову задачу (7.4), (7.5) можна записати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$



$$P \cdot \bar{\Gamma}_0 + Q \cdot \bar{\Gamma}_n = \bar{R}. \quad (7.9)$$

Для зведення цієї задачі до задачі Коші знайдемо початковий вектор  $\bar{Y}_0$  з умови (7.9). З (5.7) випливає, що  $\bar{Y}_n$  можна записати у вигляді

$$\bar{Y}_n = \bar{Y}_{n-1}(t_n) = B_{n-1}(t_n, t_{n-1}) \cdot B(t_{n-1}, t_0) \cdot \bar{Y}_0 = B(t_n, t_0) \cdot \bar{Y}_0,$$

де  $B(t_n, t_0)$  має вигляд

$$B(t_n, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Підставивши це значення  $\bar{Y}_n$  в умову (7.9), послідовно отримуємо:

$$\begin{aligned} P \bar{\Gamma}_0 + Q \cdot B(t_n, t_0) \cdot \bar{\Gamma}_n &= \bar{R}, \\ (P + Q \cdot B(t_n, t_0)) \bar{\Gamma}_0 &= \bar{R}, \end{aligned}$$

звідки

$$\bar{\Gamma}_0 = (P + Q \cdot B(t_n, t_0))^{-1} \cdot \bar{R}$$

Конкретизуємо тепер вектор  $\bar{\Gamma}_0$  :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_0 &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n \end{pmatrix} = \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Остаточно вираз (7.10) запишемо у вигляді

$$\bar{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Отже розв'язок крайової задачі (7.8),(7.9) еквівалентний розв'язку задачі Коші (7.4),(7.5)

Знайдемо розв'язок цієї задачі на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_0(t) &= B_0(t, t_0) \cdot \bar{\Gamma}_0 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{(t-t_0)}{a_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)}{a_0} \cdot \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \\ \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_i(t) &= B_i(t, t_i) \cdot B(t_i, t_0) \cdot \bar{\Gamma}_0 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{(t-t_i)}{a_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{(t-t_i)}{a_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \left[ \begin{array}{c} \psi_0 + \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \left( \frac{(t - t_i)}{a_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \right) \\ \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \end{array} \right], \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Оскільки перша координата цього вектора є розв'язком крайової задачі (7.4), (7.5) на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$ , остаточно отримуємо:

$$y_0(t) = \frac{(t - t_0)}{a_0} \cdot \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}};$$

$$y_i(t) = \psi_0 + \frac{\psi_n - \psi_0}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k}} \left( \frac{(t - t_i)}{a_i} + \sum_{p=0}^{i-1} \frac{(t_{p+1} - t_p)}{a_p} \right), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

На інтервалі  $[t_0, t_n]$  розв'язок задачі (7.4), (7.5) можна подати у вигляді

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(t) \Theta_i.$$

Цей розв'язок існує і єдиний за умови існування оберненої до матриці  $P + QB(t_n, t_0)$ . Необхідною і достатньою умовою такого існування є відмінність від нуля її визначника. А, оскільки

$$\det(P + QB(t_n, t_0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} > 0,$$

то ця умова в даному прикладі безумовно виконується. У зв'язку з цим слід підкреслити, що проблема існування

оберненої матриці  $(P + QB(t_n, t_0))^{-1}$  виникає завжди при розв'язуванні довільної крайової (двоточкової) задачі.

**Приклад 7.2.**

$$(a(t)y')' + b(t)y = 0; \quad (7.12)$$

$$\begin{cases} y^{[1]}(t_0) = \psi_0, \\ y^{[1]}(t_2) = \psi_2, \end{cases} \quad (7.13)$$

де  $a(t) = a_0\Theta_0 + a_1\Theta_1$ ,  $a_0, a_1 > 0$ ,  $b(t) = b_0\Theta_0 + b_1\Theta_1$ ,  $b_0, b_1 > 0$ .

Зауважимо, що в цьому прикладі на обидвох кінцях інтервалу  $[t_0, t_2]$  задані умови другого роду.

**Розв'язування.** В прикладі (6.1) розглядається квазідиференціальне рівняння, що фактично є рівнянням (7.12). Тому, не вдаючись в деталі, запишемо матриці Коші  $B_k(t, s)$  для відповідної системи диференціальних рівнянь першого порядку.

$$B_k(t, s) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}(t-s) & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}(t-s)}{\sqrt{a_k b_k}} \\ -\sqrt{a_k b_k} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}(t-s) & \cos \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}(t-s) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1. \quad (7.14)$$

Ввівши матриці

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

та вектори

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y^{[1]}(t_0) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} y(t_2) \\ y^{[1]}(t_2) \end{pmatrix},$$

як і в прикладі 7.1, запишемо крайові умови (7.9) у векторно-матричній формі

$$P \cdot \bar{\Gamma}_0 + Q \cdot \bar{\Gamma}_2 = \bar{R},$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y^{[1]}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(t_2) \\ y^{[1]}(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Отже крайову задачу (7.12), (7.13) можна записати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

$$P \cdot \bar{\Gamma}_0 + Q \cdot \bar{\Gamma}_2 = \bar{R}, \quad (7.16)$$

Для зведення задачі (7.15), (7.16) до задачі Коші потрібно знайти початковий вектор  $\bar{\Gamma}_0$ , аналогічно як в прикладі 7.1, з умови (7.10) тобто

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_0 &= (P + Q \cdot B(t_2, t_0))^{-1} \cdot \bar{R} = (P + Q \cdot B_1(t_2, t_1) \cdot B_0(t_1, t_0))^{-1} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \left( P + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t_2 - t_1) & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t_2 - t_1)}{\sqrt{a_1 b_1}} \\ -\sqrt{a_1 b_1} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t_2 - t_1) & \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t_2 - t_1) \end{pmatrix} \cdot B_0(t_1, t_0) \right)^{-1} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \left( P + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{a_1 b_1} \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t_2 - t_1) & \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t_2 - t_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t_1 - t_0) & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t_1 - t_0)}{\sqrt{a_0 b_0}} \\ -\sqrt{a_0 b_0} \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t_1 - t_0) & \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t_1 - t_0) \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\sqrt{a_1 b_1} \cdot c_0 s_1 + \sqrt{a_0 b_0} \cdot c_1 s_0) & -\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{\sqrt{a_0 b_0}} \cdot s_0 s_1 + c_0 c_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{\sqrt{a_0 b_0}} \cdot s_0 s_1 + c_0 c_1 & -1 \\ \sqrt{a_1 b_1} \cdot c_0 s_1 + \sqrt{a_0 b_0} \cdot c_1 s_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \psi_0 \left( -\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{\sqrt{a_0 b_0}} \cdot s_0 s_1 + c_0 c_1 \right) - \psi_2 \\ \psi_2 \left( \sqrt{a_1 b_1} \cdot c_0 s_1 + \sqrt{a_0 b_0} \cdot c_1 s_0 \right) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\psi_0 \left( -\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{\sqrt{a_0 b_0}} \cdot s_0 s_1 + c_0 c_1 \right) - \psi_2}{\Delta} \\ \psi_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що для компактності записів ми ввели такі позначення:

$$\begin{aligned}
\sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} (t_1 - t_0) &= s_0, \quad \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t_2 - t_1) = s_1, \\
\cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} (t_1 - t_0) &= c_0, \quad \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t_2 - t_1) = c_1, \\
\Delta &= \sqrt{a_1 b_1} \cdot c_0 s_1 + \sqrt{a_0 b_0} \cdot c_1 s_0.
\end{aligned}$$

Отже крайова задача (7.15),(7.16) еквівалентна такій задачі Коші:

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}, \quad (7.17)$$

$$\begin{pmatrix} y(t_0) \\ y^{[1]}(t_0) \end{pmatrix} = \bar{\Gamma}_0, \quad (7.18)$$

де

$$\bar{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} \psi_0 \left( -\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{\sqrt{a_0 b_0}} \cdot s_0 s_1 + c_0 c_1 \right) - \psi_2 \\ \Delta \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок цієї задачі на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i=0,1$  має вигляд

$$\bar{Y}_i(t) = B_i(t, t_i) \cdot B(t_i, t_0) \cdot \bar{\Gamma}_0.$$

Конкретизуємо вирази  $\bar{Y}_0(t)$  та  $\bar{Y}_1(t)$ :

$$\begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_0^{[1]}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t-t_0) & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t-t_0)}{\sqrt{a_0 b_0}} \\ -\sqrt{a_0 b_0} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t-t_0) & \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t-t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \left( -\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{\sqrt{a_0 b_0}} \cdot s_0 s_1 + c_0 c_1 \right) - \psi_2 \\ \Delta \\ \psi_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1^{[1]}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1) & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1)}{\sqrt{a_1 b_1}} \\ -\sqrt{a_1 b_1} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1) & \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t_1-t_0) & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t_1-t_0)}{\sqrt{a_0 b_0}} \\ -\sqrt{a_0 b_0} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t_1-t_0) & \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t_1-t_0) \end{pmatrix} \bar{\Gamma}_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1) & \frac{\sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1)}{\sqrt{a_1 b_1}} \\ -\sqrt{a_1 b_1} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1) & \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}(t-t_1) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} c_0 & \frac{s_0}{\sqrt{a_0 b_0}} \\ -\sqrt{a_0 b_0} s_0 & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \left( -\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{\sqrt{a_0 b_0}} \cdot s_0 s_1 + c_0 c_1 \right) - \psi_2 \\ \Delta \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Відчитуючи в отриманих виразах перші координати відповідних векторів, отримаємо складові розв'язку

$$y(t) = y_0(t) \Theta_0 + y_1(t) \Theta_1$$

крайової задачі (7.9) (7.10). Так, наприклад,

$$y_0(t) = \frac{\psi_0 \left( -\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{\sqrt{a_0 b_0}} \cdot s_0 s_1 + c_0 c_1 \right) - \psi_2}{\Delta} \cdot \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t-t_0) + \\ + \frac{\psi_2}{\sqrt{a_0 b_0}} \cdot \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}(t-t_0).$$

Аналогічно знайдемо компоненту  $y_1(t)$ , що пропонуємо зробити читачеві в якості вправи.

В прикладі 7.1 умова існування та єдності розв'язку крайової задачі виконувалась автоматично. Натомість, в прикладі 7.2 необхідно поставити вимогу, щоб визначник  $\Delta = \sqrt{a_1 b_1} \cdot c_0 s_1 + \sqrt{a_0 b_0} \cdot c_1 s_0$  був відмінний від нуля. Зауважимо, що цей визначник є складним тригонометричним виразом



$$\Delta = \sqrt{a_1 b_1} \cos \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} (t_1 - t_0) \sin \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t_2 - t_1) + \\ + \sqrt{a_0 b_0} \sin \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} (t_1 - t_0) \cos \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t_2 - t_1),$$

який при певних співвідношеннях параметрів  $a_0, b_0, a_1, b_1, t_0, t_1$  може дорівнювати нулеві. Наприклад, якщо  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = r$ , то

$$\Delta = a_1 \cos r \sin r + a_0 \cos r \sin r = \frac{1}{2} (a_0 + a_1) \sin 2r.$$

Оскільки  $a_0 + a_1 > 0$ , то для виконання умови  $\Delta \neq 0$  з необхідністю повинно бути  $\sin 2r \neq 0$ , тобто  $r \neq \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$

В прикладах 7.1 та 7.2 в точках  $t_0$  та  $t_n$  ми задавали умови однакового роду (першого та другого роду відповідно). В наступному прикладі задамо на лівому кінці  $t_0$  крайову умову другого роду, а на правому, тобто в точці  $t_n$  – крайову умову третього роду.

**Приклад 7.3.** Знайти розв'язок крайової задачі:

$$(a(t)y')' = 0; \\ \left\{ \begin{array}{l} y^{[1]}(t_0) = \psi_0, \\ -y^{[1]}(t_n) = \alpha_n (y(t_n) - \psi_n), \quad \alpha_n > 0. \end{array} \right.$$

Переписавши крайову умову в точці  $t = t_n$  у вигляді

$$\alpha_n y(t_n) + y^{[1]}(t_n) = \alpha_n \psi_n, \quad \alpha_n > 0,$$

отримуємо крайову задачу

$$(a(t)y')' = 0; \tag{7.15}$$

$$\begin{cases} y^{[1]}(t_0) = \psi_0, \\ \alpha_n y(t_n) + y^{[1]}(t_n) = \alpha_0 \psi_n, \quad \alpha_n > 0, \end{cases} \quad (7.16)$$

**Розв'язування** проведемо за відомою схемою – зведення задачі (7.15), (7.16) до задачі Коші для відповідної системи диференціальних рівнянь.

Зведемо квазідиференціальне рівняння (7.15) до еквівалентної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}.$$

На кожному з інтервалів  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  ця система має вигляд

$$\begin{pmatrix} y_i \\ y_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ y_i^{[1]} \end{pmatrix}, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{0, n-1},$$

де  $y_i^{[1]} = a_i y_i'$  – квазіпохідна на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$ .

Тоді матриці Коші  $B_i(t, s)$ , як і в прикладі 7.1, для систем (7.6) мають вигляд:

$$B_i(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_i}(t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Ввівши матриці

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}$$

та вектори

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \alpha_n \psi_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y^{[1]}(t_0) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_n = \begin{pmatrix} y(t_n) \\ y^{[1]}(t_n) \end{pmatrix},$$

запишемо крайові умови (7.16) у векторно-матричній формі

$$P \cdot \bar{\Gamma}_0 + Q \cdot \bar{\Gamma}_n = \bar{R},$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} y(t_0) \\ y^{[1]}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(t_n) \\ y^{[1]}(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \alpha_n \psi_n \end{pmatrix}.$$

Отже крайову задачу (7.15), (7.16) можна записати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

$$P \cdot \bar{\Gamma}_0 + Q \cdot \bar{\Gamma}_n = \bar{R}, \quad (7.18)$$

Як і в прикладі 7.1, знайдемо  $\bar{\Gamma}_0$  з умови (7.18)

$$\bar{\Gamma}_0 = (P + Q \cdot B(t_n, t_0))^{-1} \cdot \bar{R}$$

Конкретизуємо тепер вектор  $\bar{\Gamma}_0$  :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_0 &= \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \alpha_n \psi_n \end{pmatrix} = \\ &= \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \alpha_n \psi_n \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_n & 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \alpha_n \psi_n \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} & -1 \\ -\alpha_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \alpha_n \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\psi_0}{\alpha_n} \left( 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \right) + \psi_n \\ \psi_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отже крайова задача (7.17), (7.18) еквівалентна задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

$$\begin{pmatrix} y(t_0) \\ y^{[1]}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\psi_0}{\alpha_n} \left( 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \right) + \psi_n \\ \psi_0 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Знайдемо розв'язок цієї задачі на інтервалі  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_0(t) = B_0(t, t_0) \cdot \bar{\Gamma}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{(t-t_0)}{a_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\psi_0}{\alpha_n} \left( 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \right) + \psi_n \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\psi_0(t-t_0)}{a_0} - \frac{\psi_0}{\alpha_n} \left( 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \right) + \psi_n \\ \psi_0 \end{pmatrix}; \\
\bar{Y}_i(t) &= B_i(t, t_i) \cdot B(t_i, t_0) \cdot \bar{\Gamma}_0 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{(t-t_i)}{a_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)}{a_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\psi_0}{\alpha_n} \left( 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)}{a_k} \right) + \psi_n \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{(t-t_i)}{a_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)}{a_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\psi_0}{\alpha_n} \left( 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)}{a_k} \right) + \psi_n \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \psi_0 \left( \frac{(t-t_i)}{a_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)}{a_k} \right) - \frac{\psi_0}{\alpha_n} \left( 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)}{a_k} \right) + \psi_n \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \\
&\quad i = \overline{1, n-1}.
\end{aligned}$$

Відчитуючи перші координати цих векторів, дістаємо вирази для компонентів розв'язку крайової задачі (7.15), (7.16):

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= \frac{\psi_0(t-t_0)}{a_0} - \frac{\psi_0}{\alpha_n} \left( 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)}{a_k} \right) + \psi_n; \\
y_i(t) &= \psi_0 \left( \frac{(t-t_i)}{a_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)}{a_k} \right) - \frac{\psi_0}{\alpha_n} \left( 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)}{a_k} \right) + \psi_n, \\
&\quad i = \overline{1, n-1}.
\end{aligned}$$

І нарешті, на усьому проміжку  $[t_0, t_n]$  розв'язок крайової задачі (7.15), (7.16) матиме вигляд

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(t) \Theta_i.$$

На завершення зауважимо, що оскільки  $a_n > 0$ , то

$$(P + QB(t_n, t_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_n & 1 + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)}{a_k} \end{pmatrix}^{-1}$$

завжди існує через те, що  $\det(P + QB(t_n, t_0)) = -a_n \neq 0$ . Це гарантує існування та єдність розв'язку нашої задачі.

## Розділ 8. Основи прямого методу дослідження процесів теплообміну в багатошарових плоских конструкціях

### 8.1. Модель теплопровідності. Загальні положення теорії теплопровідності

Передачу тепла від однієї частини тіла до іншої або ж від одного тіла до іншого, які є дотичними, називають *теплопровідністю*. Аналітична теорія теплопровідності ігнорує молекулярну будову речовини, вона розглядає цю речовину не як сукупність окремих частинок, а як суцільне середовище. Таке модельне представлення речовини може бути прийнятим при розв'язуванні задач передачі тепла, якщо розміри диференціальних об'ємів досить великі у порівнянні з розмірами молекул і відстанями між ними.

Кожне фізичне явище, у тому числі і процес теплопередачі, проходить в просторі і часі. Тому аналітичне дослідження теплопровідності зводиться до знаходження просторово-часової зміни основної величини  $t$  – *температури*, з рівняння

$$t = f(x, y, z, \tau), \quad (8.1)$$

де  $x, y, z$  – просторові координати в декартовій системі координат, а  $\tau$  – час.

Рівняння (8.1) представляє математичний вираз температурного поля. Таким чином, температурне поле – це сукупність значень температури у всіх точках досліджуваного простору в кожен момент часу.

Розрізняють стаціонарні та нестаціонарні температурні поля. Стаціонарними температурними полями називають поля, температура в будь-якій їхній точці не змінюється в часі.

Нестаціонарними температурними полями називають поля, температура яких змінюється не лише в просторі, а й з

плином часу.

Для знаходження розподілу нестационарного температурного поля в багат шаровій плоскій конструкції необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності Фур'є

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right), \quad (8.2)$$

де  $c$  – питома теплоємність матеріалу,  $\rho$  – його густина,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

Диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є (8.2) описує явище теплопровідності в загальному вигляді. Для повного формулювання задачі теплопровідності необхідно вказати, крім рівняння теплопровідності, початкову та граничні умови для температурного поля.

Початкова умова вказує на розподіл температурного поля в початковий момент часу, коли  $\tau=0$ .

$$t(x, 0) = \varphi(x). \quad (8.3)$$

Для стаціонарного температурного поля початкова умова не потрібна.

Як вище було анонсовано, граничні умови можуть задаватись декількома способами:

а) Граничні умови першого роду полягають в заданні закону розподілу температури по поверхні тіла залежно від часу

$$t_{ПОВ} = t(x, \tau). \quad (8.4)$$

б) Граничні умови другого роду полягають в заданні закону розподілу густини теплового потоку по поверхні тіла залежно від часу

$$q_n(\tau) = f(\tau). \quad (8.5)$$

в) Граничні умови третього роду: вказується температура навколишнього середовища і коефіцієнт теплообміну, який характеризує інтенсивність теплообміну між тілом та речовиною, що омиває тіло



$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha (\psi(\tau) - t(x_n, \tau)), \quad (8.6)$$

де  $\psi(\tau)$  – закон зміни температури рідини або середовища, яке омиває тіло,  $t(x_n, \tau)$  – температура поверхні тіла,  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну.

Граничні умови також можуть задаватись у вигляді комбінацій граничних умов першого, другого та третього роду.

## 8.2. Основні методи розв'язування крайових задач теплообміну

Дослідженню і методам розв'язування задач теплообміну присвячено ряд робіт. Ці методи умовно можна розділити на три типи: 1) прямі або класичні, основою яких є метод відокремлення змінних Фур'є; 2) операційні, які включають в себе різного роду інтегральні перетворення; 3) наближені числові методи.

*Метод відокремлення змінних (метод Фур'є).* Класичний метод розв'язування диференціальних рівнянь теплопровідності, який полягає в тому, що знаходиться сукупність частинних розв'язків  $t_n$ , які справджують рівняння та крайові умови, а тоді, згідно з принципом суперпозиції, складається ряд цих розв'язків.

$$t = C_1 t_1 + C_2 t_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n t_n, \quad (8.7)$$

де коефіцієнти  $C_n$  знаходять з початкової умови.

*Метод джерел (метод функції Гріна).* Фізична суть методу джерел полягає в тому, що будь-який процес поширення тепла в тілі теплопровідністю можна зобразити як сукупність процесів вирівнювання температури від багатьох елементарних джерел тепла, розподілених як в просторі, так і в часі. Вирішення задач теплопровідності цим методом в

основному зводиться до правильного вибору джерел і їх розподілу.

Так, наприклад, розв'язок рівняння теплопровідності (8.1) при початковій умові (8.3) та за нульових крайових умов (8.4)-(8.6) має вигляд

$$t(x, \tau) = \int_0^l G(x, \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi. \quad (8.8)$$

Вираз  $G(x, \xi, \tau)$  називається *функцією джерела* (або функцією Гріна) відповідної мішаної задачі з нульовими крайовими умовами. Методи її побудови та властивості добре описані в спеціальній математичній літературі.

*Метод інтегральних перетворень (операційний метод).* Такі методи ґрунтуються на тому, що вивчається не сама невідома функція (оригінал), а певна її видозміна (зображення). Так, наприклад, перетворення Лапласа виконується за допомогою множення на експоненціальну функцію та інтегрування її в певних границях. Тому перетворення Лапласа є інтегральним перетворенням.

Інтегральне перетворення  $f_L(s)$  функції  $f(\tau)$  зображується формулою

$$f_L(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = L[f(\tau)], \quad (8.9)$$

де  $f(\tau)$  – оригінал функції, а  $f_L(s)$  – її зображення, яке позначається у вигляді  $L[f(\tau)]$ . Тут  $s$  може бути і комплексним числом, причому вважається, що його дійсна частина буде додатною. Для того, щоб зображення існувало, необхідно щоб інтеграл (8.9) був збіжним. Це накладає деякі обмеження на функцію  $f(\tau)$ .

Якщо задача вирішена в зображеннях, то знаходження оригіналу за зображенням (обернене перетворення) в загальному випадку виконується за формулою

$$f(\tau) = L^{-1}[f_L(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_L(s) e^{s\tau} ds. \quad (8.10)$$

Методи Фур'є та функцій Гріна ще прийнято називати **класичними** або **прямими**. Поряд з методами інтегральних перетворень вони відносяться до групи **точних** методів розв'язування задач математичної фізики. Група наближених (числових, графічних, експериментально-аналітичних тощо) методів тут не розглядається.

### 8.3. Порівняння прямих та операційних методів

Прямим та операційним методам присвячено численні наукові монографії, підручники, посібники та публікації в наукових виданнях. На основі аналізу тематики та змісту відомих джерел можна зробити такі висновки:

1. Прямі методи були розроблені виключно для дослідження процесів теплопереносу в одношарових структурах. Вони відзначаються завершеністю та досконалістю. Усі, без винятку, їх модифікації дають можливість отримувати вирази для температури у замкненій формі, взагалі кажучи, у вигляді рядів. Це, в свою чергу, дало можливість ефективно будувати таблиці та графіки розподілу температурного поля. Однак, для випадку багатшарових структур, прямі методи донедавна не були розроблені.

2. В класичних монографіях задачі теплопереносу для одношарових структур з методичної точки зору розв'язуються, для порівняння, прямим та операційним методами. Це дає можливість констатувати, що операційні методи принаймні «удвічі» громіздкіші, оскільки передбачають розв'язання двох задач – прямої та оберненої. Крім того, пряма задача має бути розв'язана в явному аналітичному вигляді, щоб можна було застосувати метод оберненого перетворення.

Інший підхід, що дає можливість розглядати математичні моделі процесів теплопереносу для багат шарових структур одночасно по всій їх товщині, традиційно для виразу  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x) \frac{\partial t}{\partial x} \right)$  пропонує виконувати формальну операцію диференціювання. Така операція неминуче, навіть для випадку кусково-сталого коефіцієнта теплопровідності  $\lambda(x)$ , приводить до проблеми множення узагальнених функцій.

#### 8.4. Постановка задачі та основні позначення

В прямокутній декартові системі координат  $Ox$  розглядається нескінченна плита товщиною  $l$ , тобто область, що обмежена площинами  $x = x_0 = 0$  і  $x = x_n = l$ . Ця область поділена площинами  $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}$ , на  $n$  шарів різної товщини. Кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda$ , питомою теплоємністю  $c$  та густиною  $\rho$ . Між шарами закладені умови ідеального теплового контакту (тобто рівність температур та теплових потоків). Вважатимемо, що температура в плиті поширюється лише в напрямку осі  $Ox$ , тобто задача про дослідження теплообміну є одновимірною. У випадку конвекційного теплообміну на зовнішніх поверхнях плити, така задача зводиться до розв'язування на відрізьку  $[0, l]$  диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) \quad (8.11)$$

з крайовими умовами третього роду

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_0, \tau) = \alpha_0 (t(x_0, \tau) - \psi_0(\tau)), \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_n, \tau) = \alpha_n (t(x_n, \tau) - \psi_n(\tau)), \end{cases} \quad (8.12)$$

при початковій умові

$$t(x, 0) = \varphi(x). \quad (8.13)$$

Зауважимо, що  $\psi_0(\tau)$  і  $\psi_n(\tau)$  – температури навколишнього середовища за межами приповерхневих теплових шарів, а  $\alpha_0$  та  $\alpha_n$  відповідні коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях  $x = x_0$  та  $x = x_n$ .

Надалі використовуватимемо такі позначення:  $\Theta_i$  – характеристична функція напіввідкритого проміжку  $[x_i, x_{i+1})$ ,

$$\text{тобто,} \quad \Theta_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{якщо } x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}, \quad \lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x) \Theta_i,$$

$$c(x) \cdot \rho(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot \rho_i(x) \Theta_i, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i > 0 \in R, \quad \forall i = \overline{0, n-1},$$

$\lambda t' \stackrel{df}{=} t^{[1]}$  – квазіпохідна,  $-t^{[1]} = q$  – густина теплового потоку.

Ввівши позначення квазіпохідної, перепишемо крайові умови (8.12) у такому вигляді

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_0, \tau) = \alpha_0 (t(x_0, \tau) - \psi_0(\tau)), \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_n, \tau) = \alpha_n (t(x_n, \tau) - \psi_n(\tau)), \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} t^{[1]}(x_0, \tau) = \alpha_0 (t(x_0, \tau) - \psi_0(\tau)), \\ -t^{[1]}(x_n, \tau) = \alpha_n (t(x_n, \tau) - \psi_n(\tau)), \end{cases} \Rightarrow \quad (8.14) \\ & \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 t(x_0, \tau) - t^{[1]}(x_0, \tau) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n t(x_n, \tau) + t^{[1]}(x_n, \tau) = \alpha_n \psi_n(\tau), \end{cases} \end{aligned}$$

Надалі використовуватимемо крайові умови, які записані в термінах квазіпохідної.

### 8.5. Метод редуції

В математичній фізиці добре відомий прийом, що враховує неоднорідність крайових умов та пов'язаний з виділенням квазістаціонарної частини (метод редуції). Дотримуючись цих рекомендацій, розв'язок задачі (8.11)-(8.13) шукатимемо у вигляді суми двох функцій (метод редуції)

$$t(x, \tau) = u(x, \tau) + v(x, \tau). \quad (8.15)$$

Будь-яку з функцій  $u(x, \tau)$  чи  $v(x, \tau)$  можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

На основі зображення (8.15) перепишемо рівняння (8.11) у вигляді

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (8.16)$$

Застосуємо також метод редуції (8.15) до крайових умов (8.14)

$$\begin{cases} \alpha_0 u(x_0, \tau) + \alpha_0 v(x_0, \tau) - u^{[1]}(x_0, \tau) - v^{[1]}(x_0, \tau) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n u(x_n, \tau) + \alpha_n v(x_n, \tau) + u^{[1]}(x_n, \tau) + v^{[1]}(x_n, \tau) = \alpha_n \psi_n(\tau), \end{cases} \quad (8.17)$$

та початкової умови (8.13)

$$u(x, 0) + v(x, 0) = \varphi(x) \quad (8.18)$$

Визначимо функцію  $u(x, \tau)$  як розв'язок (квазістаціонарної) крайової задачі

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (8.19)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 u(x_0) - u^{[1]}(x_0) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n u(x_n) + u^{[1]}(x_n) = \alpha_n \psi_n(\tau). \end{cases} \quad (8.20)$$

Якщо взяти до уваги, що  $u(x, \tau)$  є розв'язком задачі (8.19), (8.20), то в (8.16) слід покласти  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) \equiv 0$ , і ми приходимо до неоднорідного диференціального рівняння на функцію  $v(x, \tau)$

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) - c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (8.21)$$

Зауважимо, що функцію  $-c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}$  в правій частині (8.21) вважатимемо відомою, оскільки відомою вважатимемо функцію  $u(x, \tau)$ , яку знайдемо як розв'язок задачі (8.19), (8.20) далі. Оскільки функція  $u(x, \tau)$  справджує крайові умови (8.20), то із (8.17) випливають крайові умови для функції  $v(x, \tau)$

$$\begin{cases} \alpha_0 v(x_0, \tau) - v^{[1]}(x_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n v(x_n, \tau) + v^{[1]}(x_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (8.22)$$

а початкова умова набуває вигляду

$$v(x, 0) = \varphi(x) - u(x, 0) = f(x) \quad (8.23)$$

Отже за умови, що розв'язок  $u(x, \tau)$  задачі (8.19), (8.20) – відомий, функція  $v(x, \tau)$  є розв'язком мішаної задачі (8.21)–(8.23).

### 8.5.1. Розв'язування крайової задачі

Введемо вектор  $\bar{U} = (u, u^{[1]})^T$  та матрицю

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad \text{Тоді квазидиференціальне рівняння (8.19),}$$

зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\bar{U}' = A\bar{U}. \quad (8.24)$$

Переконаємось що система (8.24) еквівалентна рівнянню (8.19)

$$\begin{pmatrix} u \\ u^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u^{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^{[1]}}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u' = \frac{\lambda u'}{\lambda} = u', \quad u^{[1]} = 0$$

Оскільки  $u' = u'$ , а  $u^{[1]} = 0$  (рівняння (8.19)) система (8.24) еквівалентна рівнянню (8.19)

Введемо матриці  $P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}$ , та вектор

$\Gamma(\tau) = (\alpha_0 \psi_0(\tau), \alpha_n \psi_n(\tau))^T$ . Крайові умови (8.20) запишемо у векторній формі та переконаємось у їх еквівалентності

$$P \cdot \bar{U}(x_0) + Q \cdot \bar{U}(x_n) = \Gamma(\tau), \quad (8.25)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u^{[1]}(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(x_n) \\ u^{[1]}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n \psi_n(\tau) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_0 u(x_0) - u^{[1]}(x_0) \\ \alpha_n u(x_n) + u^{[1]}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n \psi_n(\tau) \end{pmatrix}$$

Отже умови (8.25) еквівалентні крайовим умовам (8.20).

Під розв'язком системи (8.24) розуміємо абсолютно неперервну на проміжку  $[x_0, x_n]$  вектор-функцію  $\bar{U}(x)$ , що справджує цю систему скрізь, окрім, можливо, точок розриву коефіцієнта  $\lambda(x)$ .

На кожному з проміжків  $[x_i, x_{i+1})$  система (8.24) має вигляд



$$\bar{U}_i' = A_i \bar{U}_i, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}. \quad (8.26)$$

Підкреслимо той факт, що системи (8.24) і (8.26) є специфічними. Першою координатою вектора  $\bar{U}_i$  є розв'язк рівняння (8.19) а друга координата – її квазіпохідна.

Матрицю Коші  $B_i(x, s)$  системи (8.26) можна побудувати таким чином (див. розділ 6):

$$B_i(x, s) = Y_i(x) \cdot Y_i^{-1}(s). \quad (8.27)$$

Для побудови інтегральної матриці  $Y_i(x)$  системи потрібно знати фундаментальну систему розв'язків рівняння (8.19). Безпосередньою перевіркою переконуємось що фундаментальну систему розв'язків утворюють функції  $\{1; x\}$

Інтегральна матриця матиме вигляд

$$Y_i(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad (8.28)$$

а її обернена матриця матиме вигляд:

$$Y_i^{-1}(s) = \frac{1}{\lambda_i} \begin{pmatrix} \lambda_i & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s}{\lambda_i} \\ 0 & \frac{1}{\lambda_i} \end{pmatrix}. \quad (8.29)$$

Використовуючи (8.27) з урахуванням (8.28) та (8.29) встановлюємо, що для відповідної однорідної системи (8.26) – матриця Коші  $B_i(x, s)$  матиме вигляд

$$B_i(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.30)$$

Перевіримо деякі властивості, які викладено в розділі 6:

1) За змінною  $x$  вона справджує матричне рівняння  $B'_i(x, s) = A_i B_i(x, s)$

$$B'_i(x, s) = A_i B_i(x, s) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

2)  $B_i(s, s) = E$ , де  $E$  – одинична матриця

$$B_i(s, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

3)  $B(x, s) = B^{-1}(s, x)$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s-x}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для довільного  $k \geq i$  позначимо

$$B(x_k, x_i) \stackrel{df}{=} B_{k-1}(x_k, x_{k-1}) \cdot B_{k-2}(x_{k-1}, x_{k-2}) \cdots B_i(x_{i+1}, x_i). \quad (8.31)$$

При цьому вважаємо, що  $B(x_k, x_k) = E$ . Структура (8.30) матриці  $B_i(x, s)$  дає можливість встановити структуру матриць (8.31), а саме

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{\lambda_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.32)$$

Розв'язок системи (8.24) на кожному проміжку  $[x_i, x_{i+1})$  шукаємо у вигляді

$$\bar{U}_i = B_i(x, x_i) \cdot \bar{P}_i, \quad (8.33)$$

де  $\bar{P}_i$  невідомий поки що вектор.

Аналогічно, на  $[x_{i-1}, x_i)$

$$\bar{U}_{i-1} = B_{i-1}(x, x_{i-1}) \cdot \bar{P}_{i-1} \quad (8.34)$$

В точці  $x = x_i$  повинна виконуватися умова спряження  $\bar{U}_i(x_i) = \bar{U}_{i-1}(x_k)$ , тобто

$$B_i(x_i, x_i) \cdot \bar{P}_i = B_{i-1}(x_i, x_{i-1}) \cdot \bar{P}_{i-1}$$

Оскільки  $B_i(x_i, x_i) = E$  отримуємо рекурентне співвідношення

$$\bar{P}_i = B_{i-1}(x_i, x_{i-1}) \cdot \bar{P}_{i-1} \quad (8.35)$$

Покладаючи  $\bar{P}_0 = \bar{U}_0$ , методом математичної індукції з (8.35) отримуємо, що

$$\bar{P}_i = B(x_i, x_0) \cdot \bar{U}_0 \quad (8.36)$$

Таким чином, ми отримали такий результат.

**Теорема 8.1.** На кожному з проміжків  $[x_i, x_{i+1}]$  задача (8.24), (8.26) має єдиний розв'язок  $\bar{U}_i(x)$ , що зображується у вигляді

$$\bar{U}_i = B_i(x, x_i) \cdot B(x_i, x_0) \cdot \bar{U}_0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (8.37)$$

Щоб скористатися формулою (8.37) виразимо початковий вектор  $\bar{U}_0 = \bar{U}(x_0)$  скориставшись крайовими умовами (8.25)

$$\begin{aligned} P \cdot \bar{U}(x_0) + Q \cdot \bar{U}(x_n) &= \bar{\Gamma} \Rightarrow \\ \Rightarrow P \cdot \bar{U}(x_0) + Q [B(x_n, x_0) \cdot \bar{U}(x_0)] &= \bar{\Gamma} \Rightarrow \quad (8.38) \\ \Rightarrow \bar{U}(x_0) &= [P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} \cdot \bar{\Gamma} \end{aligned}$$

На основі формул (8.30), (8.32) та (8.38), після елементарних перетворень, з формули отримаємо зображення вектор-функції  $\bar{U}_i(x, \tau)$

$$\bar{U}_i(x, \tau) = \frac{\alpha_0 \alpha_n}{\Delta} \left( \begin{array}{c} \psi_0(\tau) \sigma_n + \frac{\psi_n(\tau)}{\alpha_0} + \frac{\psi_0(\tau)}{\alpha_n} + (\psi_n(\tau) - \psi_0(\tau)) \left( \frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i \right) \\ \psi_n(\tau) - \psi_0(\tau) \end{array} \right), \quad (8.39)$$

де 
$$\sigma_i = \sum_{m=0}^{i-1} b_m(x_{m+1}, x_m), \quad \sigma_0 \stackrel{df}{=} 0, \quad \Delta = \alpha_0 + \alpha_n + \sigma_n \alpha_0 \alpha_n.$$

Перша координата вектора  $\bar{U}_i(x, \tau)$  в (8.39) і є шуканою функцією  $u_i(x, \tau)$ . Отже

$$u_i(x, \tau) = \frac{\alpha_0 \alpha_n}{\Delta} \left( \psi_0(\tau) \sigma_n + \frac{\psi_n(\tau)}{\alpha_0} + \frac{\psi_0(\tau)}{\alpha_n} + (\psi_n(\tau) - \psi_0(\tau)) \left( \frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i \right) \right). \quad (8.40)$$

Вираз (8.40) дає можливість записати розв'язок на всьому проміжку  $[x_0, x_n]$  з допомогою характеристичних функцій  $\Theta_i$  у вигляді

$$u(x, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x, \tau) \Theta_i. \quad (8.41)$$

### 8.5.2. Метод Фур'є та задача на власні значення

Шукатимемо нетривіальні частинні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (8.42)$$

що справджує крайові умови (8.22), методом відокремлення змінних

$$v(x, \tau) = T(\tau) \cdot X(x), \quad (8.43)$$

Підставимо вираз (8.43) у рівняння (8.42). Будемо мати

$$c\rho T''(\tau) X(x) = T(\tau) (\lambda X'(x))',$$

або після відокремлення змінних

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{(\lambda X'(x))'}{c\rho X(x)}, \quad (8.44)$$

У лівій частині рівності (8.44) стоїть функція, яка залежить лише від  $t$ , а в правій функція, яка залежить лише від  $x$ . Отже ліва і права частини рівності (8.44) є стала величина, яку позначимо через  $-\omega$ . Таким чином

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{(\lambda X'(x))'}{c\rho X(x)} = -\omega. \quad (8.45)$$

З рівностей (8.45) отримуємо два рівняння

$$T'(\tau) + \omega T(\tau) = 0, \quad (8.46)$$

$$(\lambda X'(x))' + c\rho\omega X(x) = 0. \quad (8.47)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку (8.46) є функція  $T(\tau) = e^{-\omega\tau}$ .

До квазідиференціального рівняння (8.47) необхідно додати крайові умови, які отримуємо після підстановки (8.43) в (8.22)

$$\begin{cases} \alpha_0 T(\tau) \cdot X(x_0) - T(\tau) \cdot X^{[1]}(x_0) = 0, \\ \alpha_n T(\tau) \cdot X(x_n) + T(\tau) \cdot X^{[1]}(x) = 0, \end{cases}$$

які після скорочення на  $T(\tau)$  набудуть вигляду

$$\begin{cases} \alpha_0 X(x_0) - X^{[1]}(x_0) = 0, \\ \alpha_n X(x_n) + X^{[1]}(x_n) = 0. \end{cases} \quad (8.48)$$

*Зауваження!*

$$v^{[1]}(x, \tau) \stackrel{df}{=} \lambda \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} = \lambda T(\tau) X'(x_0) = T(\tau) \cdot X^{[1]}(x_0).$$

Задача (8.47), (8.48) – класична задача на власні значення, у якій необхідно знайти такі значення параметра  $\omega$  (власні значення) при яких існують відповідні їм нетривіальні розв'язки (власні функції)  $X(x, \omega)$  задачі (8.47), (8.48).

### 8.5.3. Конструктивна побудова власних функцій

Ввівши квазіпохідну  $X^{[1]} \stackrel{df}{=} \lambda X'$ , вектор  $\bar{X} = (X, X^{[1]})^T$

та матрицю  $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ -\omega c \rho & 0 \end{pmatrix}$ , зведемо квазідиференціальне

рівняння (8.47) до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\bar{X}' = A\bar{X}. \quad (8.49)$$

Відповідну систему на проміжку  $[x_i, x_{i+1})$  запишемо у вигляді

$$\bar{X}'_i = A_i \cdot \bar{X}_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (8.50)$$

де матриці  $A_i$  вигляду  $A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ -\omega c_i \rho_i & 0 \end{pmatrix}$ .

Матриця Коші  $B_i(x, s, \omega)$  системи (8.50) має вигляд:

$$B_i(x, s, \omega) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i(x-s) & \frac{\sin \alpha_i(x-s)}{\lambda_i \alpha_i} \\ -\lambda_i \alpha_i \sin \alpha_i(x-s) & \cos \alpha_i(x-s) \end{pmatrix}, \quad (8.51)$$

де позначено  $\alpha_i = \sqrt{\frac{c_i \rho_i \omega}{\lambda}}$

Аналогічно, як і в формулі (8.31), запишемо

$$B(x_i, x_0, \omega) \stackrel{df}{=} \prod_{j=0}^i B_{i-j}(x_{i-j+1}, x_{i-j}, \omega). \quad (8.52)$$

Позначимо також

$$B(x, x_0, \omega) \stackrel{df}{=} \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x, x_i, \omega) \cdot B(x_i, x_0, \omega) \cdot \Theta_i, \quad (8.53)$$

$$B(x_n, x_0, \omega) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (8.54)$$

Нетривіальний розв'язок  $\bar{X}(x, \omega)$  системи (8.49) шукаємо у вигляді

$$\bar{X}(x, \omega) = B(x, x_0, \omega) \cdot \bar{C}, \quad (8.55)$$

де  $\bar{C} = (C_1, C_2)^T$  – деякий ненульовий вектор.

Застосувавши до обидвох частин рівності (8.55) крайові умови у формі (8.25), при  $\bar{\Gamma}(\tau) \equiv 0$ , отримаємо:

$$P \cdot \bar{X}(x_0, \omega) + Q \cdot \bar{X}(x_n, \omega) = [P \cdot B(x_0, x_0, \omega) + Q \cdot B(x_n, x_0, \omega)] \cdot \bar{X} = 0,$$

або, зауваживши, що  $B(x_0, x_0, \omega) = E$ , де  $E$  – одинична матриця, прийдемо до рівності

$$[P + Q \cdot B(x_n, x_0, \omega)] \cdot \bar{C} = 0. \quad (8.56)$$

Для існування ненульового вектора  $\bar{C}$  в (8.56) необхідним і достатнім є виконання умови

$$\det [P + Q \cdot B(x_n, x_0, \omega)] = 0. \quad (8.57)$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (8.57), використовуючи (8.54)

$$\det [P + Q \cdot B(x_n, x_0, \omega)] = \det \left[ \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Отже ми отримали результат, який сформулюємо у вигляді теореми.

**Теорема 8.2.** *Характеристичне рівняння задачі на власні значення (8.47), (8.48) має вигляд (8.57). Корені  $\omega_k$  характеристичного рівняння (8.57), які є власними значеннями задачі (8.47), (8.48), є додатними та різними.*

Для знаходження ненульового вектора  $\bar{C} = (C_1, C_2)^T$  підставимо в рівність (8.57)  $\omega_k$  замість  $\omega$ . Тоді прийдемо до векторної рівності

$$\left[ \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_l & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}(\omega_k) & b_{12}(\omega_k) \\ b_{21}(\omega_k) & b_{22}(\omega_k) \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ (\alpha_l b_{11}(\omega_k) + b_{21}(\omega_k)) & (\alpha_l b_{12}(\omega_k) + b_{22}(\omega_k)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_0 C_1 - C_2 = 0, \\ (\alpha_l b_{11}(\omega_k) + b_{21}(\omega_k)) \cdot C_1 + (\alpha_l b_{12}(\omega_k) + b_{22}(\omega_k)) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \quad (8.58)$$

Оскільки визначник цієї системи дорівнює нулеві, то система (8.58) має ненульові розв'язки  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$ .

Поклавши, наприклад  $C_2 = 1$ , маємо  $\bar{C} = \left( \frac{1}{\alpha_0}, 1 \right)^T$ .

Позначивши нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню  $\omega_k$ ,  $\bar{X}_k(x, \omega_k)$ , отримуємо наступне твердження:

**Теорема 8.3.** *Власні вектори системи диференціальних рівнянь (8.49) за крайових умов у формі (8.25), при  $\bar{\Gamma}(\tau) \equiv 0$ , мають таку структуру:*

$$\bar{X}_k(x, \omega_k) = B(x, x_0, \omega) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_0}, 1 \right)^T, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

**Наслідок 8.3.** *Власні функції  $X_k(x, \omega_k)$ , як перші координати власних векторів  $\bar{X}_k(x, \omega_k)$ , можна записати у вигляді:*



$$X_k(x, \omega_k) = (1, 0) \cdot B(x, x_0, \omega_k) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_0}, 1 \right)^T, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (8.59)$$

Зокрема, оскільки  $X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x, \omega_k) \Theta_i$ , то з (8.59) випливає, що

$$X_{ki}(x, \omega_k) = (1, 0) \cdot B_i(x, x_i, \omega_k) \cdot B(x_i, x_0, \omega_k), \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (8.60)$$

#### 8.5.4. Розвинення в ряд Фур'є за системою власних функцій

Розвинення функції  $g(x)$  з «певного класу» в ряд Фур'є за власними функціями  $X_k(x, \omega_k)$  задачі (8.47), (8.48) має вигляд

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot X_k(x, \omega_k), \quad (8.61)$$

де коефіцієнти Фур'є  $g_k$  обчислюють за формулами

$$g_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \int_{x_0}^{x_n} g(x) \cdot X_k(x, \omega_k) \cdot c(x) \rho(x) dx. \quad (8.62)$$

Зауважимо, що  $\|X_k\|^2$  – квадрат норми власної функції  $X_k$

$$\|X_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} X_k^2(x, \omega_k) c(x) \rho(x) dx. \quad (8.63)$$

Уточнимо, які ж функції  $g(x)$  належать до «певного класу». Вважатимемо, що  $g(x)$  – абсолютно неперервна функція, яка має різні аналітичні вирази на кожному з проміжків  $[x_i, x_{i+1})$ , тобто допускає зображення

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i \Theta_i \quad (8.64)$$

на проміжку  $[x_0, x_n]$ .

Функції вигляду (8.64) додаються, множаться та інтегруються таким чином:

якщо  $g_1(x) = \sum_{i=1}^n g_{1i} \Theta_i$ ,  $g_2(x) = \sum_{i=1}^n g_{2i} \Theta_i$ , то

$$g_1 \pm g_2 = \sum_{i=1}^n (g_{1i} \pm g_{2i}) \Theta_i, \quad g_1 \cdot g_2 = \sum_{i=1}^n (g_{1i} \cdot g_{2i}) \Theta_i, \quad (8.65)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot c(x) \rho(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_n} g_{1i}(x) \cdot g_{2i}(x) \cdot c_i(x) \rho_i(x) dx, \quad (8.66)$$

$$\|g_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} g_k^2(x) c(x) \rho(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_n} g_{ki}^2(x) c_i(x) \rho_i(x) dx, \quad (8.67)$$

$$k = \overline{1, \infty}.$$

Вирази (8.66), (8.67) можна інтерпретувати як скалярний добуток функцій  $g_1(x)$  і  $g_2(x)$  та квадрат норми функції  $g_k(x)$  відповідно з вагою  $c(x) \rho(x)$ .

Покладемо

$$X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x, \omega_k) \Theta_i. \quad (8.68)$$

Тоді для коефіцієнтів Фур'є  $g_k$  з розвинення (8.61) та для квадратів норми функцій  $X_k(x)$  з формул (8.62) і (8.63) отримаємо

$$g_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x) \cdot X_{ki}(x, \omega_k) \cdot c_i \rho_i dx, \quad (8.69)$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x, \omega_k) \cdot c_i \rho_i dx. \quad (8.70)$$

### 8.5.5. Побудова розв'язку мішаної задачі

Для розв'язання задачі (8.21), (8.22), (8.23) застосуємо метод власних функцій, який полягає в тому, що розв'язок шукаємо у вигляді

$$v(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \cdot X_k(x, \omega_k), \quad (8.71)$$

де  $T_k(\tau)$  – невідомі функції, які визначимо далі.

Диференціюючи функцію  $u(x, \tau)$  за змінною  $\tau$ , з формул (8.40), (8.41) отримуємо

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{\alpha_0 \alpha_n}{\Delta} \left( \psi_0'(\tau) \sigma_n + \frac{\psi_n'(\tau)}{\alpha_0} + \frac{\psi_0'(\tau)}{\alpha_n} + (\psi_n'(\tau) - \psi_0'(\tau)) \left( \frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i \right) \right) \right] \cdot \theta_i.$$

Оскільки  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  входить в праву частину рівняння (8.21), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями (8.59) крайової задачі (8.47), (8.48)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \cdot X_k(x, \omega_k), \quad (8.72)$$

причому змінна  $\tau$  грає роль параметра.

Підставивши (8.71) у (8.21) з урахуванням розвинення (8.72), отримаємо рівність

$$\begin{aligned} c(x) \rho(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(\tau) \cdot X_k(x, \omega_k) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \cdot (\lambda X_k'(x, \omega_k))' - c(x) \rho(x) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \cdot X_k(x, \omega_k). \end{aligned}$$

Враховуючи тотожність  $(\lambda X_k')' + \omega_k c \rho X_k \equiv 0$ , прийдемо до рівності

$$c(x)\rho(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(\tau) \cdot X_k(x, \omega_k) = \\ = -c(x)\rho(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k T_k X_k - c(x)\rho(x) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) X_k,$$

яка після скорочення на  $c(x)\rho(x) \neq 0$  набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ T'_k(\tau) + \omega_k T_k(\tau) + u_k(\tau) \right] \cdot X_k(x, \omega_k) = 0. \quad (8.73)$$

Прирівнюючи коефіцієнти Фур'є ряду (8.73) до нуля, прийдемо до диференціальних рівнянь

$$T'_k(\tau) + \omega_k T_k(\tau) + u_k(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8.74)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (8.74) при кожному  $k$  має вигляд

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-\omega_k t} - \int_0^t e^{-\omega_k(\tau-s)} \cdot u_k(s) ds, \quad (8.75)$$

де  $C_k$  – невідомі сталі.

Для їх визначення зауважимо, що функцію  $f(x)$  з початкової умови (8.23) також можна розвинути в ряд Фур'є за власними функціями (8.59) крайової задачі (8.47), (8.48), тобто

$$v(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x, \omega_k), \quad (8.76)$$

де  $f_k$  – відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (8.75) випливає, що

$$T_k(0) = C_k, \quad (8.77)$$

а з зображення (8.71) маємо

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \cdot X_k. \quad (8.78)$$

Порівнюючи (8.76), (8.77) і (8.78), доходимо висновку, що  $C_k = f_k$ .

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (8.21), (8.22), (8.23) у вигляді ряду

$$v(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x, \tau) \cdot \theta_i, \quad (8.79)$$

де 
$$v_i(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot X_{ki}(x, \omega_k),$$

а функції визначені формулами (8.60).

Врахувавши (8.41), отримаємо розв'язок (8.15) задачі (8.11), (8.12), (8.13)

$$t(x, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} [u_i(x, \tau) + v_i(x, \tau)] \cdot \theta_i, \quad (8.81)$$

в якому функції  $u_i(x, \tau)$  та  $v(x, \tau)$  визначені формулами (8.40) і (8.80) відповідно.

### 8.6. Модельний приклад

В якості модельного прикладу розглянемо детально задачу про нагрівання двошарової конструкції, яка виготовлена з бетону та гіпсоплити. У початковий момент часу температура конструкції та навколишнього середовища становить  $20^{\circ}\text{C}$ . Вважатимемо, що з однієї сторони конструкції температура навколишнього середовища змінюється за законом стандартного температурного режиму

пожежі 
$$\psi_n(\tau) = 345 \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 20, \quad \text{при коефіцієнті}$$

теплообміну між середовищем та поверхнею  $\alpha_n = 25 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$ . З іншої сторони температура середовища є незмінною, та становить  $\psi_0(\tau) = 20^{\circ}\text{C}$  – коефіцієнт

теплообміну  $\alpha_0 = 4 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°С}$ . Теплофізичні характеристики та геометричні розміри конструкції наведено в таблиці 8.1.

*Таблиця 8.1. Вихідні дані розрахунку нестационарного температурного поля двошарової плоскої конструкції*

Параметр	Бетон	Гіпсоплита
Товщина $\Delta$ , м	0,25	0,05
Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	1,55	0,35
Питома теплоємність $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	770	963
Густина $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	2200	1100
Початкова температура (розподіл температурного поля) $\varphi(x), \text{°С}$	20	20
Закони зміни температур	$\psi_0(\tau) = 20,$ $\psi_n(\tau) = 3451g \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 20.$	
Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $\alpha, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$	$\alpha_0 = 4, \alpha_n = 25$	

Розв'язок поставленої задачі складатиметься з двох етапів: 1) побудова функції  $u(x, \tau)$ ; 2) побудова функції  $v(x, \tau)$  (метод редуції (8.15)).

**Зауваження!** Всі обчислення проводились з точністю 10 знаків після коми, в тексті наведено лише 3.

1) Побудова функції  $u(x, \tau)$ 

Знаходимо початковий вектор  $\bar{U}(x_0)$  використовуючи формулу (8.38)

$$\bar{U}(x_0) = [P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} \cdot \bar{\Gamma}$$

Оскільки теплообмін відбувається між конструкцією та навколишнім середовищем, матриці  $P$ ,  $Q$  та вектор  $\bar{\Gamma}(\tau)$  зобразяться так:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Gamma}(\tau) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n \psi_n(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 20 \\ 25 \cdot \left( 345 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 20 \right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 80 \\ 8625 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 500 \end{pmatrix}.$$

Оскільки конструкція складається з 2-х шарів, то відповідно матриця  $B(x_n, x_0)$  матиме вигляд (формула (8.31) та (8.32))

$$B(x_n, x_0) = B(x_2, x_0) = B_1(x_2, x_1) \cdot B_0(x_1, x_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_2 - x_1}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_0}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,3 - 0,25}{0,35} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,25 - 0}{1,55} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,143 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,161 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,304 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Початковий вектор  $\bar{U}(x_0)$

$$\begin{aligned}
\bar{U}(x_0) &= [P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} \cdot \bar{\Gamma} = \\
&= \left[ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,304 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 8625 \cdot \lg\left(1 + \frac{8\tau}{60}\right) + 500 \end{pmatrix} = \\
&= \left[ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 8,604 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 8625 \cdot \lg\left(1 + \frac{8\tau}{60}\right) + 500 \end{pmatrix} = \\
&= \left[ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 25 & 8,604 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 8625 \cdot \lg\left(1 + \frac{8\tau}{60}\right) + 500 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{59,415} \begin{pmatrix} 8,604 & 1 \\ -25 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 8625 \cdot \lg\left(1 + \frac{8\tau}{60}\right) + 500 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{59,415} \begin{pmatrix} 688,295 + 8625 \cdot \lg\left(1 + \frac{8\tau}{60}\right) + 500 \\ -2000 + 34500 \cdot \lg\left(1 + \frac{8\tau}{60}\right) + 2000 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 20 + 145,166 \cdot \lg\left(1 + \frac{8\tau}{60}\right) \\ 580,664 \cdot \lg\left(1 + \frac{8\tau}{60}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тепер, використовуючи формулу (8.37) знайдемо розв'язки на проміжках  $[x_0, x_1)$  та  $[x_1, x_2]$



$$\begin{aligned}
\bar{U}_0(x) &= B_0(x, x_0) \bar{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_0}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0(x_0) \\ u_0^{[1]}(x_0) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-0}{1,55} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20+145,166 \cdot \lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right) \\ 580,664 \cdot \lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right) \end{pmatrix} = \quad (8.82) \\
&= \begin{pmatrix} 20+(145,166+374,622 \cdot x) \cdot \lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right) \\ 580,664 \cdot \lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right) \end{pmatrix} \\
\bar{U}_1(x) &= B_1(x, x_1) B_0(x_1, x_0) \bar{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_1}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1-x_0}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0(x_0) \\ u_0^{[1]}(x_0) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-0,25}{0,35} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,25-0}{1,55} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20+145,166 \cdot \lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right) \\ 580,664 \cdot \lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 20+238,821 \cdot \lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right) + 580,664 \cdot \lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right) (2,857 \cdot x - 0,714) \\ 580,664 \cdot \lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Оскільки шукана нами функція  $u(x, \tau)$  є першою координатою вектор-функції  $\bar{U}(x)$ , то на кожному з проміжків  $[x_0, x_1]$  та  $[x_1, x_2]$  розв'язок матиме вигляд

$$u_0(x, \tau) = 20 + (145,166 + 374,622 \cdot x) \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right)$$

$$u_1(x, \tau) = 20 + 238,821 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) +$$

$$+ 580,664 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) (2,857 \cdot x - 0,714)$$

## 2) Побудова функції $v(x, \tau)$

Для початку запишемо вигляд характеристичного рівняння (8.57) задачі на власні значення (8.47), (8.48)

$$\det [P + Q \cdot B(x_2, x_0, \omega)] = 0. \quad (8.84)$$

Встановимо структуру матриці  $B(x_2, x_0, \omega)$

$$B(x_2, x_0, \omega) = B_1(x_2, x_1, \omega) B_0(x_1, x_0, \omega) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{c_1 \rho_1 \omega}{\lambda_1}} (x_2 - x_1) & \frac{\sin \sqrt{\frac{c_1 \rho_1 \omega}{\lambda_1}} (x_2 - x_1)}{\lambda_1 \sqrt{\frac{c_1 \rho_1 \omega}{\lambda_1}}} & \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega}{\lambda_0}} (x_1 - x_0) & \frac{\sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega}{\lambda_0}} (x_1 - x_0)}{\lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega}{\lambda_0}}} \\ -\lambda_1 \sqrt{\frac{c_1 \rho_1 \omega}{\lambda_1}} \sin \sqrt{\frac{c_1 \rho_1 \omega}{\lambda_1}} (x_2 - x_1) & \cos \sqrt{\frac{c_1 \rho_1 \omega}{\lambda_1}} (x_2 - x_1) & -\lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega}{\lambda_0}} \sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega}{\lambda_0}} (x_1 - x_0) & \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega}{\lambda_0}} (x_1 - x_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{963 \cdot 1100 \cdot \omega}{0,35}} (0,3 - 0,25) & \frac{\sin \sqrt{\frac{963 \cdot 1100 \cdot \omega}{0,35}} (0,3 - 0,25)}{0,35 \sqrt{\frac{963 \cdot 1100 \cdot \omega}{0,35}}} & \cos \sqrt{\frac{770 \cdot 2200 \cdot \omega}{1,55}} (0,25 - 0) & \frac{\sin \sqrt{\frac{770 \cdot 2200 \cdot \omega}{1,55}} (0,25 - 0)}{1,55 \sqrt{\frac{770 \cdot 2200 \cdot \omega}{1,55}}} \\ -0,35 \sqrt{\frac{963 \cdot 1100 \cdot \omega}{0,35}} \sin \sqrt{\frac{963 \cdot 1100 \cdot \omega}{0,35}} (0,3 - 0,25) & \cos \sqrt{\frac{963 \cdot 1100 \cdot \omega}{0,35}} (0,3 - 0,25) & -1,55 \sqrt{\frac{770 \cdot 2200 \cdot \omega}{1,55}} \sin \sqrt{\frac{770 \cdot 2200 \cdot \omega}{1,55}} (0,25 - 0) & \cos \sqrt{\frac{770 \cdot 2200 \cdot \omega}{1,55}} (0,25 - 0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega}) - 2,66 \sin(86,99\sqrt{\omega}) \sin(261,36\sqrt{\omega}) & \frac{1}{\sqrt{\omega}} (0,0006 \cos(86,99\sqrt{\omega}) \sin(261,36\sqrt{\omega}) + 0,0016 \sin(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega})) \\ -608,9\sqrt{\omega} \sin(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega}) - 1620,4 \cos(86,99\sqrt{\omega}) \sqrt{\omega} \sin(261,36\sqrt{\omega}) & -0,376 \sin(86,99\sqrt{\omega}) \sin(261,36\sqrt{\omega}) + \cos(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega}) \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння (8.84) матиме вигляд

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 1 \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} \cos(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega}) - 2,66 \sin(86,99\sqrt{\omega}) \sin(261,36\sqrt{\omega}) & \frac{1}{\sqrt{\omega}} (0,0006 \cos(86,99\sqrt{\omega}) \sin(261,36\sqrt{\omega}) + 0,0016 \sin(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega})) \\ -608,9\sqrt{\omega} \sin(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega}) - 1620,4 \cos(86,99\sqrt{\omega}) \sqrt{\omega} \sin(261,36\sqrt{\omega}) & -0,376 \sin(86,99\sqrt{\omega}) \sin(261,36\sqrt{\omega}) + \cos(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega}) \end{pmatrix} \right] = 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} \left( 0,06 \cos(86,99\sqrt{\omega}) \sin(261,36\sqrt{\omega}) + 0,16 \sin(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega}) - 68,03 \sin(86,99\sqrt{\omega}) \sin(261,36\sqrt{\omega}) \sqrt{\omega} + \right. \\ \left. + 29 \cos(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega}) \sqrt{\omega} - 608,9 \sin(86,99\sqrt{\omega}) \cos(261,36\sqrt{\omega}) - 1620,4 \cos(86,99\sqrt{\omega}) \sqrt{\omega} \sin(261,36\sqrt{\omega}) \right) = 0$$

Побудуємо графік цього рівняння та знайдемо перших його 50 коренів

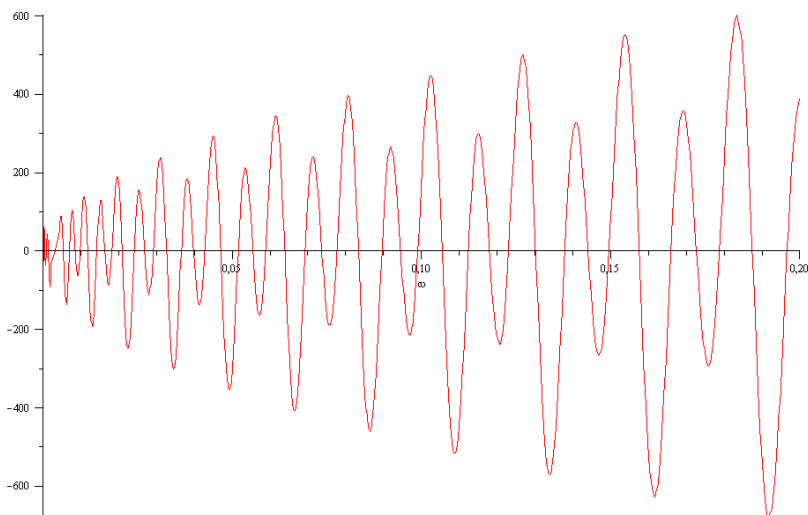


Рис. 8.1. Графік лівої частини характеристичного рівняння

Слід відзначити, що точки перетину графіка з віссю  $\omega$  і є коренями характеристичного рівняння

Таблиця 8.2. Корені характеристичного рівняння

$\omega_1 = 0,00001892107059$	$\omega_{18} = 0,02408910934$	$\omega_{35} = 0,09453511364$
$\omega_2 = 0,0001675272885$	$\omega_{19} = 0,02680442464$	$\omega_{36} = 0,09903568933$
$\omega_3 = 0,0005165097295$	$\omega_{20} = 0,02915186795$	$\omega_{37} = 0,1054910215$
$\omega_4 = 0,0008815406221$	$\omega_{21} = 0,03264253742$	$\omega_{38} = 0,1124054264$
$\omega_5 = 0,001406781430$	$\omega_{22} = 0,03654971892$	$\omega_{39} = 0,1179770061$
$\omega_6 = 0,002286985252$	$\omega_{23} = 0,03983276771$	$\omega_{40} = 0,1230142864$
$\omega_7 = 0,003276369382$	$\omega_{24} = 0,04271788119$	$\omega_{41} = 0,1302073190$
$\omega_8 = 0,004075298901$	$\omega_{25} = 0,04695220880$	$\omega_{42} = 0,1378741522$
$\omega_9 = 0,005320359118$	$\omega_{26} = 0,05161117368$	$\omega_{43} = 0,1440231520$
$\omega_{10} = 0,006963595439$	$\omega_{27} = 0,05546338078$	$\omega_{44} = 0,1495957374$
$\omega_{11} = 0,008540309506$	$\omega_{28} = 0,05888735175$	$\omega_{45} = 0,1575253146$
$\omega_{12} = 0,009831776171$	$\omega_{29} = 0,06386348480$	$\omega_{46} = 0,1659450187$

$\omega_{13} = 0,01182734987$	$\omega_{30} = 0,0,6927408399$	$\omega_{47} = 0,1726736380$
$\omega_{14} = 0,01422807601$	$\omega_{31} = 0,07369732681$	$\omega_{48} = 0,1787800029$
$\omega_{15} = 0,01637585814$	$\omega_{32} = 0,07766001008$	$\omega_{49} = 0,1874450132$
$\omega_{16} = 0,01818972041$	$\omega_{33} = 0,08337641438$	$\omega_{50} = 0,1966180679$
$\omega_{17} = 0,02093435679$	$\omega_{34} = 0,08953877354$	

Нетривіальний вектор  $\bar{C}$  набуде вигляду

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайшовши перших 50 коренів характеристичного рівняння встановимо структуру власних функцій на основі формули (8.59)

$$X_k(x, \omega_k) = (1, 0) \cdot B(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

На проміжку  $[x_0, x_1)$  власні функції  $X_{0,k}(x, \omega_k)$  зобразяться так:

$$X_{0,k}(x, \omega_k) = (1, 0) \cdot B_0(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \quad k = 1, 2, \dots, 50.$$

$$X_{0,k}(x, \omega_k) = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_k}{\lambda_0}}(x - x_0) & \frac{\sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_k}{\lambda_0}}(x - x_0)}{\lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega}{\lambda_0}}} \\ -\lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_k}{\lambda_0}} \sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_k}{\lambda_0}}(x - x_0) & \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_k}{\lambda_0}}(x - x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_0} \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_k}{\lambda_0}}(x - x_0) + \frac{\sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_k}{\lambda_0}}(x - x_0)}{\lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega}{\lambda_0}}} = \frac{1}{4} \cos \left( \sqrt{\frac{770 \cdot 2200 \cdot \omega_k}{1,55}} x \right) + \frac{\sin \left( \sqrt{\frac{770 \cdot 2200 \cdot \omega_k}{1,55}} x \right)}{1,55 \sqrt{\frac{770 \cdot 2200 \cdot \omega_k}{1,55}}} =$$

$$= \frac{1}{4} \cos(1045,42 \sqrt{\omega_k} x) + 0,000617 \frac{\sin(1045,42 \sqrt{\omega_k} x)}{\sqrt{\omega_k}}$$

Підставляючи замість  $\omega_k$  відповідні значення одержимо

$$X_{0,1} = \frac{1}{4} \cos(4,547x) + 0,142 \sin(4,547x)$$

$$X_{0,2} = \frac{1}{4} \cos(13,531x) + 0,0477 \sin(13,531x)$$

$$X_{0,3} = \frac{1}{4} \cos(23,759x) + 0,272 \sin(23,759x)$$

$$X_{0,4} = \frac{1}{4} \cos(31,039x) + 0,208 \sin(31,039x)$$

$$X_{0,5} = \frac{1}{4} \cos(39,211x) + 0,065 \sin(39,211x)$$

$$X_{0,6} = \frac{1}{4} \cos(49,995x) + 0,0129 \sin(49,995x)$$

$$X_{0,7} = \frac{1}{4} \cos(59,839x) + 0,0108 \sin(59,839x)$$

$$X_{0,8} = \frac{1}{4} \cos(66,738x) + 0,00967 \sin(66,738x)$$

$$X_{0,9} = \frac{1}{4} \cos(76,254x) + 0,00846 \sin(76,254x)$$

$$X_{0,10} = \frac{1}{4} \cos(87,238x) + 0,0074 \sin(87,238x)$$

$$X_{0,11} = \frac{1}{4} \cos(96,611x) + 0,00668 \sin(96,611x)$$

$$X_{0,12} = \frac{1}{4} \cos(103,659x) + 0,00622 \sin(103,659x)$$

$$X_{0,13} = \frac{1}{4} \cos(113,693x) + 0,00567 \sin(113,693x)$$

$$X_{0,14} = \frac{1}{4} \cos(124,699x) + 0,00517 \sin(124,699x)$$

$$X_{0,15} = \frac{1}{4} \cos(133,781x) + 0,00482 \sin(133,781x)$$

$$X_{0,16} = \frac{1}{4} \cos(140,995x) + 0,00458 \sin(140,995x)$$

$$X_{0,17} = \frac{1}{4} \cos(151,259x) + 0,00427 \sin(151,259x)$$

$$X_{0,18} = \frac{1}{4} \cos(162,256x) + 0,00398 \sin(162,256x)$$

$$X_{0,19} = \frac{1}{4} \cos(171,157x) + 0,00377 \sin(171,157x)$$

$$X_{0,20} = \frac{1}{4} \cos(178,494x) + 0,00361 \sin(178,494x)$$

$$X_{0,21} = \frac{1}{4} \cos(188,879x) + 0,00342 \sin(188,879x)$$

$$X_{0,22} = \frac{1}{4} \cos(199,863x) + 0,00323 \sin(199,863x)$$

$$X_{0,23} = \frac{1}{4} \cos(208,646x) + 0,00309 \sin(208,646x)$$

$$X_{0,24} = \frac{1}{4} \cos(216,071x) + 0,00295 \sin(216,071x)$$

$$X_{0,25} = \frac{1}{4} \cos(226,526x) + 0,00285 \sin(226,526x)$$

$$X_{0,26} = \frac{1}{4} \cos(237,5x) + 0,00272 \sin(237,5x)$$

$$X_{0,27} = \frac{1}{4} \cos(246,203x) + 0,00262 \sin(246,203x)$$

$$X_{0,28} = \frac{1}{4} \cos(253,689x) + 0,00254 \sin(253,689x)$$

$$X_{0,29} = \frac{1}{4} \cos(264,19x) + 0,00244 \sin(264,19x)$$

$$X_{0,30} = \frac{1}{4} \cos(275,154x) + 0,00234 \sin(275,154x)$$

$$X_{0,31} = \frac{1}{4} \cos(283,803x) + 0,00227 \sin(283,803x)$$

$$X_{0,32} = \frac{1}{4} \cos(291,333x) + 0,00221 \sin(291,333x)$$

$$X_{0,33} = \frac{1}{4} \cos(301,865x) + 0,00214 \sin(301,865x)$$

$$X_{0,34} = \frac{1}{4} \cos(312,821x) + 0,00206 \sin(312,821x)$$

$$X_{0,35} = \frac{1}{4} \cos(321,431x) + 0,002 \sin(321,431x)$$

$$X_{0,36} = \frac{1}{4} \cos(328,993x) + 0,00196 \sin(328,993x)$$

$$X_{0,37} = \frac{1}{4} \cos(339,546x) + 0,0019 \sin(339,546x)$$

$$X_{0,38} = \frac{1}{4} \cos(350,497x) + 0,00184 \sin(350,497x)$$

$$X_{0,39} = \frac{1}{4} \cos(359,079x) + 0,0018 \sin(359,079x)$$

$$X_{0,40} = \frac{1}{4} \cos(366,664x) + 0,00176 \sin(366,664x)$$

$$X_{0,41} = \frac{1}{4} \cos(377,232x) + 0,00171 \sin(377,232x)$$

$$X_{0,42} = \frac{1}{4} \cos(388,179x) + 0,00166 \sin(388,179x)$$

$$X_{0,43} = \frac{1}{4} \cos(396,741x) + 0,00163 \sin(396,741x)$$

$$X_{0,44} = \frac{1}{4} \cos(404,343x) + 0,00158 \sin(404,343x)$$

$$X_{0,45} = \frac{1}{4} \cos(414,922x) + 0,00155 \sin(414,922x)$$

$$X_{0,46} = \frac{1}{4} \cos(425,866x) + 0,00151 \sin(425,866x)$$

$$X_{0,47} = \frac{1}{4} \cos(434,414x) + 0,0015 \sin(434,414x)$$

$$X_{0,48} = \frac{1}{4} \cos(442,029x) + 0,00146 \sin(442,029x)$$

$$X_{0,49} = \frac{1}{4} \cos(452,614x) + 0,00143 \sin(452,614x)$$

$$X_{0,50} = \frac{1}{4} \cos(463,556x) + 0,00139 \sin(463,556x)$$

Тепер встановимо вигляд власних функцій  $X_{1,k}(x, \omega_k)$  на проміжку  $[x_1, x_2]$

$$X_{1,k}(x, \omega_k) = (1, 0) \cdot B(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}^T, \quad k = 1, 2, \dots, 50.$$

$$X_{1,k}(x, \omega_k) = (1, 0) \cdot B_1(x, x_1, \omega_k) \cdot B_0(x_1, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}^T, \quad k = 1, 2, \dots, 50.$$

$$\begin{aligned} X_{1,1}(x, \omega_1) &= (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1) & \frac{\sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1)}{\lambda_1 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}} \\ -\lambda_1 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}} \sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1) & \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0) & \frac{\sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0)}{\lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}} \\ -\lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}} \sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0) & \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1) & \frac{\sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1)}{\lambda_1 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}} \\ -\lambda_1 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}} \sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1) & \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_0} \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0) + \frac{\sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0)}{\lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}} \\ -\frac{1}{\alpha_0} \lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}} \sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0) + \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0) \end{pmatrix} = \\ &= \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1) \left( \frac{1}{\alpha_0} \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0) + \frac{\sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0)}{\lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}} \right) + \frac{\sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}(x-x_1)}{\lambda_1 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_1}}} \left( -\frac{1}{\alpha_0} \lambda_0 \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}} \sin \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0) + \cos \sqrt{\frac{c_0 \rho_0 \omega_1}{\lambda_0}}(x_1-x_0) \right) \end{aligned}$$

Підставивши відповідні числові значення коефіцієнтів, отримаємо:



$$X_{1,k}(x, \omega_k) = \frac{1}{4} \cos(1739,704\sqrt{\omega_k}(x-0,25)) \cos(261,355\sqrt{\omega_k}) - \\ - 0,665 \sin(1739,704\sqrt{\omega_k}(x-0,25)) \sin(261,355\sqrt{\omega_k}) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} 0,000617 \cos(1739,704\sqrt{\omega_k}(x-0,25)) \sin(261,355\sqrt{\omega_k})$$

Підставляючи замість  $\omega_k$  відповідні значення одержимо

$$\begin{aligned} X_{1,1} &= 0,234 \cos(7,567x - 1,892) - 0,445 \sin(7,567x - 1,892) \\ X_{1,2} &= -0,254 \cos(22,517x - 5,629) + 0,036 \sin(22,517x - 5,629) \\ X_{1,3} &= 0,226 \cos(39,538x - 9,885) + 0,292 \sin(39,538x - 9,885) \\ X_{1,4} &= 0,044 \cos(51,653x - 12,913) - 0,657 \sin(51,653x - 12,913) \\ X_{1,5} &= -0,238 \cos(65,251x - 16,313) + 0,205 \sin(65,251x - 16,313) \\ X_{1,6} &= 0,249 \cos(83,197x - 20,799) + 0,079 \sin(83,196x - 20,799) \\ X_{1,7} &= -0,176 \cos(99,58x - 24,895) - 0,474 \sin(99,58x - 24,895) \\ X_{1,8} &= -0,148 \cos(111,059x - 27,765) + 0,537 \sin(111,059x - 27,765) \\ X_{1,9} &= 0,246 \cos(126,895x - 31,724) - 0,119 \sin(126,895x - 31,724) \\ X_{1,10} &= -0,245 \cos(145,175x - 36,294) - 0,139 \sin(145,175x - 36,294) \\ X_{1,11} &= 0,134 \cos(160,773x - 40,193) + 0,562 \sin(160,773x - 40,193) \\ X_{1,12} &= 0,182 \cos(172,501x - 43,125) - 0,457 \sin(172,501x - 43,125) \\ X_{1,13} &= -0,248 \cos(189,199x - 47,3) + 0,084 \sin(189,199x - 47,3) \\ X_{1,14} &= 0,242 \cos(207,515x - 51,879) + 0,172 \sin(207,515x - 51,879) \\ X_{1,15} &= -0,106 \cos(222,627x - 55,657) - 0,602 \sin(222,627x - 55,657) \\ X_{1,16} &= -0,196 \cos(234,633x - 58,658) + 0,415 \sin(234,633x - 58,658) \\ X_{1,17} &= 0,249 \cos(251,713x - 62,928) - 0,065 \sin(251,713x - 62,928) \\ X_{1,18} &= -0,239 \cos(270,014x - 67,503) - 0,192 \sin(270,014x - 67,503) \\ X_{1,19} &= 0,089 \cos(284,825x - 71,206) + 0,622 \sin(284,825x - 71,206) \\ X_{1,20} &= 0,203 \cos(297,036x - 74,259) - 0,39 \sin(297,036x - 74,259) \\ X_{1,21} &= -0,249 \cos(314,317x - 78,579) + 0,055 \sin(314,317x - 78,579) \\ X_{1,22} &= 0,238 \cos(332,596x - 83,149) + 0,204 \sin(332,596x - 83,149) \\ X_{1,23} &= -0,077 \cos(347,213x - 86,803) - 0,633 \sin(347,213x - 86,803) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{1,24} &= -0,207 \cos(359,567x - 89,892) + 0,375 \sin(359,567x - 89,892) \\
X_{1,25} &= 0,249 \cos(376,967x - 94,242) - 0,048 \sin(376,967x - 94,242) \\
X_{1,26} &= -0,237 \cos(395,228x - 98,807) - 0,213 \sin(395,228x - 98,807) \\
X_{1,27} &= 0,069 \cos(409,712x - 102,428) + 0,64 \sin(409,712x - 102,428) \\
X_{1,28} &= 0,209 \cos(422,169x - 105,542) - 0,365 \sin(422,169x - 105,542) \\
X_{1,29} &= -0,249 \cos(439,645x - 109,911) + 0,043 \sin(439,645x - 109,911) \\
X_{1,30} &= 0,236 \cos(457,890x - 114,472) + 0,219 \sin(457,890x - 114,472) \\
X_{1,31} &= -0,063 \cos(472,282x - 118,070) - 0,644 \sin(472,282x - 118,070) \\
X_{1,32} &= -0,211 \cos(484,813x - 121,203) + 0,358 \sin(484,813x - 121,203) \\
X_{1,33} &= 0,25 \cos(502,339x - 125,585) - 0,04 \sin(502,339x - 125,585) \\
X_{1,34} &= -0,235 \cos(520,572x - 130,143) - 0,224 \sin(520,572x - 130,143) \\
X_{1,35} &= 0,059 \cos(534,899x - 133,725) + 0,646 \sin(534,899x - 133,725) \\
X_{1,36} &= 0,212 \cos(547,484x - 136,871) - 0,353 \sin(547,484x - 136,871) \\
X_{1,37} &= -0,25 \cos(565,045x - 141,261) + 0,037 \sin(565,045x - 141,261) \\
X_{1,38} &= 0,235 \cos(583,269x - 145,817) + 0,227 \sin(583,269x - 145,817) \\
X_{1,39} &= -0,056 \cos(597,550x - 149,387) - 0,648 \sin(597,550x - 149,387) \\
X_{1,40} &= -0,213 \cos(610,173x - 152,543) + 0,349 \sin(610,173x - 152,543) \\
X_{1,41} &= 0,25 \cos(627,759x - 156,940) - 0,036 \sin(627,759x - 156,94) \\
X_{1,42} &= -0,235 \cos(645,977x - 161,494) - 0,229 \sin(645,977x - 161,494) \\
X_{1,43} &= 0,054 \cos(660,224x - 165,056) + 0,649 \sin(660,224x - 165,056) \\
X_{1,44} &= 0,213 \cos(672,876x - 168,219) - 0,347 \sin(672,876x - 168,219) \\
X_{1,45} &= -0,25 \cos(690,479x - 172,620) + 0,034 \sin(690,479x - 172,620) \\
X_{1,46} &= 0,235 \cos(708,692x - 177,173) + 0,23 \sin(708,692x - 177,173) \\
X_{1,47} &= -0,053 \cos(722,917x - 180,729) - 0,65 \sin(722,917x - 180,729) \\
X_{1,48} &= -0,214 \cos(735,589x - 183,897) + 0,345 \sin(735,589x - 183,897) \\
X_{1,49} &= 0,25 \cos(753,204x - 188,301) - 0,034 \sin(753,204x - 188,301) \\
X_{1,50} &= -0,234 \cos(771,413x - 192,853) - 0,232 \sin(771,413x - 192,853)
\end{aligned}$$

Далі необхідно розвинути в ряд Фур'є за системою власних функцій  $X_k(x, \omega_k)$  функції  $\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}$ , яка входить в

праву частину рівняння (8.21) та  $f(x)$  з початкової умови (8.23). Розвинення будемо проводити використовуючи формули (8.69) (8.70). Для початку знайдемо квадрат норми власних функцій

$$\begin{aligned} \|X_k\|^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x, \omega_k) \cdot c_i \rho_i dx = c_0 \rho_0 \int_{x_0}^{x_1} X_{0,k}^2(x, \omega_k) dx + c_1 \rho_1 \int_{x_1}^{x_2} X_{1,k}^2(x, \omega_k) dx = \\ &= 770 \cdot 2200 \int_0^{0,25} X_{0,k}^2(x, \omega_k) dx + 963 \cdot 1100 \int_{0,25}^{0,3} X_{1,k}^2(x, \omega_k) dx \end{aligned}$$

Підставляючи відповідні власні функції, отримаємо значення квадратів норм  $\|X_k\|^2$  власних функцій  $X_k(x, \omega_k)$

Таблиця 8.3. Квадрати норм власних функцій

$\ X_1\ ^2 = 32645,031$	$\ X_{14}\ ^2 = 15648,445$	$\ X_{27}\ ^2 = 24286,539$	$\ X_{40}\ ^2 = 17684,053$
$\ X_2\ ^2 = 16650,515$	$\ X_{15}\ ^2 = 23411,844$	$\ X_{28}\ ^2 = 17955,712$	$\ X_{41}\ ^2 = 14925,878$
$\ X_3\ ^2 = 18021,739$	$\ X_{16}\ ^2 = 18945,746$	$\ X_{29}\ ^2 = 14946,833$	$\ X_{42}\ ^2 = 16092,306$
$\ X_4\ ^2 = 27068,108$	$\ X_{17}\ ^2 = 15033,859$	$\ X_{30}\ ^2 = 16004,453$	$\ X_{43}\ ^2 = 24521,331$
$\ X_5\ ^2 = 16395,800$	$\ X_{18}\ ^2 = 15781,702$	$\ X_{31}\ ^2 = 24384,963$	$\ X_{44}\ ^2 = 17641,834$
$\ X_6\ ^2 = 15341,027$	$\ X_{19}\ ^2 = 23872,882$	$\ X_{32}\ ^2 = 17830,538$	$\ X_{45}\ ^2 = 14922,689$
$\ X_7\ ^2 = 20699,709$	$\ X_{20}\ ^2 = 18439,353$	$\ X_{33}\ ^2 = 14937,011$	$\ X_{46}\ ^2 = 16106,743$
$\ X_8\ ^2 = 22168,787$	$\ X_{21}\ ^2 = 14987,554$	$\ X_{34}\ ^2 = 16043,305$	$\ X_{47}\ ^2 = 24540,052$
$\ X_9\ ^2 = 15386,719$	$\ X_{22}\ ^2 = 15879,800$	$\ X_{35}\ ^2 = 24449,504$	$\ X_{48}\ ^2 = 17612,729$
$\ X_{10}\ ^2 = 15477,533$	$\ X_{23}\ ^2 = 24131,187$	$\ X_{36}\ ^2 = 17744,345$	$\ X_{49}\ ^2 = 14920,442$
$\ X_{11}\ ^2 = 22516,952$	$\ X_{24}\ ^2 = 18143,306$	$\ X_{37}\ ^2 = 14930,424$	$\ X_{50}\ ^2 = 16116,380$
$\ X_{12}\ ^2 = 19925,747$	$\ X_{25}\ ^2 = 14962,139$	$\ X_{38}\ ^2 = 16071,756$	
$\ X_{13}\ ^2 = 15130,950$	$\ X_{26}\ ^2 = 15951,650$	$\ X_{39}\ ^2 = 24492,585$	

Знайдемо тепер коефіцієнти Фур'є розвинення функції  $\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}$ , яка входить в праву частину рівняння (8.21) використавши (8.69)

$$\begin{aligned}
 u_k &= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u_i(x, \tau)}{\partial \tau} \cdot X_{ki}(x, \omega_k) \cdot c_i \rho_i dx = \\
 &= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \left( c_0 \rho_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u_0(x, \tau)}{\partial \tau} \cdot X_{0,k}(x, \omega_k) dx + c_1 \rho_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u_1(x, \tau)}{\partial \tau} \cdot X_{1,k}(x, \omega_k) dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \left( c_0 \rho_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \left( 20 + (145,166 + 374,622 \cdot x) \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) \right)}{\partial \tau} \cdot X_{0,k}(x, \omega_k) dx + \right. \\
 &\quad \left. + c_1 \rho_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \left( 20 + 238,821 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 580,664 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) (2,857 \cdot x - 0,714) \right)}{\partial \tau} \cdot X_{1,k}(x, \omega_k) dx \right)
 \end{aligned}$$

Підставляючи відповідні власні функції, отримаємо значення коефіцієнтів Фур'є розвинення функції  $\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}$

Таблиця 8.4. Коефіцієнти Фур'є розвинення функції

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}$$

$u_1 = \frac{1478,782}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{14} = \frac{-21,732}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{27} = \frac{8,12}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{40} = \frac{-3,23}{4,605\tau + 34,539}$
$u_2 = \frac{-477,183}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{15} = \frac{26,203}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{28} = \frac{-6,76}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{41} = \frac{2,224}{4,605\tau + 34,539}$
$u_3 = \frac{331,562}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{16} = \frac{-21,957}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{29} = \frac{4,515}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{42} = \frac{-2,53}{4,605\tau + 34,539}$
$u_4 = \frac{-279,011}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{17} = \frac{13,566}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{30} = \frac{-4,951}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{43} = \frac{3,17}{4,605\tau + 34,539}$
$u_5 = \frac{158,534}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{18} = \frac{-13,459}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{31} = \frac{6,14}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{44} = \frac{-2,65}{4,605\tau + 34,539}$
$u_6 = \frac{-97,3250}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{19} = \frac{16,431}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{32} = \frac{-5,12}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{45} = \frac{1,840}{4,605\tau + 34,539}$

$u_7 = \frac{104,418}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{20} = \frac{-13,719}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{33} = \frac{3,465}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{46} = \frac{-2,108}{4,605\tau + 34,539}$
$u_8 = \frac{-89,423}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{21} = \frac{8,768}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{34} = \frac{-3,87}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{47} = \frac{2,64}{4,605\tau + 34,539}$
$u_9 = \frac{50,213}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{22} = \frac{-9,12}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{35} = \frac{4,8}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{48} = \frac{-2,21}{4,605\tau + 34,539}$
$u_{10} = \frac{-40,431}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{23} = \frac{11,219}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{36} = \frac{-4}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{49} = \frac{1,547}{4,605\tau + 34,539}$
$u_{11} = \frac{47,392}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{24} = \frac{-9,35}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{37} = \frac{2,742}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{50} = \frac{-1,784}{4,605\tau + 34,539}$
$u_{12} = \frac{-40,018}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{25} = \frac{6,125}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{38} = \frac{-3,091}{4,605\tau + 34,539}$	
$u_{13} = \frac{23,613}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{26} = \frac{-6,57}{4,605\tau + 34,539}$	$u_{39} = \frac{3,86}{4,605\tau + 34,539}$	

Далі необхідно знайти коефіцієнти Фур'є розвинення функції  $f(x)$ . Знайдемо їх аналітичний вигляд нагадавши, що

$$f(x) = \varphi(x) - u(x, 0)$$

Отже, покладаючи  $\tau = 0$ , отримуємо

$$f_0(x) = \varphi_0(x) - u_0(x, 0) =$$

$$= 20 - \left( 20 + (145,166 + 374,622 \cdot x) \cdot \lg \left( 1 + \frac{8 \cdot 0}{60} \right) \right) =$$

$$= 20 - 20 \cdot 0 = 0$$

$$f_1(x) = \varphi_1(x) - u_1(x, 0) =$$

$$20 - \left( 20 + 238,821 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 580,664 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) (2,857 \cdot x - 0,714) \right) =$$

$$= 20 - 20 \cdot 0 + 0 = 0$$

Коефіцієнти Фур'є розвинення  $f(x)$

$$\begin{aligned}
 f_k &= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot X_{ki}(x, \omega_k) \cdot c_i \rho_i dx = \\
 &= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \left( c_0 \rho_0 \int_{x_0}^{x_1} f_0(x) \cdot X_{0,k}(x, \omega_k) dx + c_1 \rho_1 \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) \cdot X_{1,k}(x, \omega_k) dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \left( c_0 \rho_0 \int_{x_0}^{x_1} 0 \cdot X_{0,k}(x, \omega_k) dx + \right. \\
 &\quad \left. + c_1 \rho_1 \int_{x_1}^{x_2} 0 \cdot X_{1,k}(x, \omega_k) dx \right) = 0
 \end{aligned}$$

Отже, коефіцієнти Фур'є  $f_k$  розвинення початкової умови  $f(x)$  за системою власних функцій  $X_k(x, \omega_k)$  дорівнюють нулеві.

На кожному з проміжків  $[x_0, x_1)$  та  $[x_1, x_2]$  з використанням формули (8.80) розв'язок мішаної задачі можна записати у вигляді ряду

$$\begin{aligned}
 v_0(x, \tau) &= \sum_{k=1}^{50} \left[ f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot X_{k0}(x, \omega_k) = \\
 &= - \int_0^{\tau} e^{-0,00001892107059(\tau-s)} \frac{1478,782}{4,605 \cdot s + 34,539} ds \cdot \left( \frac{1}{4} \cos(4,547x) + 0,142 \sin(4,547x) \right) - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,0001675272885(\tau-s)} \frac{-477,183}{4,605s + 34,539} ds \cdot \left( \frac{1}{4} \cos(13,531x) + 0,0477 \sin(13,531x) \right) - \\
 &\quad \dots - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,1966180679(\tau-s)} \frac{-1,784}{4,605s + 34,539} ds \cdot \left( \frac{1}{4} \cos(463,556x) + 0,00139 \sin(463,556x) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_1(x, \tau) &= \sum_{k=1}^{50} \left[ f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot X_{k1}(x, \omega_k) = \\
 &= - \int_0^{\tau} e^{-0,00001892107059(\tau-s)} \frac{1478,782}{4,605 \cdot s + 34,539} ds \cdot (0,234 \cos(7,567x - 1,892) - 0,445 \sin(7,567x - 1,892)) - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,0001675272885(\tau-s)} \frac{-477,183}{4,605s+34,539} ds \cdot (-0,254 \cos(22,517x - 5,629) + 0,036 \sin(22,517x - 5,629)) - \\
 &\quad \dots - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,1966180679(\tau-s)} \frac{-1,784}{4,605s+34,539} ds \cdot (-0,234 \cos(771,413x - 192,853) - 0,232 \sin(771,413x - 192,853))
 \end{aligned}$$

**Зауваження!!!** В останніх формулах зображено лише два перших та останній члени ряду!

Остаточню, на кожному з проміжків  $[x_0, x_1]$  та  $[x_1, x_2]$  (тобто для кожного шару) аналітичний розв’язок задачі про нагрівання двошарової плоскої конструкції у випадку пожежі отримуємо з використанням формули (8.81) (метод редуцції)

$$\begin{aligned}
 t_0(x, \tau) &= u_0(x, \tau) + v_0(x, \tau) = \\
 &= \left( 20 + (145,166 + 374,622 \cdot x) \cdot \lg \left( 1 + \frac{8 \cdot \tau}{60} \right) \right) - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,00001892107059(\tau-s)} \frac{1478,782}{4,605 \cdot s + 34,539} ds \cdot \left( \frac{1}{4} \cos(4,547x) + 0,142 \sin(4,547x) \right) - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,0001675272885(\tau-s)} \frac{-477,183}{4,605s+34,539} ds \cdot \left( \frac{1}{4} \cos(13,531x) + 0,0477 \sin(13,531x) \right) - \\
 &\quad \dots - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,1966180679(\tau-s)} \frac{-1,784}{4,605s+34,539} ds \cdot \left( \frac{1}{4} \cos(463,556x) + 0,00139 \sin(463,556x) \right) \\
 t_1(x, \tau) &= u_1(x, \tau) + v_1(x, \tau) = \\
 &= \left( 20 + 238,821 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 580,664 \cdot \lg \left( 1 + \frac{8\tau}{60} \right) (2,857 \cdot x - 0,714) \right) - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,00001892107059(\tau-s)} \frac{1478,782}{4,605 \cdot s + 34,539} ds \cdot (0,234 \cos(7,567x - 1,892) - 0,445 \sin(7,567x - 1,892)) - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,0001675272885(\tau-s)} \frac{-477,183}{4,605s+34,539} ds \cdot (-0,254 \cos(22,517x - 5,629) + 0,036 \sin(22,517x - 5,629)) - \\
 &\quad \dots - \\
 &- \int_0^{\tau} e^{-0,1966180679(\tau-s)} \frac{-1,784}{4,605s+34,539} ds \cdot (-0,234 \cos(771,413x - 192,853) - 0,232 \sin(771,413x - 192,853))
 \end{aligned}$$

Підставляючи відповідні значення координати  $x$  та часу  $\tau$  отримуємо розподіл температурного поля у вигляді табл. 8.5 та рис. 8.2.

Таблиця 8.5. Розподіл нестационарного температурного поля по товщині двошарової плоскої стінки

Час	Координати шару, м								
	Температура середовища	Бетон						Гіпсоплита	Температура пожежі
		0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	
<b>0</b>	20	20	20	20	20	20	20	20	20
<b>10 хв</b>	20	20	20	20	20	20	20,75	366,85	678,43
<b>20 хв</b>	20	20	20	20	20	20,4	29,72	495,19	781,35
<b>30 хв</b>	20	20	20	20	20,14	22,7	46,24	576,11	841,8
<b>45 хв</b>	20	20	20,01	20,11	21,39	30,87	75,47	657,99	902,34
<b>1 год</b>	20	20,01	20,07	20,66	24,62	43,14	104,48	714,66	945,34
<b>2 год</b>	20	21,52	23,5	31,53	53,57	103,6	199,16	841,7	1049
<b>4 год</b>	20	44,26	54,53	81,65	131,16	209,77	323,26	960,55	1152,8
<b>6 год</b>	20	86,61	104,49	142,8	204,7	293,1	410,1	1030,23	1213,5



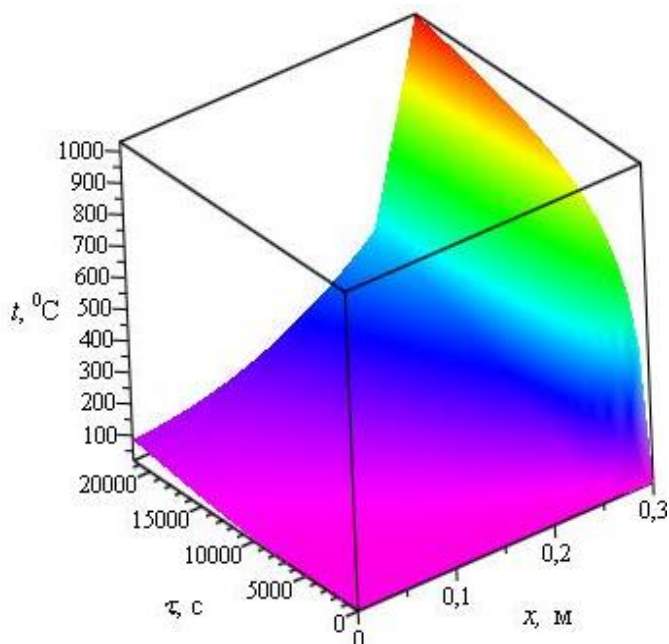


Рис 8.2. Об'ємний графік розподілу температурного поля

### 8.7. Алгоритм обчислення температурного поля двошарової плоскої конструкції у системі комп'ютерної алгебри Maple

```

> restart
> Digits := 6
> n := 2; k := 50;
> x0 := 0; x1 := 0.25; x2 := 0.3;
> c0 := 770; c1 := 963
> ρ0 := 2200; ρ1 := 1100;
> λ0 := 1.55; λ1 := 0.35;
> α0 := 4; α1 := 25;
> P := Matrix([[α0, -1], [0, 0]]); Q := Matrix([[0, 0], [α1, 1]]); Γ := Vector([α0ψ0(τ), α1ψ1(τ)]);
> ψ0 := unapply(20, τ); ψ1 := unapply(345 · log10(8 · τ / 60 + 1) + 20, τ);
> for p from 0 to n-1 do φp := unapply(20, x) end do;

```

```

> with(linalg); printlevel := 3;
> bx :=  $\frac{x - x_{i-1}}{\lambda_{i-1}}$ ; b :=  $\frac{x_i - x_{i-1}}{\lambda_{i-1}}$ ;
> for i from 1 to n do Bri-1 := Matrix([[1, bx], [0, 1]]) end do;
> for i from 1 to n do Bi-1 := Matrix([[1, b], [0, 1]]) end do;
> Bk0 := B0; for i from 1 to n-1 do Bki := evalm(Bki-1 &* Bi) end do;
> U0 := evalm((inverse(evalm(P+(Q &* Bkn-1)))) &*(Γ));
> for i from 1 to n-1 do Ui := evalm((Bi-1) &* Ui-1) end do;
> Un := evalm(Bn-1 &* Un-1);
> for i from 1 to n do Uri-1 := evalm(Bri-1 &* Ui-1) end do
> for i from 1 to n do ui-1 := unapply(Uri-1[1], x, τ) end do

> bω11 := cos  $\left( \sqrt{\frac{\omega \cdot c_{z-1} \cdot \rho_{z-1}}{\lambda_{z-1}} \cdot (x_z - x_{z-1})} \right)$ ; bω12 :=  $\frac{\sin \left( \sqrt{\frac{\omega \cdot c_{z-1} \cdot \rho_{z-1}}{\lambda_{z-1}} \cdot (x_z - x_{z-1})} \right)}{\lambda_{z-1} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot c_{z-1} \cdot \rho_{z-1}}{\lambda_{z-1}}}}$ ;

> bω21 :=  $-\lambda_{z-1} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot c_{z-1} \cdot \rho_{z-1}}{\lambda_{z-1}}} \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{\omega \cdot c_{z-1} \cdot \rho_{z-1}}{\lambda_{z-1}} \cdot (x_z - x_{z-1})} \right)$ ;

bω22 := cos  $\left( \sqrt{\frac{\omega \cdot c_{z-1} \cdot \rho_{z-1}}{\lambda_{z-1}} \cdot (x_z - x_{z-1})} \right)$ ;

> for z from 1 to n do Bz-1 := Matrix([[bω11, bω12], [bω21, bω22]]) end do;
> Bhn-1 := Bn-1; for i from n-1 by -1 to 1 do Bhi-1 := evalm(Bhi &* Bi-1) end do
> φ := unapply(det(evalm(P+(Q &* Bh0))), ω);
> Digits := 20; with(RootFinding);
> ω1 := NextZero(ω → φ(ω), 0, guardDigits = 500, maxdistance = 1010);
> for i from 1 to k-1 do ωi+1 := NextZero(ω → φ(ω), ωi, guardDigits = 500, maxdistance = 1010) end do;
> unwith(RootFinding); Digits := 10; with(linalg);

> b11 := cos  $\left( \sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}} \cdot (x_m - x_{m-1})} \right)$ ; br11 := cos  $\left( \sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}} \cdot (x - x_{m-1})} \right)$ ;

> b12 :=  $\frac{\sin \left( \sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}} \cdot (x_m - x_{m-1})} \right)}{\lambda_{m-1} \cdot \sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}}}}$ ; br12 :=  $\frac{\sin \left( \sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}} \cdot (x - x_{m-1})} \right)}{\lambda_{m-1} \cdot \sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}}}}$ ;

```

$$> b_{21} := -\lambda_{m-1} \cdot \sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}}} \cdot (x_m - x_{m-1})\right);$$

$$> br_{21} := -\lambda_{m-1} \cdot \sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}}} \cdot (x - x_{m-1})\right);$$

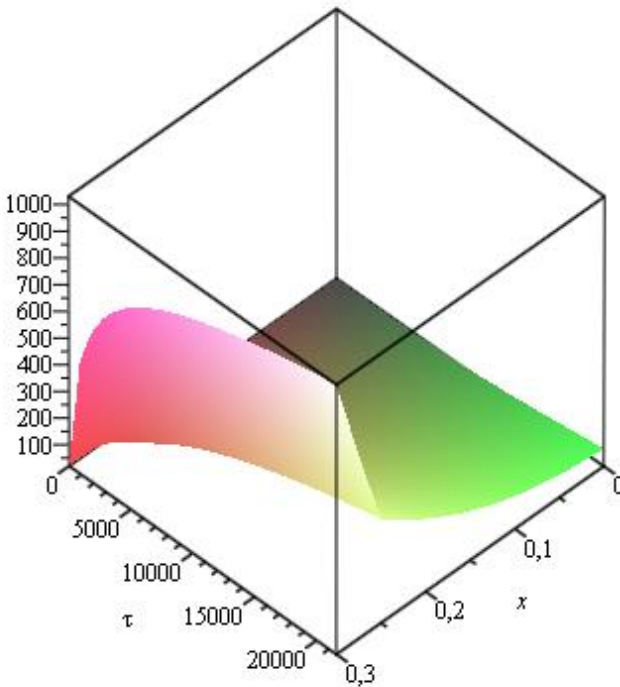
$$> b_{22} := \cos\left(\sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}}} \cdot (x_m - x_{m-1})\right); \quad br_{22} := \cos\left(\sqrt{\frac{\omega_y \cdot c_{m-1} \cdot \rho_{m-1}}{\lambda_{m-1}}} \cdot (x - x_{m-1})\right);$$
**> for m from 1 to n do for y from 1 to k do  $B_{m-1,y} := \text{Matrix}([b_{11}, b_{12}], [b_{21}, b_{22}])$  end do end do;**  
**> for m from 1 to n do for y from 1 to k do  $Br_{m-1,y} := \text{Matrix}([br_{11}, br_{12}], [br_{21}, br_{22}])$  end do end do;**  
**> for y from 1 to k do  $Brp_{0,y} := B_{0,y}$  end do;**  
**> for i from 0 to n-2 do for y from 1 to k do  $Brp_{i+1,y} := \text{evalm}(B_{i+1,y} \&* Brp_{i,y})$  end do end do;**  

$$> A := \text{Vector}\left(\left[\frac{1}{\alpha_0}, 1\right]\right);$$
**> for y from 1 to k do  $Xk_{0,y} := \text{evalm}(\text{vector}([1, 0]) \&* Br_{0,y} \&*(A))$  end do;**  
**> for i from 1 to n-1 do for y from 1 to k do  $Xk_{i,y} := \text{evalm}(\text{vector}([1, 0])$   
 $\&* Br_{i,y} \&* Brp_{i-1,y} \&*((A)))$  end do end do;**  
**> for i from 0 to n-1 do for y from 1 to k do  $\Phi k_{i,y} := c_i \cdot \rho_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (Xk_{i,y})^2 dx$  end do end do**  
**> for y from 1 to k do  $\text{NormX}_y := \text{sum}(\Phi k_{d,y}, d = 0..n-1)$  end do;**  
**> for i from 0 to n-1 do for y from 1 to k do  $fk_{i,y} := \frac{c_i \cdot \rho_i}{\text{NormX}_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\varphi_i(x) -$   
 $-u_i(x, 0)) \cdot Xk_{i,y}) dx$  end do end do;**  
**> for y from 1 to k do  $fk_y := \text{sum}(fk_{d,y}, d = 0..n-1)$  end do;**  
**> for i from 0 to n-1 do for y from 1 to k do  $uk_{i,y} := \frac{c_i \cdot \rho_i}{\text{NormX}_y} \cdot$   
 $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(u_i(x, \tau))\right) \cdot Xk_{i,y}\right) dx$  end do end do;**  
**> for y from 1 to k do  $uk_y := \text{sum}(uk_{d,y}, d = 0..n-1)$  end do**  
**> for i from 1 to k do  $us_i := \text{subs}(\tau = s, uk_i)$  end do;**  
**> for i from 0 to n-1 do for y from 1 to k do  $v_{i,y} := \left(fk_y \cdot e^{-\omega_y \cdot \tau} - \int_0^\tau e^{-\omega_y \cdot (\tau-s)} \cdot us_y ds\right)$**

```

( $Xk_{i,y}$ ) end do end do;
> for i from 0 to n-1 do  $v_i := \text{unapply}\left(\sum_{q=1}^k v_{i,q}, x, \tau\right)$  end do;
> for i from 0 to n-1 do  $t_i := \text{unapply}(u_i(x, \tau) + v_i(x, \tau), x, \tau)$  end do;
> with(plots);
> for i from 0 to n-1 do  $f_i := \text{plot3d}(t_i(x, \tau), x = x_i..x_{i+1}, \tau = 0..0.6 \cdot 3600, \text{axes} = \text{boxed},$ 
  style = surface) end do;
> display({ $f_0, f_1$ });

```



## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики : курс лекцій / Перестюк М. О., Маринець В. В. – Київ : Либідь, 1993. – 248 с.

2. Гащук П. М. Лінійні динамічні системи і звичайні диференціальні рівняння : навч. посібн. / Гащук П. М. – Львів : Українські технології, 2002. – 608 с.

3. Кузик А. Д. Вища математика: у 2-ох ч.: навч. посібн. / Кузик А. Д., Карабин О. О., Трусевич О. М. ; ЛДУБЖД. – Львів : СПОЛОМ, 2014. – Ч.1. – 400 с.

4. Кузик А. Д. Вища математика: у 2-ох ч.: навч. посібн. / Кузик А. Д., Карабин О. О., Трусевич О. М. ; ЛДУБЖД. – Львів : СПОЛОМ, 2014. – Ч.2. – 215 с.

5. Каленюк П. І. Диференціальні рівняння : навч. посібн. / Каленюк П. І., Рудавський Ю. К., Тацій Р. М., Ключник І. Ф., Колісник В. М., Костробій П. П., Олексів І. Я. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2014. – 380 с.

6. Тацій Р. М. Прямий метод розрахунку нестационарного температурного поля за умов пожежі / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека : зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2015. – № 26. – С. 135-141.

7. Каленюк П. І. Збірник задач з диференціальних рівнянь : навч. посібн. / Каленюк П. І., Костробій П. П., Нитребич З. М., Тацій Р. М., Рудавський Ю. К., Андрусак І. В., Бобик І. О., Зашкільняк І. М., Олексів І. Я., Стасюк М. Ф. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. – 236 с.

*Навчальне видання*

**ТАЦІЙ Роман  
СТАСЮК Марта  
ПАЗЕН Олег**

**ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ  
ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Літературний редактор **Галина ПАДИК**

Комп'ютерна верстка,  
технічний редактор та  
відповідальний за випуск: **Микола ФЛЬОРКО**

Підписано до друку 10.02.2021 р.  
Формат 60×84/16. Гарнітура Times New Roman.  
Друк на різнографі. Папір офсетний. Наклад 300.  
Ум. друк. арк. 11,4.

Видавництво Львівського державного університету безпеки життєдіяльності  
79007, Україна, м. Львів, вул. Клепарівська, 35. Тел. /факс: (032) 233-00-88.  
E-mail: vydavnytvo@ldubgd.edu.ua. Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції:  
Серія ДК, № 7249 від 09.02.2021 р.

Друк ЛДУ БЖД  
м. Львів, вул. Клепарівська, 35. Тел. /факс: (032) 233-00-88.